Blatt 1

Ruedi Lüthi

30. April 2019

1.

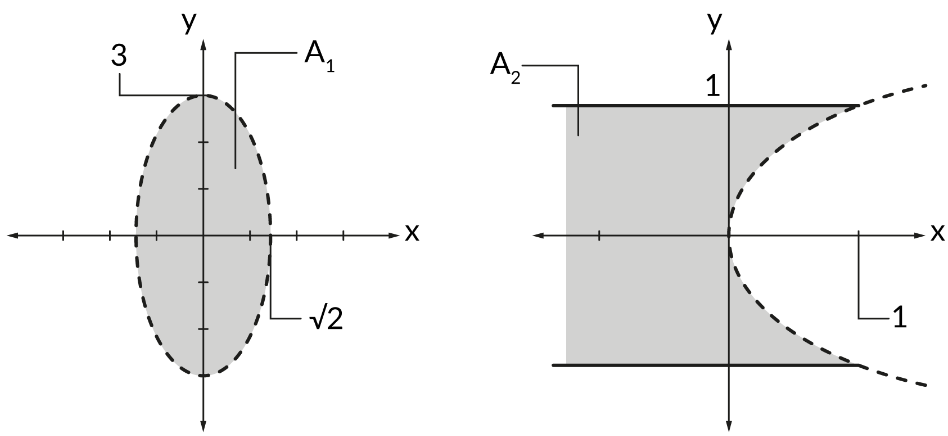

Abbildung 1: Die Teilmengen A_1 und A_2

i.)

$$\mathring{A}_1 = A$$

$$\overline{A}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} \leqslant 1 \right\}$$

$$\partial A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\}$$

$$A_1' = \overline{A}$$

$$\mathring{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x < y^2 \;\wedge\; |y| < 1 \right\}$$

$$\overline{A}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \leqslant y^2 \;\wedge\; |y| \leqslant 1 \right\}$$

$$\partial A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = y^2 \;\wedge\; |y| \leqslant 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |y| = 1 \;\wedge\; x \leqslant 1 \right\}$$

$$A_2' = \overline{A}$$

ii.) A_1 ist offen, A_2 nicht

iii.) A_1, A_2 sind nicht abgeschlossen

iv.) A_1 ist beschränkt, A_2 nicht

2.

Sei $\mathcal{O}_j \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige abgeschlossene Menge. Nun wissen wir nach Satz 1.1.7, wenn $\mathcal{O}_j$ abgeschlossen ist, dass das Komplement $(\mathcal{O}_j)^c$ offen ist. Also gilt für die Vereinigung der Komplemente zweier offene Mengen $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ nach den De Morganschen Gesetzen:

$$A = (\mathcal{O}_1)^c \cup (\mathcal{O}_2)^c \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2)^c = A$$

Weiter wissen wir wegen Satz 1.1.8, dass die Vereinigung zweier beliebigen offener Mengen wiederum offen ist, also muss A offen sein. Wiederum nach Satz 1.1.7 ist das Komplement A^c aber abgeschlossen:

$$A^c = ((\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2)^c)^c = \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$$

und somit also auch der Durchschnitt der abgeschlossenen Mengen $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$.

Die Behauptung für beliebig viele Mengen folgt wiederum über Induktion:

$$A = \mathcal{O}_1 \cap \underbrace{(\mathcal{O}_2 \cap \mathcal{O}_3 \cap ... \cap \mathcal{O}_n)}_{\mathcal{O}_2'}$$

3.

a)

Betrachten wir die Funktion f für $x \neq 0$ und $y \neq 0$ und transformieren in Polarkoordinaten $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$:

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\phi \cdot r\sin\phi}{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi} = \frac{\cos\phi\sin\phi}{\cos^2\phi + \sin^2\phi} = \cos\phi\sin\phi = f(r,\phi)$$

Weiter betrachten wir:

$$\lim_{r\to 0} f(r,\phi) = \cos\phi\sin\phi$$

Da $\lim_{r\to 0} f\left(r, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \neq 0 = \lim_{r\to 0} f(r,\pi)$ kann die Funktion <u>nicht stetig</u> sein.

b)

Mit ε-δ-**Kriterium** (nach <u>Musterlösung</u>):
Bemerkung: Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) zwei metrische Räume und $D \subset M_1$. So ist eine Funktion $f : D \to M_2$ genau dann stetig in $a \in D$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ existiert, so dass für $x \in D$ gilt $d_1(x,a) < \delta_\varepsilon \to d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad : \quad d_1(x,a) < \delta_\varepsilon \to d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall\, x \in D$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ sowie $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U_{\delta_\varepsilon}(0)$. Dann gilt für $g(x)$ stetig:

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |x| < \delta_\varepsilon \\ |y| < \delta_\varepsilon \end{cases}$$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} - 0 \right| \overset{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leqslant} \frac{|x|^5}{x^4+y^4} + \frac{|y|^5}{x^4+y^4}$$

$$\overset{\substack{x\neq 0 \\ y\neq 0}}{=} |x|\frac{1}{1 + \frac{y^4}{|x|^4}} + |y|\frac{1}{\frac{x^4}{|y|^4} + 1} \leqslant \underbrace{|x|}_{<\delta_\varepsilon} + \underbrace{|y|}_{<\delta_\varepsilon} < 2\delta_\varepsilon = \epsilon$$

Mit **Folgenkriterium** (entspricht nicht der Musterlösung):
Dasselbe

$$f(x,y) = \frac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} = \frac{r^5(\cos^5\phi - \sin^5\phi)}{r^4(\cos^4\phi + \sin^4\phi)} = r\frac{\cos^5\phi - \sin^5\phi}{\cos^4\phi + \sin^4\phi} = f(r,\phi)$$

wiederum

$$\lim_{r\to 0} f(r,\phi) \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} f\left(x_n,\phi\right) \quad \text{mit} \quad (x_n) = \frac{\cos^4\phi + \sin^4\phi}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^4\phi + \sin^4\phi}{n} < \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 \quad \text{(Nullfolge)}$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n,\phi\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos^4\phi + \sin^4\phi}{n} \frac{\cos^5\phi - \sin^5\phi}{\cos^4\phi + \sin^4\phi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\cos^5\phi - \sin^5\phi) < \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

Da $\lim_{n\to\infty} f\left(x_n,\phi\right) = 0$ und $f(x_0) = 0$ ist die Funktion stetig.

4.

a)

Für das Zeichnen der Höhenlinie mit Wert c stellen wir um:

$$\begin{aligned} f(x,y) = 4x^2 - 9y^2 = c \quad &\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{4x^2 - c}{9} \\ &\Rightarrow \quad y_{1,2} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{4x^2 - c} = h(x,c) \end{aligned}$$

und zeichnen mittels der Funktion $h(x,c)$ diese im entsprechenden Definitionsbereich $\left\{x \in [-1,1] : 4x^2 - c > 0\right\}$:

b)

Partiell ableiten:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} frac\partial\partial x 4x^2 - 9y^2 & = & 8x \\ \frac{\partial}{\partial y} 4x^2 - 9y^2 & = & -18y \end{pmatrix}$$

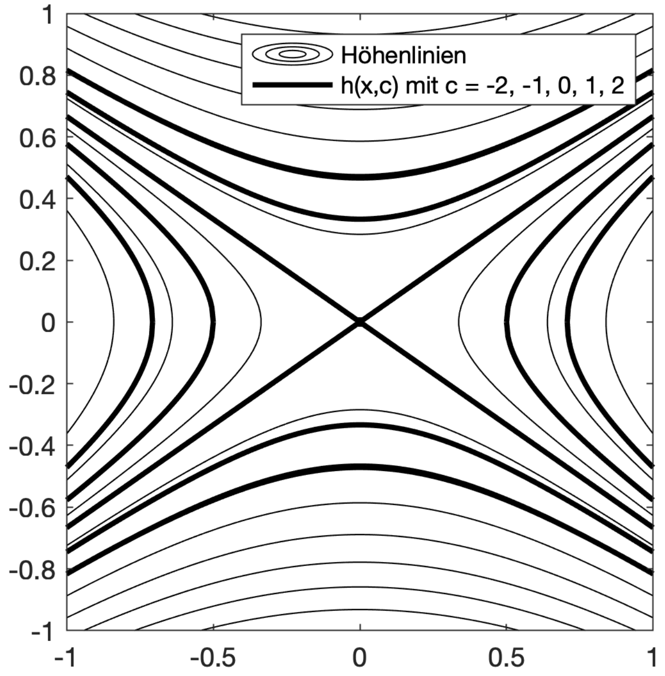

Abbildung 2: Die Höhenlinien der Funktion $f(x, y)$

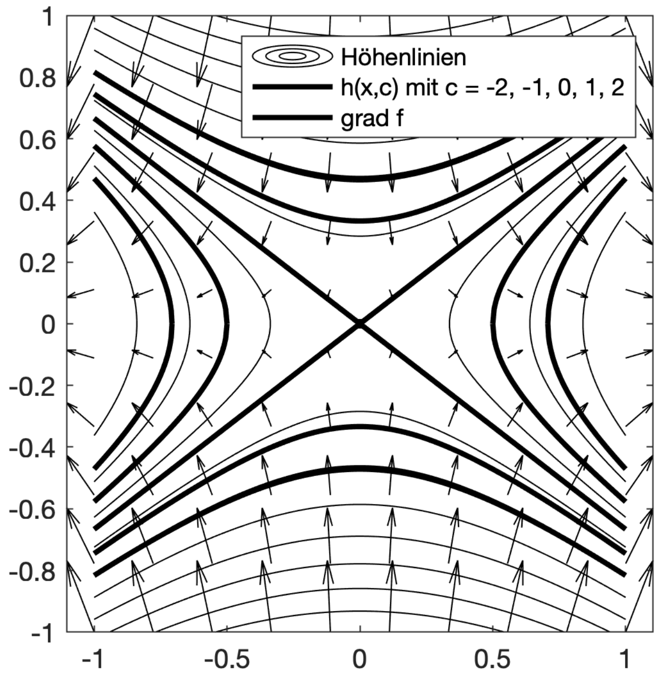

Abbildung 3: Vektorfeld $\nabla f(x, y)$