Schnitt und Schnittwinkel zweier Kreise

Arbeitsblatt

Schnitt zweier Kreise

Beispiel:
Berechne die Schnittpunkte der Kreise k_1: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 10$ und k_2: $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 25$.

Lösung:

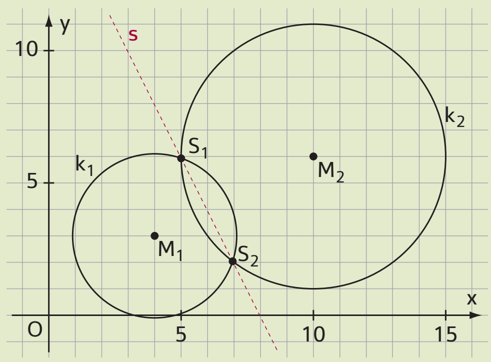
Quadriere die Klammern aus und subtrahiere die zweite Gleichung von der ersten, um x^2 und y^2 zu eliminieren.

k_1: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 10$
k_2: $(x-10)^2 + (y-6)^2 = 25$
k_1: $x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 10$
k_2: $x^2 - 20x + 100 + y^2 - 12y + 36 = 25 \quad |-$

Du erhältst zunächst nicht die Koordinaten der Schnittpunkte, sondern eine lineare Gleichung.

$12x - 84 + 6y - 27 = -15$
$12x + 6y = 96$
$y = -2x + 16$

$y = -2x + 16$ lässt sich geometrisch als die Gleichung jener Geraden s interpretieren, auf der die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 liegen.
Die Schnittpunkte erhältst du, indem du die Gerade s mit einem der beiden Kreise schneidest, z. B. $s \cap k_1$.



Löse die quadratische Gleichung.

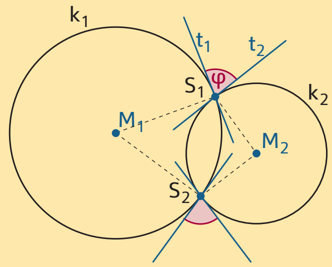
$x^2 - 8x + 16 + (-2x + 16)^2 - 6 \cdot (-2x + 16) + 9 = 10$
$x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 64x + 256 + 12x - 96 + 9 = 10$
$5x^2 - 60x + 175 = 0$
$x_1 = 5 \Rightarrow S_1(5|6) \qquad x_2 = 7 \Rightarrow S_2(7|2)$

Die Schnittpunktberechnung zweier Kreise führt zu einer quadratischen Gleichung.
Da eine quadratische Gleichung zwei Lösungen, eine oder keine Lösung hat, können zwei Kreise zwei Schnittpunkte, einen oder keinen Schnittpunkt haben.

1 Untersucht arbeitsteilig, ob die beiden Kreise Schnittpunkte haben.
Vergleicht eure Berechnungen und Ergebnisse.
(1) k_1: $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 40$; $\quad k_2$: $(x-12)^2 + (y+2)^2 = 16$
(2) k_1: $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 80$; $\quad k_2$: $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 20$
(3) k_1: $(x+4)^2 + (y-10)^2 = 40$; $\quad k_2$: $(x-8)^2 + (y-2)^2 = 32$

Schnittwinkel zweier Kreise

▷ Unter dem Schnittwinkel φ zweier Kreise versteht man den Schnittwinkel der beiden Tangenten in einem Schnittpunkt der beiden Kreise.



Aus Symmetriegründen sind die Winkel zwischen den Tangenten in beiden Schnittpunkten der Kreise gleich groß.

2 Berechne den Schnittwinkel der beiden Kreise k_1: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$ und k_2: $(x-7)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Aufgaben

3 Stelle fest, welche gegenseitige Lage die Kreise haben, ohne eventuelle Schnittpunkte zu berechnen.

a) $k_1[M_1(2|3); 3]$; $k_2[M_2(8|4); 5]$

b) $k_1[M_1(-2|1); \sqrt{45}]$; $k_2[M_2(1|4); 2]$

c) $k_1[M_1(3|-2); \sqrt{50}]$; $k_2[M_2(-1|2); \sqrt{2}]$

d) $k_1[M_1(-2|1); \sqrt{5}]$; $k_2[M_2(5|-3); 4]$

4 Berechne die Schnittpunkte der beiden Kreise k_1 und k_2.

a) k_1: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 13$; k_2: $(x-13)^2 + (y-4)^2 = 65$

b) k_1: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 34$; k_2: $(x-5)^2 + (y-8)^2 = 104$

c) $k_1[M_1(-2|2); 5]$; $k_2[M_2(6|-4); 5]$

d) $k_1[M_1(-3|-1); \sqrt{45}]$; $k_2[M_2(-3|-1); \sqrt{10}]$

e) k_1: $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 74$; k_2: $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 53$

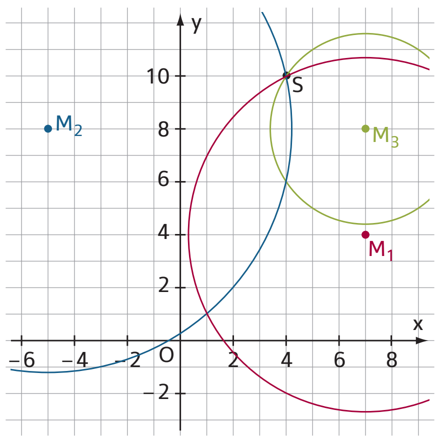
5 Berechne die Schnittpunkte und die Schnittwinkel der beiden Kreise k_1 und k_2.

a) k_1: $(x-9)^2 + (y-4)^2 = 65$; k_2: $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 10$

b) $k_1[M_1(7|2); \sqrt{34}]$; k_2: $x^2 + y^2 + 10x + 2y = 59$

c) k_1: $(x-5)^2 + (y-6)^2 = 58$; k_2: $x^2 + y^2 + 10x - 20y = -67$

6 Drei Kreise k_1: $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 45$, k_2: $x^2 + y^2 + 10x - 16y = -4$ und k_3: $(x-7)^2 + (y-8)^2 = 13$ schneiden einander in einem gemeinsamen Punkt S. Berechne die Koordinaten von S.



7 Kreuze an, ob folgende Aussagen zutreffen oder nicht zutreffen.

	trifft zu	trifft nicht zu
(1) Wenn sich zwei Kreise in zwei Schnittpunkten schneiden, sind die Schnittwinkel zwischen den Kreisen in beiden Punkten gleich groß.	☐	☐
(2) Bei der Berechnung der Schnittpunkte zweier Kreise entsteht immer eine quadratische Gleichung.	☐	☐
(3) Ein Schnittpunkt zweier beliebiger Kreise muss immer gleich weit von den beiden Mittelpunkten entfernt sein.	☐	☐
(4) Drei Kreise können insgesamt maximal sechs (paarweise) Schnitt-punkte besitzen.	☐	☐

Schnitt und Schnittwinkel zweier Kreis

Arbeitsblatt – Lösungen

1 a) $S_1(12|2)$, $S_2(8|-2)$ b) $S(6|8)$ c) kein Schnittpunkt, $L = \{\ \}$

2 63,43°

3
a) $|3 - 5| < \sqrt{37} = d < 3 + 5$; 2 Schnittpunkte
b) $\sqrt{18} = d < |\sqrt{45} - 2|$; k_2 liegt innerhalb von k_1.
c) $\sqrt{32} = d = |\sqrt{50} - \sqrt{2}|$; k_2 berührt k_1 von innen.
d) $\sqrt{5} + 4 < d = \sqrt{53}$; keine Schnittpunkte

4
a) $S_1(5|5)$, $S_2(6|0)$
b) $S_1(-5|6)$; $S_2(3|-2)$
c) $S(2|-1)$
d) kein Schnittpunkt
e) kein Schnittpunkt (konzentrische Kreise)

5
a) $S_1(1|5)$; $S_2(5|-3)$; $\varphi \approx 56{,}31°$
b) $S_1(2|5)$; $S_2(4|-3)$; $\varphi \approx 71{,}57°$
c) $(2|13)$; $(-2|3)$; $\varphi = 90°$

6 $S(4|10)$

7 (1), (2) und (4) treffen zu.