Michael Lehn
Tobias Speidel

SoSe 2019
Blatt 2, 38 Punkte

Übungen zur Höheren Mathematik II *

Abgabe am 07.05.2019 vor Beginn der Übung im Hörsaal 2

5. Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y,z) = 4\cos z \arctan\left(y\mathrm{e}^{-x^2}\right)$ im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (0, 1, \pi/4)^T$ in Richtung $\boldsymbol{r} = (1, 1, \sqrt{14})^T$.

(4 Punkte)

6. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & ,(x,y) = (0,0), \\ \dfrac{|x|y}{|x| + y^2} & ,(x,y) \neq (0,0), \end{cases}$$

im Nullpunkt stetig und in jede Richtung differenzierbar aber nicht (total) differenzierbar ist.

(5 Punkte)

7. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} 0 & ,(x,y) = (0,0), \\ \dfrac{y\sin(xy)}{x^2 + y^4} & ,(x,y) \neq (0,0), \end{cases}$$

im Nullpunkt in jede Richtung differenzierbar aber nicht stetig ist. (5 Punkte)

8. Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sowie $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$ konstant. Bestimmen Sie jeweils die totale Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{b}^T A\boldsymbol{x}$, b) $g(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{b}$, c) $h(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$.

(je 3 Punkte)

9. a) Sei φ ein Skalarfeld, d.h. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie die folgenden Identitäten.

i.) $\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{F}) = \varphi \operatorname{div}\boldsymbol{F} + \langle \boldsymbol{F}, \operatorname{grad}\varphi\rangle$, ii.) $\operatorname{rot}(\varphi\boldsymbol{F}) = \varphi \operatorname{rot}\boldsymbol{F} + \operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{F}$.

b) Berechnen Sie für die folgenden Vektorfelder jeweils Divergenz und Rotation, wobei $r = \|\boldsymbol{x}\|$ und $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ ein konstanter Vektor ist.

i.) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := f(r)\boldsymbol{a}$, ii.) $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) := g(r)\,\boldsymbol{x}$.

Hinweise: i.) zu a): Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten, d.h. $\varphi\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{3} \varphi F_i \boldsymbol{e}_i$.

ii.) zu b): Kettenregel.

$(2 + 3 + 3 + 3$ Punkte$)$

* Allgemein gilt: Ergebnisse sind immer zu begründen. Des Weiteren sind falsche Aussagen durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen. Ergebnisse sind nachvollziehbar darzustellen und analytisch so weit wie möglich zu vereinfachen.

10. Zeigen Sie jeweils für $n = 2$ und $k \in \mathbb{N}$:

a) Eine Folge (a_k) des $\mathbb{R}^n$ konvergiert $\Leftrightarrow$ jede Komponente von (a_k) konvergiert in $\mathbb{R}$.

b) Sei $(a_k) \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt $\Rightarrow$ (a_k) besitzt eine konvergente Teilfolge.

Hinweise: i.) Der Satz von Bolzano-Weierstraß aus HM1 darf ohne Beweis verwendet werden.

(je 2 Punkte)

Ergänzende Aufgaben

A. Gegeben sei die Funktion $f(x,y,z) = z\tan(x\mathrm{e}^y)$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(1/3, \log\pi, 1)^T$ in Richtung $1/4 \cdot (1, -3, \sqrt{6})^T$.

B. Gegeben sei die Funktion $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & , (x,y) \neq (0,0) \wedge x+y \neq 0, \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Berechnen Sie die Richtungsableitung der Funktion f entlang der Geraden $y = 2x$ im Ursprung.

C. a) Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{F}_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie jeweils die Vektorfelder in einem geeigneten Koordinatensystem.

i.) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{F}_1(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ii.) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{F}_2(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$,

iii.) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{F}_3(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$, iv.) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \boldsymbol{F}_4(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$.

b) Berechnen Sie jeweils Rotation und Divergenz der gegebenen Vektorfelder $\boldsymbol{F}_i$ aus a) anhand der Definitionen von Seite 1.

c) Welche Bedeutung hat b) für ein Vektorfeld $\boldsymbol{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ welches an jeder Stelle $\boldsymbol{u} = (x_0, y_0)^T$ in D total differenzierbar ist?

D. Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{E} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{r} = (x,y,z)^T \mapsto \boldsymbol{E}(x,y,z) = (\sin y, \cos z, \sin x + y)^T$. Berechnen Sie eine lineare Approximation für das Feld $\boldsymbol{E}$ in der Nähe des Ursprungs.