

# Höhere Mathematik II

Mitschrift der Vorlesung von Prof. Lehn  
im Sommersemester 2019 an der Uni Ulm

10. Juni 2019



# Inhaltsverzeichnis

0.1	Stetigkeit in einer Dimension . . . . .	7
0.2	Zwei Sonderfälle . . . . .	7
<b>1</b>	<b>Differentialrechnung in höheren Dimensionen</b>	<b>9</b>
1.1	Topologie . . . . .	9
1.1.1	Korollar . . . . .	9
1.1.2	Konvention . . . . .	10
1.1.3	Definition der $\varepsilon$ -Umgebung . . . . .	10
1.1.4	Topologische Grundbegriffe . . . . .	10
1.1.5	Definition von offen und abgeschlossen . . . . .	10
1.1.6	Beispiele . . . . .	10
1.1.7	Satz . . . . .	11
1.1.8	Satz . . . . .	11
1.1.9	Satz . . . . .	12
1.1.10	Definition von beschränkt und kompakt . . . . .	12
1.2	Folgen . . . . .	12
1.2.1	Definition von Konvergenz und Beschränktheit . . . . .	12
1.2.2	Bemerkung . . . . .	12
1.2.3	Satz von Bolzano Weierstraß . . . . .	13
1.2.4	Abschließende Bemerkungen . . . . .	13
1.3	Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit . . . . .	13
1.3.1	Definition . . . . .	13
1.3.2	Definition Grenzwert/Limes . . . . .	13
1.3.3	Korollar . . . . .	14
1.3.4	Beispiel . . . . .	14
1.3.5	Lemma Folgenkriterium . . . . .	14
1.3.6	Satz zu Grenzwerte verketteter Funktionen . . . . .	14
1.3.7	Beispiel . . . . .	14
1.3.8	Definition der Stetigkeit . . . . .	15
1.3.9	Bemerkung . . . . .	15
1.4	Partielle Ableitungen, Richtungsableitungen . . . . .	15
1.4.1	Definition der partiellen Ableitung . . . . .	15
1.4.2	Beispiel . . . . .	16
1.4.3	Definition der Richtungsableitung . . . . .	16
1.5	Total Differenzierbarkeit . . . . .	16
1.5.1	Definition der totalen Differenzierbarkeit . . . . .	16
1.5.2	Beispiele . . . . .	17
1.5.3	Satz . . . . .	17
1.5.4	Satz . . . . .	17
1.5.5	Bemerkung . . . . .	19

1.5.6	Satz zur Kettenregel . . . . .	20
1.6	Lokale Extremstellen und Mittelwertsätze . . . . .	20
1.6.1	Definition lokale/globale Extremstellen . . . . .	21
1.6.2	Satz zur notwendigen Bedingung für eine lokale Extremstelle . . . . .	21
1.6.3	Definition des kritischen Punktes . . . . .	21
1.6.4	Mittelwertsatz . . . . .	21
1.6.5	Definition eines Gebiets . . . . .	22
1.6.6	Bemerkungen zu Gebieten . . . . .	22
1.6.7	Satz . . . . .	22
1.6.8	Definition partieller Ableitungen $r$ 'ter Ordnung . . . . .	22
1.6.9	Definition der Hessematrix . . . . .	23
1.6.10	Beispiele . . . . .	23
1.6.11	Satz von Schwarz . . . . .	23
1.6.12	Satz von Taylor mit quadratischem Restglied . . . . .	23
1.6.13	Definition von Definitheit . . . . .	24
1.6.14	Beispiele . . . . .	24
1.6.15	Satz zum Hauptminorenkriterium . . . . .	25
1.6.16	Satz über die hinreichenden Bedingungen für lokale Extremstellen . . . . .	25
1.6.17	Definition der Sattelpunkte . . . . .	26
1.6.18	Satz für den Fall $n = 2$ . . . . .	26
1.6.19	Beispiel . . . . .	26
1.7	Extremstellen unter Nebenbedingungen und implizite Funktionen . . . . .	27
1.7.1	Spezialfälle . . . . .	28
1.7.2	Bemerkung . . . . .	28
1.7.3	Satz über die Umkehrfunktion . . . . .	28
1.7.4	Polarkoordinaten . . . . .	29
1.7.5	Beispiel . . . . .	29
1.7.6	Kugelkoordinaten . . . . .	30
1.7.7	Korollar: Gebietstreue . . . . .	30
1.7.8	Definition impliziter Funktionen . . . . .	30
1.7.9	Beispiel Einheitskreis . . . . .	31
1.7.10	Hauptsatz über implizite Funktionen . . . . .	31
1.7.11	Lokale Extremstellen unter Nebenbedingungen . . . . .	32
1.7.12	Satz von Lagrange . . . . .	32
1.7.13	Beispiele . . . . .	33
1.7.14	Kochrezept für Lagrange . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Integrale in mehreren Dimensionen</b>	<b>37</b>
2.1	Parameterintegrale . . . . .	37
2.1.1	Satz zu eigentlichen Parameterintegralen . . . . .	37
2.1.2	Satz zur Leibniz-Regel . . . . .	38
2.1.3	Definition uneigentlicher Parameterintegrale . . . . .	38
2.1.4	Satz zum Majorantenkriterium . . . . .	39
2.1.5	Satz von Fubini für uneigentliche Integrale . . . . .	39
2.1.6	Satz zur Ableitung uneigentlicher Parameterintegrale . . . . .	39
2.1.7	Beispiel . . . . .	40
2.2	Kurvenintegrale . . . . .	40
2.2.1	Definition der Äquivalenzrelation für Kurven . . . . .	40

2.2.2	Definition einer Kurve im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	41
2.2.3	Beispiele . . . . .	41
2.2.4	Eigenschaften von Parameterdarstellungen . . . . .	41
2.2.5	Bemerkung . . . . .	42
2.2.6	Beispiele . . . . .	42
2.2.7	Definition zusammen- und entgegengesetzter Kurven . . . . .	43
2.2.8	Definition von rektifizierbaren Kurven . . . . .	43
2.2.9	Satz . . . . .	43
2.2.10	Definition von Kurvenintegralen . . . . .	44
2.2.11	Substitutionsformel . . . . .	45
2.2.12	Beispiele . . . . .	45
2.2.13	Definition der Wegunabhängigkeit . . . . .	46
2.2.14	Erster Hauptsatz für Kurvenintegralen . . . . .	46
2.2.15	Satz . . . . .	46
2.2.16	Beispiele . . . . .	47
2.2.17	Definition einfach zusammenhängender Gebiete . . . . .	47
2.2.18	Sternförmige Gebiete . . . . .	47
2.2.19	Bemerkung . . . . .	47
2.2.20	Zweiter Hauptsatz für Kurvenintegralen . . . . .	47
2.2.21	Definition der Rotation . . . . .	48
2.2.22	Korollar zum zweiten Hauptsatz für Kurvenintegrale . . . . .	48
2.2.23	Nach Variablen integrieren . . . . .	48
2.2.24	Mittels Kurvenintegral und passendem Weg . . . . .	48



# Einführung

## 0.1 Stetigkeit in einer Dimension

$f$  ist stetig in  $x_0$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_n) \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \text{mit} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

*Bemerkung:* Der Grenzwert von Funktionen ist über den Grenzwert von Folgen definiert und kann auch nur so überprüft werden.

## 0.2 Zwei Sonderfälle

### Skalarfeld

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Visualisierung durch Höhenlinien:  $H_c := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$

Beispiel:  $f(x, y) = x^2 + y^2$

### Vektorfeld

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Beispiel:  $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$





# Kapitel 1

## Differentialrechnung in höheren Dimensionen

### 1.1 Topologie

#### Skalarprodukt

Definition:  $\langle x, y \rangle := x^\top y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$  für  $x, y \in \mathbb{R}^n$

#### Euklidische Norm

Definition:  $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$

#### 1.1.1 Korollar

Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

1.

$$\max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

2. Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad : \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Begründung (nicht Beweis!) durch alternative Definition:  $\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \underbrace{\cos \alpha}_{\leq 1}$

Dabei ist  $\alpha$  der Winkel der zwischen  $x$  und  $y$  eingeschlossen wird.

Daraus folgt:

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow x, y \text{ sind lin. unabhängig : } x = \lambda y \text{ oder } y = \lambda x \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}$$

3.  $\|\cdot\|$  ist eine Norm. Eine Norm hat folgende Eigenschaften:

- (i)  $\|x\| \geq 0$  und  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (ii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
- (iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  Dreiecksungleichung

### 1.1.2 Konvention

Für  $A \subset \mathbb{R}^n$  gilt für das Komplement  $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

### 1.1.3 Definition der $\varepsilon$ -Umgebung

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $\varepsilon > 0$ , dann gilt für die  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(x_0)$  von  $x_0$ :

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

*Bemerkung:* Die punktierte  $\varepsilon$ -Umgebung ist definiert als:  $\dot{U}_\varepsilon = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$

### 1.1.4 Topologische Grundbegriffe

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ , dann heißt ein Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

- (i) ein **innerer Punkt**, wenn gilt  $\exists \varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(x_0) \subset A$   
Menge aller inneren Punkte:  $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \subset A\}$
- (ii) ein **Berührungspunkt**, wenn  $\forall \varepsilon > 0$  gilt  $U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$   
**abgeschlossene Hülle:**  $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt } U_\varepsilon(x_0) \neq \emptyset\}$
- (iii) ein **Häufungspunkt**, wenn  $\forall \varepsilon > 0$  gilt  $(U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$   
Die Menge aller Häufungspunkte wird mit  $A'$  bezeichnet.
- (iv) ein **Randpunkt**, wenn  $\forall \varepsilon > 0$  gilt  $U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \emptyset$  und  $U_\varepsilon(x_0) \cap A^c \neq \emptyset$   
Menge aller Randpunkte oder auch **Rand** von  $A$  wird mit  $\partial A$  bezeichnet.

#### Korollar

- (i)  $\mathring{A} \subset A$
- (ii)  $\mathring{A} \subset \bar{A}$
- (iii)  $\partial A \subset \bar{A}$
- (iv)  $\bar{A} = \mathring{A} \cup \partial A$
- (v)  $\bar{A} = A \cup \partial A$  (schwächere Aussage als (iv))

### 1.1.5 Definition von offen und abgeschlossen

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt

- (i) **offen**, wenn  $A = \mathring{A}$  gilt ( $A$  besteht nur aus inneren Punkten)
- (ii) **abgeschlossen**, wenn  $\partial A \subset A$  gilt (wenn der Rand in der Menge enthalten ist)

### 1.1.6 Beispiele

1. Jede  $\varepsilon$ -Umgebung  $U_\varepsilon(x_0 \in \mathbb{R}^n)$  ist offen

2. Sei  $I \subset \mathbb{R}$ , dann gilt

- (i)  $I$  ist offen, wenn  $I = (a, b)$  mit  $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$   
für  $a = b$  gilt  $I = \emptyset$  mit  $I$  offen  
und für  $a = -\infty, b = \infty$  ist  $I$  auch offen

- (ii)  $I$  ist abgeschlossen, wenn  $I = [a, b]$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$   
 oder  $I = (-\infty, b]$  oder  $I = [a, \infty)$  oder  $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

(die reellen Zahlen sind offen und abgeschlossen zugleich)

### 1.1.7 Satz

für  $A \subset \mathbb{R}^n$  sind folgenden Aussagen äquivalent:

- (i)  $A$  ist abgeschlossen  $A = \overline{A}$
- (ii)  $A$  enthält alle Häufungspunkte,  $A' \subset A$
- (iii)  $A$  enthält alle Randpunkte,  $\partial A \subset A$
- (iv)  $A^c$  ist offen

### 1.1.8 Satz

- (i)  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}^n$  sind offen.
- (ii) Die Vereinigung beliebig vieler offene Mengen ist offen:

$$\bigcup_{j \in J} (O_j \text{ offen}) = O \text{ offen}$$

- (iii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen:

$$\bigcap_{j=1}^n (O_j \text{ offen}) = O \text{ offen}$$

*Bemerkung:* Für unendlich viele offene Mengen gilt dies nicht immer:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = (-1, 1) \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cap \dots = \{0\} \text{ abgeschlossen}$$

### Beispiel

Seien  $A_1, A_2$  zwei abgeschlossene Mengen, dann gilt

- (i)  $A_1 \cup A_2$  ist abgeschlossen

**Beweisidee:**  $A_1$  ist abgeschlossen  $\Rightarrow A_1^c$  ist offen

$$\begin{aligned} (A_1 \cup A_2)^c &\stackrel{\text{De Morgan}}{=} \underbrace{A_1^c}_{\text{offen}} \cap \underbrace{A_2^c}_{\text{offen}} \text{ ist offen wegen Satz 1.1.8} \\ ((A_1 \cup A_2)^c)^c &= A_1 \cup A_2 \text{ ist abgeschlossen} \end{aligned}$$

**1.1.9 Satz**

- (i)  $\emptyset$  und  $\mathbb{R}^n$  sind abgeschlossen.
- (ii) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen:

$$\bigcap_{j \in J} (A_j \text{ abgeschlossen}) = A \text{ abgeschlossen}$$

- (iii) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen:

$$\bigcup_{j=1}^n (A_j \text{ abgeschlossen}) = A \text{ abgeschlossen}$$

*Bemerkung:* Für unendlich viele abgeschlossene Mengen gilt dies nicht immer:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[ -1 + \frac{1}{k}, 1 - \frac{1}{k} \right] = \{0\} \cup \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \cup \left[ -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right] \cup \dots = (-1, 1) \text{ offen}$$

**1.1.10 Definition von beschränkt und kompakt**

Eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  heißt:

- (i) **beschränkt** wenn  $\exists c > 0$  mit  $\|x\| < c \quad \forall x \in A$
- (ii) **kompakt**, wenn  $A$  abgeschlossen und beschränkt ist.

**1.2 Folgen****1.2.1 Definition von Konvergenz und Beschränktheit**

Eine Folge  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  heißt

- (i) **konvergent**, wenn gilt

$$\exists a \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \quad \|a_k - a\| < \varepsilon \quad \forall k \geq N(\varepsilon)$$

Dann ist  $a$  der Grenzwert der Folge:

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \quad \text{oder} \quad a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$$

- (ii) **beschränkt**, wenn  $\exists c > 0$  mit  $\|a_k\| < c \quad \forall k$

**1.2.2 Bemerkung**

Wenn eine Folge  $(a_k) = \begin{pmatrix} a_1^{(k)} \\ \vdots \\ a_n^{(k)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  konvergiert, so gilt

- (i)  $\Leftrightarrow$  jede Komponente  $a_1^{(k)}, \dots, a_n^{(k)}$  konvergiert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_i^{(k)} = a_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

(ii)  $\Leftrightarrow (a_k)$  erfüllt das **Cauchy-Kriterium**:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \quad \|a_k - a_l\| < \varepsilon \quad \forall k, l \geq N(\varepsilon)$$

(iii)  $\Leftrightarrow$  jede Teilfolge von  $(a_k)$  konvergiert gegen  $a$ :  $a_{l_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$  für  $l_1 \geq 1, l_2 \geq 2, \dots$

(iv) der Grenzwert  $a$  ist eindeutig.

### 1.2.3 Satz von Bolzano Weierstraß

Jede beschränkte Folge im  $\mathbb{R}^n$  besitzt eine konvergente Teilfolge.

#### Beispiele

(i)  $n = 1$ : Sei  $A \leq (a_k) \leq B \quad \forall k$ . Konstruiert man eine neue Schranke mit  $\frac{A+B}{2}$  so liegen wiederum  $\infty$  viele Elemente in der oberen und/oder unteren Hälfte.

(ii) Sei  $(a_k) = \begin{pmatrix} (x_k) \\ (y_k) \end{pmatrix}$  eine beschränkte Folge im  $\mathbb{R}^2$   
 $\Rightarrow (x_k), (y_k)$  sind beschränkte Folgen  
Satz von Bolzano Weierstraß  
 $\Rightarrow \exists (x_k), (y_k)$  sind konvergent

### 1.2.4 Abschließende Bemerkungen

(i) Grenzwert Rechenregeln können aus dem  $\mathbb{R}$  für  $\mathbb{R}^n$  übernommen werden.

$$\text{z.B. } a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a, \quad b_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \quad \Rightarrow \quad a_k^\top b_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a^\top b$$

(ii) Es gibt viele Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften von Folgen und den topologischen Eigenschaften von Mengen.

z.B. Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  und  $a \in \mathbb{R}^n$  ein Häufungspunkt

$$\Leftrightarrow \exists (a_k)_{k=1}^\infty \text{ mit } a_k \in A \setminus \{a\} \quad \forall k \quad \text{und} \quad a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$$

## 1.3 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

### 1.3.1 Definition

Eine Funktion  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  nennt man eine Funktion mit  $n$ -Veränderlichen.

$$f(x_1, \dots, x_n) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

### 1.3.2 Definition Grenzwert/Limes

Sei  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $a \in \overline{A}$ . Ein  $b \in \mathbb{R}^m$  heißt Grenzwert von  $f$  für  $x \rightarrow a$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \|f(x) - b\| < \varepsilon \quad \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

*Bemerkung:* Die Funktion  $f$  muss in  $a$  nicht stetig sein, so kann z.B. gelten:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq f(a)$$

### 1.3.3 Korollar

Sei  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in \overline{A}, b \in \mathbb{R}^m$  dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$
- (ii)  $\|f(x) - b\| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \in \mathbb{R}^1$  (Eine Norm bildet immer auf ein Skalar ab)
- (iii)  $f_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_1, \dots, f_m(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b_m$

Zusätzlich gilt das **Cauchy-Kriterium**:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|f(x), f(y)\| < \varepsilon \quad \forall x, y \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

### 1.3.4 Beispiel

Sei  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

$$a_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} \\ \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad f(a_k) = \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \quad \forall k$$

$$b_k = \begin{pmatrix} x_k \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad f(b_k) = \frac{0}{x_k^2} \quad \forall k$$

Da  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k)$  kann der Grenzwert nicht existieren.

### 1.3.5 Lemma Folgenkriterium

Sei  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, a \in \overline{A}$

$$\underbrace{\exists b \in \mathbb{R}^m \text{ mit } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b}_{\text{der Grenzwert } b \text{ existiert}} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{array}{l} \text{jede Folge } (x_k)_{k=1}^\infty \subset A \text{ mit } x_k \neq a \quad \forall k \text{ und } x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a \\ \Rightarrow f(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} b \end{array}}_{\text{jede beliebige Folge konvergiert gegen } b}$$

### 1.3.6 Satz zu Grenzwerte verketteter Funktionen

Sei  $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m, a \in \overline{A}, f : A \rightarrow B, g : \overline{B} \rightarrow \mathbb{R}^l$

$$\exists b \in \overline{B} \text{ mit } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \exists c \in \mathbb{R}^l \text{ mit } \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow a} \underbrace{g(f(x))}_{(g \circ f)(x)} = \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$$

### 1.3.7 Beispiel

Sei  $f(x, y) = e^{-x^2 + y^2} = \exp(g(x, y))$  mit  $g(x, y) = x^2 + y^2$ , dabei gilt:

$$\lim_{(x,y)^\top \rightarrow (0,0)^\top} g(x, y) = \lim_{(x,y)^\top \rightarrow (0,0)^\top} x^2 + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1$$

### 1.3.8 Definition der Stetigkeit

Sei  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

- (i)  $f$  ist **stetig** in  $a \in A$  wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon \quad \forall x \in U_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap A$$

*Bemerkung:* Es wird  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  gefordert.

Diese Definition unterscheidet sich in der nicht punktierten  $\varepsilon$ -Umgebung und es gilt  $f(a)$  anstatt b.

- (ii)  $f$  ist stetig auf  $A$ , wenn  $f$  in jedem Punkt  $a \in A$  stetig ist.

### 1.3.9 Bemerkung

- (i) Kompositionen stetiger Funktionen sind wieder stetig:  $f, g$  stetig  $\Rightarrow f + g, f - g, \dots$  stetig
- (ii) Das Folgenkriterium überträgt sich:  
Sei  $(a_k)_{k=1}^\infty$  eine Folge in  $A$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f(a)$
- (iii) Ist  $A$  kompakt, dann nimmt eine stetige Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  immer ein Maximum und Minimum an:

$$\exists x_m, x_M \in A \text{ mit } f(x_m) = \min_{x \in A} f(x), f(x_M) = \max_{x \in A} f(x)$$

## 1.4 Partielle Ableitungen, Richtungsableitungen

### 1.4.1 Definition der partiellen Ableitung

Die Funktion  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **partielle differenzierbar** in  $a \in A$  nach der  $k$ -ten Variable  $x_k$  mit  $k \in \{1, \dots, n\}$  wenn der folgender Grenzwert existiert:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(a) = f_{x_k}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h \cdot e_k) - f(a)}{h}$$

Existieren alle partielle Ableitungen  $f_{x_1}(a), \dots, f_{x_n}(a)$ , dann ist der **Gradient** von  $f$  wie folgt definiert:

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(a) \\ \vdots \\ f_{x_n}(a) \end{pmatrix}$$

und die Funktion  $f$  heißt mindestens einmal partielle differenzierbar. Sind die partiellen Ableitungen  $f_{x_1}(a), \dots, f_{x_n}(a)$  zudem stetig, so heißt  $f$  einmal stetig differenzierbar:  $f \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$  oder kurz  $f \in C^1(A)$ .

### 1.4.2 Beispiel

Sei  $f(x, y, z) = x^2 - xy + 3z$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h)y + 3z - (x^2 - xy + 3z)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} - \frac{(x+h)y - xy}{h} + \frac{3z - 3z}{h} \\
 &= \left( \frac{d}{dx} x^2 \right) - \left( \frac{d}{dx} x \right) y + \left( \frac{d}{dx} 0 \right) z \\
 &= 2x - y + 0 \\
 \Rightarrow \nabla f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x \\ 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

### 1.4.3 Definition der Richtungsableitung

Sei  $a, r \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|r\| = 1$  (normiert),  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dann heißt der folgende Grenzwert die Richtungsableitung von  $f$  bei  $a$  in Richtung  $r$ :

$$\frac{\partial}{\partial r} f(a) = f_r(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h \cdot r) - f(a)}{h}$$

#### Bemerkung

- (i) Ist  $r = e_k$ , dann erhalten wir gerade eine partielle Ableitung.
- (ii) Es gibt Funktionen die in  $a$  in jede Richtung differenzierbar sind, aber in  $a$  nicht stetig sind!

## 1.5 Total Differenzierbarkeit

*Idee:* Differenzierbare Funktionen sind lokal im Punkt  $x_0$  linear approximierbar:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{r(x)\|x - x_0\|}_{\tilde{r}(x)}$$

Dabei muss der Fehler  $\tilde{r}(x) = r(x)\|x - x_0\|$  *schneller gegen Null gehen als  $x$  gegen  $x_0$*  also muss  $\tilde{r}(x) = o(x - x_0)$  gelten (Landau-Notation: klein-oh).

### 1.5.1 Definition der totalen Differenzierbarkeit

Sei  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $A$  offen,  $x_0 \in A$

- (i) Die Funktion  $f$  nennt man **total differenzierbar** bei  $x_0$ , wenn eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  existiert, mit der sich die Funktion  $f$  in einer  $\varepsilon$ -Umgebung um  $x_0$  mittels einer Hyperebene approximieren lässt:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|$$

Dann nennt man die Matrix  $A = f'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0)$  die total Ableitung von  $f$  in  $x_0$ .



(ii) Ist  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$  partiell diff'bar, so nennt man die Ableitung **Jacobi-Matrix**:

$$f'(x_0) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0) = J_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(x_0) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

*Bemerkung:* Es gilt:  $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = J_f(x_0)$ , nicht aber die Gegenrichtung! Es kann also sein, dass die Jacobi-Matrix  $J_f$  existiert die Funktion aber nicht total diff'bar ist.

### 1.5.2 Beispiele

(i)

$$f(r, \varphi) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow J_f = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad f(x) = a + b^\top (x - x_0), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b, x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow f(x_0) = a, \quad f'(x_0) = b^\top$$

$$(iii) \quad f(x) = a + A(x - x_0), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad a \in \mathbb{R}^m, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow f(x_0) = a, \quad f'(x_0) = A$$

*Bemerkung:* Beispiel (ii) und (iii) sind lineare Funktionen.

### 1.5.3 Satz

Ist  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  in jedem Punkt  $x_0 \in A$  total differenzierbar, so ist  $f$  stetig in  $A$ .

**Beweis:**

$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \rightarrow f(x_0)}} + \underbrace{A(x - x_0)}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^n}} + \underbrace{r(x)}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \rightarrow 0 \in \mathbb{R}^m}} \underbrace{\|x - x_0\|}_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \rightarrow 0 \in \mathbb{R}}} \quad \text{mit } r(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(x_0) \quad \square$$

### 1.5.4 Satz

Sei  $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x_0 \in A$

a. Ist  $f$  total differenzierbar in  $x_0$ , so gilt

$$(i) \quad f'(x_0) = J_f(x_0)$$

$$(ii) \quad f \text{ ist in jede Richtung } r \text{ differenzierbar mit: } \frac{\partial}{\partial r} f(x_0) = J_f(x_0) \cdot r$$

**Beweis:** Es ist zu zeigen, dass wenn  $f$  differenzierbar in  $x_0$  die Ableitung gerade die Form  $\frac{\partial}{\partial r} f(x_0) = J_f(x_0) \cdot r$  besitzt. Für diese Ableitung muss folgendes gelten:

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \tilde{r}(x) \text{ mit } A = f'(x_0) \text{ und } \tilde{r} \in o(\|x - x_0\|) \Rightarrow \frac{\tilde{r}(x)}{\|x - x_0\|} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

$$f(x) = f(x_0 + r \cdot h) \Leftrightarrow f(x_0 + r \cdot h) - f(x_0) = A \cdot r \cdot h + \tilde{r}(x) = f'(x_0)rh + \tilde{r}(x)$$

also muss folgendes gezeigt werden:

$$\begin{aligned} & \left\| \underbrace{\frac{f(x_0 + r \cdot h) - f(x_0)}{h}}_{\text{Diff'Quotient für } \frac{\partial f}{\partial r}} - \underbrace{f'(x_0) \cdot r}_{\text{Grenzwert-kandidat}} \right\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ & \left\| \frac{f(x_0 + r \cdot h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \cdot r \right\| = \left\| \frac{f'(x_0)rh + \tilde{r}(x)}{h} - f'(x_0)r \right\| = \\ & \left\| \frac{f'(x_0)r}{h} \cdot h + \frac{\tilde{r}(x)}{h} - f'(x_0)r \right\| = \left\| \frac{\tilde{r}(x)}{h} \right\| = \left\| \frac{\tilde{r}(x)}{x - x_0} \right\| \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{aligned}$$

Ist  $r = e_k$  so erhält man gerade eine Spalte der Jacobi-Matrix.

- b. Existieren in  $x_0$  alle partiellen Ableitungen (also alle Komponenten der Jacobi-Matrix) und diese stetig sind  $\Rightarrow f$  ist in  $x_0$  total differenzierbar.

**Beweis:** Für den Fall  $n = 2, m = 1$  muss folgendes gezeigt werden:

$$\begin{aligned} & \exists \nabla f(x_0) \text{ und } \tilde{r}(x) \text{ mit } f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top (x - x_0) + \tilde{r}(x) \\ \text{oder } & \left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \nabla f(x_0) \right\| = \frac{\|f(x) - f(x_0) - \nabla f(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \end{aligned}$$

Sei  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  und sei  $x_0 = a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ .

Nebenrechnung: Definition zweier Hilfsfunktionen  $g_1, g_2$ :

$$\begin{aligned} & \text{Sei } g_1(t) = f(t, x_2) \quad g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & \xrightarrow{\text{MWS}} \exists \xi_1 \in (a_1, x_1) \text{ mit } g'_1(\xi_1) = \frac{g_1(x_1) - g_1(a_1)}{x_1 - a_1} \\ & = \frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2)}{x_1 - a_1} \\ & \Leftrightarrow f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi_1, x_2)(x_1 - a_1) \\ & \text{analog gilt für } g_2(t) = f(a_1, t) \quad g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ & f(a_1, a_2) - f(a_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} f(a_1, \xi_2)(x_2 - a_2) \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$f(x) - f(a) = f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) = f(x_1, x_2) - \underbrace{f(a_1, x_2) + f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2)}_{=0}$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{\text{mit Resultat aus Nebenrechnung}}{=} \frac{\partial}{\partial x_1} f(\xi_1, x_2)(x_1 - a_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} f(a_1, \xi_2)(x_2 - a_2) \\ &= \begin{pmatrix} f_{x_1}(\xi_1, x_2) \\ f_{x_2}(a_1, \xi_2) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\xi_1, x_2) \\ f_{x_2}(a_1, \xi_2) \end{pmatrix}^\top (x - a) \end{aligned}$$

Für  $x \rightarrow a$  gilt:

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow a_1 & x_2 &\rightarrow a_2 \\ \xi_1 &\rightarrow a_1 & \xi_2 &\rightarrow a_2 \end{aligned}$$

da  $f_{x_1}, f_{x_2}$  stetig, folgt:

$$\begin{aligned} f_{x_1}(\xi_1, x_2) &\rightarrow f_{x_1}(a_1, a_2) \\ f_{x_2}(a_1, \xi_2) &\rightarrow f_{x_2}(a_1, a_2) \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} f_{x_1}(\xi_1, x_2) \\ f_{x_2}(a_1, \xi_2) \end{pmatrix}^\top &\rightarrow \nabla f(a_1, a_2) = \nabla f(x_0) \end{aligned}$$

und es gilt:

$$\frac{\left\| f(x) - f(x_0) - \overbrace{\begin{pmatrix} f_{x_1}(\xi_1, x_2) \\ f_{x_2}(a_1, \xi_2) \end{pmatrix}^\top}^{x \rightarrow x_0 \nabla f(x_0)} (x - x_0) \right\|}{\|x - x_0\|} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$$

### 1.5.5 Bemerkung

Sei  $r$  eine Richtung mit  $\|r\| = 1$  und  $x = x_0 + r$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top \cdot r \\ \Rightarrow 1. \text{ Fall : } & r, \nabla f(x_0) \text{ zeigen in dieselbe Richtung :} \\ & f(x) - f(x_0) \approx \|\nabla f(x_0)\| \|r\| = \|\nabla f(x_0)\| > 0 \\ \Rightarrow 2. \text{ Fall : } & r, \nabla f(x_0) \text{ zeigen in entgegengesetzte Richtungen :} \\ & f(x) - f(x_0) \approx -\|\nabla f(x_0)\| < 0 \end{aligned}$$

In allen Fällen gilt Näherungsweise:

$$-\|\nabla f(x_0)\| < \nabla f(x_0)^\top r \leq \|\nabla f(x_0)\|$$

*Fazit:* Beim Reinzoomen sind die Höhenlinien parallel. Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstieges.

### 1.5.6 Satz zur Kettenregel

Ist  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $a \in A$  und  $g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  differenzierbar in  $b \in B$ , so gilt:

$$(g \circ f)'(a) = g' \left( \underbrace{f(a)}_{=b} \right) f'(a) = \underbrace{J_g(b)}_{\in \mathbb{R}^{l \times m}} \underbrace{J_f(a)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

**Beispiel aus der Strömungsmechanik:** Die Funktion  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}, f = f(x, y, z, t)$  beschreibe die Eigenschaften eines Teilchens in einer Strömung. Dabei kann die Bewegung der Position im Raum  $x, y, z$  als Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden. Dazu definieren wir den Weg  $\gamma(t)$ :

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \frac{d\gamma}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun leiten wir die verkettete Funktion  $\hat{f}(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(t))$  nach der Zeit  $t$  ab:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{f}}{dt} &= \left( \hat{f}(\gamma(t)) \right)' = f'(\gamma(t)) \gamma'(t) = \nabla f \cdot \frac{d\gamma}{dt} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_u + \frac{\partial f}{\partial y} \underbrace{\frac{dy}{dt}}_v + \frac{\partial f}{\partial z} \underbrace{\frac{dz}{dt}}_w + \frac{\partial f}{\partial t} \end{aligned}$$

Dabei beschreibt der Vektor  $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$  die Geschwindigkeit im Raum.

## 1.6 Lokale Extremstellen und Mittelwertsätze

In einer Dimension gilt:

### 1. Mittelwertsatz

Ist  $f$  differenzierbar auf  $(a, b)$  und stetig auf  $[a, b]$ , so gilt:

$$\exists \xi \in (a, b) \text{ mit } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

### Satz von Rolle

Ist  $f$  differenzierbar auf  $(a, b)$  und stetig auf  $[a, b]$  und gilt  $f(a) = f(b)$ , so gilt:

$$\exists \xi \in (a, b) \text{ mit } f'(\xi) = 0$$

### 1.6.1 Definition lokale/globale Extremstellen

- (i) Eine Funktion  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (Skalarfeld) hat bei  $x_0 \in A$  ein lokales Minimum (Maximum) wenn in einer Umgebung  $U = U_\varepsilon(x_0) \cap A$  für  $\varepsilon > 0$  (offen bezüglich  $A$ ) von  $x_0$  gilt:

$$f(x_0) \stackrel{(\geq)}{\leq} f(x) \quad \forall x \in U$$

Ist bei  $x_0$  ein lokales Minimum (Maximum) dann nennt man  $x_0$  eine lokale Extremstelle.

- (ii)  $f$  besitzt in  $x_0$  ein globales Minimum (Maximum), wenn gilt:

$$f(x_0) \stackrel{(\geq)}{\leq} f(x) \quad \forall x \in A$$

### 1.6.2 Satz zur notwendigen Bedingung für eine lokale Extremstelle

Besitzt  $f : \overset{\circ}{A} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bei  $x_0 \in A$  eine lokale Extremstelle und  $f$  ist partiell differenzierbar, dann ist

$$\nabla f(x_0) = 0$$

*Bemerkung:* Der Rand ist ausgeschlossen da  $\overset{\circ}{A}$  (alle inneren Punkte) in der Definition verwendet wurde.

Auch gilt:

$$x_0 \text{ ist eine lokale Extremstelle} \not\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Aus  $f'(x_0)$  folgt nicht direkt die Extremstelle, denn Sattelpunkte sind keine Extremstellen.

**Beweis:** ...

### 1.6.3 Definition des kritischen Punktes

Ein  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\nabla f(x_0) = 0$  heißt **kritischer** oder stationärer Punkt.

### 1.6.4 Mittelwertsatz

Sei  $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und sei  $G$  offen und enthalte die Menge  $\overline{a, b} = \{a, b \in G \text{ mit } a + t(b - a) : t \in [0, 1]\}$  ( $a, b$  können durch eine Gerade verbunden werden). Dann:

$$\exists \xi \in (0, 1) \quad \text{mit} \quad f(b) = f(a) + \nabla f(a + \xi(b - a))^\top (b - a)$$

*Bemerkung:*

$$\begin{aligned} h(t) &= a + t(b - a) & g(t) &= f(h(t)) \quad (\text{differenzierbar}) \\ \Rightarrow \exists \xi \in (0, 1) & \quad \text{mit} \quad g'(\xi) &= \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} \end{aligned}$$

**Beweis:** Definiere  $h(t) = a + t(b - a)$  und  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = f(h(t))$  differenzierbar, damit gilt:

$$\begin{aligned} \exists \xi \in (0, 1) \quad \text{mit} \quad g'(\xi) &= \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g(1) - g(0) = f(a) - f(b) \\ g'(\xi) &= \frac{d}{dt} g(t)|_{t=\xi} = \frac{d}{dt} f(h(t))|_{t=\xi} \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} f'(h(t))h'(t)|_{t=\xi} \\ &= \nabla f(a + \xi(b - a))^\top (b - a) = f(a) - f(b) \\ \Leftrightarrow f(b) &= f(a) + \nabla f(a + \xi(b - a))^\top (b - a) \end{aligned}$$

### 1.6.5 Definition eines Gebiets

(i) Eine Menge, die wie folgt konstruiert werden kann, heißt **Polygonzug**:

$$\overline{a_0, \dots, a_k} = \bigcup_{j=1}^k \overline{a_{j-1}, a_j} \quad \text{mit} \quad a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$$

- (ii) Eine Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt **kurvenweise zusammenhängend** wenn zu beliebigen  $a, b \in M$  eine stetige Funktion  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  mit  $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$  existiert.
- (iii) Eine Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$  heißt **Gebiet**, wenn  $G$  offen und kurvenweise zusammenhängend ist.

### 1.6.6 Bemerkungen zu Gebieten

- (i) Ein Gebiet  $G$  entspricht einem offenen Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  im Eindimensionalen: Der Rand ist nicht dabei, es hat keine Inseln.
- (ii) Man kann zeigen, dass es reicht, wenn  $a, b \in G$  mit einem Polygonzug verbunden werden kann.

### 1.6.7 Satz

Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $G \neq \emptyset$ , und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, dann gilt:

$$f(x) = \text{konst.} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f(x) = 0 \quad \forall x \in G$$

**Beweis:** ...

### 1.6.8 Definition partieller Ableitungen $r$ 'ter Ordnung

Für  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definiert man (wenn diese auch existieren) induktiv für  $x_0 \in A$  und  $k_1, \dots, k_r \in \{1, \dots, n\}$  die partiellen Ableitungen  $r$ 'ter Ordnung als:

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_r}} f(x_0) = f_{x_{k_1} \dots x_{k_r}} = \begin{cases} f(x_0) & r = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} f(x_0) & r = 1 \\ \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \left( \frac{\partial^{r-1}}{\partial x_{k_2} \dots \partial x_{k_r}} f(x_0) \right) & r > 1 \end{cases}$$

Existieren alle Ableitungen  $r$ 'ter Ordnung und sind diese zudem stetig, so nennt man die Funktion  $f$   $r$ -mal stetig differenzierbar:  $f \in C^r(A; \mathbb{R}^m)$ .

### 1.6.9 Definition der Hessematrix

Ist  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  2-mal stetig differenzierbar bei  $x_0 \in A$ , dann ist die **Hessematrix** wie folgt definiert:

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} f_{x_1, x_1}(x_0) & \dots & f_{x_1, x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_m, x_1}(x_0) & \dots & f_{x_m, x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

### 1.6.10 Beispiele

(i)

$$f(x, y) = 2xy^3 + y \log x$$

(ii)

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Hessematrix ist nicht symmetrisch.

(iii)  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}, Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 

$$Q(x) = x^\top A x + b^\top x + c$$

$$\begin{aligned} \nabla Q(x) &= (A + A^\top) x + b \quad \overbrace{(\quad)}^{\text{wenn } A \text{ sym.}} (= 2Ax + b) \\ H_Q(x) &= A + A^\top \quad \underbrace{(\quad)}_{\text{wenn } A \text{ sym.}} (= 2A) \end{aligned}$$

$Q$  wird eine quadratische Funktion genannt.

### 1.6.11 Satz von Schwarz

Ist  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in  $x_0$  2-mal stetig partielle differenzierbar ( $f \in C^2(A)$ ), dann ist  $H_f(x_0) \quad \forall x_0 \in A$  symmetrisch und es gilt:

$$f_{x_l, x_k}(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_l \partial x_k} f(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_k \partial x_l} f(x_0) = f_{x_k, x_l}(x_0) \quad \forall l, k \in \{1, \dots, k\}$$

### 1.6.12 Satz von Taylor mit quadratischem Restglied

Seien  $a, b \in G \subset \mathbb{R}^n, f \in C^2(G), G$  ein Gebiet, dann:

$$\exists \xi \in \overline{a, b} \quad \text{mit} \quad f(b) = f(a) + \nabla f(a)^\top (b - a) + \frac{1}{2} (b - a)^\top H_f(\xi) (b - a)$$

**Beweis:** Definiere  $g(t) = f(h(t))$  mit  $h(t) = a + t(b - a) \Rightarrow g(0) = f(a), g(1) = f(b)$ . Bei Funktionen mit einem Skalar, gilt der eindimensionale Taylor mit einer Zwi-

schenstelle  $z \in [0, 1]$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{g(1)}_{f(b)} &= \underbrace{g(0)}_{f(a)} + \underbrace{g'(0)(1-0)}_{\substack{g'(t)=\frac{d}{dt}f(h(t)) \\ =f'(h(t))h'(t) \\ =\nabla f(a+t(b-a))^\top(b-a) \\ =(b-a)^\top \nabla f(a+t(b-a))}} + \underbrace{\frac{1}{2}g''(z)(1-0)^2}_{g''(t)=\dots=(b-a)^\top H_f(a+t(b-a))(b-a)} \\ &= f(a) + \nabla f(a)^\top (b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^\top H_f(\underbrace{\xi}_{\xi=a+t(b-a)})(b-a) \end{aligned}$$

### 1.6.13 Definition von Definitheit

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch ( $A = A^\top$ ):

- Die durch  $Q_A(x) = x^\top A x$  definierte Funktion  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt quadratische Form von  $A$ .
- Die Matrix  $A$  und ihre quadratische Form  $Q_A$  heißen:

- positiv definit**, wenn

$$Q_A(x) = x^\top A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x \neq 0$$

**negativ definit**, wenn

$$Q_A(x) = x^\top A x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x \neq 0$$

oder kurz **definit** falls die Matrix  $A$  positiv oder negativ definit ist.

- semi definit** falls die Matrix  $A$  positiv semi definit oder (negativ semi definit) ist:

$$Q_A(x) = x^\top A x \stackrel{(\leq)}{\geq} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } x \neq 0$$

- indefinit**, wenn ein  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  existieren mit:

$$\underbrace{x_1^\top A x_1}_{Q_A(x_1)} < 0 \quad \text{und} \quad \underbrace{x_2^\top A x_2}_{Q_A(x_2)} > 0$$

### 1.6.14 Beispiele

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$



$$(v) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$(vi) \quad A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

$$(vii) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

### 1.6.15 Satz zum Hauptminorenkriterium

Sei  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch,

dann ist der  $k$ 'te Hauptminor definiert als:  $D_k = \det \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}}_{k \times k \text{ Teilmatrix oben links}}$

Für die Hauptminoren  $D_1, \dots, D_n$  gilt:

- a.  $A$  ist positiv definit  $\Leftrightarrow D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$  alle Hauptminoren sind positiv
- b.  $A$  ist negativ definit  $\Leftrightarrow D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0, \dots$  oder  $D_k = \begin{cases} < 0 & k \text{ ungerade} \\ > 0 & k \text{ gerade} \end{cases}$
- c. (i)  $D_k < 0$  mit  $k$  gerade  $\Rightarrow A$  ist indefinit  
 (ii)  $D_k < 0 < D_l$  mit  $k, l$  ungerade  $\Rightarrow A$  ist indefinit

### Beispiele

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(iii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### 1.6.16 Satz über die hinreichenden Bedingungen für lokale Extremstellen

Sei  $f \in C^2(U)$  in einer Umgebung  $U$  um  $x_0$  und gilt  $\nabla f(x_0) = 0$  sowie:

- (i)  $H_f(x_0)$  ist positiv definit  $\Rightarrow x_0$  ist eine lokale Minimalstelle.
- (ii)  $H_f(x_0)$  ist negativ definit  $\Rightarrow x_0$  ist eine lokale Maximalstelle.

**Beweis:** o.B.d.A nur für (i), denn (ii) folgt analog mit gedrehtem Ungleichungszeichen.

Sei  $U = U_\varepsilon(x_0)$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung um den Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ :

Sei  $f \in C^2(U) \Rightarrow H_f \in C^2(U, \mathbb{R}^{n \times n})$  mit allen Komponenten stetig  
 $\Rightarrow \tilde{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{g}(x) = (x - x_0)^\top H_f(x)(x - x_0)$  ist stetig  
 $\Rightarrow g(x) = (x - x_0)^\top H_f(h(x))(x - x_0)$  ist stetig  
 ist  $H_f(x_0)$  pos. def.  $\Rightarrow (x - x_0)^\top H_f(x_0)(x - x_0) > 0$  für  $x \neq x_0$   
 $\Rightarrow (x - x_0)^\top H_f(h(x_0))(x - x_0) > 0$  falls  $z(x_0)$  nahe genug bei  $x_0$

Sei  $h(x_0) = x_0 + \xi(x - x_0)$  dann gilt:

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\underbrace{\nabla f(x_0)^\top (x - x_0)}_{=0}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - x_0)^\top \underbrace{H_f(x_0 + \xi(x - x_0))}_{\text{pos. def. in } U_\varepsilon(x_0)}(x - x_0)}_{>0 \ \forall x \in U_\varepsilon(x_0)} \geq f(x_0)$$

### 1.6.17 Definition der Sattelpunkte

Sei  $U = U_\varepsilon(x_0), f \in C^2(U), \nabla f(x_0) = 0, H_f(x_0)$  indefinit, dann besitzt die Funktion  $f$  bei  $x_0$  einen **Sattelpunkt**.

*Bemerkung:*  $\forall \varepsilon > 0$  gilt:

$$\exists x_1, x_2 \in U_\varepsilon(x_0) \text{ mit } f(x_1) > f(x_0) \text{ und } f(x_2) < f(x_0)$$

### 1.6.18 Satz für den Fall $n = 2$

Ist  $f \in C^2(U)$  für eine Umgebung  $U$  von  $x_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  gilt weiter  $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ , dann ist  $x_0$ :

- (i) eine lokale **Minimalstelle**, wenn  
 $f_{xx}(a, b) > 0$  (erster Hauptminor  $D_1$ ) und  
 $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - 2(f_{xy}(a, b))^2 > 0$  (zweiter Hauptminor  $D_2$ )
- (ii) eine lokale **Maximalstelle**, wenn  
 $f_{xx}(a, b) < 0$  (erster Hauptminor  $D_1$ ) und  
 $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - 2(f_{xy}(a, b))^2 > 0$  (zweiter Hauptminor  $D_2$ )
- (iii) ein **Sattelpunkt**, wenn  
 $f_{xx}(a, b) < 0$  (erster Hauptminor  $D_1$ ) oder  
 $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - 2(f_{xy}(a, b))^2 < 0$  (zweiter Hauptminor  $D_2$ )

### 1.6.19 Beispiel

Sei  $f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 - \cos z \in C^2(\mathbb{R}^2)$ :

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \\ \sin z \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

## 1.7 Extremstellen unter Nebenbedingungen und implizite Funktionen

*Bisher:* Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen:  $\begin{cases} f(x, y) \rightarrow \min \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$

Lösbar in drei Schritten:

1. lokale Minimalstellen bestimmen
2. untersuche  $f(x, y)$  für  $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \rightarrow \infty$
3. vergleiche die Resultate aus 1. und 2.

*Bemerkung:* aus  $f(x, y) \rightarrow \min$  wird  $-f(x, y) \rightarrow \max$  darum reicht es o.B.d.A. denn Fall  $\rightarrow \min$  zu betrachten.

*Jetzt:* Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen:  $\begin{cases} f(x, y) \rightarrow \min \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A \subset \mathbb{R}^2 \end{cases}$

Es ist bekannt, dass wenn  $f \in C(A)$  und  $A \neq \emptyset$  kompakt (abgeschlossen und beschränkt) dann existiert sicher eine Lösung (Satz von Weierstraß:  $f$  stetig und  $A$  kompakt  $\Rightarrow$  es wird ein Minimum (Maximum) angenommen).

Es sind zwei Fälle möglich:

- (i) globale Minimalstelle liegt in  $\overset{\circ}{A}$  (im Inneren)
- (ii) globale Minimalstelle liegt in  $\partial A$  (auf dem Rand)

Wenn zusätzlich  $f \in C^2(A)$  gilt, kann die Minimalstelle wie folgt gefunden werden:

1. bestimme lokale Minimalstellen mit  $\nabla f(x_0) = 0$  und  $H_f(x_0)$  positiv definit in  $\overset{\circ}{A}$
2. bestimme lokale Minimalstelle in  $\partial A$

*Bemerkung:* Eckpunkte müssen gesondert betrachtet werden, denn die Funktion kann an diesen Stellen nicht differenzierbar sein.

3. wähle das Minimum aus 1. und 2.

### Wiederholung im Eindimensionalen

Eine Funktion  $f : X$  (Definitionsbereich)  $\rightarrow Y$  (Bildbereich) ist:

- (i) **injektiv**, wenn

$$x_1, x_2 \in X \text{ mit } x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

*Bemerkung:* Von zwei verschiedenen Punkten aus dem Definitionsbereich darf nicht auf den gleichen Punkt im Bildbereich abgebildet werden.

- (ii) **surjektiv**, wenn

$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad \text{mit} \quad f(x) = y$$

*Bemerkung:* Für alle Bildpunkte existiert ein Punkt im Definitionsbereich.

- (iii) **bijektiv**, wenn die Funktion  $f$  injektiv und surjektiv ist.

**Beispiel**

Sei  $d : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$  eine Funktion mit  $f \mapsto f'$  (Ableitungsoperator für alle einmal stetig differenzierbaren Funktionen). Für diese Funktion  $d$  gilt:

- (i)  $d$  ist nicht injektiv da:  
Seien  $f_1(x) = x, f_2(x) = x + 1$  zwei Funktionen aus  $C^1(\mathbb{R})$ . Für diese gilt:  $f_1 \neq f_2$  aber  $d(f_1) = f'_1 = 1 = f'_2 = d(f_2)$ .
- (ii)  $d$  ist surjektiv, denn nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung gilt:  
Alle stetigen Funktionen besitzen eine Stammfunktion.

**1.7.1 Spezialfälle**

- (i)  $f$  ist linear und  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m : f(x) = Ax$  mit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   
Im Fall  $m = n$  gilt:  $f$  ist bijektiv  $\Leftrightarrow A$  ist invertierbar.
- (ii) Allgemeinerer Fall z.B.  $f : [0, \infty) \times [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 : f(r, \varphi) = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$   
 $f$  ist surjektiv aber nicht injektiv, denn  $f(0, \varphi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \varphi \in [-\pi, \pi)$

**1.7.2 Bemerkung**

a. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i)  $A$  ist invertierbar (oder regulär oder nicht singulär)
- (ii)  $Ax = b$  besitzt  $\forall b \in \mathbb{R}^n$  eine eindeutige Lösung  $x \in \mathbb{R}^n$
- (iii)  $\det A \neq 0$

b. Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $x_0 \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$  mit  $\det A \neq 0$   
Die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  kann durch Äquivalenzumformungen gebildet werden:

$$\begin{aligned} f(x_0) + A(x - x_0) &\stackrel{!}{=} y \\ \Leftrightarrow A(x - x_0) &= y - f(x_0) \\ \Leftrightarrow x - x_0 &= A^{-1}(y - f(x_0)) \\ \Leftrightarrow x &= x_0 + A^{-1}(y - f(x_0)) = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt:  $\frac{\partial}{\partial y} f^{-1}(y) = A^{-1}$

*Kommentar:* Differenzierbare Funktionen sind in einer hinreichend kleinen  $\varepsilon$ -Umgebung im Prinzip linear (nicht ganz korrekt, aber sehr anschaulich).

**1.7.3 Satz über die Umkehrfunktion**

Sei  $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$  mit  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $x_0 \in G$  mit  $\det f'(x_0) = \det J_f(x_0) \neq 0$ . Dann gilt in einer geeigneten offenen Umgebung  $U$  um  $x_0$ , dass

- (i)  $V = f(U)$  ist offen (das Bild  $V$  von  $U$  ist offen) und  $\det f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$
- (ii)  $f : U \rightarrow V$  ist bijektiv, das heißt:  $\exists f^{-1} : V \rightarrow U$  (die Funktion ist lokal invertierbar)

**Beweisidee:** Da  $f$  stetig differenzierbar ist, gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\| \text{ mit } r(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \\ &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &= f(x_0) + A(x - x_0) \text{ mit } \det A \neq 0 \end{aligned}$$

Wenn  $\approx$  ein  $=$  wäre so könnte die Umkehrfunktion  $f^{-1}(y)$  einfach durch Äquivalenzumformungen bestimmt werden

$\Rightarrow$  In einer hinreichend kleinen  $\varepsilon$ -Umgebung kann  $\approx$  als  $=$  angenommen werden.

$$(iii) \quad (f^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad J_{f^{-1}}(y) = J_f^{-1}(f^{-1}(y))$$

**Beweisidee:** Wenn  $f^{-1} : V \rightarrow U$  existiert, dann ist  $f^{-1}$  auch stetig diff'bar.  
Beispielskizze aus dem Eindimensionalen:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad \exists f^{-1}(y) = \log y \\ \Rightarrow \quad y &= f(f^{-1}(y)) \\ \xRightarrow{\text{Ableiten mit Kettenregel}} \quad 1 &= f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) \\ \Rightarrow \quad (f^{-1})'(y) &= \log' y = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Beispiel übertragen auf den allgemeinen mehrdimensionalen Fall:

$$\begin{aligned} y &= f(f^{-1}(y)) \\ \xRightarrow{\text{Ableiten mit Kettenregel}} \quad 1 &= \underbrace{f'(f^{-1}(y))}_{J_{f'}(f^{-1}(y))} \cdot \frac{d}{dy} f^{-1}(y) \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dy} f^{-1}(y) &= (f'(f^{-1}(y)))^{-1} \end{aligned}$$

#### 1.7.4 Polarkoordinaten

...

#### 1.7.5 Beispiel

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ mit } f(x, y) = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f'(x, y) = J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det J_f \neq 0$$

Direktes Bestimmen der Umkehrfunktion (im Allgemeinen will man dies vermeiden):

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &\stackrel{!}{=} f(x, y) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ 2y \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow v = 2y \Leftrightarrow y = \frac{v}{2} \\
 &\Rightarrow u = x - \left(\frac{v}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = u + \frac{v^2}{4} \\
 &\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{v^2}{4} \\ \frac{v}{2} \end{pmatrix} = f^{-1}(u, v)
 \end{aligned}$$

Damit gilt für die Ableitung der Umkehrfunktion:

$$(f^{-1}(u, v))' = J_{f^{-1}}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Alternativ mit dem Satz über die Umkehrfunktion:

$$(f^{-1})'(u, v) = (f'(f^{-1}(u, v)))^{-1} = J_f^{-1}\left(u + \frac{v^2}{4}, \frac{v}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -v \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \stackrel{\text{Inv. mit Gauß best.}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

### 1.7.6 Kugelkoordinaten

Sei  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

### 1.7.7 Korollar: Gebietstreue

Ist  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen und sei  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion mit  $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$ , dann ist  $f(G)$  offen. Ist  $G$  außerdem ein Gebiet, so ist  $f(G)$  auch ein Gebiet.

*Fazit:* Für  $f^{-1}$  kann man  $\tilde{G} = f(G)$  definieren und  $f^{-1}: \tilde{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  betrachten. Dabei hat  $\tilde{G}$  die gleichen Eigenschaften wie  $G$ .

### 1.7.8 Definition impliziter Funktionen

Sei  $g: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $n, m \in \mathbb{N}$  eine Funktion und sei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ konstant}$$

Man betrachte die Gleichung

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

und sagt

- a. die Funktion  $g$  ist bei  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  **lokal nach  $y$  auflösbar**, wenn eine Funktion  $f$  in der Umgebung von  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  existiert mit:
- (i)  $f(x_0) = y_0$  und
  - (ii)  $g(x, f(x)) = b$
- b.  $g$  ist auf  $A \subset \mathbb{R}^n$  **global nach  $y$  auflösbar**, wenn eine Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$
- (i) existiert und
  - (ii)  $g(x, f(x)) = b \quad \forall x \in A$  gilt
- c. analog gilt die Definition für auflösbar nach  $x$  mit  $g(f(y), y)$

### 1.7.9 Beispiel Einheitskreis

Sei  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (also  $m = n = 1$ ) mit  $g(x, y) = x^2 + y^2$  und  $b = 1$ . Die Funktion  $g$  ist auflösbar bei  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ , wenn  $x_0 \neq 0$  (denn  $y_0^2 = 1$  hat zwei Lösungen) gilt:

$$\text{Fall } y_0 > 0 : \quad f_{>0}(x) = y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\text{Fall } y_0 < 0 : \quad f_{<0}(x) = y = -\sqrt{1 - x^2}$$

### 1.7.10 Hauptsatz über implizite Funktionen

Seien  $x_0 \in \mathbb{R}^n, y, b \in \mathbb{R}^m$  für eine offene Umgebung  $G$  um  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  und sei  $g \in C^1(G; \mathbb{R}^m)$  (stetig diff'bar). Gilt weiter  $g(x_0, y_0) = b$  und  $\det g_y(x_0, y_0) \neq 0$  so existiert eine offene Umgebung  $U_0$  von  $x_0$  und  $V_0$  von  $y_0$ , so dass gilt:

- (i)  $\det g_y(x, y) \neq 0 \quad \forall x \in X_0, \forall y \in Y_0$
- (ii) die Gleichung  $g(x, y) = b$  besitzt eine **eindeutig bestimmte Auflösung**:  
 $f : U_0 \rightarrow V_0$  nach  $y$  mit  $f(x_0) = y_0$  und  $g(x, f(x)) = b \quad \forall x \in U_0$   
 außerdem ist diese Funktion  $f$  differenzierbar und es gilt:  
 $f'(x) = -(g_y(x_0, f(x_0)))^{-1} g_x(x_0, f(x_0)) = -(g_y(x_0, y_0))^{-1} g_x(x_0, y_0)$
- (iii) ist  $g \in C^r(G; \mathbb{R}^m)$  mit  $r \geq 2$  so ist  $f \in C^r(U_0; \mathbb{R}^m)$  und die höheren Ableitungen werden durch weiteres ableiten von  $f'$  in (ii) bestimmt.

*Bemerkung:*

$$g : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{mit} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$(x, y) \mapsto g(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ \vdots \\ g_m(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \end{pmatrix}$$

$$g' = \frac{\partial}{\partial(x, y)} = J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_1 & \frac{\partial}{\partial y_1} g_1 & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_m} g_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_m & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} g_m & \frac{\partial}{\partial y_1} g_m & \cdots & \frac{\partial}{\partial y_m} g_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n+m)}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g & \frac{\partial}{\partial y} g \end{pmatrix}$$

**Beweisidee:** Im Spezialfall, dass die Funktion  $g$  linear ist gilt:  $g(x, y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Dabei besteht die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times (m+n)}$  aus zwei Teilmatrizen  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$  also gilt:

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Xx + Yy \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial x} g = X, \quad \frac{\partial}{\partial y} g = Y$$

Ist die Funktion  $g$  differenzierbar, so ist sie in einer hinreichend kleinen Umgebung näherungsweise linear, also gilt:

$$\begin{aligned} g(x, y) = b &\Leftrightarrow Xx + Yy = b \\ &\Leftrightarrow Yy = b - Xx \stackrel{\det Y \neq 0}{=} y = Y^{-1}(b - Xx) = Y^{-1}b - Y^{-1}Xx = f(x) \\ &\Rightarrow f'(x) = -Y^{-1}X = -(g_y)^{-1}g_x \end{aligned}$$

**Bemerkung:** für den Fall  $m = n = 1$

Es gilt  $g(x, f(x)) = b$  für  $x \in U_0$  mit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  konstant

Setze  $h(x) = g(x, f(x))$  mit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  also muss  $h(x) = b, \forall x \in U_0$  gelten. Da  $b$  konstant ist, gilt für die Ableitung  $h'(x) = 0$ .

$$\begin{aligned} h'(x) &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} g'(x, f(x)) \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}' = \nabla g(x, f(x))^\top \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_x(x, f(x)) & g_y(x, f(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} = g_x(x, f(x)) + g_y(x, f(x))f'(x) = 0 \\ g_y(x, f(x)) \neq 0 &\stackrel{f(x_0)=y_0}{\Rightarrow} f'(x) = -\frac{g_x(x, f(x))}{g_y(x, f(x))} \stackrel{f(x_0)=y_0}{=} -\frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} = f'(x_0) \end{aligned}$$

### 1.7.11 Lokale Extremstellen unter Nebenbedingungen

Seien  $f, g_1, \dots, g_m : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $G$  offen gegeben, sowie  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ . Dann nennt man  $x_0 \in G$  ein lokales Minimum (Maximum) unter den Nebenbedingungen  $g_1(x) = b_1, \dots, g_m(x) = b_m$  wenn es eine offene Umgebung  $U \subset G$  von  $x_0$  gibt mit:

$$f(x) \stackrel{(\leq)}{\geq} f(x_0) \quad \forall x \in U \text{ mit } g(x) = b$$

### 1.7.12 Satz von Lagrange

**Notwendige** Bedingung für Extremstellen unter Nebenbedingungen.

Seien  $f, g_1, \dots, g_m \in C^1(U)$  für eine offene Umgebung  $U$  von  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  und seien  $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$  ( $b \in \mathbb{R}^m$ ). Ist  $x_0 \in U$  eine lokale Extremstelle unter der Nebenbedingung  $g_1(x_0) = b_1, \dots, g_m(x_0) = b_m$  und sind die Gradienten  $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_m(x_0)$  linear unabhängig also  $\det(\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_m(x_0)) \neq 0$ , dann existieren die Konstanten  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$  (Lagrange-Multiplikatoren) mit:

$$\begin{aligned} \nabla f(x_0) + \underbrace{\lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(x_0)}_{J_g^\top} &= 0 \\ &\underbrace{\begin{pmatrix} \nabla g_1(x_0) & \dots & \nabla g_m(x_0) \end{pmatrix}}_{J_g^\top} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \end{aligned}$$



*Bemerkung:* Der Satz von Lagrange enthält nur eine **notwendige** Bedingung: Es kann also Punkte geben mit  $\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0$  die keine Extremstelle sind (z.B. Sattelpunkte). Der Satz liefert also nur Kandidaten, welche dann durch einsetzen in die Funktion  $f$  weiter untersucht werden müssen.

*Bemerkung:* Anschaulich bedeutet die Bedingung  $\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0$ , dass die Gradienten beider Funktionen im Punkt  $x_0$  in die gleiche (oder entgegengesetzte) Richtung schauen müssen.

**Beweis:** für den Fall  $n = 2, m = 1$

$f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$  und sei  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  eine lokale Extremstelle unter der Nebenbedingung  $g(x_0, y_0) = b$ . Außerdem sei  $\nabla g(x_0, y_0)$  linear unabhängig (im Fall  $n = 2, m = 1$  bedeutet dies: nicht der Nullvektor).

$$\begin{aligned} \nabla g(x_0, y_0) &= \begin{pmatrix} g_x(x_0, y_0) \\ g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow g_x(x_0, y_0) \neq 0 \text{ oder } g_y(x_0, y_0) \neq 0 \stackrel{\text{o.B.d.A.}}{\Rightarrow} g_y(x_0, y_0) \neq 0 \\ &\Rightarrow \exists \text{ eine lokale Auflösung } h \text{ nach } y \\ &\quad h : U_0 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } h(x_0) = y_0 \text{ und } g(x, h(x)) = b \end{aligned}$$

Sei nun  $\hat{f}(x) = f(x, h(x))$  mit  $\hat{f} : U_0 \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und betrachte  $\hat{f}(x) \rightarrow \min / \max$ :

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \hat{f}'(x) = \frac{d}{dx} f(x, h(x)) \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \nabla f(x, h(x))^\top \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_x(x, h(x)) & f_y(x, h(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x) \end{pmatrix} \\ &= f_x(x, h(x)) + f_y(x, h(x))h'(x) \end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz über implizite Funktionen gilt  $h'(x) = -\frac{g_x(x, h(x))}{g_y(x, h(x))}$ , damit gilt weiter:

$$0 \stackrel{!}{=} f_x(x, h(x)) - f_y(x, h(x)) \frac{g_x(x, h(x))}{g_y(x, h(x))}$$

Bei  $x_0$  gilt ja gerade  $h(x_0) = y_0$ :

$$0 \stackrel{!}{=} f_x(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) \frac{g_x(x_0, y_0)}{g_y(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0)$$

Also sind die Gradienten  $\nabla f, \nabla g$  linear abhängig.

### 1.7.13 Beispiele

a.  $\begin{cases} f(x, y) = x + y \rightarrow \min / \max \\ g(x, y) = x^2 + y^2 = b = 1 \end{cases}$

(i) Die Nebenbedingung  $g(x, y) = b$  beschreibt eine kompakte (beschränkt und abgeschlossene) Menge  $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } x^2 + y^2 = 1 \right\}$  und da  $f$  stetig ist gilt:

$\xrightarrow{\text{Satz von Weierstra\ss}}$   $\exists x_m, x_M \in B$  mit  $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in B$   
 (Die Funktion  $f$  nimmt auf  $B$  ein Minimum und ein Maximum an.)

(ii) Für ein  $x_0$  (also  $x_m$  oder  $x_M$ ) muss gelten, dass:

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0$$

Man erhält also eine Menge  $\tilde{B} \subset B$  welche die Lagrange-Bedingung erfüllen:

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x, y) + \lambda \nabla g(x, y) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \cdot 2x = -1 \\ \lambda \cdot 2y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \text{ Gleichungen mit } 3 \text{ Unbekannten} \\ \Rightarrow 1 \text{ Freiheitsgrad (durch } \lambda \text{ beschrieben)} \end{cases}$$

$$\text{Fall } x \neq 0, y \neq 0 \quad -\frac{1}{2x} = \lambda = -\frac{1}{2y} \Rightarrow x = y$$

$$\text{Fall } x = 0, y \neq 0 \quad 2 \cdot 0 \cdot \lambda = -1 \Rightarrow 0 = -1 \Rightarrow \text{Widerspruch, Fall nicht möglich} \\ \Rightarrow \text{dasselbe gilt für die Fälle } x \neq 0, y = 0 \text{ und } x = 0, y = 0$$

$$\xrightarrow{\text{Einsetzen in die Nebenbedingung}} b = 1 = g(x, y) = x^2 + y^2 \stackrel{x=y}{\Rightarrow} 1 = x^2 + x^2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{Satz von Weierstra\ss}} x_m, x_M \in \tilde{B}$$

(iii) Prüfen der Elemente aus  $\tilde{B}$ :

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \max \\ f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \Rightarrow \min$$

$$\text{b. } \begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow \min / \max \\ g(x, y) = x + y = b = 1 \end{cases}$$

Die Menge  $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } x + y = 1 \right\}$  ist nicht kompakt, darum gilt hier der Satz von Weierstraß nicht! In diesem konkreten Fall existiert kein Maximum.

### 1.7.14 Kochrezept für Lagrange

Für das Bestimmen der Kandidaten für mögliche Maximal/Minimal-Stellen der Funktion  $f$  unter der Nebenbedingung  $g$  eignet sich das folgende Vorgehen:

1. Lagrange-Funktion aufstellen:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^\top g(x)$$

2. Gradient von  $L$  auf Null setzen und Gleichungen lösen:

$$\nabla L(x, \lambda) \stackrel{!}{=} 0 \quad \left\{ \begin{array}{ll} L_x(x, \lambda) \stackrel{!}{=} 0 & n \text{ Gleichungen} \\ L_\lambda(x, \lambda) \stackrel{!}{=} 0 & m \text{ Gleichungen} \end{array} \right. \rightarrow \text{nach } x \text{ und } \lambda \text{ lösen}$$

Unbekannte sind also  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  und  $x_1, \dots, x_n$  (also  $m + n$  Unbekannte).

Meist ist es geschickter zuerst  $\lambda$  zu bestimmen und danach nach  $x$  aufzulösen.



## Kapitel 2

# Integrale in mehreren Dimensionen

### 2.1 Parameterintegrale

#### 2.1.1 Satz zu eigentlichen Parameterintegralen

Sei  $f(x, t)$  reell und stetig in  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  (also auf  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} : \alpha \leq x \leq \beta, a \leq t \leq b \right\}$ ). Dann gilt für

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) \, dt \quad F : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$$

(i)  $F$  ist stetig auf  $[\alpha, \beta]$

(ii) Falls  $f_x$  stetig auf  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  ist, so ist  $F \in C^1([a, b])$  und es gilt

$$F'(x) = \int_a^b f_x(x, t) \, dt = \int_a^b \frac{d}{dx} f(x, t) \, dt$$

(iii)

$$\int_\alpha^\beta F(x) dx = \int_\alpha^\beta \left( \int_a^b f(x, t) \, dt \right) dx = \int_a^b \left( \int_\alpha^\beta f(x, t) \, dx \right) dt$$

*Bemerkung:* In (ii) und (iii) werden Grenzwerte vertauscht, im allgemeinen geht so etwas schief:

z.B. für  $f(n, x) = x^n$  und  $x < 1$

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 1} f(n, x)}_{\lim_{x \rightarrow 1} x^n = 1^n}}_{\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1} = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 1} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f(n, x)}_{\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \stackrel{x < 1}{=} 0} = \lim_{x \rightarrow 1} 0 = 0$$

*Beispiel:* Sei  $f(x, t) = x \sin t$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, \pi]$

ohne Hilfe des Satzes :  $F(x) = [-x \cos t]_0^\pi = x + x = 2x \rightarrow F'(x) = 2$

mit (ii) aus dem Satz :  $F'(x) = \int_0^\pi f_x(x, t) \, dt = \int_0^\pi \sin t \, dt = [-\cos t]_0^\pi = 2$

### 2.1.2 Satz zur Leibniz-Regel

Seien  $f(x, t), f_x(x, t)$  stetig in  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  und  $u, v \in C^1([\alpha, \beta] \times [a, b])$ , dann ist

$$F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt \in C^1([\alpha, \beta])$$

und  $F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f_x(x, t) dt + f(x, v(x))v'(x) - f(x, u(x))u'(x)$

**Beweis:** Die stetige Differenzierbarkeit folgt dadurch, dass  $F(x)$  eine Verkettung von  $C^n$  Funktionen ist.

Sei  $F(x) = \tilde{F}(x, u(x), v(x))$  mit  $\tilde{F}(x, a, b) = \int_a^b f(x, t) dt$  dann ist  $\tilde{F}$  bezüglich  $x$  stetig differenzierbar wegen Satz 2.1.1 und bezüglich  $a, b$  nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

$\Rightarrow \tilde{F}$  ist stetig partiell differenzierbar

$\Rightarrow \tilde{F}$  ist total differenzierbar, außerdem ist  $h(x) = \begin{pmatrix} x \\ u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$  total differenzierbar.

$\Rightarrow$  durch die weitere Verkettung gilt  $\tilde{F}(h(x)) = \tilde{F}(x, u(x), v(x)) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt$  ist total differenzierbar

Außerdem gilt nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \nabla \tilde{F}(\underbrace{x, u(x), v(x)}_{h(x)}) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}}_{h'(x)} \\ &= \begin{pmatrix} \underbrace{\tilde{F}_x(x, u(x), v(x))}_{\stackrel{2.1.1}{=} \int_a^b f_x(x, t) dt} & \underbrace{\tilde{F}_a(x, u(x), v(x))}_{=-f(x, a)} & \underbrace{\tilde{F}_b(x, u(x), v(x))}_{=f(x, b)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix} \\ &= \int_a^b f_x(x, t) dt \cdot 1 - f(x, u(x))u'(x) + f(x, v(x))v'(x) \end{aligned}$$

### 2.1.3 Definition uneigentlicher Parameterintegrale

Ist für  $x \in M \subset \mathbb{R}$  ein Integral  $\int_a^b f(x, t) dt$  definiert und ist  $a$  (oder  $b$ ) ein kritischer Punkt, so ist das Integral gleichmäßig konvergent in  $M$ , wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists L \in (a, b) \text{ mit } \left| \int_{T_1}^{T_2} f(x, t) dt \right| < \varepsilon \quad \forall x \in M \text{ und } \forall T_1, T_2 \in (L, b)$$

(bzw.  $\forall T_1, T_2 \in (a, L)$ )

*Beispiele*

(i) Eindimensional:

$$\underbrace{\int_0^1}_{0 \rightarrow \text{krit. Pkt.}} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \left[ 2\sqrt{t} \right]_a^1 = 2\sqrt{1} - \lim_{a \rightarrow 0} 2\sqrt{a} = 2$$

(ii)

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$$

(iii) Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ 

$$\int_1^\infty t^\alpha dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b t^\alpha dt \Rightarrow \begin{cases} \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \alpha \neq -1 \\ \log t & \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\alpha = -1 : \lim_{b \rightarrow \infty} [\log t]_1^b = \infty$$

$$\alpha \neq -1 : \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^b = \underbrace{\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1}}_{\substack{b \rightarrow \infty \\ \rightarrow 0 \text{ falls } \alpha+1 < 0}} - \frac{1}{\alpha+1} = \begin{cases} \infty & \alpha > -1 \\ -\frac{1}{\alpha+1} & \alpha < -1 \end{cases}$$

### 2.1.4 Satz zum Majorantenkriterium

Ein uneigentliches Integral  $\int_a^b f(x, t) dt$  konvergiert gleichmäßig in  $M \subset \mathbb{R}$ , wenn ein konvergentes (eigentliches oder uneigentliches) Integral  $\int_a^b g(t) dt$  existiert mit

$$|f(x, t)| \leq g(t) \quad \underbrace{\forall t \in (a, b)}_{-\infty \leq a \leq b \leq \infty} \quad \forall x \in M$$

### 2.1.5 Satz von Fubini für uneigentliche Integrale

Ist  $f(x, t)$  stetig in  $I \times (a, b)$  (dabei ist  $I$  ein Intervall) und konvergiert  $F(x) = \int_a^b f(x, t) dt$  gleichmäßig in  $I$ , dann ist  $F$  stetig und für  $I = [\alpha, \beta]$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\int_\alpha^\beta \left( \int_a^b f(x, t) dt \right) dx = \int_a^b \left( \int_\alpha^\beta f(x, t) dx \right) dt$$

### 2.1.6 Satz zur Ableitung uneigentlicher Parameterintegrale

Sind  $f(x, t)$  und  $f_x(x, t)$  stetig auf  $[\alpha, \beta] \times [a, b]$  und ist

$$\int_a^b f(x_0, t) dt \text{ konvergent für ein } x_0 \in [\alpha, \beta] \text{ und ist}$$

$$\int_a^b f_x(x, t) dt \text{ konvergent } \forall x \in [\alpha, \beta] \text{ so konvergiert}$$

$$F(x) = \int_a^b f(x, t) dt \text{ gleichmäßig } \forall x \in [\alpha, \beta] \text{ und es gilt}$$

$$F'(x) = \int_a^b f_x(x, t) dt \text{ also gilt } F' \in C^1([\alpha, \beta])$$

### 2.1.7 Beispiel

Berechne  $\int_0^1 \frac{t^\beta - t^\alpha}{\log t} dt$  für  $-1 < \alpha < \beta$ :

$$\text{definiere : } F(x) = \int_0^1 \underbrace{\frac{t^x - t^\alpha}{\log t}}_{f(x,t)} dt$$

sei  $\alpha$  ein  $x_0 \in [\alpha, \beta]$  :  $F(\alpha) = \int_0^1 \frac{t^\alpha - t^\alpha}{\log t} = 0 \Rightarrow$  uneigentliches Intervall konvergiert

$$\begin{aligned} \text{weiter gilt : } \int_0^1 \frac{d}{dx} \frac{\overbrace{e^{x \log t} - t^\alpha}^{t^x}}{\log t} &= \int_0^1 \frac{\log t \cdot t^x}{\log t} dt = \int_0^1 t^x dt \\ &= \left[ \frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x+1} < 1 \Rightarrow \int_0^1 f_x(x, t) dt \text{ konvergiert} \end{aligned}$$

$$\text{also gilt : } F'(x) \stackrel{2.1.6}{=} \int_0^1 f_x(x, t) dt = \frac{1}{x+1}$$

wieder aufleiten :  $F(x) = \log(x+1) + c$

$$\text{mit : } F(\alpha) = \log(\alpha+1) + c = 0 \Leftrightarrow c = -\log(\alpha+1)$$

$$F(\beta) = \log(\beta+1) + c = \log(\beta+1) - \log(\alpha+1) = \log\left(\frac{\beta+1}{\alpha+1}\right)$$

## 2.2 Kurvenintegrale

### 2.2.1 Definition der Äquivalenzrelation für Kurven

Zwei stetige Funktionen  $x : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $y : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißen äquivalent ( $x \sim y$ ), wenn es eine streng monoton wachsende Funktion  $\varphi : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$  gibt mit  $y(\varphi(t)) = x(t) \quad \forall t \in [a, b]$ .

*Beispiel:*

$$(i) \quad x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi] \quad y(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0, \pi]$$

$$\text{Sei } \varphi(t) = \frac{t}{2} \Rightarrow y(\varphi(t)) = y\left(\frac{t}{2}\right) = x(t) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$$

$$(ii) \quad x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi] \quad y(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Sei } \varphi(t) = -t \Rightarrow y(-t) = x(t) \text{ aber } \varphi \text{ ist } \underline{\text{nicht}} \text{ monoton wachsend!}$$

$$\Rightarrow \text{Die Kurven müssen in die gleiche Richtung zeigen.}$$

*Bemerkung:*

(i) Reflexiv:  $x \sim x$

**Beweis:** Wähle  $\varphi(t) = t$

(ii) Symmetrie:  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$



**Beweis:** Zu jedem  $\varphi$  existiert ein  $\varphi^{-1}$ , welches ebenfalls stetig und monoton wachsend ist. Also gilt:  $y(t) = x(\varphi^{-1}(t)) \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$

(iii) Transitivität:  $x \sim y$  und  $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

**Beweis:**  $y(\varphi(t)) = x(t), z(\psi(\tau)) = y(\tau) \Rightarrow z(\psi(\varphi(t))) = x(t)$

## 2.2.2 Definition einer Kurve im $\mathbb{R}^n$

Ist  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, so nennt man die Menge  $\mathcal{K} = \{y : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : y \sim x\}$  die Kurve  $\mathcal{K}$  mit Parameterdarstellung  $x$  (dabei ist jedes  $y \in \mathcal{K}$  eine äquivalente Parameterdarstellung von  $\mathcal{K}$ ) mit Anfangspunkt  $p = x(a)$  und Endpunkt  $q = x(b)$ .

Schreibweise:  $\mathcal{K} : x(t), a \leq t \leq b$ .

Die Menge  $T(\mathcal{K}) = x([a, b]) = \{x(t) : a \leq t \leq b\}$  heißt **Träger** von  $\mathcal{K}$ .

Man nennt eine Kurve  $\mathcal{K}$

1. **geschlossen**, wenn  $x(a) = x(b)$  gilt
2. **einfach** oder **Jordankurve**, wenn  $\forall t, u \in [a, b] : x(t) \neq x(u) \Leftrightarrow t \neq u$  gilt  
(Kurve hat keine Überschneidungen)

## 2.2.3 Beispiele

- (i)  $x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$
- (ii)  $y(t) = \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix} \quad t \in [0, \sqrt{2\pi}]$
- (iii)  $z(t) = \begin{pmatrix} \cos -t \\ \sin -t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

Es gilt  $x \sim y$ : Gleiche Kurve mit unterschiedlicher Parameterdarstellung. Für (i) ist  $\mathcal{K} : x(t), 0 \leq t \leq 2\pi$  und für (ii) ist  $\mathcal{K} : y(t), 0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$ .

Aber weiter gilt  $x, y \not\sim z$ , denn die Kurve beschrieben durch  $z(t)$  geht in die andere Richtung.

## 2.2.4 Eigenschaften von Parameterdarstellungen

- (i) Eine Parameterdarstellung  $x : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  einer Kurve  $\mathcal{K}$  heißt **stückweise stetig differenzierbar**, wenn eine Zerlegung  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  existiert und  $x$  auf  $[t_l, t_{l+1}]$  mit  $l \in \{0, \dots, N-1\}$  stetig differenzierbar ist.
- (ii) Besitzt eine Kurve  $\mathcal{K}$  eine stückweise stetig differenzierbare Parameterdarstellung  $x(t)$  mit  $t \in [a, b]$  und gilt  $\dot{x}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$ , dann heißt die Kurve  $\mathcal{K}$  **glatt** oder **regulär**.
- (iii) Ist von  $\mathcal{K}$  eine Parameterdarstellung  $x$  stückweise stetig differenzierbar und  $\dot{x}(t) \neq 0$ , so heißt der Vektor

$$T(t) = \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} \quad \text{der Tangenten(einheits)vektor von } \mathcal{K} \text{ bei } t.$$

Dabei ist  $T$  wieder eine Kurve, beziehungsweise Funktion der Form  $T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ist  $T$  zusätzlich ebenfalls stetig differenzierbar und gilt  $\dot{T}(t) \neq 0$ , so heißt

$$N(t) = \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|} \quad \text{der \textbf{Hauptnormalen(einheits)vektor} von } \mathcal{K} \text{ bei } t$$

(Dabei ist  $N(t)$  die normierte zweite Ableitung von  $x(t)$ ).  
Falls  $n = 3$  so heißt falls existent

$$B(t) = T(t) \times N(t) \quad \text{der \textbf{Binormalen(einheits)vektor} } \mathcal{K} \text{ bei } t.$$

### 2.2.5 Bemerkung

- (i) Existieren  $T$  und  $N$ , dann gilt  $N(t) \perp T(t)$ . Existiert auch  $B$  so gilt  $N(t) \perp B(t), T(t) \perp B(t)$ .
- (ii) Existiert  $T$ , so hängt der Tangenteneinheitsvektor nicht von der Parameterdarstellung ab.

**Beweis:** Sei z.B.  $y(\varphi(t)) = x(t), a \leq t \leq b$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T(t) &= \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} = \frac{\dot{y}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)}{\|\dot{y}(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\|} = \frac{\dot{y}(\varphi(t))}{\|\dot{y}(\varphi(t))\|} \underbrace{\frac{\dot{\varphi}(t)}{|\dot{\varphi}(t)|}}_{\substack{\varphi \text{ monoton} \\ \text{wachsend} \\ \Rightarrow \dot{\varphi} > 0} \quad \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}(t)} = 1} \\ &= \frac{\dot{y}(\varphi(t))}{\|\dot{y}(\varphi(t))\|} \stackrel{\tau=\varphi(t)}{=} \frac{\dot{y}(\tau)}{\|\dot{y}(\tau)\|} \end{aligned}$$

### 2.2.6 Beispiele

(i)  $x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \stackrel{\|\dot{x}(t)\|=1}{=} \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} = T(t) \\ \ddot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = \dot{T}(t) \stackrel{\|\dot{T}(t)\|=1}{=} \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|} = N(t) \end{aligned}$$

(ii)  $x(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0, \pi]$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} \stackrel{\|\dot{x}(t)\|=\sqrt{4}=2}{=} \frac{1}{2} \dot{x}(t) = T(t) = \begin{pmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} \\ \dot{T}(t) &= \begin{pmatrix} -2 \cos 2t \\ -2 \sin 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\dot{T}(t)}{\|\dot{T}(t)\|} \stackrel{\|\dot{T}(t)\|=\sqrt{4}=2}{=} \frac{1}{2} \dot{T}(t) = N(t) = \begin{pmatrix} -\cos 2t \\ -\sin 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 2.2.7 Definition zusammen- und entgegengesetzter Kurven

- (i) Sei  $\mathcal{K} : x(t), a \leq t \leq b$  eine Kurve, dann heißt  $-\mathcal{K} : y(t), a \leq t \leq b$  mit  $y(t) = x(a + b - t)$  die zu  $\mathcal{K}$  **entgegengesetzte** Kurve
- (ii) Sind  $\mathcal{K} : x(t), a \leq t \leq b$  und  $\mathcal{L} : y(t), \alpha \leq t \leq \beta$  zwei Kurven mit  $x(b) = y(\alpha)$ , dann heißt  $\mathcal{K} + \mathcal{L} : z(t), a \leq t \leq b + \beta - \alpha$  mit  $z(t) = \begin{cases} x(t) & a \leq t \leq b \\ y(t - \beta + \alpha) & b \leq t \leq b + \beta - \alpha \end{cases}$  die **zusammengesetzte** Kurve von  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$ .

*Bemerkung:* Der Parameterbereich von  $x$  hat die Länge  $b - a$ , der Parameterbereich von  $y$  hat die Länge  $\beta - \alpha$  und der Parameterbereich von  $z$  hat die Länge  $b - a + \beta - \alpha = (b + \beta - \alpha) - a$ .

### 2.2.8 Definition von rektifizierbaren Kurven

Sei  $\mathcal{K} : x(t), a \leq t \leq b$  eine Kurve, so heißt

$$l(\mathcal{K}) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|x(t_k) - x(t_{k-1})\| : a = t_0 < \dots < t_n = b \right\}$$

die **Länge** von  $\mathcal{K}$ . Ist  $L(\mathcal{K}) < \infty$  so heißt die Kurve  $\mathcal{K}$  **rektifizierbar**.

*Bemerkung:*  $l(\mathcal{K}) \approx l(\text{Polygonzug})$ . Dabei hängt die Genauigkeit von der Feinheit der Zerlegung  $a = t_0 < \dots < t_n = b$  ab.

### 2.2.9 Satz

Sei  $\mathcal{K}$  eine Kurve mit einer Parameterdarstellung  $x \in C^1$  (stetig diff'bar), so gilt

$$l(\mathcal{K}) = \int_a^b \|\dot{x}(t)\| dt \approx \sum_{k=1}^n \underbrace{\|\dot{x}(\xi_k)\| (t_k - t_{k-1})}_{\|\dot{x}(\xi_k)(t_k - t_{k-1})\|}$$

### Bemerkung zu Riemann- Summen und Riemann-Integralen im Eindimensionalen

Für eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Zerlegung  $a = t_0 < \dots < t_n = b$  sowie beliebige Zwischenpunkte  $\xi_1, \dots, \xi_n$  mit  $t_{k-1} \leq \xi_k \leq t_k$  ist die Riemann-Summe  $S(f, t, \xi)$  wie folgt definiert:

$$S \left( f, \begin{pmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$$

(Dabei ist  $f(\xi_k)(t_k - t_{k-1})$  die Fläche eines Rechteckes mit Länge  $f(\xi_k)$  und Breite  $t_k - t_{k-1}$ .)

Weiter ist die Feinheit einer Zerlegung  $t = (t_0, \dots, t_n)$  folgendermaßen definiert:

$$\mu(t) = \max \{t_k - t_{k-1} : k = 1, \dots, n\}$$

(Maximale Breite der unterteilten Rechtecke.)

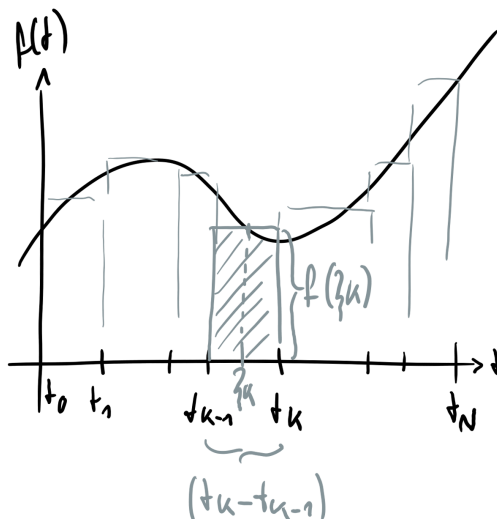


Abbildung 2.1: Funktion  $f(t)$  mit Zerlegung  $t_0 < \dots < t_N$  und Zwischenpunkt  $\xi_k$ .

Für eine beliebige Folge  $(\vec{t}_N)_{N=1}^\infty$  von Zerlegungen mit  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\vec{t}_N) = 0$  und einer beliebigen Folge mit den zugehörigen Zwischenpunkten  $(\vec{\xi}_N)_{N=1}^\infty$  gilt, falls der Grenzwert  $\lim_{N \rightarrow \infty} S(f, \vec{t}_n, \vec{\xi}_N)$  existiert, dann ist dieser für alle Folgen gleich und es gilt:

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} S(f, \vec{t}_n, \vec{\xi}_N)$$

### 2.2.10 Definition von Kurvenintegralen

Gegeben sei eine Kurve  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$  und  $f : \underbrace{T(\mathcal{K})}_{\substack{\text{Träger} \\ \text{von } \mathcal{K}}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

a. Sei  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Parameterdarstellung von  $\mathcal{K}$

- (i) für eine Zerlegung  $\vec{t} : a = t_0 < \dots < t_N = b$  mit zugehörigen Zwischenpunkten  $\vec{\xi} = \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$  gilt für die **Riemann(zwischen)summe**:

$$S(f, \vec{t}, \vec{\xi}) = \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \underbrace{\cdot}_{\substack{\text{Skalar-} \\ \text{produkt}}} (x(t_k) - x(t_{k-1}))$$

- (ii) Existiert ein  $I \in \mathbb{R}$  derart, dass für alle Folgen von Zerlegungen  $(\vec{t}_N)_{N=1}^\infty$  mit beliebigen zugehörigen Zwischenpunkten  $(\vec{\xi}_N)_{N=1}^\infty$  mit der Eigenschaft  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\vec{t}_N) = 0$  gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S(f, \vec{t}_N, \vec{\xi}_N) = I = \int_a^b f \cdot dx = \int_a^b f(x(t)) \cdot dx(t)$$

Dabei heißt  $I$  das **Kurvenintegral** von  $\mathcal{K}$  längs  $f$ .

- b. Existiert ein  $I \in \mathbb{R}$  wie in (ii) so heißt  $f$  längs  $\mathcal{K}$  **(Riemann)integrierbar** und man schreibt

$$I = \int_{\mathcal{K}} f = \int_{\mathcal{K}} f(x) \cdot dx = \int_{\mathcal{K}} f_1(x) dx_1 + f_2(x) dx_2 + \dots + f_n(x) dx_n$$

### 2.2.11 Substitutionsformel

Ist  $\mathcal{K} : x(t), a \leq t \leq b$  eine stückweise differenzierbare Kurve im  $\mathbb{R}^n$  und  $f : T(\mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, dann gilt:

$$\int_{\mathcal{K}} f(x) \cdot dx = \int_a^b f(x(t)) \cdot \dot{x}(t) dt$$

**Beweisidee:**

Nach 1ter Mittelwertsatz  $\exists \tilde{\xi}_k \in [t_{k-1}, t_k] : x(t_k) - x(t_{k-1}) = \dot{x}(\tilde{\xi}_k)(t_k - t_{k-1})$

$$S(f, \vec{t}, \vec{\xi}) = \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \cdot (x(t_k) - x(t_{k-1})) \stackrel{\text{1ter MWS}}{=} \sum_{k=1}^N f(\xi_k) \cdot \dot{x}(\tilde{\xi}_k)(t_k - t_{k-1})$$

Im allgemeinen gilt  $\xi_k \neq \tilde{\xi}_k$ . Also wird  $\vec{\xi}$  gerade so gewählt, dass gilt:

$$S(f, \vec{t}, \vec{\xi}) = \sum_{k=1}^N f \left( \underbrace{x \left( \begin{matrix} \xi_k \\ t_k \end{matrix} \right)}_{\tilde{\xi}_k} \right) \cdot (x(t_k) - x(t_{k-1})) \stackrel{\text{1ter MWS}}{=} \sum_{k=1}^N f(x(t_k)) \cdot \dot{x}(\tilde{\xi}_k)(t_k - t_{k-1})$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x(t)) \cdot \dot{x}(t) dt$$

**Bemerkung:** Theoretisch können so die meisten Kurvenintegrale ausgerechnet werden. In der Praxis ist diese Methode aber meist nicht praktikabel.

### 2.2.12 Beispiele

- (i) Kurvenintegrale sind verallgemeinerte eindimensionale (Riemann-)Integrale. Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (eindimensionales Vektorfeld) und  $x(t) = a + t(b - a)$  (eine Kurve im  $\mathbb{R}^1$ )

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} f &= \int_{\mathcal{K}} f(x) \cdot dx \stackrel{2.2.11}{=} \int_0^1 f(x(t)) \cdot \dot{x}(t) dt \\ &= \int_0^1 f \left( \underbrace{a + t(b - a)}_x \right) \cdot \underbrace{(b - a) dt}_{dx} = \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

- (ii) Die Länge einer Kurve kann mit einem Kurvenintegral berechnet werden. Sei  $\mathcal{K} : x(t), a \leq t \leq b$  mit  $x$  stellenweise differenzierbar und  $\dot{x}(t) \neq 0 \forall t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} \cdot dx(t) &\stackrel{2.2.11}{=} \int_a^b \frac{\dot{x}(t)}{\|\dot{x}(t)\|} \cdot \dot{x}(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{\|\dot{x}(t)\|^2}{\|\dot{x}(t)\|} dt = \int_a^b \|\dot{x}(t)\| dt = l(\mathcal{K}) \end{aligned}$$

### 2.2.13 Definition der Wegunabhängigkeit

Sei  $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet.

- (i) Gilt für zwei beliebige Wege  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  in  $G$  mit gleichem Anfangs- und Endpunkt stets  $\int_{\mathcal{K}} f = \int_{\mathcal{L}} f$  dann heißt das Kurvenintegral **wegunabhängig**.
- (ii) Existiert eine Funktion  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $F' = \nabla F = f$  (implizit wird  $F$  differenzierbar gefordert) auf  $G$ , dann heißt  $F$  eine **Stammfunktion** von  $f$ .  
*Bemerkung:* In der Praxis wird das Potential eines Vektorfeldes als  $P = -F$  definiert.
- (iii) Ein Vektorfeld  $f$  heißt **konservativ** wenn eine Stammfunktion  $F$  in  $G$  existiert.

### 2.2.14 Erster Hauptsatz für Kurvenintegralen

Sei  $f$  konservativ in  $G$  und  $F$  eine Stammfunktion, dann gilt für jeden Weg  $\mathcal{K}$  in  $G$  mit Anfangspunkt  $p$  und Endpunkt  $q$

$$\int_{\mathcal{K}} f = F(q) - F(p)$$

Also ist insbesondere das Kurvenintegral wegunabhängig.

**Beweis:** (o.B.d.A. nur für glatte Kurven) Sei  $\mathcal{K} : x(t), a \leq t \leq b$  glatt, dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}} f &= \int_{\mathcal{K}} f(x) \cdot dx \stackrel{2.2.11}{=} \int_a^b \underbrace{f(x(t)) \cdot \dot{x}(t)}_{\substack{= F'(x(t)) \cdot \dot{x}(t) \\ = \frac{d}{dt} F(x(t))}} dt = \int_a^b \left( \frac{d}{dt} F(x(t)) \right) dt \\ &= [F(x(t))]_a^b \stackrel{\substack{\text{Hauptsatz} \\ \text{der Diff/Int-} \\ \text{Rechnung}}}{=} F(x(b)) - F(x(a)) = F(q) - F(p) \end{aligned}$$

### 2.2.15 Satz

Für  $f \in C(G; \mathbb{R}^n)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $\int_{\mathcal{K}} f$  ist wegunabhängig
- (ii)  $f$  besitzt eine Stammfunktion  $F$
- (iii)  $\int_{\mathcal{K}} f = 0$  für jede geschlossene Kurve

**Beweisansätze:**

(ii)  $\Rightarrow$  (i): folgt direkt aus dem ersten Hauptsatz 2.2.14

(i)  $\Leftrightarrow$  (iii): Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  zwei Kurven mit gleichen Anfangs- und Endpunkt. So kann eine neue geschlossene Kurve  $\mathcal{M}$  wie folgt konstruiert werden:

$$\int_{\mathcal{M}} f = \int_{\mathcal{K}} f + \int_{-\mathcal{L}} f = \int_{\mathcal{K}} f - \int_{\mathcal{L}} f = 0$$

**2.2.16 Beispiele**

- (i)  $f(x) = \frac{x}{\|x\|^3}$  mit  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist konservativ mit Stammfunktion  $F(x) = \frac{1}{\|x\|} \dots$
- (ii)  $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$  ist konservativ mit  $F(x_1, x_2) = x_1^2x_2 \dots$

**2.2.17 Definition einfach zusammenhängender Gebiete**

Ein Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jede geschlossene Kurve in  $G$  innerhalb von  $G$  stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

Beispiele im  $\mathbb{R}^3$ :

- (i) Berliner ohne Füllung ist einfach zusammenhängend.
- (ii) Ein Donut ist es nicht.

**2.2.18 Sternförmige Gebiete**

Eine Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$  heißt **sternförmig** (bezüglich einem  $x_0 \in G$ ), wenn zu jedem  $x \in G$  die Strecke  $\overline{x_0x} \subset G$  ist (komplett im Gebiet liegt).

**2.2.19 Bemerkung**

- (i) Eine sternförmige Menge ist stets auch eine einfach zusammenhängende Menge.  
Ein sternförmiges Gebiet ist stets auch ein sternförmiges Gebiet.
- (ii) Die Vereinigung von sternförmigen Gebieten muss nicht sternförmig sein.
- (iii) Oft kann ein einfach zusammenhängendes Gebiet als Vereinigung von sternförmigen Gebieten betrachtet werden.

**2.2.20 Zweiter Hauptsatz für Kurvenintegralen**

Sei  $f \in C^1(G; \mathbb{R}^n)$  und  $G$  ein Gebiet, dann gilt:

- (i) (notwendige Bedingung) Besitzt  $f$  eine Stammfunktion  $F$  in  $G$ , so erfüllt  $f$  in  $G$  die **Integrabilitätsbedingung**:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_l} = \frac{\partial f_l}{\partial x_k} \quad \text{in } G \quad \forall l, k \in \{1, \dots, n\}$$

- (ii) (hinreichende Bedingung) Ist  $G$  einfach zusammenhängend, so besitzt  $f$  eine Stammfunktion  $F$  in  $G$ , wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist.

**Beweisidee:** Wenn  $f$  eine Stammfunktion  $F$  hat, so muss der Satz von Schwarz gelten, also muss die Hessematrix symmetrisch sein.

### 2.2.21 Definition der Rotation

Sei  $G \subset \mathbb{R}^3$  ein Gebiet und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$  partiell differenzierbar, dann heißt die Funktion  $\operatorname{rot} f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  **Rotation** von  $f$  in  $G$  und ist folgendermaßen definiert:

$$\underbrace{\operatorname{rot} f(x)}_{\operatorname{curl} f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{f}$$

*Bemerkung:* Die Rotation gibt an ob ein Feld Wirbel enthält.

### 2.2.22 Korollar zum zweiten Hauptsatz für Kurvenintegrale

Sei  $f \in C^1(G; \mathbb{R}^3)$  mit  $G$  ein Gebiet.

1.  $f$  besitzt eine Stammfunktion  $\Rightarrow \operatorname{rot} f = 0$
2. Ist  $G$  einfach zusammenhängend, dann gilt:  
 $f$  besitzt eine Stammfunktion  $\Leftrightarrow \operatorname{rot} f = 0$

*Bemerkung:* Zentralkraftfelder (wie z.B. Gravitationsfelder) haben keine Rotation und sind somit wegunabhängig.

### Zwei Methoden zur Berechnung von Stammfunktionen:

#### 2.2.23 Nach Variablen integrieren

*Beispiel:* Sei  $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y e^{yz} + 1 \\ x e^{yz} + xyz e^{yz} \\ xy^2 e^{yz} + \cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix}$

Gesucht ist ein  $F$  mit  $\nabla F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$

1.  $F(x, y, z) \stackrel{!}{=} \int f_1(x, y, z) dx = xy e^{yz} + x + c(y, z)$
2.  $F_y(x, y, z) = x e^{yz} + xy e^{yz} z + 0 + c_y(y, z) \stackrel{!}{=} f_2(x, y, z) = x e^{yz} + xyz e^{yz}$   
 $\Rightarrow c_y(y, z) = 0 \Rightarrow c(y, z) = \tilde{c}(z)$   
 $\Rightarrow F(x, y, z) = xy e^{yz} + x + \tilde{c}(z)$
3.  $F_z(x, y, z) = 0 e^{yz} + xy e^{yz} y + 0 + \tilde{c}_z(z) \stackrel{!}{=} f_3(x, y, z) = xy^2 e^{yz} + \cos z$   
 $\Rightarrow \tilde{c}_z(z) = \cos z \Rightarrow \tilde{c}(z) = \int \cos z dz = \sin z + c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow F(x, y, z) = xy e^{yz} + x + \sin z + c$

#### 2.2.24 Mittels Kurvenintegral und passendem Weg

Sei  $F(x) = \int_{\Gamma_x} f$ , dabei ist  $\Gamma$  ein Weg von  $x_0$  (fest) nach  $x$  in  $G$ .



*Beispiel:* Sei  $f(x, y) = \left( -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \frac{x}{x^2+y^2} \right)$  mit  $G = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \leq 0 \right\}$  (sternförmig)

$$\text{Sei: } \Gamma_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = r \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } F(x, y) &= \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f \\ &= \int_1^r f(t, 0) d \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^\phi f(r \cos t, r \sin t) d \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix} \\ &= \int_1^r \begin{pmatrix} -\frac{0}{t^2+0^2} & \frac{t}{t^2+0^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dt}{dt} t \\ \frac{d}{dt} 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \int_0^\phi \begin{pmatrix} -\frac{r \sin t}{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t} & \frac{r \cos t}{r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} r \cos t \\ \frac{d}{dt} r \sin t \end{pmatrix} \\ &= \int_1^r \begin{pmatrix} 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^\phi \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \sin t & \frac{1}{r} \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_1^r 0 \cdot 1 + t \cdot 0 dt + \int_0^\phi \frac{1}{r} \sin t \cdot r \sin t + \frac{1}{r} \cos t \cdot r \cos t dt \\ &= \int_1^r 0 dt + \int_0^\phi \frac{r}{r} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \int_1^r 0 dt + \int_0^\phi 1 dt \\ \Rightarrow F(x, y) &= \phi = \arg(x, y) \end{aligned}$$