

Blatt 1

Ruedi Lüthi

15. Mai 2019

1.

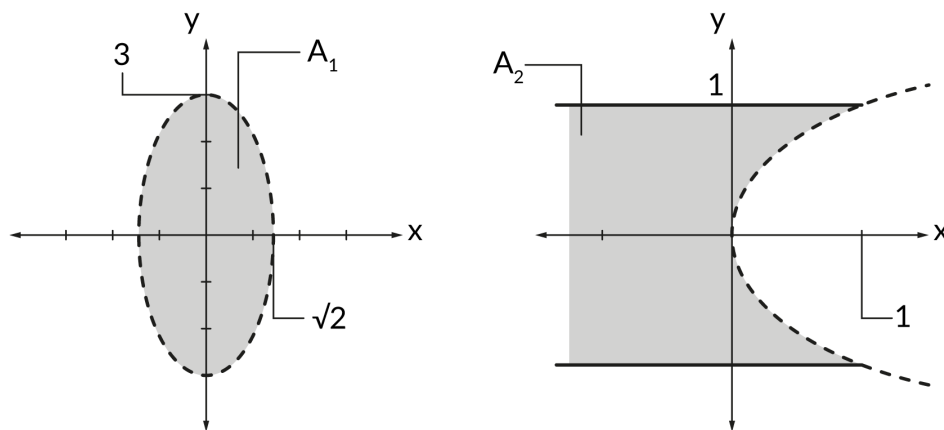


Abbildung 1: Die Teilmengen A_1 und A_2

i.)

$$\mathring{A}_1 = A$$

$$\overline{A}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} \leq 1 \right\}$$

$$\partial A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$$

$$A'_1 = \overline{A}$$

$$\mathring{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x < y^2 \wedge |y| < 1 \right\}$$

$$\overline{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y^2 \wedge |y| \leq 1 \right\}$$

$$\partial A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2 \wedge |y| \leq 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid |y| = 1 \wedge x \leq 1 \right\}$$

$$A'_2 = \overline{A}$$

ii.) A_1 ist offen, A_2 nicht

iii.) A_1, A_2 sind nicht abgeschlossen

iv.) A_1 ist beschränkt, A_2 nicht

2.

Sei $\mathcal{O}_j \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige abgeschlossene Menge. Nun wissen wir nach Satz 1.1.7, wenn \mathcal{O}_j abgeschlossen ist, dass das Komplement $(\mathcal{O}_j)^c$ offen ist. Also gilt für die Vereinigung der Komplemente zweier offene Mengen $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ nach den De Morganschen Gesetzen:

$$A = (\mathcal{O}_1)^c \cup (\mathcal{O}_2)^c \Leftrightarrow (\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2)^c = A$$

Weiter wissen wir wegen Satz 1.1.8, dass die Vereinigung zweier beliebigen offener Mengen wiederum offen ist, also muss A offen sein. Wiederum nach Satz 1.1.7 ist das Komplement A^c aber abgeschlossen:

$$A^c = ((\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2)^c)^c = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$$

und somit also auch der Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$.

Die Behauptung für beliebig viele Mengen folgt wiederum über Induktion:

$$A = \mathcal{O}_1 \cap \underbrace{(\mathcal{O}_2 \cap \mathcal{O}_3 \cap \dots \cap \mathcal{O}_n)}_{\mathcal{O}_2'}$$

3.

a)

Betrachten wir die Funktion f für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ und transformieren in Polarkoordinaten $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi$:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{r \cos \phi \cdot r \sin \phi}{r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi} = \frac{\cos \phi \sin \phi}{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = \cos \phi \sin \phi = f(r, \phi)$$

Weiter betrachten wir:

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \phi) = \cos \phi \sin \phi$$

Da $\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{r \rightarrow 0} f(r, \pi)$ kann die Funktion nicht stetig sein.

b)

Mit ε - δ -Kriterium (nach Musterlösung):

Bemerkung: Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) zwei metrische Räume und $D \subset M_1$. So ist eine Funktion $f : D \rightarrow M_2$ genau dann stetig in $a \in D$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ existiert, so dass für $x \in D$ gilt $d_1(x, a) < \delta_\varepsilon \rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad : \quad d_1(x, a) < \delta_\varepsilon \rightarrow d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall x \in D$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ sowie $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U_{\delta_\varepsilon}(0)$. Dann gilt für $g(x)$ stetig:

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| < \delta_\varepsilon &\Rightarrow \begin{cases} |x| < \delta_\varepsilon \\ |y| < \delta_\varepsilon \end{cases} \\ |f(x, y) - f(0, 0)| = \left| \frac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} - 0 \right| &\stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} \frac{|x|^5}{x^4 + y^4} + \frac{|y|^5}{x^4 + y^4} \\ &\stackrel{x \neq 0}{=} |x| \frac{1}{1 + \frac{y^4}{x^4}} + |y| \frac{1}{\frac{x^4}{|y|^4} + 1} \leq \underbrace{|x|}_{< \delta_\varepsilon} + \underbrace{|y|}_{< \delta_\varepsilon} < 2\delta_\varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

Mit **Folgenkriterium** (entspricht nicht der Musterlösung):

Dies beweist die Stetigkeit nicht! Sondern lediglich die Konvergenz von $f(x_n, \phi)$.

Dasselbe

$$f(x, y) = \frac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} = \frac{r^5(\cos^5 \phi - \sin^5 \phi)}{r^4(\cos^4 \phi + \sin^4 \phi)} = r \frac{\cos^5 \phi - \sin^5 \phi}{\cos^4 \phi + \sin^4 \phi} = f(r, \phi)$$

wiederum

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r, \phi) \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, \phi) \quad \text{mit} \quad (x_n) = \frac{\cos^4 \phi + \sin^4 \phi}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^4 \phi + \sin^4 \phi}{n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 \quad (\text{Nullfolge})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, \phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos^4 \phi + \sin^4 \phi}{n} \frac{\cos^5 \phi - \sin^5 \phi}{\cos^4 \phi + \sin^4 \phi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\cos^5 \phi - \sin^5 \phi) < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, \phi) = 0$ und $f(x_0) = 0$ ist die Funktion stetig.

4.

a)

Für das Zeichnen der Höhenlinie mit Wert c stellen wir um:

$$\begin{aligned} f(x, y) = 4x^2 - 9y^2 = c & \Leftrightarrow y^2 = \frac{4x^2 - c}{9} \\ & \Rightarrow y_{1,2} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{4x^2 - c} = h(x, c) \end{aligned}$$

und zeichnen mittels der Funktion $h(x, c)$ diese im entsprechenden Definitionsbereich $\{x \in [-1, 1] : 4x^2 - c > 0\}$:

b)

Partiell ableiten:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} 4x^2 - 9y^2 & = & 8x \\ \frac{\partial}{\partial y} 4x^2 - 9y^2 & = & -18y \end{pmatrix}$$

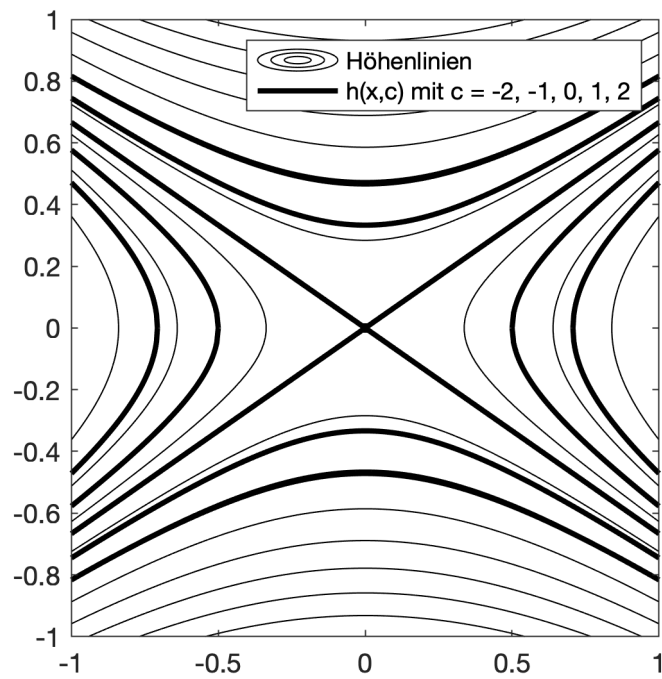


Abbildung 2: Die Höhenlinien der Funktion $f(x, y)$

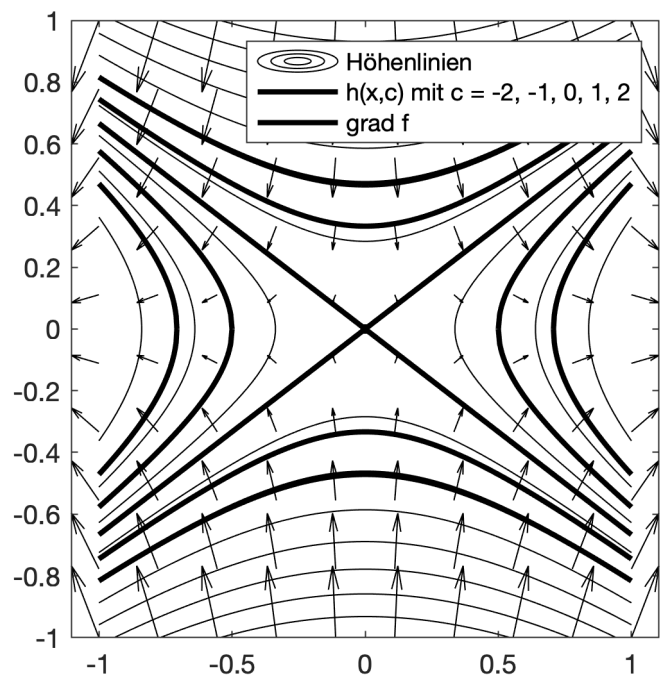


Abbildung 3: Vektorfeld $\nabla f(x, y)$