Michael Lehn
Tobias Speidel

SoSe 2019
Blatt 4, 33 Punkte

Übungen zur Höheren Mathematik II *

Abgabe am 21.05.2019 vor Beginn der Übung im Hörsaal 2

11. Ermitteln Sie alle Kandidaten für Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f : D_i \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = x^2 - 4x + xy^2 + y^3,$$

auf den Mengen
i.) $D_1 = \mathbb{R}^2$, ii.) $D_2 = [-3,3] \times [-3,3]$.

Geben Sie dabei insbesondere deren Typ an, falls diese im Inneren des jeweiligen Gebiets liegen. Besitzt f im Falle von i.) ein absolutes Extrema in der gesamten Ebene? Bestimmen Sie im Falle von ii.) die globalen Extrema der Funktion f auf D_2. (6 + 4 + 2 Punkte)

12. Gegeben seien forgende Matrizen.

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -8 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie die Definitheit der Matrizen A und B jeweils unter Verwendung

i.) der Definition der Definitheit. ii.) des Hauptminorenkriteriums.

(3 + 3 + 5 + 5 Punkte)

13. Sei $f : S \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ferner sei $\overline{ab} \subset G$ für $a, b \in G$. Dann existiert nach dem Mittelwertsatz aus HM1 ein $\xi \in (0,1)$ mit

$$f(b) = f(a) + f(a + \xi(b-a))'(b-a).$$

Zeigen Sie, dass solch ein Mittelwertsatz für vektorwertige Funktionen nicht gilt. Das heißt für eine differenzierbare Funktion $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m (m > 1)$ muss für $\overline{ab}$ kein $\xi \in (0,1)$ existieren mit

$$f(b) = f(a) + f'(a + \xi(b-a))(b-a).$$

Hinweis: Betrachten Sie als Gegenbeispiel etwa den Fall $n = 1, m = 2, G = [0, 2\pi]$ sowie $f(t) = (\cos t, \sin t)^T$.

(5 Punkte)

* Allgemein gilt: Ergebnisse sind immer zu begründen. Des Weiteren sind falsche Aussagen durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen. Ergebnisse sind nachvollziehbar darzustellen und analytisch so weit wie möglich zu vereinfachen.

Ergänzende Aufgaben

A. Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit.

a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

B. Ermitteln Sie alle Kandidaten für Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f : D_i \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3,$$

auf den Mengen

i.) $D_1 = \mathbb{R}^2$, ii.) $D_2 = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Geben Sie dabei insbesondere deren Typ an, falls diese im Inneren des jeweiligen Gebiets liegen.