

# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 2: Fyzika

## Počítačové modelování dynamických magnetických systémů

Ondřej Sedláček

Hlavní město Praha

Praha, 2023



# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 2: Fyzika

## Počítačové modelování dynamických magnetických systémů

Computer modelling of dynamic magnetic  
systems

**Jméno:** Ondřej Sedláček

**Škola:** Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 621, 150 00  
Malá Strana

**Kraj:** Hlavní město Praha

**Konzultant:** RNDr. Pavel Josef, CSc.

Praha, 2023



# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval samostatně a použil jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.

Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších předpisů.

V Praze dne 9. září 2023 .....

Ondřej Sedláček



# Poděkování

Chtěl bych poděkovat ...





## Anotace

Sem napišeš svůj abstrakt. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## Klíčová slova

Šablona, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, SOČ, ...

## Annotation

Write your abstract here! Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## Keywords

Template, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, High school professional activity, ...



# OBSAH

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
1.1	Nomenklatura . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Úvodní sledování</b>	<b>5</b>
2.1	Určení parametrů . . . . .	6
2.1.1	Parametry týkající se konfigurace spinnerů . . . . .	6
2.1.2	Parametry týkající se pohybu spinnerů . . . . .	7
2.2	Modelování magnetů . . . . .	8
2.3	Popis magnetických interakcí . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Měření parametrů</b>	<b>9</b>
3.1	Rozměry spinneru . . . . .	9
3.2	Moment setrvačnosti . . . . .	9
3.2.1	Aparatura . . . . .	10
3.2.2	Analýza měření a výsledky . . . . .	10
3.2.3	Popis skriptu . . . . .	11
3.3	Remanence $\vec{B}_r$ . . . . .	13
3.3.1	Určení remanence přes magnetické pole . . . . .	13
	Analýza měření . . . . .	13
3.3.2	Určení remanence přes sílu . . . . .	15
3.3.3	Výsledky . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Tření</b>	<b>17</b>
4.1	Analytický popis . . . . .	18
4.1.1	Maximální doba otáčení . . . . .	18
	Horní limit doby otáčení $n$ spinnerů . . . . .	19
	Důkaz . . . . .	20
4.1.2	Určení jednotek parametrů $\alpha$ , $\beta$ a $\gamma$ . . . . .	20
4.1.3	Experiment pro potvrzení analytického řešení . . . . .	21
	Aparatura . . . . .	21
	Zpracování dat . . . . .	21
4.1.4	Výsledky a porovnání se simulací . . . . .	23
4.1.5	Zhodnocení použití lineárního koeficientu . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Simulace</b>	<b>27</b>

---

5.1	Popis způsobu simulování . . . . .	27
5.1.1	Runge-Kutta metody . . . . .	27
5.2	Pravidla systému . . . . .	29
5.3	Implementace . . . . .	30
5.3.1	Použité datové struktury . . . . .	30
	3D vektory . . . . .	30
	Spinnery . . . . .	31
	$\Omega$ -stavy . . . . .	32
	$\Phi$ -stavy . . . . .	34
5.3.2	Popis iteračního kroku . . . . .	34
5.3.3	Simulační kontext . . . . .	35
5.3.4	Časová komplexita . . . . .	37
5.3.5	Webové rozhraní . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Potvrzení simulace</b>	<b>39</b>
6.1	Vysokorychlostní video . . . . .	39
6.1.1	Aparatura . . . . .	39
6.1.2	Proces trackování . . . . .	40
6.1.3	Výsledky měření při 60fps . . . . .	40
6.1.4	Výsledky měření při 1000fps . . . . .	41
<b>7</b>	<b>Magnetické vázání</b>	<b>43</b>
7.1	Měření magnetickým čidlem . . . . .	43
7.2	Hlubší analýza . . . . .	44
7.2.1	Popis nového algoritmu . . . . .	45
7.3	Vylepšení aparatury . . . . .	48
7.3.1	Laserový snímač (LS) . . . . .	48
7.3.2	Zbytek aparatury . . . . .	48
7.3.3	Výsledky měření . . . . .	49
<b>8</b>	<b>Přenos momentu síly</b>	<b>51</b>
8.1	Úprava aparatury . . . . .	51
8.2	Popis chování . . . . .	52
8.2.1	Hrubý matematický model . . . . .	52
8.2.2	Měřená $\tau - \omega$ závislost . . . . .	54
8.3	Měření přenosu . . . . .	55
<b>9</b>	<b>Magnetické převodovky</b>	<b>57</b>

# 1 ÚVOD

Motivací pro tuto práci byla úloha mezinárodní fyzikální soutěže zvané "*International Young Physicists Tournament*", neboli IYPT. U nás je však tato soutěž známější pod zkratkou TMF vycházející z překladu původního názvu - "*Turnaj mladých fyziků*". Soutěž se v České republice koná pod záštitou Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT, FZU AV ČR, MŠMT a JČMT. Podstatou soutěže je dovést středoškolské studenty k vědeckému sledování nejrůznějších jevů ze všech oblastí fyziky.

Úloha, kterou jsme se zabývali, je v pořadí desáta úloha letošního, tedy 37., ročníku. Zadání je následovné [7]:

## 10. Magnetický převod

*"Vezměte několik identických prstových točíték<sup>1</sup> a připevněte k jejich koncům neodymové magnety. Pokud umístíte točítka v rovině vedle sebe a točíte jedním z nich, ostatní se začnou otáčet jen vlivem magnetického pole. Prozkoumejte a vysvětlete tento jev."*

Zadání úlohy je, pro TMF tradičně, velmi otevřené a je tedy pouze na řešiteli, aby si vymezil přesný rozsah svého zkoumání. Tato práce se bude zabývat:

1. určením vlastností *prstových točíték* (dále "fidget spinner" či pouze "spinner"),
2. popisem třecích sil působících na spinner,
3. vývojem simulace chování systémů více fidget spinnerů a porovnáním této simulace s realitou,
4. přenosem úhlové rychlosti,
5. přenosem momentu síly,
6. možným využitím získaných poznatků k vývoji efektivnějších magnetických převodů,
7. vývojem a zkoumáním mnou navržených magnetických převodovek.

---

<sup>1</sup>Z překladu anglického "Fidget spinner".

## 1.1 NOMENKLATURA

V tabulce 1 definujeme základní symboly, které budeme používat v průběhu celé práce, společně s jejich významem:

Tab. 1: Nomenklatura

Vlastnosti spinneru			
Symbol	Jednotka	Popis	Poznámka
$n$		Celkový počet ramen	Ekvivaletní počtu magnetů
$r$	$m$	Poloměr spinneru	Ekvivaletní vzdálenosti osy otáčení od magnetů
$S$	$(m, m, 0)$	Střed spinneru v rovině	(tzn. pozice osy otáčení)
$P(i)$	$(m, m, 0)$	Pozice $i$ . magnetu spinneru	Funkce indexu magnetu
$\varphi$	rad	Úhel rotace spinneru	
$\omega$	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	Úhlová rychlost spinneru	
$I$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Moment setrvačnosti spinneru	
$\alpha$	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$	Koeficient rychlostně nezávislého brzdného úhlového zrychlení	viz Kap. 4
$\beta$	$\text{s}^{-1}$	Koeficient lineárně závislého brzdného úhlového zrychlení	viz Kap. 4
$\gamma$	$\text{rad}^{-1}$	Koeficient kvadraticky závislého brzdného úhlového zrychlení	viz Kap. 4
$c_1, t_{\max}$	$s$	Celková doba točení spinneru	viz Kap. 4

Vlastnosti magnetu			
Symbol	Jednotka	Popis	Poznámka
$\vec{m}$	$A \cdot \text{m}^2$	Magnetický moment	
$\vec{B}_r$	$T$	Remanentní magnetizace	(tzv. remanence)
$V$	$\text{m}^3$	Objem magnetu	
$F_m(\vec{r}, \vec{m}_1, \vec{m}_2)$	$N$	Silová interakce mezi magnetickými momenty $\vec{m}_1$ a $\vec{m}_2$ vzdálenými o $\vec{r}$	[1]
$B(\vec{r}, \vec{m})$	$T$	Magnetická indukce tvořená magnetickým momentem $\vec{m}$ ve vzdálenosti $\vec{r}$	[1, 2]
$\tau_F, \tau_{\text{mag}}$	$Nm$	Momenty sil působící na spinner vycházející ze silové a magnetické interakce	[2, 3], viz Rov. 31

Dále stojí za zmínku, že pro vyjádření chyby měření může být v textu použita tzv. *shorthand error notation* [5] (pro naše účely zkráceno na SEN). Pro jasnost uvedeme příklad, kde zápis pomocí SEN vypadá takto: 11.5(12), a ekvivalentní přepis do standardní notace je:  $11.5 \pm 1.2$ . Tímto zkrátíme zápis  $11.5 \pm 1.2$  na 11.5(12) [6].

## 2 ÚVODNÍ SLEDOVÁNÍ

Prvním krokem v řešení této úlohy bylo kvalitativní sledování chování spinnerů v několika konfiguracích. Účelem tohoto bylo určení relevantních parametrů a seznámení se s problémem.

Hlavním poznatkem je, že dochází ke změně chování systému dvou spinnerů v závislosti na jejich relativních rychlostech. Máme-li na stole 2 spinnery, ze kterých je jeden nehybný, a druhý roztočíme na nízkou rychlost, dojde po krátké chvíli k silné a chaotické interakci (záznam experimentu je k vidění v příloze 1). Naopak, roztočíme-li druhý spinner značně rychleji, nedochází téměř k žádné interakci (viz příloha 2). Druhý spinner se prvnímu spinneru efektivně jeví jako permanentí magnet - první spinner se tedy nanejvýše umístí do energeticky nejvýhodnější polohy a dále zůstává nehybný. Dalším cenným poznatkem je, že při interakci více spinnerů se systém chová chaoticky téměř vždy (viz příloha 3). Toto dělá měření interakcí více jak dvou spinnerů složité a za účelem získání použitelných výsledků omezíme náš výzkum pouze na jeden či dva spinnery. Po vytvoření fyzikálního modelu pro popsání menšího počtu spinnerů se pokusíme o vývoj simulace, která by dovolila větší počty spinnerů.

Ze zadání můžeme také vyčíst další užitečná omezení. O umístění všech spinnerů je řečeno, že mají být v "*jedné*) rovině vedle sebe". Dále má docházet k točení pouze "*jedním z nich*" a interakce mezi spinnery mají probíhat pouze na bázi "*vlivů magnetického pole*". Neměli bychom opomenout ani skutečnost, že všechny spinnery mají být "*identické*".



Obr. 1: Spinner osazený neodymovými magnety



Obr. 2: Tři interagující spinnery

## 2.1 URČENÍ PARAMETRŮ

Z úvodního sledování není těžké určit relevantní parametry a vybrat, které z nich je možné s naším vybavením měřit. Vybranými parametry se budeme zabývat v následujících kapitolách.

### 2.1.1 Parametry týkající se konfigurace spinnerů

Jakožto nejdůležitější bychom určitě označili relativní pozice všech spinnerů, které popíšeme pomocí jejich středů  $S_1, S_2, \dots$  (každý střed je bráný jako vektor v rovině spinnerů) a jejich poloměrů  $r_1, r_2, \dots$ . Dále bude k přesnému určení pozic magnetů nezbytné znát okamžitý úhel rotace každého spinneru. Ty označíme  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ . Nakonec k popsání spinneru musíme určit počet ramen (neboli počet připevněných magnetů). Tento počet označíme  $n$ . V našem případě je roven 3.

Pomocí těchto údajů je triviální vyjádřit pozici  $P(i)$  libovolného magnetu jeho indexem  $i$  (kde  $0 \leq i < n$ ):

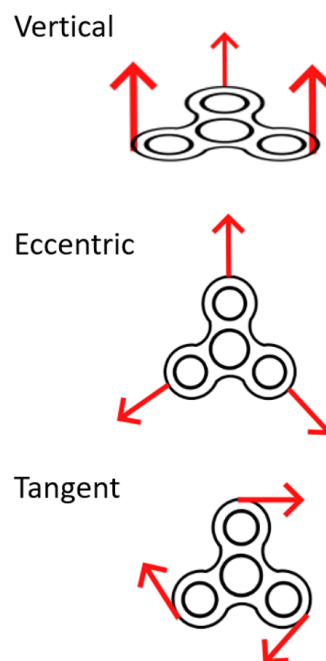
$$P(i) = S + \left( r \cos \left( \varphi + \frac{2\pi i}{n} \right), r \sin \left( \varphi + \frac{2\pi i}{n} \right), 0 \right) \quad (1)$$

Kromě pozice magnetu hraje také klíčovou roli nasměrování jeho pólů. Zde definujeme 3 důležité orientace (viz Obr. 3):

1. **Vertikální** (*vertical*)
2. Odstředivá (*eccentric*)
3. Tečná (*tangent*)

V našich experimentech jsme používali převážně vertikální konfiguraci, jelikož takto bylo uchycení magnetů nejjednodušší, protože se magnety samy připevnilly ke kovovému závaží umístěnému v každém z ramen spinneru (viz Obr. 1). Ta jsou zde za účelem zvýšení momentu setrvačnosti spinneru.

Tyto konfigurace jsme také schopni popsat, a to opět jakožto funkci indexu magnetu. Nejdříve vyjádříme směrový vektor magnetického momentu  $\vec{u}(i)$  pro  $i$ . magnet v každé konfiguraci (viz Tab. 2)



Obr. 3: Námi vyhrazené orientace magnetů



Tab. 2: Směrové vektory pro různé konfigurace

Konfigurace	Směrový vektor magnetu
Vertikální	$\vec{u}(i) = (0, 0, 1)$
Odstředivá	$\vec{u}(i) = \widehat{P(i) - S}$
Tečná	$\vec{u}(i) = (0, 0, 1) \times \widehat{P(i) - S}$

Když nyní zvolíme velikost magnetického momentu našich magnetů  $|\vec{m}_0|$ , jsme schopni popsat magnetický moment včetně jeho velikosti<sup>2</sup>:

$$\vec{m} = |\vec{m}_0| \cdot \vec{u}(i) \quad (2)$$

Velikost magnetických momentů bude záviset na teplotě, velikosti a materiálových vlastnostech magnetů (např. jejich chemickém složení a kvalitě). Ale to, jaká je pravá velikost magnetických momentů našich magnetů, je momentálně nepodstatné a určíme ji později (viz Kap. 3.3).

Posledním parametrem, který zmíníme v této části je, zda se magnety přitahují, či odpuzují. V našem případě jsme se zaměřili na systémy, kde se všechny magnety odpuzují.

### 2.1.2 Parametry týkající se pohybu spinnerů

Druhou, složitější, částí popisu našeho systému je jeho pohyb a chování v čase. Zde se nevyhneme úhlovým rychlostem jednotlivých spinnerů, které budeme značit  $\omega_1, \omega_2, \dots$ . Poté nás přirozeně zajímají i jejich úhlová zrychlení  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ . Pro naše výpočty bude také často potřeba využít definice momentu síly a proto ji zmíníme. Definující závislost je následující:  $\tau = I\alpha$  (kde  $\tau$  značí moment síly a  $I$  značí moment setrvačnosti<sup>3</sup> spinneru). Určení momentu setrvačnosti bude věnována vlastní kapitola (viz Kap. 3.2).

Posledním dynamickým parametrem, který zmíníme, je tření v ložiscích spinnerů a jiné odporové síly působící na spinner. Těm se budeme do hloubky věnovat v kapitole 4.

<sup>2</sup>Všimněme si, že  $u(i) = \hat{u}(i)$ .

<sup>3</sup>Někdy také značeno  $J$ .

## 2.2 MODELOVÁNÍ MAGNETŮ

V průběhu našich experimentů používáme neodymové (NdFeB) magnety krychlového tvaru o hraně 5mm a jakosti N35<sup>4</sup>. Toto standardní označení jakosti neodymových magnetů popisuje jejich chemické složení, tepelnou odolnost a hlavně magnetickou sílu [8], která je popsána pomocí tzv. remanentní magnetizace, neboli remanence.

Jelikož jsou magnety poměrně malé, můžeme je ve větších vzdálenostech aproximovat jakožto magnetické dipóly. Zároveň existuje velmi elegantní způsob, jak vypočítat velikost magnetického dipólu z jeho remanence [2]:

$$|\vec{m}_0| = \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}_r| V \quad (3)$$

Tabulkové hodnoty pro remanenci NdFeB magnetů jsou sice známé, ale v našem případě budeme přesnou hodnotu  $|\vec{B}_r|$  našich magnetů měřit později, v kapitole 3.3.

## 2.3 POPIS MAGNETICKÝCH INTERAKCÍ

Jelikož k popisu magnetů používáme idealizaci pomocí magnetických dipólů, můžeme popsat interakce mezi nimi pomocí následujících rovnic. Hlavní interakce mezi dvěma magnetickými dipóly jsou:

1. Silové interakce [1] mezi dvěma momenty  $\vec{m}_1$  a  $\vec{m}_2$ , které jsou od sebe vzdáleny<sup>5</sup>  $\vec{r}$ :

$$F_m(r, m_1, m_2) = \frac{3\mu_0}{4\pi ||r||^5} \left[ (m_1 \cdot r)m_2 + (m_2 \cdot r)m_1 + (m_1 \cdot m_2)r - \frac{5(m_1 \cdot r)(m_2 \cdot r)}{||r||^2} r \right] \quad (4)$$

2. Magnetické interakce, neboli působení momentu síly [2] na  $\vec{m}_2$  z důvodu vytvoření magnetického pole  $B(r, m_1)$  momentem  $\vec{m}_1$  [1]:

$$B(r, m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot m) - m}{|r|^3} \quad (5)$$

$$\tau = m_2 \times B(r, m_1)$$

<sup>4</sup>Jakosti neodymových magnetů se pohybují od N35 do N55 [8].

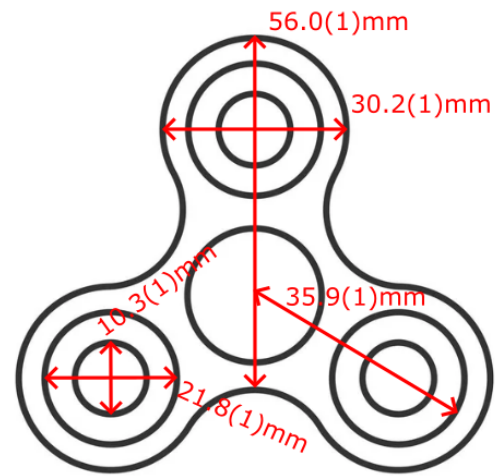
<sup>5</sup> $\vec{r} = P_1 - P_2$

## 3 MĚŘENÍ PARAMETRŮ

### 3.1 ROZMĚRY SPINNERU

K popsání spinneru nejdříve určíme jeho rozměry (viz Obr. 4). Nejdůležitější rozměr pro nás bude vzdálenost osy otáčení od místa, kde budou umístěny magnety. To je v našem případě  $r = 35.9(1)mm$ .

Vzhledem k tomu, že na sebe spinnery mohou vzájemně působit pouze magnetickými silami, jak je řečeno v zadání, není třeba řešit zbytek geometrie spinneru v budoucích modelech. Spinner budeme dále modelovat pouze jako  $n$  magnetických dipólů, které se otáčejí kolem středu  $S$  a pevně si udržují své relativní pozice. Tomuto celkovému systému definujeme moment setrvačnosti podle následujícího měření.



Obr. 4: Ilustrace spinneru společně s vyznačenými rozměry

### 3.2 MOMENT SETRVAČNOSTI

K určení momentu setrvačnosti spinneru bylo využito idealizace spinneru jakožto fyzického kyvadla, pro které platí: [9]

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{I}} \quad (6)$$

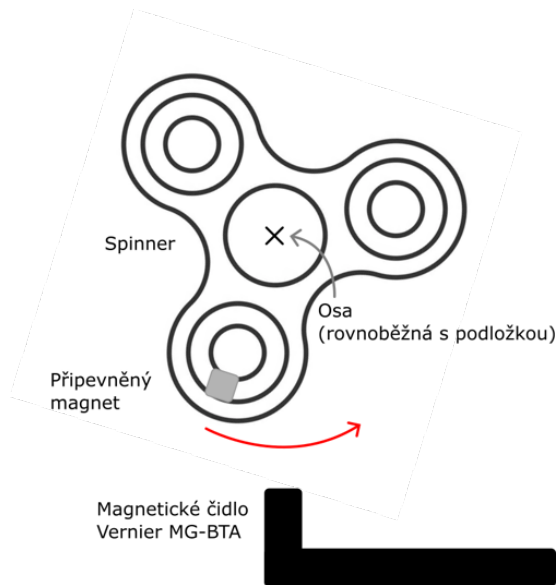
A po vyjádření z rovnice 6 získáváme:

$$I = \frac{mgr}{\omega^2} = \frac{mgr}{4\pi^2 f^2} \quad (7)$$

Nyní stačí změřit frekvenci kmitů zavěšeného spinneru s několika magnety na jednom z jeho ramen a dopočítat moment setrvačnosti.

### 3.2.1 Aparatura

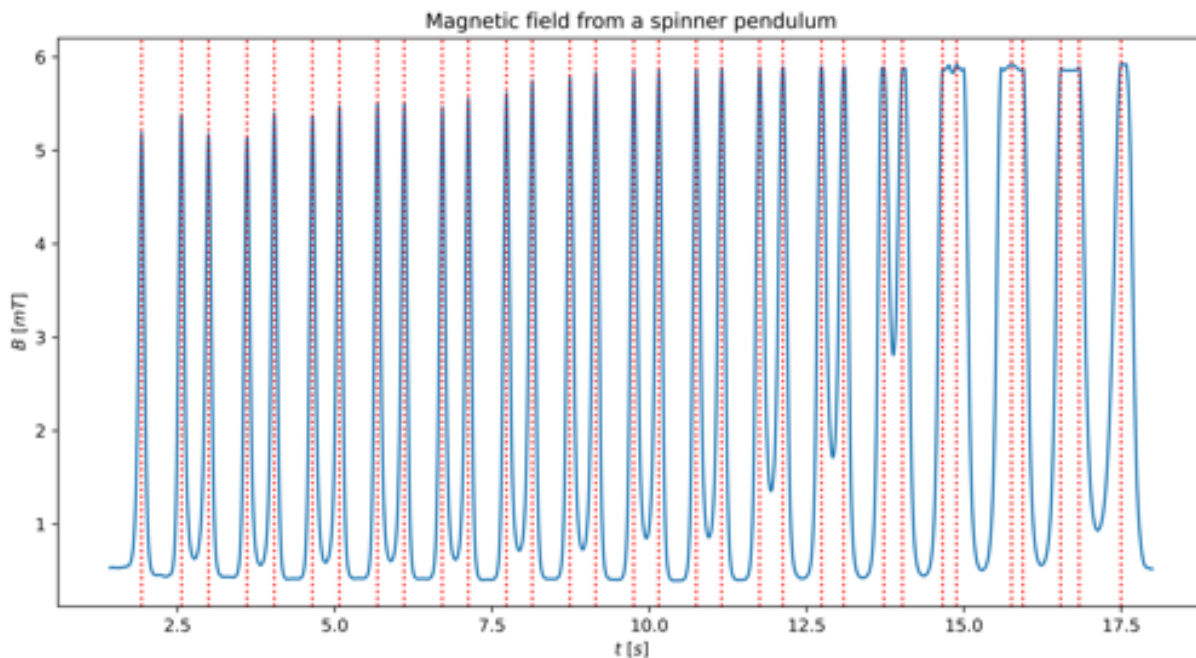
Po připevnění šesti neodymových magnetů o jednotkové hmotnosti  $0.92(1)g$  byl spinner připevněn pevně ve své ose otáčení. Pod takto zavěšený spinner bylo umístěno magnetické čidlo Vernier MG-BTA, které zaznamenávalo, jak blízko se magnety nacházejí. Po umístění spinneru mimo rovnovážnou polohu byl ponechán oscilovat a záznam průběhu magnetického pole v čase byl čidlem nasnímán (viz Obr. 6).



Obr. 5: Ilustrace aparatury pro měření frekvence kmitů spinneru

### 3.2.2 Analýza měření a výsledky

Průběh následně analyzujeme pomocí programovacího jazyku Python [10] a knihovny scipy [11]. Námi kýžená maxima, která odpovídají půlperiodě kmitu, vyhledáme použitím funkce `scipy.signal.find_peaks` a z jejich počtu jsme schopni určit počet period, kterými kyvadlo prošlo za určený čas.



Obr. 6: Nasnímaný průběh magnetické indukce v čase (modře) pro spinnerové kyvadlo. Peak, označující uplynutí jedné půlperiody, jsou vyznačeny červeně.

Máme-li tedy soubor<sup>6</sup>  $p$  všech časů nalezených peaků, je výpočet frekvence následující:

$$f = \frac{|p| - 1}{2(p_{max} - p_{min})} = 1.00(1)Hz \quad (8)$$

Dosazením do předchozí rovnice 7 získáváme výslednou hodnotu<sup>7</sup>:

$$I = 4.80(50) \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2 \quad (9)$$

### 3.2.3 Popis skriptu

V níže připnutém ústřížku kódu 1 nejdříve načteme použité knihovny: `numpy` [12] pro provedení konvoluce, `matplotlib` pro vytvoření grafu 6 [13] a nakonec `scipy`, kde využijeme funkce `find_peaks`, jak již bylo zmíněno.

Prvním krokem je načtení dat ze souboru `kyvadlo.csv` a jejich převedení z textového formátu do 2D pole pojmenovaného `data`. Dále izolujeme data jednotlivých os do separátních proměnných `xdata`, `ydata`.

`ydata` vyhladíme, abychom se zbavili šumu, a to pomocí konvoluce použitím funkce `numpy.convolve`. Délku 1D konvoluční matice jsme zvolili  $m = 15$  a konvoluční matice délky  $m$  by v našem případě obecně vypadala takto:

$$M_{conv} = \underbrace{\left( \frac{1}{m} \quad \frac{1}{m} \quad \dots \quad \frac{1}{m} \right)}_{m \text{ krát}} \quad (10)$$

Tato konvoluční matice provádí aritmetický průměr  $m$  za sebou jdoucích hodnot.

Nyní provedeme hledání peaků na vyhlazených datech pomocí funkce `find_peaks`, která akceptuje další dobrovolné argumenty:

1. `height`: určuje minimální absolutní velikost peaku
2. `threshold`: minimální rozdíl dvou sousedních hodnot, aby bod mohl být peakem
3. `distance`: minimální indexová vzdálenost dvou peaků

Poté určíme časový interval, kde se peaky nacházejí (a přidáme na každou stranu 0.5 sekundy pro přehlednost grafu), a vygrafujeme původní naměřená data (modře) společně s pozicemi peaků (červeně). Dále označíme osy.

Nakonec dopočítáme frekvenci kmitů kyvadla podle vzorce 8 a vypíšeme ji.

<sup>6</sup> $|p|$  označuje počet prvků pole  $p$ ;  $p_{min}$  označuje čas prvního peaku;  $p_{max}$  označuje čas posledního peaku.

<sup>7</sup>Tato hodnota je srovnatelná s jinými zdroji dostupnými online (viz. [17]).

```

1 # imports
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import scipy.signal as sig
5
6 # helper function to convert the map and filter iterators to a list
7 lmap = lambda f,x : list(map(f, x))
8 lfilt = lambda f,x : list(filter(f, x))
9
10 with open("./kyvadlo.csv", "r") as read:
11     data = read.readlines()[1:] # load all the value rows
12     # convert all rows into value arrays
13     data = lmap(lambda row: row.rstrip().split(","), data)
14
15     xdata = lmap(lambda row: float(row[0]), data) # x axis data
16     ydata = lmap(lambda row: float(row[1]), data) # y axis data
17     mov = 15 # the amount of smoothing
18     # smooths out the data using convolution
19     ydata_clean = np.convolve(ydata, np.ones(mov)/mov, "same")
20
21     # find the peaks from the data using scipy.signal.find_peaks
22     peaks, heights = sig.find_peaks(
23         ydata_clean,
24         height=1,
25         threshold=0.0001,
26         distance=35
27     )
28     # get the sampling frequency
29     samples_per_sec = (len(xdata) / max(xdata))
30     # find the start and end time of where the peaks are
31     peaks_s = peaks[0] - int(samples_per_sec / 2)
32     peaks_e = peaks[-1] + int(samples_per_sec / 2)
33
34     # plot the smoothed out data
35     plt.plot(xdata[peaks_s: peaks_e], ydata_clean[peaks_s: peaks_e])
36     # plot all the peak lines
37     for p in peaks:
38         plt.axvline(p / samples_per_sec, color="r", linestyle=":")
39
40     # set all other styling of the plot
41     plt.title("Magnetic field from a spinner pendulum")
42     plt.ylabel("$B$ [mT]")
43     plt.xlabel("$t$ [s]")
44
45     # calculate and print out the resulting frequency
46     f = 1/2 * ((len(peaks)-1) / ((max(peaks) - min(peaks)) /
47         samples_per_sec))
48     print(f"{f:.2f} Hz")

```

Ústřížek kódu 1: Kód k analyzování spinnerového kyvadla

### 3.3 REMANENCE $\vec{B}_r$

K určení remanence našich magnetů využijeme dvou různých metod. Jedna z nich bude založena na silové interakci magnetů a jedna na magnetem vytvořeném poli.

#### 3.3.1 Určení remanence přes magnetické pole

Prvním způsobem, jak určit hodnotu remanentní magnetizace našich magnetů, je měření magnetického pole pomocí magnetometru mobilního telefonu. Aplikace **Phyphox** umožňuje čtení těchto dat, která následně analyzujeme.

Měření provedeme pro sloupce 2 a 3 magnetů, abychom ověřili, zda je náš způsob měření konzistentní. Dále také měříme větší neodymový magnet, jehož parametry nám nejsou známy, a který budeme používat v některých budoucích experimentech. Abychom odstranili pozadí tvořené magnetickým polem země, provedeme měření magnetického pole magnetu v jedné orientaci a poté magnet otočíme a změříme hodnotu při opačné orientaci. K získání výsledku jednoduše odečteme rozdíl naměřených hodnot, což bude dvojnásobek velikosti magnetického pole tvořeného magnetem. Je zřejmé, že tímto odstraníme z měření jiné, neměnné, zdroje magnetických polí.

Kromě provádění měření pro různé počty a velikosti magnetů, budeme také měřit pole v různých vzdálenostech od magnetu, abychom dále potvrdili, zda jsou měření a náš model konzistentní. Celkem provedeme tedy měření 2 magnetů, 3 magnetů a velkého magnetu pro vzdálenosti 5 cm, 10 cm, 20 cm a 30 cm.

#### Analýza měření

Výstupem aplikace **Phyphox** jsou soubory typu `.csv`, neboli "*Comma separated values*" [16]. Toto je poměrně čitelný a přívětivý formát ukládání dat, který v **Pythonovém** skriptu načteme pomocí funkce `open` (stejně jako v kódu 1). V kódu budeme používat tyto knihovny: `numpy`, `matplotlib` pro vytvoření grafu 7, `scipy`, kde využijeme funkci `curve_fit`, a konečně knihovnu `math` [14]. Poté ručně určíme názvy všech datových souborů a časové intervaly, na kterých jsou magnety orientovány k snímači a od snímače.

Po načtení dat vyjmeme pouze hodnoty ve dříve zmíněných intervalech a najdeme jejich průměrnou hodnotu a odchylku. Z rozdílu průměrných hodnot magnetického pole při obou otočeních magnetů určíme velikost magnetického pole generovaného pouze magnetem (očistěného od pozadí). Z odchylek také určíme celkovou odchylku výsledné hodnoty.

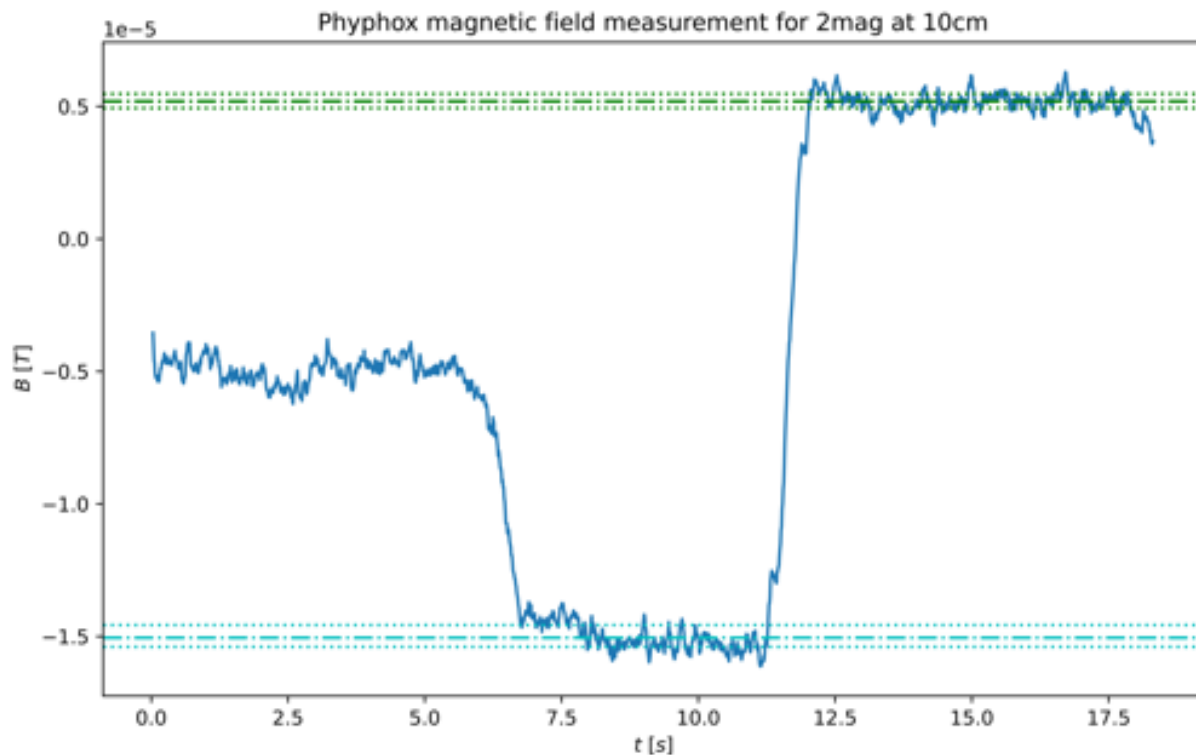
Následně pro každé měření vytvoříme graf (příkladem je Obr. 7).

```

1 down_vals = lmap(lambda j: ydata[j], lfilt(lambda j: down_intervals[i]
    ][0] < xdata[j] < down_intervals[i][1], range(len(ydata))))
2 up_vals = lmap(lambda j: ydata[j], lfilt(lambda j: up_intervals[i][0] <
    xdata[j] < up_intervals[i][1], range(len(ydata))))
3
4 down_avg = np.average(down_vals)
5 up_avg = np.average(up_vals)
6
7 amp = (up_avg - down_avg) / 2
8
9 down_error = [
10     np.average(lmap(lambda x: down_avg - x, lfilt(lambda x: x <=
        down_avg, down_vals))),
11     np.average(lmap(lambda x: x - down_avg, lfilt(lambda x: x > down_avg
        , down_vals)))]
12 ]
13 up_error = [
14     np.average(lmap(lambda x: up_avg - x, lfilt(lambda x: x <= up_avg,
        up_vals))),
15     np.average(lmap(lambda x: x - up_avg, lfilt(lambda x: x > up_avg ,
        up_vals)))]
16 ]

```

Ústřížek kódu 2: Kód k určení průměrné hodnoty magnetického pole a odchylek



Obr. 7: Nasnímaný průběh magnetické indukce v čase (modře) pro určení remanence. Průměrné hodnoty horní orientace (zeleně čerchované) a dolní orientace (modře čerchované). Odpovídající odchylky jsou znázorněny tečkovaně. Výsledná hodnota magnetické indukce tohoto příkladu, tedy dvou magnetů ve vzdálenosti 10 cm, je:  $B = 1.01(8) \cdot 10^{-5} \text{T}$



Po zanalyzování všech měření můžeme vytvořit graf závislosti  $B$  na vzdálenosti (viz Obr. 8). Pro určení  $B_r$  z naměřených hodnot zjednodušíme vzorec 5 tak, že nahradíme vektory pouze jejich velikostmi, čímž získáme následující vzorec:

$$|B| = \frac{\mu_0 |m|}{2\pi r^3} \quad (11)$$

Zde si všimneme úměrnosti  $B \propto r^{-3}$ , kterou také sledujeme v našich naměřených datech. Následným dosazením rovnice 3 a vyjádřením remanence získáváme:

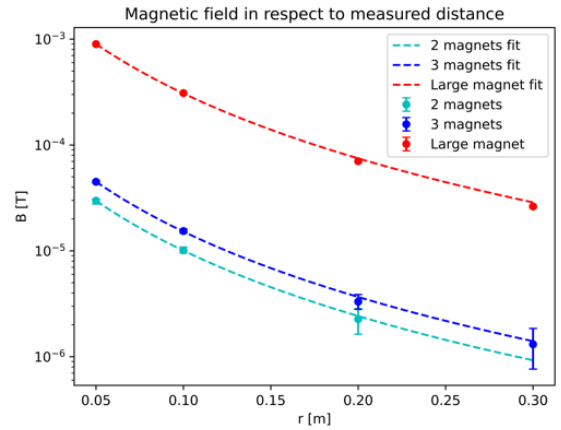
$$|B_r| = \frac{2\pi r^3 |B|}{V} \quad (12)$$

Pro každou naměřenou hodnotu  $B$  následně dopočítáme odpovídající  $B_r$  a výsledky později (společně s výsledky druhého měření) zobrazíme v souhrnném grafu 10.

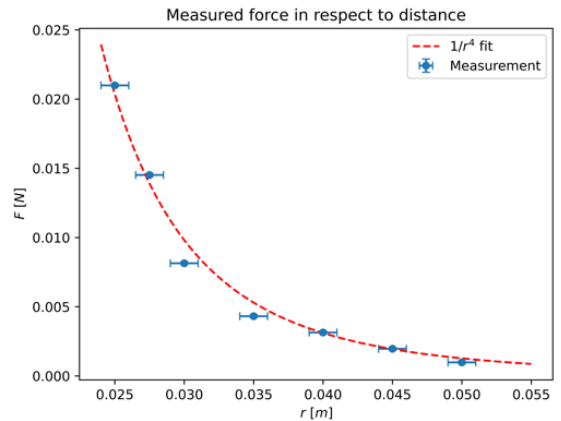
### 3.3.2 Určení remanence přes sílu

Druhý způsob, kterým jsme schopni určit remanenci, je skrze přitahování (resp. odpuzování) jednoho magnetu k (resp. od) druhému magnetu. Posazením jednoho magnetu na váhu a sledováním změny měřené hmotnosti jsme z gravitačního zrychlení schopni dopočítat působící sílu druhého magnetu, který je umístěn v určité výšce. Zároveň první magnet podložíme lehkou, tlustou a nemagnetickou vrstvou (např. blokem polystyrenu), abychom zabránili interakci magnetu s kovovými částmi váhy.

Výhodou této metody je, že jsme schopni přesněji měřit slabší magnety, jelikož je můžeme dát blíže. V předchozí kapitole jsme nebyli schopni přiblížit magnety dostatečně blízko ke snímači telefonu kvůli rozměrům telefonu samotného. Toto měření provádíme pouze pro 1 magnet, jelikož nám pro něj chybí výsledky z měření pomocí magnetického pole (ze dříve zmíněných důvodů). Výsledky můžeme vidět na grafu 9.



Obr. 8: Závislost magnetické indukce na vzdálenosti. Sledujeme, že  $B \propto r^{-3}$



Obr. 9: Závislost magnetické síly na vzdálenosti. Sledujeme, že  $F \propto r^{-4}$

Výpočet remanence provedeme podobně jako u rovnice 11, a to náhradou vektorů za jejich velikosti v rovnici 4. Tím jsme ji schopni zjednodušit na následující podobu:

$$|F| = \frac{3\mu_0}{2\pi r^4} |m|^2 \quad (13)$$

Po dosazení rovnice 3 a vyjádření remanence získáváme:

$$B_r = \sqrt{\frac{2\pi\mu_0 r^4 F}{3V^2}} \quad (14)$$

Výsledné hodnoty  $B_r$  zobrazíme v jednotném grafu 10 v následující kapitole.

### 3.3.3 Výsledky

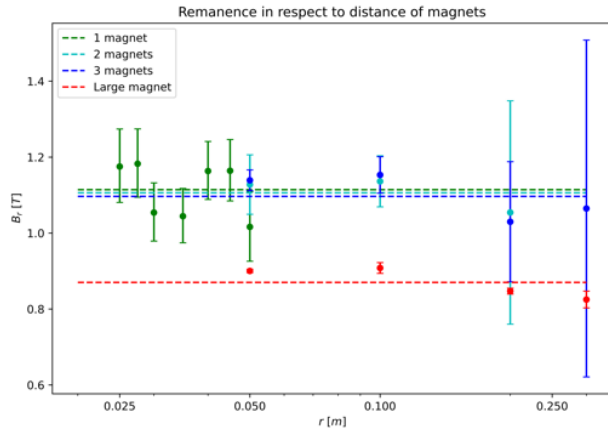
Výsledky obou způsobů měření sjednotíme do grafu závislosti  $B_r$  na vzdálenosti (viz Obr. 10). Očekáváme, že se  $B_r$  v závislosti na vzdálenosti nebude měnit, a pro každé měření určíme souhrnnou hodnotu pomocí optimalizace fitu konstantní funkce. Výsledkem všech měření bude aritmetický průměr těchto souhrnných hodnot.

Výsledná hodnota remanence našich krychlových magnetů je<sup>8</sup>:

$$B_r = 1.10(13)T$$

a našeho velkého magnetu je:

$$B_{r_{xl}} = 0.87(5)T$$



Prvním důvodem, proč je remanence většího magnetu znatelně nižší, může být jeho stáří. Dalším důvodem může být skutečnost, že takto velký magnet náš model není schopen popsat jako jediný magnetický dipól.

Obr. 10: Souhrnný graf všech měření remanence. Ve výpočtu výsledné hodnoty  $B_r$  není započítávána remanence velkého magnetu, jelikož není součástí stejné várky magnetů a budeme s ním nakládat později jinak.

<sup>8</sup>Námi naměřené hodnoty jsou srovnatelné s externími zdroji (viz. [8]).

## 4 TŘENÍ

O třecích jevech při otáčení spinneru jsme si již byli schopni udělat představu při úvodním kvalitativním sledování. Tření bude hrát značnou roli v našem systému, protože právě tření bude hlavním limitujícím faktorem průběhu chaotického chování. Dalším využitím, kromě našeho hlavního záměru - zpřesnění popisu chování, bude také například možnost odhadnutí maximálního času, než systém ztratí všechnu svou energii. Zajímavým a snadno měřitelným pro nás bude průběh úhlové rychlosti  $\omega$  v čase (resp. změna úhlové rychlosti<sup>9</sup>), ze kterého vyplývá i náš popis těchto třecích složek.

Zajímá-li nás tedy změna rychlosti, dovolíme si odhadnout, že hlavními zdroji tření bude ložisko a odpor vzduchu. Provedeme idealizaci ložiska a řekneme, že jeho brzdný moment síly, a tím pádem i úhlové zpomalení, bude neměnné v čase a nezávislé na rychlosti. Toto nemusí být vždy pravda - například objeví-li se v reálném ložisku nějaké nechtěné oscilace (které jsme sledovali) nebo je-li na ložisko působeno nějakou externí silou mířící kolmo na osu otáčení (jako například když se od sebe velmi silně odpuzují magnety ze dvou blízkých spinnerů). Oba tyto příklady jsou příliš složité k popsání a nejsme je tedy schopni zkoumat. Toto brzdné úhlové zrychlení (resp. zpomalení) nezávislé na rychlosti spinneru označíme  $\alpha$ .

Další výraznou složkou bude již zmíněný odpor vzduchu. Z látky středoškolské fyziky známe přibližnou úměrnost odporové síly na kvadrátu rychlosti ( $F \propto v^2$ ) při turbulentním proudění (které v našem případě očekáváme kvůli složité geometrii spinneru). Při rotaci spinneru bychom tedy analogicky očekávali proporcionalitu  $\dot{\omega} \propto \omega^2$ . Míru této závislosti označíme  $\gamma$ .

Poslední složkou, pro kterou nejsme schopni najít fyzikální podstatu, ale kterou přesto budeme zkoumat je lineární složka  $\beta$ . Existují-li tedy jevy, které nám unikly, a platí pro ně závislost  $\dot{\omega} \propto \omega$ , můžeme je kompenzovat touto složkou. Zároveň budeme podrobně srovnávat přesnosti našich předpokladů včetně, ale i bez, této složky, abychom určili, zda dává smysl tuto složku využívat.

---

<sup>9</sup> $I\dot{\omega} = \tau$

## 4.1 ANALYTICKÝ POPIS

Všechny tři dříve zmíněné složky dohromady tedy popisuje řídící závislost systému:<sup>10</sup>:

$$\dot{\omega}(t) = -\alpha - \beta\omega(t) - \gamma\omega^2(t) \quad (15)$$

Pokud bychom odstranili lineární komponent, získáváme:

$$\dot{\omega}(t) = -\alpha - \gamma\omega^2(t) \quad (16)$$

Obě tyto diferenciální rovnice jsou analyticky řešitelné a jejich řešení pro  $\omega$  jsou v totožném pořadí<sup>11</sup>:

$$\omega(t) = -\frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2} \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}(t - c_1)\right) - \beta}{2\gamma} \quad (17)$$

a

$$\omega(t) = -\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \tan(\sqrt{\alpha\gamma}(t - c_1)) \quad (18)$$

### 4.1.1 Maximální doba otáčení

Parametr  $c_1$ <sup>12</sup> je hodnota v sekundách, která odpovídá době, po které se spinner zastaví. Vyjádřením  $c_1$  (např. z druhé rovnice) jsme schopni určit poměrně přesně, jak dlouho se bude spinner točit, známe-li jeho parametry  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  a jeho počáteční úhlovou rychlost  $\omega_0$ :

$$c_1(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\omega_0\right) \quad (19)$$

Pokud bychom si přáli vyjádřit celkovou dobu otáčení z počáteční kinetické energie, můžeme dosadit  $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ , kde je nám  $I$  již známé (viz Kap. 3.2), a jednoduchou úpravou získáváme:

$$c_1(E) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2\gamma E}{\alpha I}}\right) \quad (20)$$

Jakmile dojde k tomu, že  $t > c_1$ , nepopisuje již funkce náš spinner, protože by začal opět nabývat energii a otáčet se opačným směrem, k čemuž nemůže dojít.

<sup>10</sup>Záporná znaménka používáme čistě z toho důvodu, aby nám koeficienty  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  vycházely kladně, jelikož očekáváme, že systém bude zpomalovat.

<sup>11</sup>Všimněme si, že rovnice 17 je ekvivalentní rovnici 18, když  $\beta = 0$ .

<sup>12</sup>Někdy také označujeme  $t_{max}$ .

**Horní limit doby otáčení  $n$  spinnerů**

Další zajímavou vlastností, kterou jsme schopni pro tento idealizovaný systém dokázat je, že máme-li libovolné (přirozené) množství spinnerů o počátečních energiích  $E_1, E_2 \dots E_n$ , které spolu neinteragují, je maximální dobou  $t_{max}$ , po kterou se může některý z nich otáčet  $t_{max} \leq c_1(\sum_{i=1}^n E_i)$ . Tento fakt se může zdát triviálním a zbytečným, ale tímto způsobem jsme schopni určit například horní časovou hranici, po kterou by musela běžet simulace, než bychom si byli poměrně<sup>13</sup> jisti, že již došlo k zastavení všech spinnerů.

Pokud bychom chtěli zlepšit tento odhad i pro interagující spinnery, bylo by potřeba počítat s tím, že spinnery se mohou zrychlovat, zpomalovat a často budou oscilovat. Pokud bychom sledovali mnoho přibližně harmonických oscilací spinnerů, kdy se po relativně dlouhou dobu nepohybují svou nejvyšší rychlostí, mohli bychom se inspirovat efektivní hodnotou sinusoidy a udělat tak hrubý odhad, že  $t_{max} \leq \sqrt{2}c_1(\sum_{i=1}^n E_i)$ . Nad tím, jaká konstanta by byla dobrá, můžeme dlouze polemizovat, ale to není zájmem této práce, proto nebudeme myšlenku dále rozvádět.

Tuto vložku zakončíme důkazem dříve vyslovené věty, že  $t_{max} \leq c_1(\sum_{i=1}^n E_i)$ :

Nejdříve zdůrazníme několik zřejmých skutečností o naší funkci  $c_1(E)$ :

$$c_1(E) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2\gamma E}{\alpha I}}\right)$$

$$c_1(E) \text{ je rostoucí a prostá funkce pro } \alpha, \gamma \in \mathbb{R}^+$$

$$E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathbb{R}^+ \implies c_1(E_1), \dots, c_1(E_n) \in \mathbb{R}^+$$
(21)

Bez újmy na obecnosti poté můžeme říci, že:

$$E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_n \in \mathbb{R}^+ \implies c_1(E_1) \leq \dots \leq c_1(E_n) \in \mathbb{R}^+$$
(22)

A obecně vybereme energie  $E_u$  a  $E_v$  takové, že  $E_u \geq E_v$  ( $u \neq v \wedge 1 \leq v < u \leq n$ ), pro které se snažíme dokázat následující:

$$c_1(E_u + E_v) \stackrel{?}{\geq} \max(c_1(E_u), c_1(E_v))$$
(23)

<sup>13</sup>Nemůžeme si být kompletně jisti kvůli interakcím spinnerů a nepřestnostem simulace.

**Důkaz**

$$c_1(E_u + E_v) \geq \max(c_1(E_u), c_1(E_v))$$

$$c_1(E_u + E_v) \geq \max(c_1(E_u), c_1(E_v)) \equiv c_1(E_u + E_v) \geq c_1(E_u) \because (c_1(E_u) \geq c_1(E_v) \because E_u \geq E_v)$$

$$\begin{aligned}
& c_1(E_u + E_v) \geq c_1(E_u) \\
& \frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}} \arctan \left( \sqrt{\frac{2\gamma(E_u + E_v)}{\alpha I}} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}} \arctan \left( \sqrt{\frac{2\gamma E_u}{\alpha I}} \right) \\
& \arctan \left( \sqrt{\frac{2\gamma(E_u + E_v)}{\alpha I}} \right) \geq \arctan \left( \sqrt{\frac{2\gamma E_u}{\alpha I}} \right) \\
& \sqrt{\frac{2\gamma(E_u + E_v)}{\alpha I}} \geq \sqrt{\frac{2\gamma E_u}{\alpha I}} \\
& \sqrt{\frac{2\gamma}{\alpha I}} \sqrt{E_u + E_v} \geq \sqrt{\frac{2\gamma}{\alpha I}} \sqrt{E_u} \\
& \sqrt{E_u + E_v} \geq \sqrt{E_u} \\
& E_u + E_v \geq E_u \\
& E_v \geq 0 \\
& \text{QED}
\end{aligned} \tag{24}$$

Dále pouhou analogií pro libovolné dvojice, větší  $k$ -tice a konečně celou  $n$ -tici energií je zřejmé, že:

$$\begin{aligned}
& \forall E_j; (1 \leq j \leq n) : c_1(E_j) \leq c_1 \left( \sum_{i=1}^n E_i \right) \\
& \Updownarrow \\
& t_{max} \leq c_1 \left( \sum_{i=1}^n E_i \right) \\
& \text{QED}
\end{aligned} \tag{25}$$

**4.1.2 Určení jednotek parametrů  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$** 

Přepsáním rovnice 15 pouze pomocí jednotek jsme schopni jednoduše odvodit jednotky koeficientů  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$ :

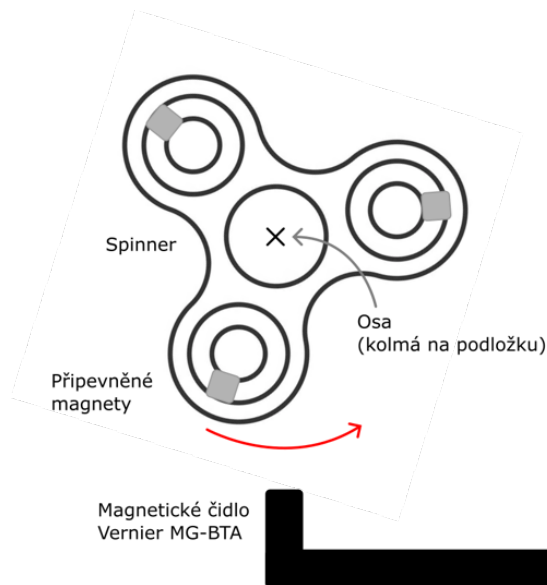
$$\begin{aligned}
& [rad \cdot s^{-2}] = -[\alpha] - [\beta][rad \cdot s^{-1}] - [\gamma][rad \cdot s]^2 \\
& [rad \cdot s^{-2}] = -[rad \cdot s^{-2}] - [s^{-1}][rad \cdot s^{-1}] - [rad^{-1}][rad^2 \cdot s^{-2}] \\
& \implies [\alpha] = [rad \cdot s^{-2}]; [\beta] = [s^{-1}]; [\gamma] = [rad^{-1}]
\end{aligned} \tag{26}$$

### 4.1.3 Experiment pro potvrzení analytického řešení

Abychom ověřili, zda výsledky našich diferenciálních rovnic odpovídají realitě, provedeme měření, kde budeme sledovat jak se snižuje úhlová rychlost každého z našich spinnerů v čase. K tomu využijeme opět magnetického čidla Vernier MG-BTA, které bude sledovat momenty, kdy se kolem něj mihne jeden z magnetů připevněných na ramenou spinneru (velmi podobně jako u Obr. 5). Časová hustota těchto vrcholů je úměrná úhlové rychlosti - přesněji 1 vrchol za sekundu se rovná  $\frac{2}{3}\pi \text{ rad/s}$ .

#### Aparatura

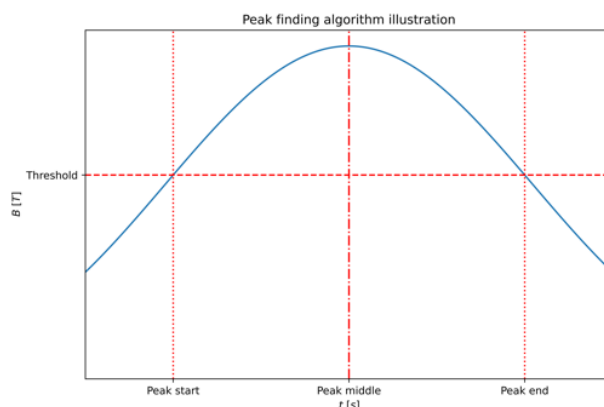
Aparatura tohoto experimentu (vyobrazená na Obr. 11) je velmi podobná té na Obr. 5. Jediným rozdílem je, že nyní má spinner osazená všechna ramena a to pouze jedním magnetem. Zároveň není zavěšen ve své ose, ale leží na podložce a je tedy jeho osa otáčení kolmá na podložku (resp. rovnoběžná se směrem gravitačního zrychlení). V této orientaci budou prováděna i všechna následující měření v dalších kapitolách.



Obr. 11: Ilustrace aparatury pro měření přibližné úhlové rychlosti spinneru

#### Zpracování dat

Ke zpracování dat opět použijeme jazyk Python a stejné knihovny jako doposud. Prvním úkolem je převedení průběhů kmitů magnetického pole (způsobených mihnutím magnetu před čidlem) do průběhu úhlové rychlosti v čase. K tomuto bude potřeba určit peaky a jejich pozici v čase a následně konvolucí počítat množství peaků na určitých intervalech. Pozice peaků určíme tak, že budeme sledovat kdy naměřená hodnota překročí nějaký práh. Toto bude začátek našeho peaku. Když půjde zpět pod hodnotu prahu, ukončíme peak. Pozici maxima umístíme do středu tohoto časového intervalu (viz Obr. 12).



Obr. 12: Ilustrace fungování algoritmu pro hledání peaků

```

1 # imports
2 import math
3 def lmap(f,x):
4     return list(map(f,x))
5
6 # function that converts the B/t relation to omega/t relation
7 def process_raw_decay_data(
8     id,
9     startTime = -1,
10    threshold = 0.7):
11    # the times of the found peaks
12    peaks = []
13    with open(f"./inputs/Spinner_{id}_decay_rate.csv") as inp:
14        # parse in the data lines
15        lines = inp.read().split("\n")
16        # find the starting index from which the data points are after
17        # startTime
18        startInd = 1
19        while (float(lines[startInd].split(",")[0]) < startTime):
20            startInd += 1
21
22        hitPeak = False # keeps track of if we found the sttart of a
23        # peak
24        startPeak, endPeak = 0 # bounding times of the peak
25        for i in range(
26            startInd,
27            len(lines)-1):
28            # going through each line
29            row = lines[i].split(",")
30
31            # if we go over the threshold, the peak has started
32            if (float(row[1]) >= threshold and not hitPeak):
33                # we start the peak
34                hitPeak = True
35                startPeak = float(row[0])
36
37            # if we go back under and have found a start
38            if (float(row[1]) < threshold and hitPeak):
39                # we end the peak
40                hitPeak = False
41                endPeak = float(row[0])
42                # and save it's middle value
43                peaks.append((endPeak+startPeak)/2)

```

Ústřížek kódu 3: Kód k hledání pozic peaků

Druhým krokem je projít celou časovou doménu měření a rozdělit ji na menší intervaly. V těchto intervalech spočítáme počet peaků a přepočtem  $1 \text{ peak/s} = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/s}$  určíme přibližnou průměrnou rychlost v tomto okolí.



```

1  results = {}
2  interval = 1
3  step = 0.1
4  curTime = startTime
5  x = 0
6  while x < len(peaks):
7      if (peaks[x] > curTime+interval):
8          # if the peaks are positioned outside the interval stop
9          # and reposition the interval by step
10         curTime += step
11         x = 0
12     elif (peaks[x] > curTime and peaks[x] < curTime+interval):
13         # a peak is positioned in the time interval
14         if (not curTime in results): results[curTime] = 0
15         results[curTime] += 1 # increase the count amount
16     x += 1
17
18     with open(f"./outputs/Spinner_{id}
19         _decay_rate_PROCESSED_FLOATING_AVERAGE.csv", 'w') as res:
20         res.write("t, peaks/s, omega \n")
21         # go through all the results
22         for x in range(4, len(results.keys())):
23             # create a 5 element floating average
24             flAverage = 0
25             for y in range(5):
26                 flAverage += results[list(results.keys())[x-y]]
27             flAverage = flAverage/5
28
29             # write the time, avg. peak count and avg. omega to file
30             res.write(str(round(list(results.keys())[x-y], 1)) + "," +
31                 str(flAverage) + "," + str(flAverage*2*math.pi/3) + "\n")
32         # return the output file location
33         return f"./outputs/Spinner_{id}
34         _decay_rate_PROCESSED_FLOATING_AVERAGE.csv"

```

Ústřížek kódu 4: Pokračování kódu 3 - výpočet úhlové rychlosti pomocí konvoluce

#### 4.1.4 Výsledky a porovnání se simulací

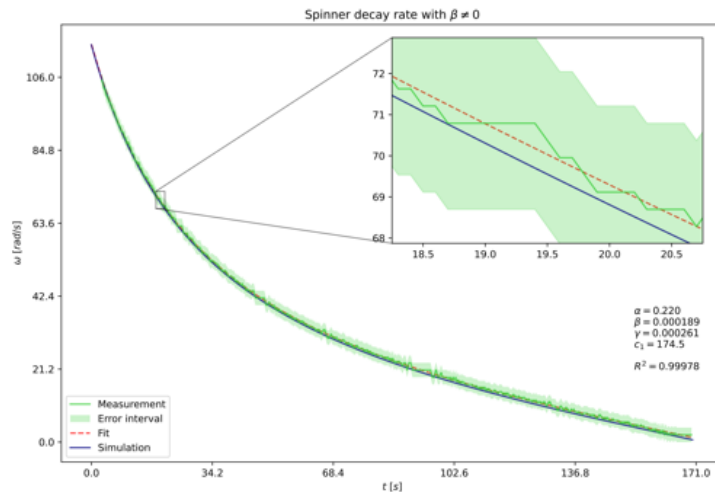
Po analýze všech naměřených dat výše uvedeným algorimem (celkem 7 měření, protože máme 7 různých spinnerů) a provedením fitu funkcí dle rovnice 17 získáváme koeficienty v následujících rozmezích:

$$\begin{aligned}
 0.220 &\leq \alpha \leq 0.927 \\
 0.0 \cdot 10^{-15} &\leq \beta \leq 2.5 \cdot 10^{-3} \\
 2.22 \cdot 10^{-4} &\leq \gamma \leq 3.17 \cdot 10^{-4}
 \end{aligned} \tag{27}$$

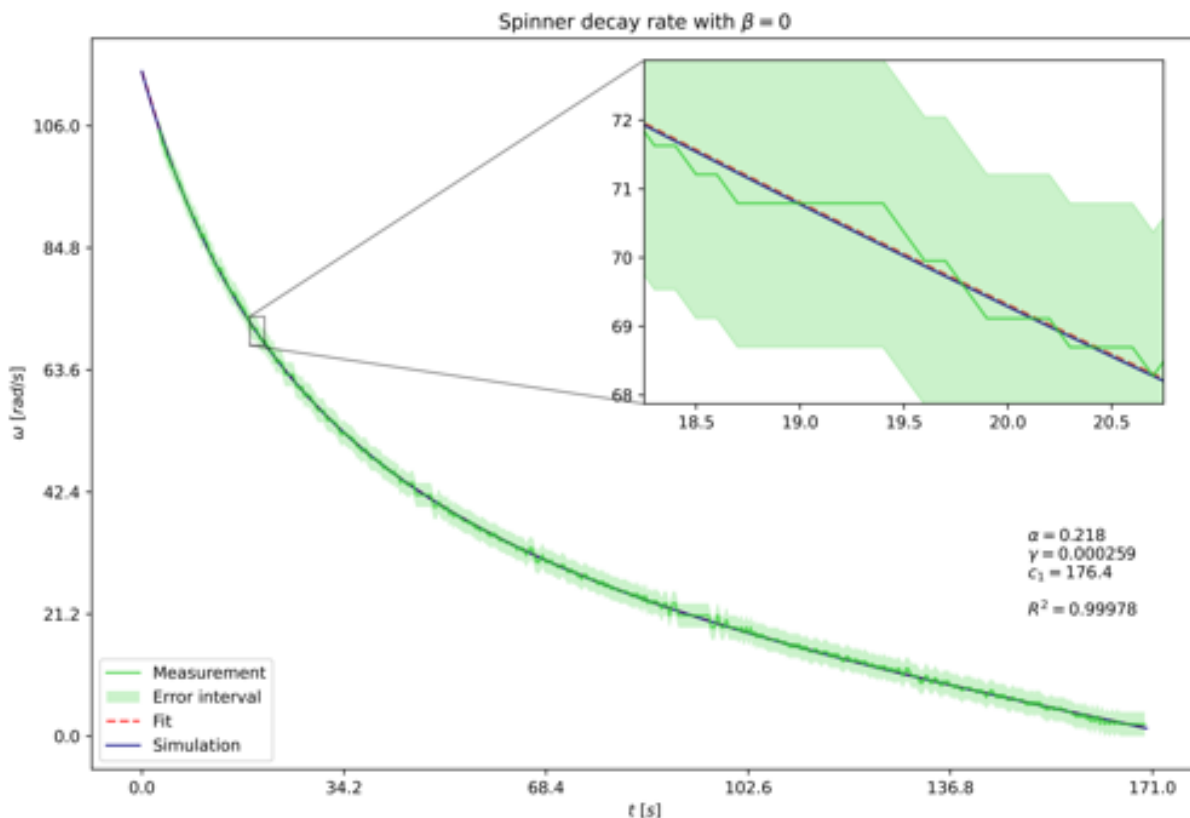
### 4.1.5 Zhodnocení použití lineárního koeficientu

Nyní je na řadě prozkoumání významu a užitečnosti lineárního brzdného koeficientu. Získané hodnoty  $\beta$  z předchozích sedmi měření nejsou konzistentní mezi spinnery, což je prvním indikátorem toho, že lineární složka nebude součástí dobrého popisu tření (alespoň pro tento případ).

Fitujeme-li stejná data funkcí bez lineární složky získáváme graf 14. Vidíme, že simulace (jejíž implementací se budeme zabývat v Kap. 5) v tomto případě lépe předpovídá měřené hodnoty.

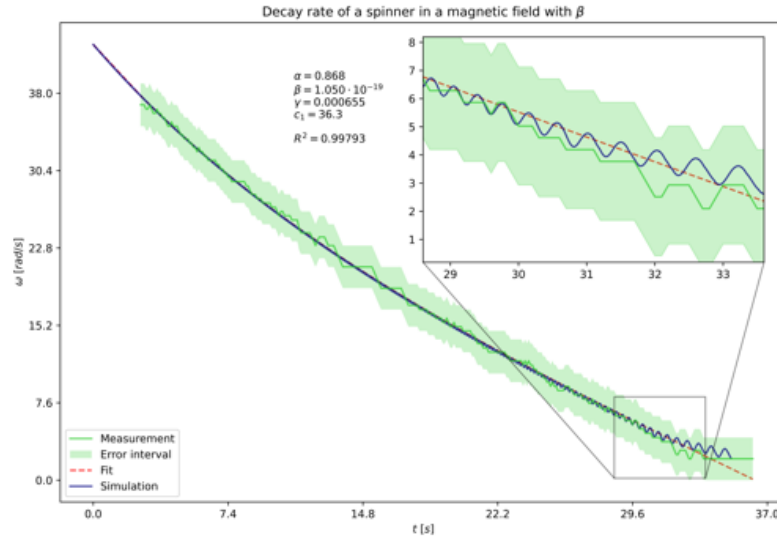


Obr. 13: Příklad grafu měřeného průběhu úhlové rychlosti v čase (zeleně) v porovnání s fitem užívajícím všech tří brzdných složek (červeně). Simulace modře.



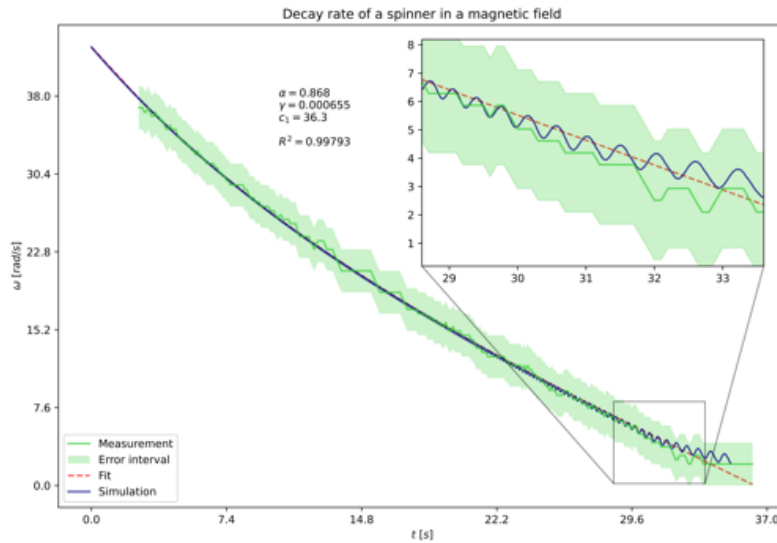
Obr. 14: Příklad grafu měřeného průběhu úhlové rychlosti v čase (zeleně) v porovnání s fitem užívajícím pouze složek  $\alpha$  a  $\gamma$  (červeně). Simulace modře.

Poslední měření, které jsme k účelům porovnání těchto dvou metod provedli, bylo sledování průběhu úhlové rychlosti, když byl spinner umístěn do magnetického pole našeho velkého magnetu. Velký magnet jsme upevnili 8cm od středu spinneru a stejnou aparaturou jako v minulém experimentu jsme sledovali jeho chování. Zde jsme prováděli pouze jedno měření a fitovali jsme ho opět oběma způsoby, které porovnáváme níže:



Obr. 15: Graf měřeného úhlové rychlosti v čase v porovnání s fitem užívajícím všech tří složek. (barevné schéma jako v Obr. 13)

Jak můžeme vidět na Obr. 15, koeficient  $\beta$  nám vychází efektivně nulový a průběhy fitů se od sebe téměř neliší. Z těchto měření tedy ověřujeme naši předchozí představu, že lineární komponent tření není fyzikálně signifikantní.



Obr. 16: Graf měřeného úhlové rychlosti v čase v porovnání s fitem užívajícím složek  $\alpha$  a  $\gamma$ . (barevné schéma jako v Obr. 14)



## 5 SIMULACE

Jak vychází z názvu této práce, značnou částí našeho zkoumání bude také počítačové simulování těchto systémů. V této kapitole se budeme věnovat jejímu návrhu a vývoji.

### 5.1 POPIS ZPŮSOBU SIMULOVÁNÍ

Naším cílem bude vytvoření tzv. "*Discrete event simulation*" neboli *DES* [18]. Jedná se o druh simulační metody, která popisuje náš systém pomocí diskrétních stavů, které existují v daném čase. Z jednoho určitého stavu poté simulační algoritmus provádí pomocí pravidel systému odhad toho, jak bude vypadat další stav po uplynutí velmi malého časového úseku  $\Delta t$ . Takto vypadá jeden simulačním krok.

#### 5.1.1 Runge-Kutta metody

Runge-Kutta metody, pojmenované po Carlu Davidu Rungeovi a Martinu Wilhelmu Kuttovi, jsou rodinou metod používaných k řešení implicitních a explicitních diferenciálních rovnic. Implicitní metody popisují budoucí stav systému z předchozího stavu, stejně jako to budeme dělat my v naší *DES*. Runge-Kutta metody (také označované pouze RK metody) jsou tedy ideálním nástrojem pro simulování našeho problému. Nejjednodušším příkladem RK metody je například Eulerova metoda. Těchto metod je nespočet, ale jejich obecný předpis je následující [19]:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t \sum_{i=1}^s b_i k_i \\ k_m &= f\left(t_n + c_m \Delta t, y_n + \left(\sum_{j=1}^{s-1} k_j a_{m,j}\right) \Delta t\right) \end{aligned} \tag{28}$$

V tomto předpisu jednotlivé symboly znamenají:  $t_n$  je čas stavu  $y_n$  a  $\Delta t$  je krátký časový krok;  $s$  je stupeň RK metody;  $a_{m,j}$ ,  $b_i$  a  $c_m$  jsou koeficienty dané RK metody;  $y_n$  je stávající stav a  $y_{n+1}$  je předpovídaný stav;  $k_m$  je pomocný sub-stav;  $f(t, y) = \dot{y}$ .

Koeficienty RK metody se nejčastěji zapisují pomocí tzv. Butcherových tabulek [20] (pomenovaných po Johnu Charlesovi Butcherovi). Zápis obecné Butcherovy tabulky pro RK metodu  $s$ . stupně je:

Tab. 3: Zápis obecné Butcherovy tabulky pro RK metodu  $s$ . stupně

$c_1 = 0$					
$c_2$	$a_{2,1}$				
$c_3$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$			
$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$		
$c_s$	$a_{s,1}$	$a_{s,2}$	$\cdots$	$a_{s,s-1}$	
	$b_1$	$b_2$	$\cdots$	$b_{s-1}$	$b_s$

Některé z podmínek, které sice nezaručují konzistentnost a stabilitu metody, ale jsou dobrými základními pravidly jsou [20]:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sum_{i=1}^s b_i = 1 \\
 2) \quad & \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} = c_i \quad (i \in \{2, \dots, s\})
 \end{aligned} \tag{29}$$

Níže vypíšeme Butcherovy tabulky několika základních metod, které byly později implementovány v simulaci [21]:

Tab. 4: **Eulerova metoda**

0		
	1/2	1/2
	0	1

Tab. 5: Metoda středního bodu

0		
1/2	1/2	1/2
	0	1

Tab. 6: Heunova metoda

0		
1	1	1
	1/2	1/2

Tab. 7: Ralstonova metoda

0		
2/3	2/3	1/3
	1/4	3/4

Tab. 8: Obecná metoda 2. stupně

0		
$\alpha$	$\alpha$	$1-\alpha$
	$1-\frac{1}{2\alpha}$	$\frac{1}{2\alpha}$

Tab. 9: Simpsonovo pravidlo 3/8

0				
1/3	1/3			
2/3	-1/3	1		
1	1	-1	1	
<hr/>				
	1/8	3/8	3/8	1/8

Tab. 10: Standardní Runge-Kutta metoda 4. stupně (neboli RK4)

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
<hr/>				
	1/6	2/6	2/6	1/6

Tab. 11: Ralstonova metoda 4. stupně

0				
0.4	0.4			
0.45573725	0.29697761	0.15875964		
1	0.21810040	-3.05096516	3.83286476	
<hr/>				
	0.17476028	-0.55148066	1.20553560	0.17118478

## 5.2 PRAVIDLA SYSTÉMU

Řídící interakce našeho simulovaného modelu budou opět popsány rovnicemi 4 a 5. V simulaci se však zaměříme na interakce celých spinnerů, ne pouze 2 dipólů. Pro popsání spinneru musíme určit několik vlastností týkajících se:

1. **konfigurace**: pozice, velikosti, počet ramen (viz Kap. 2.1.1),
2. **pohybu**: úhlová rychlost, moment setrvačnosti (viz Kap. 3.2), třecí koeficienty (viz Kap. 4),
3. **magnetů**: velikost momentů, remanence (viz Kap. 3.3), orientace (viz Obr. 3).

Naším cílem je popisovat rotaci jednotlivých spinnerů v čase. Toto provedeme určením celkového momentu síly jakožto součtu silových a magnetických složek všech externích magnetických momentů. Popisující rovnice spinneru jsou tedy<sup>14</sup>:

$$\begin{aligned}
 I\dot{\omega} &= \sum_{external} (\tau_F + \tau_{mag}) \\
 \dot{\varphi} &= \omega
 \end{aligned} \tag{30}$$

Ve výše uvedených rovnicích  $\tau_F$  popisuje moment síly pocházející ze silové interakce, kterým na spinner (resp. na všechny jeho magnety) působí nějaký externí magnetický moment  $m_{external}$  umístěným v prostoru na pozici  $P_{external}$ . Moment síly určíme pomocí ramene  $r$ , přes které síla  $F$  na spinner působí:  $\vec{\tau} = \vec{F} \times \vec{r}$ .

<sup>14</sup>První rovnice vychází z definice momentu síly:  $\dot{L} = I\dot{\omega} = \tau$

$\tau_{mag}$  popisuje moment síly pocházející z toho, že na každý magnet spinneru působí externí magnetické pole  $B(r, m_{external})$  tvořené externím magnetickým momentem  $m_{external}$  umístěný v prostoru na pozici  $P_{external}$ . Pomocí momentu magnetu umístěného na spinneru jednoduše dopočítáme moment síly podle rovnice 5:  $\tau = m \times B(r, m_{external})$ .

Předpisy  $\tau_F$  a  $\tau_{mag}$  jsou:

$$\begin{aligned}\tau_F &= \sum_{j=0}^n F_m(P_{external} - P(j), m(j), m_{external}) \times (P(j) - S) \\ \tau_{mag} &= \sum_{j=0}^n m(j) \times B(P(j) - P_{external}, m_{external})\end{aligned}\tag{31}$$

## 5.3 IMPLEMENTACE

K implementaci naší simulace použijeme softwarový systém zvaný `Node.js`, který používá programovací jazyk `JavaScript` (JS) [22]. K tomuto rozhodnutí jsme došli, jelikož `Node.js` je rychlejší než `Python` a nabízí dobré množství programátorsky užitečných funkcí. `Node.js` je tedy ideální kompromis mezi jednoduchostí implementace a rychlostí. V průběhu implementace také používáme datový formát `JSON` [23] a nativní knihovnu zvanou `fs` (`File System`), pomocí které budeme naše výsledky exportovat do `.csv` souborů pro další zpracování. Použití jazyku `JavaScript` nám také umožní použití již napsaného kódu k vytvoření webového rozhraní s vizualizací simulovaného systému. Toto rozhraní je skvělé k odstraňování chyb v průběhu vývoje a zároveň zjednodušuje interpretaci generovaných výsledků.

### 5.3.1 Použité datové struktury

#### 3D vektory

První datovou strukturou, kterou budeme používat v našich výpočtech jsou 3D vektory. Jejich implementace společně s užitečnými funkcemi (sčítání, odčítání, vektorové a skalární násobení, apod.) je triviální.

3D vektory v našem kódu budou instancí třídy pojmenované `v3` a jejich jedinými vlastnostmi jsou  $x, y$  a  $z$  komponenty vyjádřené jako 64-bitová čísla podle standardu `IEEE-754` [25].



## Spinnery

Další strukturou jsou jednotlivé spinnery, které budeme označovat symbolem  $\mathbb{S}$  a odpovídajícím číselným indexem nebo jiným identifikátorem vpravo dole. Je-li z kontextu zřejmé, o jaký spinner se jedná, můžeme k jeho vlastnostem referovat čistě podle znaků určených v nomenklatuře (viz Kap. 1.1). Je-li potřeba oddělovat jednotlivé spinnery, budeme k jejich vlastnostem referovat exaktně, a to skrze horní index; například, pokud bychom chtěli určit počet ramen (značeno písmenem  $n$ ) nějakého externího spinneru, použili bychom  $\mathbb{S}_{external}^n$ . Pokud bychom chtěli získat pozici 1. magnetu 3. spinneru, použili bychom  $\mathbb{S}_3^P(1)$ , jelikož  $P(i)$  je funkce. Pomocí tohoto způsobu zápisu také v průběhu následujících kapitol formalizujeme rovnice 30 a 31.

V kódu jsou spinnery instancí třídy `spinner`, jejíž vlastnosti jsou vypsány v tabulce 12.

Tab. 12: Výpis vlastností třídy `spinner`:

Symbol	Datový typ	Iniciální hodnota
$r$ <sup>15</sup>	float64	0.0359
$S$ <sup>16</sup>	v3	žádná
$I$ <sup>17</sup>	float64	$4.80 \cdot 10^{-5}$
$\varphi_0$ <sup>18</sup>	float64	žádná
$\varphi$ <sup>19</sup>	float64	žádná
$\omega_0$ <sup>20</sup>	float64	žádná
$\omega$ <sup>21</sup>	float64	žádná
$\alpha$ <sup>22</sup>	float64	0.868
$\beta$ <sup>23</sup>	float64	0.0
$\gamma$ <sup>24</sup>	float64	0.00068
$n$ <sup>25</sup>	int	3
$m_0$ <sup>26</sup>	float64	$\frac{1.1049 \cdot 0.005^3}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 0.1099$
<code>magnet_orientation</code> <sup>27</sup>	"vertical" / "radial" / "tangent"	"vertical"
<code>constant_omega</code> <sup>28</sup>	bool	false
$m(i)$ <sup>29</sup>	funkce (int $\rightarrow$ v3)	nelze měnit
$P(i)$ <sup>30</sup>	funkce (int $\rightarrow$ v3)	nelze měnit
<code>copy ()</code> <sup>31</sup>	funkce ( $\emptyset \rightarrow$ spinner)	nelze měnit

<sup>15</sup>Poloměr (viz Obr. 4)

<sup>16</sup>Střed

<sup>17</sup>Moment setrvačnosti (viz Kap. 3.2)

<sup>18</sup>Počáteční úhel

<sup>19</sup>Okamžitý úhel

<sup>20</sup>Počáteční úhlová rychlost

<sup>21</sup>Okamžitá úhlová rychlost

<sup>22</sup>Konstantní koeficient tření (viz Kap. 4)

<sup>23</sup>Lineární koeficient tření (viz Kap. 4)

<sup>24</sup>Kvadratický koeficient tření (viz Kap. 4)

<sup>25</sup>Počet ramen/magnetů

<sup>26</sup>Velikost magnetického momentu (viz Rov. 3)

<sup>27</sup>Orientace magnetů (viz Obr. 3)

<sup>28</sup>Určuje, zda má úhlová rychlost spinneru zůstat konstantní (simuluje hnaný spinner)

<sup>29</sup>Funkce vracející orientaci magnetu podle jeho indexu

<sup>30</sup>Funkce vracející pozici magnetu podle jeho indexu

<sup>31</sup>Funkce vracející novou instanci spinneru se stejným stavem

**$\Omega$ -stavy**

Další důležitou datovou strukturou je něco, co nazveme  $\Omega$ -stav. Tato datová struktura má za úkol uložit stavy všech spinnerů a provádět na nich operace potřebné k řešení diferenciálních rovnic pomocí RK metod. Druhým úkolem  $\Omega$ -stavů je výpočet momentu síly pro všechny spinnery - toto v popisu RK metody představuje naši derivaci, neboli funkci  $f$  (viz Rov. 28). Celkový počet spinnerů v  $\Omega$ -stavu označíme  $p$ .

Hlavní vlastností  $\Omega$ -stavů je tedy pole spinnerů označené  $\mathbb{P} = \{\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2, \dots, \mathbb{S}_p\}$ , jehož velikost je  $|\Omega^{\mathbb{P}}| = \Omega^p$ . Na obecný  $k$ . prvek tohoto pole se budeme odkazovat následovně:  $\Omega^{\mathbb{P}}(k) = \mathbb{S}_k$ .

Jelikož úkolem  $\Omega$ -stavu je i určení všech momentů sil, musí si ukládat pole dopočítaných úhlových zrychlení jednotlivých spinnerů, které označíme  $A$ . Jednotlivé prvky pole  $A$  získáme dosazením do rovnice 30. Zrychlení spinnerů označíme symbolem  $\alpha$  a tím pádem  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ . Na prvky pole  $A$  se opět odkazujeme takto:  $\Omega^A(k) = \alpha_k = \frac{\mathbb{S}_k^\tau}{\mathbb{S}_k^I}$ .

Nyní je na řadě provést formalizaci řídicích rovnic 30 a 31 pomocí tohoto způsobu zápisu. Začneme rovnicemi pro výpočet silové a magnetické interakce magnetů, které nyní popíšeme jakožto funkce tří parametrů. Prvním parametrem bude vždy spinner  $\mathbb{S}$ , pro který budeme počítat momenty sil. Druhým parametrem je externí magnetický moment  $m_{external}$ , který působí na  $\mathbb{S}$ , a posledním parametrem je pozice momentu značená  $P_{external}$ . Formalizovaný přepis momentů sil je následující:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\tau_F(\mathbb{S}, m_{external}, P_{external})}_{\text{Moment síly ze silové interakce}} &= \underbrace{\sum_{j=1}^{\mathbb{S}^n}}_{\text{Iterace přes všechny magnety spinneru}} \underbrace{F_m(P_{external} - \mathbb{S}^P(j), \mathbb{S}^m(j), m_{external})}_{\text{Síla mezi } j. \text{ magnetem spinneru a externím magnetickým momentem}} \times \underbrace{(\mathbb{S}^P(j) - \mathbb{S}^S)}_{\text{Rameno síly}} \\
 \underbrace{\tau_{mag}(\mathbb{S}, m_{external}, P_{external})}_{\text{Moment síly z magnetické interakce}} &= \underbrace{\sum_{j=1}^{\mathbb{S}^n}}_{\text{Iterace přes všechny magnety spinneru}} \underbrace{\mathbb{S}^m(j) \times B(\mathbb{S}^P(j) - P_{external}, m_{external})}_{\text{Magnetické pole tvořené externím momentem na pozici } j. \text{ magnetu}}
 \end{aligned} \tag{32}$$

Nyní, když jsme formalizovali silové a magnetické interakce z jednoho externího magnetického dipólu, stačí určit celkový moment síly  $\tau_{tot}$ , kterým na spinner působí všechny magnety dohromady.  $\tau_{tot}$  tedy bude součet obou složek ze všech magnetů všech ostatních spinnerů. Nakonec také nesmíme zapomenout na započítání třecích účinků spinneru. Z  $\tau_{tot}$  následně dopočítáme úhlové zrychlení  $\alpha_k$  obecného  $k$ . spinneru  $\mathbb{S}_k$  takto:

$$\alpha_k = \frac{\tau_{tot}}{I} = \frac{1}{\mathbb{S}_k^I} \left( \underbrace{\sum_{j=1; j \neq k}^{|\Omega^{\mathbb{P}}|}}_{\text{Iterace přes všechny ostatní spinnery } \mathbb{S}_j} \underbrace{\sum_{i=1}^{\mathbb{S}_j^n}}_{\text{Iterace přes všechny magnety spinneru } \mathbb{S}_j} \left( \underbrace{\tau_F(\mathbb{S}_k, \mathbb{S}_j^m(i), \mathbb{S}_j^P(i))}_{\text{Silová složka}} + \underbrace{\tau_{mag}(\mathbb{S}_k, \mathbb{S}_j^m(i), \mathbb{S}_j^P(i))}_{\text{Magnetická složka}} \right) - \underbrace{\left( \mathbb{S}_k^\alpha + \mathbb{S}_k^\beta \cdot \mathbb{S}_k^\omega + \mathbb{S}_k^\gamma \cdot (\mathbb{S}_k^\omega)^2 \right)}_{\text{Třecí složka}} \right) \quad (33)$$

Pro použití v dalších výpočtech také zavedeme operace sčítání a násobení. Jednoduše řečeno, dochází k použití dané operace na každý prvek  $\Omega$ -stavu. Sčítáme-li dva  $\Omega$ -stavy, znamená to, že sčítáme vždy  $k$ . úhlovou rychlost prvního stavu s  $k$ . úhlovou rychlostí druhého stavu. Násobíme-li  $\Omega^A$  konstantou, znamená to, že násobíme každé úhlové zrychlení touto konstantou<sup>32</sup>. Matematicky bychom tyto operace formulovali následovně<sup>33</sup>:

$$\begin{aligned} \text{Sčítání: } \quad \Omega_{sum} &= \Omega_a + \Omega_b \\ &\Updownarrow \\ \Omega_{sum}^{\mathbb{P}}(k)^\omega &= \Omega_a^{\mathbb{P}}(k)^\omega + \Omega_b^{\mathbb{P}}(k)^\omega \quad \forall k \in 1, \dots, \Omega^{\mathbb{P}} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \text{Násobení: } \quad \Omega_b &= \Omega_a^A \cdot t \\ &\Updownarrow \\ \Omega_b^{\mathbb{P}}(k)^\omega &= \Omega_a^A(k) \cdot t \quad \forall k \in 1, \dots, \Omega^{\mathbb{P}} \end{aligned} \quad (35)$$

S tímto jsme konečně schopni definovat poslední vlastnost  $\Omega$ -stavu, kterou je krátký časový úsek  $\delta$ . Z výpočtu zrychlení je pak provedena predikce budoucího stavu po uplynutí  $\delta$ , který označíme  $^*\Omega$ . Jeho definicí je:

$$^*\Omega = \Omega + \Omega^A \cdot \Omega^\delta \quad (36)$$

V kódu jsou tyto struktury instancemi třídy `omega_state`.

<sup>32</sup>V rovnici 35 jsou jednotky:  $[rad \cdot s^{-1}] = [rad \cdot s^{-2}] \cdot [s]$ .

<sup>33</sup>Podmínkou sčítání je, že:  $\Omega_{sum}^{\mathbb{P}} = \Omega_a^{\mathbb{P}} = \Omega_b^{\mathbb{P}}$

**$\Phi$ -stavy**

Poslední datovou strukturou jsou tzv.  $\Phi$ -stavy, které jsou svou funkcí velmi podobné  $\Omega$ -stavům. Jejich účelem je opět umožnit použití RK metod. V průběhu jednoho simulačního kroku totiž dochází k dvojitému numerickému integrování - nejdříve, abychom získali z úhlového zrychlení úhlovou rychlost, a podruhé, abychom z úhlové rychlosti získali úhel ( $\alpha_k \xrightarrow{RK} \mathbb{S}_k^\omega \xrightarrow{RK} \mathbb{S}_k^\varphi$ ).

Vlastnosti  $\Phi$ -stavů jsou stejné jako u  $\Omega$ -stavů, kromě pole  $A$ , které je nahrazeno polem  $O$ . Narozdíl od pole  $A$ , které ukládá úhlová zrychlení, pole  $O$  obsahuje úhlové rychlosti každého spinneru. Pole  $O$  zapisujeme takto:  $\Phi^O = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p\}$ . Na libovoný  $k$ . člen se opět odkazujeme takto:  $\Phi^O(k) = \omega_k$ .  $\Omega$ -stavy a  $\Phi$ -stavy na sebe navazují následovně:

$$\Phi^O(k) = \Omega^{\mathbb{P}}(k)^\omega \quad \forall k \in 1, \dots, \Phi^p \quad (37)$$

Poté je predikce dalšího  $\Phi$ -stavu analogická predikci  $\Omega$ -stavu:

$$*\Phi = \Phi + \Phi^O \cdot \Phi^\delta \quad (38)$$

V kódu jsou tyto struktury instancemi třídy `phi_state`.

**5.3.2 Popis iteračního kroku**

Jak jsme již avizovali, pomocí  $\Omega$ -stavů a  $\Phi$ -stavů provedeme v každém iteračním kroku dvě numerické integrace:  $\alpha_k \xrightarrow{RK} \mathbb{S}_k^\omega \xrightarrow{RK} \mathbb{S}_k^\varphi$ .

Průběh výpočtu budoucího  $\Omega$ -stavu (a analogicky  $\Phi$ -stavu) bude probíhat následovně:

Máme začáteční stav  $\Omega_1$  a určíme  $k_1 = \Omega_1^A$ . Poté vytvoříme nový stav, jehož spinnery (resp. jejich úhlové rychlosti) jsou zároveň částečně ovlivněny úhlovými zrychleními z  $k_1$ . To, jakou mírou jsou ovlivněny, udává koeficient  $a_{2,1}$  vynásobený časovým krokem  $\Delta t$ . Toto odpovídá tomu, jako kdyby libovolný  $k$ . spinner  $\mathbb{S}_k$  byl zrychlován z jeho původní úhlové rychlosti  $\omega$  po dobu  $a_{2,1} \cdot \Delta t$  úhlovým zrychlením  $\Omega_1^A(k)$  na nějakou novou úhlovou rychlost  $\omega'$ . Tento výpočet tedy můžeme zapsat následovně:

$$\begin{aligned} \Omega_1'^{\mathbb{P}}(k)^\omega &= \Omega_1^{\mathbb{P}}(k)^\omega + k_1 \cdot a_{2,1} \cdot \Delta t \\ \Omega_1' &= \Omega_1 + k_1 \cdot a_{2,1} \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (39)$$

Takto vytvořené spinnery necháme zrychlovat a zároveň rotovat po dobu  $\Omega_1^\delta = c_2 \cdot \Delta t$ , čímž získáme:

$${}^*\Omega_1' = \Omega_1^{\mathbb{P}}(k)^\omega + \Omega_1'^A(k) \cdot \Omega_1^\delta \quad (40)$$

Nakonec získáme  $k_2$  jako úhlové zrychlení těchto zrychlených a pootočených spinnerů:

$$k_2 = {}^*\Omega_1'^A \quad (41)$$

Obecně můžeme tedy vyjádřit  $k_n$  takto<sup>34</sup>:

$$k_n = \left( \Omega_n + \left( \sum_{i=1}^n (k_i \cdot a_{n,i} \cdot \Delta t) \right) \cdot c_n \cdot \Delta t \right)^A \quad (42)$$

Po určení všech  $k_1, \dots, k_s$  konečně získáváme nový, odhadovaný stav:

$$\Omega_{n+1} = \Omega_n + \left( \sum_{i=1}^s (b_i k_i) \right) \cdot \Delta t \quad (43)$$

Identicky funguje postup i pro provádění numerického integrování  $\Phi$ -stavů, kde pro přehlednost v budoucích vzorcích místo  $k_i$  budeme používat  $q_i$ .

### 5.3.3 Simulační kontext

Simulační kontext poté opakovaně provádí tyto dvě numerické integrace v každém kroku a získává tak nové stavy, se kterými pokračuje v dalších krocích. Každý simulační kontext je instancí třídy `sim_instance`, jejíž vstupními parametry jsou:

1. **Simulační parametry:** JSON objekt přepisující vybrané výchozí simulační parametry<sup>35</sup>, jejichž hodnoty jsou v tabulce 13.
2. **Butcherova tabulka RK metody:** instance třídy `RK_matrix` (implementace je triviální podle pramene [20])
3. **Výchozí hodnoty spinnerů:** JSON objekt přepisující výchozí parametry, které se automaticky nastavují při vytvoření každého nového spinneru v tomto kontextu (viz Tab. 12).

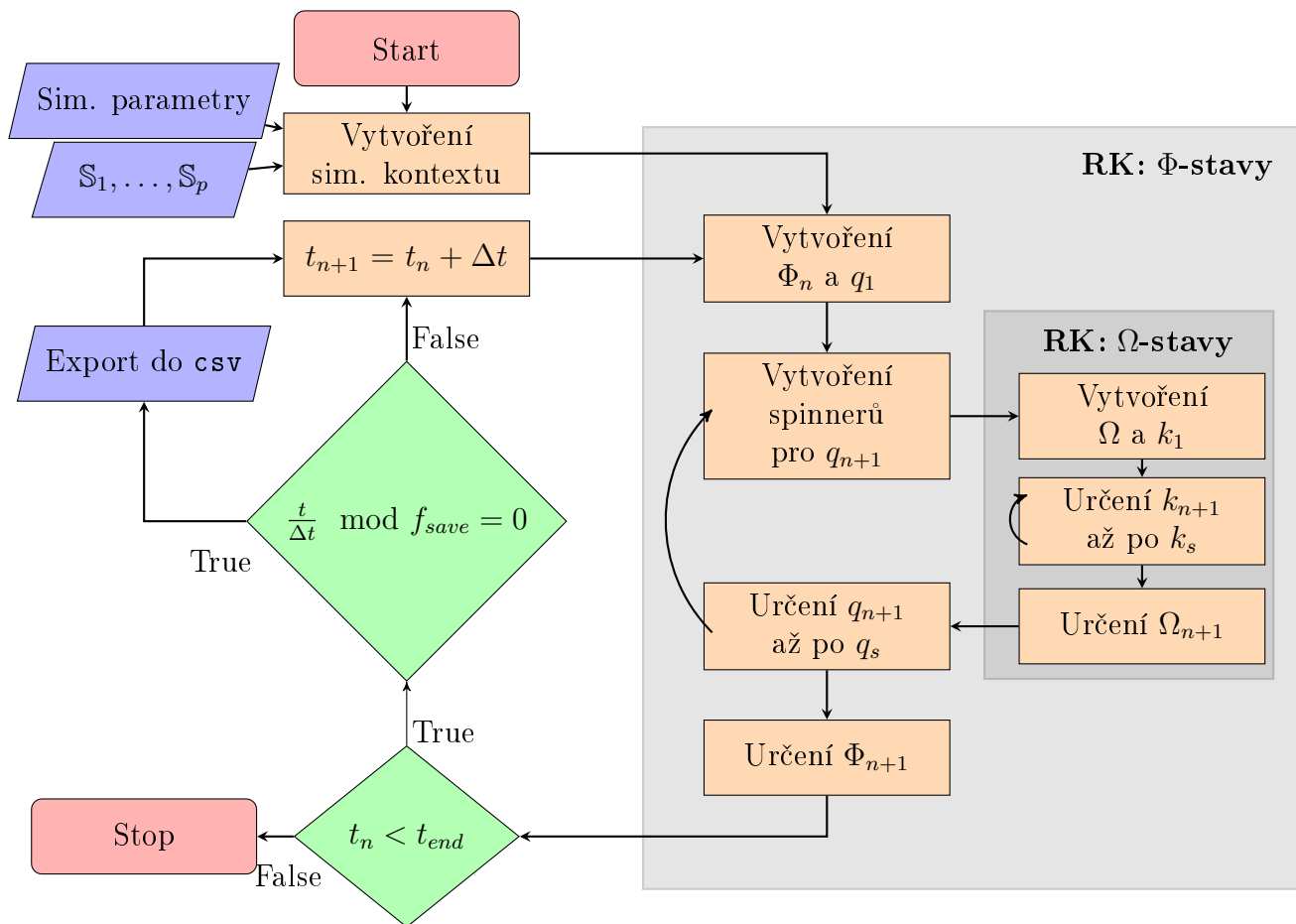
<sup>34</sup>Všimněme si podobnosti tohoto zápisu a původní definice RK metody (viz Rov. 28).

<sup>35</sup>K tomu využívá tzv. objektové destrukturalizace, což je objektová operace v jazyku JavaScript (viz [26]).

Tab. 13: Výpis simulačních parametrů třídy `sim_instance`:

Symbol	Datový typ	Iniciální hodnota
$\Delta t$	float64	$10^{-3}$
<code>start_time</code> ( $t_{start}$ )	float64	0
<code>end_time</code> ( $t_{end}$ )	float64	1
<code>save_freq</code> ( $f_{save}$ ) <sup>36</sup>	get float64	$\left\lceil \frac{10^{-3}}{\Delta t} + 1 \right\rceil - 1$
<code>out_path</code>	string	<code>out.csv</code>
<code>exports</code> <sup>37</sup>	string[]	<code>["s[0].<math>\omega</math>", "s[0].<math>\varphi</math>"]</code>

Po vytvoření kontextu jsou do něj přidány jednotlivé spinnery (číslovány od 0) pomocí funkce `add_spinner`, jejíž povinné parametry jsou  $S$ ,  $\varphi_0$  a  $\omega_0$  (viz Tab. 12). Zbylé parametry jsou dobrovolné - jejich výchozí hodnoty závisí na kontextu (viz bod 3 tabulce 13). Simulace je poté spuštěna funkcí `run`. Vývojový diagram celé simulace je znázorněn níže:



Obr. 17: Vývojový diagram simulace

<sup>36</sup>Určuje, kolikrátý každý krok se uloží do výstupního souboru.<sup>37</sup>Určuje, jaké vlastnosti kterých spinnerů se ukládají. Každá vlastnost má vlastní sloupec.

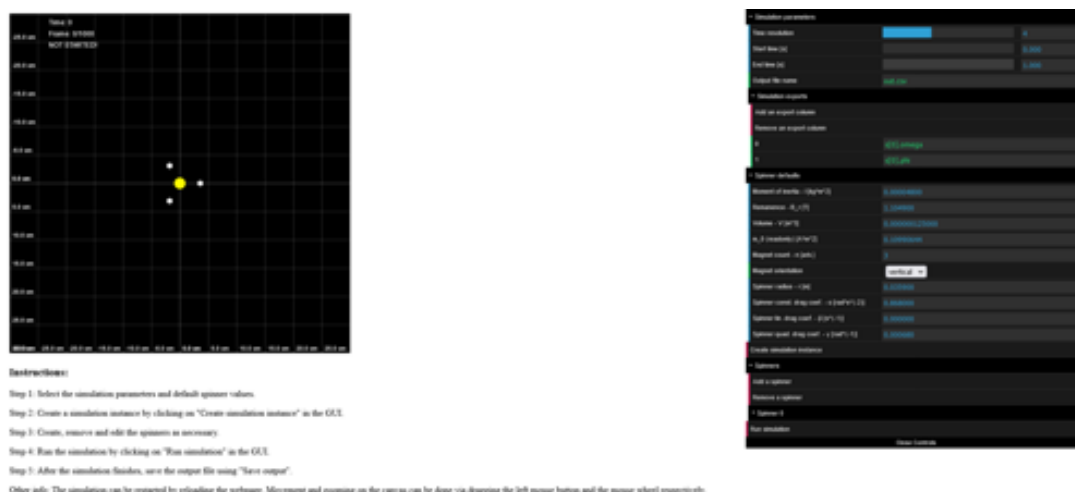
### 5.3.4 Časová komplexita

Pro dokončení simulace trvající čas  $T$  s časovým intervalem  $\tau$  je potřeba udělat  $T/\tau$  iterací kroků. V každém kroku počítáme interakce každého magnetu s každým - máme-li tedy  $P$  spinnerů a každý z nich má  $N$  ramen, získáváme  $(NP)^2$  interagujících dvojic. Zároveň provádíme více výpočtů, abychom zpřesnili výsledky, tudíž, použijeme-li RK metodu  $K$ . stupně a potřebujeme v každém kroku provést  $U$  numerických integrací (pro nás je  $U = 2$ ), získáváme finální časovou komplexitu:

$$\mathcal{O}\left(\left(\frac{T}{\tau}\right) \cdot (NP)^2 \cdot K^U\right) \quad (44)$$

### 5.3.5 Webové rozhraní

Webové rozhraní, dostupné na <https://rudytak.github.io/cdn/TMF37task10/index.html>, je druhým způsobem, jak simulaci spouštět. Výhodou webového rozhraní, oproti původnímu headless<sup>38</sup> rozhraní, je grafické zobrazení všech spinnerů, čímž je uživateli umožněno jednodušeji sledovat, co se v průběhu simulace děje. Nevýhodou je však značný výkonový rozdíl. Relativně pomalý běh simulace ve webovém rozhraní je způsoben potřebou vykreslovat každý stav simulace, což vyžaduje výpočetně nesrovnatelně složitější operace. Obě rozhraní jsou naprogramována pomocí jazyku **JavaScript**, což umožňuje používání stejných knihoven, přestože jedno rozhraní používá k interpretaci **NodeJS** a druhé používá jiný **JavaScriptový engine** (zavíslý na prohlížeči) - výpočty jsou tedy identické, i když různě rychlé.



Obr. 18: Ukázka webového rozhraní

<sup>38</sup>"Headless software" je označení pro takový software, který nemá grafické uživatelské rozhraní. Příkladem takového softwaru je právě NodeJS.





## 6 POTVRZENÍ SIMULACE

Po navržení a implementaci simulace je dalším krokem sledování její přesnosti a porovnání s reálnými experimenty. První způsob porovnání již byl zmíněn v Kap. 4, kde jsme porovnávali simulované a reálné dopady tření na spinner, a to bez externího magnetického pole (viz Obr. 14, Obr. 13) i v externím magnetickém poli (viz Obr. 16, Obr. 15). Všechna tato měření byla prozatím velmi podobná našim simulovaným hodnotám, ale byl použit pouze jeden spinner. Další experimenty se tedy zaměří na další okrajové případy a použití více spinnerů.

### 6.1 VYSOKORYCHLOSTNÍ VIDEO

Nevýhodou minulého měření pomocí magnetického čidla Vernier je, že jsme nebyli schopni přesně určit okamžitou pozici a rychlost. Toto nebyl tak velký problém, jelikož náš celkový záznam byl velmi dlouhý a nezajímalo nás mikroskopické chování spinneru, ale spíše makroskopický dopad tření na jeho schování. Nyní však budeme sledovat okamžité chování spinneru pomocí trackování videa natočeného vysokorychlostní kamerou. K trackování použijeme volně dostupný software zvaný **Tracker** [27]. Snímkovou frekvenci jsme nastavili v jednom experimentu na 60 snímků za sekundu, ve zbylých experimentech na 1000 snímků za sekundu.

#### 6.1.1 Aparatura

Aparatura pro následující experimenty je relativně jednoduchá. Jeden spinner osazený magnety je umístěn pevně na vodorovnou podložku a jeden z magnetů je barevně označen, abychom ho mohli trackovat. Ve vzdálenosti 8cm od něj je ve stejné rovině umístěn velký magnet (jehož remanenci jsme změřili v Kap. 3.3) a směr jeho magnetického momentu je kolmo vzhůru (stejně jako u magnetů spinneru). Celý systém je poté snímán kamerou umístěnou kolmo nad středem spinneru.



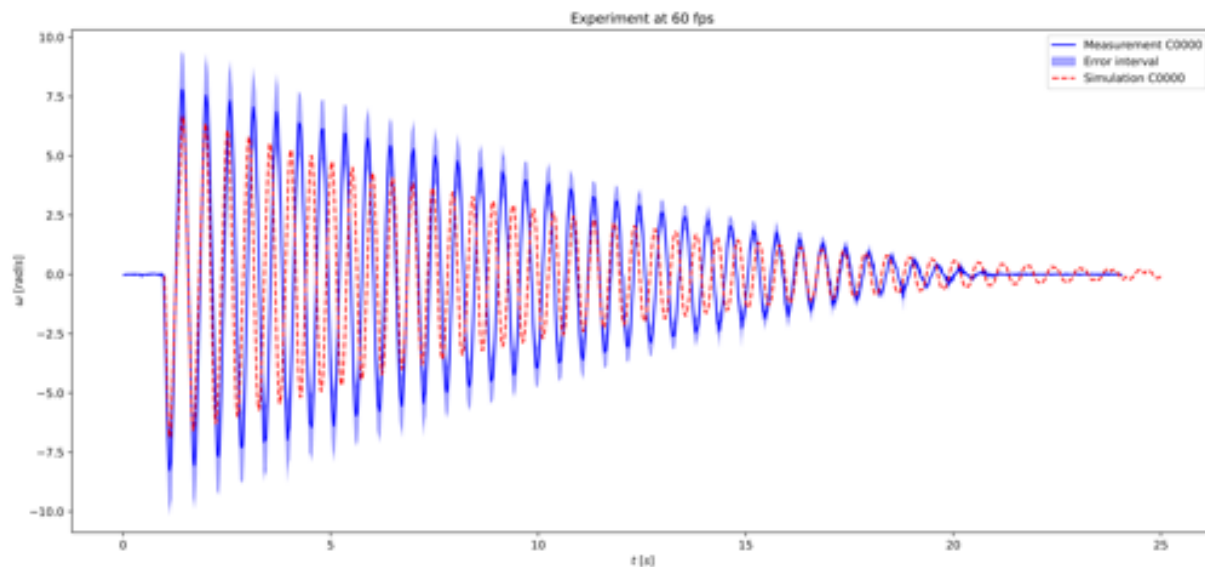
Obr. 19: Snímek ze záznamu jednoho z experimentů

### 6.1.2 Proces trackování

Proces trackování videa je značně usnadněn schopností softwaru **Tracker** vyhledávat značky automaticky pomocí definované vyhledávací masky. Pokud **Tracker** není schopen s dostatečnou jistotou pozici značky ve videu najít, musí být doplněna manuálně. Z trackovaných dat pozice značky v čase jsme poté schopni jednoduše dopočítat, pod jakým úhlem se spinner nachází v daný moment. Z rozdílů dvou úhlů jsme také schopni dopočítat přibližnou okamžitou úhlovou rychlost.

### 6.1.3 Výsledky měření při 60fps

První měření, označené C0000, je měření prováděné při snímkovací frekvenci 60 fps<sup>39</sup>. Nižší snímkovací frekvenci jsme si vybrali, jelikož naše kamera není schopna na vyšší frekvenci natáčet déle než 2 sekundy. Účelem tohoto experimentu bylo určit, do jaké míry se výsledky naší simulace a měření rozcházejí po uplynutí většího časového úseku. Spinner má kvůli působení vnějšího magnetu rovnovážnou polohu, ze které je v tomto experimentu vychýlen a poté ponechán oscilovat.



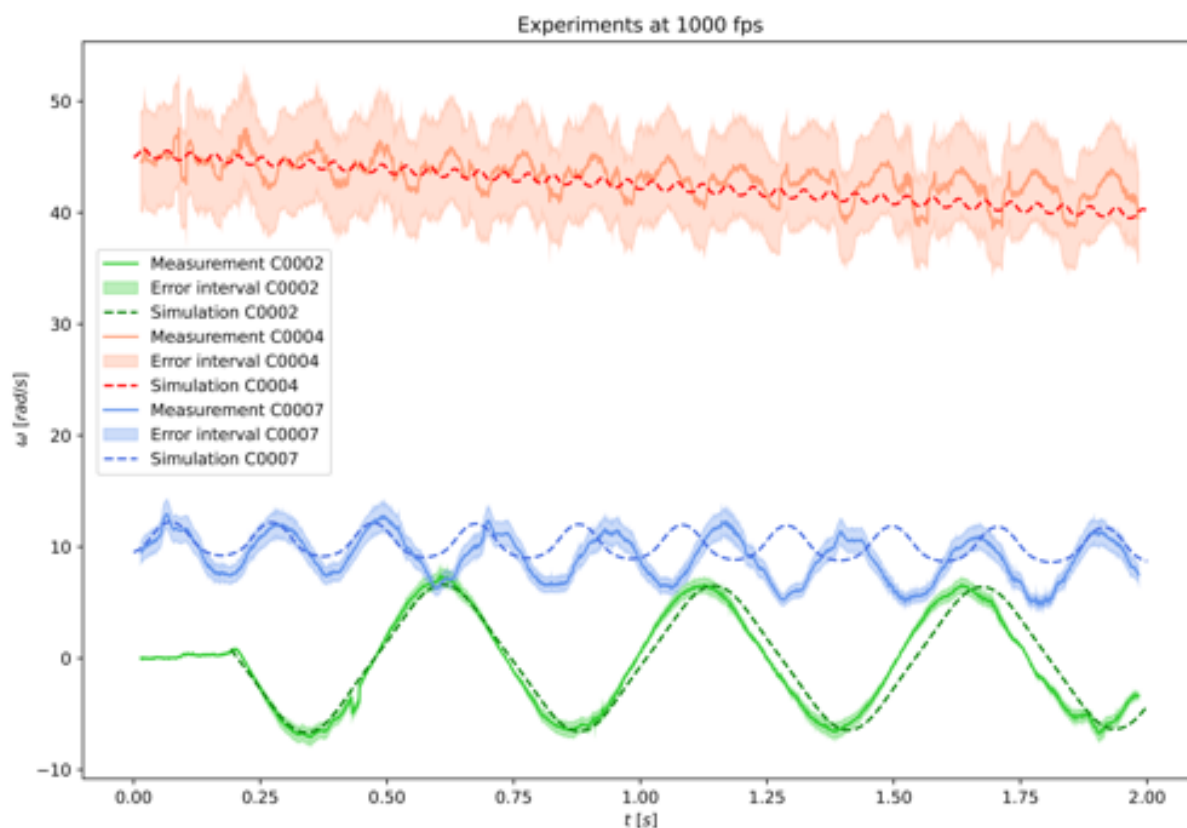
Obr. 20: Porovnání měření a simulace experimentu C0000 (60 fps)

Výsledné porovnání v grafu 20 je velmi uspokojivé. Vidíme, že amplituda i frekvence jsou velmi podobné v průběhu celého měření. Mezi možné důvody, proč simulace neodpovídá měření více, patří například: další vibrace a jiné nechtěnné jevy v ložisku; nepřesné určení třecích koeficientů; nepřesnost popisu velkého magnetu v simulaci pomocí několika magnetických momentů.

<sup>39</sup>Jednotka **fps**, vycházející z anglického *frames per second*, je často používaná zkratka pro českou jednotku "snímky za sekundu".

### 6.1.4 Výsledky měření při 1000fps

Další tři měření se zaměřují na mikroskopické chování, a to za různých rychlostí - experiment C0002 je za vysokých otáček, experiment C0004 za nižších otáček a v experimentu C0007 spinner osciluje kolem rovnovážné polohy stejně jako v experimentu C0000.



Obr. 21: Porovnání měření a simulace experimentů C0002, C0004 a C0007 (1000 fps)

Graf 21 ukazuje, že s rostoucí rychlostí se měření a simulace více a více rozcházejí. Toto může opět být způsobeno nechtěnými jevy, jako například vibracemi v ložisku, které mohou být při vyšších rychlostech více prominentní. Při nižších otáčkách stále sledujeme velmi dobrou shodu frekvencí a amplitud. Simulování vysokých rychlostí jsme tedy označili za možnou slabinu naší simulace.

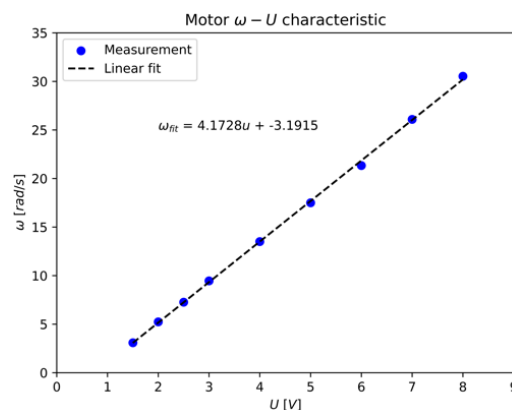


## 7 MAGNETICKÉ VÁZÁNÍ

Velmi důležitým jevem, který jsme při dalším experimentování objevili, je, že dva spinnery umístěné blízko sebe, z nichž jeden je poháněn motorem<sup>40</sup>, se mohou magneticky vázat - tzn. že si hnaný a hnací spinner udržují nějaký konstantní poměr rychlostí. Tomu, v jakém poměru jsou, budeme říkat "mód". Například, když jsou rychlosti hnaného a hnacího spinneru stejné, řekneme, že jsou v módu 1 ku 1 (značeno 1 : 1). Později v této kapitole budeme tyto módy dále zkoumat a budeme vždy prvním číslem označovat rychlost hnaného spinneru a druhým číslem rychlost hnacího spinneru. Tento jev je obzvlášť důležitý, jelikož umožňuje tvorbu prvního primitivního druhu magnetického převodu.

### 7.1 MĚŘENÍ MAGNETICKÝM ČIDLEM

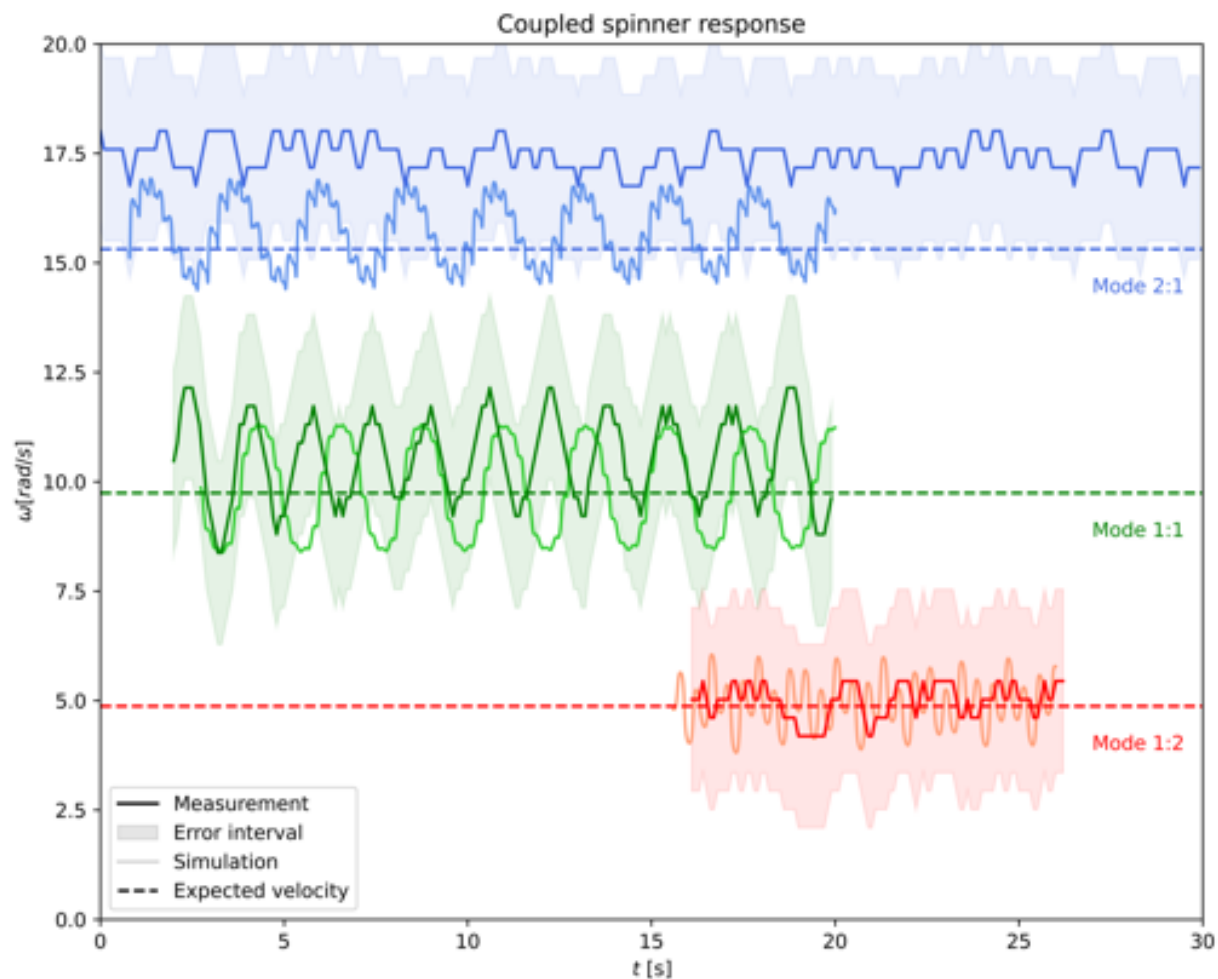
Prvním způsobem, jak jsme se pokoušeli o sledování vázání spinnerů, bylo pomocí magnetického čidla Vernier, stejně jako na Obr. 11. Rotaci hnaného spinneru jsme sledovali tímto čidlem, zatímco hnací spinner byl poháněn vrtačkou regulovanou laboratorním zdrojem napětí. Hnaný i hnací spinner byly pevně připevněny ve vzdálenosti 8cm (vzdálenost jejich středů). Z hustoty naměřených peaků jsme opět určili přibližnou úhlovou rychlost hnaného spinneru (stejně jako v kódu 4). Rychlost hnacího spinneru jsme určili z napětí, kterým byla vrtačka poháněna, jelikož jsme pro ni dříve určili charakteristiku výstupní úhlové rychlosti v závislosti na napětí (viz Obr. 22).



Obr. 22:  $\omega - U$  charakteristika motoru

Jak již bylo zmíněno, nevýhodou této metody je, že měření magnetickou sondou je velmi nepřesné a není schopné určit okamžitou rychlost. Další nevýhodou je, že magnetickou sondu jsme měli k dispozici pouze jednu. Přesto jsme byli schopni několik módů naměřit a porovnat se simulací a tyto výsledky jsou shrnuty v grafu 23.

<sup>40</sup>Tento spinner nazveme hnacím.



Obr. 23: Výsledky měření vázání prováděného magnetickým čidlem

## 7.2 HLUBŠÍ ANALÝZA

Neuspokojivá přesnost výsledků získaných předchozí analýzou dat z magnetického čidla vedla k pokusům o vynalezení rozdílného způsobu zpracování dat, který by nám umožnil sledovat rychlost v průběhu jedné otáčky. Doposud nebylo možné tento detail získat, jelikož předchozí způsob pouze počítá jednotlivá otočení, ale ignoruje, jak jedna samotná otočka vypadá.

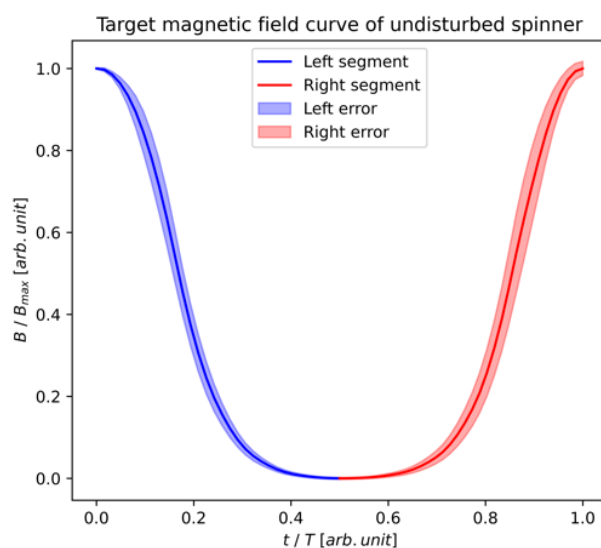
Nový způsob zpracování by měl stále být schopen analyzovat již naměřená data, abychom nemuseli měnit aparaturu ani měření provádět znovu. Nakonec jsme se rozhodli sledovat deformaci jednotlivých peaků průběhu magnetické indukce a z této deformace se snažit odhadnout a vyvodit přesný úhel spinneru v daném momentu. Do hloubky je tento proces popsán v další kapitole.

### 7.2.1 Popis nového algoritmu

Tento algoritmus je založen na tom, že nám bude známá závislost magnetického pole na úhlu spinneru. Pokud tuto závislost budeme znát a budeme mít nějaký nový záznam průběhu magnetické indukce v čase, jsme schopni zpětně vyvodit, jaký musel být průběh úhlu v čase.

Celý proces tedy začíná tím, že musíme naměřit průběh magnetického pole spinneru, který se otáčí definovanou a konstantní rychlostí. Jeho průběh úhlu v čase je tedy triviální - je to přímka se směrnici závislou na jeho rychlosti.

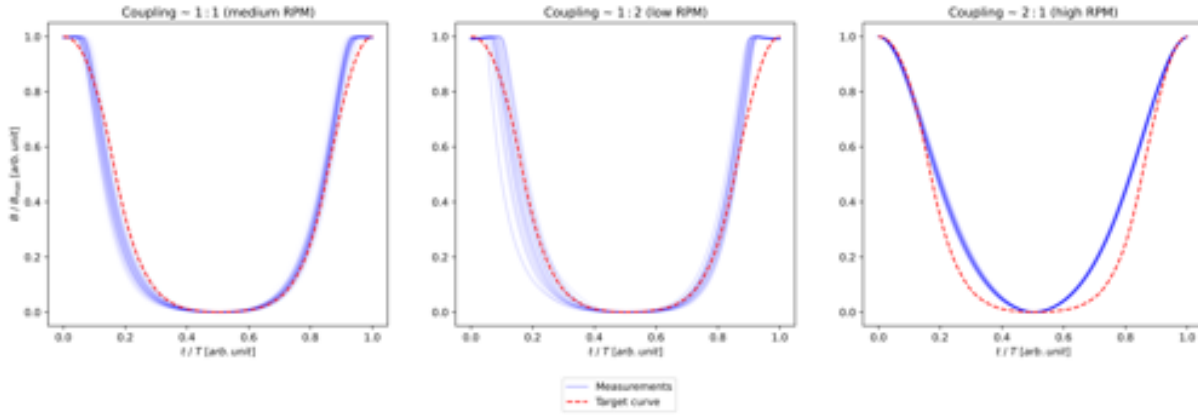
Spinner osazený magnety byl tedy umístěn do vrtačky a roztáčen konstantní a známou rychlostí. Tento spinner označíme jako *nerušený*, jelikož na něj nepůsobí vnější magnetické síly a je poháněn motorem, nikoliv magnetickým vázáním. Záznam z čidla je následně rozdělen podle jednotlivých peaků. Tyto úseky mezi peaky odpovídají průběhu magnetického pole v jednotlivých pootočeních spinneru od jednoho magnetu k následujícímu. Tomuto pootočení spinneru od jednoho magnetu k dalšímu (v našem případě o  $120^\circ$ , protože spinner má 3 ramena) budeme říkat *sub-perioda*. Amplitudy a doby trvání všech sub-period jsou poté normalizovány, jelikož přesná velikost



Obr. 24

$B$  nás nezajímá, ale zajímá nás pouze tvar této křivky. Všechny sub-periody jsou následně zprůměrovány, čímž získáváme finální tvar (viz Obr. 24). Tato křivka průběhu jedné sub-periody nerušeného spinneru se stane naším podkladem, vůči kterému budeme srovnávat ostatní, nyní již rušené, průběhy a vyvozovat jejich úhlové závislosti v čase. Jako poslední krok, rozdělíme cílový průběh na prosté úseky, což usnadní pozdější manipulace v algoritmu.

Všechna tři měření provedená v předchozí kapitole (viz Obr. 23) jsou zpracována stejně jako naše kontrolní měření - rozdělena na sub-periody podle peaků, normalizována a rozdělena na prosté úseky. Nyní však nebudeme provádět průměrování, ale budeme každou sub-periodu řešit jednotlivě. Porovnání všech sub-period je k nahlédnutí v grafu 25.



Obr. 25: Porovnání sub-period rušených spinnerů vůči nerušenému průběhu. Každá jednotlivá subperioda je vykreslena poloprůhlednou modrou, což umožní sledování nejčastějších průběhů, které budou tmavší.

Dalším krokem je zpětné odvození toho, jaký byl průběh úhlu v čase v těchto sub-periodách. Celá sub-perioda je rozdělena na 2 prosté úseky a tím pádem jsme v obou z nich pro náš nerušený průběh schopni přesně přiřadit, že každá naměřená hladina  $B_i$  odpovídá specifickému času  $t_i$ , ve kterém byla naměřena, a ze znalosti rychlosti jsme ke každému času  $t_i$  schopni určit přesný úhel, ve kterém se spinner v tu chvíli nacházel  $\varphi_i$ :

$$B_i \dots t_i \dots \varphi_i$$

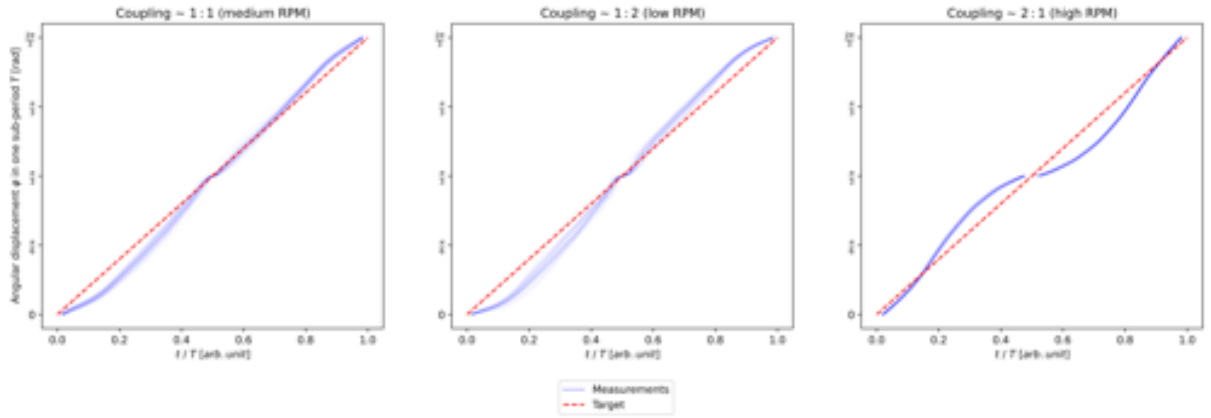
Zpětné odvození pro rušené sub-periody poté spočívá v porovnání s cílovou (nerušenou) křivkou. Pro každou naměřenou hladinu magnetického pole rušeného spinneru  $B_j$  hledáme odpovídající hladiny v naší cílové křivce  $B_{i1}$  a  $B_{i2}$ , mezi kterými se  $B_j$  nachází, tedy splňuje  $B_{i1} < B_j < B_{i2}$ . Z jejich odpovídajících časů a úhlů lineární interpolací určit přibližný čas, ve kterém by se  $B_j$  objevilo v nerušeném případě a tedy i jaká je jeho přibližná pozice v čase  $t_j$ :

$$B_j \dots t_j \dots \varphi_j = \frac{B_j - B_{i1}}{B_{i2} - B_{i1}} \cdot (\varphi_{i2} - \varphi_{i1}) + \varphi_{i1}$$

Úskalím tohoto procesu je, že když je směrnice magnetické indukce ( $dB/dt = \dot{B}$ ) velmi malá a tedy i  $B_{i2} - B_{i1}$  malé, extrémně rychle roste nepřesnost určení  $\varphi_j$ . Při nulové směrnici pak nejsme schopni úhel určit vůbec a chybovost je tedy nepřímo úměrná  $\dot{B}_i$ .

Po určení  $\varphi_j$  a  $t_j$  pro všechny datové body rušené sub-periody jsme schopni vytvořit závislost úhlu na čase a porovnat ji s kontrolním případem (viz Obr. 31).

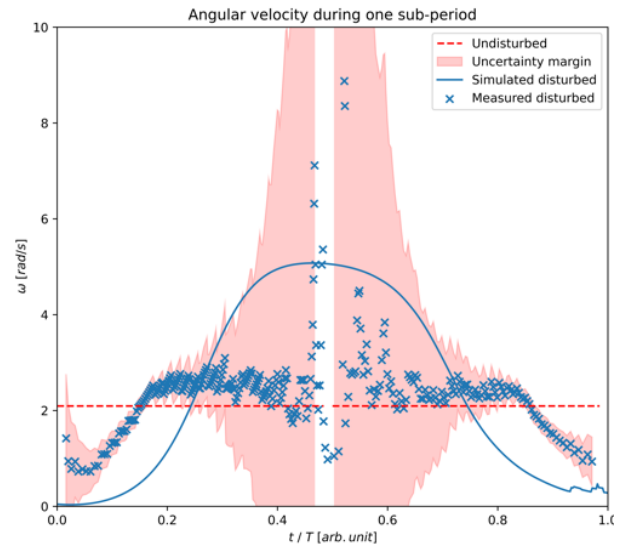




Obr. 26: Porovnání průběhu úhlu v sub-periodě rušených spinnerů vůči nerušenému průběhu. Každá subperioda je opět vykreslena poloprůhlednou modrou, což umožní sledování nejčastějších průběhů.

Nakonec provedeme porovnání se simulací pro mód 2 : 1. Porovnávat budeme úhlovou rychlost v průběhu sub-periody, kterou z měřených dat dopočítáme pomocí rozdílu vedlejších bodů. Výsledný graf lze vidět na 27. Můžeme si všimnout, že kolem středu, tedy když je  $\dot{B}$  malá, je interval nepřesnosti obrovský (viz dříve zmíněné důvody).

Simulované a měřené hodnoty si jsou, alespoň co se tvaru křivky týče, lehce podobné. Důvody, proč se neshodují více, mohou být mnohé. Například: nežádoucí jevy v ložisku, nepřesnost cílové křivky nebo také celková komplexita algoritmu, který pro své fungování využívá mnohé předpoklady.



Obr. 27: Porovnání měřeného a simulovaného průběhu úhlové rychlosti v čase pro mód 2 : 1

## 7.3 VYLEPŠENÍ APARATURY

### 7.3.1 Laserový snímač (LS)

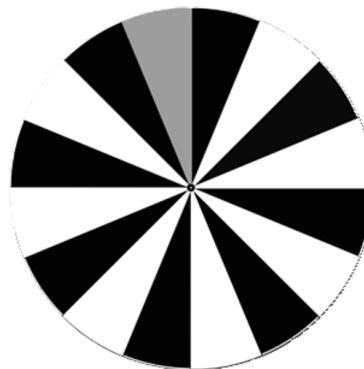
Dříve použité metody snímání pohybu spinnerů mají své výhody i nevýhody. Nevýhodou snímání pomocí magnetického čidla je nízká přesnost a nevýhodou snímání pomocí videa je pracnost následného trackování a časová limitace záznamu.

Dalším krokem k vylepšení naší aparatury tedy bylo vytvořit lepší způsob snímání. K tomuto jsme se rozhodli vytvořit vlastní senzory postavené na principu sledování absorpce laserového paprsku fotodiodou. Na každý spinner pak byl připevněn papírový disk se střídajícími se černými a bílými pruhy (viz Obr. 28), které jinak absorbují světlo z laseru, čímž se mění i měřené napětí na fotodiodě. Z průběhu napětí měřeného osciloskopem jsme následně podobně schopni určit úhlovou rychlost, protože každý proužek odpovídá  $22.5^\circ$  rotace.

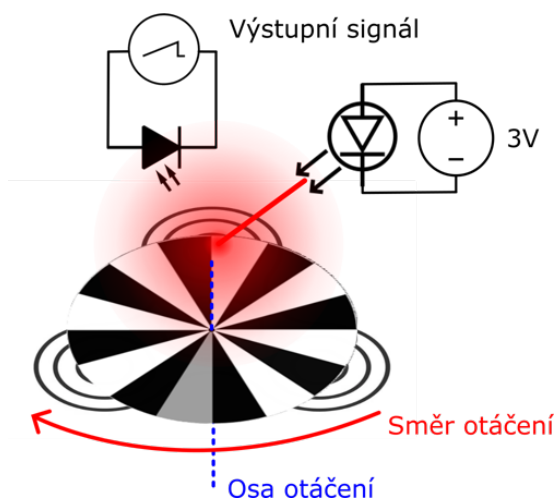
Nyní jsou našimi limitacemi pouze: vzorkovací frekvence osciloskopu, která je pro naše využití více než dostatečná, a počet pruhů na papírovém kole, který můžeme dle libosti měnit.

### 7.3.2 Zbytek aparatury

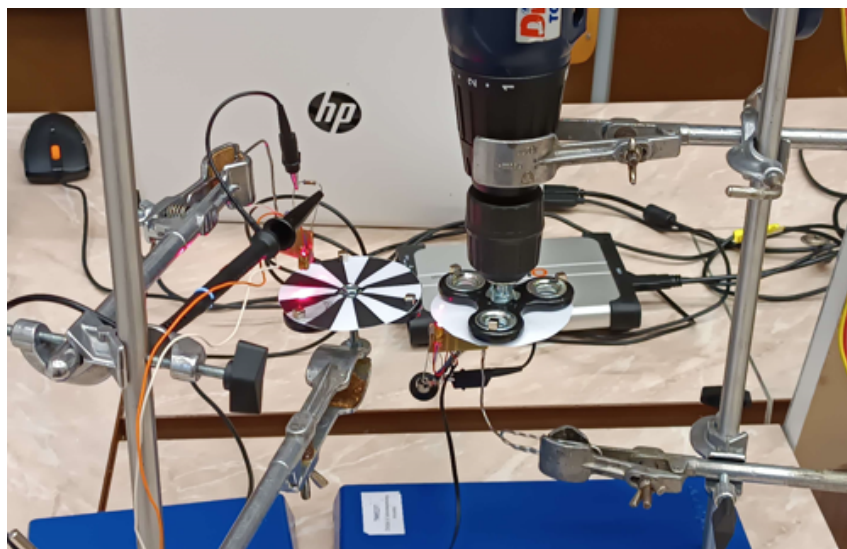
Celá aparatura (viz Obr. 30) využívá 2 laserové snímače - jeden pro hnací spinner a jeden pro hnaný spinner - a jejich výstupní signály jsou nahrávány dvoukanálovým osciloskopem. Hnací spinner je poháněn motorem, resp. vrtačkou, jejíž otáčky jsou regulovány laboratorním zdrojem napětí. Hnaný spinner je poté pevně upevněn v definované vzdálenosti od hnacího.



Obr. 28: Obrázek použitého absorpčního kola (16 výsečí) na našich spinnerech. Vyšší počet výsečí je možný, ale 16 bylo pro náš případ dostatečné. Šedivá výseč tvoří referenční bod, podle kterého je možné v kódu určit přesnou rotaci vůči okolí.



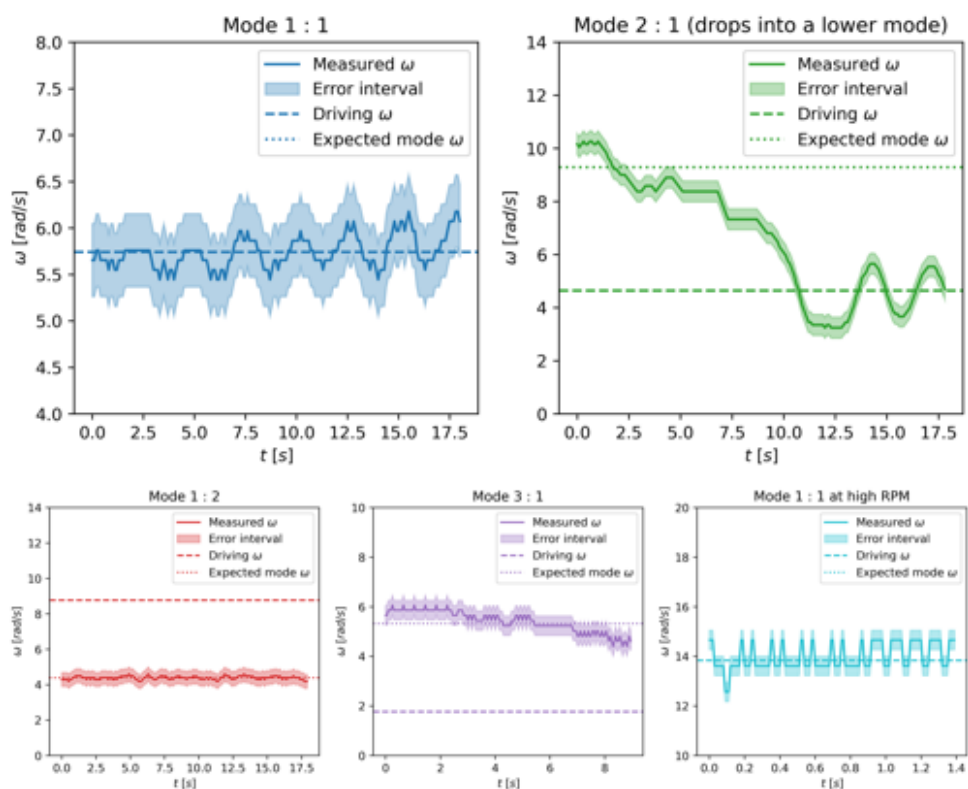
Obr. 29: Ilustrace použití laserového snímače (LS)



Obr. 30: Fotografie finální aparatury

### 7.3.3 Výsledky měření

Pomocí nové, přesnější, aparatury jsme prováděli měření čtyř různých módů. U jednoho z nich jsme opakovali měření i za vyšších otáček, abychom sledovali, zda se chování vazby v tomto případě změní.



Obr. 31: Měření magnetické vazby pomocí LS

Nejzajímavější pro nás jsou výsledky měření módu 1 : 1 a 2 : 1, jelikož na nich můžeme ukázat dva jevy objevující se v magnetické vazbě. Na měření módu 1 : 1 je vidět oscilace rychlosti hnaného spinneru kolem očekávané rychlosti. K tomuto jevu dochází, protože spinnery tvořící vazbu nebyly ideálně zaklesnuty do sebe (ramena hnaného spinneru nezapadala přesně do středu mezery mezi rameny hnacího spinneru). Rameno hnaného spinneru, které nezapadá perfektně do středu mezery, je tedy blíže k jednomu z ramen hnacího spinneru, což vede k nerovnováze sil, protože z této strany na hnaný spinner působí větší síla než z druhé strany. Tento přirozený způsob vracení ramene do rovnovážné polohy se projevuje právě touto oscilací, která se objevovala již v minulém měření (viz mód 1 : 1 v grafu 23).

Druhým jevem je přecházení mezi módy. Pokud je rychlostní rozdíl spinnerů příliš velký a síla vazby příliš malá, může dojít k rozbití vazby. Poté, tím že hnaný spinner ztrácí rychlost kvůli tření, může být zachycen v nižším módu, jehož interval přijatelných rychlostí je větší. K tomuto došlo v měření módu 2 : 1. Spinner se chvíli držel na módu 2 : 1, ale kolem šesté sekundy byla jeho rychlost kvůli tření již příliš malá a opustila interval přijatelných rychlostí pro mód 2 : 1. Nyní nevázaný spinner dále zpomaloval, dokud se vazba neobnovila na nižším módu. Ihned po jejím obnovení je opět vidět oscilace kolem rovnovážné polohy, kterou jsme popisovali v předchozím odstavci. To, proč se přijatelný interval rychlostí zmenšuje, vychází z toho, že v případě módu 1 : 1 zapadá do každé mezery hnacího spinneru přesně 1 rameno hnaného (resp. 1 rameno proběhne mezerou). Při módu 2 : 1 "zapadají" do každé mezery dvě ramena (resp. 2 ramena musí proběhnou stejně velkou mezerou), mají tedy méně místa a přesnost fázového seřazení hraje ještě důležitější roli.

## 8 PŘENOS MOMENTU SÍLY

Možnost vytváření takto magneticky vázaných spinnerů je slibnou známkou toho, že bude opravdu možné využít takovýto systém jako funkční převod. Kromě poměru otáček na vstupu a výstupu je ale k vytvoření použitelného převodu potřeba určit i moment síly, který je taková převodovka schopna přenášet.

### 8.1 ÚPRAVA APARATURY

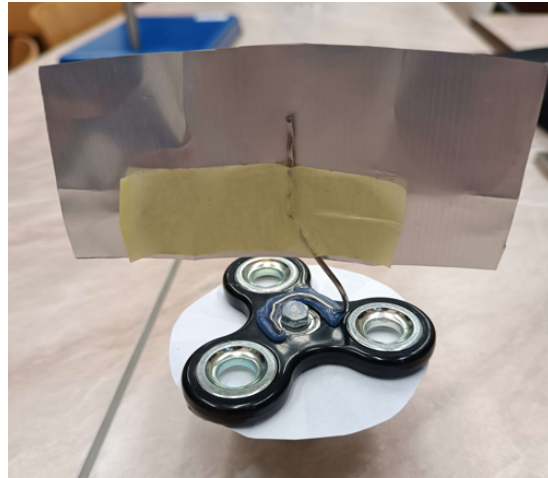
K tomu, abychom změřili přenesený moment síly, lehce upravíme naši předchozí aparaturu popsanou v kapitole 7.3.2. Tato úprava spočívá v připevnění pevného, ale lehkého, plechového obdelníku k hnanému spinneru, který bude působit jako zátěž. Moment síly, kterým plech působí na spinner, vychází z odporu vzduchu, kterému je plech podroben. Výhodou tohoto řešení je, že zátěž dynamicky roste s otáčkami, což nám později umožní jednoduše hledat maximální přenesitelný moment v závislosti na několika relevantních parametrech této rudimentární převodovky. Alternativní řešení, jako například vytváření umělého tření na spinneru, kde by přenášený moment byl počítán ze smykového tření dvou styčných ploch o známých vlastnostech, má značné nevýhody jako například:

1. **Nedynamičnost v závislosti na rychlosti** - Idealizované smykové tření se narodí od odporu vzduchu nemění s rychlostí, což znamená, že by bylo potřeba vytvořit specifickou aparaturu pro každý přenášený moment, který bychom si přáli změřit.
2. **Konstrukční náročnost** - Vytváření mnohých styčných ploch různých velikostí a potřeba je udržet perfektně v kontaktu na tak malém objektu jako je fidget spinner je nesrovnatelně konstrukčně složitější, než námi nabízené řešení.

Když nám byl jasný způsob vytváření zátěže, stačilo už jen jeden ze spinnerů permanentně upravit přidáním tohoto plechu. Čepel tohoto jednoduchého "větráčku" byla připojena pomocí pevného drátu, lepicí pásky a lepidla k tělu spinneru tak, aby drát nijak nezasahoval do ložiska a neměnil vlastnosti spinneru samotného. Strategickým ohnutím drátu jsme pak byli schopni čepel umístit jejím středem co nejblíže k ose otáčení spinneru. Bohužel, toto nebylo perfektní, a tak budeme muset později provádět lehkou korekci v jednom z našich výpočtů. Výsledný vzhled upraveného spinneru je na obrázku 32.

## 8.2 POPIS CHOVÁNÍ

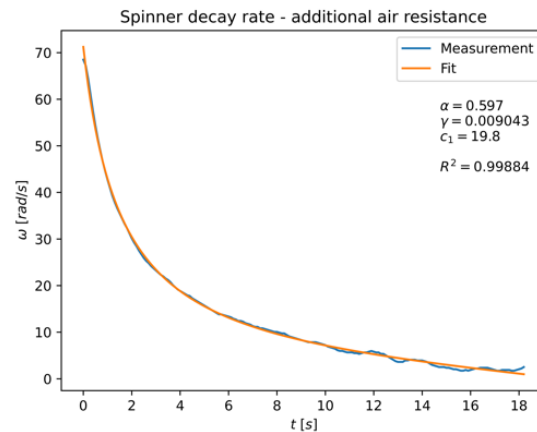
V předchozích experimentech jsme tření vycházející z odporu vzduchu popisovali naším třecím koeficientem  $\gamma$ . Nyní jsme čistě pro kontrolu toho, že námi udělané změny opravdu měly dopad hlavně na odpor vzduchu, provedli měření, kdy jsme spinner roztočili náhodou rychlostí a nechali ho pomalu zpomalit pouze vlastním třením. Poté jsme k analýze těchto dat použili náš předchozí algoritmus (viz kód 3 a 4) a data jsme fitovali stejně jako v grafech 14, 13, 16, 15, čímž jsme určili nové koeficienty  $\alpha$  a  $\gamma$  pro tento upravený spinner. Výsledky této prvotní analýzy jsou k vidění na grafu 33.



Obr. 32: Spinner upravený k měření přenášeného momentu síly.

Jak je z fitu zřejmé, náš analytický popis tření byl stále úspěšně schopen popsat i tento případ. Naměřený koeficient  $\gamma = 9.04 \cdot 10^{-3} \text{ rad}^{-1}$  v tomto případě vychází přibližně 30 krát větší, než v původních měřeních těchto koeficientů pro holé spinnery (viz Rov. 27). Koeficient  $\alpha$  se udržuje stále v původním rozmezí a naše úpravy na něj tedy měly zanedbatelný dopad.

Když víme, že naše úpravy měly kýžený efekt na chování spinneru, přejdeme k určení závislosti brzdného momentu  $\tau_{\text{breaking}}$  v závislosti na rychlosti otáčení.



Obr. 33: Výsledky měření k určení třecích koeficientů spinneru.

### 8.2.1 Hrubý matematický model

Nejdříve se pokusíme o vytvoření hrubého matematického modelu, kterým se pokusíme závislost  $\tau_{\text{breaking}}$  na  $\omega$  popsat. K tomuto použijeme klasický středoškolský vzoreček pro výpočet odporové síly turbulentního proudění:

$$F = -\frac{1}{2}\rho C_D S v^2 \quad (45)$$

Tento vzorec využijeme k výpočtu síly v každém bodě plechu. Pro každý bod poté vy počítáme vlastní moment síly přes rameno (neboli jeho vzdálenost od osy otáčení) a integrováním přes celou plochu získáme celkový brzdný moment.

Zde také budeme muset zapojit dříve zmíněnou kompenzaci pro to, že střed plechu v našem případě byl posunut přibližně  $5mm$  od osy otáčení spinneru. Rozdělíme tedy celou plochu na dvě části - levou (o šířce  $R_{left}$ ) a pravou (o šířce  $R_{right}$ ), kde jedna z nich bude o  $5mm$  širší a druhá o  $5mm$  užší než je polovina celé šířky plechu. Výpočet je pak následující:

$$\begin{aligned}
 \tau_{breaking} &= \int_{-R_{left}}^{R_{right}} (F(r) \times r) dS \\
 &\quad \Downarrow_{F(r) \perp r} \\
 \tau_{breaking} &= \int_{-R_{left}}^{R_{right}} \left( -\frac{1}{2} \rho C_D v^2 r \right) dS \\
 &\quad S=h \cdot r \Downarrow_{v=\omega \cdot r} \\
 \tau_{breaking} &= \int_{-R_{left}}^{R_{right}} \left( -\frac{1}{2} \rho C_D h (r\omega)^2 r \right) dr \\
 \tau_{breaking} &= -\frac{1}{2} \rho C_D h \omega^2 \int_{-R_{left}}^{R_{right}} r^3 dr \\
 \tau_{breaking} &= -\frac{1}{8} \rho C_D h (R_{right}^4 + R_{left}^4) \omega^2
 \end{aligned} \tag{46}$$

Po dosazení tabulkové hodnoty hustoty vzduchu, změřených rozměrů plechu<sup>41</sup> a činitele odporu  $C_D$ , získáme závislost  $\tau_{breaking}$  na  $\omega$ . Činitel odporu se těžko určuje, ale pro tento hrubý odhad jsme vybrali hodnotu 1.4, jelikož plech je zároveň částečně konkávně prohnutý<sup>42</sup>.

K brzdnému momentu pak můžeme ještě připočítat třecí koeficient spinneru, čímž získáme finální hrubý odhad:

$$\tau_{breaking} = -\frac{1}{8} \rho C_D h (R_{right}^4 + R_{left}^4) \omega^2 - I \gamma \omega^2 \tag{47}$$

<sup>41</sup>Změřené rozměry plechu byly:  $h = 5.2cm$ ,  $R_{left} = 5.55cm - 0.5cm$  a  $R_{right} = 5.55cm + 0.5cm$

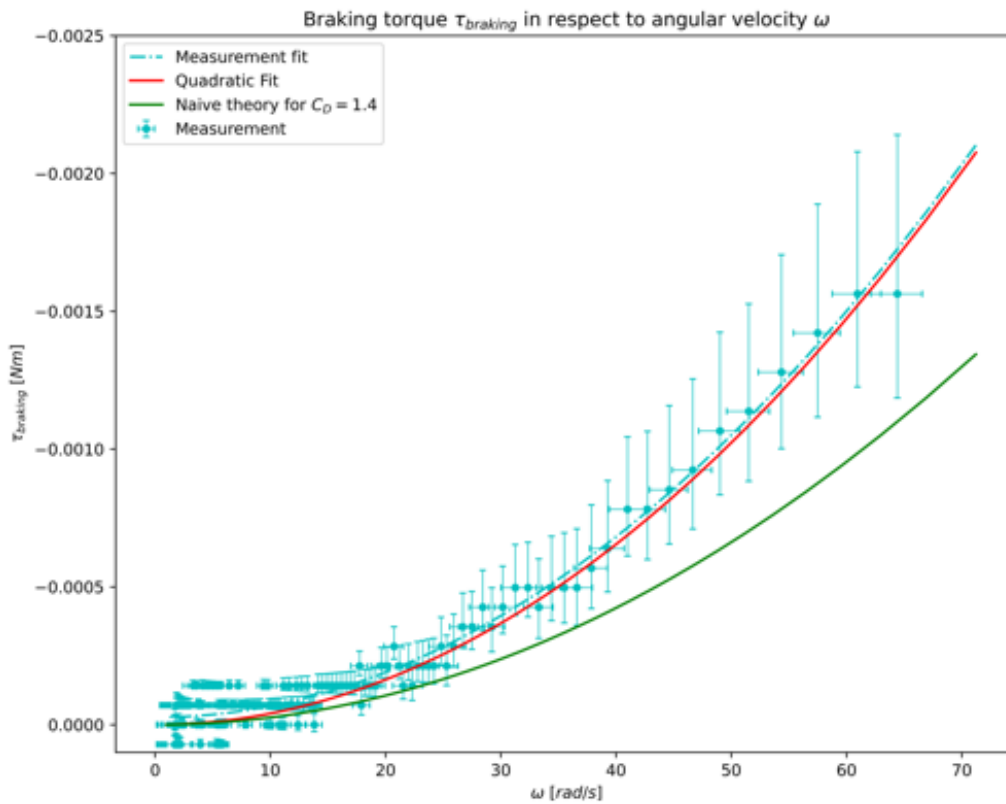
<sup>42</sup>Zde vycházíme z hodnot určených v knize *Fluid-Dynamic Drag* od Sigharda F. Hoernera [28].

### 8.2.2 Měřená $\tau - \omega$ závislost

Vyjádřením  $\tau_{breaking}$  v závislosti na  $\omega$  pomocí třecí koeficientů naměřených v grafu 33 získáváme:

$$\begin{aligned}\omega(t) &= -\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \tan(\sqrt{\alpha\gamma}(t + c_1)) \\ \tau_{breaking} &= I\dot{\omega} = -I\alpha \sec^2(\sqrt{\alpha\gamma}(t + c_1))\end{aligned}\quad (48)$$

Naměřená závislost celkového brzdného momentu na úhlové rychlosti, odpovídající analytický fit, kvadratický fit a konečně hrubý magnetický model (včetně členu  $-I\gamma\omega^2$ ) jsou vyobrazeny v grafu níže:



Obr. 34: Závislost měřeného brzdného momentu na úhlové rychlosti v porovnání s hrubým modelem

Jak můžeme vidět, čistě kvadratický fit velmi dobře popisuje tuto závislost, což bychom očekávali vzhledem k původní rovnici 45. Dále budeme přenesený moment síly počítat pouze takto:

$$\tau(\omega) = -4.09 \cdot 10^{-7} \omega^2 \quad (49)$$



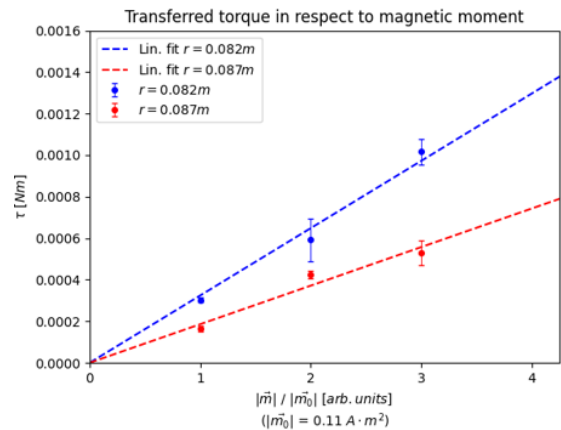
### 8.3 MĚŘENÍ PŘENOSU

Pomocí nové aparatury jsme schopni určit maximální přenášený moment síly pro různé konfigurace. Tuto hodnotu zjistíme tak, že budeme hnací spinner pomalu roztáčet rychleji a rychleji (pomocí zvyšování napětí na laboratorním zdroji), dokud se vazba mezi hnacím a hnaným spinnerem se zátěží nerozbije. Z nejvyšší hodnoty napětí zpětně dopočítáme úhlovou rychlost (viz Obr. 22) a z úhlové rychlosti dopočítáme maximální přenesený moment. Vždy budeme urdžovat vazbu v módu 1:1, protože jiné módy jsou moc citlivé a nespolehlivé.

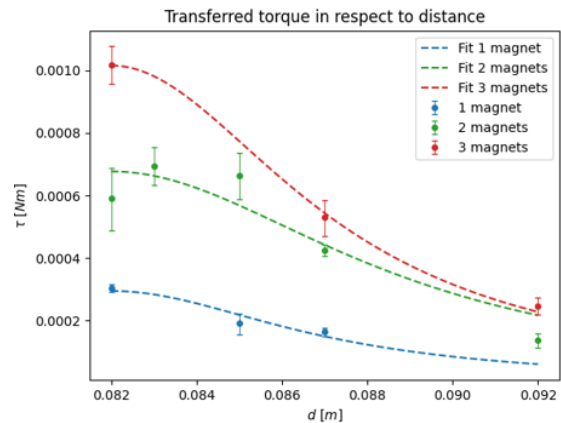
Co se konfigurací týče, budeme sledovat dva hlavní parametry: vzdálenost spinnerů a velikost magnetických momentů (resp. počet magnetů na každém ramenu). Pro každou kombinaci parametrů budeme měření opakovat 2-4 krát. Nejdříve se podíváme na výsledky závislosti momentu na počtu magnetů (viz graf 35).

Po zpracování dat vyplyne přibližně lineární závislost mezi přenosem a počtem magnetů. Zároveň tato závislost vychází pouze ze tří bodů a celkem jenom přibližně 10 měření, což určitě není dostatečné k vytvoření definitivního závěru. Také byly měřeny pouze případy s poměrně "malým" počtem magnetů, protože více magnetů se nedalo dobře ke spinneru připevnit.

Druhá závislost, závislost na vzdálenosti, vykazuje úměrnost<sup>43</sup>  $\tau \propto r^{-4}$ , která odpovídá rovnici 4. Velká vzdálenost spinnerů hraje tedy hlavní roli ve velikosti přenášeného momentu.



Obr. 35: Závislost přenášeného momentu na velikost magnetického momentu



Obr. 36: Závislost přenášeného momentu na vzdálenosti spinnerů

<sup>43</sup>Přesnější popis této úměrnosti je  $r \propto (\sqrt{k^2 + (d - 2r)^2})^{-4}$ .  $k$  v tomto případě představuje nějakou minimální vzdálenost v tečném směru, kterou si od sebe magnety vždy udržují (např. půl délky sub-periody, pokud by byly spinnery perfektně zaklesnuty).  $d$  představuje vzdálenost středů spinnerů.  $r$  je poloměr spinneru.



## 9 MAGNETICKÉ PŘEVODOVKY



## LITERATURA

- [1] YUNG, Kar W.; LANDECKER, Peter B. a VILLANI, Daniel D. An Analytic Solution for the Force Between Two Magnetic Dipoles. [Online]. *Magnetic and Electrical Separation*. 1998, roč. 9, č. 1, s. 39-52. ISSN 1055-6915. Dostupné z: <https://doi.org/10.1155/1998/79537>. [cit. 2023-12-16].
- [2] CULLITY, B. D. a GRAHAM, C. D. *Introduction to magnetic materials*. Second edition. Hoboken: IEEE Press, [2009]. ISBN 978-0-471-47741-9.
- [3] SERWAY, Raymond A. a JEWETT, John W. Jr. *Physics for scientists and engineers*. 6th ed. Belmont: Thomson-Brooks/Cole, 2004. ISBN 0-534-40842-7.
- [4] YE, Jianhe; ZHAN, Pengfei; ZENG, Jincheng; KUANG, Honglin; DENG, Yongfang et al. Concise magnetic force model for Halbach-type magnet arrays and its application in permanent magnetic guideway optimization. [Online.] *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2023, roč. 587. ISSN 03048853. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2023.171301>. [cit. 2023-12-16].
- [5] NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY. *Standard Uncertainty and Relative Standard Uncertainty* [online]. [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Info/Constants/definitions.html>
- [6] Jasper. *Shorthand error notation (with brackets) accros decimal point [duplicate]* [online]. [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: <https://physics.stackexchange.com/questions/445141/shorthand-error-notation-with-brackets-accros-decimal-point>
- [7] *Turnaj mladých fyziků* [online]. [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: <https://tmf.fzu.cz/tasks.php?y>
- [8] *Neodymium Magnet Grades* [online]. [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: <https://totalelement.com/blogs/about-neodymium-magnets/neodymium-rare-earth-magnet-grades>
- [9] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. *Fyzické kyvadlo* [online]. [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/206-fyzicke-kyvadlo>

- [10] VAN ROSSUM, Guido, Drake VAN ROSSUM a L. FRED. *Python 3 Reference Manual*. Scotts Valley, CA: CreateSpace, 2009. ISBN 1441412697.
- [11] VIRTANEN, Pauli. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*. 2020(17), 261-272.
- [12] HARRIS, Charles R. Array programming with NumPy. *Nature*. 2020(585), 357–362.
- [13] HUNTER, John D. Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in science & engineering*. 2007, 9(3), 90-95.
- [14] VAN ROSSUM, Guido. *The Python Library Reference, release 3.8.2*. Python Software Foundation, 2020.
- [15] STAACKS, S; HÜTZ, S; HEINKE, H a STAMPFER, C. Advanced tools for smartphone-based experiments: phyphox. Online. *Physics Education*. 2018, roč. 53, č. 4. ISSN 0031-9120. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/1361-6552/aac05e>. [cit. 2023-12-17].
- [16] SHAFRANOVICH, Yakov. Common format and MIME type for comma-separated values (CSV) files. *RFC 4180, October*. 2005.
- [17] ALLAIN, Rhett. Let's Explore the Physics of Rotational Motion With a Fidget Spinner. *WIRED* [online]. 2017, **2017**, 1-1 [cit. 2023-12-19]. Dostupné z: <https://www.wired.com/2017/05/physics-of-a-fidget-spinner/>
- [18] STEWART, Robinson. *Simulation – The practice of model development and use*. 1. John Wiley, 2004. ISBN 978-0-470-84772-5.
- [19] PRESS, William H. *Numerical recipes: the art of scientific computing*. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2007. ISBN 978-0-521-88068-8.
- [20] ISERLES, A. *A first course in the numerical analysis of differential equations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996. ISBN 978-0-521-55655-2.
- [21] PCC, Ben. WIKIMEDIA FOUNDATION. *List of Runge–Kutta methods* [online]. 2007, 2023-12-20 [cit. 2023-12-22]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Runge–Kutta\\_methods](https://en.wikipedia.org/wiki/Runge–Kutta_methods)
- [22] FLANAGAN. *JavaScript: the definitive guide*. O'Reilly Media, 2006.
- [23] PEZOA, Felipe; REUTTER, Juan L.; SUAREZ, Fernando; UGARTE, Martín a VRGOČ, Domagoj. Foundations of JSON Schema. Online. In: *Proceedings of the 25th International Conference on World Wide Web*. Republic and Canton of Geneva, Switzerland: International World Wide Web Conferences Steering Committee, 2016, s. 263-273. ISBN 9781450341431. Dostupné z: <https://doi.org/10.1145/2872427.2883029>. [cit. 2023-12-22].

- [24] PEREIRA, Caio Ribeiro a PEREIRA, Caio Ribeiro. Introduction to Node.js. Online. In: *Building APIs with Node.js*. Berkeley, CA: Apress, 2016, s. 1-3. ISBN 978-1-4842-2441-0. Dostupné z: [https://doi.org/10.1007/978-1-4842-2442-7\\_1](https://doi.org/10.1007/978-1-4842-2442-7_1). [cit. 2023-12-22].
- [25] GANSSE, Jack. IEEE 754 Floating Point Numbers. Online. In: *The Firmware Handbook*. Elsevier, 2004, s. 203-205. ISBN 9780750676069. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/B978-075067606-9/50019-9>. [cit. 2023-12-22].
- [26] MOZILLA. Mozilla Developer Network. *Destructuring assignment* [online]. [cit. 2023-12-27]. Dostupné z: [https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/JavaScript/Reference/Operators/Destructuring\\_assignment](https://developer.mozilla.org/en-US/docs/Web/JavaScript/Reference/Operators/Destructuring_assignment)
- [27] *Tracker - Video Analysis and Modeling Tool* [online]. 2008 [cit. 2024-01-03]. Dostupné z: <https://physlets.org/tracker/>
- [28] HOERNER, Sighard F. DRAG OF WEDGES AND CONES. In: *Fluid-Dynamic Drag* [online]. 2. s. 60 [cit. 2024-01-08]. Dostupné z: <https://archive.org/details/FluidDynamicDragHoerner1965/page/n59/mode/2up>





## SEZNAM OBRÁZKŮ

1	Spinner osazený neodymovými magnety . . . . .	5
2	Tři interagující spinnery . . . . .	5
3	Námi vyhrazené orientace magnetů . . . . .	6
4	Ilustrace spinneru společně s vyznačenými rozměry . . . . .	9
5	Ilustrace aparatury pro měření frekvence kmitů spinneru . . . . .	10
6	Nasnímaný průběh magnetické indukce v čase pro spinnerové kyvadlo . . . .	10
7	Nasnímaný průběh magnetické indukce v čase pro účely měření remanence .	14
8	Závislost magnetické indukce na vzdálenosti . . . . .	15
9	Závislost magnetické síly na vzdálenosti . . . . .	15
10	Souhrnný graf všech měření remanence . . . . .	16
11	Ilustrace aparatury pro měření přibližné úhlové rychlosti spinneru . . . . .	21
12	Ilustrace fungování algoritmu pro hledání peaků . . . . .	21
13	Příklad grafu měřeného průběhu $\omega$ v $t$ s $\beta \neq 0$ . . . . .	24
14	Příklad grafu měřeného průběhu $\omega$ v $t$ s $\beta = 0$ . . . . .	24
15	Příklad grafu měřeného průběhu $\omega$ v $t$ s $\beta \neq 0$ v magnetickém poli . . . . .	25
16	Příklad grafu měřeného průběhu $\omega$ v $t$ s $\beta = 0$ v magnetickém poli . . . . .	25
17	Vývojový diagram simulace . . . . .	36
18	Ukázka webového rozhraní . . . . .	37

19	Snímek ze záznamu jednoho z experimentů . . . . .	39
20	Porovnání měření a simulace experimentu C0000 (60 fps) . . . . .	40
21	Porovnání měření a simulace experimentů C0002, C0004 a C0007 (1000 fps) . . . . .	41
22	$\omega - U$ charakteristika motoru . . . . .	43
23	Výsledky měření vázání prováděného magnetickým čidlem . . . . .	44
24	. . . . .	45
25	Porovnání sub-period rušených spinnerů vůči nerušenému průběhu . . . . .	46
26	Porovnání průběhu úhlu v sub-periodě rušených spinnerů vůči nerušenému průběhu . . . . .	47
27	Porovnání měřeného a simulovaného průběhu úhlové rychlosti v čase pro mód 2 : 1 . . . . .	47
28	Obrázek použitého absorpčního kola . . . . .	48
29	Ilustrace použití laserového snímače (LS) . . . . .	48
30	Fotografie finální aparatury . . . . .	49
31	Měření magnetické vazby pomocí LS . . . . .	49
32	Spinner upravený k měření přenášeného momentu síly. . . . .	52
33	Výsledky měření k určení třecích koeficientů spinneru. . . . .	52
34	Závislost brzdného momentu na úhlové rychlosti . . . . .	54
35	Závislost přenášeného momentu na velikost magnetického momentu . . . . .	55
36	Závislost přenášeného momentu na vzdálenosti spinnerů . . . . .	55

## SEZNAM TABULEK

1	Nomenklatura . . . . .	4
2	Směrové vektory pro různé konfigurace . . . . .	7
3	Zápis obecné Butcherovy tabulky pro RK metodu $s$ . stupně . . . . .	28
4	Butcherova tabulka Eulerovy metody . . . . .	28
5	Butcherova tabulka metody středního bodu . . . . .	28
6	Butcherova tabulka Heunovy metody . . . . .	28
7	Butcherova tabulka Ralstonovy metody . . . . .	28
8	Butcherova tabulka obecné metody 2. stupně . . . . .	28
9	Butcherova tabulka Simpsonova pravidla $3/8$ . . . . .	29
10	Butcherova tabulka RK4 . . . . .	29
11	Butcherova tabulka Ralstonovy metody 4. stupně . . . . .	29
12	Výpis vlastností třídy <code>spinner</code> . . . . .	31
13	Výpis simulačních parametrů třídy <code>sim_instance</code> . . . . .	36



## SEZNAM ÚSTŘIŽKŮ

1	Kód k analyzování spinnerového kyvadla . . . . .	12
2	Kód k určení průměrné hodnoty magnetického pole a odchylek . . . . .	13
3	Kód k hledání pozic peaků . . . . .	22
4	Pokračování kódu 3 - výpočet úhlové rychlosti pomocí konvoluce . . . . .	23



## PŘÍLOHY

1. Videozáznam interakce nehybného a pomalého spinneru ..... **VID1**
2. Videozáznam interakce nehybného a rychláho spinneru ..... **VID2**
3. Videozáznam interakce 3 spinnerů ..... **VID3**