Blatt 2

Ruedi Lüthi

17. Mai 2019

14

Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, a \in A$ und sei $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, damit

$$z^{(k)} = a + \sum_{j=1}^{k} \xi_i \cdot e_i \quad \Rightarrow \quad z^{(n)} = a + \xi = b$$

$$z^{(k)} - z^{(k-1)} = a + \sum_{j=1}^{k} \xi_i e_i - \left(a + \sum_{j=1}^{k-1} \xi_i e_i \right) = \xi^k e_k$$

Es gilt, nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\exists\ \eta \in (0,1) \quad \text{mit} \quad f(b) = f(a) + \nabla f\,(a + \eta(b-a))^\top (b-a)$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} f(z^{(k)}) &= f(z^{(k-1)}) + \nabla f \left(z^{(k-1)} + \eta(z^{(k)} - z^{(k-1)}) \right)^\top (z^{(k)} - z^{(k-1)}) \\ &= f(z^{(k-1)}) + \frac{\partial}{\partial z_k} f \left(\underbrace{z^{(k-1)} + \eta \cdot \xi_k e_k}_{=y^{(k)}} \right)^\top \xi_k e_k \end{aligned}$$

aufsummiert über alle $k \in \{1, ..., n\}$:

$$\begin{aligned} f(b) = f(a+\xi) &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} f\left(y^{(k)}\right) \xi_k \\ &= f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} f\left(y^{(k)}\right) \xi_k + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} f(a) \xi_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} f(a) \xi_k}_{=0} \\ &= f(a) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} f(a) \xi_k}_{=\ \nabla f(a)\xi =\ f'(a)(b-a)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z_k} f\left(y^{(k)}\right) - \frac{\partial}{\partial z_k} f(a) \right) \xi_k}_{=\ \tilde{r}(\xi) \quad \text{(Restglied)}} \end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit folgt:

$$\begin{aligned} y^{(k)} \overset{\xi\to 0}{\to} a \text{ und } \nabla f \text{ stetig} \quad &\Rightarrow \quad \nabla f(y^{(k)}) \overset{\xi\to 0}{\to} \nabla f(a) \\ &\Rightarrow \quad \lim_{\xi \to 0} \frac{\tilde{r}(\xi)}{\|\xi\|} = 0 \end{aligned}$$