Appunti di Algebra Lineare e Analisi Matematica 2

Mattia Ruffini

Febbraio 2022

Indice

Parte I

Algebra Lineare

L'algebra Lineare studia gli **spazi vettoriali** e le **funzioni lineari tra spazi vettoriali**.

Capitolo 1

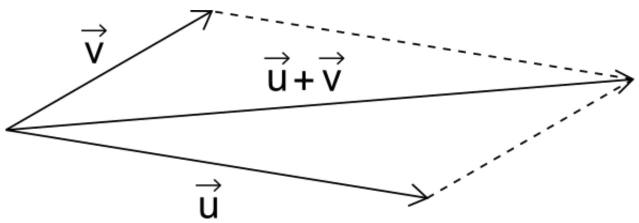
Spazi vettoriali e vettori

Chiamiamo con E l'insieme dei vettori geometrici nello spazio. I vettori nascono in fisica per secrivere grandezze che oltre un numero necessitano **una direzione e un verso**. Dato un segmento orientato, un'unità di misura, due segmenti orientati sono **equivalenti** se hanno **la stessa lunghezza, stessa direzione e stesso verso**. Si chiama **vettore la famiglia formata da tutti i segmenti orientati tra di loro equivalenti**.

Un vettore particolare è il vettore nullo $\underline{v} = \underline{0}$ ed è chiamato **vettore nullo**. E' l'unico vettore ad avere modulo 0.

1.1 Somma di vettori geometrici

Dati due vettori $\underline{v}$ e $\underline{u}$ allora la loro somma è il vettore seguente:



Per trovare la somma di due vettori si può utilizzare o la regola del parallelogramma, o la regola punto-coda.

1.2 Prodotto di un vettore per uno scalare

Consideriamo $t \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in E$. Allora sappiamo che se $t = 0$ oppure se $\vec{v} = \vec{0}$, allora l'operazione

$$t \cdot \vec{v} = \vec{0} \tag{1.1}$$

altrimenti vale che

$$t \cdot \vec{v} = \vec{p} \tag{1.2}$$

con $|\vec{p}| = t \cdot |\vec{v}|$, ovvero $\vec{p}$ è un vettore con direzione identica a $\vec{v}$ e verso identico a $\vec{v}$ se $t > 0$, altrimenti l'opposto.

I vettori $\vec{v}$ e $t\vec{v}$ sono paralleli. In generale: "due vettori di cui uno non sia il vettore nullo sono paralleli se e solo se $\exists t \in \mathbb{R} : \vec{u} = t\vec{v}$". Inoltre $t = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$. Il segno di t dipende se i vettori sono discordi.

1.3 Spazio Vettoriale

Definizione *"Un insieme V si dice che è uno spazio vettoriale se sono definite in V due operazioni: somma e prodotto per uno scalare. La somma di due elementi di V corrisponde a un terzo elemento di V, il prodotto per uno scalare $t \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}$ con $t \cdot \vec{v} \in V$ soddisfa le seguenti proprietà:"*

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$
5. $\forall \vec{u} \in V, t \in \mathbb{R}, t(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}t + \vec{v}t$
6. $(t + s)\vec{u} = t\vec{u} + t\vec{v}$
7. $ts\vec{u} = t(s\vec{u})$
8. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Se valgono queste proprietà, allora V è uno spazio vettoriale.

1.3.1 $\mathbb{R}^n$

L'insieme $\mathbb{R}^n$ è l'insieme formato dalle n-uple coordinate di numeri reali.

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

Dati due elementi $\vec{x}$ e $\vec{y}$ di $\mathbb{R}^n$ si vuole definire l'operazione somma:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

mentre il prodotto con $t \in \mathbb{R}$:

$$t\vec{x} = (tx_1, tx_2, ..., tx_n)$$

Dunque $\mathbb{R}^n$ **è uno spazio vettoriale perchè valgono le 8 proprietà che definiscono uno spazio vettoriale**. Nei casi particolari in cui $n = 1, n = 2, n = 3$ è presente un'interpretazione geometrica dello spazio vettoriale. In particolare si afferma che **lo spazio vettoriale dei vettori nel piano si identifica in** $\mathbb{R}^2$. Analogamente lo spazio con $\mathbb{R}^3$.

1.4 Spazi vettoriali astratti

Esistono degli spazi vettoriali che non hanno un'interpretazione geometria, tuttavia esistono. Chiamiamo con F l'insieme delle funzioni reali di variabile reale, cioè le funzioni del tipo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La somma di due elementi di F è definita come:

$$f, g \in F, f + g \in F, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

mentre il prodotto con uno scalare è definito come:

$$c \cdot f \in F, c(f)(x) = cf(x)$$

Di conseguenza F **è uno spazio vettoriale rispetto queste operazioni e i suoi elementi sono vettori**. Dunque con il termine vettore si intende un elemento di uno spazio vettoriale.

Un altro esempio di spazio vettoriale astratto è l'insieme $\mathbb{R}[x]$ come insieme dei polinomi di variabile x a coefficienti reali è uno spazio vettoriale rispetto alla somma e al prodotto con uno scalare.

1.5 Combinazione lineare di vettori

Dato uno spazio vettoriale V fissati i vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k} \in V$ e fissati $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ scalari, allora si chiama **combinazione lineare di $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k}$ con coefficienti $c_1, c_2, ..., c_k$ il vettore**

$$\vec{v} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + ... + c_k\vec{v_k} \tag{1.3}$$

Generalizzazione in $\mathbb{R}^n$ Ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori fondamentali con coefficienti:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e_i} \tag{1.4}$$

dove i vettori fondamentali sono:

$$\begin{aligned} \vec{e_1} &= (1, 0, 0, 0, ..., 0) \\ \vec{e_2} &= (0, 1, 0, 0, ..., 0) \\ &\quad ... \\ \vec{e_n} &= (0, 0, 0, 0, ..., 1) \end{aligned}$$

Inoltre **il vettore nullo è sempre combinazione lineare di una qualunque combinazione di vettori**.

1.6 Sottospazio Vettoriale

Definisco V come spazio vettoriale, e $W \subseteq V, W \neq \varnothing$. W è uno spazio vettoriale di V se:

- $\forall \vec{w_1}, \vec{w_2} \in \vec{w_1} + w_2 \vec{\in} W$ ovvero W **è chiuso rispetto la somma**;
- $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \vec{w} \in W, t \cdot \vec{w} \in W$, ovvero W **è chiuso rispetto il prodotto per uno scalare**.

W **è un sottospazio vettoriale di** V **se è uno spazio vettoriale**.

La condizione necessaria affinchè W sia un sottospazio vettoriale di V è che $\vec{0} \in W$.

Consideriamo $\vec{w} \in W, t = 0$. Se $t\vec{w} \in W$, allora per la proprietà ***** $\vec{0} \in W$.

Dimostrazione $0 \cdot w = 0$

$$\begin{aligned} w + 0w &= w \\ w - w + 0w &= w - w \\ 0 + 0w &= 0 \\ 0w &= 0 \end{aligned}$$

Se V è uno spazio vettoriale, allora il più piccolo sottospazio vettoriale è quello il cui elemento è esclusivamente il vettore nullo. Mentre il sottospazio vettoriale più grande è quello che coincide con V. Questi sottospazi sono chiamati **banali**.

Esempi I sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono: $\mathbb{R}^3, (0,0,0)$, i piani per l'origine, le rette per l'origine. I sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono $\mathbb{R}^2, (0,0)$ e le rette passanti per l'origine.

Se consideriamo lo spazio vettoriale dei polinomi $\mathbb{R}[x]$, lo spazio vettoriale dei polinomi con grado minore o uguale a n è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Un polinomio di quinto grado sommato ad un altro polinomio di quinto grado, è sempre di quinto grado. Un polinomio di quinto grado moltiplicato per un numero è un polinomio di quinto grado.

Anche il sottoinsieme delle funzioni reali di variabile reale che appartengono a C^1 è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale:

$$f, g \in C^1(\mathbb{R}), f + g \in C^1$$

$$c \in \mathbb{R}, f \in C^1(\mathbb{R}), cf \in C^1$$

ovvero C^1 è chiuso rispetto le operazioni di somma e prodotto con uno scalare.

1.7 Sottospazio generato da k vettori

Dato uno spazio vettoriale V e k vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k} \in V$ qual è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene i vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k} \in V$?

Per semplicità consideriamo $V = \mathbb{R}^3$ con e i vettori

$$\begin{aligned} \vec{v_1} &= (1, 0, 0) \\ \vec{v_2} &= (0, 1, 0) \\ \vec{v_3} &= (1, 1, 0) \end{aligned}$$

Il sottospazio vettoriale di V in questo caso è il piano xy. Osserviamo che il sottospazio vettoriale di V deve essere uno spazio vettoriale, questo deve essere **chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto**. Quindi dati k vettori di V deve essere contenuto nel suo sottospazio vettoriale:

$$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + ... + c_k\vec{v_k} \tag{1.5}$$

ovvero il sottospazio vettoriale di V deve contenere **tutte le combinazioni lineari dei vettori** $\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k}$.

Definizione 1.7.1 (Sottospazio vettoriale)**.** Dato uno spazio vettoriale V e i suoi k elementi, il suo sottospazio vettoriale si chiama W ed è l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei k elementi di V. Ed è il più piccolo sottospazio di V.

Dimostrazione chiuso rispetto la somma Sia W sottospazio vettoriale di V. Presi due elementi di $W, \vec{w_1}, \vec{w_2}$ combinazioni lineari dei k elementi di V, definiti nel seguente modo:

$$\vec{w_1} = c_1\vec{v_1} + ... + c_k\vec{v_k}$$
$$\vec{w_2} = d_1\vec{v_1} + ... + d_k\vec{v_k}$$

poichè valgono la proprietà commutativa e distributiva si ha:

$$\vec{w_1} + \vec{w_2} = (c_1 + d_1)\vec{v_1} + ... + (c_k + d_k)\vec{v_k}$$

allora W è chiuso rispetto la somma. Prende il nome di **Span(**$\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k}$**)** il sottospazio generato dai vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k}$.

$Span(\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k}) = \{\vec{v} \in V : \vec{v} = c_1\vec{v_1} + ... + c_k\vec{v_k}\}$

Esiste un numero minimo di vettori necessario affinchè siano generatori di uno spazio vettoriale.

1.8 Dipendenza e Indipendenza Lineare

Sia V uno spazio vettoriale con $\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k} \in V$.

Teorema 1. La famiglia di vettori $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ è **linearmente indipendente** se uno dei vettori della famiglia è combinazione lineare degli altri. Nel caso opposto si dice che la famiglia di vettori è **linearmente indipendente**.

Esempio con $\mathbb{R}^3$ Consideriamo $V = \mathbb{R}$, con

$$\vec{w_1} = (1, 0, -1) \tag{1.6}$$
$$\vec{w_2} = (0, 1, -1) \tag{1.7}$$
$$\vec{w_1} = (1, 1, -2) \tag{1.8}$$

Allora la famiglia di vettore $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}$ è linearmente indipendente, in quanto $\vec{w_3}$ è combinazione lineare degli altri due.

$$\begin{aligned} \vec{w_3} = (1, 1, -2) = c_1(1, 0, -1) + c_2(0, 1, -1) \\ = (c_1, c_2, -c_1 - c_2) \\ c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ \vec{w_3} = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 \end{aligned}$$

Esempio con i vettori unitari e_n Consideriamo i vettori $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ e verifichiamo che siano **linearmente indipendenti**. Si vede subito come per esempio non esista $c \in \mathbb{R}$ per cui e_1 sia combinazione lineare degli altri vettori, in particolare per cui $c \cdot 0 = 1$. Vale per tutte le n-uple di $\mathbb{R}^n$.

Quando una famiglia di vettori è dipendente indipendente

- Se una famiglia di vettori contiene $\vec{0}$ allora è linearmente dipendente;
- Se una famiglia di vettori linearmente dipendenti aggiunge un qualunque vettore è ancora linearmente dipendente;
- Se ad una famiglia di vettori linearmente indipendente tolgo un vettore ottengo ancora una famiglia linearmente indipendente;

L'ultimo punto perchè consideriamo $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k}$ linearmente indipendente allora anche $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_{k-1}}$ è indipendente, oppure andrebbe contro il secondo principio se fosse dipendente.

Definizione Equivalente La definizione di dipendenza lineare funziona solamente quando si hanno almeno due vettori. Ovvero dati $\vec{v_1}, \vec{v_2}$. Questi sono linearmente dipendenti se

$$\vec{v_1} = c\vec{v_2}$$
$$\vec{v_2} = d\vec{v_1}$$

Per esempio se fossimo in $\mathbb{R}^3$ si parla di vettori paralleli. Tuttavia **è impossibile applicare la definizione se la famiglia è costituita da un solo vettore**. Dunque ecco una definizione equivalente: "$\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k}$ *sono linearmente dipendenti se* $\exists$ *una loro combinazione lineare uguale al vettore nullo* **con i coefficienti non tutti nulli**".

Per esempio se consideriamo la famiglia di vettori $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}$ definiti nell'equazione 1.6 questi sono linearmente dipendenti perchè

$$\vec{w_1} + \vec{w_2} - \vec{w_3} = \vec{0}$$

e questa è una combinazione lineare il cui risultato è il vettore nullo. L'esempio classico è con $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ in quanto non esiste una loro combinazione lineare uguale al vettore nullo con almeno un coefficiente diverso da zero.

Casi particolari Se esiste un solo vettore $\vec{v} \in V, \exists c \neq 0$:

$$c \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

allora si ha che $\vec{v} = \vec{0}$ e V **è linearmente dipendente**. Altrimenti se $\vec{v} \neq 0$ sarebbe linearmente indipendente.

1.9 Basi e dimensioni

Definizione 1.9.1 (Base di uno spazio vettoriale)**.** Sia V uno spazio vettoriale qualsiasi con $a = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k}\}$ dove a è una famiglia di vettori di V. Allora a è una base di V se

1. $span(\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k}) = V$ cioè la famiglia a costituisce i generatori di V, oppure ogni vettore di V è combinazione lineare di $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k}$;

2. la famiglia a è linearmente indipendente;

Per esempio la base di $\mathbb{R}^n$ è $a = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\}$.

Parte II

Equazioni Differenziali

Capitolo 2

Introduzione fisica

Dinamica La seconda legge della dinamica afferma che la risultante di un corpo soggetto ad una forza equivale a $F = ma$ ma poichè l'accelerazione è la derivata seconda dello spostamento $F = my''(t)$. Se consideriamo un corpo in movimento attaccato ad una molla possiamo riscrivere le risultanti sul corpo come:

$$my''(t) = -ky$$

E ancora considerando l'attrito prodotto con l'aria o con qualsiasi altro materiale, cioè lo smorzamento ecco che l'equazione diventa:

$$\begin{aligned} my''(t) &= -ky - my' + f(t) \\ my''(t) &= F(t, y, y') \\ &\mathsf{F}(t, y, y', y'') \end{aligned}$$

che è un'equazione **differenziale ordinaria del secondo ordine**. Un'equazione differenziale è un'equazione in cui l'incognita compare come variabile $y(t)$, che compare anche mediante le sue derivate.

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) \tag{2.1}$$

dove a, b, c, f sono costanti e $a \neq 0$ e dove f è detto **forzante**.

Circuiti RLC Le equazioni differenziali sono presenti anche nei circuiti RLC. Scriviamo il potenziale di un circuito RLC come:

$$
\begin{aligned}
E(t) &= Li'(t) + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} \\
E(t) &= Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} \\
\rightarrow \frac{d}{dt}[E(t)] &= \frac{d}{dt}[Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{q(t)}{C}] \\
E'(t) &= Li''(t) + Ri'(t) + \frac{i(t)}{C}
\end{aligned}
$$

quindi l'equazione del circuito può essere scritta come equazioni differenziali lineari del secondo ordine sia in funzione di $q(t)$ e $i(t)$.

Moto del pendolo In un moto del pendolo lo spostamento del corpo appeso al filo equivale a $s(t) = l\theta(t)$. La velocità e accelerazione sono rispettivamente $l\theta'(t)$ e $l\theta''(t)$. La seconda legge della dinamica può essere riscritta come

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\sin\theta(t)$$

che **è un'equazione differenziale non lineare, in quanto compare la funzione seno**. Tuttavia per le piccole oscillazioni $\sin\theta = \theta$, dunque:

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\theta(t)$$

Capitolo 3

Problema di Cauchy

data un'equazione differenziale del tipo

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

con a, b, c, f costanti in I e $a \neq 0$, allora sarà soluzione dell'equazione differenziale nell'intervallo I una funzione $y : I \to \mathbb{R}$ **derivabile due volte** che sostituita nell'equazione iniziale dà un'identità su I, cioè la soddisfa.

Esempio

$$\begin{aligned} y'' - y' - 2y = 0 \\ a(t) = 1, b(t) = -, c(t) = -1, , f(t) = 0 \end{aligned}$$

Prendiamo la funzione esponenziale $y = e^{2t}$. Verifichiamo che sia soluzione.

$$\begin{aligned} y'(t) = 2e^{2t} \\ y''(t) = 4\exp^{2t} \\ \to 4\exp^{2t} - 2e^{2t} - 2(e^{2t}) = 0 \end{aligned}$$

La soluzione è verificata **per ogni** $t \in \mathbb{R}$. Se non fosse così ma solo per alcuni valori, allora non sarebbe soluzione.

Quante soluzioni può avere un'equazione differenziale del secondo ordine Se $y''(t) = 0$ allora $y(t) = c_1 t + c_2$. **Un'equazione differenziale ha infinite soluzioni, se è del secondo ordine allora ha infinite soluzioni che dipendono da due parametri**.

Definizione 3.0.1 (Integrale Generale)**.** Si chiama **Integrale Generale** la totalità delle soluzioni in dipendenza da due parametri.

Una volta che si conoscono i due parametri iniziali e l'equazione differenziale allora si ha il **Problema di Cauchy**.

Teorema 2 (Teorema di Cauchy)**.** data un'equazione differenziale del tipo

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

con a, b, c, f costanti in I e $a \neq 0$ allora il problema di Cauchy con condizioni iniziali assegnate

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

ha una e una sola soluzione in tutto l'intervallo I.

Il significato fisico è determinare la legge oraria di un corpo sapendo che sono note posizione e velocità. Per risolvere il problema di Cauchy:

1. Determinare l'integrale generale ;
2. Imporre le condizioni iniziali;
3. Sostituire i valori;

3.1 Integrale generale

Come è formato l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale? Innanzitutto chiamiamo

$$L = a\frac{d}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + c$$
$$Ly = a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t)$$

L gode della proprietà di linearità. Dati $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$c_1y_1 + c_2y_2 = c_1Ly_1 + c_2Ly_2$$

cioè il prodotto di L per una combinazione lineare è esso stesso la combinazione lineare di y_1 e y_2 con coefficienti Lc_1 e Lc_2.

Poichè L gode della linearità, le equazioni differenziali del tipo

$$Ly = f \tag{3.2}$$

sono lineari. Godono del principio di sovrapposizione:

$$c_1 L y_1 + c_2 L y_2 = c_1 f_1 + c_2 f_2 \tag{3.3}$$

questo è molto importante perchè se chiamiamo $y = c_1 L y_1 + c_2 L y_2$ allora

$$L(y) = c_1 f_1 + c_2 f_2 \tag{3.4}$$

dove y soddisfa l'equazione differenziale con forzante $c_1 f_1 + c_2 f_2$.

Teorema 3 (Principio di Sovrapposizione)**.** Se y_1 è soluzione di $ay'' + by' + cy = f_1$ e y_2 è soluzione di $a''_y + b'_y + c = f_2$, allora la funzione $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ **è soluzione di**

$$ay'' + by' + cy = c_1 f_1 + c_2 f_2 \tag{3.5}$$

Consideriamo un'equazione omogenea, con termine noto nullo. Se $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$, cioè y_1, y_2 sono soluzioni dell'equazione omogenea per il principio di sovrapposizione:

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 L y_1 + c_2 L y_2 = 0 \tag{3.6}$$

ogni combinazione lineare della soluzione dell'equazione omogenea è anch'essa soluzione. Cioè **l'insieme** S **delle soluzioni forma uno spazio vettoriale**. Si dimostra che se l'equazione è di ordine 2, anche la dimensione dello spazio vettoriale è di ordine 2.

Teorema 4 (di struttura)**.** L'integrale generale di

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

con a, b, c costanti in I e $a \neq 0$ è dato da tutte le combinazioni lineare

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y(2(t), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{3.7}$$

con $y_1(t), y_2(t)$ **sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione stessa**.

3.2 Forzante non nullo

Quando il forzante non è nullo, l'equazione differenziale è detta **completa**. Si può ricavare dall'equazione completa la sua **omogenea associata**:

$$\begin{gathered} Ly = f \\ \to Ly = 0 \end{gathered}$$

la seconda equazione è l'omogenea associata. Chiamiamo $Ly_o = 0, Ly_p = f$. Per il **principio di sovrapposizione**:

$$L(y_0 + y_p) = Ly_0 + Ly_p = 0 + f = f \tag{3.8}$$

oppure se $Ly_1 = f, Ly_2 = f$ allora:

$$L(y_1 - y_2) = Ly_1 - Ly_2 = f - f = 0 \tag{3.9}$$

Data una qualunque soluzione y_p allora, allora le altre soluzioni sono :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) \tag{3.10}$$

con y_0 soluzione di $Ly = 0$.

Teorema 5 (di Struttura per Equazioni Complete)**.** L'integrale generale di

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

con a, b, c, f costanti in I e $a \neq 0$ è dato da **tutte e sole** funzioni

$$y(t) = c_1y_1(t) + c_2y(2(t) + y_p(t), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{3.11}$$

con y_1, y_2 soluzioni di $Ly = 0$ mentre y_p è una soluzione particolare dell'equazione completa

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

3.3 $\Delta > 0$

Consideriamo una qualsiasi equazione differenziale omogenea. Per il teorema di struttura è sufficiente trovare due soluzioni linearmente indipendenti, ovvero il cui rapporto **non sia costante, o una non sia multiplo dell'altra**.

Esempio

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

Soluzioni proporzionali alle loro derivate. Quindi equazioni del tipo $e^{\lambda t}$:

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda t} \\ y' &= \lambda e^{\lambda t} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda t} \\ \rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 3e^{\lambda t} &= 0 \\ (\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0, e^{\lambda t} &\neq 0 \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Quindi si arriva ad un'equazione algebrica di secondo grado, in cui $\lambda = -1, \lambda = -3$. Le due soluzioni sono:

$$e^{-t}, e^{-3t}$$

sono linearmente indipendenti, il loro rapporto è e^{2t} che non è costante. Il polinomio

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \tag{3.12}$$

è detto **polinomio caratteristico** associato all'equazione differenziale. Se $\Delta > 0$ corrispondono due soluzioni y_1, y_2 dell'equazione differenziale linearmente indipendenti. Per il teorema di struttura 4 si scrive l'integrale generale:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

3.4 $\Delta < 0$

Esempio

$$y'' + 2y' + 10y = 0, y(t) = e^{\lambda t}$$

si trova l'equazione caratteristica e le soluzioni

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0, \Delta < 0 \\ \rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 3i \end{aligned}$$

se sostituiamo i valori si trovano

$$\begin{aligned} y_1(t) = e^{(-1+3i)t} \\ y_2(t) = e^{(-1-3i)t} \end{aligned}$$

per la formula di Eulero si ricavano i numeri complessi associati:

$$\begin{aligned} y_1(t) = e^{-t}(\cos(3t) + i\sin(3t)) \\ y_2(t) = e^{-t}(\cos(3t) - i\sin(3t)) \end{aligned}$$

Da queste soluzioni complesse e coniugate si possono trovare due funzioni reali in questo (perchè ogni combinazione lineare è soluzione):

$$u_1(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2} = e^{-t}\cos(3t) \tag{3.13}$$

$$u_2(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{2i} = e^{-t}\sin(3t) \tag{3.14}$$

e sono due soluzioni reali linearmente indipendenti. L'integrale generale sarà dunque:

$$y(t) = c_1 e^{-t}\cos(3t) + c_2 e^{-t}\sin(3t)$$

Generalizzazione

$$
\begin{aligned}
a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \Delta < 0 \\
\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \\
\to u_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\
\to u_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\
\Rightarrow y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

3.5 $\Delta = 0$

Esempio

$$
\begin{aligned}
y'' - 6' + 9y = 0 \\
\to \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \\
\Delta = 0
\end{aligned}
$$

Due radici reali e coincidenti $\lambda_{1,2} = 3$. Troviamo **una sola** soluzione dell'equazione differenziale: $y_1(t) = e^{3t}$ e tutte le sue funzioni multiple $c \cdot e^{3t}, \forall c \in \mathbb{R}$. Dobbiamo dunque trovare un'altra soluzione che sia linearmente indipendente da quella trovata. In particolare si cerca la funzione $c(t)$ tale che

$$y_2(t) = C(t)e^{3t}$$

con $y_2(t)$ soluzione dell'equazione differenziale. Per farlo si calcolano le derivate di y_2 e si sostituiscono nell'equazione differenziale:

$$
\begin{aligned}
y_2' = e^{3t}[C'(t) + 3C(t)] \\
y_2'' = e^{3t}[C''(t) + 6C'(t) + 9C(t)] \\
\to e^{3t}[C''(t) + 6C'(t) + 9C(t) - 6C'(t) + -18C(t) + 9C(t) = 0] \\
C''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Integrando due volte si trova $C(t) = c_1 t + c_2, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. In particolare per questo esempio $C(t) = t$. Dunque si ha:

$$
\begin{aligned}
y_1(t) = e^{3t} \\
y_2(t) = te^{3t}
\end{aligned}
$$

e sono linearmente indipendenti. Per il Teorema di Struttura 5

$$y(t) = e^{3t}(c_1 t + c_2), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Altro metodo Se le soluzioni dell'equazione caratteristica sono reali e distinte l'integrale generale equivale a :

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

Poichè l'equazione è lineare ed omogenea, ogni combinazione lineare è ancora soluzione dell'equazione differenziale.

$$c_1 = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
$$c_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
$$\phi(t) = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}$$

Studiamo il comportamento di $\phi(t)$ quando $\lambda_1 \to \lambda_2$. Dunque poniamo $\lambda_2 = \lambda_1 + \epsilon$ e tendiamo $\epsilon \to 0$.

$$\phi(t) = \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{3.15}$$
$$= \frac{e^{(\lambda_1 + \epsilon)t} - e^{\lambda_1 t}}{\epsilon} \tag{3.16}$$
$$\to \lim_{\epsilon \to 0} \frac{e^{(\lambda_1 + \epsilon)t} - e^{\lambda_1 t}}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} e^{\lambda_1 t} t \tag{3.17}$$

Dunque la funzione limite risolve l'equazione differenziale limite che corrisponde al polinomio caratteristico che ha due radici coincidenti uguali a λ_1.

3.6 Integrale Generale e problema di Cauchy per l'Equazione Omogenea

Data un'equazione lineare omogenea si scrive l'equazione caratteristica associata, e se ne ricavano le soluzioni, in modo che siano linearmente indipendenti. Per ottenere un'unica soluzione dall'integrale generale bisogna porre delle condizioni iniziali del tipo

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Risolvere il problema di Cauchy per un'equazione differenziale omogenea significa **trovare la legge che descrive come cambia una certa quantità $y(t)$ nel tempo** (per esempio la posizione del punto materiale, conoscendo la posizione iniziale e la velocità iniziale).

Parte III

Esercitazioni

Capitolo 4

Sistemi Lineari

Un sistema lineare è formato da m equazioni di primo grado in n incognite.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

oppure più sinteticamente un sistema può essere riscritto in modo matriciale:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{4.2}$$

4.1 Riduzione a scala

$$\begin{bmatrix} a & * & * & * & * & * \\ & b & * & * & * & * \\ & & c & * & * & * \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

dove gli spazi vuoti equivalgono a zero, * sono numeri qualsiasi e a, b, c sono detti **pivot della matrice**.

Esempio di riduzione a scala

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in questo caso i pivot della matrice sono $1, 1, 1$.

4.2 Risoluzione di sistemi lineari mediante riduzione a scala (Metodo di eliminazione di Gauss)

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ x + y + 3z = k - 1 \\ 2x + ky - z = 1 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 3 & k-1 \\ 2 & k & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 0 & 3-k & k-3 \\ 0 & k-2 & -1-2k & -3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & k-2 & -1-2k & -3 \\ 0 & 0 & 3-k & k-3 \end{array}\right]$$

Discussione

- Se $k \neq 2$ e $k \neq 3$ esiste una sola soluzione, e il numero di pivot è 3.
- Se $k = 2$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{5R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$
cioè il sistema è impossibile, in quanto nella terza equazione risulta $0 = -8$, dunque non ammette soluzioni
- Se $k = 3$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$
cioè il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da $z = t \in \mathbb{R}$
$$\begin{cases} x = 2 - 3t + 3 - 7t = 3 - 10t \\ y = 7t - 3 \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$