Blatt 2

Ruedi Lüthi

15. Mai 2019

5

Sei $f(x,y,z) = 4\cos z \arctan\left(ye^{-x^2}\right)$

Mit Definition:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+hr)-f(x_0)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{4\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\sqrt{14}\right)\arctan\left((1+h)e^{-(0+h)^2}\right) - 4\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\arctan\left(1e^{-0^2}\right)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{4\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\sqrt{14}\right)\arctan\left((1+h)e^{-h^2}\right) - 4\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4}}{h} \overset{\text{Regel von de l'Hospital}}{=}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-4\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\sqrt{14}\right)\sqrt{14}\arctan\left((1+h)e^{-h^2}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\sqrt{14}\right)\frac{e^{h^2}(1-2h-2h^2)}{e^{2h^2}+(1+h)^2}}{1}$$

$$-4\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{14}\frac{\pi}{4} + 4\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2} = -\sqrt{7}\pi + \sqrt{2}$$

Mit Jacobi-Matrix:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4\cos z\frac{1}{1+\left(ye^{-x^2}\right)^2}\cdot ye^{-x^2}\cdot -2x = -8\cos z\cdot xy\frac{e^{-x^2}}{e^{-2x^2}\left(e^{2x^2}+y^2\right)} = -\frac{8\cos z\cdot xy\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}+y^2} \\ 4\cos z\frac{1}{1+\left(ye^{-x^2}\right)^2}\cdot e^{-x^2} = 4\cos z\frac{e^{-x^2}}{e^{-2x^2}\left(e^{2x^2}+y^2\right)} = \frac{4\cos z\cdot e^{x^2}}{e^{2x^2}+y^2} \\ -4\sin z\arctan\left(ye^{-x^2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_0) = \nabla f\left(0,1,\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\frac{4}{\sqrt{2}}}{1+1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -4\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x_0)^\top r = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{14} \end{pmatrix} = 0 + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\pi\sqrt{14}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \pi\sqrt{7}$$

6

Warum gilt $|y| < \delta$?
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, dann gilt für $f(x,y)$ stetig:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{|x|y}{|x| + y^2} - 0 \right| \overset{|x|\neq 0}{=} \left| \frac{y}{1 + \frac{y^2}{|x|}} \right| \overset{\frac{y^2}{|x|}\geqslant 0}{\leqslant} |y| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$$

Sei $r = (r_x, r_y)^\top$ eine beliebige Richtung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} f(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hr) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + hr_x, 0 + hr_y) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{|hr_x| hr_y}{|hr_x| + (hr_y)^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|hr_x| r_y}{|hr_x| + h^2 r_y^2} = \lim_{h\to 0} \frac{|hr_x| r_y}{|hr_x|(1 + \underbrace{\frac{h^2 r_y^2}{|hr_x|}}_{\overset{h\to 0}{\to} 0})} = r_y \end{aligned}$$

Die Funktion ist nicht total differenzierbar da die Jacobi-Matrix nicht existiert, denn:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{|x|y}{|x| + y^2} \quad \Rightarrow \quad \text{nicht diff'bar da } |x| \text{ nicht diff'bar in } x = 0 \text{ ist}$$

7

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \frac{y\sin(xy)}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \end{array} \right)$$

Nebenrechnung: Für $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ gilt:

$$\frac{2\alpha}{\pi} < \sin(\alpha) < 1$$

Nicht stetig, da

$$x_0(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} \quad \lim_{t\to 0} f(x_0(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t}\sin(t\sqrt{t})}{t^2 + \sqrt{t}^4} > \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t}\frac{2}{\pi}t\sqrt{t}}{t^2 + t^2} = \frac{2}{\pi}\frac{t^2}{2t^2} = \pi$$

Sei $r = (r_x, r_y)^\top$ eine beliebige Richtung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} f(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + hr) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + hr_x, 0 + hr_y) - 0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{hr_y \sin(h^2 r_x r_y)}{h^2 r_x^2 + h^4 r_y^4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r_y \sin(h^2 r_x r_y)}{h^2 r_x^2 + h^4 r_y^4} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{r_y \cos(h^2 r_x r_y) 2hr_x r_y}{2hr_x^2 + 4h^3 r_y^4} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{r_x r_y^2 \overbrace{\cos(h^2 r_x r_y)}^{\overset{h\to 0}{\to} 1}}{r_x^2 + \underbrace{2h^2 r_y^4}_{\overset{h\to 0}{\to} 0}} = \frac{r_y^2}{r_x} \end{aligned}$$

10

a)

Sei $(a_k) = \begin{pmatrix} (a_k)_1 \\ \vdots \\ (a_k)_n \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^n$ eine Folge und sei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{zu zeigen:} \qquad \lim_{k\to\infty} (a_k) = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} (a_k)_j = a_j \quad \forall\ j = 1, ..., n$$

es gilt:

$$|(a_k)_j - a_j| = \sqrt{|(a_k)_j - a_j|^2} \leqslant \underbrace{\sqrt{|(a_k)_1 - a_1|^2 + ... + |(a_k)_n - a_n|^2}}_{=\|(a_k)-a\|_2} \leqslant \sqrt{n} \max_{j\in\{1,...,n\}} ((a_k)_j - a_j)$$

Gilt $\lim_{k\to\infty} \max_{j\in\{1,...,n\}} ((a_k)_j - a_j) \to 0$ so gehen auch alle andere Komponenten gegen Null.

b)

Wegen $(a_k) \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt gilt:

$$\exists\ c > 0 \text{ mit } \|(a_k)\| < c \quad \forall k$$

Weiter gilt:

$$c > \|(a_k)\| > \| \underbrace{(a_k) \cdot e_i}_{=(b_k)} \| \text{ mit } (b_k) \subset (a_k)$$

Aus der Konstruktion von (b_k) folgt:

$$(b_k) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (b_k)_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei ist $(b_k)_i$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt diese eine konvergente Teilfolge.