

# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 2: Fyzika

## Počítačové modelování dynamických magnetických systémů

Ondřej Sedláček

Hlavní město Praha

Praha, 2023



# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

Obor č. 2: Fyzika

Počítačové modelování dynamických  
magnetických systémů

Computer modelling of dynamic magnetic  
systems

**Jméno:** Ondřej Sedláček

**Škola:** Gymnázium Christiana Dopplera, Zborovská 621, 150 00  
Malá Strana

**Kraj:** Hlavní město Praha

**Konzultant:** RNDr. Pavel Josef, CSc.

Praha, 2023



# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou práci SOČ vypracoval samostatně a použil jsem pouze prameny a literaturu uvedené v seznamu bibliografických záznamů.

Prohlašuji, že tištěná verze a elektronická verze soutěžní práce SOČ jsou shodné.

Nemám závažný důvod proti zpřístupňování této práce v souladu se zákonem č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon) ve znění pozdějších předpisů.

V Praze dne 9. září 2023 .....

Ondřej Sedláček



# Poděkování

Chtěl bych poděkovat ...





## Anotace

Sem napišeš svůj abstrakt. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## Klíčová slova

Šablona, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, SOČ, ...

## Annotation

Write your abstract here! Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## Keywords

Template, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, High school professional activity, ...



# OBSAH

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
1.1	Nomenklatura . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Úvodní sledování</b>	<b>5</b>
2.1	Určení parametrů . . . . .	6
2.1.1	Parametry týkající se konfigurace spinnerů . . . . .	6
2.1.2	Parametry týkající se pohybu spinnerů . . . . .	7
2.2	Modelování magnetů . . . . .	8
2.3	Popis magnetických interakcí . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Měření parametrů</b>	<b>9</b>
3.1	Rozměry spinneru . . . . .	9
3.2	Moment setrvačnosti . . . . .	9
3.2.1	Aparatura . . . . .	10
3.2.2	Analýza měření a výsledky . . . . .	10
3.2.3	Popis skriptu . . . . .	11
3.3	Remanence $\vec{B}_r$ . . . . .	13
3.3.1	Určení remanence přes magnetické pole . . . . .	13
	Analýza měření . . . . .	13
3.3.2	Určení remanence přes sílu . . . . .	15
3.3.3	Výsledky . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Tření</b>	<b>17</b>
4.1	Analytický popis . . . . .	18
4.1.1	Maximální doba otáčení . . . . .	18
	Horní limit doby otáčení $n$ spinnerů . . . . .	19
	Důkaz . . . . .	20
4.1.2	Experiment pro potvrzení analytického řešení . . . . .	21
4.1.3	Výsledky a porovnání se simulací . . . . .	21
4.1.4	Zhodnocení použití lineárního koeficientu . . . . .	21

---

# 1 ÚVOD

Motivací pro tuto práci byla úloha mezinárodní fyzikální soutěže zvané "*International Young Physicists Tournament*", neboli IYPT. U nás je avšak tato soutěž známější pod zkratkou TMF vycházející z překladu původního názvu - "*Turnaj mladých fyziků*". Soutěž se v České republice kéná pod záštitou Fakulty jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT, FZU AV ČR, MŠMT a JČMT a z podstaty soutěže je cílem úloh dovést středoškolské studenty k vědeckému sledování nejrůznějších jevů ze všech částí fyziky.

Úloha, kterou jsem se zabýval, je v pořadí desátá úloha letošního, tedy 37., ročníku. Zadání je následovné [7]:

## 10. Magnetický převod

*"Vezměte několik identických prstových točítok<sup>1</sup> a připevněte k jejich koncům neodymové magnety. Pokud umístíte točítka v rovině vedle sebe a točíte jedním z nich, ostatní se začnou otáčet jen vlivem magnetického pole. Prozkoumejte a vysvětlete tento jev."*

Zadání úlohy je, jak je pro TMF tradiční, velmi otevřené a je tedy na řešiteli, aby si vymezil přesnou oblast svého zkoumání. Tato práce se bude zabívat:

1. Určením vlastností *prstových točítok* (dále "fidget spinner" či pouze "spinner")
2. Popisem třecích sil působících na spinner
3. Vývojem simulace chování systémů více fidget spinnerů a porovnáním této simulace s realitou
4. Přenosem úhlové rychlosti
5. Přenosem momentu síly
6. Možným využitím získaných poznatků k vývoji efektivnějších magnetických převodů

---

<sup>1</sup>Z překladu anglického "Fidget spinner".

## 1.1 NOMENKLATURA

V tabulce 1 definujeme symboly, které budeme používat v průběhu celé práce, společně s jejich významem:

Tab. 1: Nomenklatura

Vlastnosti spinneru			
Symbol	Jednotka	Popis	Poznámka
$n$		Celkový počet ramen	Ekvivaletní počtu magnetů
$r$	$m$	Poloměr spinneru	Ekvivaletní vzdálenosti osy otáčení od magnetů
$S$	$(m, m, 0)$	Střed spinneru v rovině	(tzn. pozice osy otáčení)
$P(i)$	$(m, m, 0)$	Pozice $i$ . magnetu spinneru	Funkce indexu magnetu
$\varphi$	rad	Úhel rotace spinneru	
$\omega$	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$	Úhlová rychlost spinneru	
$I$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Moment setrvačnosti spinneru	
$\alpha$	$\text{rad} \cdot \text{s}^{-2}$	Koeficient rychlostně nezávislého brzdného úhlového zrychlení	viz 4
$\beta$	$\text{s}^{-1}$	Koeficient lineárně závislého brzdného úhlového zrychlení	viz 4
$\gamma$	$\text{rad}^{-1}$	Koeficient kvadraticky závislého brzdného úhlového zrychlení	viz 4
$c_1, t_{\max}$	$s$	Celková délka otáčení spinneru	viz 4

Vlastnosti magnetu			
Symbol	Jednotka	Popis	Poznámka
$\vec{m}$	$A \cdot \text{m}^2$	Magnetický moment	
$\vec{B}_r$	$T$	Remanentní magnetizace	(tzv. remanence)
$V$	$\text{m}^3$	Objem magnetu	
$F_m(\vec{r}, \vec{m}_1, \vec{m}_2)$	$N$	Silová interakce mezi magnetickými momenty $\vec{m}_1$ a $\vec{m}_2$ vzdálenými o $\vec{r}$	[1]
$B(\vec{r}, \vec{m})$	$T$	Magnetická indukce tvořená magnetickými momentem $\vec{m}$ ve vzdálenosti $\vec{r}$	[1, 2]
$\tau_F, \tau_{\text{mag}}$	$Nm$	Momenty sil působící na spinner vycházející ze silové a magnetické interakce	[2, 3], viz ??

Dále stojí za zmínku, že pro vyjádření chyby měření je v textu používána tzv. *shorthand error notation* [5] (pro naše účely zkráceno na SEN). Pro jasnost uvedeme příklad, kde zápis pomocí SEN vypadá takto: 11.5(12), a ekvivalentní přepis do standardní notace je:  $11.5 \pm 1.2$ . Tímto zjednodušíme zápis:  $11.5 \pm 1.2 = 11.5(12)$  [6].

## 2 ÚVODNÍ SLEDOVÁNÍ

Prvním krokem v řešení této úlohy bylo kvalitativní sledování jejich chování v co největším rozpětí konfigurací, abychom mohli určit relevantní parametry a odstranit nezajímavé konfigurace.

Hlavním poznatkem je změna chování systému dvou spinnerů v závislosti na jejich relativních rychlostech. Máme-li na stole 2 spinnery, ze kterých je jeden nehybný, a druhý roztočíme na nízké otáčky, dojde po krátké chvíli k silné, ale chaotické, interakci (viz příloha 1). Naopak, roztočíme-li druhý spinner značně rychleji, nedochází téměř k žádné interakci (viz příloha 2). Druhý spinner se prvnímu spinneru efektivně jeví jako permanentní magnet - druhý magnet se tedy nanejvýše umístí do energeticky nejvýhodnější polohy a dále zůstává nehybný.



Obr. 2: Tři interagující spinnery



Obr. 1: Spinner osazeným neodymovými magnety

Dalším cenným poznatkem je, že při interakci více spinnerů se systém chová chaoticky téměř vždy (viz příloha 3). Toto pro nás dělá měření interakcí více jak dvou spinnerů nepříznivé a k získání použitelných výsledků je důležité omezit naše bádání pouze na jeden či dva spinnery. Poté, co kvalitně popíšeme menší počet spinnerů, se můžeme pomocí simulace pokusit o extrapolování našeho modelu na více spinnerů.

Z přesného zadání můžeme také vyčíst nějaké důležité předpoklady. Jmenovitě se jedná o umístění všech spinnerů v jedné *"rovině vedle sebe"*, což z velké míry usnadní budoucí výpo-

čty, točením pouze *"jedním z nich"* a omezení interakcí mezi spinnery pouze na *"vliv magnetického pole"*. Neměli bychom opomenout ani skutečnost, že všechny spinnery mají být *"identické"*.

## 2.1 URČENÍ PARAMETRŮ

Z úvodního sledování není těžké určit relevantní parametry a vybrat, které z nich je možné s naším vybavením měřit.

### 2.1.1 Parametry týkající se konfigurace spinnerů

Jakožto nejdůležitější bychom určitě označili relativní pozice všech spinnerů, které popíšeme pomocí jejich středů  $S_1, S_2, \dots$  (každý střed je braný jako vektor ve spinnerové rovině) a jejich poloměrů  $r_1, r_2, \dots$ . Dále bude k přesnému určení pozic magnetů nezbytné znát okamžité úhly rotace spinnerů, které označíme  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ . Nakonec k popsání spinneru musíme určit počet ramen, neboli počet připevněných magnetů. Tento počet označíme  $n$  a pro naše spinnery platí  $n = 3$ .

Pomocí těchto údajů je triviální vyjádřit pozici  $P(i)$  libovolného magnetu pomocí jeho indexu  $i$  (kde  $0 \leq i < n$ ):

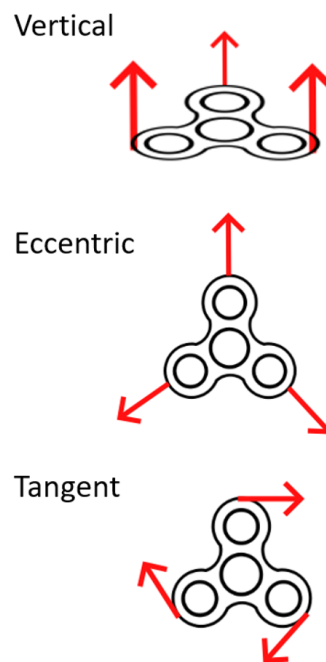
$$P(i) = S + \left( r \cos \left( \varphi + \frac{2\pi i}{n} \right), r \sin \left( \varphi + \frac{2\pi i}{n} \right), 0 \right) \quad (1)$$

Kromě pozice magnetu hraje také klíčovou roli nasměrování jeho pólů. Zde definujeme 3 důležité orientace pólů (viz Obr. 3):

1. **Vertikální** (*vertical*)
2. Odstředivá (*eccentric*)
3. Tečná (*tangent*)

V našich experimentech jsme používali převážně vertikální konfiguraci, jelikož takto bylo uchycení magnetů nejjednodušší. Magnety se totiž samy připevnily ke kovovému závaží v každém z ramen spinneru (viz Obr. 1), které je zde z důvodu zvýšení momentu setrvačnosti.

Tyto konfigurace jsme také schopni popsat a to opět jakožto funkci indexu magnetu. Nejdříve vyjádříme směrový vektor  $\vec{u}(i)$  pro  $i$ . magnet v každé konfiguraci:



Obr. 3: Tři námi vyhranění orientace magnetů



Tab. 2: Směrové vektory pro různé konfigurace

Konfigurace	Směrový vektor magnetu
Vertikální	$\vec{u}(i) = (0, 0, 1)$
Odstředivá	$\vec{u}(i) = \widehat{P(i) - S}$
Tečná	$\vec{u}(i) = (0, 0, 1) \times \widehat{(P(i) - S)}$

Když nyní zvolíme velikost magnetického momentu našich magnetů  $|\vec{m}_0|$ , jsme schopni popsat magnetický moment včetně jeho velikosti <sup>2</sup>:

$$\vec{m} = |\vec{m}_0| \cdot \vec{u}(i) \quad (2)$$

Velikost magnetických momentů bude záviset na teplotě, velikosti a materiálových vlastnostech magnetů (např. jejich chemickém složení a kvalitě), ale to, jaká je pravá velikost magnetických momentů  $|\vec{m}_0|$ , je momentálně nepodstatné a určíme ji později (viz kap. 3.3).

Posledním parametrem, který zmíníme, ale nebudeme se jím zabývat, je přitahování, či odpuzování magnetů. V našem případě jsem se zaměřili převážně na systémy, kde se všechny magnety odpuzují.

### 2.1.2 Parametry týkající se pohybu spinnerů

Druhou, složitější, částí popisu našeho systému je jeho pohyb a chování v čase. Zde se nevyhneme úhlovým rychlostem jednotlivých spinnerů, které budeme značit  $\omega_1, \omega_2, \dots$ . Poté by nás přirozeně napadlo úhlové zrychlení  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ , ale pro náš případ bude šikovnější využít toho, že  $\tau = I\alpha$ , kde  $\tau$  značí moment síly a  $I$  značí moment setrvačnosti<sup>3</sup> spinneru. Moment setrvačnosti určíme později ve své vlastní kapitole (viz kap. 3.2).

Posledním parametrem, který zmíníme, je tření v ložiscích spinnerů a jiné odporové síly. Těm se budeme do hloubky věnovat v kapitole 4.

<sup>2</sup>Všimněme si, že  $u(i) = \hat{u}(i)$ .

<sup>3</sup>Někdy také značeno  $J$ .

## 2.2 MODELOVÁNÍ MAGNETŮ

V průběhu našich experimentů používáme neodymové (NdFeB) magnety krychlového tvaru o hraně 5mm a jakosti N35.<sup>4</sup> Toto označení jakosti neodymových magnetů popisuje jejich chemické složení, tepelnou odolnost a hlavně sílu [8], která je popsána pomocí tzv. remanentní magnetizace, neboli remanence.

Jelikož jsou magnety poměrně malé, můžeme je ve větších vzdálenostech aproximovat jakožto magnetické dipóly. Zároveň existuje velmi elegantní způsob, jak vypočítat velikost magnetického dipólu z jeho remanence [2]:

$$|\vec{m}_0| = \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}_r| V \quad (3)$$

Tabulkové hodnoty pro remanenci NdFeB magnetů jsou sice známy, ale v našem případě budeme přesnou hodnotu  $|\vec{B}_r|$  našich magnetů měřit později, v kapitole 3.3.

## 2.3 POPIS MAGNETICKÝCH INTERAKCÍ

Jelikož k popisu magnetů používáme idealizaci pomocí magnetických dipólů, můžeme popsat interakce mezi nimi pomocí následujících rovnic. Hlavní interakce mezi dvěma magnetickými dipóly jsou:

1. Silové interakce [1] mezi dvěma momenty  $\vec{m}_1$  a  $\vec{m}_2$ , které jsou od sebe vzdáleny  $\vec{r}$ <sup>5</sup>:

$$F_m(r, m_1, m_2) = \frac{3\mu_0}{4\pi ||r||^5} \left[ (m_1 \cdot r)m_2 + (m_2 \cdot r)m_1 + (m_1 \cdot m_2)r - \frac{5(m_1 \cdot r)(m_2 \cdot r)}{||r||^2} r \right] \quad (4)$$

2. Magnetické interakce, neboli působení momentu síly [2] na  $\vec{m}_2$  z důvodu vytvoření magnetické indukce  $B(r, m_1)$  momentem  $\vec{m}_1$  [1]:

$$B(r, m) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot m) - m}{|r|^3} \quad (5)$$

$$\tau = m_2 \times B(r, m_1)$$

<sup>4</sup>Jakosti neodymových magnetů se pohybují od N35 do N55 [8].

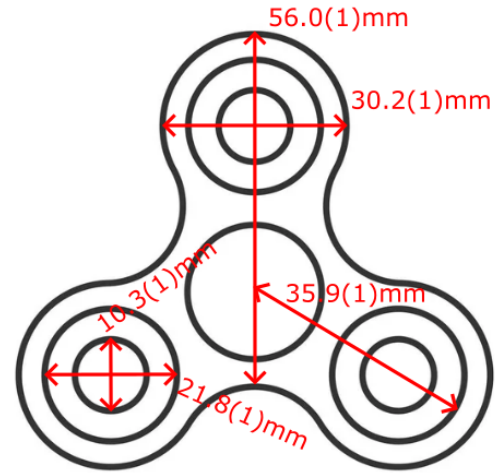
<sup>5</sup> $\vec{r} = P_1 - P_2$

## 3 MĚŘENÍ PARAMETRŮ

### 3.1 ROZMĚRY SPINNERU

K popsání spinneru nejdříve určíme jeho rozměry (viz Obr. 4). Nejdůležitější rozměr pro nás bude vzdálenost osy otáčení od místa, kde budou umístěny magnety. To je v našem případě  $r = 35.9(1)\text{mm}$ .

Vzhledem k tomu, že na sebe spinnery mohou vzájemně působit pouze magnetickými silami, jak je řečeno v zadání, není třeba řešit zbytek geometrie spinneru v budoucích modelech. Spinner budeme dále modelovat pouze jako  $n$  magnetických dipólů, které se otáčejí kolem středu  $S$  a pevně si udržují své relativní pozice. Tomuto celkovému systému definujeme moment setrvačnosti podle následujícího měření.



Obr. 4: Ilustrace spinneru společně s vyznačenými rozměry

### 3.2 MOMENT SETRVAČNOSTI

K určení momentu setrvačnosti spinneru bylo využito idealizace spinneru jakožto fyzického kyvadla, pro které platí: [9]

$$\omega = \sqrt{\frac{mgr}{I}} \quad (6)$$

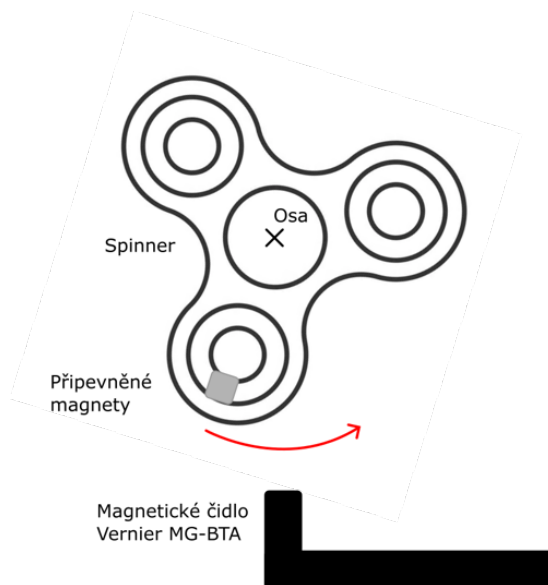
A po vyjádření z rovnice 6 tedy získáváme:

$$I = \frac{mgr}{\omega^2} = \frac{mgr}{4\pi^2 f^2} \quad (7)$$

Nyní stačí změřit frekvenci kmitů zavěšeného spinneru s několika magnety na jednom z jeho ramen.

### 3.2.1 Aparatura

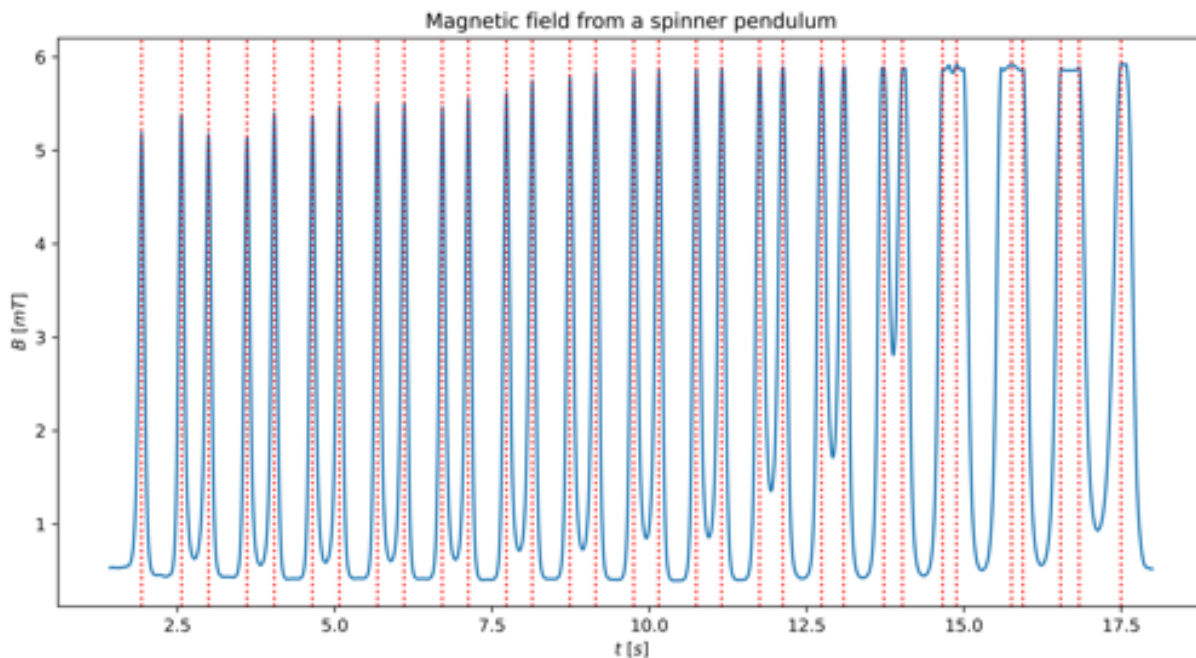
Po připevnění šesti neodymových magnetů o jednotkové hmotnosti  $0.92(1)g$  byl spinner připevněn pevně ve své ose otáčení. Pod takto zavěšený spinner bylo umístěno Magnetické čidlo Vernier MG-BTA, které zaznamenávalo, jak blízko se magnety nacházejí. Po umístění spinneru mimo rovnovážnou polohu byl ponechán oscilovat a záznam průběhu magnetické indukce v čase byl čidlem nasnímán (viz 6).



Obr. 5: Ilustrace aparatury pro měření frekvence kmitů spinneru

### 3.2.2 Analýza měření a výsledky

Průběh následně analyzujeme pomocí programovacího jazyka Python [10] a knihovny scipy [11]. Námi kýžená maxima vyhledáme použitím funkce `scipy.signal.find_peaks` a z jejich počtu jsme schopni určit počet period, kterými kyvadlo prošlo za určený čas.



Obr. 6: Nasnímaný průběh magnetické indukce v čase (modře) pro spinnerové kyvadlo. Peaky, označující uplynutí jedné půlperiody, jsou vyznačeny červeně.

Máme-li tedy pole  $p$ <sup>6</sup> všech časů nalezených peaků, je výpočet frekvence následující:

$$f = \frac{|p| - 1}{2(p_{max} - p_{min})} = 1.00(1)Hz \quad (8)$$

Dalším dosazením do předchozí rovnice 7 získáváme výslednou hodnotu<sup>7</sup>:

$$I = 4.80(50) \cdot 10^{-5} kg \cdot m^2 \quad (9)$$

### 3.2.3 Popis skriptu

V níže připnutém ústřížku kódu 1 nejdříve načteme použité knihovny: `numpy` [12] pro provedení konvoluce, `matplotlib` pro vytvoření grafu 6 [13] a nakonec `scipy`, kde využijeme funkce `find_peaks`, jak již bylo zmíněno.

Prvním krokem je načtení dat ze souboru `kyvadlo.csv` a jejich převedení z textového formátu do 2D pole pojmenovaného `data`. Dále izolujeme data jednotlivých os do separátních proměnných `xdata`, `ydata`.

`ydata` vyhladíme, abychom se zbavili šumu a to pomocí konvoluce skrze funkci `numpy.convolve`. Délku 1D konvoluční matice jsme zvolili  $m = 15$  a konvoluční matice délky  $m$  v našem případě vypadá obecně takto:

$$M_{conv} = \underbrace{\left( \frac{1}{m} \quad \frac{1}{m} \quad \dots \quad \frac{1}{m} \right)}_{m \text{ krát}} \quad (10)$$

Tato konvoluční matice přesněji provádí aritmetický průměr  $m$  za sebou jdoucích hodnot.

Nyní provedeme hledání peaků na vyhlazených datech pomocí funkce `find_peaks`, která akceptuje další dobrovolné argumenty:

1. `height`: určuje minimální absolutní velikost peaku
2. `threshold`: minimální rozdíl dvou sousedních hodnot, aby bod mohl být peakem
3. `distance`: minimální indexová vzdálenost dvou peaků

Poté určíme časový interval, kde se peaky nacházejí (a přidáme na každou stranu 0.5 sekundy pro přehlednost grafu), a vygrafujeme původní naměřená data (modře) společně s pozicemi peaků (červeně). Dále ozačíme osy.

Nakonec dopočítáme frekvenci kmitů kyvadla podle vzorce 8 a vypíšeme ji.

<sup>6</sup> $|p|$  označuje počet prvků pole  $p$ ;  $p_{min}$  označuje čas prvního peaku;  $p_{max}$  označuje čas posledního peaku.

<sup>7</sup>Tato hodnota je srovnatelná s jinými zdroji dostupnými online (viz. [17]).

```

1 # imports
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 import scipy.signal as sig
5
6 # helper function to convert the map and filter iterators to a list
7 lmap = lambda f,x : list(map(f, x))
8 lfilt = lambda f,x : list(filter(f, x))
9
10 with open("./kyvadlo.csv", "r") as read:
11     data = read.readlines()[1:] # load all the value rows
12     # convert all rows into value arrays
13     data = lmap(lambda row: row.rstrip().split(","), data)
14
15     xdata = lmap(lambda row: float(row[0]), data) # x axis data
16     ydata = lmap(lambda row: float(row[1]), data) # y axis data
17     mov = 15 # the amount of smoothing
18     # smooths out the data using convolution
19     ydata_clean = np.convolve(ydata, np.ones(mov)/mov, "same")
20
21     # find the peaks from the data using scipy.signal.find_peaks
22     peaks, heights = sig.find_peaks(
23         ydata_clean,
24         height=1,
25         threshold=0.0001,
26         distance=35
27     )
28     # get the sampling frequency
29     samples_per_sec = (len(xdata) / max(xdata))
30     # find the start and end time of where the peaks are
31     peaks_s = peaks[0] - int(samples_per_sec / 2)
32     peaks_e = peaks[-1] + int(samples_per_sec / 2)
33
34     # plot the smoothed out data
35     plt.plot(xdata[peaks_s: peaks_e], ydata_clean[peaks_s: peaks_e])
36     # plot all the peak lines
37     for p in peaks:
38         plt.axvline(p / samples_per_sec, color="r", linestyle=":")
39
40     # set all other styling of the plot
41     plt.title("Magnetic field from a spinner pendulum")
42     plt.ylabel("$B$ [mT]")
43     plt.xlabel("$t$ [s]")
44
45     # calculate and print out the resulting frequency
46     f = 1/2 * ((len(peaks)-1) / ((max(peaks) - min(peaks)) /
47         samples_per_sec))
48     print(f"{f:.2f} Hz")

```

Ústřížek kódu 1: Kód k analyzování spinnerového kyvadla

### 3.3 REMANENCE $\vec{B}_r$

K určení remanence našich magnetů využijeme dvou různých metod. Jedna z nich bude založena na silové interakci magnetů a jedna na magnetem vytvořeném poli.

#### 3.3.1 Určení remanence přes magnetické pole

Prvním způsobem, jak určit přesnou hodnotu remanentní magnetizace našich magnetů, je měření magnetického pole pomocí magnetometru mobilního telefonu. Aplikace **Phyphox** umožňuje čtení těchto dat, která následně analyzujeme.

Měření provedeme pro sloupce 2 a 3 magnetů, abychom overili, zda je náš způsob měření konsistentní. Dále také měříme větší neodymový magnet, jehož parametry nám nejsou známy, a který budeme používat v některých budoucích experimentech. Abychom odstranili pozadí tvořené magnetickým polem země, provedeme měření magnetického pole jednou a poté magnet otočíme. K získání výsledku jednoduše odečteme rozdíl naměřených hodnot, což bude dvojnásobek velikosti magnetického pole tvořeného magnetem. Je zřejmé, že tímto odstraníme z měření jiné, neměnné, zdroje magnetických polí.

Kromě provádění měření pro různé počty a velikosti magnetů, budeme také měřit pole v různých vzdálenostech od magnetu, abychom dále potvrdili, zda je měření a náš model konzistentní. Celkem provedeme tedy měření 2 magnetů, 3 magnetů a velkého magnetu pro vzdálenosti 5 cm, 10 cm, 20 cm a 30 cm.

#### Analýza měření

Výstupem aplikace **Phyphox** jsou soubory typu `.csv`, neboli "*Comma separated values*" [16]. Toto je poměrně čitelný a přívětivý formát ukládání dat, která v **Pythonovém** skriptu načteme pomocí funkce `open`, stejně jako v kódu 1. Jinak budeme používat tyto knihovny: `numpy`, `matplotlib` pro vytvoření grafu 7, `scipy`, kde využijeme funkce `curve_fit`, a `math` [14]. Poté ručně určíme názvy všech datových souborů a časové intervaly, na kterých jsou magnety orientovány k snímači a od snímače.

Po načtení dat vyjmeme pouze hodnoty ve dříve zmíněných intervalech a najdeme jejich průměrnou hodnotu a odchylky. Z rozdílu průměrných hodnot magnetického pole v obou otočeních magnetů určíme velikost magnetického pole generovaného pouze magnetem (očistěného od pozadí). Z odchylek také určíme celkovou odchylku výsledné hodnoty.

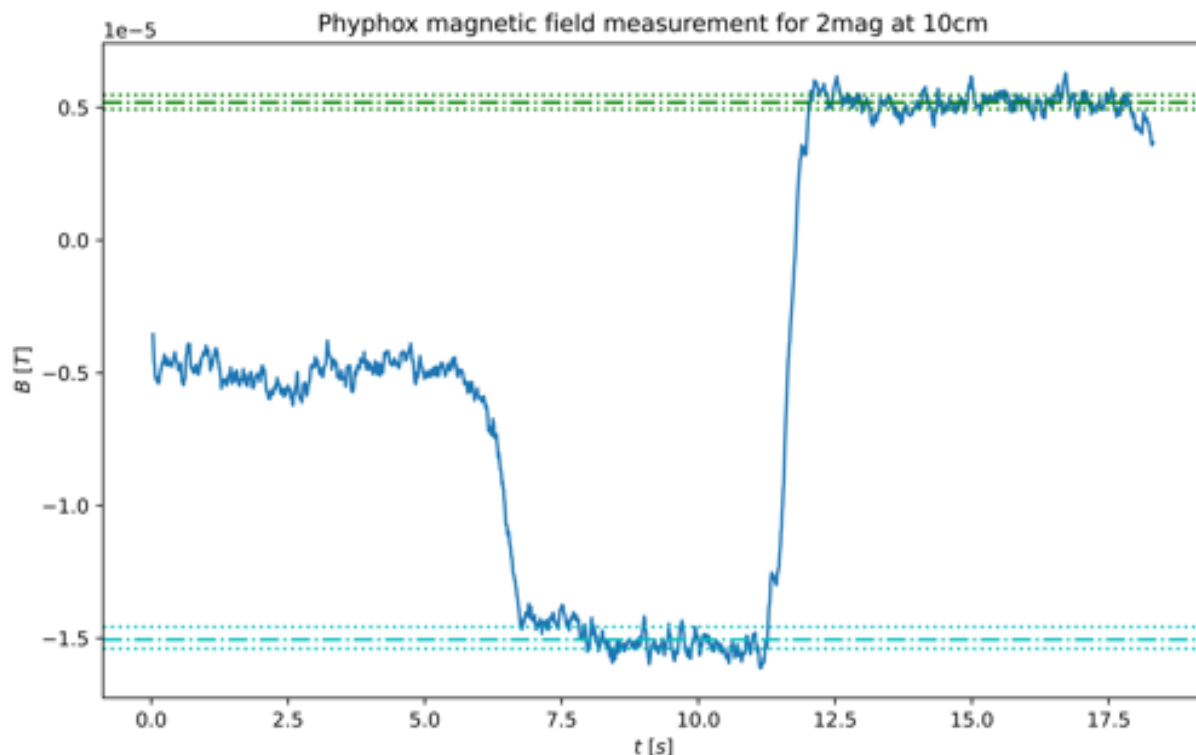
Následně pro každé měření vytvoříme graf (příkladem je Obr. 7).

```

1 down_vals = lmap(lambda j: ydata[j], lfilter(lambda j: down_intervals[i]
    ][0] < xdata[j] < down_intervals[i][1], range(len(ydata))))
2 up_vals = lmap(lambda j: ydata[j], lfilter(lambda j: up_intervals[i][0] <
    xdata[j] < up_intervals[i][1], range(len(ydata))))
3
4 down_avg = np.average(down_vals)
5 up_avg = np.average(up_vals)
6
7 amp = (up_avg - down_avg) / 2
8
9 down_error = [
10     np.average(lmap(lambda x: down_avg - x, lfilter(lambda x: x <=
        down_avg, down_vals))),
11     np.average(lmap(lambda x: x - down_avg, lfilter(lambda x: x > down_avg
        , down_vals)))]
12 ]
13 up_error = [
14     np.average(lmap(lambda x: up_avg - x, lfilter(lambda x: x <= up_avg,
        up_vals))),
15     np.average(lmap(lambda x: x - up_avg, lfilter(lambda x: x > up_avg ,
        up_vals)))]
16 ]

```

Ústřížek kódu 2: Kód k určení průměrné hodnoty magnetického pole a odchylek



Obr. 7: Nasnímaný průběh magnetické indukce v čase (modře) pro určení remanence. Průměrné hodnoty horní orientace (zeleně čerchované) a dolní orientace (modře čerchované). Odpovídající odchylky jsou znázorněny tečkovaně. Výsledná hodnota magnetické indukce tohoto příkladu, tedy dvou magnetů ve vzdálenosti 10 cm, je:  $B = 1.01(8) \cdot 10^{-5} \text{T}$



Po zanalyzování všech měření můžeme vytvořit graf závislosti  $B$  na vzdálenosti (graf 8):

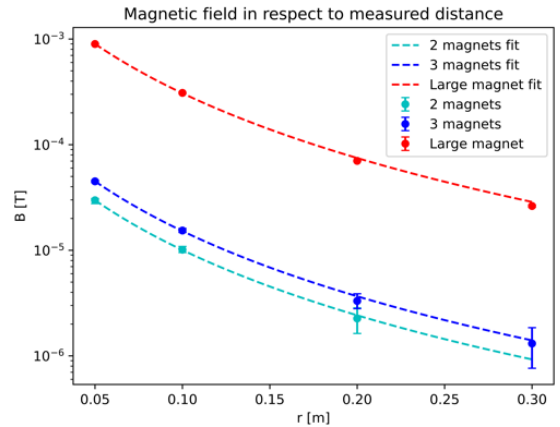
Pro určení  $B_r$  z naměřených hodnot provedeme zjednodušení vzorce 5, kdy nahradíme vektory pouze jejich velikostmi:

$$|B| = \frac{\mu_0 |m|}{2\pi r^3} \quad (11)$$

Zde si všímáme úměrnosti  $B \propto r^{-3}$ , kterou také sledujeme v našich naměřených datech. Následným dosazením rovnice 3 a vyjádřením remanence získáváme:

$$|B_r| = \frac{2\pi r^3 |B|}{V} \quad (12)$$

Pro každou naměřenou hodnotu  $B$  dopočítáme odpovídající  $B_r$  a výsledky zobrazíme v jednotném grafu 10.

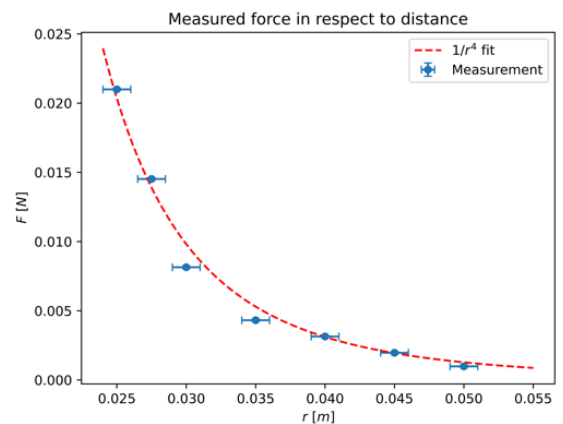


Obr. 8: Závislost magnetické indukce na vzdálenosti. Sledujeme, že  $B \propto r^{-3}$

### 3.3.2 Určení remanence přes sílu

Druhý způsob, kterým jsme schopni určit remanenci, je skrze přitahování (resp. odpuzování) jednoho magnetu k (resp. od) druhého magnetu. Posazením jednoho magnetu na váhu a sledováním změny měřené hmotnosti jsme z gravitačního zrychlení schopni dopočítat působící sílu druhého magnetu, který je umístěn v určité výšce. Zároveň první magnet podložíme lehkou, tlustou a nemagnetickou vrstvou (např. blokem polystyrenu), abychom zabránili interakci magnetu s kovovými částmi váhy.

Výhodou této metody je, že jsme schopni přesněji měřit slabší magnety, jelikož je můžeme dát blíže. V předchozí kapitole jsme nebyli schopni přiblížit magnety dostatečně blízko ke snímači telefonu kvůli jeho rozměrům. Toto měření provádíme pouze pro 1 magnet, jelikož pro ten nám chybí výsledky z měření pomocí magnetického pole (ze dříve zmíněných důvodů). Výsledky můžeme vidět na grafu 9.



Obr. 9: Závislost magnetické síly na vzdálenosti. Sledujeme, že  $F \propto r^{-4}$

Výpočet remanence provedeme podobně jako u rovnice 11 a to náhradou vektorů za jejich velikosti v rovnici 4. Tím jsme ji schopni zjednodušit na následující podobu:

$$|F| = \frac{3\mu_0}{2\pi r^4} |m|^2 \quad (13)$$

Po dosazení rovnice 3 a vyjádřením remanence získáváme:

$$B_r = \sqrt{\frac{2\pi\mu_0 r^4 F}{3V^2}} \quad (14)$$

Výsledné hodnoty  $B_r$  zobrazíme v jednotném grafu 10.

### 3.3.3 Výsledky

Výsledky obou způsobů měření sjednotíme do grafu závislosti  $B_r$  na vzdálenosti (graf 10).

Očekávali bychom, že se  $B_r$  v závislosti na vzdálenosti nebude měnit, a pro každé měření určíme pomocí optimalizace fitu konstantní funkcí souhrnnou hodnotu. Výsledkem všech měření bude aritmetický průměr těchto souhrnných hodnot.

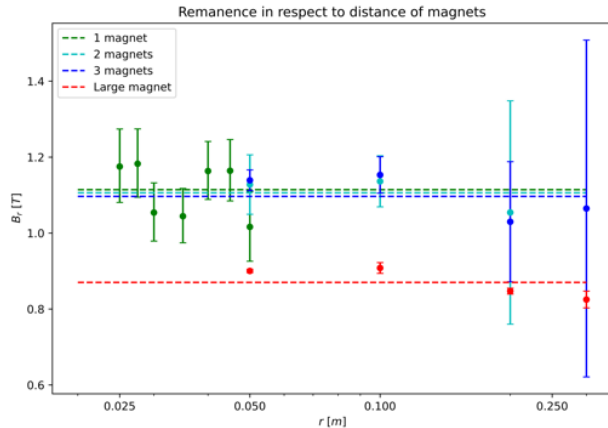
Výsledná hodnota remanence našich krychlových magnetů je <sup>8</sup>:

$$B_r = 1.10(13)T$$

a našeho velkého magnetu je:

$$B_{r_{xl}} = 0.87(5)T$$

Důvodem, proč je remanence většího magnetu znatelně nižší, může být skutečnost, že takto velký magnet náš model není schopen popsat jako jediný magnetický dipól, nebo například jeho stáří.



Obr. 10: Souhrnný graf všech měření remanence. Ve výpočtu výsledné hodnoty  $B_r$  není započítávána remanence velkého magnetu, jelikož není součástí stejné várky magnetů a budeme s ním nakládat později jinak.

<sup>8</sup>Námi naměřené hodnoty jsou srovnatelné s externími zdroji (viz. [8]).

## 4 TŘENÍ

O třecích jevech při otáčení spinneru jsme si již byli schopni udělat představu při úvodním kvalitativním sledování. Tření bude hrát značnou roli v našem systému, jelikož to bude hlavní limitující faktor průběhu chaotického chování. Dalším využitím, kromě našeho úhlavního záměru - zpřesnění popisu chování, bude také například možnost odhadnutí maximálního času, než se spinnery zastaví a systém ztratí všechnu svou energii. Zajímavým, a lehko měřitelným, pro nás bude průběh úhlové rychlosti  $\omega$  (resp. změna úhlové rychlosti <sup>9</sup>) v čase, ze kterého tkví i náš popis těchto třecích složek.

Zajímá-li nás tedy změna rychlosti, dovolíme si odhadnout, že hlavními zdroji tření bude ložisko a odpor vzduchu. Provedeme idealizaci ložiska a řekneme, že jeho třecí moment síly bude neměnný v čase a nezávislý na rychlosti. Toto nemusí být vždy pravda, např. objeví-li se v našem, přirozeně neideálním, ložisku nějaké nechtěné oscilace (které jsme sledovali) nebo je-li na ložisko působeno nějakou externí silou mířící kolmo na osu otáčení (jako například když se od sebe velmi silně odpuzují magnety ze dvou blízkých spinnerů). Oba tyto příklady jsou příliš složité k popsání a nejsme je edy schopni zkoumat. Tento třecí moment síly nezávislý na otáčkách spinneru označíme  $\alpha$ .

Další výraznou složkou bude již zmíněný odpor vzduchu. Z látky středoškolské fyziky známe přibližnou úměrnost odporové síly a kvadrátu rychlosti ( $F \propto v^2$ ) při turbulentním proudění (které v našem a případě očekáváme kvůli složité geometrii spinneru). V našem rotačním případě bychom tedy analogicky očekávali  $\dot{\omega} \propto \omega^2$ . Míru této závislosti označíme  $\gamma$ .

Poslední složkou, pro kterou nejsme schopni najít fyzikální podstatu, ale kterou přesto budeme zkoumat je lineární složka  $\beta$ . Existují-li tedy jevy, které nám unikly a platí pro ně závislost  $\dot{\omega} \propto \omega$ , můžeme je kompenzovat touto složkou. Zároveň budeme podrobně srovnávat výkony našich předpovědí s, i bez, této složky, abychom určili, zda dává smysl tuto složku využívat, či vůbec uvádět.

---

<sup>9</sup> $\dot{\omega} = \tau$

## 4.1 ANALYTICKÝ POPIS

Všech tři dříve zmíněné složky dohromady tedy popisuje řídicí závislost systému: <sup>10</sup>:

$$\dot{\omega}(t) = -\alpha - \beta\omega(t) - \gamma\omega^2(t) \quad (15)$$

Pokud bychom odstranili lineární komponent, získáváme:

$$\dot{\omega}(t) = -\alpha - \gamma\omega^2(t) \quad (16)$$

Obě tyto diferenciální rovnice jsou analyticky řešitelné a jejich řešení pro  $\omega$  jsou v tomtéž pořadí <sup>11</sup>:

$$\omega(t) = -\frac{\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2} \tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}(t - c_1)\right) - \beta}{2\gamma} \quad (17)$$

a

$$\omega(t) = -\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \tan\left(\sqrt{\alpha\gamma}(t - c_1)\right) \quad (18)$$

### 4.1.1 Maximální doba otáčení

Objevující se parametr  $c_1$  <sup>12</sup> je hodnota v sekundách, která odpovídá momentu po roztočení spinneru, kdy se spinner zastaví. Vyjádřením  $c_1$  (např. z druhé rovnice) jsme schopni určit poměrně přesně, jak dlouho se bude spinner točit, známe-li jeho parametry  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  a jeho počáteční úhlovou rychlost  $\omega_0$ :

$$c_1(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}\omega_0\right) \quad (19)$$

Přáli bychom si vyjádřit celkovou dobu otáčení z počáteční kinetické energie, můžeme dosadit  $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ , kde je nám  $I$  již známe (viz 3.2), a jednoduchou úpravou získáváme:

$$c_1(E) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2\gamma E}{\alpha I}}\right) \quad (20)$$

Jakmile dojde k tomu, že  $t > c_1$ , nepopisuje již funkce náš spinner, protože by začal opět nabývat energie, k čemuž nemůže dojít.

<sup>10</sup>Záporná znaménka používáme čistě z toho důvodu, aby nám koeficienty  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  vycházely kladně, jelikož očekáváme, že systém bude zpomalovat.

<sup>11</sup>Všimněme si, že rovnice 17 je ekvivalentní rovnici 18, když  $\beta = 0$ .

<sup>12</sup>Někdy také označujeme  $t_{max}$ .

**Horní limit doby otáčení  $n$  spinnerů**

Další zajímavou vlastností, kterou jsme schopni pro tento idealizovaný systém dokázat je, že máme-li libovolné (přirozené) množství spinnerů o počátečních energiích  $E_1, E_2 \dots E_n$ , které spolu neinteragují, je maximální dobou, po kterou se může některý z nich otáčet  $t_{max} \leq c_1(\sum_{i=1}^n E_i)$ . Tento fakt se může zdát triviálním a zbytečným, ale jsme tímto způsobem schopni např. určit horní časovou hranici, po kterou by musela běžet simulace, než bychom si byli poměrně <sup>13</sup> jistí, že již došlo k zastavení všech spinnerů.

Chtěli bychom-li zlepšit tento odhad i pro interagující spinnery, bylo by potřeba počítat s tím, že spinnery se mohou zrychlovat, zpomalovat a často budou oscilovat. Pokud bychom sledovali mnoho přibližně harmonických oscilací spinnerů, kdy se po relativně dlouhou dobu nepohybují svou nejvyšší rychlostí, mohli bychom se inspirovat efektivní hodnotou sinusoidy a udělat tak hrubý odhad, že  $t_{max} \leq \sqrt{2}c_1(\sum_{i=1}^n E_i)$ . Nad tím, jaká konstanta by byla dobrá můžeme dlouze polemizovat, ale to není zájmem této práce, proto nebudeme myšlenku dále ozvádět.

Tuto vložku zakončíme důkazem dříve vyslovené věty, že  $t_{max} \leq c_1(\sum_{i=1}^n E_i)$ :

Nejdříve zdůrazníme několik zřejmých faktů o naší funkci  $c_1(\omega_0)$ :

$$c_1(E) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}} \arctan\left(\sqrt{\frac{2\gamma E}{\alpha I}}\right)$$

$$c_1(E) \text{ je rostoucí a prostá funkce pro } \alpha, \gamma \in \mathbb{R}^+$$

$$E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathbb{R}^+ \implies c_1(E_1), \dots, c_1(E_n) \in \mathbb{R}^+$$
(21)

Bez újmy na obecnosti poté můžeme říci:

$$E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_n \in \mathbb{R}^+ \implies c_1(E_1) \leq \dots \leq c_1(E_n) \in \mathbb{R}^+$$
(22)

A obecně vybereme energie  $E_u$  a  $E_v$  takové, že  $E_u > E_v$  ( $u \neq v \wedge 1 \leq u, v \leq n$ ), pro které dokážeme následující:

$$c_1(E_u + E_v) \stackrel{?}{\geq} \max(c_1(E_u), c_1(E_v))$$
(23)

---

<sup>13</sup>Nemůžeme si být kompletně jistí kvůli interakcím spinnerů a nepřestnostem simulace.

**Důkaz**

$$c_1(E_u + E_v) > \max(c_1(E_u), c_1(E_v))$$

$$c_1(E_u + E_v) > \max(c_1(E_u), c_1(E_v)) \equiv c_1(E_u + E_v) > c_1(E_u) \because (c_1(E_u) \geq c_1(E_v) \because E_u \geq E_v)$$

$$\begin{aligned}
& c_1(E_u + E_v) > c_1(E_u) \\
& \frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}} \arctan \left( \sqrt{\frac{2\gamma(E_u + E_v)}{\alpha I}} \right) > \frac{1}{\sqrt{\alpha\gamma}} \arctan \left( \sqrt{\frac{2\gamma E_u}{\alpha I}} \right) \\
& \arctan \left( \sqrt{\frac{2\gamma(E_u + E_v)}{\alpha I}} \right) > \arctan \left( \sqrt{\frac{2\gamma E_u}{\alpha I}} \right) \\
& \sqrt{\frac{2\gamma(E_u + E_v)}{\alpha I}} > \sqrt{\frac{2\gamma E_u}{\alpha I}} \\
& \sqrt{\frac{2\gamma}{\alpha I}} \sqrt{E_u + E_v} > \sqrt{\frac{2\gamma}{\alpha I}} \sqrt{E_u} \\
& \sqrt{E_u + E_v} > \sqrt{E_u} \\
& E_u + E_v > E_u \\
& E_v > 0 \\
& \text{QED}
\end{aligned} \tag{24}$$

Dále pouhou analogií pro libovolné dvojice, větší  $k$ -tice a konečně celou  $n$ -tici energií je zřejmé, že vyplývá:

$$\begin{aligned}
& \forall E_j; (1 \leq j \leq n) : c_1(E_j) \leq c_1 \left( \sum_{i=1}^n E_i \right) \\
& \Updownarrow \\
& t_{max} \leq c_1 \left( \sum_{i=1}^n E_i \right) \\
& \text{QED}
\end{aligned} \tag{25}$$

#### **4.1.2 Experiment pro potvrzení analytického řešení**

#### **4.1.3 Výsledky a porovnání se simulací**

#### **4.1.4 Zhodnocení použití lineárního koeficientu**





## LITERATURA

- [1] YUNG, Kar W.; LANDECKER, Peter B. a VILLANI, Daniel D. An Analytic Solution for the Force Between Two Magnetic Dipoles. [Online]. *Magnetic and Electrical Separation*. 1998, roč. 9, č. 1, s. 39-52. ISSN 1055-6915. Dostupné z: <https://doi.org/10.1155/1998/79537>. [cit. 2023-12-16].
- [2] CULLITY, B. D. a GRAHAM, C. D. *Introduction to magnetic materials*. Second edition. Hoboken: IEEE Press, [2009]. ISBN 978-0-471-47741-9.
- [3] SERWAY, Raymond A. a JEWETT, John W. Jr. *Physics for scientists and engineers*. 6th ed. Belmont: Thomson-Brooks/Cole, 2004. ISBN 0-534-40842-7.
- [4] YE, Jianhe; ZHAN, Pengfei; ZENG, Jincheng; KUANG, Honglin; DENG, Yongfang et al. Concise magnetic force model for Halbach-type magnet arrays and its application in permanent magnetic guideway optimization. [Online.] *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2023, roč. 587. ISSN 03048853. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2023.171301>. [cit. 2023-12-16].
- [5] NATIONAL INSTITUTE OF STANDARDS AND TECHNOLOGY. *Standard Uncertainty and Relative Standard Uncertainty* [online]. [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Info/Constants/definitions.html>
- [6] Jasper. *Shorthand error notation (with brackets) accros decimal point [duplicate]* [online]. [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: <https://physics.stackexchange.com/questions/445141/shorthand-error-notation-with-brackets-accros-decimal-point>
- [7] *Turnaj mladých fyziků* [online]. [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: <https://tmf.fzu.cz/tasks.php?y>
- [8] *Neodymium Magnet Grades* [online]. [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: <https://totalelement.com/blogs/about-neodymium-magnets/neodymium-rare-earth-magnet-grades>
- [9] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. *Fyzické kyvadlo* [online]. [cit. 2023-12-16]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/206-fyzicke-kyvadlo>

- 
- [10] VAN ROSSUM, Guido, Drake VAN ROSSUM a L. FRED. *Python 3 Reference Manual*. Scotts Valley, CA: CreateSpace, 2009. ISBN 1441412697.
- [11] VIRTANEN, Pauli. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*. 2020(17), 261-272.
- [12] HARRIS, Charles R. Array programming with NumPy. *Nature*. 2020(585), 357–362.
- [13] HUNTER, John D. Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in science & engineering*. 2007, 9(3), 90-95.
- [14] VAN ROSSUM, Guido. *The Python Library Reference, release 3.8.2*. Python Software Foundation, 2020.
- [15] STAACKS, S; HÜTZ, S; HEINKE, H a STAMPFER, C. Advanced tools for smartphone-based experiments: phyphox. Online. *Physics Education*. 2018, roč. 53, č. 4. ISSN 0031-9120. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/1361-6552/aac05e>. [cit. 2023-12-17].
- [16] SHAFRANOVICH, Yakov. Common format and MIME type for comma-separated values (CSV) files. *RFC 4180, October*. 2005.
- [17] ALLAIN, Rhett. Let's Explore the Physics of Rotational Motion With a Fidget Spinner. *WIRED* [online]. 2017, **2017**, 1-1 [cit. 2023-12-19]. Dostupné z: <https://www.wired.com/2017/05/physics-of-a-fidget-spinner/>

## SEZNAM OBRÁZKŮ

1	Spinner osazeným neodymovými magnety . . . . .	5
2	Tři interagující spinnery . . . . .	5
3	Tři námi vyhranění orientace magnetů . . . . .	6
4	Ilustrace spinneru společně s vyznačenými rozměry . . . . .	9
5	Ilustrace aparatury pro měření frekvence kmitů spinneru . . . . .	10
6	Nasnímaný průběh magnetické indukce v čase pro spinnerové kyvadlo . . .	10
7	Nasnímaný průběh magnetické indukce v čase pro účely měření remanence	14
8	Závislost magnetické indukce na vzdálenosti . . . . .	15
9	Závislost magnetické síly na vzdálenosti . . . . .	15
10	Souhrnný graf všech měření remanence . . . . .	16



## SEZNAM TABULEK

1	Nomenklatura . . . . .	4
2	Směrové vektory pro různé konfigurace . . . . .	7



## SEZNAM ÚSTŘÍŽKŮ

1	Kód k analyzování spinnerového kyvadla . . . . .	12
2	Kód k určení průměrné hodnoty magnetického pole a odchylek . . . . .	13





## PŘÍLOHY

1. Videozáznam interakce nehybného a pomalého spinneru ..... **VID1**
2. Videozáznam interakce nehybného a rychláho spinneru ..... **VID2**
3. Videozáznam interakce 3 spinnerů ..... **VID3**