

# Inhaltsverzeichnis

0.1	Stetigkeit in einer Dimension . . . . .	3
0.2	Zwei Sonderfälle . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Differentialrechnung in höheren Dimensionen</b>	<b>5</b>
1.1	Topologie . . . . .	5
1.1.1	Korollar . . . . .	5
1.1.2	Konvention . . . . .	6
1.1.3	Definition der $\varepsilon$ -Umgebung . . . . .	6
1.1.4	Topologische Grundbegriffe . . . . .	6
1.1.5	Definition von offen und abgeschlossen . . . . .	6
1.1.6	Beispiele . . . . .	6
1.1.7	Satz . . . . .	7
1.1.8	Satz . . . . .	7
1.1.9	Satz . . . . .	8
1.1.10	Definition von beschränkt und kompakt . . . . .	8
1.2	Folgen . . . . .	8
1.2.1	Definition von Konvergenz und Beschränktheit . . . . .	8
1.2.2	Bemerkung . . . . .	8
1.2.3	Satz von Bolzano Weierstraß . . . . .	9
1.2.4	Abschließende Bemerkungen . . . . .	9
1.3	Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit . . . . .	9
1.3.1	Definition . . . . .	9
1.3.2	Definition Grenzwert/Limes . . . . .	9
1.3.3	Bemerkung . . . . .	10
1.3.4	Beispiel . . . . .	10
1.3.5	Lemma Folgenkriterium . . . . .	10
1.3.6	Satz zu Grenzwerte verketteter Funktionen . . . . .	10
1.3.7	Beispiel . . . . .	10
1.3.8	Definition der Stetigkeit . . . . .	11
1.3.9	Bemerkung . . . . .	11
1.4	Partielle Ableitungen, Richtungsableitungen . . . . .	11
1.4.1	Definition der partiellen Ableitung . . . . .	11
1.4.2	Beispiel . . . . .	12
1.4.3	Definition der Richtungsableitung . . . . .	12
1.5	Total Differenzierbarkeit . . . . .	12
1.5.1	Definition der totalen Differenzierbarkeit . . . . .	12
1.5.2	Beispiele . . . . .	13
1.5.3	Satz . . . . .	13
1.5.4	Satz . . . . .	13
1.5.5	Bemerkung . . . . .	14

1.5.6	Satz zur Kettenregel . . . . .	14
1.6	Lokale Extremstellen und Mittelwertsätze . . . . .	14
1.6.1	Definition lokale/globale Extremstellen . . . . .	14
1.6.2	Satz zur notwendigen Bedingung für eine lokale Extremstelle . .	15
1.6.3	Definition des kritischen Punktes . . . . .	15
1.6.4	Mittelwertsatz . . . . .	15

# Einführung

## 0.1 Stetigkeit in einer Dimension

$f$  ist stetig in  $x_0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_n) \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \text{mit} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

*Bemerkung:* Der Grenzwert von Funktionen ist über den Grenzwert von Folgen definiert und kann auch nur so überprüft werden.

## 0.2 Zwei Sonderfälle

### Skalarfeld

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Visualisierung durch Höhenlinien:  $H_c := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$

Beispiel:  $f(x, y) = x^2 + y^2$

### Vektorfeld

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Beispiel:  $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



# Kapitel 1

## Differentialrechnung in höheren Dimensionen

### 1.1 Topologie

#### Skalarprodukt

Definition:  $\langle x, y \rangle := x^\top y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$  für  $x, y \in \mathbb{R}^n$

#### Euklidische Norm

Definition:  $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$

#### 1.1.1 Korollar

Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

1.

$$\max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

2. Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad : \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Begründung (nicht Beweis!) durch alternative Definition:  $\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \underbrace{\cos \alpha}_{\leq 1}$

Dabei ist  $\alpha$  der Winkel der zwischen  $x$  und  $y$  eingeschlossen wird.

Daraus folgt:

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow x, y \text{ sind lin. unabhängig : } x = \lambda y \text{ oder } y = \lambda x \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}$$

3.  $\|\cdot\|$  ist eine Norm. Eine Norm hat folgende Eigenschaften:

- (i)  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  Dreiecksungleichung

### 1.1.2 Konvention

Für  $A \subset \mathbb{R}^n$  gilt für das Komplement  $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

### 1.1.3 Definition der $\varepsilon$ -Umgebung

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon > 0$ , dann gilt für die  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(x_0)$  von  $x_0$ :

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

*Bemerkung:* Die punktierte  $\varepsilon$ -Umgebung ist definiert als:  $\dot{U}_\varepsilon = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$

### 1.1.4 Topologische Grundbegriffe

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ , dann heißt ein Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

- (i) ein **innerer Punkt**, wenn gilt  $\exists \varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(x_0) \subset A$   
Menge aller inneren Punkte:  $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \subset A\}$
- (ii) ein **Berührungspunkt**, wenn  $\forall \varepsilon > 0$  gilt  $U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$   
**abgeschlossene Hülle:**  $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } U_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset\}$
- (iii) ein **Häufungspunkt**, wenn  $\forall \varepsilon > 0$  gilt  $(U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$   
Die Menge aller Häufungspunkte wird mit  $A'$  bezeichnet.
- (iv) ein **Randpunkt**, wenn  $\forall \varepsilon > 0$  gilt  $U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$  und  $U_\varepsilon(x_0) \cap A^c \neq \emptyset$   
Menge aller Randpunkte oder auch **Rand** von  $A$  wird mit  $\partial A$  bezeichnet.

#### Korollar

- (i)  $\mathring{A} \subset A$
- (ii)  $\mathring{A} \subset \bar{A}$
- (iii)  $\partial A \subset \bar{A}$
- (iv)  $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$
- (v)  $\bar{A} = A \cup \partial A$  (schwächere Aussage als (iv))

### 1.1.5 Definition von offen und abgeschlossen

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt

- (i) **offen**, wenn  $A = \mathring{A}$  gilt ( $A$  besteht nur aus inneren Punkten)
- (ii) **abgeschlossen**, wenn  $\partial A \subset A$  gilt (wenn der Rand in der Menge enthalten ist)

### 1.1.6 Beispiele

1. Jede  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(x_0 \in \mathbb{R}^n)$  ist offen

2. Sei  $I \subset \mathbb{R}$ , dann gilt

- (i)  $I$  ist offen, wenn  $I = (a, b)$  mit  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$   
für  $a = b$  gilt  $I = \emptyset$  mit  $I$  offen  
und für  $a = -\infty, b = \infty$  ist  $I$  auch offen

- (ii)  $I$  ist abgeschlossen, wenn  $I = [a, b]$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$   
 oder  $I = (-\infty, b]$  oder  $I = [a, \infty)$  oder  $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

(die reellen Zahlen sind offen und abgeschlossen zugleich)

### 1.1.7 Satz

für  $A \subset \mathbb{R}^n$  sind folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $A$  ist abgeschlossen  $A = \overline{A}$
- (ii)  $A$  enthält alle Häufungspunkte,  $A' \subset A$
- (iii)  $A$  enthält alle Randpunkte,  $\partial A \subset A$
- (iv)  $A^c$  ist offen

### 1.1.8 Satz

- (i)  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}^n$  sind offen.
- (ii) Die Vereinigung beliebig vieler offene Mengen ist offen:

$$\bigcup_{j \in J} (O_j \text{ offen}) = O \text{ offen}$$

- (iii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen:

$$\bigcap_{j=1}^n (O_j \text{ offen}) = O \text{ offen}$$

*Bemerkung:* Für unendlich viele offene Mengen gilt dies nicht immer:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = (-1, 1) \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cap \dots = \{0\} \text{ abgeschlossen}$$

### Beispiel

Seien  $A_1, A_2$  zwei abgeschlossene Mengen, dann gilt

- (i)  $A_1 \cup A_2$  ist abgeschlossen  
*Beweisidee:*  $A_1$  ist abgeschlossen  $\Rightarrow A_1^c$  ist offen

$$(A_1 \cup A_2)^c \stackrel{\text{De Morgan}}{=} \underbrace{A_1^c}_{\text{offen}} \cap \underbrace{A_2^c}_{\text{offen}} \text{ ist offen wegen Satz 1.1.8}$$

$$((A_1 \cup A_2)^c)^c = A_1 \cup A_2 \text{ ist abgeschlossen}$$

**1.1.9 Satz**

- (i)  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}^n$  sind abgeschlossen.
- (ii) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen:

$$\bigcap_{j \in J} (A_j \text{ abgeschlossen}) = A \text{ abgeschlossen}$$

- (iii) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen:

$$\bigcup_{j=1}^n (A_j \text{ abgeschlossen}) = A \text{ abgeschlossen}$$

*Bemerkung:* Für unendlich viele abgeschlossene Mengen gilt dies nicht immer:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[ -1 + \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k} \right] = \{0\} \cup \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \cup \left[ -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right] \cup \dots = (-1, 1) \text{ offen}$$

**1.1.10 Definition von beschränkt und kompakt**

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt:

- (i) **beschränkt** wenn  $\exists c > 0$  mit  $\|x\| < c \quad \forall x \in A$
- (ii) **kompakt**, wenn  $A$  abgeschlossen und beschränkt ist.

**1.2 Folgen****1.2.1 Definition von Konvergenz und Beschränktheit**

Eine Folge  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  heißt

- (i) **konvergent**, wenn gilt

$$\exists a \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \quad \|a_k - a\| < \varepsilon \quad \forall k \geq N(\varepsilon)$$

Dann ist  $a$  der Grenzwert der Folge:

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \quad \text{oder} \quad a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$$

- (ii) **beschränkt**, wenn  $\exists c > 0$  mit  $\|a_k\| < c \quad \forall k$

**1.2.2 Bemerkung**

Wenn eine Folge  $(a_k) = \begin{pmatrix} a_1^{(k)} \\ \vdots \\ a_n^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  konvergiert, so gilt

- (i)  $\Leftrightarrow$  jede Komponente  $a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}$  konvergiert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_i^{(k)} = a_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$



(ii)  $\Leftrightarrow (a_k)$  erfüllt das **Cauchy-Kriterium**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \quad \|a_k - a_l\| < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N(\varepsilon)$$

(iii)  $\Leftrightarrow$  jede Teilfolge von  $(a_k)$  konvergiert gegen  $a$ :  $a_{l_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$  für  $l_1 \geq 1, l_2 \geq 2, \dots$

(iv) der Grenzwert  $a$  ist eindeutig.

### 1.2.3 Satz von Bolzano Weierstraß

Jede beschränkte Folge im  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

#### Beispiele

(i)  $n = 1$ : Sei  $A \leq (a_k) \leq B \quad \forall k$ . Konstruiert man eine neue Schranke mit  $\frac{A+B}{2}$  so liegen wiederum  $\infty$  viele Elemente in der oberen und/oder unteren Hälfte.

(ii) Sei  $(a_k) = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$  eine beschränkte Folge im  $\mathbb{R}^2$   
 $\Rightarrow (x_k), (y_k)$  sind beschränkte Folgen  
Satz von Bolzano Weierstraß  
 $\Rightarrow \exists (x_k), (y_k)$  sind konvergent

### 1.2.4 Abschließende Bemerkungen

(i) Grenzwert Rechenregeln können aus dem  $\mathbb{R}$  für  $\mathbb{R}^n$  übernommen werden.

$$\text{z.B. } a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a, \quad b_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \quad \Rightarrow \quad a_k^\top b_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a^\top b$$

(ii) Es gibt viele Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften von Folgen und den topologischen Eigenschaften von Mengen.

z.B. Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $a \in \mathbb{R}^n$  ein Häufungspunkt

$$\Leftrightarrow \exists (a_k)_{k=1}^\infty \text{ mit } a_k \in A \setminus \{a\} \quad \forall k \quad \text{und} \quad a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$$

## 1.3 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

### 1.3.1 Definition

Eine Funktion  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  nennt man eine Funktion mit  $n$ -Veränderlichen.

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

### 1.3.2 Definition Grenzwert/Limes

Sei  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $a \in \overline{A}$ . Ein  $b \in \mathbb{R}^m$  heißt Grenzwert von  $f$  für  $x \rightarrow a$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \|f(x) - b\| < \varepsilon \quad \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

*Bemerkung:* Die Funktion  $f$  muss in  $a$  nicht stetig sein, so kann z.B. gelten:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$$

**1.3.3 Bemerkung**

Sei  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \overline{A}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$
- (ii)  $\|f(x) - b\| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \in \mathbb{R}^1$  (Eine Norm bildet immer auf ein Skalar ab)
- (iii)  $f_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_1, \dots, f_m(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_m$

Zusätzlich gilt das **Cauchy-Kriterium**:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|f(x), f(y)\| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

**1.3.4 Beispiel**

Sei  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

$$a_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad f(a_k) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \quad \forall k$$

$$b_k = \begin{pmatrix} x_k \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad f(b_k) = \frac{0}{x_k^2} \quad \forall k$$

Da  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k)$  kann der Grenzwert nicht existieren.

**1.3.5 Lemma Folgenkriterium**

Sei  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \overline{A}$

$$\underbrace{\exists b \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b}_{\text{der Grenzwert } b \text{ existiert}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{array}{l} \text{jede Folge } (x_k)_{k=1}^\infty \subset A \text{ mit } x_k \neq a \quad \forall k \text{ und } x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a \\ \Rightarrow f(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \end{array}}_{\text{jede beliebige Folge konvergiert gegen } b}$$

**1.3.6 Satz zu Grenzwerte verketteter Funktionen**

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $B \subset \mathbb{R}^m$ ,  $a \in \overline{A}$ ,  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^l$

$$\exists b \in \overline{B} \text{ mit } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \exists c \in \mathbb{R}^l \text{ mit } \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{g(f(x))}_{(g \circ f)(x)} = \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$$

**1.3.7 Beispiel**

Sei  $f(x, y) = e^{-x^2 + y^2} = \exp(g(x, y))$  mit  $g(x, y) = x^2 + y^2$ , dabei gilt:

$$\lim_{(x,y)^\top \rightarrow (0,0)^\top} g(x, y) = \lim_{(x,y)^\top \rightarrow (0,0)^\top} x^2 + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1$$

### 1.3.8 Definition der Stetigkeit

Sei  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

- (i)  $f$  ist **stetig** in  $a \in A$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \forall x \in U_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

*Bemerkung:* Es wird  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  gefordert.

Diese Definition unterscheidet sich in der nicht punktierten  $\varepsilon$ -Umgebung und es gilt  $f(a)$  anstatt b.

- (ii)  $f$  ist stetig auf  $A$ , wenn  $f$  in jedem Punkt  $a \in A$  stetig ist.

### 1.3.9 Bemerkung

- (i) Kompositionen stetiger Funktionen sind wieder stetig:  $f, g$  stetig  $\Rightarrow f + g, f - g, \dots$  stetig
- (ii) Das Folgenkriterium überträgt sich:  
Sei  $(a_k)_{k=1}^\infty$  eine Folge in  $A$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f(a)$
- (iii) Ist  $A$  kompakt, dann nimmt eine stetige Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  immer ein Maximum und Minimum an:

$$\exists x_m, x_M \in A \text{ mit } f(x_m) = \min_{x \in A} f(x), f(x_M) = \max_{x \in A} f(x)$$

## 1.4 Partielle Ableitungen, Richtungsableitungen

### 1.4.1 Definition der partiellen Ableitung

Die Funktion  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **partielle differenzierbar** in  $a \in A$  nach der  $k$ -ten Variable  $x_k$  mit  $k \in \{1, \dots, n\}$  wenn der folgender Grenzwert existiert:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(a) = f_{x_k}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h \cdot e_k) - f(a)}{h}$$

Existieren alle partielle Ableitungen  $f_{x_1}(a), \dots, f_{x_n}(a)$ , dann ist der **Gradient** von  $f$  wie folgt definiert:

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(a) \\ \vdots \\ f_{x_n}(a) \end{pmatrix}$$

und die Funktion  $f$  heißt mindestens einmal partielle differenzierbar. Sind die partiellen Ableitungen  $f_{x_1}(a), \dots, f_{x_n}(a)$  zudem stetig, so heißt  $f$  einmal stetig differenzierbar:  $f \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$  oder kurz  $f \in C^1(A)$ .

### 1.4.2 Beispiel

Sei  $f(x, y, z) = x^2 - xy + 3z$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h)y + 3z - (x^2 - xy + 3z)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} - \frac{(x+h)y - xy}{h} + \frac{3z - 3z}{h} \\
 &= \left( \frac{d}{dx} x^2 \right) - \left( \frac{d}{dx} x \right) y + \left( \frac{d}{dx} 0 \right) z \\
 &= 2x - y + 0 \\
 &\Rightarrow \nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x \\ 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

### 1.4.3 Definition der Richtungsableitung

Sei  $a, r \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|r\| = 1$  (normiert),  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dann heißt der folgende Grenzwert die Richtungsableitung von  $f$  bei  $a$  in Richtung  $r$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} f(a) = f_r(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h \cdot r) - f(a)}{h}$$

#### Bemerkung

- (i) Ist  $r = e_k$ , dann erhalten wir gerade eine partielle Ableitung.
- (ii) Es gibt Funktionen die in  $a$  in jede Richtung differenzierbar sind, aber in  $a$  nicht stetig sind!

## 1.5 Total Differenzierbarkeit

*Idee:* Differenzierbare Funktionen sind lokal im Punkt  $x_0$  linear approximierbar:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{r(x)\|x - x_0\|}_{\tilde{r}(x)}$$

Dabei muss der Fehler  $\tilde{r}(x) = r(x)\|x - x_0\|$  *schneller gegen Null gehen als  $x$  gegen  $x_0$*  also muss  $\tilde{r}(x) = o(x - x_0)$  gelten (Landau-Notation: klein-oh).

### 1.5.1 Definition der totalen Differenzierbarkeit

Sei  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A$  offen,  $x_0 \in A$

- (i) Die Funktion  $f$  nennt man **total differenzierbar** bei  $x_0$ , wenn eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  existiert, mit der sich die Funktion  $f$  in einer  $\varepsilon$ -Umgebung um  $x_0$  mittels einer Hyperebene approximieren lässt:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|$$

Dann nennt man die Matrix  $A = f'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0)$  die total Ableitung von  $f$  in  $x_0$ .

(ii) Ist  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$  partiell diff'bar, so nennt man die Ableitung **Jacobi-Matrix**:

$$f'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0) = J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_0) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(x_0) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

*Bemerkung:* Es gilt:  $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = J_f(x_0)$ , nicht aber die Gegenrichtung! Es kann also sein, dass die Jacobi-Matrix  $J_f$  existiert die Funktion aber nicht total diff'bar ist.

### 1.5.2 Beispiele

(i)

$$f(r, \varphi) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow J_f = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad f(x) = a + b^\top (x - x_0), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b, x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow f(x_0) = a, \quad f'(x_0) = b^\top$$

$$(iii) \quad f(x) = a + A(x - x_0), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad a \in \mathbb{R}^m, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow f(x_0) = a, \quad f'(x_0) = A$$

*Bemerkung:* Beispiel (ii) und (iii) sind lineare Funktionen.

### 1.5.3 Satz

Ist  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  in jedem Punkt  $x_0 \in A$  total differenzierbar, so ist  $f$  stetig in  $A$ .

*Beweis:*

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \rightarrow f(x_0)}} + \underbrace{A(x - x_0)}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n}} + \underbrace{r(x)}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^m}} \underbrace{\|x - x_0\|}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \rightarrow 0 \in \mathbb{R}}} \quad \text{mit } r(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(x_0) \quad \square$$

### 1.5.4 Satz

Sei  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in A$

a. Ist  $f$  total differenzierbar in  $x_0$ , so gilt

$$(i) \quad f'(x_0) = J_f(x_0)$$

$$(ii) \quad f \text{ ist in jede Richtung } r \text{ differenzierbar mit: } \frac{\partial}{\partial r} f(x_0) = J_f(x_0) \cdot r$$

b. Existieren in  $x_0$  alle partiellen Ableitungen (also alle Komponenten der Jacobi-Matrix) und diese stetig sind  $\Rightarrow f$  ist in  $x_0$  total differenzierbar.

*Beweis zu a:* ...

*Beweis zu b:* ...

**1.5.5 Bemerkung**

Sei  $r$  eine Richtung mit  $\|r\| = 1$  und  $x = x_0 + r$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top \cdot r \\ \Rightarrow 1. \text{ Fall : } &r, \nabla f(x_0) \text{ zeigen in dieselbe Richtung :} \\ &f(x) - f(x_0) \approx \|\nabla f(x_0)\| \|r\| = \|\nabla f(x_0)\| > 0 \\ \Rightarrow 2. \text{ Fall : } &r, \nabla f(x_0) \text{ zeigen in entgegengesetzte Richtungen :} \\ &f(x) - f(x_0) \approx -\|\nabla f(x_0)\| < 0 \end{aligned}$$

In allen Fällen gilt Näherungsweise:

$$-\|\nabla f(x_0)\| < \nabla f(x_0)^\top r \leq \|\nabla f(x_0)\|$$

*Fazit:* Beim Reinzoomen sind die Höhenlinien parallel. Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstieges.

**1.5.6 Satz zur Kettenregel**

Ist  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $a \in A$  und  $g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  differenzierbar in  $b \in B$ , so gilt:

$$(g \circ f)'(a) = g' \left( \underbrace{f(a)}_{=b} \right) f'(a) = \underbrace{J_g(b)}_{\in \mathbb{R}^{l \times m}} \underbrace{J_f(a)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

**1.6 Lokale Extremstellen und Mittelwertsätze**

In einer Dimension gilt:

**1. Mittelwertsatz**

Ist  $f$  differenzierbar auf  $(a, b)$  und stetig auf  $[a, b]$ , so gilt:

$$\exists \xi \in (a, b) \text{ mit } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Satz von Rolle**

Ist  $f$  differenzierbar auf  $(a, b)$  und stetig auf  $[a, b]$  und gilt  $f(a) = f(b)$ , so gilt:

$$\exists \xi \in (a, b) \text{ mit } f'(\xi) = 0$$

**1.6.1 Definition lokale/globale Extremstellen**

- a. Eine Funktion  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (Skalarfeld) hat bei  $x_0 \in A$  ein lokales Minimum (Maximum) wenn in einer Umgebung  $U = U_\varepsilon(x_0) \cap A$  für  $\varepsilon > 0$  (offen bezüglich  $A$ ) von  $x_0$  gilt:

$$f(x_0) \stackrel{(\geq)}{\leq} f(x) \quad \forall x \in U$$

Ist bei  $x_0$  ein lokales Minimum (Maximum) dann nennt man  $x_0$  eine lokale Extremstelle.

b.  $f$  besitzt in  $x_0$  ein globales Minimum (Maximum), wenn gilt:

$$f(x_0) \stackrel{(\geq)}{\leq} f(x) \quad \forall x \in A$$

### 1.6.2 Satz zur notwendigen Bedingung für eine lokale Extremstelle

Besitzt  $f : \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bei  $x_0 \in A$  eine lokale Extremstelle und  $f$  ist partiell differenzierbar, dann ist

$$\nabla f(x_0) = 0$$

*Bemerkung:* Der Rand ist ausgeschlossen da  $\overset{\circ}{A}$  (alle inneren Punkte) gilt.  
Es gilt:

$$x_0 \text{ ist eine lokale Extremstelle} \quad \not\Rightarrow \quad f'(x_0) = 0$$

Aus  $f'(x_0)$  folgt nicht direkt die Extremstelle, denn Sattelpunkte sind keine Extremstellen.

*Beweis ...*

### 1.6.3 Definition des kritischen Punktes

Ein  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\nabla f(x_0) = 0$  heißt **kritischer** oder stationärer Punkt.

### 1.6.4 Mittelwertsatz

Sei  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und sei  $G$  offen und enthalte die Menge  $\overline{a,b} = \{a, b \in G \text{ mit } a + t(b-a) : t \in [0, 1]\}$  ( $a, b$  können durch eine Gerade verbunden werden). Dann:

$$\exists \xi \in (0, 1) \quad \text{mit} \quad f(b) = f(a) + \nabla f(a + \xi(b-a))^\top (b-a)$$

*Bemerkung:*

$$\begin{aligned} h(t) &= a + t(b-a) & g(t) &= f(h(t)) \quad (\text{differenzierbar}) \\ \Rightarrow \quad \exists \xi \in (0, 1) & \quad \text{mit} \quad g'(\xi) &= \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} \end{aligned}$$

*Beweis: ...*

### 1.6.5 Definition eines Gebiets