TP Matrix multiplication
Analyse de performance

Axel Fahy & Jessy Marin & Rudolf Höhn

December 20, 2015

1 Fox

1.1 Complexité

Pour trouver la complexité totale, on doit séparer le problème. On doit trouver la complexité pour le broadcast de T, la création de la matrice S et de la multiplicaiton matricielle. Dans les formules, $\beta = T_{bandepassante}, \alpha = T_{execution}$.

- **Nombre d'étapes** $= \sqrt[2]{p}$ (p = nombre de processeurs)
- $\boldsymbol{T_{broadcast}} = \beta \frac{n^2}{p} log_2(\sqrt[2]{p}) = \beta \frac{n^2}{p} \frac{log_2(p)}{2}$
- $\boldsymbol{T_{shift}} = \beta \frac{n^2}{p}$
- $\boldsymbol{T_{communication}} = T_{broadcast} + T_{shift}$
- $\boldsymbol{T_{multiplication}}$
  Il y a $\sqrt[2]{p}$ étapes et donc le même nombre de multiplication de sous-matrices.
  La taille des sous-matrices à multiplier est de $(\frac{n}{\sqrt[2]{p}} \cdot \frac{n}{\sqrt[2]{p}})$
  La complexité du calcul est donc : $\alpha \sqrt[2]{p} \cdot (\frac{n}{\sqrt[2]{p}})^3 = \alpha \frac{n^3}{p}$
- $\boldsymbol{T_{par}} =$

La complexité totale est donc :

$$\boldsymbol{T_{par}} = T_{communication} + T_{calc} = \frac{\alpha n^3}{p} + \beta \frac{n^2}{\sqrt[2]{p}} (\frac{log_2(p)}{2} + 1)$$

1.2 Speedup

Le speedup théorique est : $S = \frac{T_{seq}}{T_{par}}$. Dans notre cas, le speedup est :

$$S = \frac{n^3}{\frac{\alpha n^3}{p} + \beta \frac{n^2}{\sqrt[2]{p}} (\frac{log_2(p)}{2} + 1)}$$

1.3 Efficacité

$$E(p) = \frac{S(p)}{p} = \frac{\frac{n^3}{\frac{\alpha n^3}{p} + \beta \frac{n^2}{\sqrt[2]{p}} (\frac{log_2(p)}{2} + 1)}}{p}$$

1.4 Isoefficacité

Pour atteindre une efficacité constante, il faut que n soit égal à $n = c \sqrt[2]{p} (\frac{log_2(p)}{2} + 1)$

2 Cannon

2.1 Complexité

Pour calculer la complexité il faut d'abord calculer le poid de toutes les manipulations :
($\beta = T_{bandepassante}, \alpha = T_{execution}$, p = nombre de processeurs)

- **Construction des matrices T(k) et S(k)**
  $\sqrt[2]{p} \cdot \beta \cdot \frac{n^2}{p}$
- **Temps de communication**
  $2 \cdot \sqrt[2]{p} \cdot \beta \cdot \frac{n^2}{p} = 2 \cdot \beta \cdot \frac{n^2}{\sqrt[2]{p}}$
- **Temps de Calcul**
  - **Addition :** $(\sqrt[2]{p} - 1) \cdot \alpha \cdot (\frac{n}{\sqrt[2]{p}})^2 = (\sqrt[2]{p} - 1) \cdot \alpha \cdot \frac{n^2}{p}$
  - **Multiplication :** $\sqrt[2]{p} \cdot \alpha(\frac{n}{\sqrt[2]{p}})^3 = \sqrt[2]{p} \cdot \alpha \cdot \frac{n^3}{p^2} = \alpha \cdot \frac{n^3}{p}$
  - **Total :** $\alpha \cdot \frac{n^3}{p}$ $\boxed{+(\sqrt[2]{p} - 1) \cdot \alpha \cdot \frac{n^2}{p}}$ le temps de l'addition est négligeable

Ensuite nous pouvons calculer le temps séquentiel et parallèle :

- Séquentiel :
  $T_{seq}(n \times n) = \alpha \cdot n^3$
- Parallèle :
  $T_{par}(p, n) = T_{calcul} + T_{Communication} = \alpha \cdot \frac{n^3}{p} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{n^2}{\sqrt[2]{p}}$

2.2 Speedup

Pour le Speedup nous reprenons la formule de base :

$$Speedup = \frac{T_{seq}}{T_{par}}$$

Et ajoutons les calculs précédent calculé :

$$Speedup = \frac{\alpha \cdot n^3}{\alpha \cdot \frac{n^3}{p} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{n^2}{\sqrt[2]{p}}} = \frac{p}{1 + \frac{2 \cdot \beta}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt[2]{p}}{n}}$$

2.3 Efficacité

Reprise de la formule de base :

$$E(p, n \times n) = \frac{T_{seq}}{p \cdot T_{par}}$$

Ajout des calculs précédent :

$$E(p, n \times n) = \frac{\alpha \cdot n^3}{p \cdot (\alpha \cdot \frac{n^3}{p} + 2 \cdot \beta \cdot \frac{n^2}{\sqrt[2]{p}})} = \frac{\alpha \cdot n^3}{\alpha \cdot n^3 + 2 \cdot \beta \cdot \sqrt[2]{p} \cdot n^2} = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot \beta}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt[2]{p}}{n}}$$

3 DNS

Nous étudions le cas où le nombre de processeurs est différent de la taille des matrices, c'est-à-dire que $p < n$. Nos matrices A et B sont de tailles $\frac{n}{p} \times \frac{n}{p}$.
($\beta = T_{bandepassante}, \alpha = T_{execution}$, p^3 = nombre de processeurs)

3.1 Complexité

Pour calculer la complexité, il faut séparer l'algorithme en trois parties distinctes qui sont le broadcast des matrices A et B, la multiplication locale des matrices locales, et enfin, la réduction vers C en sommant les matrices locale.

- $T_{Broadcast} = \beta \cdot \frac{n^2}{p^2} \cdot log_2(p)$
- $T_{Mult.Locale} = \alpha \cdot \frac{n^3}{p^3}$
- $T_{Reduction} = (\alpha + \beta) \cdot \frac{n^2}{p^2} \cdot log_2(p)$

En total, nous avons un T_{Par} égal à :

$$T_{Par}(p^3, n \times n) = \beta \cdot \frac{n^2}{p^2} \cdot log_2(p) + \alpha \cdot \frac{n^3}{p^3} + (\alpha + \beta) \cdot \frac{n^2}{p^2} \cdot log_2(p)$$
$$T_{Par}(p^3, n \times n) = (\alpha + 2 \cdot \beta) \cdot \frac{n^2}{p^2} \cdot log_2(p) + \alpha \cdot \frac{n^3}{p^3}$$

Il est différent à T_{Seq} qui est égal à : $T_{Seq} = \alpha \cdot \frac{n^3}{p^3}$

3.2 Speedup

Le speedup théorique est : $S = \frac{T_{seq}}{T_{par}}$. Dans notre cas, le speedup est :

$$S = \frac{\alpha \cdot \frac{n^3}{p^3}}{(\alpha + 2 \cdot \beta) \cdot \frac{n^2}{p^2} \cdot log_2(p) + \alpha \cdot \frac{n^3}{p^3}} = \frac{p^3}{1 + (1 + \frac{2 \cdot \beta}{\alpha} \cdot \frac{p}{n} log_2(p)}$$

3.3 Efficacité

$$E(p^3, n \times n) = \frac{S(p)}{p^3} = \frac{1}{1 + (1 + \frac{2 \cdot \beta}{\alpha} \cdot \frac{p}{n} log_2(p))}$$

3.4 Isoefficacité

Pour atteindre une efficacité constante, il faut que n soit égal à $n = p \cdot log_2(p)$.