Michael Lehn
Tobias Speidel

SoSe 2019
Blatt 1, 29 Punkte

Übungen zur Höheren Mathematik II *

Abgabe am 30.04.2019 vor Beginn der Übung im Hörsaal 2

Bemerkung:
Analog zur Vorlesung verwenden wir für die Übungen die folgenden Definitionen für den Gradienten, die Divergenz und die Rotation in kartesischen Koordinaten.

$$\operatorname{grad}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ \operatorname{grad} f(x_1,\dots,x_n) := \nabla f(x_1,\dots,x_n) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T,$$

$$\operatorname{div}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \operatorname{div} \boldsymbol{F}(x_1,\dots,x_n) := \nabla \cdot \boldsymbol{F}(x_1,\dots,x_n) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n},$$

$$\operatorname{rot}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \operatorname{rot} \boldsymbol{F}(x,y,z) := \nabla \times \boldsymbol{F}(x,y,z) := \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)^T.$$

Die Rotation $\operatorname{rot}(\cdot)$ ist dabei zunächst nur im $\mathbb{R}^3$ definiert. Indem ein beliebiger Vektor des $\mathbb{R}^2$ um eine z-Koordinate erweitert wird, lässt sich auch in $\mathbb{R}^2$ eine Rotation definieren, die dann der z-Komponente der Rotation im zum $\mathbb{R}^3$ erweiterten $\mathbb{R}^2$ entspricht.
Obige Definitionen führen zu einer Vielzahl von physikalischen Interpretationen, z.B. bei der Betrachtung von elektromagnetischen Feldern. Es ist zu empfehlen, sich mit diesen Bedeutungen auch unabhängig von der Vorlesung vertraut zu machen.

1. Gegeben seien die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ versehen mit der euklidischen Metrik.

a) $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} < 1 \right\}$, b) $A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x < y^2 \wedge |y| \leq 1 \right\}$.

Skizzieren Sie die Mengen A_1, A_2, und beantworten Sie (ohne Beweis) für jede der Mengen die folgenden Fragen.

i.) Bestimmen Sie A_i°, $\overline{A}_i$, ∂A_i und A_i'.
ii.) Ist A_i offen?
iii.) Ist A_i abgeschlossen?
iv.) Ist A_i beschränkt?

(2 + 4 + 1 + 1 Punkte)

2. Betrachten Sie den $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Norm und beweisen Sie, dass der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist. (3 Punkte)

3. Untersuchen Sie die Funktion $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit im Ursprung $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0} = (0,0)^T$. †

a) $f(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \\ 0 & , \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \end{cases}$ b) $g(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} \dfrac{x^5-y^5}{x^4+y^4} & , \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \\ 0 & , \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \end{cases}$

Hinweis: Folgenstetigkeit bzw. Polarkoordinaten, ε-δ-Kriterium.

(je 4 Punkte)

* Allgemein gilt: Ergebnisse sind immer zu begründen. Des Weiteren sind falsche Aussagen durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen. Ergebnisse sind nachvollziehbar darzustellen und analytisch so weit wie möglich zu vereinfachen.

† Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ werden hierbei mit fett gedruckten Buchstaben bezeichnet, d.h. für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Für die Spezialfälle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{x}' \in \mathbb{R}^3$ schreibt man oft $\boldsymbol{x} = (x,y)^T$ bzw. $\boldsymbol{x}' = (x,y,z)^T$.

4. a) Fertigen Sie für die Menge $Q = [-1,1] \times [-1,1]$ eine Höhenlinienskizze der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto f(x,y) = 4x^2 - 9y^2$$

an, d.h. skizzieren Sie die Menge $\{f(x,y) = C \mid C \in \mathbb{N}_0\}$.

b) Ergänzen Sie die Skizze aus a) um das Richtungsfeld von $\operatorname{grad} f$.

(3 + 3 Punkte)

5. Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y,z) = 4\cos z \arctan\left(y\mathrm{e}^{-x^2}\right)$ im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (0,1,\pi/4)^T$ in Richtung $\boldsymbol{r} = (1,1,\sqrt{14})^T$.

(4 Punkte)

Ergänzende Aufgaben

A. Gegeben seien die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ versehen mit der euklidischen Metrik.

a) $A_1 = [0,1) \times (1,2]$,

b) $A_2 = \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right] \times [0,1]$,

c) $A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \le \sqrt{x^2+y^2} < 2 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1/n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Skizzieren Sie die Mengen $A_1,\ A_2,\ A_3$ und beantworten Sie für jede der Mengen die folgenden Fragen.

i.) Bestimmen Sie $A_i^\circ,\ \overline{A}_i,\ \partial A_i$ und A_i'.

ii.) Ist A_i offen?

iii.) Ist A_i abgeschlossen?

iv.) Ist A_i beschränkt?

B. Untersuchen Sie die Funktionen $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\boldsymbol{x} \mapsto f_i(x,y)$ in $\mathbb{R}^2$ auf Stetigkeit.

a) $$f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & , \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \\ 0 & , \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \end{cases}$$

b) $$f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{yx^2}{x^4+y^2} & , \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \\ 0 & , \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

c) $$f_3(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{x^2y^2} & , \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, \\ 0 & , \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

Lösen Sie dabei Aufgabe c) einmal unter Verwendung von Polarkoordinaten und einmal ohne.

C. Gegeben sei die Funktion $f(x,y,z) = z\tan(xe^y)$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1/3, \log\pi, 1)^T$ in Richtung $1/4 \cdot (1, -3, \sqrt{6})^T$.

D. Gegeben sei die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & , (x,y) \neq (0,0) \wedge x+y \neq 0, \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion f entlang der Geraden $y = 2x$ im Ursprung.