Lista 1 - Sequências e séries

Sequências

1. Liste os cinco primeiros termos da sequência:

   (a) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$

   (b) $a_n = \dfrac{3^n}{1+2^n}$

   (c) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{5^n}$

   (d) $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$

   (e) $a_n = \dfrac{3(-1)^n}{n!}$

   (f) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$

   (g) $a_1 = 2$, $a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$

2. Encontre uma fórmula para o termo geral a_n da sequência, assumindo que o padrão dos primeiros termos continue.

   (a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \cdots$

   (b) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \cdots$

   (c) $-3, 2, -\frac{4}{3}, \frac{8}{9}, -\frac{16}{27}, \cdots$

   (d) $5, 8, 11, 14, 17, \cdots$

   (e) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \cdots$

3. Verifique se a sequência converge ou diverge. Se for convergente calcule o limite.

   (a) $a_n = 1 - (0,2)^n$;

   (b) $a_n = \dfrac{n^3}{n^3+1}$

   (c) $a_n = \dfrac{3+5n^2}{n+n^2}$

   (d) $a_n = \dfrac{n^3}{n+1}$

   (e) $a_n = \dfrac{3^{n+2}}{5^n}$

   (f) $a_n = \dfrac{n^2}{\sqrt{n^3+4n}}$

   (g) $a_n = \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3+2n^2+1}$

   (h) $a_n = \cos(n/2)$

   (i) $a_n = \cos(2/n)$

   (j) $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

   (k) $a_n = \ln(n+1) - \ln n$

   (l) $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

   (m) $a_n = \dfrac{e^n + e^{-n}}{e^{2n}-1}$

   (n) $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} 2n}{1+\sqrt{n}}$

   (o) $a_n = n^2 e^{-n}$

   (p) $a_n = n \operatorname{sen}(1/n)$

4. (a) Determine se a sequência a seguir é convergente ou divergente:

   $$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 4 - a_n \qquad \text{para } n \geq 1.$$

   (b) O que acontece se $a_1 = 2$?

5. Se $R\$1000,00$ forem investidos a uma taxa de juros de 6%, contabilizados anualmente, depiis de n anos o investimento valerá

   $$a_n = 1000(1,06)^n \text{ reais.}$$

   (a) Encontre os cinco primeiros termos da sequência.

   (b) A sequência é convergente ou divergente? Explique.

6. Um piscicultor possui 5000 bagres em sua lagoa. O número de bagres aumenta 8% ao mês e o agricultor retira 300 bagres por mês.

   (a) Determine a população P_n de bagres na lagoa após n meses.

   (b) Quantos bagres estarão na lagoa após 6 meses?

7. Se a sequência (a_n) for convergente mostre que a sequência $b_n = a_{n+1}$ também é convergente e

   $$\lim a_{n+1} = \lim a_n.$$

8. A sequência (a_n) é definida por $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$, para $n \geq 1$. Supondo que a_n seja convergente calcule o seu limite. Sugestão: use o resultado do exercício anterior.

9. Admitindo que a sequência (a_n) definida por

   $$a_1 = 2 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \quad \text{para } n \geq 1$$

   é convergente calcule seu limite.

10. Verifique se a sequência dada é crescente, decrescente ou não monótona. A sequência é limitada?

    (a) $a_n = (-2)^{n+1}$
    (b) $a_n = \dfrac{1}{2n+3}$
    (c) $a_n = n(-1)^n$
    (d) $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$
    (e) $a_n = \dfrac{2n-3}{3n+4}$
    (f) $a_n = n + \frac{1}{n}$

11. Calcule o limite da sequência

$$\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \cdots$$

12. Uma sequência a_n é dada por

$$a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

    (a) Mostre que a_n é crescente e limitada superiormente por 3. Mostre em seguida que (a_n) é convergente.
    (b) Calcule $\lim a_n$.

13. Mostre que a sequência definida por

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{n}$$

é crescente $a_n < 3$ para todo n. Deduza que a_n é convergente e calcule seu limite.

14. Mostre que a sequência a_n definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}$$

satisfaz $0 < a_n \leq 2$ e é decrescente. Deduza que a sequência é convergente e calcule seu limite.

15. (a) Fibonacci colocou o seguinte problema: suponha que coelhos vivam para sempre e que a cada mês cada par produza um novo par, que se torna reprodutivo com 2 meses de idade. Se começarmos com um par recém-nascido, quantos pares de coelhos teremos no enésimo mês? Mostre que a resposta é f_n onde f_n é a sequência de Fibonacci definida em sala de aula.
    (b) Seja $a_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ e mostre que $a_{n-1} = 1 + \dfrac{1}{a_{n-2}}$. Supondo que $A - n$ seja convergente, encontre seu limite.

16. (a) Sejam $a_1 = a, a_2 = f(a), a_3 = f(a_2) = f(f(a)), \cdots, a_{n+1} = f(a_n)$, onde f é uma função contínua. Se $\lim a_n = L$, mostre que $f(L) = L$.
    (b) Ilustre a parte (16a) tomando $f(x) = \cos x$, $a = 1$, e estimando o valor de L com precisão de cinco casas decimais.

Séries

Resumo dos testes de convergência:

1. **Teste do n-ésimo termo:** a menos que $a_n \longrightarrow 0$, a série diverge.
2. **Séries geométricas:** $\sum ar^n$ converge se $|r| < 1$; diverge, caso contrário.
3. **Série p:** $\sum 1/n^p$ converge se $p > 1$; caso contrário, diverge.
4. **Séries com termos positivos:** experimente o teste da integral, o teste da razão ou o teste da raiz. Tente comparar a uma série conhecida por meio do teste da comparação.
5. **Série com termos negativos:** $\sum a_n$ converge? Em caso afirmativo, $\sum a_n$ também converge, pois a convergência absoluta implica a convergência.
6. **Séries alternadas:** $\sum a_n$ converge se a série satisfaz as condições do teste da série alternada.

17. Seja $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.

    (a) Determine se a sequência (a_n) é convergente.
    (b) Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

18. Determine se a série geométrica é convergente ou divergente. Se for convergente, calcule sua soma.

    (a) $3 + 4 + \frac{16}{3} + \frac{64}{9} + \cdots$
    (b) $\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 + \cdots$
    (c) $10 - 2 + 0,4 - 0,08 + \cdots$
    (d) $1 + 0,4 + 0,16 + 0,064 + \cdots$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

19. Determine se a série converge ou diverge.

(a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \cdots$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1}$

(c) $\sum n = 1^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

20. Seja $x = 0,9999\ldots$ (dízima periódica).

(a) Responda o que você pensa: $x < 1$ ou $x = 1$?

(b) Some uma série geométrica para encontrar o valor de x.

21. Sabendo que a enésima soma parcial de uma série $\sum a_n$ é

$$s_n = \frac{n-1}{n+1}$$

encontre a_n e $\sum a_n$.

22. Se a enésima soma parcial de $\sum a_n$ é $s_n = 3 - n2^{-n}$, encotre a_n e $\sum a_n$.

23. Determine o valor de $c > 0$ sabendo que

$$\sum_{n=2}^{\infty} (1+c)^{-n} = 2.$$

Teste da integral

24. Use o teste da integral para determinar se a série é convergente ou divergente (não esqueça de verificar as condições do teste!).

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+4}{n^2}$

(f) $1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \cdots$

(g) $\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{11} + \frac{1}{14} + \frac{1}{17} + \cdots$

(h) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \cdots$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+6n+13}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}$

(q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

(r) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

25. Determine os valores de p para os quais a série é convergente.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2+1)^p$

Teste da comparação

26. Utilize um teste de comparação para determinar se a série converge ou diverge.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3+1}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4+1}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+4n+3}}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+4^n}{1+3^n}$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{3^n-2}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{2n^2+n+1}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

Séries alternadas

27. Teste a série alternada quanto a convergência ou divergência.

    (a) $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} + \frac{2}{11} + \cdots$
    (b) $-\frac{2}{5} + \frac{4}{6} - \frac{6}{7} + \frac{8}{8} - \frac{10}{9} + \cdots$
    (c) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \cdots$
    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$
    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3n-1}{2n+1}$
    (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{10^n}}$
    (g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}$
    (h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{2/n}$
    (i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$
    (j)

28. Para que valores de p a série alternada abaixo é convergente?

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$
    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$
    (c) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^p}{n}$

Testes da razão e da raiz

29. Utilize o teste da razão para determinar se a série converge ou diverge.

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$
    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n}$
    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n}$
    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n3^{n-1}}$
    (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{(2n+3)\ln(n+1)}$

30. Utilize o teste da raiz para determinar se a série converge ou diverge.

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+5)^n}$
    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}$
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(3+(1/n))^{n^2}}$
    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n$
    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+n}}$
    (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

31. Determine se a série é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$
    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$
    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}}$
    (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$
    (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$
    (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$
    (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$
    (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}100^n}{n!}$
    (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$
    (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$
    (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2n}{n+1}\right)^{5n}$
    (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$
    (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$

32. Os termos de uma série são definidos de forma recursiva pelas equações

    $$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{5n+1}{4n+3}a_n.$$

    Determine se $\sum a_n$ converge ou diverge.

33. Seja (b_n) uma sequência de números positivos que converge para $\frac{1}{2}$. Determine se a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^n \cos(n\pi)}{n}$ é absolutamente convergente.

34. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para todo x.

35. Determine os valores de k para os quais a série abaixo é convergente

    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(kn)!}$$

36. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n^2}}{n!}$ diverge.