Lernzettel Mathe

Taschenrechnerbefehle

Funktion	Befehl
Analysis	
nach Variable lösen	Weiterführend > *solve*
Ableitung	Berechnungen > *diff*
Integral	Berechnungen > $\int$ *oder* Keyboard > Math2 > $\int_{\square}^{\square} \blacksquare$
LGS	Keyboard > Math1 > $\begin{cases} \blacksquare \\ \square\square \end{cases}$
Stochastik	
Vektoren	

Funktion	Befehl
Vektor	Keyboard > Math2 > $\begin{bmatrix} \blacksquare \\ \square\square \end{bmatrix}$
Betrag	Vektoren > *norm*
Skalarprodukt	Vektoren > *dotP*
Kreuzprodukt	Vektoren > *crossP*
Winkel	Vektoren > *angle*

Lineare Gleichungssysteme - LGS

Mit einem LGS kann man Gleichungen mit mehreren Unbekannten/Gleichungen lösen. Ein LGS kann zum Beispiel verwendet werden, wenn man überprüfen möchte, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt oder um die Unbekannten einer neuen Trasse zu finden.

Punkt $X(0, -1, 1)$ Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

LGS:

$$\begin{cases} I.\ 0 = 0 + r \cdot 0 \\ II.\ -1 = -2 + r \cdot 2 \\ III.\ 1 = 0 + r \cdot 2 \end{cases}$$

Hieraus kann man den Wert $\frac{1}{2}$ für den Parameter r ermitteln. Somit liegt der Punkt auf der Gerade g

Analysis

Ableiten

$f(x)$	x^n
$f'(x)$	$n \cdot x^{n-1}$

Aufleiten

$f(x)$	x^n
$F(x)$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Kettenregel

Kurvendiskussion

1. Symmetrie

2. Nullstellen

> $f(x) = 0$

3. Extrema

> $f'(x) = 0$
>
> $f''(x_E) < 0 \Rightarrow$ Maximum
>
> $f''(x_E) > 0 \Rightarrow$ Minimum
>
> $f''(x_E) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage

4. Wendepunkte

> $f''(x) = 0$
>
> $f'''(x_W) < 0 \Rightarrow$ Wendepunkt(L-r)
>
> $f'''(x_W) > 0 \Rightarrow$ Wendepunkt(R-l)
>
> $f'''(x_W) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage

Abstände

Der Abstand zwischen einem Punkt P und einer Funktion f kann mit dem Satz des Pythagoras hergeleitet werden und resultiert in der folgenden Gleichung für d.

$$d(x) = \sqrt{\Delta x + \Delta y}$$

$$d(x) = \sqrt{(x - P_x) - (f(x) - P_y)}$$

Möchte man den minimalsten Abstand herausfinden, so muss man das Minimum ermitteln (Ansatz $d'(x) = 0$). Hat man das Minimum berechnet, kann der Abstand zwischen den beiden Punkten einfach ausgerechnet werden.

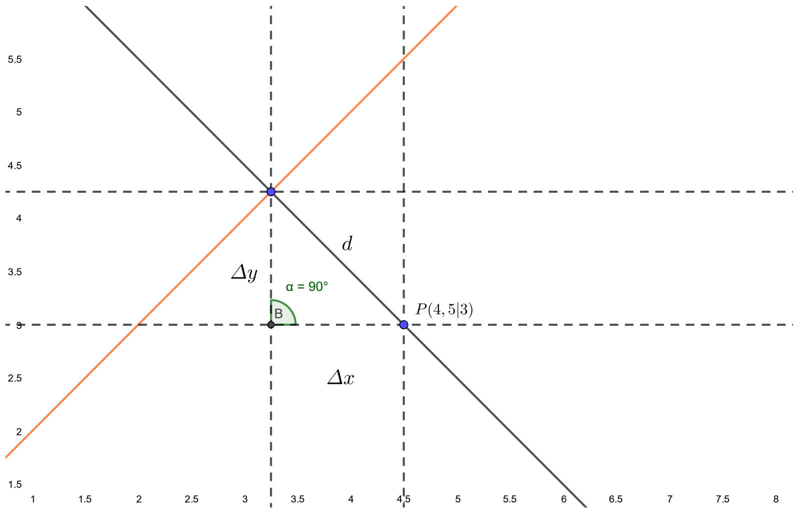

Figure 1: Abstand-Funktion-Punkt

Trassierung

Eine Trassierung ist eine Ansammlung von Funktionen, welche eine gemeinsame Linie bilden. Jede einzelne Funktion hat einen Gültigkeitsbereich. Sie werden folgender Maßen notiert:

$$f(x) \begin{cases} p_1(x) = -x - 3 \text{für} x < -2 \\ p_2(x) = 0,25x^2 - 2 \text{für} - 2 \leq x < 2 \\ p_3(x) = 0,5x - 2,25 \text{für} 1 \leq x \end{cases}$$

Der zugehörige Graph

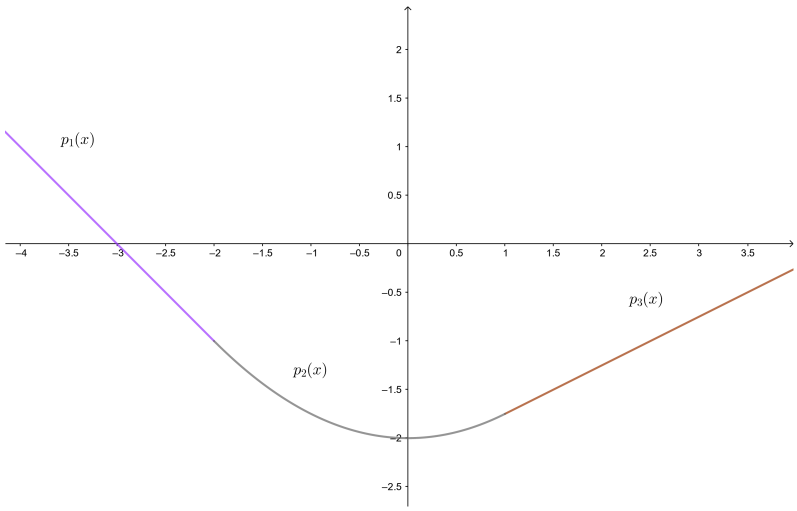

Figure 2: Beispiel-Trassierung

Bedingungen

Fehlt eine der Funktionen nicht vorhanden und soll ermittelt werden, so müssen die gegebenen Bedingungen erfüllt werden. Es gibt drei mögliche Bedingungen, welche den Übergang zwischen zwei Funktionen beschreiben: **versatzfrei**, **knickfrei** und **krümmungsruckfrei**. Diese Bedingungen legen fest wie *glatt* ein Übergang ist. Die Anzahl der Bedingungen legt auch automatisch den Grad der Funktion fest. Der Grad einer Funktion ist immer 1 kleiner als die Anzahl der Bedingungen, da man in einem LGS mit n Unbekannten $n+1$ Bedingungen braucht. Soll eine Funktion also an 2 Stellen versatz-, knick- und krümmungsruckfrei sein, so bilden sich 6 Bedingungen und die Funktion ist eine GRF5 (**G**anz**r**ationale **F**unktion 5. Grades).

versatzfrei

Ist eine Funktion versatzfrei mit einer anderen verbunden, so laufen sie durch den gleichen Übergangspunkt. Die Bedingung für die Versatzfreiheit lautet demnach:

$$p_1(x_0) = p_2(x_0) = d$$

Mit der Übergangsstelle x_0 und y-Koordinate d

knickfrei

Ist eine Funktion knickfrei mit einer anderen verbunden, so sind haben sie beide die gleiche Steigung am Übergangspunkt. Die Bedingung für die Knickfreiheit lautet demnach:

$$p_1'(x_0) = p_2'(x_0) = d$$

Mit der Übergangsstelle x_0 und der Steigung d

Wenn die Steigung als Winkel α angegeben ist, so kann dieser mit der folgenden Gleichung in die Steigung m_p umgewandelt werden, um in einer Bedingung verwendet werden zu können.

$$m_p = \tan(\alpha)$$

krümmungsruckfrei

Ist eine Funktion krümmungsruckfrei mit einer anderen verbunden, so haben sie beide die gleiche Krümmung am Übergangspunkt. Die Bedingung für die Krümmungsruckfreiheit lautet demnach:

$$p_1''(x_0) = p_2''(x_0) = d$$

Mit der Übergangsstelle x_0 und der Krümmung d (meist 0)

Trasse bilden

Möchte man eine Trasse bilden, so muss man zuerst alle Bedingungen aufstellen. Zusätzlich hilft es, sich die allgemeinen Gleichungen mit den dazugehörigen Ableitungen zu notieren.

Beispiel: Eine Funktion soll zu einer Trasse hinzugefügt werden. Sie soll an Zwei stellen versatz- und knickfrei sein. Sie soll die Punkte $A(0|3)$ und $B(5|5)$ schneiden und die Steigung an Punkt A $-0,5$ und an Punkt B $0,5$ besitzen.

Allgemeine Gleichungen GRF3:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Punkte:	Bedingungen:	Gleichungen:
$A(0\|3)$	$p(0) = 3$	$a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 3$
$B(5\|5)$	$p(5) = 5$	$a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = 5$
$m_A = -0,5$	$p'(0) = -0,5$	$3 \cdot a \cdot 0^2 + 2 \cdot b \cdot 0 + c = -0,5$

Punkte:	Bedingungen:	Gleichungen:
$m_B = 0,5$	$p'(5) = 0,5$	$3 \cdot a \cdot 5^2 + 2 \cdot b \cdot 5 + c = 0,5$

Lässt man dieses LGS nun mit dem CAS lösen, ergeben sich für die Parameter folgende Werte:

$$a = -\frac{1}{125}, b = \frac{17}{50}, c = -\frac{1}{2}, d = 3$$

und somit die Funktionsgleichung $p(x) = -\frac{1}{125}x^3 + \frac{17}{50}x^2 - \frac{1}{2}x + 3$

der zugehörige Graph:

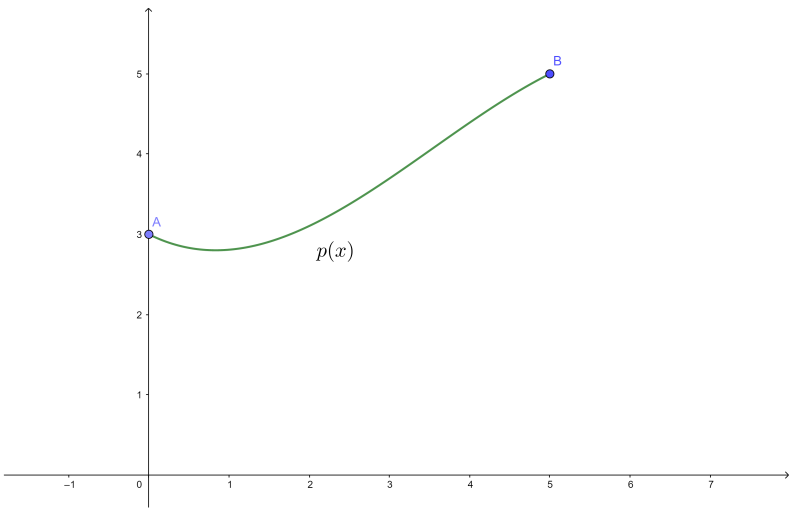

Figure 3: Beispiel-Trassenbildung

e-Funktionen

Integration

Mit der Integration lässt sich der Flächeninhalt unter einer Funktion berechnen.

$$\int_a^b f(x)dx$$

Name	Bedeutung
a	untere Integrationsgrenze
b	obere Integrationsgrenze
$f(x)$	Integral
dx	Differenzial

Beispiel: Berechnung der Fläche zwischen den Graphen f_1 und f_2 von 1 bis $7,5$

$f_1(x) = x + 1$

$f_2(x) = \frac{1}{2}x$

$$A = \int_{1}^{7,5} f_1(x) - f_2(x)dx = \int_{1}^{7,5} (x+1) - (\frac{1}{2}x)dx = 20,31$$

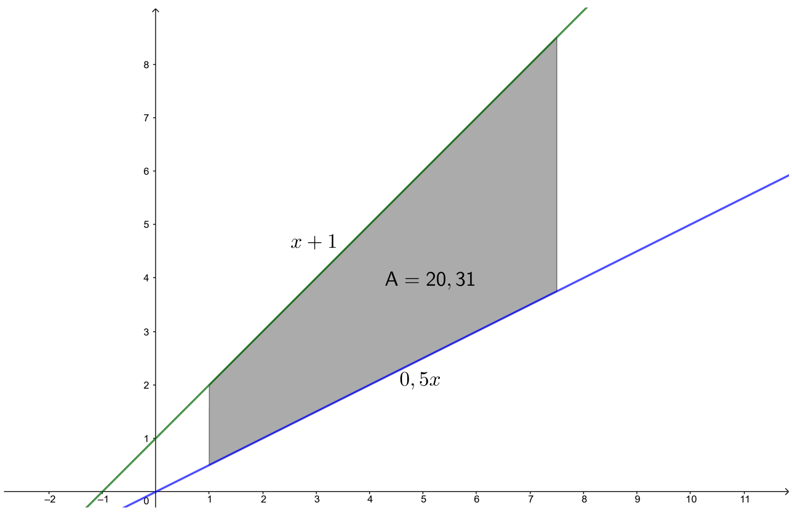

Figure 4: Integral

Integration händisch lösen

Um ein Integral zu lösen, muss zuerst die Stammfunktion $F(x)$ gebildet werden. In diese wird nun zuerst die obere Grenze und dann die untere Grenze eingesetzt.

Beispiel:

$f(x) = 0,5x$ A=Fläche von 1 bis $7,5$

$$A = \int_{1}^{7,5} (0,5x)dx$$

Stammfunktion bilden:

$$F(x) = 0,25x^2$$

einsetzen der Grenzen:

$$A = \int_{1}^{7,5} (0,5x)dx = [0,25x^2]_1^{7,5}$$

$$A = (0,25 \cdot 7,5^2) - (0,25 \cdot 1^2) \approx 13,81$$

die passende Grafik:

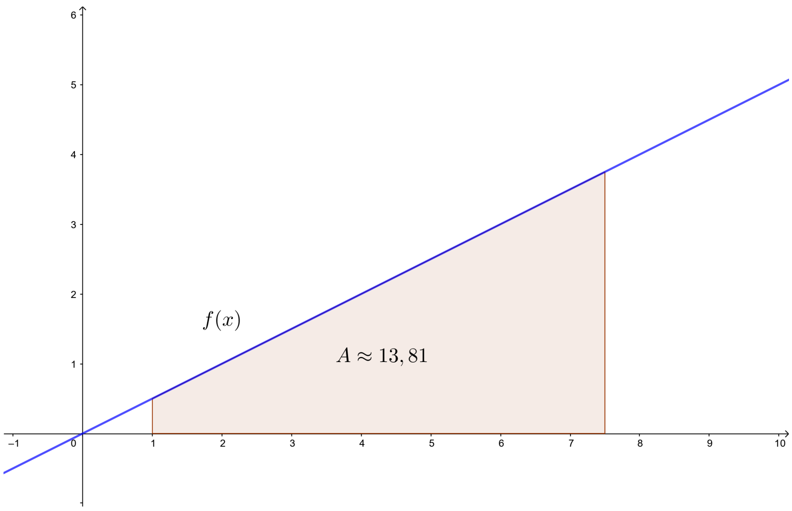

Figure 5: Integral-händisch

Stochastik

Analytische Geometrie

Vektoren

Betrag eines Vektors

Der Betrag eines Vektors ist seine Länge.

Beispiel

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

> CAS Vektor > norm

Skalarprodukt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

> $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist eine reelle Zahl

> CAS Vektor > dotP

Kreuzprodukt/Normalenvektor

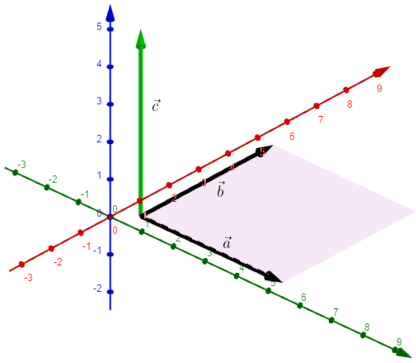

Figure 6: Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

> $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektor

> CAS Vektor > crossP

Winkel zwischen zwei Vektoren

> CAS Vektor > angle

Geraden

Geradengleichungen

Parametergleichung

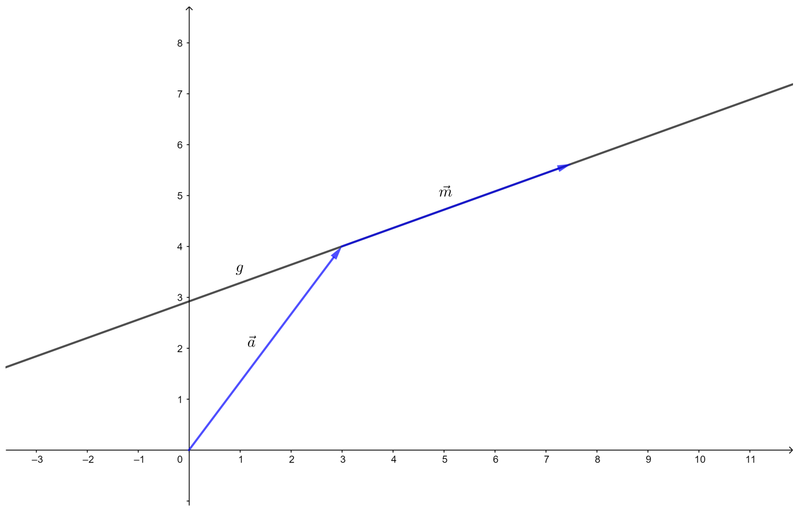

Figure 7: Parametergleichung

$$g : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m}$$

- $\vec{x}$: beliebiger Raumvektor
- $\vec{a}$: Stützvektor/Ortsvektor
- $\vec{m}$: Richtungsvektor
- r : Geradenparameter

Normalenform

$$g : \vec{n}_g \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

- $\vec{x}$: beliebiger Raumvektor
- $\vec{a}$: Stützvektor/Ortsvektor
- $\vec{n}_g$: Normalenvektor von g

Punkt auf der Gerade

Wenn der Punkt X (somit der Vektor $\vec{x}$) auf einer Gerade liegt, wird die Geradengleichung

in der Parameterform:

- einen Wert für den Geradenparameter ermöglichen

in der Normalenform:

- 0 ergeben

Schnittpunkt zweier Geraden

Schneiden sich zwei Geraden g_1 und g_2, so kann der Schnittpunkt ermittelt werden, indem die beiden Gleichungen gelichgesetzt werden. Danach wird in einem LGS die Lösung für die beiden Geradenparameter gefunden. Jetzt kann der jeweilige Parameter in eine der Parameter in seine Geradengleichung eingesetzt werden, um ein Vektor $\vec{x}$ zu ermitteln.

$$g_1 = g_2$$

$$\vec{a_1} + r \cdot \vec{m}_1 = \vec{a_2} + s \cdot \vec{m_2}$$

Schnittwinkel zweier Geraden

Schnittwinkel mit den Richtungsvektoren $\vec{m_g}$ und $\vec{m_h}$ der Geraden g und h:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{m_g} \cdot \vec{m_h}|}{|\vec{m_g}| \cdot |\vec{m_h}|}$$

Abstand Punkt von Gerade

Der Abstand zwischen einem Punkt X und einer Gerade g kann mithilfe einer Hilfsebene H berechnet werden.

Schnittpunkt Gerade und Ebene

Schneidet sich eine Gerade g und eine Ebene E, so kann der Schnittpunkt ermittelt werden, indem die Geradengleichung (in Parameterform) in die Ebendengleichung (in Koordinatenform) eingesetzt wird. Danach wird nach den Geradenparameter gelöst, welcher danach für eine Lösung für den Vektor $\vec{x}$ in die Geradengleichung eingesetzt werden muss.

$$g : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m}$$

$$E : ax + by + cz = d$$

g in E

$$(a_1 + r \cdot m_1) \cdot x + (a_2 + r \cdot m_2) \cdot y + (a_3 + r \cdot m_3) \cdot z = d$$

Schnittwinkel Gerade und Ebene

Schnittwinkel mit dem Richtungsvektor $\vec{m_g}$ der Geraden und dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene:

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{m_g}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m_g}|}$$

Ebenen

Ebenengleichung

Parameterform

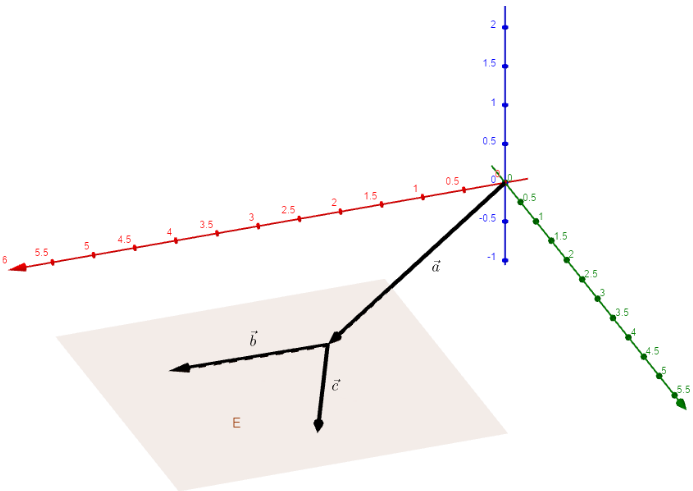

Figure 8: Parameterform

$$E : \vec{x} = \vec{a} + r\cdot\vec{b} + s\cdot\vec{c}$$

- $\vec{x}$: beliebiger Raumvektor
- $\vec{a}$: Stützvektor/Ortsvektor
- $\vec{b}, \vec{c}$: Richtungsvektor
- r, s : Ebenenparameter

Normalenform

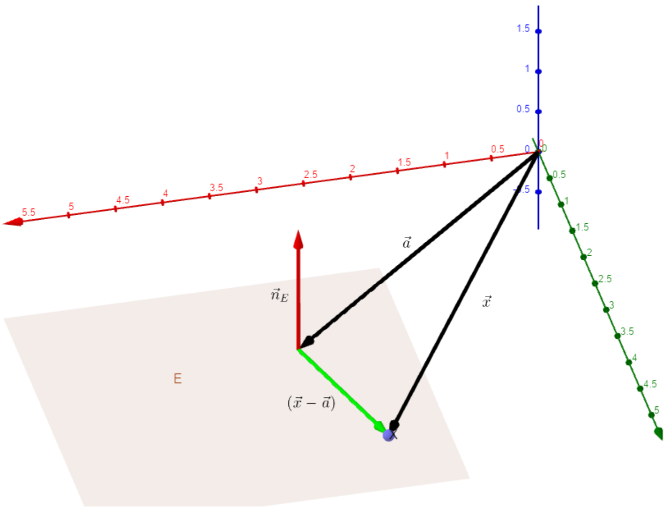

Figure 9: Normalenform

$$E : \vec{n}_E \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

- $\vec{x}$: beliebiger Raumvektor
- $\vec{a}$: Stützvektor/Ortsvektor
- $\vec{n}_E$: Normalenvektor von E

Koordinatenform

$$E : ax + by + cz = d$$

- a, b, c : Koordinaten des Normalenvektors
- d : Skalarprodukt von $\vec{n}$ (Normalenvektor) und $\vec{a}$ (Stützvektor/Ortsvektor)

Schnittgerade zweier Ebenen

Schneiden sich zwei Ebenen E_1 und E_2, so kann die Schnittgerade g ermittelt werden, indem eine der beiden Ebenengleichungen (in Koordinaten) in die andere (in Parameterform) eingesetzt wird. Danach wird nach einen der zwei Parameter gelöst. Die Lösung enthält den anderen Parameter und wird dann in die Ebenengleichung in Parameterform eingesetzt. Diese Ebenengleichung hat jetzt nur noch ein Parameter und macht sie zu einer Geradengleichung.

$$E_1 : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$$

$$E_2 : ax + by + cz = d$$

E_1 in E_2

$$(a_1 + r \cdot b_1 + s \cdot c_1) \cdot x + (a_2 + r \cdot b_2 + s \cdot c_2) \cdot y + (a_3 + r \cdot b_3 + s \cdot c_3) \cdot z = d$$

resultiert in g

$$g : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{m}$$

Schnittwinkel zweier Ebenen

Schnittwinkel mit den Normalenvektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ der beiden Ebenen:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$

Abstand Punkt und Ebene

Der Abstand zwischen dem Punkt X (Vector $\vec{x}$) und der Ebene E (in Normalenform) kann mit folgender Formel berechnet werden.

$$d(X, E) = \left| \frac{\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a})}{|\vec{n}|} \right|$$