Michael Lehn
Tobias Speidel

SoSe 2019
Blatt 5, 33 Punkte

Übungen zur Höheren Mathematik II *

Abgabe am 28.05.2019 vor Beginn der Übung im Hörsaal 2

19. Bestimmen Sie für folgende Funktionen jeweils alle stationären Punkte und klassifizieren Sie diese

a) $f(x,y) = x^4 + \frac{1}{2}y^2 + 2xy$

b) $f(x,y) = 2x^2 + xy + 3y^2 - 4x - y$

(4 + 4 Punkte)

20. Gegeben sei die Funktion

$$f:\, (0,\infty)\times\mathbb{R} \to (0,\infty)\times\mathbb{R}, \quad f(x,y) = \left(x^2, xy^3\right)$$

a) Zeigen Sie, dass f umkehrbar ist und die Umkehrfunktion

$$f^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x}, \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[6]{x}}\right) \text{ besitzt.}$$

b) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $J(f)$ der Abbildung f.

c) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $\tilde{J} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, die Sie erhalten, indem Sie J für $x = y = 1$ mit Einsen ergänzen.

(4 + 3 + 4 Punkte)

21. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$y^2 + \mathrm{e}^{x^2 y} = 2$$

eine in einer Umgebung von Null eindeutig bestimmte, zweimal differenzierbare Auflösung f nach y mit $f(0) = 1$ besitzt. Bestimmen Sie außerdem $f'(0)$ und $f''(0)$.

(6 Punkte)

22. Betrachten Sie das folgende nicht-lineare Gleichungssystem mit den Variablen x_1, x_2 und x_3:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 6\sqrt{x_1^2 + x_2^2} &= -8 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 6x_2 &= -8 \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass der Punkt $\mathbf{x_0} = (0,3,1)^{\mathrm{T}}$ eine Lösung des Gleichungssystems darstellt.

b) Überprüfen Sie unter Zuhilfenahme des Satzes über implizite Funktionen, ob sich obiges Gleichungssystem im Punkt $\mathbf{x_0}$ lokal nach x_1, x_2, beziehungsweise nach x_1, x_3 oder nach x_2, x_3 auflösen lässt. Sofern die jeweilige Auflösung existiert, berechnen Sie diese.

(3 + 5 Punkte)

* Allgemein gilt: Ergebnisse sind immer zu begründen. Des Weiteren sind falsche Aussagen durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen. Ergebnisse sind nachvollziehbar darzustellen und analytisch so weit wie möglich zu vereinfachen.

Ergänzende Aufgaben

A. Zeigen Sie, dass die implizite Funktion $x^y - y^x = 1$ in einer Umgebung von $x_0 = 3$ eine eindeutig bestimmte Auflösung $y(x)$ mit $y(3) = 2$ besitzt und bestimmen Sie $y'(3)$.

B. Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ für $(x, y) \neq (0, 0)$.

a) Berechnen Sie den Gradienten ∇f.

b) Berechnen Sie eine Tangente an eine beliebige Höhenlinie der Funktion f mithilfe des Hauptsatzes über implizite Funktionen.

c) Zeigen Sie mithilfe von b), dass der Gradient von f senkrecht auf den Höhenlinien steht.