Inhaltsverzeichnis

Einführung

0.1 Stetigkeit in einer Dimension

f ist stetig in x_0

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, (x_n) \ \text{ mit } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{ gilt } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta \quad \text{mit} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Der Grenzwert von Funktionen ist über den Grenzwert von Folgen definiert und kann auch nur so überprüft werden.

0.2 Zwei Sonderfälle

Skalarfeld

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Visualisierung durch Höhenlinien: $H_c := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$
Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$

Vektorfeld

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
Beispiel: $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Kapitel 1

Differentialrechnung in höheren Dimensionen

1.1

Skalarprodukt

Definition: $\langle x, y\rangle := x^\top y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$

Euklidische Norm

Definition: $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$

1.1.1 Korollar

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

1.
$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k| \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$$

2. Cauchy-Schwarz-Ungleichung:
$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n \quad : \quad |\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$
   Begründung (nicht Beweis!) durch alternative Definition: $\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \underbrace{\cos\alpha}_{\leqslant 1}$

   Dabei ist α der Winkel der zwischen x und y eingeschlossen wird.
   Daraus folgt:
$$|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow x, y \text{ sind lin. unabhängig} : x = \lambda y \text{ oder } y = \lambda x \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. $\|\cdot\|$ ist eine Norm. Eine Norm hat folgende Eigenschaften:
   (i) $\|x\| \geqslant 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
   (iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung

1.1.2 Konvention

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt für das Komplement $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

1.1.3 Definition der ε-Umgebung

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$, dann gilt für die ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von x_0:

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

1.1.4 Topologische Grundbegriffe

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, dann heißt ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$

(i) ein **innerer Punkt**, wenn gilt $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subset A$
Menge aller inneren Punkte: $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\, \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \subset A\}$

(ii) ein **Berührungspunkt**, wenn $\forall\, \varepsilon > 0$ gilt $U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing$
abgeschlossene Hülle: $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall\, \varepsilon > 0 \text{ gilt } U_\varepsilon(x_0) \neq \varnothing\}$

(iii) ein **Häufungspunkt**, wenn $\forall\, \varepsilon > 0$ gilt $(U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \varnothing$
Die Menge aller Häufungspunkte wird mit A' bezeichnet.

(iv) ein **Randpunkt**, wenn $\forall\, \varepsilon > 0$ gilt $U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing$ und $U_\varepsilon(x_0) \cap A^c \neq \varnothing$
Menge aller Randpunkte oder auch **Rand** von A wird mit ∂A bezeichnet.

Korollar

(i) $\mathring{A} \subset A$

(ii) $\mathring{A} \subset \overline{A}$

(iii) $\partial A \subset \overline{A}$

(iv) $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$

(v) $\overline{A} = A \cup \partial A$ (schwächere Aussage als (iv))

1.1.5 Definition

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt

(i) **offen**, wenn $A = \mathring{A}$ gilt (A besteht nur aus inneren Punkten)

(ii) **abgeschlossen**, wenn $\partial A \subset A$ gilt (wenn der Rand in der Menge enthalten ist)

1.1.6 Beispiele

1. Jede ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0 \in \mathbb{R}^n)$ ist offen

2. Sei $I \subset \mathbb{R}$, dann gilt

   (i) I ist offen, wenn $I = (a, b)$ mit $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$
   für $a = b$ gilt $I = \varnothing$ mit I offen
   und für $a = -\infty, b = \infty$ ist I auch offen

   (ii) I ist abgeschlossen, wenn $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
   oder $I = (-\infty, b]$ oder $I = [a, \infty)$ oder $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

   (die reellen Zahlen sind offen und abgeschlossen zugleich)

1.1.7 Satz

für $A \subset \mathbb{R}^n$ sind folgenden Aussagen äquivalent:

(i) A ist abgeschlossen $A = \overline{A}$

(ii) A enthält alle Häufungspunkte, $A' \subset A$

(iii) A enthält alle Randpunkte, $\partial A \subset A$

(iv) A^c ist offen

1.1.8 Satz

(i) $\varnothing$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen

(ii) Die Vereinigung beliebig vieler offene Mengen O_j mit $j \in J$ ist stets offen

(iii) Der Durchschnitt <u>endlich</u> vieler offener Mengen $O_1, ..., O_r$ ist stets offen