Höhere Mathematik II

Mitschrift der Vorlesung von Prof. Lehn
im Sommersemester 2019 an der Uni Ulm

11. Juni 2019

Inhaltsverzeichnis

Einführung

0.1 Stetigkeit in einer Dimension

$$
\begin{aligned}
&f \text{ ist stetig in } x_0 \\
&\quad\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\
&\quad\Leftrightarrow \quad \forall\, (x_n) \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \\
&\quad\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta \quad \text{mit} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Der Grenzwert von Funktionen ist über den Grenzwert von Folgen definiert und kann auch nur so überprüft werden.

0.2 Zwei Sonderfälle

Skalarfeld

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Visualisierung durch Höhenlinien: $H_c := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$
Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$

Vektorfeld

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
Beispiel: $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Kapitel 1

Differentialrechnung in höheren Dimensionen

1.1 Topologie

Skalarprodukt

Definition: $\langle x, y\rangle := x^\top y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$

Euklidische Norm

Definition: $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$

1.1.1 Korollar

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

1.

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$$

2. Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n \quad : \quad |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

Begründung (kein Beweis) durch alternative Definition:

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \underbrace{\cos\alpha}_{\leqslant 1}$$

Dabei ist α der Winkel der zwischen x und y eingeschlossen wird.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \quad &\Leftrightarrow \quad x, y \text{ sind lin. abhängig} \quad (x = \lambda y \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \quad x, y \text{ zeigen in die gleiche oder entgegengesetzte Richtung} \end{aligned}$$

3. $\|\cdot\|$ ist eine Norm. Eine Norm hat folgende Eigenschaften:

   (i) $\|x\| \geqslant 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

   (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

   (iii) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung

1.1.2 Konvention

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt für das Komplement $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

1.1.3 Definition der ε-Umgebung

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$, dann gilt für die ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von x_0:

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

Bemerkung: Die punktierte ε-Umgebung ist definiert als: $\dot{U}_\varepsilon = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$

1.1.4 Topologische Grundbegriffe

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, dann heißt ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$

(i) ein **innerer Punkt**, wenn gilt $\exists\ \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subset A$
Menge aller inneren Punkte: $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\ \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \subset A\}$

(ii) ein **Berührungspunkt**, wenn $\forall\ \varepsilon > 0$ gilt $U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing$
abgeschlossene Hülle: $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall\ \varepsilon > 0 \text{ gilt } U_\varepsilon(x_0) \neq \varnothing\}$

(iii) ein **Häufungspunkt**, wenn $\forall\ \varepsilon > 0$ gilt $(U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \varnothing$
Die Menge aller Häufungspunkte wird mit A' bezeichnet.

(iv) ein **Randpunkt**, wenn $\forall\ \varepsilon > 0$ gilt $U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing$ und $U_\varepsilon(x_0) \cap A^c \neq \varnothing$
Menge aller Randpunkte oder auch **Rand** von A wird mit ∂A bezeichnet.

Korollar

(i) $\mathring{A} \subset A$

> ***Beweis:*** Zu zeigen: $x \in \mathring{A} \quad \Rightarrow \quad x \in A$
>
> $$x \in \mathring{A} \quad \Rightarrow \quad \exists\ \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \subset A \quad \overset{x \in U_\varepsilon(x)}{\Rightarrow} \quad x \in A$$

(ii) $\mathring{A} \subset \overline{A}$

(iii) $\partial A \subset \overline{A}$

(iv) $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$

(v) $\overline{A} = A \cup \partial A$ (schwächere Aussage als (iv))

1.1.5 Definition von offen und abgeschlossen

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt

(i) **offen**, wenn $A = \mathring{A}$ gilt (A besteht nur aus inneren Punkten)

(ii) **abgeschlossen**, wenn $\partial A \subset A$ gilt (wenn der Rand in der Menge enthalten ist)

1.1.6 Beispiele

1. Jede ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0 \in \mathbb{R}^n)$ ist offen

Beweis: Sei $A = U_\varepsilon(x_0)$ und $x \in A$ beliebig.
Zu zeigen: $x \in \mathring{A}$, respektive $\exists\ \delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subset A$
Wähle $\delta = \varepsilon - \|x - x_0\|$, dann gilt:

$$\underbrace{y \in U_\delta(x)}_{\Leftrightarrow\ \|y-x\|<\delta} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{y \in A}_{\Leftrightarrow\ \|y-x_0\|<\varepsilon}$$

$$\|y - x_0\| = \|y - x + x - x_0\| \overset{\Delta-\text{Ungl.}}{\leqslant} \underbrace{\|y - x\|}_{<\delta} + \|x - x_0\| < \delta + \|x - x_0\|$$
$$= \underbrace{\varepsilon - \|x - x_0\|}_{\delta} + \|x - x_0\| = \varepsilon$$

2. Sei $I \subset \mathbb{R}$, dann gilt

(i) I ist offen, wenn $I = (a, b)$ mit $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$
für $a = b$ gilt $I = \varnothing$ mit I offen
und für $a = -\infty, b = \infty$ ist I auch offen

(ii) I ist abgeschlossen, wenn $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
oder $I = (-\infty, b]$ oder $I = [a, \infty)$ oder $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

(die reellen Zahlen sind offen und abgeschlossen zugleich)

1.1.7 Satz

für $A \subset \mathbb{R}^n$ sind folgenden Aussagen äquivalent:

(i) A ist abgeschlossen $A = \overline{A}$

(ii) A enthält alle Häufungspunkte, $A' \subset A$

(iii) A enthält alle Randpunkte, $\partial A \subset A$

(iv) A^c ist offen

Beweis zu (i) $\Rightarrow$ (iv): Annahme: A^c ist nicht offen:

$\Rightarrow \quad \exists\ x \in A^c$ mit $U_\varepsilon(x) \not\subset A^c \quad \forall\ \varepsilon > 0$
$\Rightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$
$\Rightarrow \quad x$ ist Berührungspunkt von $A \quad \Rightarrow \quad x \in A \quad \Rightarrow \quad$ Widerspruch zur Annahme

Beweis zu (iv) $\Rightarrow$ (i):

A^c ist offen $\Rightarrow$ $\forall\, x \in A^c : \exists\, \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset A^c$ $\Rightarrow$ $U_\varepsilon(x) \cap (A^c)^c = \varnothing$
$\Rightarrow$ $U_\varepsilon(x) \cap A = \varnothing$ und $U_\varepsilon(x) \cap A^c \neq \varnothing$
$\Rightarrow$ kein $x \in A^c$ ist Berührungspunkt von A
$\Rightarrow$ A enthält alle seine Berührungspunkte $\Rightarrow$ A ist abgeschlossen

1.1.8 Satz

(i) $\varnothing$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen.

Beweis: Folgt direkt aus der Definition 1.1.5

(ii) Die Vereinigung beliebig vieler offene Mengen ist offen:

$$\bigcup_{j \in J} (O_j \text{ offen}) = O \text{ offen}$$

Beweis: Sei $A = \bigcup_{j \in J} O_j, x \in A$ beliebig.
Zu zeigen: Für $x \in A$ gilt $\exists\, \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset A$

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in O_j \text{für mindestens ein } j \in J$$
$$\overset{O_j \text{offen}}{\Rightarrow} \quad \exists\, \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset O_j \subset A$$

(iii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen:

$$\bigcap_{j=1}^{n} (O_j \text{ offen}) = O \text{ offen}$$

Beweis: Sei $A = O_1 \cap O_2 \cap ... \cap O_n$.
Für $x \in A$ gilt $\exists\, \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subset A$

$\Rightarrow$ $x \in O_1$ und $x \in O_2$ und ...
$\overset{O_1, O_2, ... \text{ offen}}{\Rightarrow}$ $\exists\, \varepsilon_1 > 0$ mit $U_{\varepsilon_1}(x) \subset 0_1$ und $\exists\, \varepsilon_2 > 0$ mit $U_{\varepsilon_2}(x) \subset 0_2$ und ...
$\Rightarrow$ für $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ gilt $U_\varepsilon(x) \subset A = O_1 \cap ... \cap O_n$

Bemerkung: Für unendlich viele offene Mengen gilt dies nicht immer:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = (-1,1) \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cap ... = \{0\} \text{ abgeschlossen}$$

Beispiel

Seien A_1, A_2 zwei abgeschlossene Mengen, dann gilt

(i) $A_1 \cup A_2$ ist abgeschlossen

Beweisidee: A_1 ist abgeschlossen $\Rightarrow A_1^c$ ist offen

$$(A_1 \cup A_2)^c \overset{\text{De Morgan}}{=} \underbrace{A_1^c}_{\text{offen}} \cap \underbrace{A_2^c}_{\text{offen}} \text{ ist offen wegen Satz 1.1.8}$$

$$((A_1 \cup A_2)^c)^c = A_1 \cup A_2 \text{ ist abgeschlossen}$$

1.1.9 Satz

(i) $\varnothing$ und $\mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen.

(ii) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen:

$$\bigcap_{j \in J} (A_j \text{ abgeschlossen}) = A \text{ abgeschlossen}$$

(iii) Die Vereinigung <u>endlich</u> vieler abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen:

$$\bigcup_{j=1}^{n} (A_j \text{ abgeschlossen}) = A \text{ abgeschlossen}$$

Bemerkung: Für unendlich viele abgeschlossene Mengen gilt dies nicht immer:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = \{0\} \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup ... = (-1, 1) \text{ offen}$$

1.1.10 Definition von beschränkt und kompakt

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt:

(i) **beschränkt** wenn $\exists\ c > 0$ mit $\|x\| < c \quad \forall\ x \in A$

(ii) **kompakt**, wenn A abgeschlossen und beschränkt ist.

1.2 Folgen

1.2.1 Definition von Konvergenz und Beschränktheit

Eine Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ heißt

(i) **konvergent**, wenn gilt

$$\exists\ a \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N(\varepsilon): \quad \|a_k - a\| \quad \forall\ k \geqslant N(\varepsilon)$$

Dann ist a der Grenzwert der Folge:

$$a = \lim_{k \to \infty} a_k \quad \text{oder} \quad a_k \overset{k \to \infty}{\to} a$$

(ii) **beschränkt**, wenn $\exists\ c > 0$ mit $\|a_k\| < c \quad \forall\ k$

1.2.2 Bemerkung

Wenn eine Folge $(a_k) = \begin{pmatrix} \left(a_1^{(k)}\right) \\ \vdots \\ \left(a_n^{(k)}\right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, so gilt

(i) $\Leftrightarrow$ jede Komponente $\left(a_1^{(k)}\right), ..., \left(a_n^{(k)}\right)$ konvergiert:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_i^{(k)} = a_i \quad \text{für } i = 1, ..., n$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (a_k) erfüllt das **Cauchy-Kriterium**:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon): \quad \|a_k - a_l\| < \varepsilon \quad \forall\, k, l \geqslant N(\varepsilon)$$

(iii) $\Leftrightarrow$ jede Teilfolge von (a_k) konvergiert gegen a: $a_{l_k} \overset{k\to\infty}{\to} a$ für $l_1 \geqslant 1, l_2 \geqslant 2, ...$

(iv) der Grenzwert a ist eindeutig.

1.2.3 Satz von Bolzano Weierstraß

Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$ besitzt einen konvergente Teilfolge.

Beispiele

(i) $n = 1$: Sei $A \leqslant (a_k) \leqslant B \quad \forall\, k$. Konstruiert man eine neue Schranke mit $\frac{A+B}{2}$ so liegen wiederum ∞ viele Elemente in der oberen und/oder unteren Hälfte.

(ii) Sei $(a_k) = \begin{pmatrix} (x_k) \\ (y_k) \end{pmatrix}$ eine beschränkte Folge im $\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow (x_k), (y_k)$ sind beschränkte Folgen
$\overset{\substack{\text{Satz von} \\ \text{Bolzano} \\ \text{Wierstraß}}}{\Rightarrow} \exists\, (x_k), (y_k)$ sind konvergent

1.2.4 Abschließende Bemerkungen

(i) Grenzwert Rechenregeln können aus dem $\mathbb{R}$ für $\mathbb{R}^n$ übernommen werden.
z.b. $a_k \overset{k\to\infty}{\to} a, \quad b_k \overset{k\to\infty}{\to} b \quad \Rightarrow \quad a_k^\top b_k \overset{k\to\infty}{\to} a^\top b$

(ii) Es gibt viele Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften von Folgen und den topologischen Eigenschaften von Mengen.
z.b. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt
$\Leftrightarrow \quad \exists (a_k)_{k=1}^\infty$ mit $a_k \in A \setminus \{a\}\, \forall\, k \quad$ und $\quad a_k \overset{k\to\infty}{\to} a$

1.3 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

1.3.1 Definition

Eine Funktion $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nennt man eine Funktion mit n-Veränderlichen.

$$f(x_1, ..., x_n) = f(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f_1, ..., f_m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

1.3.2 Definition Grenzwert/Limes

Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $a \in \overline{A}$. Ein $b \in \mathbb{R}^m$ heißt Grenzwert von f für $x \to a$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \|f(x) - b\| < \varepsilon \quad \forall\, x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

Bemerkung: Die Funktion f muss in a nicht stetig sein, so kann z.b. gelten:
$\lim_{x\to a} f(x) = b \neq f(a)$

1.3.3 Korollar

Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \overline{A}, b \in \mathbb{R}^m$ dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $f(x) \overset{x\to a}{\to} b$

(ii) $\|f(x) - b\| \overset{x\to a}{\to} 0 \in \mathbb{R}^1$ (Eine Norm bildet immer auf ein Skalar ab)

(iii) $f_1(x) \overset{x\to a}{\to} b_1, ..., f_m(x) \overset{x\to a}{\to} b_m$

Zusätzlich gilt das **Cauchy-Kriterium**:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \|f(x), f(y)\| < \varepsilon \quad \forall\, x, y \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

1.3.4 Beispiel

Sei $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$$a_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad f(a_k) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \quad \forall\, k$$

$$b_k = \begin{pmatrix} x_k \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } x_k \overset{k\to\infty}{\to} 0, \quad f(b_k) = \frac{0}{x_k^2} \quad \forall\, k$$

Da $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim\limits_{k\to\infty} f(b_k)$ kann der Grenzwert nicht existieren.

1.3.5 Lemma Folgenkriterium

Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in \overline{A}$

$$\underbrace{\exists b \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \lim_{x\to a} f(x) = b}_{\text{der Grenzwert } b \text{ existiert}} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{array}{l} \text{jede Folge } (x_k)_{k=1}^{\infty} \subset A \text{ mit } x_k \neq a\ \forall\, k \text{ und } x_k \overset{k\to\infty}{\to} a \\ \Rightarrow \quad f(x_k) \overset{k\to\infty}{\to} b \end{array}}_{\text{jede beliebige Folge konvergiert gegen } b}$$

1.3.6 Satz zu Grenzwerte verketteter Funktionen

Sei $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m, a \in \overline{A}, f : A \to B, g : \overline{B} \to \mathbb{R}^l$

$$\exists\, b \in \overline{B} \text{ mit } \lim_{x\to a} f(x) = b, \quad \exists\, c \in \mathbb{R}^l \text{ mit } \lim_{y\to b} g(y) = c \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a} \underbrace{g\left(f(x)\right)}_{(g\circ f)(x)} = \lim_{y\to b} g(y) = c$$

1.3.7 Beispiel

Sei $f(x,y) = e^{-x^2+y^2} = \exp\left(g(x,y)\right)$ mit $g(x,y) = x^2 + y^2$, dabei gilt:

$$\lim_{(x,y)^\top \to (0,0)^\top} g(x,y) = \lim_{(x,y)^\top \to (0,0)^\top} x^2 + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} e^z = 1$$

1.3.8 Definition der Stetigkeit

Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

(i) f ist **stetig** in $a \in A$ wenn gilt:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) : \quad \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \forall\ x \in U_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

Bemerkung: Es wird $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ gefordert.
Diese Definition unterscheidet sich in der nicht punktierten ε-Umgebung und es gilt $f(a)$ anstatt b.

(ii) f ist stetig auf A, wenn f in jedem Punkt $a \in A$ stetig ist.

1.3.9 Bemerkung

(i) Kompositionen stetiger Funktionen sind wieder stetig: f, g stetig $\Rightarrow$ $f + g, f - g, ...$ stetig

(ii) Das Folgenkriterium überträgt sich:
Sei $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ eine Folge in A mit $\lim_{k \to \infty} a_k = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \to \infty} f(a_k) = f(a)$

(iii) Ist A kompakt, dann nimmt eine stetige Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ immer ein Maximum und Minimum an:

$$\exists\ x_m, x_M \in A \text{ mit } f(x_m) = \min_{x \in A} f(x), f(x_M) = \max_{x \in A} f(x)$$

1.4 Partielle Ableitungen, Richtungsableitungen

1.4.1 Definition der partiellen Ableitung

Die Funktion $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt **partielle differenzierbar** in $a \in A$ nach der k-ten Variable x_k mit $k \in \{1, ..., n\}$ wenn der folgender Grenzwert existiert:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(a) = f_{x_k}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h \cdot e_k) - f(a)}{h}$$

Existieren alle partielle Ableitungen $f_{x_1}(a), ..., f_{x_n}(a)$, dann ist der **Gradient** von f wie folgt definiert:

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(a) \\ \vdots \\ f_{x_n}(a) \end{pmatrix}$$

und die Funktion f heißt mindestens einmal partielle differenzierbar. Sind die partiellen Ableitungen $f_{x_1}(a), ..., f_{x_n}(a)$ zudem stetig, so heißt f einmal stetig differenzierbar: $f \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$ oder kurz $f \in C^1(A)$.

1.4.2 Beispiel

Sei $f(x,y,z) = x^2 - xy + 3z$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h)y + 3z - (x^2 - xy + 3z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} - \frac{(x+h)y - xy}{h} + \frac{3z - 3z}{h} \\
&= \left(\frac{d}{dx} x^2\right) - \left(\frac{d}{dx} x\right) y + \left(\frac{d}{dx} 0\right) z \\
&= 2x - y + 0 \\
\Rightarrow \nabla f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.4.3 Definition der Richtungsableitung

Sei $a, r \in \mathbb{R}^n$ mit $\|r\| = 1$ (normiert), $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dann heißt der folgende Grenzwert die Richtungsableitung von f bei a in Richtung r:

$$\frac{\partial}{\partial r} f(a) = f_r(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h\cdot r) - f(a)}{h}$$

Bemerkung

(i) Ist $r = e_k$, dann erhalten wir gerade eine partielle Ableitung.

(ii) Es gibt Funktionen die in a in <u>jede Richtung differenzierbar</u> sind, aber in a <u>nicht stetig</u> sind!

1.5 Total Differenzierbarkeit

Idee: Differenzierbare Funktionen sind lokal im Punkt x_0 linear approximierbar:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{r(x)\|x - x_0\|}_{\tilde{r}(x)}$$

Dabei muss der Fehler $\tilde{r}(x) = r(x)\|x - x_0\|$ *schneller gegen Null gehen als x gegen x_0* also muss $\tilde{r}(x) = \mathrm{o}(x - x_0)$ gelten (Landau-Notation: klein-oh).

1.5.1 Definition der totalen Differenzierbarkeit

Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, A$ offen, $x_0 \in A$

(i) Die Funktion f nennt man **total differenzierbar** bei x_0, wenn eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert, mit der sich die Funktion f in einer ε-Umgebung um x_0 mittels einer Hyperebene approximieren lässt:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|$$

Dann nennt man die Matrix $A = f'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0)$ die total Ableitung von f in x_0.

(ii) Ist $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ partiell diff'bar, so nennt man die Ableitung **Jacobi-Matrix**:

$$f'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0) = J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_0) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(x_0) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Bemerkung: Es gilt: $\exists\ f'(x_0) \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = J_f(x_0)$, nicht aber die Gegenrichtung! Es kann also sein, dass die Jacobi-Matrix J_f existiert die Funktion aber nicht total diff'bar ist.

1.5.2 Beispiele

(i)

$$f(r, \varphi) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad J_f = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

(ii) $f(x) = a + b^\top(x - x_0), \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b, x_0 \in \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow \quad f(x_0) = a, \quad f'(x_0) = b^\top$

(iii) $f(x) = a + A(x - x_0), \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad a \in \mathbb{R}^m, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n$
$\Rightarrow \quad f(x_0) = a, \quad f'(x_0) = A$

Bemerkung: Beispiel (ii) und (iii) sind lineare Funktionen.

1.5.3 Satz

Ist $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in jedem Punkt $x_0 \in A$ total differenzierbar, so ist f stetig in A.

Beweis:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\overset{x\to x_0}{\to} f(x_0)} + \underbrace{A \underbrace{(x - x_0)}_{\overset{x\to x_0}{\to} 0 \in \mathbb{R}^n}}_{\overset{x\to x_0}{\to} 0 \in \mathbb{R}^n} + \underbrace{r(x)}_{\overset{x\to x_0}{\to} 0 \in \mathbb{R}^m} \underbrace{\|x - x_0\|}_{\overset{x\to x_0}{\to} 0 \in \mathbb{R}} \qquad \text{mit } r(x) \overset{x\to x_0}{\to} 0$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(x_0)$$

1.5.4 Satz

Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x_0 \in A$

a. Ist f total differenzierbar in x_0, so gilt

(i) $f'(x_0) = J_f(x_0)$

(ii) f ist in jede Richtung r differenzierbar mit: $\frac{\partial}{\partial r} f(x_0) = J_f(x_0) \cdot r$

Beweis: Es ist zu zeigen, dass wenn f differenzierbar in x_0 die Ableitung gerade die Form $\frac{\partial}{\partial r}f(x_0) = J_f(x_0)\cdot r$ besitzt. Für diese Ableitung muss folgendes gelten:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \tilde{r}(x) \text{ mit } A = f'(x_0) \text{ und } \tilde{r} \in o(\|x - x_0\|) \Rightarrow \frac{\tilde{r}(x)}{\|x - x_0\|} \overset{x\to x_0}{\to} 0$$

$$\overset{f(x)=f(x_0+r\cdot h}{\Leftrightarrow} \quad f(x_0 + r\cdot h) - f(x_0) = A\cdot r\cdot h + \tilde{r}(x) = f'(x_0)rh + \tilde{r}(x)$$

also muss folgendes gezeigt werden:

$$\left\| \underbrace{\frac{f(x_0 + r\cdot h) - f(x_0)}{h}}_{\text{Diff'Quotient für } \frac{\partial f}{\partial r}} - \underbrace{f'(x_0)\cdot r}_{\substack{\text{Grenzwert-}\\ \text{kandidat}}} \right\| \overset{h\to 0}{\to} 0$$

$$\left\| \frac{f(x_0 + r\cdot h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)\cdot r \right\| = \left\| \frac{f'(x_0)rh + \tilde{r}(x)}{h} - f'(x_0)r \right\| =$$

$$\left\| \frac{f'(x_0)r\cancel{h}}{\cancel{h}} + \frac{\tilde{r}(x)}{h} - f'(x_0)r \right\| = \left\| \frac{\tilde{r}(x)}{h} \right\| = \left\| \frac{\tilde{r}(x)}{x - x_0} \right\| \overset{x\to x_0}{\to} 0$$

Ist $r = e_k$ so erhält man gerade eine Spalte der Jacobi-Matrix.

b. Existieren in x_0 alle partiellen Ableitungen (also <u>alle Komponenten der Jacobi-Matrix</u>) und diese <u>stetig</u> sind $\quad\Rightarrow\quad$ f ist in x_0 total differenzierbar.

Beweis: Für den Fall $n = 2, m = 1$ muss folgendes gezeigt werden:

$$\exists\ \nabla f(x_0) \text{ und } \tilde{r}(x) \text{ mit } f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top (x - x_0) + \tilde{r}(x)$$

$$\text{oder } \left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \nabla f(x_0) \right\| = \frac{\|f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \overset{x\to x_0}{\to} 0$$

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und sei $x_0 = a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.
Nebenrechnung: Definition zweier Hilfsfunktionen g_1, g_2:

$$\begin{aligned}
& \text{Sei } g_1(t) = f(t, x_2) \quad g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
\overset{\text{MWS}}{\Rightarrow}\quad & \exists\ \xi_1 \in (a_1, x_1) \text{ mit } g_1'(\xi_1) = \frac{g_1(x_1) - g_1(a_1)}{x_1 - a_1} \\
& = \frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)}{x_1 - a_1} \\
\Leftrightarrow\quad & f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi_1, x_2)(x_1 - a_1) \\
\text{analog gilt für}\quad & g_2(t) = f(a_1, t) \quad g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
& f(a_1, a_2) - f(a_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} f(a_1, \xi_2)(x_2 - a_2)
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$f(x) - f(a) = f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = f(x_1, x_2) \underbrace{-f(a_1, x_2) + f(a_1, x_2)}_{=0} - f(a_1, a_2)$$

$$\overset{\substack{\text{mit Resultat}\\\text{aus Neben-}\\\text{rechnung}}}{=} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi_1, x_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} f(a_1, \xi_2)(x_2 - a_2)$$

$$= \begin{pmatrix} f_{x_1}(\xi_1, x_2) \\ f_{x_2}(a_1, \xi_2) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\xi_1, x_2) \\ f_{x_2}(a_1, \xi_2) \end{pmatrix}^\top (x - a)$$

Für $x \to a$ gilt:

$$x_1 \to a_1 \quad x_2 \to a_2$$
$$\xi_1 \to a_1 \quad \xi_2 \to a_2$$

da f_{x_1}, f_{x_2} <u>stetig</u>, folgt:

$$f_{x_1}(\xi_1, x_2) \to f_{x_1}(a_1, a_2)$$
$$f_{x_2}(a_1, \xi_2) \to f_{x_2}(a_1, a_2)$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_{x_1}(\xi_1, x_2) \\ f_{x_2}(a_1, \xi_2) \end{pmatrix}^\top \to \nabla f(a_1, a_2) = \nabla f(x_0)$$

und es gilt:

$$\frac{\left\| f(x) - f(x_0) - \overbrace{\begin{pmatrix} f_{x_1}(\xi_1, x_2) \\ f_{x_2}(a_1, \xi_2) \end{pmatrix}^\top}^{\overset{x \to x_0}{\to} \nabla f(x_0)} (x - x_0) \right\|}{\|x - x_0\|} \overset{x \to x_0}{\to} 0$$

1.5.5 Bemerkung

Sei r eine Richtung mit $\|r\| = 1$ und $x = x_0 + r$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & f(x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top \cdot r \\ & \quad \Rightarrow 1.\ \text{Fall}: \quad r, \nabla f(x_0) \text{ zeigen in dieselbe Richtung}: \\ & \qquad f(x) - f(x_0) \approx \|\nabla f(x_0)\| \|r\| = \|\nabla f(x_0)\| > 0 \\ & \quad \Rightarrow 2.\ \text{Fall}: \quad r, \nabla f(x_0) \text{ zeigen in entgegengesetzte Richtungen}: \\ & \qquad f(x) - f(x_0) \approx -\|\nabla f(x_0)\| < 0 \end{aligned}$$

In allen Fällen gilt Näherungsweise:

$$-\|\nabla f(x_0)\| < \nabla f(x_0)^\top r \leqslant \|\nabla f(x_0)\|$$

Fazit: Beim Reinzoomen sind die Höhenlinien parallel. Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstieges.

1.5.6 Satz zur Kettenregel

Ist $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $a \in A$ und $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ differenzierbar in $b \in B$, so gilt:

$$(g \circ f)'(a) = g'\left(\underbrace{f(a)}_{=b}\right) f'(a) = \underbrace{J_g(b)}_{\in\mathbb{R}^{l\times m}} \underbrace{J_f(a)}_{\in\mathbb{R}^{m\times n}}$$

Beweis:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underbrace{r_f(x)\|x-a\|}_{\tilde{r_f}(x)}$$

$$g(y) = g(b) + g'(b)(y-b) + \underbrace{r_g(y)\|y-b\|}_{\tilde{r_g}(y)}$$

mit $b = f(a)$ und $y = f(x)$ folgt:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g(f(a)) + g'(f(a))\left(\underbrace{f(x) - f(a)}_{f'(a)(x-a)+\tilde{r_f}(x)}\right) + \tilde{r_g}(f(x)) \\ &= g(f(a)) + g'(f(a))f'(a)(x-a) + \tilde{r}(x) \end{aligned}$$

mit $\tilde{r}(x) = g'(f(a))\tilde{r_f}(x) + \tilde{r_g}(f(x))$ und es gilt $\frac{\tilde{r}(x)}{\|x-a\|} \overset{x\to a}{\to} 0$

Beispiel aus der Strömungsmechanik: Die Funktion $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, f = f(x,y,z,t)$ beschreibe die Eigenschaften eines Teilchens in einer Strömung. Dabei kann die Bewegung der Position im Raum x, y, z als Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden. Dazu definieren wir den Weg $\gamma(t)$:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{d\gamma}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun leiten wir die verkettete Funktion $\hat{f}(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$ nach der Zeit t ab:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{dt} &= \left(\hat{f}(\gamma(t))\right)' = f'(h(t))\gamma'(t) = \nabla f \cdot \frac{d\gamma}{dt} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{u} + \frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v} + \frac{\partial f}{\partial z}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{w} + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

Dabei beschreibt der Vektor $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ die Geschwindigkeit im Raum.

1.6 Lokale Extremstellen und Mittelwertsätze

In einer Dimension gilt:

1. Mittelwertsatz

Ist f differenzierbar auf (a, b) und stetig auf $[a, b]$, so gilt:

$$\exists\ \xi \in (a, b) \text{ mit } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Satz von Rolle

Ist f differenzierbar auf (a, b) und stetig auf $[a, b]$ und gilt $f(a) = f(b)$, so gilt:

$$\exists\ \xi \in (a, b) \text{ mit } f'(\xi) = 0$$

1.6.1 Definition lokale/globale Extremstellen

(i) Eine Funktion $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Skalarfeld) hat bei $x_0 \in A$ ein lokales Minimum (Maximum) wenn in einer Umgebung $U = U_\varepsilon(x_0) \cap A$ für $\varepsilon > 0$ (offen bezüglich A) von x_0 gilt:

$$f(x_0) \overset{(\geqslant)}{\leqslant} f(x) \quad \forall x \in U$$

Ist bei x_0 ein lokales Minimum (Maximum) dann nennt man x_0 eine lokale Extremstelle.

(ii) f besitzt in x_0 ein globales Minimum (Maximum), wenn gilt:

$$f(x_0) \overset{(\geqslant)}{\leqslant} f(x) \quad \forall x \in A$$

1.6.2 Satz zur notwendigen Bedingung für eine lokale Extremstelle

Besitzt $f : \mathring{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bei $x_0 \in A$ eine lokale Extremstelle und f ist partiell differenzierbar, dann ist

$$\nabla f(x_0) = 0$$

Bemerkung: Der Rand ist ausgeschlossen da $\mathring{A}$ (alle inneren Punkte) in der Definition verwendet wurde.
Auch gilt:

$$x_0 \text{ ist eine lokale Extremstelle} \quad \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \quad f'(x_0) = 0$$

Aus $f'(x_0)$ folgt nicht direkt die Extremstelle, denn Sattelpunkte sind keine Extremstellen.

Beweis: Sei $k \in \{1, ..., n\}$ beliebig und $g(t) = f\left(\underbrace{x_0 + te_k}_{h(t)}\right)$ dann hat g in t_0 eine lokale Extremstelle, denn

$$\overset{\substack{\text{eindimensionale}\\\text{Extremstelle, da}\\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}}{\Rightarrow} \quad 0 = g'(t_0) = \frac{d}{dt} f(h(t_0)) \overset{\substack{\text{Ketten-}\\\text{regel}}}{=} f'(h(t_0))h'(t_0) = \nabla f(h(t_0))^\top e_k$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_k} f(h(t_0)) = \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_0)$$

1.6.3 Definition des kritischen Punktes

Ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x_0) = 0$ heißt **kritischer** oder stationärer Punkt.

1.6.4 Mittelwertsatz

Sei $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei G offen und enthalte die Menge $\overline{a, b} = \{a, b \in G \text{ mit } a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$ (a, b können durch eine Gerade verbunden werden). Dann:

$$\exists\ \xi \in (0, 1) \quad \text{mit} \quad f(b) = f(a) + \nabla f(a + \xi(b - a))^\top (b - a)$$

Bemerkung:

$$h(t) = a + t(b - a) \quad g(t) = f(h(t)) \quad \text{(differenzierbar)}$$
$$\Rightarrow \quad \exists\ \xi \in (0, 1) \quad \text{mit} \quad g'(\xi) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0}$$

Beweis: Definiere $h(t) = a+t(b-a)$ und $g : [0, 1] \to \mathbb{R}, g(t) = f(h(t))$ differenzierbar, damit gilt:

$$\begin{aligned}
\exists\ \xi \in (0, 1) \quad \text{mit} \quad g'(\xi) &= \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g(1) - g(0) = f(a) - f(b) \\
g'(\xi) &= \frac{d}{dt} g(t)|_{t=\xi} = \frac{d}{dt} f(h(t))|_{t=\xi} \\
&\overset{\substack{\text{Ketten-}\\\text{regel}}}{=} f'(h(t))h'(t)|_{t=\xi} \\
&= \nabla f(a + \xi(b - a))^\top (b - a) = f(a) - f(b) \\
\Leftrightarrow \quad f(b) &= f(a) + \nabla f(a + \xi(b - a))^\top (b - a)
\end{aligned}$$

1.6.5 Definition eines Gebiets

(i) Ein Menge, die wie folgt konstruiert werden kann, heißt **Polygonzug**:

$$\overline{a_0, ..., a_k} = \bigcup_{j=1}^{k} \overline{a_{j-1}, a_j} \quad \text{mit} \quad a_0, ..., a_k \in \mathbb{R}^n$$

(ii) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **kurvenweise zusammenhängend** wenn zu beliebigen $a, b \in M$ eine stetige Funktion $\gamma : [0, 1] \to M$ mit $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$ existiert.

(iii) Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Gebiet**, wenn G offen und kurvenweise zusammenhängend ist.

1.6.6 Bemerkungen zu Gebieten

(i) Ein Gebiet G entspricht einem offenen Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$ im Eindimensionalen: Der Rand ist nicht dabei, es hat keine Inseln.

(ii) Man kann zeigen, dass es reicht, wenn $a, b \in G$ mit einem Polygonzug verbunden werden kann.

1.6.7 Satz

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $G \neq \varnothing$, und $f : G \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:

$$f(x) = \text{konst.} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(x) = 0 \quad \forall\, x \in G$$

***Beweis* $\Rightarrow$:**
<u>Eindimensional</u>: Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.
Zu zeigen: f konstant $\quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \overset{\substack{f \text{ konst.} \\ \Rightarrow f(x+h) = f(x)}}{=} 0$$

<u>Mehrdimensional</u>: Sei $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Zu zeigen: f konstant $\quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = 0 \quad \forall\, k \in \{1, ..., n\}, \forall\, x \in G$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + he_k) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

***Beweis* $\Leftarrow$:**
<u>Eindimensional</u>: Annahme: $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$ aber f nicht konstant, dann

$$\exists\, x_1, x_2 \in (a,b) \text{ mit } x_1 \neq x_2 \text{ und } f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$\Rightarrow \quad 0 \neq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \overset{\text{1ter MWS}}{=} f'(\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Widerspruch}$$

Mehrdimensional: Annahme: $\nabla f(x) = 0, \quad \forall x \in G$ aber f nicht konstant, dann

$$\exists\, a, b \in G \text{ mit } a \neq b \text{ und } f(a) \neq f(b)$$

o.B.d.A sei $\overline{ab} \subset G$ (sonst muss ein Polygonzug betrachtet werden)

es folgt mit $h(t) = a + t(b-a): \quad f(b) - f(a) = f(h(1)) - f(h(0))$

Sei $g(t) = f(h(t))$, dann gilt : $\dfrac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \dfrac{f(b) - f(a)}{1} \neq 0$

$$\overset{\text{1ter MWS}}{=} g'(\xi) = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=\xi} = \frac{d}{dt} f(h(t))\Big|_{t=\xi} \overset{\text{Ketten-regel}}{=} f'(h(t))h'(t)\big|_{t=\xi}$$

$$= \nabla \underbrace{f(a + \xi(b-a))}_{=0 \text{(nach Annahme)}}^{\top}(b-a) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Widerspruch}$$

1.6.8 Definition partieller Ableitungen r'ter Ordnung

Für $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert man (wenn diese auch existieren) induktiv für $x_0 \in A$ und $k_1, ..., k_r \in \{1, ..., n\}$ die partiellen Ableitungen r'ter Ordnung als:

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_r}} f(x_0) = f_{x_{k_1} \dots x_{k_r}} = \begin{cases} f(x_0) & r = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} f(x_0) & r = 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \left(\frac{\partial^{r-1}}{\partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_r}} f(x_0) \right) & r > 1 \end{cases}$$

Existieren alle Ableitungen r'ter Ordnung und sind diese zudem stetig, so nennt man die Funktion f r-mal stetig differenzierbar: $f \in C^r(A; \mathbb{R}^m)$.

1.6.9 Definition der Hessematrix

Ist $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar bei $x_0 \in A$, dann ist die **Hessematrix** wie folgt definiert:

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1,x_1}(x_0) & \dots & f_{x_1,x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_m,x_1}(x_0) & \dots & f_{x_m,x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

1.6.10 Beispiele

(i)

$$f(x, y) = 2xy^3 + y \log x$$

(ii)

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hessematrix ist nicht symmetrisch.

(iii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}, Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$Q(x) = x^\top Ax + b^\top x + c$$

$$\nabla Q(x) = \left(A + A^\top\right) x + b \quad \overbrace{(= 2Ax + b)}^{\text{wenn } A \text{ sym.}}$$

$$H_Q(x) = A + A^\top \quad \underbrace{(= 2A)}_{\text{wenn } A \text{ sym.}}$$

Q wird eine quadratische Funktion genannt.

1.6.11 Satz von Schwarz

Ist $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in x_0 2-mal stetig partielle differenzierbar ($f \in C^2(A)$), dann ist $H_f(x_0) \quad \forall\, x_0 \in A$ symmetrisch und es gilt:

$$f_{x_l,x_k}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_l \partial x_k} f(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_k \partial x_l} f(x_0) = f_{x_k,x_l}(x_0) \quad \forall\, l, k \in \{1, ..., k\}$$

1.6.12 Satz von Taylor mit quadratischem Restglied

Seien $a, b \in G \subset \mathbb{R}^n, f \in C^2(G), G$ ein Gebiet, dann:

$$\exists\, \xi \in \overline{a, b} \quad \text{mit} \quad f(b) = f(a) + \nabla f(a)^\top (b - a) + \frac{1}{2}(b - a)^\top H_f(\xi)(b - a)$$

Beweis: Definiere $g(t) = f(h(t))$ mit $h(t) = a + t(b - a) \quad \Rightarrow \quad g(0) = f(a), g(1) = f(b)$. Bei Funktionen mit einem Skalar, gilt der eindimensionale Taylor mit einer Zwischenstelle $z \in [0, 1]$:

$$\Rightarrow \underbrace{g(1)}_{f(b)} = \underbrace{g(0)}_{f(a)} + \underbrace{g'(0)(1-0)}_{\substack{g'(t)=\frac{d}{dt}f(h(t)) \\ =f'(h(t))h'(t) \\ =\nabla f(a+t(b-a))^\top (b-a) \\ =(b-a)^\top \nabla f(a+t(b-a))}} + \underbrace{\frac{1}{2}g''(z)(1-0)^2}_{g''(t)=...=(b-a)^\top H_f(a+t(b-a))(b-a)}$$

$$= f(a) + \nabla f(a)^\top (b - a) + \frac{1}{2}(b - a)^\top H_f(\underbrace{\xi}_{\xi=a+t(b-a)})(b - a)$$

1.6.13 Definition von Definitheit

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch ($A = A^\top$):

a. Die durch $Q_A(x) = x^\top Ax$ definierte Funktion $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt quadratische Form von A.

b. Die Matrix A und ihre quadratische Form Q_A heißen:

(i) **positiv definit**, wenn

$$Q_A(x) = x^\top Ax > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x \neq 0$$

negativ definit, wenn

$$Q_A(x) = x^\top Ax < 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x \neq 0$$

oder kurz **definit** falls die Matrix A positiv oder negativ definit ist.

(ii) **semi definit** falls die Matrix A positiv semi definit oder (negativ semi definit) ist:

$$Q_A(x) = x^\top Ax \overset{(\leqslant)}{\geqslant} 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x \neq 0$$

(iii) **indefinit**, wenn ein $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ existieren mit:

$$\underbrace{x_1^\top Ax_1}_{Q_A(x_1)} < 0 \quad \text{und} \quad \underbrace{x_2^\top Ax_2}_{Q_A(x_2)} > 0$$

1.6.14 Beispiele

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iv) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

(v) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

(vi) $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

(vii) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.6.15 Satz zum Hauptminorenkriterium

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch,

dann ist der k'te Hauptminor definiert als: $D_k = \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}}_{k\times k \text{ Teilmatrix oben links}}$

Für die Hauptminoren $D_1, ..., D_n$ gilt:

a. A ist positiv definit $\Leftrightarrow$ $D_1 > 0, D_2 > 0, ..., D_n > 0$ alle Hauptminoren sind positiv

b. A ist negativ definit $\Leftrightarrow$ $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, ...$ oder $D_k = \begin{cases} < 0 & k \text{ ungerade} \\ > 0 & k \text{ gerade} \end{cases}$

c. (i) $D_k < 0$ mit k gerade $\Rightarrow$ A ist indefinit

(ii) $D_k < 0 < D_l$ mit k, l ungerade $\Rightarrow$ A ist indefinit

Beispiele

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

1.6.16 Satz über die hinreichenden Bedingungen für lokale Extremstellen

Sei $f \in C^2(U)$ in einer Umgebung U um x_0 und gilt $\nabla f(x_0) = 0$ sowie:

(i) $H_f(x_0)$ ist positiv definit $\Rightarrow$ x_0 ist eine lokale Minimalstelle.

(ii) $H_f(x_0)$ ist negativ definit $\Rightarrow$ x_0 ist eine lokale Maximalstelle.

Beweis: o.B.d.A nur für (i), denn (ii) folgt analog mit gedrehtem Ungleichungszeichen. Sei $U = U_\varepsilon(x_0)$ eine ε-Umgebung um den Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\text{Sei } f \in C^2(U) &\Rightarrow H_f \in C^2(U, \mathbb{R}^{n\times n}) \text{ mit allen Komponenten stetig} \\
&\Rightarrow \tilde{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \tilde{g}(x) = (x - x_0)^\top H_f(x)(x - x_0) \text{ ist stetig} \\
&\Rightarrow g(x) = (x - x_0)^\top H_f(h(x))(x - x_0) \text{ ist stetig} \\
\text{ist } H_f(x_0) \text{ pos. def.} &\Rightarrow (x - x_0)^\top H_f(x_0)(x - x_0) > 0 \text{ für } x \neq x_0 \\
&\Rightarrow (x - x_0)^\top H_f(h(x_0))(x - x_0) > 0 \text{ falls } z(x_0) \text{ nahe genug bei } x_0
\end{aligned}$$

Sei $h(x_0) = x_0 + \xi(x - x_0)$ dann gilt:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\underbrace{\nabla f(x_0)^\top}_{=0}(x - x_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - x_0)^\top \underbrace{H_f(x_0 + \xi(x - x_0))}_{\text{pos. def. in } U_\varepsilon(x_0)}(x - x_0)}_{>0 \ \forall x \in U_\varepsilon(x_0)} \geqslant f(x_0)$$

1.6.17 Definition der Sattelpunkte

Sei $U = U_\varepsilon(x_0), f \in C^2(U), \nabla f(x_0) = 0, H_f(x_0)$ indefinit, dann besitzt die Funktion f bei x_0 einen **Sattelpunkt**.

Bemerkung: $\forall\ \varepsilon > 0$ gilt:

$$\exists\ x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \text{ mit } f(x_1) > f(x_0) \ \underline{\text{und}}\ f(x_2) < f(x_0)$$

1.6.18 Satz für den Fall $n = 2$

Ist $f \in C^2(U)$ für eine Umgebung U von $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt weiter $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, dann ist x_0:

(i) eine lokale **Minimal**stelle, wenn
$f_{xx}(a,b) > 0$ (erster Hauptminor D_1) <u>und</u>
$f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - 2(f_{xy}(a,b))^2 > 0$ (zweiter Hauptminor D_2)

(ii) eine lokale **Maximal**stelle, wenn
$f_{xx}(a,b) < 0$ (erster Hauptminor D_1) <u>und</u>
$f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - 2(f_{xy}(a,b))^2 > 0$ (zweiter Hauptminor D_2)

(iii) ein **Sattelpunkt**, wenn
$f_{xx}(a,b) < 0$ (erster Hauptminor D_1) <u>oder</u>
$f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - 2(f_{xy}(a,b))^2 < 0$ (zweiter Hauptminor D_2)

1.6.19 Beispiel

Sei $f(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 - \cos z \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2y \\ \sin z \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

1.7 Extremstellen unter Nebenbedingungen und implizite Funktionen

Bisher: Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen: $\left\{ \begin{array}{l} f(x,y) \to \min \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$

Lösbar in drei Schritten:

1. lokale Minimalstellen bestimmen
2. untersuche $f(x,y)$ für $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \to \infty$
3. vergleiche die Resultate aus 1. und 2.

Bemerkung: aus $f(x,y) \to \min$ wird $-f(x,y) \to \max$ darum reicht es o.B.d.A. denn Fall $\to \min$ zu betrachten.

Jetzt: Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen: $\left\{ \begin{array}{l} f(x,y) \to \min \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A \subset \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$

Es ist bekannt, dass wenn $f \in C(A)$ und $A \neq \varnothing$ kompakt (abgeschlossen und beschränkt) dann existiert sicher eine Lösung (Satz von Weierstraß: f stetig und A kompakt $\Rightarrow$ es wird ein Minimum (Maximum) angenommen).

Es sind zwei Fälle möglich:

(i) globale Minimalstelle liegt in $\mathring{A}$ (im Inneren)

(ii) globale Minimalstelle liegt in ∂A (auf dem Rand)

Wenn zusätzlich $f \in C^2(A)$ gilt, kann die Minimalstelle wie folgt gefunden werden:

1. bestimme lokale Minimalstellen mit $\nabla f(x_0) = 0$ und $H_f(x_0)$ positiv definit in $\mathring{A}$

2. bestimme lokale Minimalstelle in ∂A
   Bemerkung: Eckpunkte müssen gesondert betrachtet werden, denn die Funktion kann an diesen Stellen nicht differenzierbar sein.

3. wähle das Minimum aus 1. und 2.

Wiederholung im Eindimensionalen

Eine Funktion $f : X$ (Definitionsbereich) $\to Y$ (Bildbereich) ist:

(i) **injektiv**, wenn

$$x_1, x_2 \in X \text{ mit } x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

Bemerkung: Von zwei verschiedenen Punkten aus dem Definitionsbereich darf nicht auf den gleichen Punkt im Bildbereich abgebildet werden.

(ii) **surjektiv**, wenn

$$\forall\, y \in Y \quad \exists\, x \in X \quad \text{mit} \quad f(x) = y$$

Bemerkung: Für alle Bildpunkte existiert ein Punkt im Definitionsbereich.

(iii) **bijektiv**, wenn die Funktion f injektiv und surfjektiv ist.

Beispiel

Sei $d : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $f \mapsto f'$ (Ableitungsoperator für alle einmal stetig differenzierbaren Funktionen). Für diese Funktion d gilt:

(i) d ist <u>nicht</u> injektiv da:
Seien $f_1(x) = x, f_2(x) = x + 1$ zwei Funktionen aus $C^1(\mathbb{R})$. Für diese gilt: $f_1 \neq f_2$ aber $d(f_1) = f_1' = 1 = f_2' = d(f_2)$.

(ii) d ist surjektiv, denn nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt: Alle stetigen Funktionen besitzen eine Stammfunktion.

1.7.1 Spezialfälle

(i) f ist linear und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \quad f(x) = Ax \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
Im Fall $m = n$ gilt: f ist bijektiv $\Leftrightarrow$ A ist invertierbar.

(ii) Allgemeinerer Fall z.b. $f : [0, \infty) \times [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2 : \quad f(r, \varphi) = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$

f ist surjektiv aber <u>nicht</u> injektiv, denn $f(0, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall\, \varphi \in [-\pi, \pi)$

1.7.2 Bemerkung

a. Folgende Aussagen sind äquivalent:

   (i) A ist invertierbar (oder regulär oder nicht singulär)

   (ii) $Ax = b$ besitzt $\forall\, b \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$

   (iii) $\det A \neq 0$

b. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$: $\quad f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) \quad$ mit $\det A \neq 0$
Die Umkehrfunktion f^{-1} kann durch Äquivalenzumformungen gebildet werden:

$$\begin{aligned} f(x_0) + A(x - x_0) &\overset{!}{=} y \\ \Leftrightarrow \qquad A(x - x_0) &= y - f(x_0) \\ \Leftrightarrow \qquad x - x_0 &= A^{-1}(y - f(x_0)) \\ \Leftrightarrow \qquad x &= x_0 + A^{-1}(y - f(x_0)) = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt: $\frac{\partial}{\partial y} f^{-1}(y) = A^{-1}$

Kommentar: Differenzierbare Funktionen sind in einer hinreichend kleinen ε-Umgebung im Prinzip linear (nicht ganz korrekt, aber sehr anschaulich).

1.7.3 Satz über die Umkehrfunktion

Sei $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ mit $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $x_0 \in G$ mit $\det f'(x_0) = \det J_f(x_0) \neq 0$. Dann gilt in einer geeigneten offenen Umgebung U um x_0, dass

(i) $V = f(U)$ ist offen (das Bild V von U ist offen) und $\det f'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in U$

(ii) $f : U \to V$ ist bijektiv, das heißt: $\exists\, f^{-1} : V \to U$ (die Funktion ist lokal invertierbar)

Beweisidee: Da f stetig differenzierbar ist, gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\| \text{ mit } r(x) \overset{x \to x_0}{\to} 0 \\ &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= f(x_0) + A(x - x_0) \text{ mit } \det A \neq 0 \end{aligned}$$

Wenn $\approx$ ein $=$ wäre so könnte die Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ einfach durch Äquivalenzumformungen bestimmt werden
$\Rightarrow$ In einer hinreichend kleinen ε-Umgebung kann $\approx$ als $=$ angenommen werden.

(iii) $\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(f'\left(f^{-1}(y)\right)\right)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad J_{f^{-1}}(y) = J_f^{-1}\left(f^{-1}(y)\right)$

Beweisidee: Wenn $f^{-1} : V \to U$ existiert, dann ist f^{-1} auch stetig diff'bar.
Beispielskizze aus dem Eindimensionalen:

$$\begin{aligned} f(x) = e^x, \quad f'(x) &= e^x, \quad \exists\, f^{-1}(y) = \log y \\ \Rightarrow \quad y &= f\left(f^{-1}(y)\right) \\ \overset{\substack{\text{Ableiten mit} \\ \text{Kettenregel}}}{\Rightarrow} \quad 1 &= f'\left(f^{-1}(y)\right) \cdot (f^{-1})'(y) \\ \Rightarrow \quad (f^{-1})'(y) = \log' y &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Beispiel übertragen auf den allgemeinen mehrdimensionalen Fall:

$$\begin{aligned} & y = f\left(f^{-1}(y)\right) \\ \overset{\text{Ableiten mit Kettenregel}}{\Rightarrow} \quad & 1 = \underbrace{f'\left(f^{-1}(y)\right)}_{J_{f'}(f^{-1}(y))} \cdot \frac{d}{dy} f^{-1}(y) \\ \Rightarrow \quad & \frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \left(f'\left(f^{-1}(y)\right)\right)^{-1} \end{aligned}$$

1.7.4 Polarkoordinaten

...

1.7.5 Beispiel

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ 2y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow f'(x,y) = J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det J_f \neq 0$$

Direktes Bestimmen der Umkehrfunktion (im Allgemeinen will man dies vermeiden):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \overset{!}{=} f(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ 2y \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad & v = 2y \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{v}{2} \\ \Rightarrow \quad & u = x - \left(\frac{v}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = u + \frac{v^2}{4} \\ \Rightarrow \quad & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{v^2}{4} \\ \frac{v}{2} \end{pmatrix} = f^{-1}(u,v) \end{aligned}$$

Damit gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\left(f^{-1}(u,v)\right)' = J_{f^{-1}}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Alternativ mit dem Satz über die Umkehrfunktion:

$$\left(f^{-1}\right)'(u,v) = \left(f'\left(f^{-1}(u,v)\right)\right)^{-1} = J_f^{-1}\left(u + \frac{v^2}{4}, \frac{v}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \overset{\text{Inv. mit Gauß best.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1.7.6 Kugelkoordinaten

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\theta \\ r\sin\varphi\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1.7.7 Korollar: Gebietstreue

Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$, dann ist $f(G)$ offen. Ist G außerdem ein Gebiet, so ist $f(G)$ auch ein Gebiet.
Fazit: Für f^{-1} kann man $\tilde{G} = f(G)$ definieren und $f^{-1} : \tilde{G} \to \mathbb{R}^n$ betrachten. Dabei hat $\tilde{G}$ die gleichen Eigenschaften wie G.

1.7.8 Definition impliziter Funktionen

Sei $g : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ mit $n, m \in \mathbb{N}$ eine Funktion und sei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ konstant}$$

Man betrachte die Gleichung

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \\ \vdots \\ g_m(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$$

und sagt

a. die Funktion g ist bei $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ **lokal nach** y **auflösbar**, wenn eine Funktion f in der Umgebung von $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ existiert mit:
   (i) $f(x_0) = y_0$ und
   (ii) $g(x, f(x)) = b$

b. g ist auf $A \subset \mathbb{R}^n$ **global nach** y **auflösbar**, wenn eine Funktion $f : A \to \mathbb{R}^m$
   (i) existiert und
   (ii) $g(x, f(x)) \quad \forall\, x \in A$ gilt

c. analog gilt die Definition für auflösbar nach x mit $g(f(y), y)$

1.7.9 Beispiel Einheitskreis

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (also $m = n = 1$) mit $g(x, y) = x^2 + y^2$ und $b = 1$. Die Funktion g ist auflösbar bei $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, wenn $x_0 \neq 0$ (denn $y_0^2 = 1$ hat zwei Lösungen) gilt:

$$\text{Fall } y_0 > 0 : \quad f_{>0}(x) = y = \sqrt{1 - x^2}$$
$$\text{Fall } y_0 < 0 : \quad f_{<0}(x) = y = -\sqrt{1 - x^2}$$

1.7.10 Hauptsatz über implizite Funktionen

Seien $x_0 \in \mathbb{R}^n, y, b \in \mathbb{R}^m$ für eine offene Umgebung G um $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und sei $g \in C^1(G; \mathbb{R}^m)$ (stetig diff'bar). Gilt weiter $g(x_0, y_0) = b$ und $\det g_y(x_0, y_0) \neq 0$ so existiert eine offene Umgebung U_0 von x_0 und V_0 von y_0, so dass gilt:

(i) $\det g_y(x,y) \neq 0 \quad \forall\, x \in X_0, \forall\, y \in Y_0$

(ii) die Gleichung $g(x,y) = b$ besitzt eine **eindeutig bestimmte Auflösung**:
$f : U_0 \to V_0$ nach y mit $f(x_0) = y_0$ und $g(x, f(x)) = b \quad \forall\, x \in U_0$
außerdem ist diese Funktion f differenzierbar und es gilt:
$f'(x) = -\left(g_y\left(x_0, f(x_0)\right)\right)^{-1} g_x\left(x_0, f(x_0)\right) = -\left(g_y\left(x_0, y_0\right)\right)^{-1} g_x\left(x_0, y_0\right)$

(iii) ist $g \in C^r(G;\mathbb{R}^m)$ mit $r \geqslant 2$ so ist $f \in C^r(U_0;\mathbb{R}^m)$ und die höheren Ableitungen werden durch weiteres ableiten von f' in (ii) bestimmt.

Bemerkung:

$$g : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m \quad \text{mit} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$(x,y) \mapsto g(x,y) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ \vdots \\ g_m(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) \\ \vdots \\ g_m(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m) \end{pmatrix}$$

$$g' = \frac{\partial}{\partial(x,y)} = J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_1 & \frac{\partial}{\partial y_1} g_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_m} g_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_m & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_m & \frac{\partial}{\partial y_1} g_m & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_m} g_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times(n+m)}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g & \frac{\partial}{\partial y} g \end{pmatrix}$$

Beweisidee: Im Spezialfall, dass die Funktion g linear ist gilt: $g(x,y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Dabei besteht die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times(m+n)}$ aus zwei Teilmatrizen $X \in \mathbb{R}^{m\times n}, Y \in \mathbb{R}^{m\times m}$ also gilt:

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Xx + Yy \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial x} g = X, \quad \frac{\partial}{\partial y} g = Y$$

Ist die Funktion g differenzierbar, so ist sie in einer hinreichend kleinen Umgebung näherungsweise linear, also gilt:

$$\begin{aligned} g(x,y) = b \quad &\Leftrightarrow \quad Xx + Yy = b \\ &\Leftrightarrow \quad Yy = b - Xx \overset{\det Y \neq 0}{=} y = Y^{-1}(b - Xx) = Y^{-1}b - Y^{-1}Xx = f(x) \\ &\Rightarrow \quad f'(x) = -Y^{-1}X = -(g_y)^{-1} g_x \end{aligned}$$

Bemerkung: für den Fall $m = n = 1$
Es gilt $g(x, f(x)) = b$ für $x \in U_0$ mit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ konstant
Setze $h(x) = g(x, f(x))$ mit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ also muss $h(x) = b, \forall x \in U_0$ gelten. Da b konstant ist, gilt für die Ableitung $h'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} h'(x) &\overset{\substack{\text{Ketten-} \\ \text{regel}}}{=} g'(x, f(x)) \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}' = \nabla g(x, f(x))^\top \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_x(x, f(x)) & g_y(x, f(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f(x) \end{pmatrix} = g_x(x, f(x)) + g_y(x, f(x)) f'(x) = 0 \\ &\overset{g_y(x,f(x))\neq 0}{\Rightarrow} f'(x) = -\frac{g_x(x, f(x)}{g_y(x, f(x))} \overset{f(x_0)=y_0}{\Rightarrow} -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} = f'(x_0) \end{aligned}$$

1.7.11 Lokale Extremstellen unter Nebenbedingungen

Seien $f, g_1, ..., g_m : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit G offen gegeben, sowie $b_1, ..., b_m \in \mathbb{R}$. Dann nennt man $x_0 \in G$ ein lokales Minimum (Maximum) unter den Nebenbedingungen $g_1(x) = b_1, ..., g_m(x) = b_m$ wen es eine offene Umgebung $U \subset G$ von x_0 gibt mit:

$$f(x) \overset{(\leqslant)}{\geqslant} f(x_0) \quad \forall\, x \in U \text{ mit } g(x) = b$$

1.7.12 Satz von Lagrange

Notwendige Bedingung für Extremstellen unter Nebenbedingungen.
Seien $f, g_1, ..., g_m \in C^1(U)$ für eine offene Umgebung U von $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und seien $b_1, ..., b_m \in \mathbb{R}$ ($b \in \mathbb{R}^m$). Ist $x_0 \in U$ eine lokale Extremstelle unter der Nebenbedingung $g_1(x_0) = b_1, ..., g_m(x_0) = b_m$ und sind die Gradienten $\nabla g_1(x_0), ..., \nabla g_m(x_0)$ linear unabhängig also $\det(\nabla g_1(x_0), ..., \nabla g_m(x_0)) \neq 0$, dann existieren die Konstanten $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ (Lagrange-Multiplikatoren) mit:

$$\nabla f(x_0) + \underbrace{\lambda_1 \nabla g_1(x_0) + ... + \lambda_m \nabla g_m(x_0)}_{\underbrace{\begin{pmatrix} \nabla g_1(x_0) & \dots & \nabla g_m(x_0) \end{pmatrix}}_{J_g^\top} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}} = 0$$

Bemerkung: Der Satz von Lagrange enthält nur eine **notwendige** Bedingung: Es kann also Punkte geben mit $\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0$ die keine Extremstelle sind (z.b. Sattelpunkte). Der Satz liefert also nur Kandidaten, welche dann durch einsetzen in die Funktion f weiter untersucht werden müssen.

Bemerkung: Anschaulich bedeutet die Bedingung $\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0$, dass die Gradienten beider Funktionen im Punkt x_0 in die gleiche (oder entgegengesetzte) Richtung schauen müssen.

Beweis: für den Fall $n = 2, m = 1$
$f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ und sei $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ eine lokale Extremstelle unter der Nebenbedingung $g(x_0, y_0) = b$. Außerdem sei $\nabla g(x_0, y_0)$ linear unabhängig (im Fall $n = 2, m = 1$ bedeutet dies: nicht der Nullvektor).

$$\nabla g(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} g_x(x_0, y_0) \\ g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad g_x(x_0, y_0) \neq 0 \text{ oder } g_y(x_0, y_0) \neq 0 \overset{\text{o.B.d.A.}}{\Rightarrow} g_y(x_0, y_)) \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad \exists \text{ eine lokale Auflösung } h \text{ nach } y \\ &\qquad h : U_0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } h(x_0) = y_0 \text{ und } g(x, h(x)) = b \end{aligned}$$

Sei nun $\hat{f}(x) = f(x, h(x))$ mit $\hat{f} : U_0 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und betrachte $\hat{f}(x) \to \min / \max$:

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} \hat{f}'(x) = \frac{d}{dx} f(x, h(x)) &\overset{\substack{\text{Ketten-}\\\text{regel}}}{=} \nabla f(x, h(x))^\top \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_x(x, h(x)) & f_y(x, h(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x) \end{pmatrix} \\ &= f_x(x, h(x)) + f_y(x, h(x)) h'(x) \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen gilt $h'(x) = -\frac{g_x(x,h(x))}{g_y(x,h(x))}$, damit gilt weiter:

$$0 \overset{!}{=} f_x(x, h(x)) - f_y(x, h(x)) \frac{g_x(x, h(x))}{g_y(x, h(x))}$$

Bei x_0 gilt ja gerade $h(x_0) = y_0$):

$$0 \overset{!}{=} f_x(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) g_x(x_0, y_0)$$

Also sind die Gradienten $\nabla f, \nabla g$ linear abhängig.

1.7.13 Bespiele

a. $\begin{cases} f(x, y) = x + y \to \min / \max \\ g(x, y) = x^2 + y^2 = b = 1 \end{cases}$

(i) Die Nebenbedingung $g(x, y) = b$ beschreibt eine kompakte (beschränkt und abgeschlossene) Menge $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } x^2 + y^2 = 1 \right\}$ und da f stetig ist gilt:
$\overset{\substack{\text{Satz von}\\\text{Weierstraß}}}{\Rightarrow} \exists\, x_m, x_M \in B \text{ mit } f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant f(x_M) \quad \forall\, x \in B$
(Die Funktion f nimmt auf B ein Minimum und ein Maximum an.)

(ii) Für ein x_0 (also x_m oder x_M) muss gelten, dass:
$\exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0$

Man erhält also eine Menge $\tilde{B} \subset B$ welche die Lagrange-Bedingung erfüllen:

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} \lambda \cdot 2x = -1 \\ \lambda \cdot 2y = -1 \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{2 Gleichungen mit 3 Unbekannten} \\ \Rightarrow \text{1 Freiheitsgrad (durch } \lambda \text{ beschrieben)} \end{array} \right.$$

Fall $x \neq 0, y \neq 0$ $\quad -\frac{1}{2x} = \lambda = -\frac{1}{2y} \quad \Rightarrow \quad x = y$

Fall $x = 0, y \neq 0$ $\quad 2 \cdot 0 \cdot \lambda = -1 \Rightarrow 0 = -1 \Rightarrow$ Widerspruch, Fall nicht möglich

$\Rightarrow$ dasselbe gilt für die Fälle $x \neq 0, y = 0$ und $x = 0, y = 0$

$$\overset{\text{Einetzen in die Nebenbedingung}}{\Rightarrow} \quad b = 1 = g(x,y) = x^2 + y^2 \overset{x=y}{\Rightarrow} 1 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\overset{\text{Satz von Weierstraß}}{\Rightarrow} \quad x_m, x_M \in \tilde{B}$$

(iii) Prüfen der Elemente aus $\tilde{B}$:

$$f(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \max$$

$$f(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \min$$

b. $\left\{ \begin{array}{l} f(x,y) = x^2 + y^2 \to \min / \max \\ g(x,y) = x + y = b = 1 \end{array} \right.$

Die Menge $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } x + y = 1 \right\}$ ist nicht kompakt, darum gilt hier der Satz von Weierstraß nicht! In diesem konkreten Fall existiert kein Maximum.

1.7.14 Kochrezept für Lagrange

Für das Bestimmen der Kandidaten für mögliche Maximal/Minimal-Stellen der Funktion f unter der Nebenbedingung g eignet sich das folgende Vorgehen:

1. Lagrange-Funktion aufstellen:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^\top g(x)$$

2. Gradient von L auf Null setzen und Gleichungen lösen:

$$\nabla L(x,\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} L_x(x,\lambda) \stackrel{!}{=} 0 & n \text{ Gleichungen} \\ L_\lambda(x,\lambda) \stackrel{!}{=} 0 & m \text{ Gleichungen} \end{array} \right. \to \text{nach } x \text{ und } \lambda \text{ lösen}$$

Unbekannte sind also $\lambda_1, ..., \lambda_m$ und $x_1, ..., x_n$ (also $m + n$ Unbekannte).
Meist ist es geschickter zuerst λ zu bestimmen und danach nach x aufzulösen.

Kapitel 2

Integrale in mehreren Dimensionen

2.1 Parameterintegrale

2.1.1 Satz zu eigentlichen Parameterintegralen

Sei $f(x,t)$ reell und stetig in $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ (also auf $\left\{\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} : \alpha \leqslant x \leqslant \beta, a \leqslant t \leqslant b\right\}$. Dann gilt für

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\ dt \qquad F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$$

(i) F ist stetig auf $[\alpha,\beta]$

(ii) Falls f_x stetig auf $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ ist, so ist $F \in C^1([a,b])$ und es gilt

$$F'(x) = \int_a^b f_x(x,t)\ dt = \int_a^b \frac{d}{dx} f(x,t)\ dt$$

(iii)

$$\int_\alpha^\beta F(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\ dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\ dx\right) dt$$

Bemerkung: In (ii) und (iii) werden Grenzwerte vertauscht, im allgemeinen geht so etwas schief:
z.b. für $f(n,x) = x^n$ und $x < 1$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \underbrace{\lim_{x\to 1} f(n,x)}_{\lim_{x\to 1} x^n = 1^n}}_{\lim_{n\to\infty} 1^n = 1} = 1 \neq 0 = \underbrace{\lim_{x\to 1} \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(n,x)}_{\lim_{n\to\infty} x^n \overset{x\leq 1}{=} 0}}_{\lim_{x\to 1} 0 = 0}$$

Beispiel: Sei $f(x,t) = x\sin t, x \in [0,1], t \in [0,\pi]$

$$\text{ohne Hilfe des Satzes :}\quad F(x) = [-x\cos t]_0^\pi = x + x = 2x \to F'(x) = 2$$
$$\text{mit (ii) aus dem Satz :}\quad F'(x) = \int_0^\pi f_x(x,t)\ dt = \int_0^\pi \sin t\ dt = [-\cos t]_0^\pi = 2$$

2.1.2 Satz zur Leibniz-Regel

Seien $f(x,t), f_x(x,t)$ stetig in $[\alpha,\beta]\times[a,b]$ und $u,v\in C^1([\alpha,\beta]\times[a,b])$, dann ist

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\ dt \quad \in C^1([\alpha,\beta])$$

$$\text{und}\quad F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x,t)\ dt + f(x,v(x))v'(x) - f(x,u(x))u'(x)$$

Beweis: Die stetige Differenzierbarkeit folgt dadurch, dass $F(x)$ eine Verkettung von C^n Funktionen ist.
Sei $F(x) = \tilde{F}(x,u(x),v(x))$ mit $\tilde{F}(x,a,b) = \int_a^b f(x,t)\ dt$ dann ist $\tilde{F}$ bezüglich x stetig differenzierbar wegen Satz 2.1.1 und bezüglich a,b nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
$\Rightarrow \tilde{F}$ ist stetig partiell differenzierbar
$\Rightarrow \tilde{F}$ ist total differenzierbar, außerdem ist $h(x) = \begin{pmatrix} x \\ u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$ total differenzierbar.
$\Rightarrow$ durch die weitere Verkettung gilt $\tilde{F}(h(x)) = \tilde{F}(x,u(x),v(x)) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\ dt$ ist total differenzierbar

Außerdem gilt nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \nabla\tilde{F}(\underbrace{x,u(x),v(x)}_{h(x)}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}}_{h'(x)} \\ &= \begin{pmatrix} \underbrace{\tilde{F}_x(x,u(x),v(x))}_{\overset{2.1.1}{=} \int_a^b f_x(x,t)dt} & \underbrace{\tilde{F}_a(x,u(x),v(x))}_{=-f(x,a)} & \underbrace{\tilde{F}_b(x,u(x),v(x))}_{=f(x,b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} \\ &= \int_a^b f_x(x,t)\ dt \cdot 1 - f(x,u(x))u'(x) + f(x,v(x))v'(x) \end{aligned}$$

2.1.3 Definition uneigentlicher Parameterintegrale

Ist für $x\in M\subset\mathbb{R}$ ein Integral $\int_a^b f(x,t)\ dt$ definiert und ist a (oder b) ein kritischer Punkt, so ist das Integral gleichmäßig konvergent in M, wenn gilt:

$$\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ L\in(a,b) \text{ mit } \left|\int_{T_1}^{T_2} f(x,t)\ dt\right| < \varepsilon \quad \forall\ x\in M \text{ und } \forall\ T_1,T_2\in(L,b)$$
$$(\text{bzw. } \forall\ T_1,T_2\in(a,L))$$

Beispiele

(i) Eindimensional:

$$\underbrace{\int_0^1}_{0\to\text{krit.Pkt.}} \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\ dt = \lim_{a\to 0}\left[2\sqrt{t}\right]_a^1 = 2\sqrt{1} - \lim_{a\to 0} 2\sqrt{a} = 2$$

(ii)

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\, dt$$

(iii) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\int_1^\infty t^\alpha\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_1^b t^\alpha\, dt \Rightarrow \begin{cases} \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \alpha \neq -1 \\ \log t & \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\alpha = -1: \quad \lim_{b\to\infty} [\log t]_1^b = \infty$$

$$\alpha \neq -1: \quad \lim_{b\to\infty} \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty} \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1}}_{\overset{b\to\infty}{\to} 0 \text{ falls } \alpha+1<0} - \frac{1}{\alpha+1} = \begin{cases} \infty & \alpha > -1 \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \alpha < -1 \end{cases}$$

2.1.4 Satz zum Majorantenkriterium

Ein uneigentliches Integral $\int_a^b f(x,t)\, dt$ konvergiert gleichmäßig in $M \subset \mathbb{R}$, wenn ein konvergentes (eigentliches oder uneigentliches) Integral $\int_a^b g(t)\, dt$ existiert mit

$$|f(x,t)| \leqslant g(t) \quad \underbrace{\forall t \in (a,b)}_{-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty} \quad \forall\, x \in M$$

2.1.5 Satz von Fubini für uneigentliche Integrale

Ist $f(x,t)$ stetig in $I \times (a,b)$ (dabei ist I ein Intervall) und konvergiert $F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt$ gleichmäßig in I, dann ist F stetig und für $I = [\alpha, \beta]$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_a^b f(x,t)\, dt\right) dx = \int_a^b \left(\int_\alpha^\beta f(x,t)\, dx\right) dt$$

2.1.6 Satz zur Ableitung uneigentlicher Parameterintegrale

Sind $f(x,t)$ und $f_x(x,t)$ stetig auf $[\alpha,\beta] \times [a,b]$ und ist

$$\int_a^b f(x_0,t)\, dt \text{ konvergent für ein } x_0 \in [\alpha,\beta] \text{ und ist}$$

$$\int_a^b f_x(x,t)\, dt \text{ konvergent } \forall\, x \in [\alpha,\beta] \text{ so konvergiert}$$

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)\, dt \text{ gleichmäßig } \forall\, x \in [\alpha,\beta] \text{ und es gilt}$$

$$F'(x) = \int_a^b f_x(x,t)\, dt \text{ also gilt } F' \in C^1([\alpha,\beta])$$

2.1.7 Beispiel

Berechne $\int_0^1 \frac{t^\beta - t^\alpha}{\log t}\, dt$ für $-1 < \alpha < \beta$:

$$
\begin{aligned}
\text{definiere}: &\quad F(x) = \int_0^1 \underbrace{\frac{t^x - t^\alpha}{\log t}}_{f(x,t)}\, dt \\
\text{sei } \alpha \text{ ein } x_0 \in [\alpha, \beta]: &\quad F(\alpha) = \int_0^1 \frac{t^\alpha - t^\alpha}{\log t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{uneigentliches Intervall konvergiert} \\
\text{weiter gilt}: &\quad \int_0^1 \frac{d}{dx} \frac{\overbrace{e^{x \log t}}^{t^x} - t^\alpha}{\log t} = \int_0^1 \frac{\log t \cdot t^x}{\log t}\, dt = \int_0^1 t^x\, dt \\
&\quad = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+1} < 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 f_x(x,t)\, dt \text{ konvergiert} \\
\text{also gilt}: &\quad F'(x) \stackrel{2.1.6}{=} \int_0^1 f_x(x,t)\, dt = \frac{1}{x+1} \\
\text{wieder aufleiten}: &\quad F(x) = \log(x+1) + c \\
\text{mit}: &\quad F(\alpha) = \log(\alpha+1) + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -\log(\alpha+1) \\
&\quad F(\beta) = \log(\beta+1) + c = \log(\beta+1) - \log(\alpha+1) = \log\left(\frac{\beta+1}{\alpha+1}\right)
\end{aligned}
$$

2.2 Kurvenintegrale

2.2.1 Definition der Äquivalenzrelation für Kurven

Zwei stetige Funktionen $x : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ und $y : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent ($x \sim y$), wenn es eine streng monoton wachsende Funktion $\varphi : [a,b] \to [\alpha, \beta]$ gibt mit $y(\varphi(t)) = x(t) \quad \forall\, t \in [a,b]$.

Beispiel:

(i) $x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad y(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0, \pi]$

Sei $\varphi(t) = \frac{t}{2} \quad \Rightarrow \quad y(\varphi(t)) = y\left(\frac{t}{2}\right) = x(t) \quad \forall\, t \in [0, 2\pi]$

(ii) $x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad y(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

Sei $\varphi(t) = -t \quad \Rightarrow \quad y(-t) = x(t)$ aber φ ist <u>nicht</u> monoton wachsend!

$\Rightarrow$ Die Kurven müssen in die gleiche Richtung zeigen.

Bemerkung:

(i) Reflexiv: $x \sim x$

> ***Beweis:*** Wähle $\varphi(t) = t$

(ii) Symmetrie: $x \sim y \quad \Rightarrow \quad y \sim x$

Beweis: Zu jedem φ existiert ein φ^{-1}, welches ebenfalls stetig und monoton wachsend ist. Also gilt: $y(t) = x\left(\varphi^{-1}\right) \quad \forall\, t \in [\alpha, \beta]$

(iii) Transitivität: $x \sim y$ und $y \sim z \quad \Rightarrow \quad x \sim z$

Beweis: $y(\varphi(t)) = x(t), z(\psi(\tau)) = y(\tau) \quad \Rightarrow \quad z\left(\psi\left(\varphi(t)\right)\right) = x(t)$

2.2.2 Definition einer Kurve im $\mathbb{R}^n$

Ist $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ stetig, so nennt man die Menge $\mathcal{K} = \{y : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : y \sim x\}$ die Kurve $\mathcal{K}$ mit Parameterdarstellung x (dabei ist jedes $y \in \mathcal{K}$ eine äquivalente Parameterdarstellung von $\mathcal{K}$) mit Anfangspunkt $p = x(a)$ und Endpunkt $q = x(b)$.
Schreibweise: $\mathcal{K} : x(t), a \leqslant t \leqslant b$.
Die Menge $T(\mathcal{K}) = x([a, b]) = \{x(t) : a \leqslant t \leqslant b\}$ heißt **Träger** von $\mathcal{K}$.

Man nennt eine Kurve $\mathcal{K}$

1. **geschlossen**, wenn $x(a) = x(b)$ gilt
2. **einfach** oder **Jordan**kurve, wenn $\forall\, t, u \in [a, b] : x(t) \neq x(u) \Leftrightarrow t \neq u$ gilt
(Kurve hat keine Überschneidungen)

2.2.3 Beispiele

(i) $x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

(ii) $y(t) = \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix} \quad t \in [0, \sqrt{2\pi}]$

(iii) $z(t) = \begin{pmatrix} \cos -t \\ \sin -t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

Es gilt $x \sim y$: Gleiche Kurve mit unterschiedlicher Parameterdarstellung. Für (i) ist $\mathcal{K} : x(t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ und für (ii) ist $\mathcal{K} : y(t), 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2\pi}$.
Aber weiter gilt $x, y \not\sim z$, denn die Kurve beschrieben durch $z(t)$ geht in die andere Richtung.

2.2.4 Eigenschaften von Parameterdarstellungen

(i) Eine Parameterdarstellung $x : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ einer Kurve $\mathcal{K}$ heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < ... < t_N = b$ existiert und x auf $[t_l, t_{l+1}]$ mit $l \in \{0, ..., N-1\}$ stetig differenzierbar ist.

(ii) Besitzt eine Kurve $\mathcal{K}$ eine stückweise stetig differenzierbare Parameterdarstellung $x(t)$ mit $t \in [a, b]$ und gilt $\dot{x}(t) \neq 0\; \forall\, t \in [a, b]$, dann heißt die Kurve $\mathcal{K}$ **glatt** oder **regulär**.

(iii) Ist von $\mathcal{K}$ eine Parameterdarstellung x stückweise stetig differenzierbar und $\dot{x}(t) \neq 0$, so heißt der Vektor

$$T(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} \quad \text{der } \textbf{Tangenten(einheits)vektor} \text{ von } \mathcal{K} \text{ bei } t.$$

Dabei ist T wieder eine Kurve, beziehungsweise Funktion der Form $T : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Ist T zusätzlich ebenfalls stetig differenzierbar und gilt $\dot{T}(t) \neq 0$, so heißt

$$N(t) = \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|} \quad \text{der } \textbf{Hauptnormalen(einheits)vektor} \text{ von } \mathcal{K} \text{ bei } t$$

(Dabei ist $N(t)$ die normierte zweite Ableitung von $x(t)$).
Falls $n = 3$ so heißt falls existent

$$B(t) = T(t) \times N(t) \quad \text{der } \textbf{Binormalen(einheits)vektor } \mathcal{K} \text{ bei } t.$$

2.2.5 Bemerkung

(i) Existieren T und N, dann gilt $N(t) \perp T(t)$. Existiert auch B so gilt $N(t) \perp B(t), T(t) \perp B(t)$.

(ii) Existiert T, so hängt der Tangenteneinheitsvektor nicht von der Parameterdarstellung ab.

Beweis: Sei z.b. $y(\varphi(t)) = x(t), a \leqslant t \leqslant b$

$$\Rightarrow \quad T(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} = \frac{\dot{y}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)}{\|\dot{y}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\|} = \frac{\dot{y}(\varphi(t))}{\|\dot{y}(\varphi(t))\|} \underbrace{\frac{\dot{\varphi}(t)}{|\dot{\varphi}(t)|}}_{\substack{\varphi \text{ monoton} \\ \text{wachsend} \\ \Rightarrow \dot{\varphi} > 0}} \overset{\frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}=1}{=}$$

$$= \frac{\dot{y}(\varphi(t))}{\|\dot{y}(\varphi(t))\|} \overset{\tau=\varphi(t)}{=} \frac{\dot{y}(\tau)}{\|\dot{y}(\tau)\|}$$

2.2.6 Beispiele

(i) $x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \overset{\|\dot{x}(t)\|=1}{=} \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} = T(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = \dot{T}(t) \overset{\|\dot{T}(t)\|=1}{=} \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|} = N(t)$$

(ii) $x(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0, \pi]$

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin 2t \\ 2\cos 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} \overset{\|\dot{x}(t)\|=\sqrt{4}=2}{=} \frac{1}{2}\dot{x}(t) = T(t) = \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

$$\dot{T}(t) = \begin{pmatrix} -2\cos 2t \\ -2\sin 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{x}(T)\|} \overset{\|\dot{T}(t)\|=\sqrt{4}=2}{=} \frac{1}{2}\dot{T}(t) = N(t) = \begin{pmatrix} -\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix}$$

2.2.7 Definition zusammen- und entgegengesetzter Kurven

(i) Sei $\mathcal{K} : x(t), a \leqslant t \leqslant b$ eine Kurve, dann heißt $-\mathcal{K} : y(t), a \leqslant t \leqslant b$ mit $y(t) = x(a+b-t)$ die zu $\mathcal{K}$ **entgegengesetzte** Kurve

(ii) Sind $\mathcal{K} : x(t), a \leqslant t \leqslant b$ und $\mathcal{L} : y(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$ zwei Kurven mit $x(b) = y(\alpha)$, dann heißt $\mathcal{K}+\mathcal{L} : z(t), a \leqslant t \leqslant b+\beta-\alpha$ mit $z(t) = \begin{cases} x(t) & a \leqslant t \leqslant b \\ y(t-\beta+\alpha) & b \leqslant t \leqslant b+\beta-\alpha \end{cases}$ die **zusammengesetzte** Kurve von $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$.
Bemerkung: Der Parameterbereich von x hat die Länge $b-a$, der Parameterbereich von y hat die Länge $\beta-\alpha$ und der Parameterbereich von z hat die Länge $b-a+\beta-\alpha = (b+\beta-\alpha)-a$.

2.2.8 Definition von rektifizierbaren Kurven

Sei $\mathcal{K} : x(t), a \leqslant t \leqslant b$ eine Kurve, so heißt

$$l(\mathcal{K}) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \|x(t_k) - x(t_{k-1})\| : a = t_0 < ... < t_n = b \right\}$$

die **Länge** von $\mathcal{K}$. Ist $L(\mathcal{K}) < \infty$ so heißt die Kurve $\mathcal{K}$ **rektifizierbar**.
Bemerkung: $l(\mathcal{K}) \approx l(\text{Polygonzug})$. Dabei hängt die Genauigkeit von der Feinheit der Zerlegung $a = t_0 < ... < t_n = b$ ab.

2.2.9 Satz

Sei $\mathcal{K}$ eine Kurve mit einer Parameterdarstellung $x \in C^1$ (stetig diff'bar), so gilt

$$l(\mathcal{K}) = \int_a^b \|\dot{x}(t)\| dt \approx \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\|\dot{x}(\xi_k)\|(t_k - t_{k-1})}_{\|\dot{x}(\xi_k)(t_k - t_{k-1})\|}$$

Bemerkung zu Riemann- Summen und Riemann-Integralen im Eindimensionalen

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und eine Zerlegung $a = t_0 < ... < t_n = b$ sowie beliebige Zwischenpunkte $\xi_1, ..., \xi_n$ mit $t_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant t_k$ ist die Riemann-Summe $S(f, t, \xi$ wie folgt definiert:

$$S\left(f, \begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

(Dabei ist $f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$ die Fläche eines Rechteckes mit Länge $f(\xi_k)$ und Breite $t_k - t_{k-1}$.)

Weiter ist ist die Feinheit einer Zerlegung $t = (t_0, ..., t_n)$ folgendermaßen definiert:

$$\mu(t) = \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, ..., n\}$$

(Maximale Breite der unterteilten Rechtecke.)

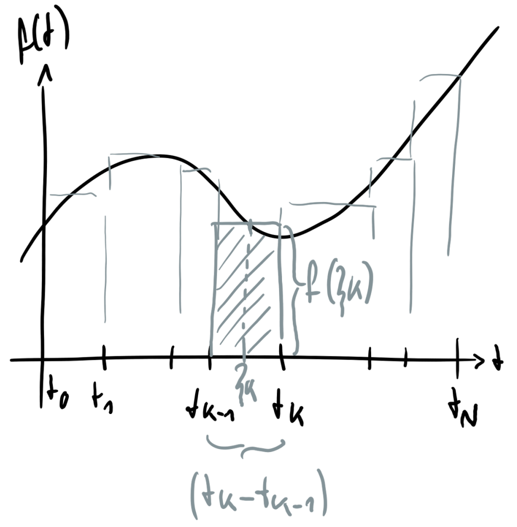

Abbildung 2.1: Funktion $f(t)$ mit Zerlegung $t_0 < ... < t_N$ und Zwischenpunkt ξ_k.

Für eine beliebige Folge $\left(\vec{t_N}\right)_{N=1}^{\infty}$ von Zerlegungen mit $\lim_{N\to\infty} \mu\left(\vec{t_N}\right) = 0$ und einer beliebigen Folge mit den Zugehörigen Zwischenpunkten $\left(\vec{\xi_N}\right)_{N=1}^{\infty}$ gilt, falls der Grenzwert $\lim_{N\to\infty} S\left(f, \vec{t_n}, \vec{\xi_N}\right)$ existiert, dann ist dieser für alle Folgen gleich und es gilt:

$$\int_a^b f(t)\ dt = \lim_{N\to\infty} S\left(f, \vec{t_n}, \vec{\xi_N}\right)$$

2.2.10 Definition von Kurvenintegralen

Gegeben sei eine Kurve $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ und $f : \underbrace{T(\mathcal{K})}_{\substack{\text{Träger}\\ \text{von } \mathcal{K}}} \to \mathbb{R}^n$.

a. Sei $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Parameterdarstellung von $\mathcal{K}$

(i) für eine Zerlegung $\vec{t} : a = t_0 < ... < t_N = b$ mit zugehörigen Zwischenpunkten $\vec{\xi} = \{\xi_1, ...\xi_N\}$ gilt für die **Riemann(zwischen)summe**:

$$S\left(f, \vec{t}, \vec{\xi}\right) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \underbrace{\cdot}_{\substack{\text{Skalar-}\\ \text{produkt}}} (x(t_k) - x(t_{k-1}))$$

(ii) Existiert ein $I \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle Folgen von Zerlegungen $\left(\vec{t_N}\right)_{N=1}^{\infty}$ mit beliebigen zugehörigen Zwischenpunkten $\left(\vec{\xi_N}\right)_{N=1}^{\infty}$ mit der Eigenschaft $\lim_{N\to\infty} \mu(\vec{t_N}) = 0$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} S\left(f, \vec{t_N}, \vec{\xi_n}\right) = I = \int_a^b f \cdot\ dx = \int_a^b f\left(x(t)\right) \cdot\ dx(t)$$

Dabei heißt I das **Kurvenintegral** von $\mathcal{K}$ längs f.

b. Existiert ein $I \in R$ wie in (ii) so heißt f längs $\mathcal{K}$ **(Riemann)integrierbar** und man schreibt

$$I = \int_{\mathcal{K}} f = \int_{\mathcal{K}} f(x) \cdot \; dx = \int_{\mathcal{K}} f_1(x)\; dx_1 + f_2(x)\; dx_2 + ... + f_n(x)\; dx_n$$

2.2.11 Substitutionsformel

Ist $\mathcal{K} : x(t), a \leqslant t \leqslant b$ eine stückweise differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^n$ und $f : T(\mathcal{K}) \to \mathbb{R}^n$ stetig, dann gilt:

$$\int_{\mathcal{K}} f(x) \cdot \; dx = \int_a^b f(x(t)) \cdot \dot{x}(t) dt$$

Beweisidee:

Nach 1ter Mittelwertsatz $\exists\, \tilde{\xi}_k \in [t_{k-1}, t_k] : \quad x(t_k) - x(t_{k-1}) = \dot{x}(\tilde{\xi}_k)(t_k - t_{k-1})$

$$S\left(f, \vec{t}, \vec{\xi}\right) = \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot (x(t_k) - x(t_{k-1})) \overset{\text{1ter MWS}}{=} \sum_{k=1}^{N} f(\xi_k) \cdot \dot{x}(\tilde{\xi}_k)(t_k - t_{k-1})$$

Im allgemeinen gilt $\xi_k \neq \tilde{\xi}_k$. Also wird $\vec{\xi}$ gerade so gewählt, dass gilt:

$$S\left(f, \vec{t}, \vec{\xi}\right) = \sum_{k=1}^{N} f\left(\underbrace{x\left(\overbrace{t_k}^{\xi_k}\right)}_{\tilde{\xi}_k}\right) \cdot (x(t_k) - x(t_{k-1})) \overset{\text{1ter MWS}}{=} \sum_{k=1}^{N} f(x(t_k)) \cdot \dot{x}(\tilde{\xi}_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b f(x(t)) \cdot \dot{x}(t)\; dt$$

Bemerkung: Theoretisch können so die meisten Kurvenintegrale ausgerechnet werden. In der Praxis ist diese Methode aber meist nicht praktikabel.

2.2.12 Beispiele

(i) Kurvenintegrale sind verallgemeinerte eindimensionale (Riemann-)Integrale. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (eindimensionales Vektorfeld) und $x(t) = a + t(b - a)$ (eine Kurve im $\mathbb{R}^1$)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} f = \int_{\mathcal{K}} f(x) \cdot dx \overset{2.2.11}{=} & \int_0^1 f(x(t)) \cdot \dot{x}(t)\; dt \\ = & \int_0^1 f\left(\underbrace{a + t(b - a)}_{x}\right) \cdot \underbrace{(b - a)dt}_{dx} = \int_0^1 f(x)\; dx \end{aligned}$$

(ii) Die Länge einer Kurve kann mit einem Kurvenintegral berechnet werden. Sei $\mathcal{K} : x(t), a \leqslant t \leqslant b$ mit x stellenweise differenzierbar und $\dot{x}(t) \neq 0\ \forall\ t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} \cdot dx(t) \overset{2.2.11}{=} & \int_a^b \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} \cdot \dot{x}(t)\; dt \\ = & \int_a^b \frac{\|\dot{x}(t)\|^2}{\|\dot{x}(t)\|}\; dt = \int_a^b \|\dot{x}(t)\| = l(\mathcal{K}) \end{aligned}$$

Kurvenintegrale 1. Art

Sei $\mathcal{K} : x(t), a \leqslant t \leqslant b$ eine Kurve und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld, dann ist das Kurvenintegral **erster** Art definiert durch:

$$\int_{\mathcal{K}} f(x) \cdot dx = \int_a^b f(x(t)) \, \|\dot{x}(t)\| \, dt$$

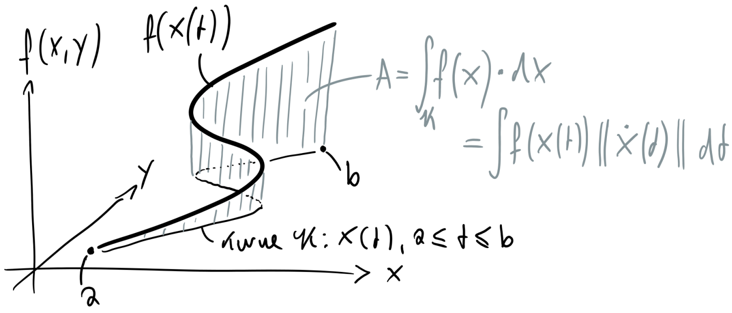

Abbildung 2.2: Kurvenintegral über eine Skalarfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erster Art.

Kurvenintegral 2. Art

Sei $\mathcal{K} : x(t), a \leqslant t \leqslant b$ eine Kurve und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, dann ist das Kurvenintegral **zweiter** Art definiert durch:

$$\int_{\mathcal{K}} f(x) \cdot dx = \int_a^b f(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \, dt$$

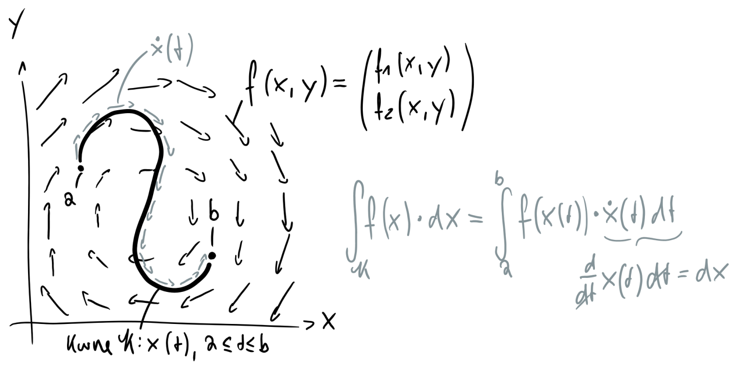

Abbildung 2.3: Kurvenintegral über eine Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zweiter Art.

2.2.13 Definition der Wegunabhängigkeit

Sei $f \in C(G, \mathbb{R}^n), G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet.

(i) Gilt für zwei beliebige Wege $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ in G mit gleichem Anfangs- und Endpunkt stets $\int_{\mathcal{K}} f = \int_{\mathcal{L}} f$ dann heißt das Kurvenintegral **wegunabhängig**.

(ii) Existiert eine Funktion $F : G \to \mathbb{R}$ mit $F' = \nabla F = f$ (implizit wird F differenzierbar gefordert) auf G, dann heißt F eine **Stammfunktion** von f.
Bemerkung: In der Praxis wird das Potential eines Vektorfeldes als $P = -F$ definiert.

(iii) Ein Vektorfeld f heißt **konservativ** wenn eine Stammfunktion F in G existiert.

2.2.14 Erster Hauptsatz für Kurvenintegralen

Sei f konservativ in G und F eine Stammfunktion, dann gilt für jeden Weg $\mathcal{K}$ in G mit Anfangspunkt p und Endpunkt q

$$\int_{\mathcal{K}} f = F(q) - F(p)$$

Also ist insbesondere das Kurvenintegral wegunabhängig.

Beweis: (o.B.d.A. nur für glatte Kurven) Sei $\mathcal{K} : x(t), a \leqslant t \leqslant b$ glatt, dann gilt

$$\int_{\mathcal{K}} f = \int_{\mathcal{K}} f(x) \cdot dx \overset{2.2.11}{=} \int_a^b \underbrace{f(x(t)) \cdot \dot{x}(t)}_{\substack{=F'(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \\ = \frac{d}{dt} F(x(t))}} \, dt = \int_a^b \left(\frac{d}{dt} F(x(t)) \right) \, dt$$

$$= [F(x(t))]_a^b \overset{\substack{\text{Hauptsatz} \\ \text{der Diff/Int-} \\ \text{Rechnung}}}{=} F(x(b)) - F(x(a)) = F(q) - F(p)$$

2.2.15 Satz

Für $f \in C(G; \mathbb{R}^n), G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\int_{\mathcal{K}} f$ ist wegunabhängig

(ii) f besitzt eine Stammfunktion F

(iii) $\int_{\mathcal{K}} f = 0$ für jede geschlossene Kurve

Beweisansätze:
(ii) $\Rightarrow$ (i): folgt direkt aus dem ersten Hauptsatz 2.2.14
(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Seien $\mathcal{K}$ und $\mathcal{L}$ zwei Kurven mit gleichen Anfangs- und Endpunkt. So kann eine neue geschlossene Kurve $\mathcal{M}$ wie folgt konstruiert werden:

$$\int_{\mathcal{M}} f = \int_{\mathcal{K}} f + \int_{-\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{K}} f - \int_{\mathcal{L}} = 0$$

2.2.16 Beispiele

(i) $f(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist konservativ mit Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{\|x\|}$ ...

(ii) $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$ ist konservativ mit $F(x_1, x_2) = x_1^2 x_2$ ...

2.2.17 Definition einfach zusammenhängender Gebiete

Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jede geschlossene Kurve in G innerhalb von G *stetig auf einen Punkt zusammenziehen* lässt.
Beispiele im $\mathbb{R}^3$:

(i) Berliner ohne Füllung ist einfach zusammenhängend.

(ii) Ein Donut ist es nicht.

2.2.18 Sternförmige Gebiete

Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig** (bezüglich einem $x_0 \in G$), wenn zu jedem $x \in G$ die Strecke $\overline{x_0 x} \subset G$ ist (komplett im Gebiet liegt).

2.2.19 Bemerkung

(i) Eine sternförmige Menge ist stets auch eine einfach zusammenhängende Menge.
Ein sternförmiges Gebiet ist stets auch ein sternförmiges Gebiet.

(ii) Die Vereinigung von sternförmigen Gebieten muss nicht sternförmig sein.

(iii) Oft kann ein einfach zusammenhängendes Gebiet als Vereinigung von sternförmigen Gebieten betrachtet werden.

2.2.20 Zweiter Hauptsatz für Kurvenintegralen

Sei $f \in C^1(G;\mathbb{R}^n)$ und G ein Gebiet, dann gilt:

(i) (notwendige Bedingung) Besitzt f eine Stammfunktion F in G, so erfüllt f in G die **Integrabilitätsbedingung**:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_l} = \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \quad \text{in } G \quad \forall\, l,k \in \{1,...,n\}$$

(ii) (hinreichende Bedingung) Ist G einfach zusammenhängend, so besitzt f eine Stammfunktion F in G, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist.

Beweisidee: Wenn f eine Stammfunktion F hat, so muss der Satz von Schwarz gelten, also muss die Hessematrix symmetrisch sein.

2.2.21 Definition der Rotation

Sei $G \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar, dann heißt die Funktion $\mathrm{rot} f : G \to \mathbb{R}^3$ **Rotation** von f in G und ist folgendermaßen definiert:

$$\underbrace{\mathrm{rot} f}_{\mathrm{curl} f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{f}$$

Bemerkung: Die Rotation gibt an ob ein Feld Wirbel enthält.

2.2.22 Korollar zum zweiten Hauptsatz für Kurvenintegrale

Sei $f \in C^1(G;\mathbb{R}^3)$ mit G ein Gebiet.

1. f besitzt eine Stammfunktion $\quad\Rightarrow\quad \mathrm{rot} f = 0$

2. Ist G einfach zusammenhängend, dann gilt:
   f besitzt eine Stammfunktion $\quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{rot} f = 0$

Bemerkung: Zentralkraftfelder (wie z.b. Gravitationsfelder) haben keine Rotation und sind somit wegunabhängig.

Zwei Methoden zur Berechnung von Stammfunktionen:

2.2.23 Nach Variablen integrieren

Beispiel: Sei $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\ e^{yz} + 1 \\ x\ e^{yz} + xyz\ e^{yz} \\ xy^2\ e^{yz} + \cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$

Gesucht ist ein F mit $\nabla F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

<u>1.</u> $F(x,y,z) \stackrel{!}{=} \int f_1(x,y,z)\ dx = xy\ e^{yz} + x + c(y,z)$

<u>2.</u> $F_y(x,y,z) = x\ e^{yz} + xy\ e^{yz}\ z + 0 + c_y(y,z) \stackrel{!}{=} f_2(x,y,z) = x\ e^{yz} + xyz\ e^{yz}$

$\Rightarrow c_y(y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(y,z) = \tilde{c}(z)$

$\Rightarrow F(x,y,z) = xy\ e^{yz} + x + \tilde{c}(z)$

<u>3.</u> $F_z(x,y,z) = 0\ e^{yz} + xy\ e^{yz}\ y + 0 + \tilde{c}_z(z) \stackrel{!}{=} f_3(x,y,z) = xy^2\ e^{yz} + \cos z$

$\Rightarrow \tilde{c}_z(z) = \cos z \quad \Rightarrow \quad \tilde{c}(z) = \int \cos z\ dz = \sin z + c \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x,y,z) = xy\ e^{yz} + x + \sin z + c$

2.2.24 Mittels Kurvenintegral und passendem Weg

Sei $F(x) = \int_{\Gamma_x} f$, dabei ist Γ ein Weg von x_0 (fest) nach x in G.

Beispiel: Sei $f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ mit $G = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \leqslant 0 \right\}$ (sternförmig)

$$\text{Sei :}\quad \Gamma_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = r \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{Es gilt :}\quad F(x,y) &= \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f \\
&= \int_1^r f(t,0)\, d\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^\phi f(r\cos t, r\sin t)\, d\begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix} \\
&= \int_1^r \begin{pmatrix} -\frac{0}{t^2+0^2} & \frac{t}{t^2+0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}t \\ \frac{d}{dt}0 \end{pmatrix} \\
&\quad + \int_0^\phi \begin{pmatrix} -\frac{r\sin t}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} & \frac{r\cos t}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}r\cos t \\ \frac{d}{dt}r\sin t \end{pmatrix} \\
&= \int_1^r \begin{pmatrix} 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\, dt + \int_0^\phi \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}\sin t & \frac{1}{r}\cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix}\, dt \\
&= \int_1^r 0\cdot 1 + t\cdot 0\, dt + \int_0^\phi \frac{1}{r}\sin t\cdot r\sin t + \frac{1}{r}\cos t\cdot r\cos t\, dt \\
&= \int_1^r 0\, dt + \int_0^\phi \frac{r}{r}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)\, dt = \int_1^r 0\, dt + \int_0^\phi 1\, dt \\
\Rightarrow\quad F(x,y) &= \phi = \arg(x,y)
\end{aligned}$$