ulm university universität
uulm

Michael Lehn
Tobias Speidel

SoSe 2019
Blatt 6, 35 Punkte

Übungen zur Höheren Mathematik II *

Abgabe am 04.06.2019 vor Beginn der Übung im Hörsaal 2

23. Zeigen Sie, dass für eine beliebige Matrix A aus $AA^{\intercal} = \mathbf{0}$ stets $A = \mathbf{0}$ folgt, wobei $\mathbf{0}$ die Nullmatrix ist.

(4 Punkte)

24. Bestimmen Sie — sofern existent — das Maximum und das Minimum von $f(x, y, z) = xy + 2z$ unter der Nebenbedingung $x^2 + xy + y^2 + z^2 = 2$.

(7 Punkte)

25. Bestimmen Sie — sofern existent — das Maximum und das Minimum von $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ unter den Nebenbedingungen $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ sowie $h(x, y, z) = x - 2z - 3$. Was bedeutet das Ergebnis anschaulich?

(7 Punkte)

26. Berechnen Sie — sofern existent —

a) die Ableitung der Funktion $F(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{tx}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ an der Stelle $x = 2$.

b) den Wert von $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^1 \frac{x\sin(xy)}{y(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

c) den Wert des uneigentlichen Integrals $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^b - t^a}{\log t}\,\mathrm{d}t$ für positive Zahlen a, b mit $a < b$.

Hinweis: Zu c): Zeigen Sie zunächst mithilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, dass für den Integranden $f(t) = (t^b - t^a)\big/\log t$ an den Rändern des Integrationsintervalls $f(0^+) = 0$ und $f(1^-) = b - a$ gilt und verwenden Sie anschließend die Tatsache, dass $f(t) = \int\limits_a^b t^x\,\mathrm{d}x$ gilt.

(je 4 Punkte)

27. Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Parameterintervall und $f : [a, b] \times J \to \mathbb{R}$. Es gelte weiterhin, dass die Funktion f für ein festes $p \in J$ in ihrem zweiten Argument Riemann-integrierbar ist. Wir setzen damit

$$F(p) = \int_a^b \mathrm{d}x\, f(x, p)\,.$$

Zeigen Sie: Seien f, $\partial f/\partial p : [a, b] \times J \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist die Funktion F differenzierbar und es gilt:

$$F'(p) = \int_a^b \mathrm{d}x\, \frac{\partial f}{\partial p}(x, p)\,.$$

(5 Punkte)

* Allgemein gilt: Ergebnisse sind immer zu begründen. Des Weiteren sind falsche Aussagen durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen. Ergebnisse sind nachvollziehbar darzustellen und analytisch so weit wie möglich zu vereinfachen.

Ergänzende Aufgaben

A. Entscheiden Sie, ob der Ausdruck $x + y + z$ ein absolutes Maximum bzw. Minimum unter der Nebenbedingung

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} = 3 \quad (x, y, z > 0)$$

besitzt, und berechnen Sie es gegebenenfalls.

B. a) Berechnen Sie $F'(1)$ für $F(x) := \displaystyle\int_{1/x}^{x^2} \frac{\mathrm{e}^{tx}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ für $x > 0$.

b) Berechnen Sie $F(e)$, $F'(e)$ und $F''(e)$ für $F(x) := \displaystyle\int_e^x \log(x \log t)\,\mathrm{d}t$ für $x > 1$.

c) Berechnen Sie für $\omega \in \mathbb{R}$, $k > 0$ das Integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(\omega x)}{x}\mathrm{e}^{-kx}\,\mathrm{d}x$.

C. Beweisen Sie für skalare Funktionen φ und Vektorfelder $\boldsymbol{F}$ die folgenden Formeln.

a) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\,\varphi$,

b) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{F} - \Delta\,\boldsymbol{F}$.

Es darf dabei φ und $\boldsymbol{F}$ immer als genügend oft stetig partiell differenzierbar vorausgesetzt werden.

Hinweis: Der Laplaceoperator für ein Vektorfeld ist dabei in kartesischen Koordinaten komponentenweise definiert als $\Delta\,\boldsymbol{F} = (\Delta\,F_1, \Delta\,F_2, \Delta\,F_3)^T$.