

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zahlendarstellung, Fehler und mehr</b>	<b>3</b>
1.1	Fehler . . . . .	3
1.2	Aufwand . . . . .	3
1.3	Plots . . . . .	3
1.4	Kondition . . . . .	3
1.4.1	Konditionszahl . . . . .	4
1.5	Spezielle Matrizen . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Explizite Lösungsverfahren</b>	<b>5</b>
2.1	Gauß . . . . .	5
2.1.1	Aufwand . . . . .	6
2.2	Cholesky . . . . .	6
2.2.1	Bandstruktur . . . . .	7
2.2.2	Aufwand . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Lineare Ausgleichsprobleme</b>	<b>9</b>
3.1	Methode der kleinsten Quadrate . . . . .	9
3.2	Normalengleichung . . . . .	10
3.3	QR-Zerlegung . . . . .	10
3.3.1	Householder Spiegelungen . . . . .	10
3.3.2	Givens Rotationen . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Iterative Verfahren</b>	<b>13</b>
4.1	Richardson . . . . .	14
4.2	Jacobi . . . . .	14
4.3	Gauß-Seidel . . . . .	15
4.3.1	Satz von Stein/Rosenberg . . . . .	15
4.4	Gradienten . . . . .	15
4.4.1	Konvergenz . . . . .	16
4.5	Konjugierte Gradienten . . . . .	16
4.5.1	Konvergenz . . . . .	17
4.5.2	Vorkonditionierer . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Berechnung von Eigenwerten</b>	<b>19</b>
5.1	Abschätzungen zur Lage . . . . .	19
5.1.1	Matrixnorm . . . . .	19
5.2	Potenzmethode . . . . .	20
5.2.1	Inverse Iteration nach Wielandt . . . . .	20
5.2.2	Shift . . . . .	21

5.3	QR-Verfahren . . . . .	21
5.3.1	Hessenbergform . . . . .	21
5.3.2	Shift . . . . .	22
5.4	Singulärwertzerlegung . . . . .	22
5.4.1	Pseudoinverse . . . . .	23
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>25</b>
6.1	Norm . . . . .	25
6.2	Matrixnormen . . . . .	25
6.3	Irreduzible Matrizen . . . . .	25

# Kapitel 1

## Zahlendarstellung, Fehler und mehr

### 1.1 Fehler

Sei  $x$  der exakte Wert und  $\tilde{x}$  die numerische Näherung so gilt:

$$\begin{aligned} \text{absoluter Fehler :} & \quad |x - \tilde{x}| \\ \text{relativer Fehler :} & \quad \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|} \end{aligned}$$

Die Maschinengenauigkeit wird mit  $\text{eps} = 10^{-16}$  bezeichnet.

### 1.2 Aufwand

Vektor mal Vektor Matrix mal Vektor Matrix Matrix Multiplikation

### 1.3 Plots

$$\begin{aligned} \text{loglog :} \quad y = bx^a & \Rightarrow \underbrace{\log(y)}_{\tilde{y}} = \log(bx^a) = \log b + a \cdot \underbrace{\log x}_{\tilde{x}} \Rightarrow \begin{cases} \log b & \text{Verschiebung} \\ a & \text{Steigung} \end{cases} \\ \text{semilogy :} \quad y = a^x & \Rightarrow \underbrace{\log y}_{\tilde{y}} = \log(a^x) = x \cdot \log a \Rightarrow \begin{cases} \log a & \text{Steigung} \end{cases} \end{aligned}$$

### 1.4 Kondition

Eigenschaft des Problems (Stabilität ist Eigenschaft des Algorithmus).

Sei  $\varphi$  eine Funktion welches das Problem beschreibt und sei  $\tilde{x} = x+h$  die um  $h$  gestörten

Eingabedaten, so gilt mittels Taylor:

$$\begin{aligned}
 \varphi(\tilde{x}) &\approx \varphi + \varphi'(x)(x - \tilde{x}) + o(\|x - \tilde{x}\|^2) \\
 \Leftrightarrow \quad \frac{\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x)}{\varphi(x)} &= \frac{\varphi'(x)(x - \tilde{x})}{\varphi(x)} \cdot \frac{x}{x} \\
 \Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{|\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x)|}{|\varphi(x)|}}_{\text{rel. Fehler}} &= \underbrace{\left| \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} x \right|}_{\text{Konditionszahl } \kappa} \cdot \underbrace{\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}}_{\text{rel. Fehler der Eingabe}}
 \end{aligned}$$

Für  $A$  s.p.d. gilt  $\kappa(A^\top A) = (\kappa(A))^2 \rightarrow$  Kondition verschlechtert sich im Quadrat!

### 1.4.1 Konditionszahl

Allgemein gilt :  $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$

weiter gilt :  $\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$

## 1.5 Spezielle Matrizen

Diagonaldominant :  $|a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n |a_{i,k}|$  (Diagonalelement größer als die Summe der restlichen Zeile)

## Kapitel 2

# Explizite Lösungsverfahren

### 2.1 Gauß

Lösen des Gleichungssystems  $Ax = b$  mittels  $LR$ -Zerlegung:

$$\begin{aligned} A = L \cdot R &\quad \Rightarrow \quad Ax = b \\ &\quad \quad \quad L \underbrace{Rx}_{=:y} = b \\ &\quad \quad \quad Ly = b, \quad Rx = y \end{aligned}$$

Dabei wird  $L^{(k)}$  (Frobeniusmatrix) wie folgt konstruiert:

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -\frac{a_{(j+1),j}^{(k)}}{a_{j,j}^{(k)}} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -\frac{a_{n,j}^{(k)}}{a_{j,j}^{(k)}} & & 1 \end{pmatrix}, \quad \left(L^{(k)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \frac{a_{(j+1),j}^{(k)}}{a_{j,j}^{(k)}} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & \frac{a_{n,j}^{(k)}}{a_{j,j}^{(k)}} & & 1 \end{pmatrix}$$

und es gilt:

$$\begin{aligned} L^{(n-1)} L^{(n-2)} \dots L^{(1)} A &= R \\ L^{(n-2)} \dots L^{(1)} A &= \left(L^{(n-1)}\right)^{-1} R \\ &\vdots \\ A &= \underbrace{\left(L^{(1)}\right)^{-1} \dots \left(L^{(n-2)}\right)^{-1} \left(L^{(n-1)}\right)^{-1}}_L R \end{aligned}$$

### Pivotstrategie

Durch Vertauschen von Zeilen mittels Pivotstrategie kann immer eine  $LR$ -Zerlegung für eine reguläre Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gefunden werden:

$$PA = LR$$

Vertauscht wird mittels Permutationsmatrizen  $P^{(k)}$ :

$$L^{(n-1)}P^{(n-1)} \dots L^{(1)}P^{(1)}A = R$$

Um die Permutationen korrekt auf die rechte Seite  $b$  anwenden zu können, muss folgendermaßen umsortiert werden:

$$\tilde{L}^{(k)} = P^{(n-1)} \dots P^{(k+1)} L^{(k)} \left(P^{(k+1)}\right)^{-1} \dots \left(P^{(n-1)}\right)^{-1}$$

Damit ist:

$$\underbrace{\tilde{L}^{(n-1)} \dots \tilde{L}^{(1)}}_{L^{-1}} \underbrace{P^{(n-1)} \dots P^{(1)}}_P A = L^{(n-1)} P^{(n-1)} \dots L^{(1)} P^{(1)} A = R$$

$$\Leftrightarrow LL^{-1}PA = PA = LR$$

### 2.1.1 Aufwand

Verfahren:

$$\mathcal{O}(n^3)$$

Rückwärtseinsetzen:

$$Ly = \begin{pmatrix} l_{1,1} & & \\ \vdots & \ddots & \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b$$

$$y_n = \frac{1}{l_{n,n}} \left( b_n - \sum_{j=1}^{n-1} y_j l_{n,j} \right) \Rightarrow \underbrace{n-2+1}_{\text{Additionen}} + \underbrace{n-1}_{\text{Multiplikationen}} + \underbrace{1}_{\text{Division}} = 2(n-1) + 1$$

$$\text{FLOPS : } \sum_{i=1}^n 2(i-1) + 1 = 2 \left( \sum_{i=1}^n i - 1 \right) + n = 2 \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n 2 + n$$

$$= 2 \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) - 2n + n = n^2 \Rightarrow \mathcal{O}(n^2)$$

## 2.2 Cholesky

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  s.p.d. dann  $\exists!$  eine Zerlegung mit  $A = LDL^T$  mit  $(l_{i,i}) = 1$  (unipotent) und  $(d_{i,i}) \geq 0$ . Sei  $\tilde{L} = LD^{\frac{1}{2}}$  mit  $D^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\pm\sqrt{d_{i,i}})$  so gilt  $A = \tilde{L}\tilde{L}^T$  (wobei diese Zerlegung wegen dem Vorzeichen nicht eindeutig ist).

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & & & \\ l_{2,1} & l_{2,2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n,1} & \dots & \dots & l_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{1,1} & l_{2,1} & \dots & l_{n,1} \\ & l_{2,2} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{n,n} \end{pmatrix}$$

Also gilt für die Spalte  $k$ :

$$\begin{aligned}
 i = k : \quad & a_{1,1} = l_{1,1}^2 \\
 & a_{2,2} = l_{2,1}^2 + l_{2,2}^2 \\
 & \vdots \\
 & a_{k,k} = \sum_{j=1}^k l_{k,j}^2 = l_{k,k}^2 + \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j}^2 \quad \Leftrightarrow \quad l_{k,k} = \sqrt{a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{k,j}^2} \\
 k < i \leq n : \quad & a_{2,1} = l_{2,1}l_{1,1} \\
 & a_{3,1} = l_{3,1}l_{1,1} \\
 & \vdots \\
 & a_{n,1} = l_{n,1}l_{1,1} \\
 & a_{3,2} = l_{3,1}l_{2,1} + l_{3,2}l_{2,2} \\
 & \vdots \\
 & a_{i,k} = \sum_{j=1}^k l_{i,j}l_{k,j} = l_{i,k}l_{k,k} + \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j}l_{k,j} \quad \Leftrightarrow \quad l_{i,k} = \frac{1}{l_{k,k}} \left( a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j}l_{k,j} \right)
 \end{aligned}$$

Existiert eine Cholesky-Zerlegung so ist die Matrix  $A$  sicher positiv definit!

### 2.2.1 Bandstruktur

Hat eine Matrix Bandstruktur mit Bandbreite  $m < n$ , so müssen jeweils nur die  $l_{i,k}$  bis  $k < i < k + m$  bestimmt werden.

### 2.2.2 Aufwand

Verfahren:

$$\text{FLOPS : } \frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2) = \mathcal{O}(n^3) \quad (\text{etwa halber Aufwand von Gauß für große } n)$$

Mit Bandstruktur der Breite  $m$ :

$$\text{FLOPS : } n(m^3 + 2m) - \frac{4m^3 + 9m^2 + 5m}{6} + n \Rightarrow \mathcal{O}(n) \text{ für konstante } m$$





## Kapitel 3

# Lineare Ausgleichsprobleme

### Vandermonde Matrizen

Das Gleichungssystem für Messwerte  $f(x_i), x_i \in \mathbb{R}^n$  für ein Polynom vom Grade  $p$  mit den Koeffizienten  $a_p, \dots, a_1, a_0$  kann mittels einer Vandermonde-Matrix beschrieben werden:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_0^p & x_1^p & \dots & x_n^p \end{pmatrix}$$
$$V^\top a = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^p \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^p \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_p x_0^p + \dots + a_1 x_0 + a_0 \\ a_p x_1^p + \dots + a_1 x_1 + a_0 \\ \vdots \\ a_p x_n^p + \dots + a_1 x_n + a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = f$$
$$VV^\top a = Vf \quad \overset{A=V^\top}{\Leftrightarrow} \quad \text{Normalengleichung:} \quad A^\top Ax = A^\top f$$

### 3.1 Methode der kleinsten Quadrate

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $m \geq n$  und  $b \in \mathbb{R}^m$ :

Finde ein  $x^* \in \mathbb{R}^n$  für das  $\|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min$  gilt  $\Leftrightarrow x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$

*Bemerkung:* Gilt  $\text{rang}(A) = n \Rightarrow \exists! x^* \in \mathbb{R}^n$  (es existiert genau eine Lösung)

### 3.2 Normalengleichung

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min \\
 f(x) &= (Ax - b)^\top (Ax - b) = \left(x^\top A^\top - b^\top\right) (Ax - b) \\
 &= x^\top A^\top Ax - \underbrace{x^\top A^\top b}_{(Ax)^\top b = b^\top Ax} - b^\top Ax + b^\top b \\
 &= x^\top A^\top Ax - 2(Ax)^\top b + b^\top b \rightarrow \min \\
 \Leftrightarrow f'(x) &= 2A^\top Ax - 2A^\top b \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Leftrightarrow \underbrace{A^\top A}_{\tilde{A}} x - A^\top b &= 0 \\
 f''(x) &= A^\top A \quad \text{ist pos. definit da } x^\top A^\top Ax = (Ax)^\top Ax = \|Ax\|_2^2 > 0
 \end{aligned}$$

Für die Kondition gilt:  $\kappa(\tilde{A}) = \kappa(A^\top A) = (\kappa(A))^2$ .

### 3.3 QR-Zerlegung

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\hat{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\begin{aligned}
 \|Ax - b\|_2^2 &\stackrel{\text{längen}}{\text{erhaltend}} \|Q^\top (Ax - b)\|_2^2 = \|Q^\top QRx - Q^\top b\|_2^2 \stackrel{Q^\top b = c}{=} \|Rx - c\|_2^2 \\
 &= \left\| \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} \hat{c} \\ \tilde{c} \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \hat{R}x - \hat{c} \\ -\tilde{c} \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \|\hat{R}x - \hat{c}\|_2^2 + \|\tilde{c}\|_2^2 \rightarrow \min! \\
 \Rightarrow \|\hat{R}x - \hat{c}\|_2^2 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{R}x = \hat{c}
 \end{aligned}$$

Verfahren ist stabil da mit orthogonalen Matrizen  $Q$ .

Aufwand:  $\mathcal{O}(n^3)$

#### 3.3.1 Householder Spiegelungen

Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  wird mit einer linearen Transformation  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  so gespiegelt, dass er auf einen Einheitsvektor  $e \in \mathbb{R}^n$  fällt. Dadurch werden alle Einträge im Vektor bis auf einen, welcher die Länge  $\alpha$  enthält, null.

$$\begin{aligned}
 Px &= \alpha e \quad \text{mit } \alpha = \pm \|x\| = \pm \sqrt{x^\top x} \\
 \text{Sei } P &= \mathbb{1} - 2 \frac{\omega \omega^\top}{\omega^\top \omega} \\
 \Rightarrow Px &= x - \underbrace{\omega 2 \frac{\omega^\top x}{\omega^\top \omega}}_{=\lambda \in \mathbb{R}} = x - \lambda \omega \stackrel{!}{=} \alpha e \quad \Leftrightarrow \quad \omega \in \text{span}\{x - \alpha e\} \\
 \Rightarrow \omega &= x \pm \sqrt{x^\top x} e = \begin{pmatrix} x_1 \pm \sqrt{x^\top x} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Lösung aufgrund unterschiedlichen Vorzeichen nicht eindeutig.  
Um Auslöschungen zu vermeiden gilt:

$$\omega = x_1 - \|x\| = \frac{(x_1 - \|x\|)(x_1 + \|x\|)}{x_1 + \|x\|} = \frac{x_1^2 - \|x\|^2}{x_1 + \|x\|} = \frac{-(x_2^2 + \dots + x_n^2)}{x_1 + \|x\|}$$

### 3.3.2 Givens Rotationen

Mittels Rotationen  $G_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  wird ein Element  $a_{q,p}$  der Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  auf null gesetzt.

$$G_i^\top A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & \dots & s & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & -s & \dots & c & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} * & & \dots & & * \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ * & \dots & a_{p,p} & \dots & a_{p,q} & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ * & \dots & a_{q,p} & \dots & a_{q,q} & \dots & * \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ * & & \dots & & & & * \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & & \dots & & * \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \tilde{*} & \dots & \tilde{a}_{p,p} & \dots & \tilde{a}_{p,q} & \dots & \tilde{*} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{*} & \dots & 0 & \dots & \tilde{a}_{q,q} & \dots & \tilde{*} \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ * & & \dots & & & & * \end{pmatrix}$$

mit  $\omega = \sqrt{a_{p,p}^2 + a_{q,p}^2}$   
 $s = \sin(\varphi) = -\text{sign}(a_{p,p}) \frac{a_{q,p}}{\omega}$   
 $c = \cos(\varphi) = \frac{a_{p,p}}{\omega}$

$$G_k^\top \dots G_1^\top A = R \Leftrightarrow A = G_1 \dots G_k R = QR$$

Aufwand für das Anwenden einer Givens-Rotation auf eine Matrix ist in  $\mathcal{O}(n)$  möglich, da sich ja jeweils nur die  $q$ -te und  $p$ -te Zeile ändert.



## Kapitel 4

# Iterative Verfahren

### Banach'scher Fixpunktsatz

Sei  $E \subset X \subset \mathbb{R}^n$  eine vollständige (keine offenen Intervalle) Menge oder ein Vektorraum und  $\phi : X \rightarrow X$  eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Selbstabbildung :  $\phi(E) \subset E$  *Bild ist wiederum in der Menge enthalten*
- (ii) Kontraktion :  $\|\phi(x) - \phi(y)\| < L\|x - y\| \quad \forall x, y \in E, \quad L < 1$

Dann gilt:

- (i)  $\exists!$  Fixpunkt  $x^*$
- (ii) Die Folge  $x_{n+1} = \phi(x_n)$  konvergiert  $\forall x_0 \in E$  gegen  $x^*$

Allgemein gilt für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  regulär und  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  leicht invertierbar mit  $b \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \Leftrightarrow Bx + Ax - Bx &= b \\ \Leftrightarrow Bx + (A - B)x &= b \\ \Leftrightarrow x &= B^{-1}(b - (A - B)x) = B^{-1}b - B^{-1}Ax + B^{-1}Bx \\ \Rightarrow x^{(k+1)} &= - \underbrace{B^{-1}(A - B)}_{=: C} x^{(k)} + B^{-1}b \\ \Leftrightarrow x^{(k+1)} &= \underbrace{(\mathbb{I} - B^{-1}A)}_{\text{Iterationsmatrix } =: C} x^{(k)} + B^{-1}b \end{aligned}$$

Zusätzlich wird für Jacobi und Gauß-Seidel folgende Definition benötigt:

$$\begin{aligned} A &= L + D + R \\ L &:= \text{untere Dreiecksmatrix} \\ R &:= \text{obere Dreiecksmatrix} \\ D &:= \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) \quad (\text{Diagonalelemente von } A) \end{aligned}$$

### Konvergenz

Falls für den **Spektralradius**  $\varrho(C)$  gilt:

$$\varrho(C) = \max_{i=1, \dots, n} \{|\lambda_i(C)|\} < 1$$

*In Worten:* Falls der betragsmäßig maximale Eigenwert der Iterationsmatrix  $C$  strikt kleiner ist als 1.

## 4.1 Richardson

Sei  $B = \gamma \mathbb{1}$  mit  $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , damit ist

$$\text{Iterationsmatrix : } C_R = \mathbb{1} - \frac{1}{\gamma} A$$

### Konvergenz

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch positiv definit und seien  $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$  der jeweils kleinste bzw. größte Eigenwert von  $A$ :

$$\begin{aligned} \gamma > \frac{\lambda_{\max}}{2} &\Rightarrow \rho(C_R(\gamma)) < 1 \Rightarrow \text{Konvergenz} \\ \gamma_{\text{opt}} = \frac{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}{2} &\Rightarrow \rho(C_R(\gamma)) \rightarrow \min \Rightarrow \text{optimale Konvergenz} \end{aligned}$$

## 4.2 Jacobi

Sei  $B = D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$  und  $B^{-1} = D^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{22}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}})$ , damit ist:

$$\begin{aligned} \text{Iterationsmatrix : } C_J &= D^{-1}(A - D) = D^{-1}(L + D + R - D) = D^{-1}(L + R) \\ &\Rightarrow Dx^{(k+1)} = -(L + R)x^{(k)} + b \end{aligned}$$

$$\text{für } i\text{-te Zeile : } a_{i,i} x_i^{(k+1)} = - \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right) + b_i$$

$$\Leftrightarrow x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{i,i}} \left( \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right) - b_i \right)$$

$$\Rightarrow \text{Gesamt-Schritt-Verfahren : } x_i^{(k+1)} \text{ kommt rechts nicht vor}$$

### Konvergenz

Starkes Zeilen-/Spaltensummen Kriterium  
oder schwaches Zeilen-/Spaltensummen + irreduzibel

### 4.3 Gauß-Seidel

Sei  $B = L + D$  (oder  $B = D + R$ ):

Iterationsmatrix :  $C_{GS} = B^{-1}(A - B) = D^{-1}(L + D + R - L - D) = (L + D)^{-1}R$

$$\Rightarrow (L + D)x^{(k+1)} = -Rx^{(k)} + b$$

$$\text{für } i\text{-te Zeile : } \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} \right) + a_{i,i} x_i^{(k+1)} = - \left( \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right) + b_i$$

$$\Leftrightarrow x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{i,i}} \left( \left( \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} x_j^{(k)} \right) + \left( \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} \right) - b_i \right)$$

$$\Rightarrow \text{Einzel-Schritt-Verfahren : } x_j^{(k+1)} \text{ bis } j < i - 1 \text{ kommt rechts vor}$$

#### Konvergenz

Starkes Zeilen-/Spaltensummen Kriterium  
oder schwaches Zeilen-/Spaltensummen + irreduzibel

#### 4.3.1 Satz von Stein/Rosenberg

Gilt für alle Elemente  $c_{ij}$  der Iterationsmatrix  $C_J$  des Jacobi-Verfahrens und  $\rho(C_J) < 1$  dann gilt:

$$\forall c_{ij} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \rho(C_{GS}) < \rho(C_J) < 1$$

Also konvergiert in diesem **speziellen** Fall das Gauß-Seidel-Verfahren schneller als das Jacobi-Verfahren.

### 4.4 Gradienten

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch positiv definit:

Minimiere die Funktion :  $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - x^\top b$

ist  $f'(x) = \nabla f(x) = Ax - b \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow Ax = b$  so ist  $x$  ein Minimum von  $f(x)$

da nach Voraussetzung  $f''(x) = H_f(x) = A$  positiv definit gilt (Hesse-Matrix).

Um nun das Minimum der Funktion  $f(x)$  zu finden, gehen wir von einem Startwert  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  in Schritten  $k = 1, 2, \dots$  in Richtung  $d^{(k)}$  des steilsten Abstieges:

$$\begin{aligned} d^{(k)} &= -\nabla f(x^{(k)}) = b - Ax^{(k)} = r^{(k)} \text{ (Residuum)} \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \lambda r^{(k)} \end{aligned}$$

Dabei ist die optimale Schrittweite  $\lambda$  genau so lang, bis es wieder hoch geht:

$$\begin{aligned}
 f(x + \lambda r) = F(\lambda) \rightarrow \min &\Leftrightarrow F'(\lambda_{\text{opt}}) \stackrel{!}{=} 0 \\
 F(\lambda) &= \frac{1}{2} (x + \lambda r)^\top A (x + \lambda r) - (x + \lambda r)^\top b \\
 &= \frac{1}{2} \left( x^\top A x + \underbrace{x^\top A \lambda r + \lambda r^\top A x}_{= 2\lambda r^\top A x \text{ (da skalar)}} + \lambda r^\top A \lambda r \right) - (x^\top b + \lambda r^\top b) \\
 &= \frac{1}{2} \lambda^2 r^\top A r + \lambda (r^\top A x - r^\top b) + \underbrace{\frac{1}{2} x^\top A x - x^\top b}_{= f(x)} \\
 F'(\lambda_{\text{opt}}) &= \lambda r^\top A r + r^\top A x - r^\top b \stackrel{!}{=} 0 \\
 \Rightarrow \lambda_{\text{opt}} &= \frac{r^\top b - r^\top A x}{r^\top A r} = \frac{r^\top \overbrace{(b - A x)}^r}{r^\top A r} = \frac{\langle r, r \rangle}{\langle r, A r \rangle}
 \end{aligned}$$

*Bemerkung:* Um nicht in jedem Schritt das Residuum erneut berechnen zu müssen gilt:  
 $r^{(k+1)} = b - A x^{(k+1)} = b - A (x^{(k)} + \lambda r^{(k)}) = \underbrace{b - A x^{(k)}}_{= r^{(k)}} - \lambda A r^{(k)} = r^{(k)} - \lambda A r^{(k)}$

Algorithmus für lineares Gleichungssystem  $Ax = b$ :

```

 $x^{(0)}$  = Startwert
 $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ 
FOR  $k = 1, 2, \dots$ 
     $a^{(k)} = Ar^{(k)}$     dieses Resultat wird mehrmals benötigt
     $\lambda_{\text{opt}} = \frac{\langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle}{\langle r^{(k)}, a^{(k)} \rangle}$     optimale Schrittlänge
     $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_{\text{opt}} r^{(k)}$     gehe einen Schritt
     $r^{(k+1)} = r^{(k)} + \lambda_{\text{opt}} a^{(k)}$     siehe Bemerkung oben
END

```

#### 4.4.1 Konvergenz

Für die exakte Lösung  $x^*$  gilt die Abschätzung:

$$\|x^* - x^{(k)}\|_A \leq \left( \frac{\kappa_2 - 1}{\kappa_2 + 1} \right)^k \cdot \|x^* - x^{(0)}\|_A$$

## 4.5 Konjugierte Gradienten

Information aus  $A$  wird verwendet um die Suchrichtung  $d^{(k)}$  besser zu bestimmen. Dazu wird das Energieskalarprodukt  $\langle x, y \rangle_A = x^\top A y = \langle x, A y \rangle_2$  verwendet.



Naiver Algorithmus:

```

 $x^{(0)}$  = Startwert
FOR  $k = 1, 2, \dots$ 
     $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$       Residuum
     $d^{(k)} = r^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle r^{(k)}, d^{(j)} \rangle_A}{\langle d^{(j)}, d^{(j)} \rangle_A} d^{(j)}$   Gramm-Schmidt in der Energienorm
     $a^{(k)} = Ad^{(k)}$ 
     $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\langle d^{(k)}, d^{(k)} \rangle}{\langle d^{(k)}, a^{(k)} \rangle}$   optimale Schrittlänge
     $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_{\text{opt}} d^{(k)}$   gehe einen Schritt
END

```

Das konjugierte Gradienten Verfahren wird dadurch effizient, da man die Summe im Gramm-Schmidt Schritt nicht in jeder Iteration neu berechnen muss.

```

 $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ 
 $\rho^{(0)} = \langle r^{(0)}, r^{(0)} \rangle$ 
 $d^{(1)} = r^{(0)}$ 
FOR  $k = 1, 2, \dots$ 
     $a^{(k)} = Ad^{(k)}$ 
     $\alpha_{\text{opt}} = \frac{\rho^{(k-1)}}{\langle d^{(k)}, a^{(k)} \rangle}$ 
     $x^{(k)} = x^{(k-1)} + \alpha_{\text{opt}} d^{(k)}$ 
     $\rho^{(k)} = \langle r^{(k)}, r^{(k)} \rangle$ 
     $d^{(k+1)} = r^{(k)} + \frac{\rho^{(k)}}{\rho^{(k-1)}} d^{(k)}$ 
END

```

#### 4.5.1 Konvergenz

Da nach  $n$  Schritten kein weitere orthogonaler Vektor mehr gefunden werden kann, muss  $x^{(k)}$  die exakte Lösung sein. In dem Sinne handelt es sich hierbei um ein exaktes Verfahren.

#### 4.5.2 Vorkonditionierer

Matrix  $A$  wird so vormassiert, dass die sich die Konditionszahl  $\kappa$  verbessert. z.b. unvollständiges Cholesky-Zerlegung.



## Kapitel 5

# Berechnung von Eigenwerten

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  so gilt für den Eigenwert  $\lambda_i \in \sigma(A)$  und dessen dazugehöriger Eigenvektor  $v_i \in \mathbb{C}^n$ :

$$\begin{aligned} Av_i &= \lambda_i v_i \\ A^k v_i &= \lambda_i^k v_i \end{aligned}$$

### 5.1 Abschätzungen zur Lage

#### 5.1.1 Matrixnorm

$$|\lambda| \leq \|A\|$$

z.B. Zeilen-  $\|A\|_\infty$ , Spaltensummen  $\|A\|_0$  Normen sind einfach zu berechnen.

#### Satz von Bendixon

#### Gerschgorin Kreise

Sind disjunkt, was bedeutet, jeder Kreis enthält auch ein Eigenwert.

$$\lambda \in \sigma(A) \subseteq \mathcal{R}(A) := \bigcup_{i=1}^n \mathcal{R}_i, \quad \mathcal{R}_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right\}$$

#### Erstes Gerschgorin Theorem

Da  $A^\top$  die gleichen Eigenwerte wie  $A$  hat, gilt folgendes Theorem:

$$\lambda \in \sigma(A) \subseteq \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(A^\top)$$

## 5.2 Potenzmethode

Liefert den betragsmäßig größten Eigenwert von  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ :

```

 $x^{(0)}$  mit  $v_1^\top x^{(0)} \neq 0$  und  $\|x^{(0)}\| = 1$ 
FOR  $k = 0, 1, \dots$ 
     $a^{(k)} = Ax^{(k)}$ 
     $\rho^{(k)} = \left(x^{(k)}\right)^\top a^{(k)}$  Rayleigh-Quotient  $\frac{x^\top Ax}{x^\top x}$ 
    entspricht dem Eigenwert  $\lambda$ 
     $x^{(k+1)} = \frac{a^{(k)}}{\|a^{(k)}\|}$  Normierung
END
```

Der Startvektor  $x^{(0)}$  ist eine Linearkombination der Eigenvektoren  $v_i$ :

$$x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 a^{(k)} &= Ax^{(k-1)} = AAx^{(k-2)} = \dots = A^k x^{(0)} = A^k \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i A^k v_i \stackrel{\text{EW-Gleichung}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k v_i \\
 &= \alpha_1 \lambda_1^k \left( v_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k v_i \right)
 \end{aligned}$$

Sind die Eigenwerte so  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n| > 0$  sortiert, so gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left( v_1 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k v_i \right) = v_1$$

Weiter:

$$x^{(k+1)} = \frac{a^{(k)}}{\|a^{(k)}\|} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pm v_1$$

### 5.2.1 Inverse Iteration nach Wielandt

Die kleinsten Eigenwerte einer Matrix  $A$  sind die größten der Inversen  $A^{-1}$ , denn:

$$\lambda \in \sigma(A), \quad \nu \in \sigma(A^{-1}) \quad \Rightarrow \quad \nu_i = \frac{1}{\lambda_i}$$

Also muss im Algorithmus  $a^{(k)} = A^{-1}x^{(k)}$  berechnet werden, dies entspricht aber gerade dem linearen Gleichungssystem  $Aa^{(k)} = x^{(k)}$ . Damit muss in jedem Schritt dieses Gleichungssystem gelöst werden. (Dies ist weniger aufwändig als die einmalige Berechnung der Inversen!).

### 5.2.2 Shift

Mittels eines Shifts  $\mu \in \mathbb{C}$  und der inversen Iteration kann der Eigenwert am nächsten zu  $\mu$  gefunden werden.

```

 $\mu \approx \lambda_j$ 
 $x^{(0)}$  nicht orthogonal zu  $v_j$ 
 $\|x^{(0)}\| = 1$ 
FOR  $k = 0, 1, \dots$ 
    löse  $(A - \mu \mathbb{1}) a^{(k)} = x^{(k)}$ 
     $\rho^{(k)} = \left(x^{(k)}\right)^\top a^{(k)}$ 
     $x^{(k+1)} = \frac{a^{(k)}}{\|a^{(k)}\|}$ 
END

```

Konvergenzgeschwindigkeit für  $\mu \approx \lambda_j$  und  $\lambda_i$  der nächstgelegene Eigenwert:

$$\frac{|\lambda_j - \mu|}{\min_{i \neq j} |\lambda_i - \mu|} < 1$$

## 5.3 QR-Verfahren

Algorithmus:

```

 $A^{(0)} = A$ 
FOR  $k = 1, 2, \dots$ 
     $Q^{(k)} R^{(k)} = A^{(k-1)}$     QR Zerlegung von  $A^{(k-1)}$ 
     $A^{(k)} = R^{(k)} Q^{(k)}$ 
END

```

$$A^{(k)} = R^{(k)} Q^{(k)} = \left(Q^{(k)}\right)^\top \underbrace{Q^{(k)} R^{(k)}}_{A^{(k-1)}} Q^{(k)} = \dots = \left(Q^{(1)} \dots Q^{(k)}\right)^\top A^{(0)} \left(Q^{(1)} \dots Q^{(k)}\right)$$

Damit ist  $A^{(k)}$  ähnlich zu  $A^{(0)} = A$ .

Weiter gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = R$  wobei  $R$  eine rechte obere Dreiecksmatrix ist mit den Eigenwerten auf der Diagonale. (Ist  $A$  symmetrisch so ist  $R$  eine Diagonalmatrix)

### 5.3.1 Hessenbergform

Eine Matrix der folgenden Gestalt heißt obere Hessenbergmatrix:

$$H = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ * & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & * \\ 0 & & * & * \end{pmatrix}$$

Mittels Householder-Transformationen kann eine Matrix  $A$  in Hessenbergform umgewandelt werden  $\rightarrow$  Aufwand  $\mathcal{O}(n^3)$

$$QA = H \quad \Leftrightarrow \quad QAQ^\top = HQ^\top = \tilde{H}$$

Dabei ist  $\tilde{H}$  wiederum ähnlich zu  $A$  und die  $QR$ -Zerlegung von  $\tilde{H}$  ist nun mittels  $n-1$  Givens-Rotationen möglich  $\rightarrow$  Aufwand  $\mathcal{O}(n^2)$ .

### 5.3.2 Shift

Sei  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  obere Hessenberg-Matrix,  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$  eine Toleranz:

$$H^{(0)} = H$$

FOR  $k = 1, 2, \dots$

$$\mu_k = h_{n,n}$$

$$Q^{(k)} R^{(k)} = H^{(k-1)} - \mu_k \mathbb{1} \quad \text{QR-Zerlegung}$$

$$H^{(k)} = R^{(k)} Q^{(k)} + \mu_k \mathbb{1} \quad \text{Shift kommt wieder dazu}$$

$$\text{IF } |h_{n,n-1}^{(k)}| \leq \varepsilon \left( |h_{n-1,n-1}^{(k)}| + |h_{n,n}^{(k)}| \right) \quad \begin{array}{l} \text{prüfen ob Element links neben dem} \\ \text{untersten rechten Element gleich Null} \end{array}$$

$$H^{(k)} = H^{(k)}(1:n-1, 1:n-1) \quad \text{lösche letzte Spalte und Zeile}$$

END

## 5.4 Singulärwertzerlegung

Sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit Rang  $r$  und o.B.d.A.  $m \geq n$ :

$$\exists \quad U \in \mathbb{R}^{m \times m}, V \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ mit } U^\top A V = \Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \Leftrightarrow \quad A = U \Sigma V^\top$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Singulärwerte :  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0$

$$\text{es gilt : } u_i^\top A = \sigma_i v_i^\top$$

$$\text{für : } A^\top A = (V \Sigma^\top U^\top)(U \Sigma V^\top) = V \Sigma^2 V^\top$$

$$\text{gilt : } \sigma_i \in \sigma(A^\top A) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \text{falls } A \text{ sym. : } \sqrt{\sigma_i^2} \in \sigma(A)$$

## 5.4.1 Pseudoinverse

$$\text{Definition : } A^+ = V\Sigma^+U^\top, \quad \Sigma^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sigma_r} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- es gilt :
- (i)  $(A^+A)^\top = A^+A$ ,  $(AA^+)^\top = AA^+$
  - (ii)  $A^+AA^+ = A^+$ ,  $AA^+A = A$
  - (iii) falls  $r = n$  :  $A^+ = (A^\top A)^{-1}A^\top = A^{-1}(A^\top)^{-1}A^\top = A^{-1}$





# Kapitel 6

## Anhang

### 6.1 Norm

$$\begin{aligned} \text{obere Dreiecksungleichung : } & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \\ \text{untere Dreiecksungleichung : } & \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \end{aligned}$$

### 6.2 Matrixnormen

$$\text{Induzierte } p\text{-Normen : } \|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

$$\text{Frobenius-Norm : } \|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

$$\text{Spektralnrm : } \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

$$\text{Vertraglichkeit : } \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

### 6.3 Irreduzible Matrizen

Irreduzibel wenn im gerichteten Graphen alle Knoten erreichbar sind.