Michael Lehn
Tobias Speidel

SoSe 2019
Blatt 8, 39 Punkte

Übungen zur Höheren Mathematik II *

Abgabe am 25.06.2019 vor Beginn der Übung im Hörsaal 2

33. Überprüfen Sie, ob für die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy + 3x^2 z \\ x^2 + 3y^2 z^2 \\ x^3 + 2y^3 z \end{pmatrix}$$

ein Potential existiert und bestimmen Sie jenes unter gegebener Existenz.

(4 Punkte)

34. Es sei $Q \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 2,\, 3 \leq y \leq 4\}$. Berechnen Sie das Bereichsintegral

$$\int_Q \mathrm{d}(x,y)\, 2x + 3y$$

durch Berechnung von

$$\int_3^4 \int_0^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, 2x + 3y\,.$$

(4 Punkte)

35. Berechnen Sie die folgenden ebenen sowie räumlichen Bereichsintegrale.

a) $\displaystyle\iint_\Sigma f(x,y)\mathrm{d}s$ mit $f(x,y) = xy$ und $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2\}$.

b) $\displaystyle\iint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}s$ mit $f(x,y,z) = xyz$ und $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x^2 \wedge 0 \leq z \leq xy\}$.

c) $\displaystyle\iiint_{1 \leq 4(x^2+y^2+z^2) \leq 3} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$.

(3 + 4 + 5 Punkte)

36. Berechnen Sie jeweils das Bereichsintegral $\int_M f$ und skizzieren Sie die zugehörige Menge M.

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x(1+x^2+y^2)}$, $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 3, x \geq 0, |y| \leq x\right\}$.

b) $f(x,y,z) = \log\left(1+x^2+y^2+z^2\right)$, $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}$.

(je 6 Punkte)

* Allgemein gilt: Ergebnisse sind immer zu begründen. Des Weiteren sind falsche Aussagen durch ein Gegenbeispiel zu widerlegen. Ergebnisse sind nachvollziehbar darzustellen und analytisch so weit wie möglich zu vereinfachen.

37. Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x,y) = (y^2+2, x^2+1)^T$. Berechnen Sie die Integrale

$$\text{i.)} \iint\limits_D f_1 \,\Delta\, f_2 - f_2 \,\Delta\, f_1 \,\mathrm{d}(x,y) \qquad\qquad \text{ii.)} \int_{\partial D} f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \boldsymbol{\nu}} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial \boldsymbol{\nu}} \,\mathrm{d}s$$

wobei $D = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le \|\boldsymbol{x}\| \le R \right\}$ ist. Versuchen Sie darüber hinaus zu verstehen, warum die beiden Integrale identisch sind.

Hinweis: Sofern nicht anders angegeben werden Ränder von Mengen immer im mathematisch positiven Sinne durchlaufen, d.h. mit nach außen zeigender Normalen $\boldsymbol{\nu}$ und derart, dass die Menge stets zur Linken liegt.

(7 Punkte)

Ergänzende Aufgaben

A. Berechnen Sie die folgenden Bereichsintegrale.

a) $\displaystyle\int_M y\,, \quad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2 \leq 4, y \geq 1\right\}.$

b) $\displaystyle\int_M y\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 1 \leq x^2+y^2 \leq 9, y \geq 0\right\}.$

c) $\displaystyle\int_M \|\boldsymbol{x}\|\,, \quad M = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\right\}.$

B. Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x,y) = (x,y)^T$. Berechnen Sie die Integrale

i.) $\displaystyle\iint_D \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y)\, \mathrm{d}(x,y)$ ii.) $\displaystyle\int_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\nu}$

wobei $D = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq R\right\}$ ist. Warum stimmen die beiden Ergebnisse überein und welche Bedingungen müssen hierzu im Allgemeinen erfüllt sein?

C. Sei $\boldsymbol{N}(t) = (\cos t, \sin t)^T$ und $\boldsymbol{T}(t) = (-\sin t, \cos t)$ jeweils der Normalenvektor und Tangentialvektor an einen Kreis und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^2$ jeweils konstant. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \langle \boldsymbol{F}, \boldsymbol{N}(t)\rangle\, \mathrm{d}t = 0.$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \langle A\boldsymbol{N}(t), \boldsymbol{N}(t)\rangle\, \mathrm{d}t = \pi \operatorname{tr} A.$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \langle A\boldsymbol{N}(t), \boldsymbol{T}(t)\rangle\, \mathrm{d}t = \pi(a_{21} - a_{12}).$

D. Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x,y) = (x,y)^T$. Berechnen Sie die Integrale

i.) $\displaystyle\iint_D \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x,y)\, \mathrm{d}(x,y)$ ii.) $\displaystyle\int_{\partial D} \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\nu}$

wobei $D = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq \|\boldsymbol{x}\| \leq R\right\}$ ist. Warum stimmen die beiden Ergebnisse überein und welche Bedingungen müssen hierzu im Allgemeinen erfüllt sein?