Appunti di Fisica Sperimentale

Mattia Ruffini

Febbraio 2022

Indice

Parte I

Meccanica

Capitolo 1

Grandezze Fisiche

Nello studio della Fisica bastano solamente **poche regole fondamentali**. Non bisogna studiare le mille casistiche differenti, basta ricondursi al caso generale per risolvere un problema. La Fisica inoltre è una scienza **quantitativa**, ovvero si occupa solamente di quello che riesce a misurare. Misurare, come insegna la matematica, significa **confrontare una grandezza con un'unità di misura.** Dal 2019 il Sistema Internazionale (SI) è riuscito a definire tutte le grandezze fisiche con costanti universali. Per quanto riguarda la Meccanica sono tre le grandezze fondamentali: **tempo, lunghezza, massa**. Il tempo ovviamente si misura in s (secondi), lo spazio in m (metri) e la massa in chilogrammi Kg.

Il Tempo Nel 1799 il secondo è definito come $\frac{1}{86400}$ giorni, tuttavia come si sa a causa di fenomeni fisici e naturali il tempo di un giorno può variare, dunque questa definizione di secondo è obsoleta. Siamo nel 1967 quando si definisce il secondo attraverso le oscillazioni del Cesio 183, perchè questo emette una frequenza pari a $\nu = \frac{1}{9'192'632'770}$ ed è costante nell'universo. Un secondo quindi è definito come $1s = 9'192'632'770$ oscillazioni di Cesio 183.

Lunghezza Nel 1759 si definisce un metro come la 40 milionesima parte dell'equatore terrestre. Poichè la Terra non è una sfera perfetta questa definizione non è corretta secondo il SI. Dunque dal 1983 si definisce un metro come la distanza che la luce percorre in $\frac{1}{299'792'458s}$.

Massa La definizione di massa è legata alla **costante di Planck**. In particolare:

$$h = 6.0260015 \cdot 10^{-15} \frac{Kg \cdot m}{s^2}$$

Se espressa in elettronVolt la costante di Planck equivale a:

$$h = 4.14...eV$$

per questo motivo il **14 Aprile è la data del Quantum Day**.

Grandezze derivate Oltre alle grandezze fisiche fondamentali esistono le grandezze derivate. Un esempio ne è la velocità, definita come lo spazio percorso in un intervallo di tempo ($\frac{m}{s}$) oppure la forza ($\frac{Kg \cdot m}{s^2} = N$). Un ottimo modo per verificare se i nostri calcoli o supposizioni sono corrette è eseguire l'analisi dimensionale.

Grandezze adimensionali Esistono grandezze adimensionali, un esempio sono gli angoli in radianti definiti come

$$\theta = \frac{l}{r}$$

dove r è il raggio della circonferenza mentre l è la lunghezza dell'arco individuato dall'angolo θ. Una regola importante in fisica è che **l'argomento di qualsiasi funzione trigonometrica deve essere adimensionale**. Allo stesso modo **anche l'argomento di una funzione esponenziale deve essere adimensionale**. Esempi con il moto armonico o l'intensità di un fascio luminoso attraverso un mezzo:

$$x(t) = Acos(\omega \cdot t)$$
$$I_0 = Ie^{-\alpha x}$$

dove α sarà una costante con unità di misura $\frac{1}{m}$ se x è la lunghezza del mezzo attraverso cui passa il fascio luminoso.

1.1 Operazioni con cifre significative

Le cifre significative indicano l'accuratezza con cui conosciamo una certa quantità.

Moltiplicazione Con una moltiplicazione si tiene il numero di cifre significative del numero che ne ha meno.

Somma Nella somma invece si tiene il numero di cifre decimali che ne ha di più (togliendo gli zeri iniziali). Esempi:

$$3.12 + 2.21 = 5.33$$

$$10.12 + 2.21 = 12.33$$

$$9.42 \cdot 10^{-2} + 7.6 \cdot 10^{-3} = 9.42 \cdot 10^{-2} + 0.76 \cdot 10^{-2} = 10.18 \cdot 10^{-2}$$

Capitolo 2

Cinematica

La prima parte del corso di Fisica Sperimentale riguarda la **meccanica**, che ha sua volta è composta da **cinematica e dinamica** . La cinematica è la descrizione matematico-geometrica del mondo. La dinamica invece studia *le cause del moto.*
Per entrare nella cinematica innanzitutto ci serve un **sistema di riferimento** per la descrizione del moto. (perchè questo dipende dall'osservatore). L'esempio storico è il fatto che il moto di Marte dalla terra è un moto ciclico, mentre il moto di Marte dal sole è ellittico. Innanzitutto si definisce la traiettoria del moto come **il luogo dei punti occupati in diversi istanti di tempo da un oggetto**.

Data una qualsiasi traiettoria, dati un ascissa curvilinea e un istante di tempo indica dove si trova il punto sulla traiettoria. Da questa definizione nasce la **legge oraria del moto** $s(t)$.

2.1 Legge oraria, velocità e accelerazione

La legge oraria in funzione del tempo indica la distanza del corpo dall'origine. Definiamo:

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0)$$

Il rapporto tra queste due grandezze definisce la velocità media:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2.1}$$

ed equivale al coefficiente angolare della retta passante per i due punti agli istanti t_1 e t_0.

La velocità scalare istantanea Si definisce **velocità scalare istantanea** come

$$v_s(t) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} s'(t) \tag{2.2}$$

perchè è la definizione di limite del rapporto incrementale.

Accelerazione scalare In modo analogo per la velocità istantanea l'accelerazione è definita come:

$$a_s(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t) \tag{2.3}$$

Si può continuare a derivare, in particolare la derivata dell'accelerazione è chiamata **strappo**, ma è utilizzata in campi differenti da quelli della cinematica.

Dall'accelerazione si possono ricavare velocità e legge oraria attraverso l'integrale.

$$\int_{t_0}^{t_1} v_s = \int_{t_0}^{t_1} a_s dt \tag{2.4}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} d_s = \int_{t_0}^{t_1} v_s dt \tag{2.5}$$

Segno della velocità

- Se $v > 0$ il punto si muove in avanti;
- Se $v < 0$ il punto si muove indietro;
- Se $v = 0$ il punto si trova nel **momento di inversione del moto**;

Segno di velocità ed accelerazione

- $a > 0, v > 0$ la velocità aumenta in modulo e il corpo si sposta in avanti;
- $a < 0, v > 0$ la velocità diminuisce in modulo ma il corpo continua ad andare avanti;
- $a < 0, v < 0$ la velocità aumenta in modulo **ma con segno negativo**;
- $a = 0$ si ha il massimo modulo della velocità;

2.2 Moto uniforme

Nel moto uniforme la velocità del corpo è **costante**. Di conseguenza la legge oraria:

$$\int_0^t d_s = \int_0^t v_s dt$$
$$s(t) - s_0 = v_0 t$$
$$s(t) = s_0 + v_0 t$$

2.3 Moto uniformemente accelerato

Nel moto uniformemente accelerato invece è l'accelerazione ad essere costante. Da ciò si ricavano la velocità istantanea e le leggi orarie. Velocità:

$$\int_0^t v_s = \int_0^t a_s dt$$
$$v(t) = v_0 + at$$

Legge oraria:

$$\int_0^t d_s = \int_0^t v_s dt$$
$$s(t) - s_0 = \int_0^t (v_0 + at)dt$$
$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Per sapere se un moto è uniformemente accelerato basta osservare se lo spazio percorso è proporzionale al quadrato del tempo. Ovvero se consideriamo un corpo che scivola lungo un piano inclinato in un intervallo di tempo compie una distanza percorsa Δs. Se raddoppiamo il tempo allora quadruplica la distanza percorsa.

2.4 Formula senza il tempo

Dalla velocità ricaviamo il tempo

$$t = \frac{v(t) - v_0}{a} \tag{2.6}$$

A questo punto sostituiamo il tempo nella legge oraria del moto uniformemente accelerato:

$$s(t) = s_0 + v_0(\frac{v(t) - v_0}{a}) + \frac{1}{2}a(\frac{v(t) - v_0}{a})^2 \tag{2.7}$$

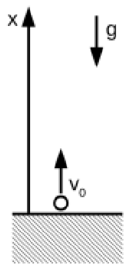
$$a(s - s_0) = v_0 v - (v_0)^2 + \frac{1}{2}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2) \tag{2.8}$$

$$2a\Delta s = v^2 - v_0^2 \tag{2.9}$$

Cenno storico Tutti i gravi, oggetti in caduta, cadono con accelerazione costante $g = 9.81\frac{m}{s^2}$, e quando è solamente la forza peso ad essere esercitata su di essi (senza attriti come quello dell'aria), cadono allo stesso momento.

2.5 Lancio e caduta di un grave

Il lancio e la caduta di un grave è un tipo di moto rettilineo uniformemente accelerato. Consideriamo un sistema di riferimento di questo tipo:



Poichè la parte positiva del nostro asse punta verso l'alto, allora l'accelerazione esercitata dalla Terra sarà negativa. Per prima cosa si scrivono la legge oraria e la velocità in funzione del tempo:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.10}$$

$$v = v_0 - gt \tag{2.11}$$

dobbiamo trovare l'altezza massima e l'istante in cui il corpo raggiunge l'altezza massima (h_{max}, t_{max}).

Metodo 1 Nel momento di inversione di moto, la velocità istantanea sarà nulla, dunque

$$0 = v_0 - gt_{max}$$
$$\Rightarrow t_{max} = \frac{v_0}{g}$$
$$h_{max} = h_0 + v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g(\frac{v_0}{g})^2$$
$$\Rightarrow h_{max} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

Metodo 2 In questo caso utilizziamo la formula senza il tempo:

$$-2h_{max}g = v^2(=0) - v_0^2$$
$$\Rightarrow h_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

e poi si ricava il tempo dalla legge oraria o dalla velocità.

Tempo di caduta Per calcolare il tempo di caduta bisogna porre la posizione finale del corpo nulla (ovvero uguale a quella iniziale).

$$0 = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$\Rightarrow t = 0, t = \frac{2v_0}{g}$$

e da questo tempo si può trovare la velocità di caduta, che avrà modulo sicuramente diverso da zero e verso opposto a quello positivo del nostro sistema di riferimento.

2.6 Moto Bidimensionale

Nel moto bidimensionale si va a considerare il vettore $\Delta\vec{r} = r(\vec{t_1}) - r(\vec{t_0})$ dove per $\vec{r}$ si intende il vettore posizione che indica in che punto si trova il corpo nello spazio se guardiamo la traiettoria su u piano cartesiano. Detto questo si può calcolare la velocità scalare del corpo:

$$\vec{v} = \frac{dr(\vec{t})}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

ovvero il vettore velocità ha **direzione tangente alla traiettoria** e **verso contiguo alla direzione del moto**. Per trovare il modulo del vettore velocità posso considerare il moto come composizione di moti rettilinei e curvilinei. Questa operazione è possibile perchè ogni curva può essere approssimata ad una circonferenza per il cerchio osculatore. Consideriamo un qualsiasi arco di circonferenza: avrà un raggio R, un'ampiezza $\Delta\theta$ e l'arco di circonferenza Δs equivale alla differenza della posizione finale e quella iniziale ricavate dalla legge oraria. Il modulo del vettore $\Delta\vec{r}$ sarà

$$|\Delta\vec{r}| = 2R\sin\frac{\Delta\theta}{2} \tag{2.12}$$

sostituendo questa uguaglianza nel limite del rapporto incrementale si ha:

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{2.13}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2R\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\frac{\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} \tag{2.14}$$

Ovviamente se $\Delta t \to 0, \Delta\theta \to 0$, quindi si ha;

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R\Delta\theta}{\Delta t} \tag{2.15}$$

poichè $\Delta s = R\Delta\theta$ per definizione di radiante:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_s \tag{2.16}$$

ovvero il suo modulo è quello della velocità scalare. Per scrivere il vettore velocità quindi si utilizza **un sistema di riferimento intrinseco alla traiettoria**. Ovvero immaginiamo un vettore unitario $\vec{u_t}$ tangente a ogni punto della traiettoria. Allora:

$$\vec{v} = v_s\vec{u_t} \tag{2.17}$$

molto importante è ricordare che $\vec{u_t}$ cambia direzione e verso ad ogni istante della traiettoria, cioè è in funzione del tempo.

Vettore accelerazione Per trovare il vettore accelerazione consideriamo la nostra traiettoria in un sistema di riferimento fisso. Quindi il vettore posizione in un instante può essere scomposto nel modo seguente:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \tag{2.18}$$

Per definizione la velocità scalare equivale a:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{2.19}$$

$$= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{i} + x(t) \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{j} + y(t) \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \tag{2.20}$$

$$= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{j} \tag{2.21}$$

Le componenti $x(t) \cdot \frac{d\vec{i}}{dt}$ e $y(t) \cdot \frac{d\vec{j}}{dt}$ sono nulle perchè il sistema di riferimento è fisso, la loro direzione, verso e modulo è costante. $\vec{v}$ è ancora una volta tangente alla traiettoria. Ora che abbiamo il vettore velocità è possibile trovare l'accelerazione vettoriale, divisa in sue componenti:

- Componente tangente alla traiettoria:

$$\frac{dv_s}{dt}\vec{u_t} \tag{2.22}$$

- Componente radiale (perpendicolare) alla traiettoria:

$$v_s\frac{d\vec{u_t}}{dt} = \frac{v_s^2}{R} \cdot \vec{u_n} \tag{2.23}$$

  dove $\vec{u_n}$ è il vettore normale alla traiettoria.

N.B. La componente radiale dell'accelerazione è presente **solamente quando la direzione del vettore $\vec{u_t}$ cambia nel tempo, altrimenti questa componente è nulla. La componente radiale dell'accelerazione è detta accelerazione centripeta**.

$$\vec{a}(t) = a_t\vec{u_t} + a_c\vec{u_n} \tag{2.24}$$

$$a_t = \frac{dv_s}{dt} \tag{2.25}$$

$$a_c = \frac{v_s^2}{R} \tag{2.26}$$

Calcolo della componente centripeta dell'accelerazione Consideriamo il vettore $v_s\frac{d\vec{u_t}}{dt}$. Il modulo di questo vettore è dato dalla variazione del vettore $\vec{u_t}$ nel tempo.

$$\Delta\vec{u_t} = 2|\vec{u_t}|\sin(\frac{\Delta\theta}{2})$$

quindi possiamo riscrivere il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{u_t}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2|\vec{u_t}| \sin(\frac{\Delta\theta}{2})}{\frac{\Delta\theta}{2}} \cdot \frac{\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} \tag{2.27}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\frac{\Delta s}{R}}{dt} = \frac{v_s}{R} \tag{2.28}$$

$$\Rightarrow v_s \frac{d\vec{u_t}}{dt} = \frac{v_s^2}{R} \tag{2.29}$$

2.7 Moto circolare uniforme

Nel moto circolare uniforme un corpo si muove lungo una traiettoria circolare. Si definiscono velocità ed accelerazione per questo moto:

- $$\vec{v} = v_s \vec{u_t}$$
- $$\vec{a} = \frac{dvs}{dt}\vec{u_t} + \frac{v_s^2}{R}\vec{u_n}$$

Possiamo riscrivere le equazioni del moto circolare con **coordinate angolari** anzichè utilizzare ascisse curvilinee.

$$\theta = \frac{s(t)}{R}$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\frac{s(t)}{R}}{R} = \frac{v_s}{R}$$

Nel caso del moto circolare uniforma se v_s è costante anche ω sarà costante, ed è chiamata **velocità angolare**. Inoltre vale $\theta = \omega t$. Il tempo del periodo è definito come

$$2\pi = \omega T$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = Hz$$

Velocità angolare, raggio e velocità sono legati dal seguente prodotto vettoriale:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \tag{2.30}$$

mentre l'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.31}$$

$$= \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} \tag{2.32}$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \tag{2.33}$$

e $|\vec{a}| = \omega^2 R$

2.8 Moto circolare uniformemente accelerato

Nel moto circolare uniformemente accelerato l'accelerazione a_s tangente alla traiettoria è costante. Si avrà dunque:

$$\vec{a} = a_s \vec{u_t} + \frac{v_s^2}{R} \vec{u_n} \tag{2.34}$$

e le leggi orarie saranno:

$$a_s = cost \tag{2.35}$$

$$v_s = v_0 + a_s t \tag{2.36}$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_s t^2 \tag{2.37}$$

Possiamo riscrivere le leggi del moto con una descrizione angolare. In particolare si definisce

$$v = \omega R$$

$$\rightarrow \frac{d\omega(t)}{dt} R = \alpha$$

dove α è l'accelerazione angolare scalare. Il vettore accelerazione sarà definito come

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \tag{2.38}$$

$$\rightarrow \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{R})}{dt} \tag{2.39}$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} \tag{2.40}$$

$$\vec{\alpha} \times \vec{R} - \omega^2 \vec{R} \tag{2.41}$$

2.9 Moto parabolico

Il moto parabolico è la composizione di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse delle ascisse e un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo le ordinate. Le leggi orarie:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \tag{2.42}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\theta \\ v_y(t) = v_0 \sin\theta + a_y t \end{cases} \tag{2.43}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cos\theta t \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \tag{2.44}$$

La traiettoria del moto parabolico può essere trovata se si trova il tempo da una legge oraria e lo si sostituisce nell'altra.

$$\begin{cases} t = \frac{x-x_0}{v_0 \cos\theta} \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin\theta \frac{x-x_0}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g (\frac{x-x_0}{v_0 \cos\theta})^2 \end{cases} \tag{2.45}$$

$$\begin{cases} t = \frac{x-x_0}{v_0 \cos\theta} \\ y(t) = y_0 + (x-x_0)\tan\theta - \frac{1}{2} g (\frac{x-x_0}{v_0 \cos\theta})^2 \end{cases} \tag{2.46}$$

che è una parabola. Nel moto parabolico l'ordinata più alta è raggiunta nel momento di inversione del moto, dunque si trova il tempo di altezza massima quando la velocità lungo le ordinate è nulla, e dal tempo con la legge oraria si ricava l'altezza massima.
Per trovare la gittata si trova il tempo quando le ordinate sono nulle (due soluzioni. una accettabile l'altra no). La gitta più lunga si ha quando l'angolo iniziale della velocità è di $\frac{\pi}{4}$.

Capitolo 3

Dinamica

La disica Newtoniana opera entro certi limi.

- Gli oggetti con dimensioni dell'ordine dei micron o nm non possono essere studiati secondo la fisica classica, ma devono essere applicate le leggi **della meccanica quantistica**.
- Per oggetti con una velocità pari a quella della luce deve essere utilizzata la **teoria della relatività**

3.1 Principio di Inerzia

Il **Principio di Inerzia** o **Prima legge della Dinamica** afferma che su un corpo la cui forza risultante che agisce su di esso è pari a $\vec{F} = \vec{0}$ allora il corpo si muove di **moto rettilineo uniforme**.

Il Principio di Inerzia risale a prima di Galileo, però la formulazione era errata, in quanto si pensava che se la froza risultante è nulla, allora anche la velocità del corpo era nulla. Fu Galileo ad accorgersi dell'errore facendo scorrere una pallina su un piano inclinato e poi su un piano diminuendo l'attrito e osservando che la pallina continuava il moto.

Sistema di riferimento inerziale Un sistema di riferimento è inerziale se l'osservatore si muove di moto rettilineo uniforme, quindi la velocità di un corpo in movimento è la medesima per ogni sistema di riferimento inerziale. La Terra **non è un sistema di riferimento inerziale** in quanto all'equatore è presente un'accelerazione centripeta causata dal moto di rotazione, tuttavia può essere trascurata.

3.2 II Legge della Dinamica

La Seconda Legge della Dinamica (o seconda Legge di Newton) afferma che

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{3.1}$$

Questa legge è da guardarsi come una relazione di causa ed effetto. **Una forza provoca un'accelerazione, e il coefficiente di proporzione è la massa**. L'unità di misura della forza è il Newton (N). Inoltre la forza è un **vettore**, perchè sono rispettate le proprietà di somma vettoriale.

Una nota importante è che Newton non definisce la Forza come scritto sopra, ma attraverso la **quantità di moto**, da lui chiamata "*momentum*", definita come $\vec{P} = m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{3.2}$$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}, m(t) = cost \tag{3.3}$$

N. B. L'ultima equazione ha senso se e solo se la massa è costante nel tempo. Se così non fosse (come nel lancio di un razzo il cui 85% del peso è fatto dal carburante che viene bruciato, allora bisogna ricorrere alla formulazione originale di Newton per quanto riguarda la forza.

Impulso Dall'equazione 3.2 si ricava la quantità di moto integrando:

$$\int_0^t d\vec{P} = \int_0^t \vec{F}dt \tag{3.4}$$

$$\Delta\vec{P} = \int_0^t \vec{F}dt = \vec{J} \tag{3.5}$$

dove $\Delta\vec{P} = \vec{J}$ è noto come **impulso**. Si ricava inoltre la forza media esercitata in un intervallo di tempo:

$$\vec{F_m} = \frac{1}{t - t_0}\int_0^t \vec{f}dt \tag{3.6}$$

(applicazione del Teorema della Media Integrale).

$$\Delta\vec{P} = \vec{J} = \vec{F_m}\Delta t \tag{3.7}$$

3.3 Principio di Azione-Reazione

Le froze nascono da un'interazione, e ogni volta che è presente un'interazione che genera una forza, è presente una forza di verso opposto e stessa direzione a quella generata. Lo vediamo nell'attrazione reciproca tra Terra e Sole:

$$m_t a_t = M_s a_s$$
$$a_s = \frac{m_t a_t}{M_s}$$

poichè $M_s >> m_t$ la forza di attrazione che la Terra esercita sul Sole è infinitesima in confronto dell'attrazione che il Sole esercita sulla Terra.

3.4 Forze che determinano i fenomeni naturali

1. **Gravitazionale**;
2. Nucleare **debole**;
3. **Elettromagnetica**;
4. Nucleare **forte**;

per tutte queste forze è importante **il raggio d'azione, andamento asintotico, e intensità relativa**.

Interazione	Intensità	Asintoto	Raggio
Gravitazionale	1	$\frac{1}{R^2}$	∞
Debole	10^{25}	-	$10^{-18}m$
Elettromagnetica	10^{36}	$\frac{1}{R^2}$	∞
Forte	10^{38}	-	$10^{-15}m$

Nel nucleo atomico la forza elettromagnetica tende a spaccare il nucleo (c molti protoni sono vicini e hanno la stessa carica) ma questa è vinta dall'interazione nucleare forte. L'interazione nucleare debole è responsabile del decadimento β.

3.5 Forza Gravitazionale

La forza gravitazionale che la Terra esercita su un corpo di massa m a distanza r da suo centro di massa è:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{u_r} \tag{3.8}$$

dove γ è una costante universale e vale $6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/Kg^2$. Il meno nell'equazione 3.8 indica la natura **attrattiva di tale forza**. Ovviamente se $r << R_t$ allora il termine

$$\vec{g} = -\gamma \frac{M}{R_t^2} \vec{u_r} = 9.81 m/s^2$$

ed è una costante, da cui deriva la forza peso di un corpo in prossimità della superficie terrestre:

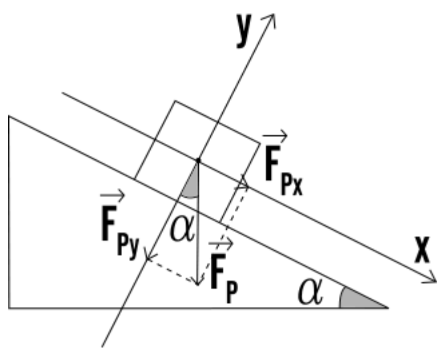
$$\vec{F_p} = m\vec{g}$$

Reazione vincolare Per il Terzo Principio della Dinamica ad una forza c' è sempre una forza opposta. Quando un corpo poggia su una superficie, questa forza è chiamata **reazione vincolare** chiamata $\vec{N}$. La reazione vincolare è una forza relativa, cioè non ha un valore proprio, ma dipende dalla forza che agisce sul corpo, la sua direzione è perpendicolare al piano il verso è uscente da esso. Nel caso di un corpo fermo su una superficie lungo l'asse delle y si avrà:

$$N - mg = 0$$

3.6 Piano inclinato

Un corpo su un piano inclinato le sue forze vengono scomposte lungo gli assi perpendicolari e ortogonali al piano inclinato.

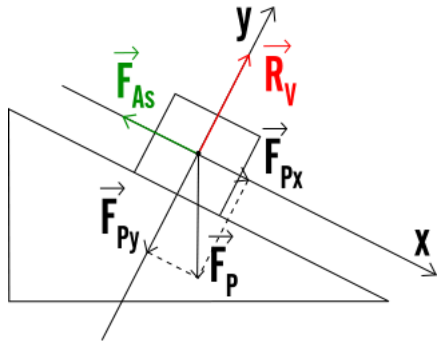


Forze d'attrito Esistono diverse forze d'attrito: **radente, mordente e viscoso**. In particolare nello scivolamento dei copri entra in gioco l'attrito radente **dinamico e statico**. La forza d'attrito non dipende dall'area di appoggio del corpo sulla superficie.

La forza d'attrito statico uguaglia la forza a cui è sottoposto un corpo fino a quando la forza è esercitata sul corpo e questo si muove. Si oppone al movimento.

$$F_a = \mu_s N \tag{3.9}$$

la sua direzione è la stessa del piano su cui poggia il corpo.



Esiste anche una forza di attrito dinamico: non dipende dall'area di contatto, si oppone al movimento, non dipende dalla velocità degli oggetti, non dipende dalla velocità relativa agli oggetti.

$$F_{ad} = \mu_d N \tag{3.10}$$

E' da tenere presente che sempre $\mu_d < \mu_s$. L'attrito statico è fondamentale per il movimento: il piede esercita una forza sull'asfalto che è contrastata dalla forza di attrito statico, se non ci fosse la forza di attrito scivoleremmo. La forza di attrito statico è utilizzata anche nei freni con ABS delle automobili: evitano lo slittamento perchè la pinza dei freni esercita una forza per avere accelerazione nulla nel punto del pneumatico a contatto con l'asfalto, quindi agisce l'attrito statico.

3.7 Attrito viscoso

Si ha attrito viscoso quando un corpo si muove in un fluido. In generale la forza di attrito è proporzionale ad una potenza della velocità:

$$F_a \propto v^m$$

Dunque la forza di attrito viscoso, dunque **non è una forza costante del tempo**, ed è sempre opposta al movimento del corpo.

Modello si Stokes Sia dato un oggetto sferico di raggio R il modulo della forza d'attrito vale:

$$F_a = 6\pi\gamma Rv \tag{3.11}$$

dove γ è il coefficiente di viscosità. Per l'aria a 20 gradi celsius $\lambda = 1.71 \cdot 10^{-6} Ns/m^2$. Il modello di Stokes è valido solamente per corpi che si muovono in moto laminare.

II Modello Il secondo modello è valido per moti turbolenti.

$$F_a = \frac{1}{2}c\rho\pi R^2 v^2 \tag{3.12}$$

dove c è il coefficiente correttivo adimensionale (per l'aria $c = 1$), e ρ è la densità del fluido ($1.29 Kg/m^3$).

Esempio Un corpo in caduta libera si muove di moto laminare e risente dell'attrito viscoso con l'aria.

3.8 Tensione di una fune

Quando una forza è applicata ad una fune si può avere esclusivamente il trascinamento del corpo. La fune è considerata **con massa trascurabile e lunghezza inestensibile**. Se fosse estensibile la cinematica di un punto sulla corda sarebbe diversa dalla cinematica del corpo trascinato. Dunque la fune crea **un vincolo cinematico**:

- Se una fune si sposta di Δs anche il corpo si sposta da Δs;
- Se un punto della fune si sposta con velocità v anche il corpo a cui è legato si sposta di velocità v;
- Lo stesso principio vale per l'accelerazione;

Se la fune avesse una massa non trascurabile allora la tensione applicata ad un capo della fune non sarebbe la stessa all'altro capo.

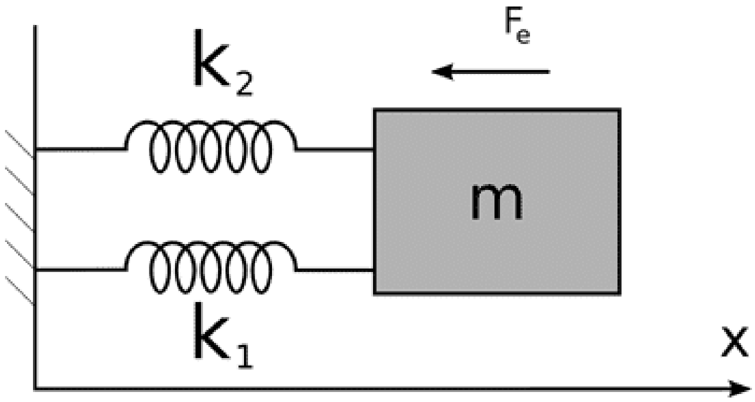
3.9 Forza elastica

Si definisce come la forza elastica esercitata da una molla su un corpo come:

$$F = -kx$$

dove K è la **costante elastica della molla**. Possiamo riscrivere la seconda legge della dinamica come equazione differenziale e si ha:

$$\frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{3.13}$$

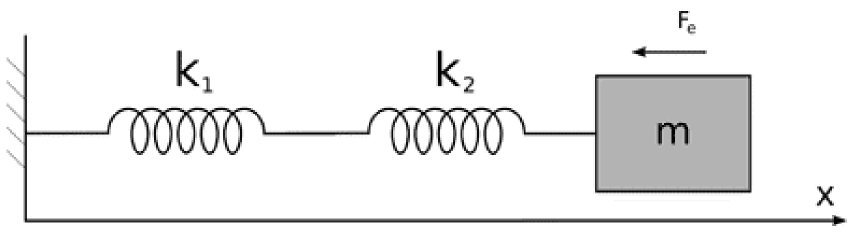


Molle in parallelo Se le molle hanno questa disposizione allora sono disposte in **parallelo**. Il corpo è soggetto ad un **unico spostamento** x, e così anche le molle.

$$\begin{cases} F_1 = -k_1x \\ F_2 = -k_2x \end{cases} \rightarrow F_1 + F_2 = -k_1x - k_2x$$

$$\vec{F_{tot}} = -(k_1 + k_2)\vec{x} \tag{3.14}$$

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i \tag{3.15}$$



Molle in serie In questo caso le molle sono dette in **serie**, e in questo caso la prima molla avrà un suo spostamento e la seconda un altro spostamento, dunque differenti. Tuttavia il sistema di molle è **soggetto ad un'unica forza**.

$$\begin{cases} F = -k_1 x_1 \\ F = -k_2 x_2 \end{cases} \rightarrow x_{tot} = x_1 + x_2 = -F(\frac{k_2 + k_1}{k_1 k_2})$$

$$F = -(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2})x \tag{3.16}$$

$$k_e q = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} \tag{3.17}$$

3.10 Moto armonico

Un corpo attaccato ad una molla oscilla attorno alla posizione di riposo: si dice che il corpo compie un **moto armonico**. Si definisce la **pulsazione** o **frequenza naturale** ω come

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Si definisce quindi una funzione periodica:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{3.18}$$

Il moto è dunque periodico, e il periodo equivale a $T = \frac{2\pi}{\omega}$. A equivale all'ampiezza massima che il corpo raggiunge. Essendo la velocità la derivata della posizione rispetto il tempo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \tag{3.19}$$

Allo stesso modo con l'accelerazione:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{t} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \tag{3.20}$$

Altri risultati Supponiamo di conoscere la posizione e lo sfasamento iniziale del corpo che segue un moto armonico: $x(0) = x_0$, $\phi(0) = \phi_0$. Dunque:

$$\begin{aligned} x_0 &= A\cos(\phi_0) \\ v_0 &= -\omega A\sin(\phi_0) \\ \rightarrow -\frac{v_0}{x_0\omega} &= \tan(\phi_0) \\ \rightarrow A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \end{aligned}$$

invece se $x_0 = 0$ e $v_0 \neq 0$. Allora si avrà:

$$\tan(\phi) = -\frac{v_0}{x_0\omega} = \infty \to \phi = \frac{\pi}{2}$$
$$\to A = \frac{v_0}{\omega}$$

3.11 Pendolo semplice

Anche il corpo attaccato ad un pendolo semplice esegue un moto di tipo ormonico, infatti oscilla attorno una posizione di equilibrio. Se consideriamo la traiettoria percorsa da un corpo $s(t) = \theta l$ e scomponendo le forze che agiscono sul corpo si avrà un'equazione differenziale:

$$ma = -mg\sin\theta$$
$$m\frac{d^2s(t)}{d(t)} = -mg\sin\theta$$
$$ml\frac{d^2\theta(t)}{dt} + mg\sin\theta = 0$$
$$\frac{d^2\theta(t)}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Questa è un'equazione differenziale abbastanza complicata. Tuttavia **per piccole oscillazioni il seno dell'angolo si approssima al suo seno**, dunque si ha:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{3.21}$$

che è un'equazione differenziale simile a quella del moto di un corpo attaccato ad una molla:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi), \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{3.22}$$

si hanno due importanti osservazioni:

1. Il periodo non dipende dalla massa;

2. T non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione;

3.12 Alcuni parallelismi

Come abbiamo visto nella sezione 3.9 esistono due configurazioni in cui può essere messa una molla. In particolare è possibile trovare una situazione in quanto analoga anche nell'elettro magnetismo: **vediamo il caso delle resistenze e dei condensatori** in serie e in parallelo.

3.12.1 Resistenze

Legge di Ohm: $\Delta V = RI$

In parallelo Nel caso due resistenze siano in parallelo, rimane uguale per entrambe le resistenza la **differenza di potenziale**, dunque si può dimostrare che:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \tag{3.23}$$

In serie Nel caso in cui le resistenze siano in serie, allora la differenza di potenziale della seconda resistenza è diversa da quella della resistenza precedente, tuttavia rimane identica l'**intensità di corrente**. Si dimostra che:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{3.24}$$

3.12.2 Condensatori

La capacità del condensatore C è data dalla legge: $Q = c\Delta V$.

In parallelo Se i condensatori sono in parallelo si ha la medesima ΔV, dunque si dimostra che:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i \tag{3.25}$$

In serie Se i condensatori sono in serie allora questi hanno la medesima carica. Si dimostra che:

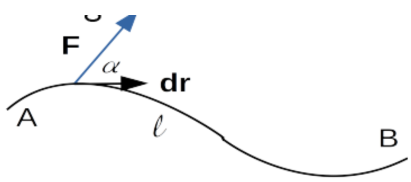
$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \tag{3.26}$$

Capitolo 4

Lavoro, Energia Cinetica, Energia Potenziale

Immaginiamo di avere un corpo su un piano inclinato privi di attrito. In un primo momento vogliamo far salire il corpo a velocità costante, dunque applichiamo una forza lungo l'asse x, e la somma delle risultanti sarà nulla. Se invece vogliamo far salire il corpo con una certa accelerazione allora si avrà la forza risultante uguale alla ben nota ma. In entrambi i casi il corpo si muove, ma dal punto di vista della dinamica **le situazioni sono radicalmente differenti**, dunque **è come se ci si perdesse dell'informazione per quanto riguarda il moto del corpo**. Dunque "aggiungiamo" alla seconda Legge della Dinamica lo spostamento.

4.1 Teorema delle Forze Vive



Consideriamo l'esempio in figura. Avremo quindi:

$$\vec{F}d\vec{r} = m\vec{a}d\vec{r}$$
$$\vec{F}d\vec{r} = m\vec{a}\vec{v}dt$$

Dall'ultima uguaglianza integriamo in due punti A e B entrambi i membri.

$$\int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a}\vec{v}dt \tag{4.1}$$

consideriamo ora il secondo termine, sapendo che $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

$$\int_A^B m\vec{a}\vec{v}dt = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = \tag{4.2}$$

$$\int_{v_a}^{v_b} m\vec{v}d\vec{v} = \tag{4.3}$$

$$\int_{v_a}^{v_b} mv_x d_x + mv_y d_y + mv_z d_z = \tag{4.4}$$

$$\int_{v_{ax}}^{v_{bx}} mv_x d_x + \int_{v_{ay}}^{v_{by}} mv_y d_y + \int_{v_{az}}^{v_{bz}} mv_z d_z = \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{2}mv_{bx}^2 - v_{ax}^2 + \frac{1}{2}mv_{by}^2 - v_{ay}^2 + \frac{1}{2}mv_{bz}^2 - v_{az}^2 = \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{2}m[(v_{bx}^2 + v_{by}^2 + v_{bz}^2) - ((v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2)] = \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{2}m(v_b^2 + v_a^2) \tag{4.8}$$

Ora unendo le uguaglianze 4.8 e 4.1 si arriva a:

$$\frac{1}{2}m(v_b^2 + v_a^2) = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} \tag{4.9}$$

questo risultato è importantissimo, e prende nome come **Teorema dell'Energia Cinetica**, **Teorema del Lavoro**, o in modo nostalgico **Teorema delle Forze Vive**. Questo perchè il primo termine definisce **l'energia cinetica**, mentre il secondo definisce il **lavoro**, che equivale **all'integrale di linea tra un punto iniziale A e un punto finale B del prodotto scalare tra $\vec{F}$ e $d\vec{r}$, con $d\vec{r}$ tratto infinitesimo della traiettoria compiuta dal corpo in movimento** .

Questo teorema è valido esclusivamente se $F = F_{tot}$, ovvero F equivale alla somma di tutte le forze che agiscono sul corpo in movimento. In modo sintetico si può scrivere:

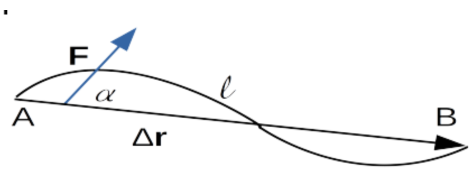
$$\Delta E_k = W_{AB} \tag{4.10}$$

L'integrale di linea non sempre è facilmente applicabile, infatti se la forza che agisce sul punto continua a variare in modulo, direzione e verso, varia anche l'angolo con $d\vec{r}$, dunque il lavoro andrebbe calcolato punto per punto. Tuttavia esistono dei casi particolari.

Forza costante Se la forza che agisce sul punto è costante allora si ha che:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

dove $\Delta\vec{r}$ è il vettore spostamento del corpo.



Inoltre per definizione di prodotto scalare se $\alpha < \pi/2$, ovvero il prodotto scalare è positivo il lavoro è detto **motore**, se $\alpha > \pi/2$ il lavoro è **resistente**, se $\alpha = \pi/2$ il lavoro è **nullo**.

4.2 Lavoro e Forza Peso

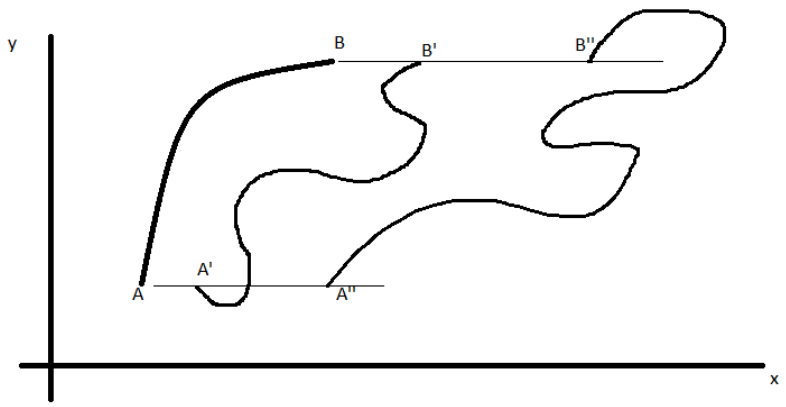
Consideriamo un corpo che si muove lungo una traiettoria qualsiasi, e l'unica forza che agisce su questo corpo è la forza peso. E' possibile calcolare il lavoro che la forza peso esercita sul corpo. Applichiamo la definizione:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \vec{F}_p d\vec{r} \\ \rightarrow d\vec{r} &= d_x\vec{i} + d_y\vec{j} \\ \rightarrow \vec{F}_p &= 0\vec{i} - mg\vec{j} \\ \rightarrow \vec{F}_p d\vec{r} &= d_z \cdot 0 - mgd_y \end{aligned}$$

dunque è facile notare che se scomponiamo i vettori nelle loro componenti i, j, k si nota come lungo x il lavoro esercitato dalla forza peso è nullo.

$$W_{AB} = \int_{y_A}^{y_B} -mgd_y = -mg(y_B - y_A) \tag{4.11}$$

Dunque il lavoro esercitato dalla forza peso **dipende solamente dalla posizione finale e la posizione iniziale lungo l'asse delle ordinate**. Si ha che $W_{AB} = W_{A'B'}$



Viene chiamata con U_p l'**energia potenziale associata ad un corpo**. Vale che $U_p = mgy$. Inoltre

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_p d\vec{r} = U_A - U_B = -\Delta U \tag{4.12}$$

Si noti come l'energia potenziale è definita da meno di una costante che esce dall'integrale, dunque possiamo scegliere noi il riferimento della y dove più ci è comodo.

Potenza La potenza in fisica è definita come

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \tag{4.13}$$

4.3 Forze conservative

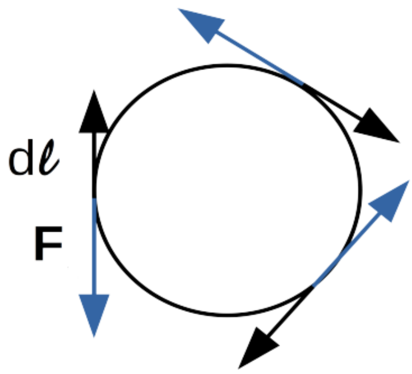
Vale una particolare proprietà: **le forze definite da una funzione di energia potenziale sono dette forze conservative**. Quindi per forze conservative:

- Possono essere definite da U;
- $W_{AB} = -DeltaU$

Quindi per forze conservative l'energia potenziale e il lavoro dipendono solamente dallo stato iniziale e dallo stato finale. Un modo per dire questo è calcolare il lavoro su un circuito chiuso, e si definisce **la circuitazione in un circuito chiuso equivale a**

$$\oint \vec{F_p} d\vec{r} \tag{4.14}$$

e la circuitazione è **nulla** se agiscono forze conservative.



Per esempio si dimostra che **forza d'attrito** non è una forza conservativa, in quanto la circuitazione in un percorso chiuso non è nulla.

In generale si dice che su un corpo la somma delle forze è data da una somma di forze conservative e non conservative:

$$F = F_c + FNC$$

Per il Teorema delle Forze Vive si ha:

$$\Delta E_k = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \tag{4.15}$$

$$\int_A^B \vec{F_C} d\vec{r} + \int_A^B \vec{F_{NC}} d\vec{r} \tag{4.16}$$

$$-\Delta U + W_{NC} \tag{4.17}$$

$$\rightarrow \Delta E + \Delta U = W_{NC} \tag{4.18}$$

Un risultato molto importante è il 4.18, e si definisce **l'energia meccanica**:

$$E_{mec} = E_k + U_p \tag{4.19}$$

Ecco le casistiche:

1. $W_{NC} = 0$ allora si conserva l'energia meccanica di un sistema;
2. $W_{NC} > 0$ (Lavoro Motore), l'energia meccanica aumenta;
3. $W_{NC} < 0$ (Lavoro resistente, tipo forza di attrito), l'energia meccanica diminuisce;

4.4 Lavoro forza elastica

Immaginiamo che un corpo sia attaccato ad una molla, con L_0 come lunghezza della molla in equilibrio, e L è la lunghezza della molla in tensione. Allora per definizione

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B -k\vec{x}d\vec{x}$$
$$= [-\frac{k}{2}x^2]_B^A$$
$$= U_B - U_B = -\Delta U$$
$$\rightarrow U_{el} = \frac{1}{2}kx^2$$

4.5 Dall'energia potenziale alla forza

Per definizione:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\Delta U$$

supponiamo che nel sistema agiscano solamente forze conservative.

$$-\Delta U = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$-\Delta U = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Utilizzando le derivate parziali allora:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \tag{4.20}$$
$$F = -gradU \tag{4.21}$$
$$F = -\vec{\nabla}U \tag{4.22}$$

questa operazione si chiama **gradiente di U**.

Esempi nell'utilizzo del gradiente Anche la concentrazione di una specie in un solvente è data dall'operazione di gradiente. Il flusso della concentrazione andrà dai punti con concentrazione maggiore a quelli con concentrazione minore. $\vec{J}$ è il flusso, ed è definito come:

$$\vec{J} = -\vec{\nabla}C(x) \tag{4.23}$$

Il gradiente è utilizzato anche per calcolare la diffusione del calore nei materiali

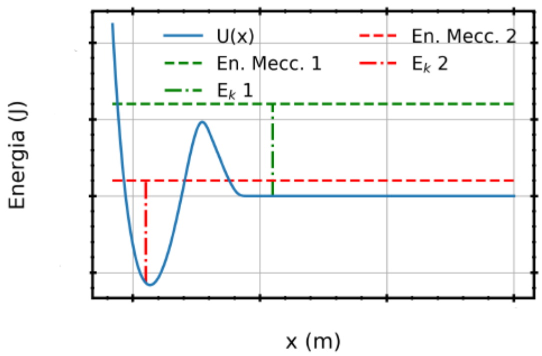
$$\vec{J_q} = -k\vec{\nabla}T(x) \tag{4.24}$$

O nell'accelerazione dei fluidi:

$$\vec{a} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P \tag{4.25}$$

dove P è la pressione che non è costante nel fluido.

4.6 Analisi del moto conoscendo l'energia potenziale



Consideriamo un grafico dell'energia potenziale in funzione della posizione. Nel primo caso (rosso) agiscono solamente forza conservative (l'energia meccanica rimane costante). Dunque il corpo non potrà mai superare mai quella soglia di energia potenziale, se non fosse così infatti:

$$U_p > E_m$$
$$\rightarrow E_k < 0 \lightning$$

Poichè quindi il corpo non può superare quella soglia si dice che il corpo è in **una buca di potenziale** e non può uscire da essa. Questo non vale in alcuni casi che riguardano la fisica quantistica, si fa riferimento all'**effetto Tunnel**. Inoltre utilizzando la funzione di gradiente allora si hanno due condizioni in cui la forza è nulla:

- **Minimo di U**: si ha un equilibrio stabile;

- **Massimo di U**: si ha un equilibrio instabile, se applico una minima forza al corpo questo inizia a muoversi.

Dilatazione termica Questo approccio di studio dell'energia potenziale in funzione della posizione può essere utilizzato per studiare alcuni fenomeno. Per esempio se osserviamo l'energia potenziale tra due molecole sarà di tipo elastico della forma $-\frac{1}{2}kx^2$, se approssimata con Taylor in zero. E' un'approssimazione che ci dice che il punto di equilibrio stabile sta nel punto medio della parabola. Con la deformazione il grafico di U è anarmonico, dunque il punto di equilibrio si sposta.

4.7 Oscillatore Armonico Smorzato

Un oscillatore armonico smorzato è un oscillatore in cui agisce una forza non conservativa per cui il corpo attaccato alla molla tende col passare del tempo alla posizione di riposo della molla. Un oscillatore armonico **libero** avrà un'equazione differenziale del tipo:

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

Nel caso agisca una forza d'attrito viscoso del tipo $F = -\beta v$, allora l'equazione differenziale del moto sarà del tipo:

$$mx'' = -kx - \beta v \tag{4.26}$$
$$mx'' + \beta x' + kx = 0 \tag{4.27}$$
$$x'' + \frac{\beta}{m} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{4.28}$$

Analisi energetica Dal punto di vista energetico sappiamo che:

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.29}$$
$$dE_m = -\beta v dx \tag{4.30}$$

dall'equazione 4.30 possiamo scrivere la variazione dell'energia meccanica nel tempo:

$$\frac{dE_x}{dt} = \frac{-\beta v dx}{dt} \tag{4.31}$$
$$= -\beta v \cdot v = -\beta v^2 \tag{4.32}$$

L'ultima uguaglianza indica che la variazione di energia meccanica nel tempo equivale alla potenza data dalla forza di attrito viscoso: $P = -F_a v$, in quanto per definizione $F_a = -\beta v$. In generale **la variazione dell'energia meccanica equivale alla potenza delle forze non conservative**. E inoltre l'energia meccanica **diminuisce fino ad arrivare a zero**, cioè finchè il corpo non si ferma.

Dall'equazione 4.28 inoltre si calcolano due termini $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ e $\gamma = \frac{\beta}{2m}$. Si hanno tre casistiche.

$\omega_0 < \gamma$ In questo caso l'oscillatore è **sottosmorzato**, e la soluzione all'equaizone differenziale è del tipo:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t) \tag{4.33}$$

$\omega_0 > \gamma$ L'oscillatore è **sovrasmorzato**, e la soluzione dell'equazione differenziale è del tipo:

$$x(t) = Ae^{-(\gamma+\omega_0)t} + Be^{-(\gamma-\omega_0)t} \tag{4.34}$$

$\omega_0 = \gamma$ In questo caso l'oscillatore è **critico**, e la soluzione all'equazione differenziale è:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \tag{4.35}$$

Ovvero la massa va a "zero" nel minimo tempo possibile.

4.8 Oscillatore Armonico Forzato

Nell'oscillatore armonico forzato il corpo oltre a subire la forza elastica e la forza d'attrito subisce anche una forza esterna detta **forzante**, descritta dalla legge del tipo

$$F = F_0 \cos(\omega_f t) \tag{4.36}$$

dove ω_f è la pulsazione della forza esterna. In modo analogo all'oscillatore armonico smorzato si può scrivere l'equazione differenziale del moto:

$$x'' + \frac{\beta}{m}x' + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t + \phi) \tag{4.37}$$

Dopo un transitorio iniziale la soluzione è della forma:

$$x(t) = A\cos(\omega_f t - \alpha) \tag{4.38}$$

In questo caso A e α non sono date dalle condizioni iniziali del sistema ma dipendono dalle caratteristiche interne di esso. In seguito sono riportate le leggi della velocità e dell'accelerazione

$$x(t) = A\cos(\omega_f t - \alpha) = A[\cos(\omega_f t)\cos(\alpha) - \sin(\omega_f t)\sin(\alpha)] \tag{4.39}$$

$$v(t) = -A\omega_f \sin(\omega_f t - \alpha) = -A\omega_f[\sin(\omega_f t)\cos(\alpha) - \cos(\omega_f t)\sin(\alpha)] \tag{4.40}$$

$$a(t) = -A\omega_f^2 \cos(\omega_f t - \alpha) = -A\omega_f^2[\cos(\omega_f t)\cos(\alpha) - \sin(\omega_f t)\sin(\alpha)] \tag{4.41}$$

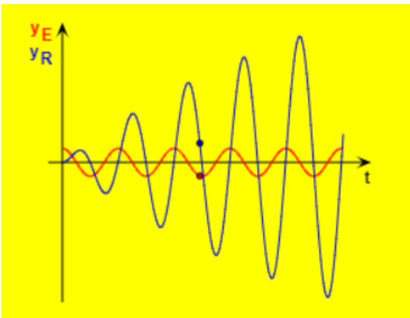
sostituendo queste equazioni nell'equazione del moto e semplificando a dovere si arriva a:

$$\sin(\alpha)(\omega_0^2 - \omega_f^2) = \omega_f \frac{\beta}{m}\cos(\alpha) \tag{4.42}$$

...

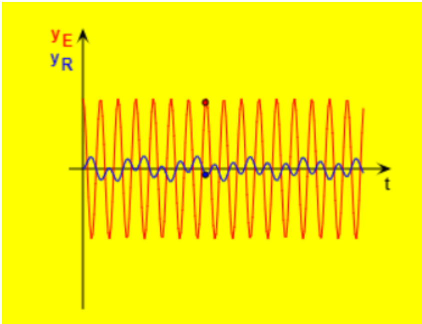
Si dimostra che l'ampiezza A e la fase α **dipendono dal rapporto** $\frac{\omega_f}{\omega_0}$. Si hanno diversi casi:

1. $\omega_f < \omega_0$ Allora la forzante e lo spostamento del corpo sono **quasi in fase**, c'è una leggera differenza.



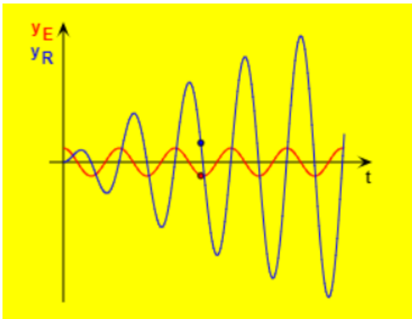
La forzante e il corpo sono quasi in fase.

2. $\omega_f >> \omega_0$ In questo caso è come se il sistema si distruggesse, ovvero il corpo oscilla in un intorno della condizione di riposo.



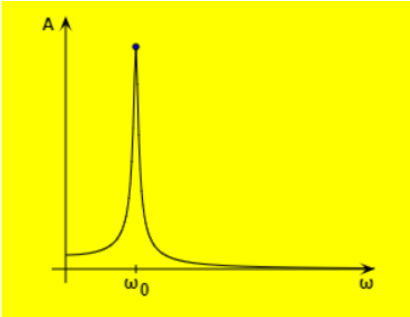
Il corpo oscilla attorno alla posizione di riposo della molla.

3. $\omega_f = \omega_0$ In questo caso si ha una condizione di **risonanza**. Ovvero la fase tra la forzante e lo spostamento del corpo è di $\alpha = \pi/2$. In questo caso l'ampiezza A aumenta con l'aumentare del tempo.



Nella condizione di risonanza, l'ampiezza aumenta con l'aumentare del tempo.

E' possibile vedere i casi sopra descritti in questa web-app: `https://www.walter-fendt.de/html5/phen/resonance_en.htm`.



In corrispondenza del picco l'ampiezza raggiunge il suo valore massimo, prima di ω_0 ampiezza e forzante sono quasi in fase, dopo ω_0 l'ampiezza tende a zero.

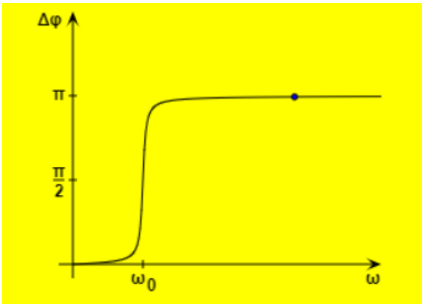


Diagramma della fase α in funzione di ω_f

Bilancio Energetico Anche in questo caso la variazione dell'energia meccanica è data dalla potenza delle forze non conservative (la forzante).

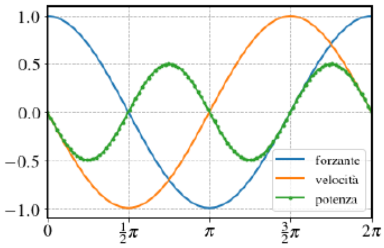
$$P = F_0 \cos(\omega_f t) v(t) \tag{4.43}$$
$$= -F_0 \cos(\omega_f t) A\omega_f \sin(\omega_f t - \alpha) \tag{4.44}$$
$$\tag{4.45}$$

anche in questo caso dunque P dipende dalla fase α.

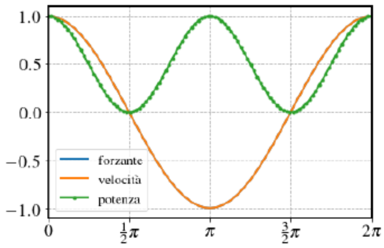
Come si vede dall'immagine (a) se la fase è nulla anche la potenza media sarà tale. Nella figura (b), se $\alpha = \pi/2$, cioè nel caso di risonanza, la potenza è massima ed è positiva. Nelle altre immagini si vede come se la fase aumenta questa diminuisce.

Applicazione con i reticoli cristallini In un reticolo cristallino, le forze di legame sono molto complesse. Tuttavia una prima approssimazione fa si che possano essere viste come forze elastiche nell'intorno del punto. In particolare si ha che :

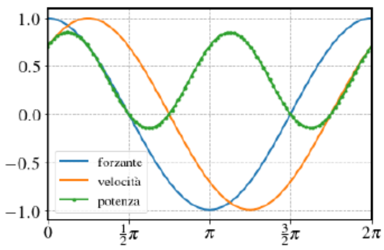
$$\frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0$$



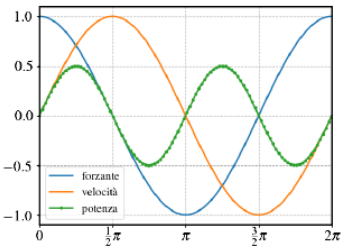
(a) $\alpha = 0$



(b) $\alpha = \pi/2$



(c) $\alpha = 3/4\pi$



(d) $\alpha = \pi$

in un intorno di x_0. Approssimando con Taylor al secondo ordine

$$U(x) = U(x_0) + \frac{\partial U(x)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial U(x)}{\partial x}(x - x_0)^2 \tag{4.46}$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.47}$$

cioè l'energia potenziale attorno alle posizioni di equilibrio degli atomi è **elastica**. E' un'approssimazione che funziona. E' il modello di Lawrence-Lomer .

Capitolo 5

Quantità di moto

Fino ad ora importanti relazioni che abbiamo visto sono:

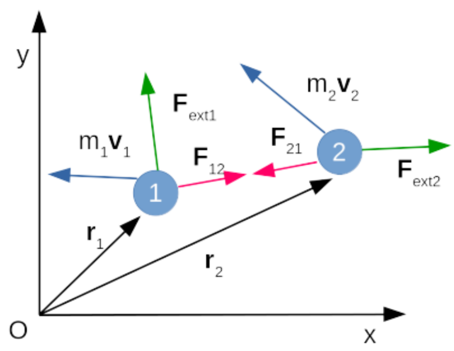
$$\Delta E_m = \Delta(E_k + U) = W_{nc} \tag{5.1}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{5.2}$$

quindi se la forza risultante di un sistema la la **quantità di moto è costante**, come per l'energia meccanica, **se il lavoro delle forze conservative è nullo l'energia meccanica è costante**.

5.1 Conservazione della quantità di moto

Consideriamo l'interazione tra due corpi, allora si avranno delle forze dovute dall'interazione dei corpi e delle forze esterne.



Per il corpo uno si avrà:

$$\frac{d\vec{P_1}}{dt} = F_{12} + F_{1est} \tag{5.3}$$

$$\frac{d\vec{P_1}}{dt} = F_{21} + F_{2est} \tag{5.4}$$

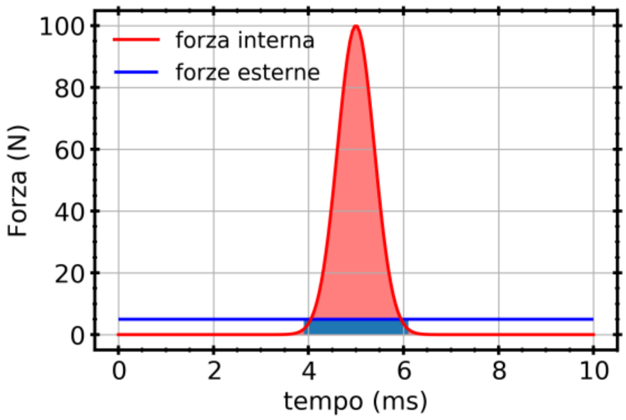
$$P_{tot} = \vec{P_1} + \vec{P_2} \tag{5.5}$$

dunque derivando rispetto il tempo:

$$\frac{P_{tot}}{dt} = F_{12} + F_{1est} + F_{21} + F_{2est} \tag{5.6}$$

$$= F_{1est} + F_{2est} \tag{5.7}$$

ovvero **la variazione della quantità di moto dipende solamente dalle forze esterne**. Nel caso $F_{tot} = 0$ allora la variazione della quantità di moto rispetto il tempo è nulla, dunque $P_{tot} = cost$. Quando vale questo si ha **un fenomeno di urto**. Nel caso di due corpi che scivolano lungo un piano inclinato senza attrito, agiranno le forze peso dei corpi e della forza azione-reazione che entrano in gioco nel momento dell'impatto. L'intensità della



forza di impatto è molto più alta rispetto alla fora peso, ma dura di meno. Applicando il Teorema dell'Impulso:

$$\Delta P_1 = \int_i^f m_1 g dt + \int_i^f F_{int} dt \tag{5.8}$$

e si scelgono l'istante iniziale e finale in prossimità dell'inizio e fine dell'impatto, dunque si ha che:

$$\int_i^f F_{int} dt >> \int_i^f m_1 g dt \tag{5.9}$$

Infatti l'integrale della forza rispetto al tempo equivale all'area sottesa. Il termine $\int_i^f m_1 g dt$ è trascurabile rispetto alla quantità di moto della forza di impatto. Dunque la differenza di energia potenziale negli istanti immediatamente precedenti e successivi all'impatto dei due corpi allora si avrà:

$$\Delta P_1 = \int_i^f F_{int} dt \tag{5.10}$$

$$\Delta P_2 = \int_i^f -F_{int} dt \tag{5.11}$$

dunque la quantità di moto del sistema si conserva. Ora per risolvere problemi legati alla quantità di moto vale la seguente equazione (se consideriamo due corpi):

$$m_1 \vec{v_{1i}} + m_2 \vec{v_{2i}} = m_1 \vec{v_{1f}} + m_2 \vec{v_{2f}} \tag{5.12}$$

e se siamo nello spazio, considerando le coordinate dei vettori si ha un'equazione di sei incognite, molto difficile da risolvere. Possiamo utilizzare il principio di conservazione dell'energia meccanica. Ci si divide in diverse casistiche.

Urto Elastico Si ha urto elastico quando $\Delta E_k = 0$. In questo urto l'energia potenziale del sistema iniziale e finale non varia, dunque si conserva l'energia cinetica.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \\ m_1 \vec{v_{1i}} + m_2 \vec{v_{2i}} = m_1 \vec{v_{1f}} + m_2 \vec{v_{2f}} \end{cases} \tag{5.13}$$

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2) v_1}{m_2 + m_1} + \frac{2 m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{5.14}$$

$$v_{2f} = \frac{(m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2} + \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} \tag{5.15}$$

si noti che il sistema è simmetrico.

Urto anelastico Negli urti anelastici il lavoro delle forze non conservative non è nullo, allora vale che:

$$\Delta E_k = W_{nc} \tag{5.16}$$

questo perchè l'energia cinetica viene dissipata in lavoro di forze non conservative.

Urto comletamente anelastico Nell'urto completamente anelastico il primo corpo trasferisce la quantità di mto all'oggetto costituito dai due oggetti. Ovvero

$$m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} = (m_1 + m_2)\vec{v} \tag{5.17}$$

L'applicazione degli urti in fisica è molto importante. Per esempio l'atomo di uranio 235 se colpito da un neutrone si scinde in altri neutroni con una velocità di $10^7 m/s$. Se questo neutrone colpisce un altro atomo di uranio a quella velocità la probabilità che accada nuovamente la scissione è bassissima. Dunque la velocità del neutrone deve essere diminuita, si chiama **processo di termalizzazione**. Questo viene fatto scontrandoli con il nucleo dell'idrogeno, infatti il combustibile è immerso in acqua. E' un tipo di centrale nucleare di stampo "occidentale". Chernobyl era il carbonio sotto forma di grafite per termalizzare i neutroni, che ha un'efficienza molto più bassa.

5.2 Trasferimento della quantità di moto

Un esempio di come la quantità di moto viene trasferita è nel lancio dei razzi, ovvero la quantità di moto del gas che viene espulso è trasferita al razzo che prende velocità, ovvero è il principio di funzionamento di un motore a reazione. La massa del razzo prima di partire è $m + \Delta m_c$ dove Δm_c è la massa del carburante. La velocità del gas espulso rispetto **al sistema di riferimento inerziale e non rispetto il razzo** equivale a

$$v_{gas} = \vec{v} - \vec{v_e} \tag{5.18}$$

dove v_e è la velocità di espulsione rispetto al razzo. Sperimentalmente dalla legge dei gas perfetti si ricava che

$$v_e = \sqrt{\frac{3k_BT}{MM}} \tag{5.19}$$

utilizzando la legge di conservazione della quantità di moto si ha che:

$$P_i = (m + \Delta m_c)v \tag{5.20}$$

$$P_f = m(v + \Delta v) + \Delta m_c v_{gas} \tag{5.21}$$

$$\rightarrow \Delta P = mv + m\Delta v + \Delta m_c v - \Delta m_c v_e - mv - \Delta m_c v = \tag{5.22}$$

$$= m\Delta v - \Delta m_c v_e \tag{5.23}$$

Utilizzando la definizione di rapporto incrementale

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = m\frac{dv}{dt} - v_e\frac{dm_c}{dt} \tag{5.24}$$

Nello spazio la variazione della quantità di moto è nulla, in quanto non agiscono forze esterne, mentre nell'atmosfera agisce la forza peso, quindi la variazione di quantità di moto non è nulla.

$$\frac{dP}{dt} = m\frac{dv}{dt} - v_e\frac{dm_c}{dt} = -mg \tag{5.25}$$

$$m\frac{dv}{dt} = v_e\frac{dm_c}{dt} - mg \tag{5.26}$$

$$\tag{5.27}$$

si definisce **spinta** S la grandezza $v_e\frac{dm_c}{dt}$ e come **burning rate** $\frac{dm_c}{dt}$.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_e}{m}\frac{dm_c}{dt} - g \tag{5.28}$$

poichè $dm_c = -dm$ in quanto la variazione di massa del carburante equivale ad una variazione di massa del razzo, allora:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_e}{m}\frac{dm}{dt} - g \tag{5.29}$$

$$dv = -\frac{v_e}{m}d_m - gdt \tag{5.30}$$

$$\int_{v_0}^{v_f} dv = \int_{m_0}^{m_f} -\frac{v_e}{m}d_m + \int_{t_0}^{t_f} -gdt \tag{5.31}$$

$$v_f - v_0 = -v_e[lnm]_{m_i}^{m_f} - gt \tag{5.32}$$

$$v_f = v_e ln(\frac{m_0}{m_f}) - gt \tag{5.33}$$

Capitolo 6

Momento

Abbiamo fin'ora osservato due leggi di conservazione:

$$W_{nc} = 0 \rightarrow E_m = cost \tag{6.1}$$
$$F = 0 \rightarrow P = cost \tag{6.2}$$

In queste leggi tuttavia si conservano altre grandezze, perchè è vero che per ogni simmetria è associata una legge di conservazione. In particolare per l'equazione 6.1 si conserva il tempo, ovvero si ha **invarianza temporale**. Invece per l'equazione 6.2 si conserva lo spazio, dunque si ha **invarianza spaziale**. Ovvero la traslazione nello spazio è una simmetria del sistema. Esiste una terza invarianza: l' **invarianza rotazionale**, ovvero se considero un moto che percorre un moto circolare è indipendente da dove scelgo di considerare l'inizio del moto. Dunque si conserva il **momento angolare** o **momento della quantità di moto**.

6.1 Momento Angolare

Il momento angolare è definito come:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{P} \tag{6.3}$$

Il momento angolare dipende da che **polo** scelgo. Il modulo del momento angolare è definito come:

$$Lrmv|\sin\theta| \tag{6.4}$$

Consideriamo ora la variazione del momento angolare rispetto il tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} \tag{6.5}$$

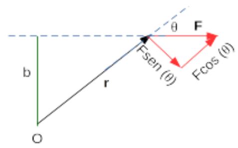
$$= 0 + \vec{r} \times \vec{F} \tag{6.6}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F} \tag{6.7}$$

l'equazione 6.7 definisce il **momento della forza**.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{6.8}$$

il cui modulo è $M = rF|\sin\theta|$. Il valore $r\sin\theta$ è chiamato anche **braccio di applicazione della forza**.



Teorema 1 (Teorema del Momento Angolare)**.** *Siano definiti*

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

e se $\vec{r} \times \vec{F} = 0$ *allora* $L = cost$*, e se* $F = 0$ *allora* $P = cost$*.*

molto importante è che **in base alla scelta del polo si può avere una conservazione o meno**. Se consideriamo un moto circolare, e scegliamo il polo come centro della traiettoria, allora **si conserva il momento angolare, in quanto il prodotto vettoriale tra la forza centripeta e il vettore posizione è sempre nullo**.

Conservazione del momento angolare Il momento angolare si conserva per forze dette **centrali**, ovvero per forze definite come

$$\vec{F} = f(r)\vec{u_r} \tag{6.9}$$

per queste forze $\vec{M} = 0$ **sempre**. La conservazione del momento angolare può essere utilizzata nello studio dei moti dei pianeti.

6.2 Moto dei Pianeti

Newton viene dopo Copernico, per cui gli è ben noto che è la Terra ad orbitare attorno al Sole e non il contrario. Ecco inoltre le tre leggi di Keplero, enunciate da dati sperimentali presi dal suo maestro Tycho Brahe.

1. I pianeti si muovono su orbite ellittiche, e il Sole occupa uno dei fuochi;
2. Il raggio Sole-Pianeta spazia aree uguali in tempi uguali;
3. Il periodo di rivoluzione T e il raggio medio dell'orbita stanno in questa relazione: $T^2 = kR^3$. E k è una costante per tutti i pianeti.

Mettendo la prime e seconda legge di Keplero assieme si ha:

$$\frac{rd\theta - r}{2} + \frac{dr + d\theta}{2}$$
$$\to \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{r^2 d\theta}{dt}$$
$$= \frac{1}{2}r^2\omega = cost$$

dunque la seconda legge di Keplero afferma che la variazione dell'area in un determinato intervallo di tempo è costante:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\frac{r^2 d\theta}{dt}$$
$$= \frac{1}{2}r^2\omega = cost$$

E' vero dunque che:

$$\frac{1}{2}rm_t\omega = \frac{1}{2}rm_t v = \frac{1}{2}L_S \tag{6.10}$$

e L_S è il momento angolare rispetto al Sole come polo, e conserva modulo, direzione e verso. Poichè il momento angolare si conserva allora la forza di attrazione tra Sole e Terra (per esempio) deve essere una forza centrale. Per la seconda legge della dinamica:

$$m\omega^2 r \propto mMf(r) \tag{6.11}$$

$$\to \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{kR^3}} \tag{6.12}$$

$$\to f(r) \propto \frac{1}{k}\frac{1}{r^2} \tag{6.13}$$

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u_r} \tag{6.14}$$

Canendish Canendish è stato un fisico che ha calcolato la massa della terra attraverso una bilancia di torsione, misurando l'angolo di torsione attraverso un raggio di luce che colpiva uno specchio collegato all'estremità della bilancia. Conoscendo la costante G calcolata da Newton ha trovato la massa della Terra.

6.3 Energia Potenziale della forza gravitazionale

Consideriamo un corpo che risente di un'energia gravitazionale e si muove lungo una qualsiasi traiettoria. Sapremo che

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{l} \tag{6.15}$$

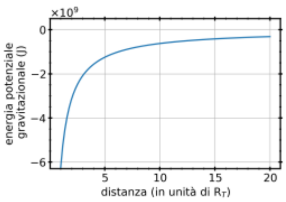
dove $d\vec{l} = dr\vec{u_r} + dx\vec{u_n}$. Quindi

$$W = \int_A^B -G\frac{mM}{r^2}\vec{u_r} \cdot (dr\vec{u_r} + dx\vec{u_n}) \tag{6.16}$$

$$= -\int_A^B G\frac{mM}{r^2}dr \tag{6.17}$$

$$= -G\frac{mM}{r_B} + G\frac{mM}{r_A} = U_A - U_B = -\Delta U \tag{6.18}$$

dunque **l'energia potenziale gravitazionale è definita come** $U = -G\frac{mM}{r}$. Per $r \to \infty$ si ha:



Inoltre l'energia meccanica totale del sistema sarà:

$$E_m = -G\frac{mM}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2 \tag{6.19}$$

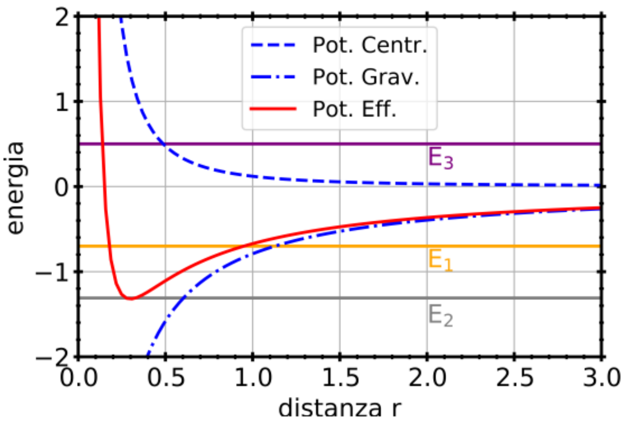
E' possibile riscrivere l'energia Meccanica in particolare l'energia potenziale in funzione del momento di inerzia.

$$\frac{1}{2}mv_r^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} \tag{6.20}$$

Se inseriamo questa sostituzione nell'equazione che descrive l'energia meccanica **per orbite ellittiche** in cui è presente l'energia cinetica per la velocità **radiale e tangenziale**:

$$\frac{1}{2}mv_t^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2} - G\frac{mM}{r} = cost \tag{6.21}$$

Il termine $\frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}$ è chiamato **potenza efficace**. Studiando come dipendono dalla distanza si osserva che:



ovvero per r molto piccoli prevale il termine della potenza efficace, per r molto grandi prevale il termine "normale" dell'energia potenziale. Si osserva che la somma dei due termini potenziali, dà la potenza efficace. Quando l'energia potenziale totale è positiva, allora il corpo compie un'orbita parziale, ovvero segue un'orbita ellittica ma esce successivamente. Se l'energia potenziale è minore di zero allora il corpo è intrappolato nell'orbita ellittica.

Velocità di fuga La velocità di fuga è la distanza per portare un corpo da un pianeta a distanza infinita. Allora l'energia meccanica iniziale è uguale a quella finale:

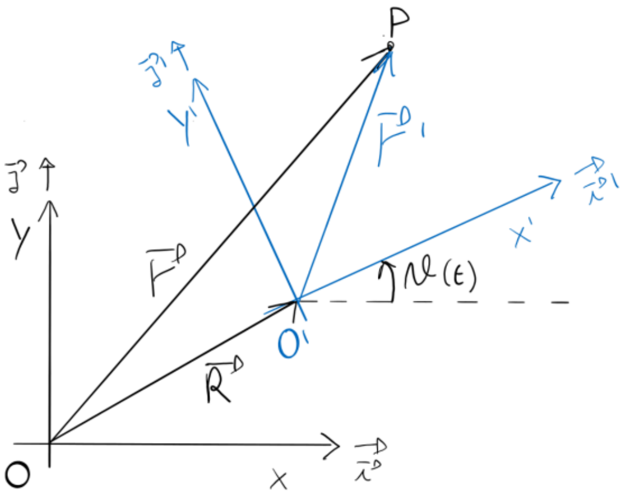
$$o - G\frac{mM}{r_f} - \frac{1}{2}mv^2 + G\frac{mM}{r_t} = 0 \tag{6.22}$$

$$v = \sqrt{2GM(\frac{1}{r_t} - \frac{1}{r_f})} \tag{6.23}$$

se $r_f \to \infty$ allora la velocità è detta **velocità di fuga**, e $v_f = \sqrt{2GM\frac{1}{r_t}}$

Capitolo 7

Sistemi di riferimento non inerziali



Siano O e O' i due sistemi di riferimento, con O inerziale. Dato il punto P sappiamo che

$$OP = \vec{r}$$
$$O'P = \vec{r'}$$
$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r'}$$

7.1 Velocità

$$\begin{aligned}\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} =\\ = \frac{d(\vec{R}+\vec{r'})}{dt}\\ = v_{\vec{OO'}} + \frac{d\vec{r'}}{dt}\end{aligned}$$

dove $v_{\vec{OO'}}$ è la velocità di O' rispetto al sistema O. Invece il termine $\frac{d\vec{r'}}{dt}$ è più complesso da sviluppare, e equivale a

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r'} + \vec{v'} \tag{7.1}$$

dove $\vec{v'}$ è la velocità di P rispetto ad O'. Perchè compare il termine $\vec{\omega} \times \vec{r'}$? Il sistema O' rispetto ad O può traslare, ruotare e muoversi. Quindi la velocità $\vec{v}$ sarà data da tre componenti del moto:

1. $v_{\vec{OO'}}$ che è associato alla **traslazione**;
2. $\vec{\omega} \times \vec{r'}$ che equivale alla velocità di rotazione;
3. $\vec{v'}$ che indica la velocità di P rispetto ad O';

Dunque si avrà:

$$\vec{v} = v_{\vec{OO'}} + \vec{\omega} \times \vec{r'} + \vec{v'} \tag{7.2}$$

Dimostrazione Il nostro obiettivo è dimostrare che

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r'} + \vec{v'} \tag{7.3}$$

Per semplicità immaginiamo che $O \equiv O'$, e i due sistemi di riferimento sono ruotati. Dunque possiamo scomporre $\vec{r'}$ nelle sue componenti.

$$\vec{r'} = r'_x\vec{i'} + r'_y\vec{j'} \tag{7.4}$$

eseguiamo dunque la derivata rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{dr'_x}{dt}\vec{i'} + r'_x\frac{d\vec{i'}}{dt} + \frac{dr'_y}{dt}\vec{j'} + r'_y\frac{d\vec{j'}}{dt} \tag{7.5}$$

$$= v'_x\vec{i'} + v'_y\vec{j'} + r'_x\frac{d\vec{i'}}{dt} + r'_y\frac{d\vec{j'}}{dt} \tag{7.6}$$

$$= \vec{v'} + r'_x\frac{d\vec{i'}}{dt} + r'_y\frac{d\vec{j'}}{dt} \tag{7.7}$$

per calcolare la variazione dei versori rispetto il tempo scegliamo di rappresentare i versori di O' rispetto a O:

$$\vec{i'} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j} \tag{7.8}$$

$$\vec{j'} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j} \tag{7.9}$$

Quindi calcoliamo la derivata del primo versore rispetto il tempo:

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \frac{d\cos\theta}{dt}\vec{i} + \frac{d\sin\theta}{dt}\vec{j} + \cos\theta\frac{\vec{i}}{dt} + \sin\theta\frac{\vec{j}}{dt} \tag{7.10}$$

$$= \frac{d\theta}{dt}(-\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}) + 0 + 0 = \vec{\omega}\vec{j'} \tag{7.11}$$

Analogamente si esegue lo stesso calcolo per $\vec{j'}$.

$$\frac{d\vec{j'}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}) + 0 + 0 \tag{7.12}$$

$$= -\vec{\omega}\vec{j'} \tag{7.13}$$

dunque si avrà che

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = \vec{v'} + r'_x\vec{\omega}\vec{j'} - r'_y\vec{\omega}\vec{j'} \tag{7.14}$$

Ora però si nota come il termine $r'_x\vec{\omega}\vec{j'} - r'_y\vec{\omega}\vec{j'}$ sia uguale al determinante di questa matrice:

$$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r'_x & r'_y & 0 \end{bmatrix} = r'_x\vec{\omega}\vec{j'} - r'_y\vec{\omega}\vec{j'} \tag{7.15}$$

che equivale a calcolare il prodotto vettoriale $\omega \times \vec{r'}$. ∎

Il termine $v_{OO'} + \omega \times \vec{r'}$ è chiamato **velocità di trascinamento**, perchè se $\vec{v'} = 0$, cioè P è fermo rispetto il sistema O' significa che viene trascinato da questo.

7.2 Accelerazione

Applichiamo la definizione, per cui

$$\vec{a} = \frac{d(v_{\vec{OO'}} + \vec{\omega} \times \vec{r'} + \vec{v'})}{dt} \tag{7.16}$$

$$= \frac{d(v_{\vec{OO'}})}{dt} + \frac{d(\vec{\omega})}{dt} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \frac{d(\vec{r'})}{dt} + \frac{d(\vec{v'})}{dt} \tag{7.17}$$

$$= a_{\vec{OO'}} + \vec{\alpha} \times \vec{r'} + \vec{\omega} \times \frac{d(\vec{r'})}{dt} + \frac{d(\vec{v'})}{dt} \tag{7.18}$$

Dove $a_{\vec{OO'}}$ è l'accelerazione di O' rispetto ad O. Invece $\vec{\alpha} \times \vec{r'}$ è la componente tangenziale dell'accelerazione, nel caso il sistema O' abbia un moto circolare. Calcoliamo le altre derivate.

$\vec{\omega} \times \frac{d(\vec{r'})}{dt}$

$$\vec{\omega} \times \frac{d(\vec{r'})}{dt} \tag{7.19}$$
$$= \vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{r'} + \vec{v'}) \tag{7.20}$$
$$= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) + \vec{\omega} \times \vec{v'} \tag{7.21}$$
$$= -\omega^2 \vec{r'} + \vec{\omega} \times \vec{v'} \tag{7.22}$$

$\frac{d(\vec{v'})}{dt}$ Il calcolo è analogo a quello di $\frac{d(\vec{r'})}{dt}$ utilizzato per la velocità. Si avrà infine:

$$\frac{d(\vec{v'})}{dt} = \vec{a'} + \vec{\omega} \times \vec{v'} \tag{7.23}$$

Dunque l'equazione 7.18 diventerà:

$$\vec{a} = a_{\vec{OO'}} + \vec{\alpha} \times \vec{r'} - \omega^2 \vec{r'} + \vec{\omega} \times \vec{v'} + \vec{a'} + \vec{\omega} \times \vec{v'} \tag{7.24}$$
$$= a_{\vec{OO'}} + \vec{\alpha} \times \vec{r'} - \omega^2 \vec{r'} + 2\vec{\omega} \times \vec{v'} + \vec{a'} \tag{7.25}$$

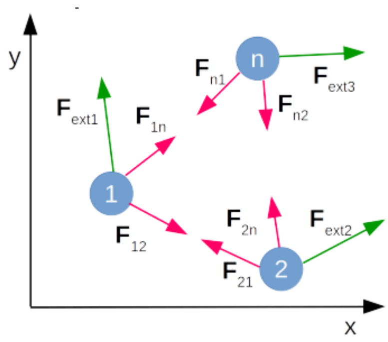
In cui $a_{\vec{OO'}}$ è **l'accelerazione di traslazione**, $\vec{\alpha} \times \vec{r'}$ **l'accelerazione angolare**, $-\omega^2 \vec{r'}$ **l'accelerazione centripeta** e $2\vec{\omega} \times \vec{v'}$ **l'accelerazione di Coriolis**. L'accelerazione di trascinamento:

$$\vec{a_t} = a_{\vec{OO'}} + \vec{\alpha} \times \vec{r'} - \omega^2 \vec{r'} \tag{7.26}$$

Capitolo 8

Sistemi di punti

Consideriamo i seguente sistema di punti:



Su ciascun punto agiranno una forza esterna ed una forza interna dovuta dall'interazione dei corpi presenti nel sistema. Inoltre ad ogni punto è associato un vettore posizione. La variazione di quantità di moto rispetto al tempo dell'ennesimo punto sarà:

$$\frac{dm_1\vec{v_1}}{dt} = \vec{F_{est}} + \vec{F_{int}} \tag{8.1}$$

$$= \vec{F_{est,n}} + \vec{F_{1,n}} + ... + \vec{F_{n,n-1}} \tag{8.2}$$

dunque sommando le forze totali si avrà che le forze interne si semplificano, in quanto di stesso modulo e direzione ma di verso opposto. Dunque si ha che

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dm_1\vec{v_1}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} F_{est,i} \tag{8.3}$$

Quantità di moto del sistema, centro di massa La quantità di moto del sistema è definita come:

$$P_{tot} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v_i} \tag{8.4}$$

per semplificare ulteriormente questa espressione possiamo definire un **centro di massa** del sistema, un punto geometrico che *raccoglie le caratteristiche globali del sistema*. Il centro di massa si definisce come:

$$\vec{r_{cm}} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2} + ... + m_n\vec{r_n}}{m_1 + m_2 + ... + m_n} \tag{8.5}$$

Si può definire anche la velocità del centro di massa, applicando la definizione:

$$\vec{v_{cm}} = \frac{\vec{r_{cm}}}{dt} \tag{8.6}$$

$$= \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} + ... + m_n\vec{v_n}}{m_1 + m_2 + ... + m_n} \tag{8.7}$$

$$= \frac{\vec{P_{tot}}}{m_{tot}} \tag{8.8}$$

Dunque l'equazione $\vec{v_{cm}} m = \vec{P_{tot}}$ **rappresenta la quantità di moto del sistema, cioè la sua masse e la sua velocità**. Inoltre è vera la seguente relazione:

$$\frac{d\vec{P_{tot}}}{dt} = m_{tot}\frac{v_{cm}}{dt} = \vec{F_{est}} \tag{8.9}$$

Ecco alcune caratteristiche del centro di massa:

1. Il centro di massa è **un punto geometrico**, non necessariamente è presente materia nel centro di massa di un sistema;
2. Il centro di massa è più vicino ai punti con massa maggiore;
3. La posizione del centro di massa non dipende dalla scelta del sistema di riferimento;

Dimostriamo il punto 3. Il centro di massa avrà un vettore per il sistema O e per il sistema O':

$$c\vec{m}_O = \frac{\vec{r_1}m_1 + \vec{r_2}m_2}{m_1 + m_2} \tag{8.10}$$

$$c\vec{m}_{O'} = \frac{\vec{r_1'}m_1 + \vec{r_2'}m_2}{m_1 + m_2} \tag{8.11}$$

Denotiamo con $\vec{r_1*}$ la posizione del punto 1 rispetto il centro di massa in O:

$$\vec{r_1*} = -\vec{r_{cm}} + \vec{r_1} \tag{8.12}$$
$$= \vec{r_1} - \frac{\vec{r_1}m_1 + \vec{r_2}m_2}{m_1 + m_2} \tag{8.13}$$
$$= \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_1} - \vec{r_1}m_1 - \vec{r_2}m_2}{m_1 + m_2} \tag{8.14}$$
$$= \frac{m_2(\vec{r_1} - \vec{r_2})}{m_1 + m_2} \tag{8.15}$$

si noti che il vettore $\vec{r_1} - \vec{r_2}$ è la congiungente dei punti 1 e 2. Analogamente si dimostra che

$$\vec{r_1*}' = \frac{m_2(\vec{r_1'} - \vec{r_2'})}{m_1 + m_2} \tag{8.16}$$

ma visto che la congiungente 1 e 2 deve essere identica nei due sistema allora anche la posizione del centro di massa non dipende dalla scelta del sistema di riferimento.

8.1 Conservazione del momento angolare per un sistema di punti

In un sistema di punti sappiamo che la variazione del momento angolare sarà:

$$\frac{\vec{L_{O,1}}}{dt} = \frac{d(\vec{r_1} \times m_1\vec{v_1})}{dt} \tag{8.17}$$
$$= \frac{d\vec{r_1}}{dt} \times \vec{v_1}m_1 + F_{est,1} + \vec{F_{1,2}} \tag{8.18}$$

analogamente per un secondo punto si avrà:

$$\frac{\vec{L_{O,2}}}{dt} = \frac{d\vec{r_2}}{dt} \times \vec{v_2}m_2 + F_{est,2} + \vec{F_{2,1}} \tag{8.19}$$

si sommano le due espressioni e si ha che:

$$\frac{d\vec{r_1}}{dt} \times \vec{v_1}m_1 + F_{est,1} + \vec{F_{1,2}} + \frac{d\vec{r_2}}{dt} \times \vec{v_2}m_2 + F_{est,2} + \vec{F_{2,1}} \tag{8.20}$$
$$= \frac{d(\vec{r_1} \times m_1\vec{v_1} + \vec{r_2} \times m_2\vec{v_2})}{dt} \tag{8.21}$$
$$= \vec{r_1} \times \vec{F_{est,1}} + \vec{r_2} \times \vec{F_{est,2}} + (\vec{r_1} - \vec{r_2}) \times \vec{F_{21}} \tag{8.22}$$

il termine $(\vec{r_1} - \vec{r_2}) \times \vec{F_{21}}$ è nullo perchè il braccio e la forza sono paralleli, dunque il loro prodotto vettoriale è nullo. Dunque si avrà che:

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_1} \times \vec{F_{est,i}} \tag{8.23}$$

dunque la **variazione del momento angolare è dovuta alla sola azione delle forze esterne**. Dunque se la variazione è nulla **il momento angolare si conserva**.

$$\vec{L_O} = cost \tag{8.24}$$

8.1.1 Momento angolare dovuto dalla forza peso su un sistema di punti

Se la forza esterna che agisce su un sistema equivale esclusivamente alla forza peso allora:

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{r_1} \times m_1\vec{g} + \vec{r_2} \times m_2\vec{g} \tag{8.25}$$

e riscriviamo i bracci delle forze come

$$\vec{r_1} = \vec{r_{cm}} + \vec{r_1'} \tag{8.26}$$

$$\vec{r_2} = \vec{r_{cm}} + \vec{r_2'} \tag{8.27}$$

dove $\vec{r_1'}$ e $\vec{r_2'}$ sono i vettori posizione di 1 e 2 rispetto il centro di massa. Dunque si avrà che:

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{r_{cm}} + \vec{r_1'} \times m_1\vec{g} + \vec{r_{cm}} + \vec{r_2'} \times m_2\vec{g} \tag{8.28}$$

$$= \vec{r_{cm}} \times (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{r_1'} \times m_1\vec{g} + \vec{r_2'} \times m_2\vec{g} \tag{8.29}$$

$$= \vec{r_{cm}} \times (m_1 + m_2)\vec{g} + (m_1\vec{r_1'} + m_2\vec{r_2'})\vec{g} \tag{8.30}$$

$$\tag{8.31}$$

ora notiamo che il termine $(m_1\vec{r_1'} + m_2\vec{r_2'})$ se diviso per la somma delle masse restituisce la posizione del centro di massa rispetto il centro di massa stesso, cioè è nullo. Dunque si ha che:

$$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{r_{cm}} \times (m_1 + m_2)\vec{g} \tag{8.32}$$

cioè in un sistema di punti la forza peso è applicata al centro di massa.

8.1.2 Equazioni cardinali della dinamica

$$\frac{d\vec{P_{tot}}}{dt} = \vec{F_{tot}} \tag{8.33}$$

$$\frac{d\vec{L_{tot}}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \times \vec{F_{est}} \tag{8.34}$$

8.2 Teorema del Lavoro per un sistema di punti

L'energia cinetica di un sistema di punti infinitesima sarà:

$$dE_{k1} = \vec{F_{est,1}} d\vec{r_1} + \vec{F_{12}} d\vec{r_1} \tag{8.35}$$

$$dE_{k2} = \vec{F_{est,2}} d\vec{r_2} + \vec{F_{21}} d\vec{r_2} \tag{8.36}$$

$$\to dE_{k,tot} = \vec{F_{est,1}} d\vec{r_1} + \vec{F_{12}} d\vec{r_1} + \vec{F_{est,2}} d\vec{r_2} + \vec{F_{21}} d\vec{r_2} \tag{8.37}$$

$$= \vec{F_{est,1}} d\vec{r_1} + \vec{F_{est,2}} d\vec{r_2} + \vec{F_{12}} d(\vec{r_1} - \vec{r_2}) \tag{8.38}$$

ovvero il teorema del lavoro si riduce a :

$$\Delta E_k = W_{est} + W_{int} \tag{8.39}$$

si noti che per i **corpi rigidi**, poichè il vettore $\vec{r_1} - \vec{r_2}$ rimane costante allora la sua variazione è nulla, dunque la variazione dell'energia cinetica è uguale al lavoro delle forze esterne.

Parte II

Termodinamica

Capitolo 9

Variabili termodinamiche

Per i sistemi a una fase e una specie chimica si avranno tre variabili termodinamiche: **pressione, temperatura, volume**. Sperimentalmente si osserva che per i **gas ideali** è valida la **legge dei gas perfetti**:

$$PV = nRT \tag{9.1}$$

Pressione La pressione equivale alla misura della forza su una superficie, si misura in Pascal o in atm.

Temperatura Consideriamo una sostanza termometrica, come il mercurio, il cui volume varia in base alla temperatura. Oppure un materiale come il platino per cui la resistenza elettrica varia in base alla temperatura.

Un tipo di termometro indipendente dalla sostanza termometrica utilizzata è il termometro a gas a volume costante, la cui pressione all'interno del recipiente varia in base alla temperatura.

Dopo aver descritto come si misura la temperatura è importante chiedersi cosa misuri esattamente la temperatura. Essa è un indice dello stato di agitazione delle entità molecolari che compongono il sistema. Una definizione molto efficace del concetto di temperatura è quella formulata da John Locke (1632-1704) più di un secolo prima della fondazione della moderna Termodinamica: *Temperature is a very brisk agitation of the insensible parts of the object, which produces in us that sensation from whence we denominate the object hot; so what in our sensation is temperature, in the object is nothing but motion.*
Nel caso di un gas ideale la temperatura (in Kelvin) è legata all'energia

cinetica media delle molecole del gas (e quindi al loro moto) dalla relazione

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T \tag{9.2}$$

dove k_B è la costante di Boltzmann che vale esattamente $1.380649 \cdot 10^23 J/K$ ed m la massa molecolare.

Per i sistemi non gassosi vale che

$$dV = \frac{\partial V}{\partial P} + \frac{\partial V}{\partial T} \tag{9.3}$$

$$\rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{\partial V}{V \partial P} + \frac{\partial V}{V \partial T} \tag{9.4}$$

dove si ha che:

$$-\frac{\partial V}{V \partial P} \tag{9.5}$$

è il **coefficiente di dilatazione termica a temperatura costante**. Mentre

$$\frac{\partial V}{V \partial T} \tag{9.6}$$

è il coefficiente di dilatazione termica a pressione costante.

Capitolo 10

Equilibrio Termodinamico

Come abbiamo già visto, per sistemi termodinamici **a una specie chimica e una fase** bastano due variabili termodinamiche per descrivere una proprietà del sistema stesso. Per esempio se le due variabili termodinamiche sono pressione P e temperatura T, allora possiamo scrivere $V(P,T), \rho(P,T), M(P,T)$ dove V è il volume, ρ è resistività elettrica e M è il magnetismo. Le variabili termodinamiche si dividono in due categorie:

1. **Estensive**, cono variabili additive (se sommo due volumi a parità di T e P il volume finale è la somma);
2. **Intensive**, non sono additive, come la temperatura;

A livello microscopico le variabili termodinamiche hanno una loro spiegazione: la T è associata all'agitazione termica, dunque alla temperatura. La P agli urti delle molecole di gas sulle pareti del recipiente.

Equilibrio termodinamico Si definisce equilibrio termodinamico quando il sistema di trova in uno stato di **equilibrio meccanico** ,la P del sistema è uniforme e costante nel tempo in ogni punto del sistema, e **equilibrio chimico** (non avvengono reazioni chimiche).

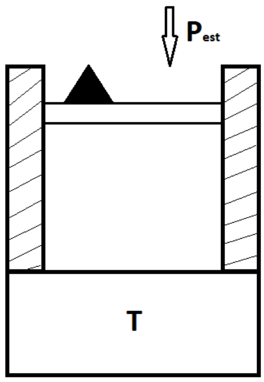
Sperimentalmente si osserva che le variabili termodinamiche sono variabili di stato, cioè dipendono dallo stato interno del sistema, **non da come il sistema è arrivato in quello stato**. Il sistema cambia stato perchè agisce una **trasformazione** su di esso dovuta all'interazione con l'ambiente esterno.

- **Sistema aperto**: è possibile scambiare sia energia che massa con l'ambiente esterno;

- **Sistema chiuso**: è possibile scambiare solamente energia con l'ambiente esterno;
- **Sistema isolato**: il sistema non scambia né energia né massa con l'ambiente esterno;

10.1 Trasformazioni termodinamiche

Esistono trasformazioni irreversibili, quasi statiche e reversibili.



Trasformazioni irreversibili Immaginiamo di avere un contenitore con all'interno un gas, attaccato ad un serbatoio di calore (simile ad un termostato di ghisa). Il recipiente è chiuso da uno stantuffo con sopra un pesetto. Poichè il sistema è all'equilibrio si ha che:

$$P_{int} = P_{est} + \frac{mg}{A} \tag{10.1}$$

Se tolgo il peso si ha che $P_{est} = P_{int}$. L'espansione del gas è molto veloce, e durante la trasformazione la pressione interna varia da punto a punto, dunque non conoscendo (perchè non esistono) gli stati di equilibrio del sistema, questa è irreversibile. Vengono attraversati degli stati di non equilibrio.

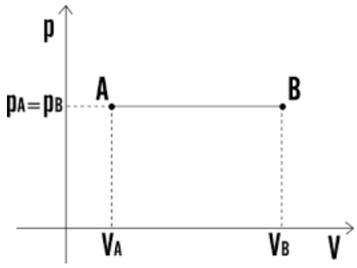
Trasformazione quasi statica Se la stessa trasformazione precedente avviene togliendo il pesetto in modo molto, molto lento gli stati di trasformazione differiscono in modo infinitesimo, dunque la trasformazione è quasi statica.

Trasformazione reversibile Se nella trasformazione non avvengono forze dissipative di attrito dovute allo stantuffo, la trasformazione è reversibile, e sia il sistema che l'ambiente esterno possono tornare alle condizioni iniziali. Se fossero presenti forze d'attrito dovrei aggiungere un peso maggiore.

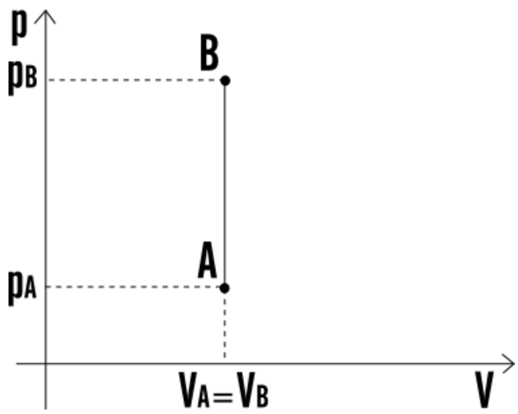
Capitolo 11

Piano di Clapeyron

Il piano di Clapeyron è un piano di cartesiano che ha come ascisse il volume e ordinate la pressione. Se la trasformazione è irreversibile allora non essendoci stati di equilibrio interni non posso tracciare alcuna trasformazione.



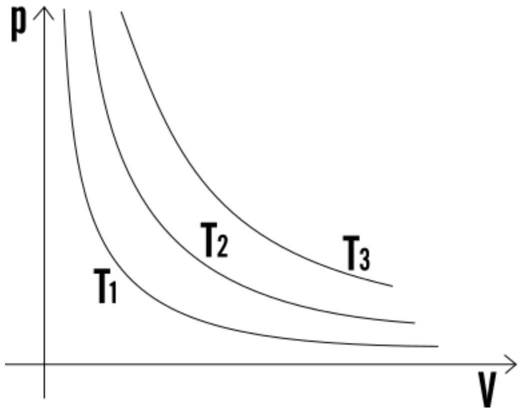
Trasformazione isobara



Trasformazione isocora

Trasformazione isoterma

$$PV = nRT \tag{11.1}$$
$$P = \frac{k}{T} \tag{11.2}$$



11.1 Lavoro

Applichiamo la definizione di lavoro durante una trasformazione che ha la pressione finale del gas uguale alla pressione interna.

$$W = \vec{F}\vec{r} = P_{est}A\vec{u_n} \cdot l\vec{u_n} \tag{11.3}$$
$$= P_{est}V \tag{11.4}$$

dal punto di vista del gas invece

$$W = P_{int}\Delta V \tag{11.5}$$
$$= -P_{est}\Delta V \rightarrow W_{est} = -P\Delta V = -W_{int} \tag{11.6}$$

Il lavoro non è una funzione di stato, ma dipende dal tipo di trasformazione che il gas segue a parità di stati finali. Si scrive $\delta W = PdV$. Viene utilizzata la forma δW per dire che non è il differenziale.

$$W_{int} = \int \delta W_{int}$$
$$= \int P\,dV$$

Se $V_f > V_i\,, W_{int} > 0$ (espansione). Viceversa se $V_f < V_i\,, W_{int} < 0$ (compressione).

Capitolo 12

Calore

Se prendiamo due recipienti di acqua di massa m_1 e m_2 con due temperature T_1 e T_2. La temperatura di equilibrio dunque è:

$$T_{eq} = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} \tag{12.1}$$

Possiamo dunque definire il calore ceduto o acquisito dal liquido o gas:

$$Q_1 = m_1(T_{eq} - T_1) \tag{12.2}$$
$$Q_2 = m_2(T_{eq} - T_2) \tag{12.3}$$

si definisce una $KCal$ come l'energia necessaria per scaldare un chilogrammo di acqua da $14,5°C$ a $15,5°C$. Se i due materiali sono diversi dall'acqua, allora la definizione 12.1 deve essere modificata di un fattore c detto calore specifico:

$$T_{eq} = \frac{m_1 T_1 + c m_2 T_2}{m_1 + c m_2} \tag{12.4}$$

allo stesso modo anche i calori ceduti e acquisiti cambiano:

$$Q_1 = m_1(T_{eq} - T_1) \tag{12.5}$$
$$Q_2 = c m_2(T_{eq} - T_2) \tag{12.6}$$

Il c dell'acqua è 1. Più basso è c maggiore sarà la differenza di temperatura.

Parte III

Elettromagnetismo e Onde