Inhaltsverzeichnis

Einführung

0.1 Stetigkeit in einer Dimension

f ist stetig in x_0

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\,(x_n) \ \text{ mit } \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \text{ gilt } \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta \quad \text{mit} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Der Grenzwert von Funktionen ist über den Grenzwert von Folgen definiert und kann auch nur so überprüft werden.

0.2 Zwei Sonderfälle

Skalarfeld

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Visualisierung durch Höhenlinien: $H_c := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$
Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$

Vektorfeld

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
Beispiel: $f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Kapitel 1

Differentialrechnung in höheren Dimensionen

1.1 Topologie

Skalarprodukt

Definition: $\langle x, y \rangle := x^\top y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$

Euklidische Norm

Definition: $\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$

1.1.1 Korollar

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

1. $$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k| \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$$

2. Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

   $$\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n \quad : \quad |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

   Begründung (nicht Beweis!) durch alternative Definition: $\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \underbrace{\cos \alpha}_{\leqslant 1}$

   Dabei ist α der Winkel der zwischen x und y eingeschlossen wird.
   Daraus folgt:

   $$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow x, y \text{ sind lin. unabhängig} : x = \lambda y \text{ oder } y = \lambda x \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}$$

3. $\|\cdot\|$ ist eine Norm. Eine Norm hat folgende Eigenschaften:

   (i) $\|x\| \geqslant 0$ und $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

   (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

   (iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ Dreiecksungleichung

1.1.2 Konvention

Für $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt für das Komplement $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

1.1.3 Definition der ε-Umgebung

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$, dann gilt für die ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von x_0:

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

Bemerkung: Die punktierte ε-Umgebung ist definiert als: $\dot{U}_\varepsilon = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$

1.1.4 Topologische Grundbegriffe

Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, dann heißt ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$

(i) ein **innerer Punkt**, wenn gilt $\exists\ \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x_0) \subset A$
Menge aller inneren Punkte: $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists\ \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \subset A\}$

(ii) ein **Berührungspunkt**, wenn $\forall\ \varepsilon > 0$ gilt $U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing$
abgeschlossene Hülle: $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall\ \varepsilon > 0 \text{ gilt } U_\varepsilon(x_0) \neq \varnothing\}$

(iii) ein **Häufungspunkt**, wenn $\forall\ \varepsilon > 0$ gilt $(U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \varnothing$
Die Menge aller Häufungspunkte wird mit A' bezeichnet.

(iv) ein **Randpunkt**, wenn $\forall\ \varepsilon > 0$ gilt $U_\varepsilon(x_0) \cap A \neq \varnothing$ und $U_\varepsilon(x_0) \cap A^c \neq \varnothing$
Menge aller Randpunkte oder auch **Rand** von A wird mit ∂A bezeichnet.

Korollar

(i) $\mathring{A} \subset A$

(ii) $\mathring{A} \subset \overline{A}$

(iii) $\partial A \subset \overline{A}$

(iv) $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$

(v) $\overline{A} = A \cup \partial A$ (schwächere Aussage als (iv))

1.1.5 Definition von offen und abgeschlossen

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt

(i) **offen**, wenn $A = \mathring{A}$ gilt (A besteht nur aus inneren Punkten)

(ii) **abgeschlossen**, wenn $\partial A \subset A$ gilt (wenn der Rand in der Menge enthalten ist)

1.1.6 Beispiele

1. Jede ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0 \in \mathbb{R}^n)$ ist offen

2. Sei $I \subset \mathbb{R}$, dann gilt

   (i) I ist offen, wenn $I = (a, b)$ mit $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant \infty$
   für $a = b$ gilt $I = \varnothing$ mit I offen
   und für $a = -\infty, b = \infty$ ist I auch offen

(ii) I ist abgeschlossen, wenn $I = [a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
oder $I = (-\infty, b]$ oder $I = [a, \infty)$ oder $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

(die reellen Zahlen sind offen und abgeschlossen zugleich)

1.1.7 Satz

für $A \subset \mathbb{R}^n$ sind folgenden Aussagen äquivalent:

(i) A ist abgeschlossen $A = \overline{A}$

(ii) A enthält alle Häufungspunkte, $A' \subset A$

(iii) A enthält alle Randpunkte, $\partial A \subset A$

(iv) A^c ist offen

1.1.8 Satz

(i) $\varnothing$ und $\mathbb{R}^n$ sind offen.

(ii) Die Vereinigung beliebig vieler offene Mengen ist offen:

$$\bigcup_{j \in J} (O_j \text{ offen}) = O \text{ offen}$$

(iii) Der Durchschnitt <u>endlich</u> vieler offener Mengen ist offen:

$$\bigcap_{j=1}^{n} (O_j \text{ offen}) = O \text{ offen}$$

Bemerkung: Für unendlich viele offene Mengen gilt dies nicht immer:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = (-1, 1) \cap \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \cap ... = \{0\} \text{ abgeschlossen}$$

1.1.9 Satz

(i) $\varnothing$ und $\mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen.

(ii) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen:

$$\bigcap_{j \in J} (A_j \text{ abgeschlossen}) = A \text{ abgeschlossen}$$

(iii) Die Vereinigung <u>endlich</u> vieler abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen:

$$\bigcup_{j=1}^{n} (A_j \text{ abgeschlossen}) = A \text{ abgeschlossen}$$

Bemerkung: Für unendlich viele abgeschlossene Mengen gilt dies nicht immer:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = \{0\} \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup ... = (-1, 1) \text{ offen}$$

1.1.10 Definition von beschränkt und kompakt

Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt:

(i) **beschränkt** wenn $\exists\ c > 0$ mit $\|x\| < c \quad \forall\ x \in A$

(ii) **kompakt**, wenn A abgeschlossen und beschränkt ist.

1.2 Folgen

1.2.1 Definition von Konvergenz und Beschränktheit

Eine Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ heißt

(i) **konvergent**, wenn gilt

$$\exists\ a \in \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad \forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N(\varepsilon): \quad \|a_k - a\| \quad \forall\ k \geqslant N(\varepsilon)$$

Dann ist a der Grenzwert der Folge:

$$a = \lim_{k\to\infty} a_k \quad \text{oder} \quad a_k \overset{k\to\infty}{\to} a$$

(ii) **beschränkt**, wenn $\exists\ c > 0$ mit $\|a_k\| < c \quad \forall\ k$

1.2.2 Bemerkung

Wenn eine Folge $(a_k) = \begin{pmatrix} \left(a_1^{(k)}\right) \\ \vdots \\ \left(a_n^{(k)}\right) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, so gilt

(i) $\Leftrightarrow$ jede Komponente $\left(a_1^{(k)}\right), ..., \left(a_n^{(k)}\right)$ konvergiert:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} a_i^{(k)} = a_i \quad \text{für } i = 1, ..., n$$

(ii) $\Leftrightarrow$ (a_k) erfüllt das **Cauchy-Kriterium**:

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ N(\varepsilon): \quad \|a_k - a_l\| < \varepsilon \quad \forall\ k, l \geqslant N(\varepsilon)$$

(iii) $\Leftrightarrow$ jede Teilfolge von (a_k) konvergiert gegen a: $a_{l_k} \overset{k\to\infty}{\to} a$ für $l_1 \geqslant 1, l_2 \geqslant 2, ...$

(iv) der Grenzwert a ist eindeutig.

1.2.3 Satz von Bolzano Weierstraß

Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^n$ besitzt einen konvergente Teilfolge.

Beispiel: Sei $(a_k) = \begin{pmatrix} (x_k) \\ (y_k) \end{pmatrix}$ eine beschränkte Folge im $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow (x_k), (y_k)$ sind beschränkte Folgen

$\overset{\substack{\text{Satz von} \\ \text{Bolzano} \\ \text{Wierstraß}}}{\Rightarrow} \exists\ (x_k), (y_k)$ sind konvergent

1.2.4 Abschließende Bemerkungen

(i) Grenzwert Rechenregeln können aus dem $\mathbb{R}$ für $\mathbb{R}^n$ übernommen werden.
z.b. $a_k \overset{k\to\infty}{\to} a, \quad b_k \overset{k\to\infty}{\to} b \quad \Rightarrow \quad a_k^\top b_k \overset{k\to\infty}{\to} a^\top b$

(ii) Es gibt viele Zusammenhänge zwischen den Eigenschaften von Folgen und den topologischen Eigenschaften von Mengen.
z.b. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ein Häufungspunkt
$\Leftrightarrow \quad \exists (a_k)_{k=1}^\infty$ mit $a_k \in A \setminus \{a\} \,\forall\, k$ und $a_k \overset{k\to\infty}{\to} a$

1.3 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

1.3.1 Definition

Eine Funktion $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nennt man eine Funktion mit n-Veränderlichen.

$$f(x_1, ..., x_n) = f(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad f_1, ..., f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

1.3.2 Definition Grenzwert/Limes

Sei $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $a \in \overline{A}$. Ein $b \in \mathbb{R}^m$ heißt Grenzwert von f für $x \to a$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \|f(x) - b\| < \varepsilon \quad \forall\, x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)} \cap A$$