Appunti di Algebra Lineare e Analisi Matematica 2

Mattia Ruffini

Febbraio 2022

Indice

Parte I

Algebra Lineare

L'algebra Lineare studia gli **spazi vettoriali** e le **funzioni lineari tra spazi vettoriali**.

Capitolo 1

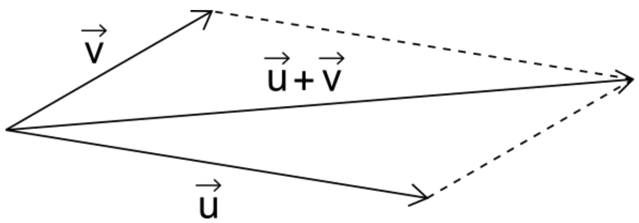
Spazi vettoriali e vettori

Chiamiamo con E l'insieme dei vettori geometrici nello spazio. I vettori nascono in fisica per secrivere grandezze che oltre un numero necessitano **una direzione e un verso**. Dato un segmento orientato, un'unità di misura, due segmenti orientati sono **equivalenti** se hanno **la stessa lunghezza, stessa direzione e stesso verso**. Si chiama **vettore la famiglia formata da tutti i segmenti orientati tra di loro equivalenti**.

Un vettore particolare è il vettore nullo $\underline{v} = \underline{0}$ ed è chiamato **vettore nullo**. E' l'unico vettore ad avere modulo 0.

1.1 Somma di vettori geometrici

Dati due vettori $\underline{v}$ e $\underline{u}$ allora la loro somma è il vettore seguente:



Per trovare la somma di due vettori si può utilizzare o la regola del parallelogramma, o la regola punto-coda.

1.2 Prodotto di un vettore per uno scalare

Consideriamo $t \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in E$. Allora sappiamo che se $t = 0$ oppure se $\vec{v} = \vec{0}$, allora l'operazione

$$t \cdot \vec{v} = \vec{0} \tag{1.1}$$

altrimenti vale che

$$t \cdot \vec{v} = \vec{p} \tag{1.2}$$

con $|\vec{p}| = t \cdot |\vec{v}|$, ovvero $\vec{p}$ è un vettore con direzione identica a $\vec{v}$ e verso identico a $\vec{v}$ se $t > 0$, altrimenti l'opposto.

I vettori $\vec{v}$ e $t\vec{v}$ sono paralleli. In generale: "due vettori di cui uno non sia il vettore nullo sono paralleli se e solo se $\exists t \in \mathbb{R} : \vec{u} = t\vec{v}$". Inoltre $t = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$. Il segno di t dipende se i vettori sono discordi.

1.3 Spazio Vettoriale

Definizione "*Un insieme V si dice che è uno spazio vettoriale se sono definite in V due operazioni: somma e prodotto per uno scalare. La somma di due elementi di V corrisponde a un terzo elemento di V, il prodotto per uno scalare $t \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}$ con $t \cdot \vec{v} \in V$ soddisfa le seguenti proprietà:*"

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$
5. $\forall \vec{u} \in V, t \in \mathbb{R}, t(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}t + \vec{v}t$
6. $(t + s)\vec{u} = t\vec{u} + t\vec{v}$
7. $ts\vec{u} = t(s\vec{u})$
8. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Se valgono queste proprietà, allora V è uno spazio vettoriale.

1.3.1 $\mathbb{R}^n$

L'insieme $\mathbb{R}^n$ è l'insieme formato dalle n-uple coordinate di numeri reali.

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$

Dati due elementi $\vec{x}$ e $\vec{y}$ di $\mathbb{R}^n$ si vuole definire l'operazione somma:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

mentre il prodotto con $t \in \mathbb{R}$:

$$t\vec{x} = (tx_1, tx_2, ..., tx_n)$$

Dunque $\mathbb{R}^n$ **è uno spazio vettoriale perchè valgono le 8 proprietà che definiscono uno spazio vettoriale**. Nei casi particolari in cui $n = 1, n = 2, n = 3$ è presente un'interpretazione geometrica dello spazio vettoriale. In particolare si afferma che **lo spazio vettoriale dei vettori nel piano si identifica in** $\mathbb{R}^2$. Analogamente lo spazio con $\mathbb{R}^3$.

1.4 Spazi vettoriali astratti

Esistono degli spazi vettoriali che non hanno un'interpretazione geometria, tuttavia esistono. Chiamiamo con F l'insieme delle funzioni reali di variabile reale, cioè le funzioni del tipo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La somma di due elementi di F è definita come:

$$f, g \in F, f + g \in F, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

mentre il prodotto con uno scalare è definito come:

$$c \cdot f \in F, c(f)(x) = cf(x)$$

Di conseguenza F **è uno spazio vettoriale rispetto queste operazioni e i suoi elementi sono vettori**. Dunque con il termine vettore si intende un elemento di uno spazio vettoriale.

Un altro esempio di spazio vettoriale astratto è l'insieme $\mathbb{R}[x]$ come insieme dei polinomi di variabile x a coefficienti reali è uno spazio vettoriale rispetto alla somma e al prodotto con uno scalare.

1.5 Combinazione lineare di vettori

Dato uno spazio vettoriale V fissati i vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k} \in V$ e fissati $c_1, c_2, ..., c_k \in \mathbb{R}$ scalari, allora si chiama **combinazione lineare di $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k}$ con coefficienti $c_1, c_2, ..., c_k$ il vettore**

$$\vec{v} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + ... + c_k\vec{v_k} \tag{1.3}$$

Generalizzazione in $\mathbb{R}^n$ Ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori fondamentali con coefficienti:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\vec{e_i} \tag{1.4}$$

dove i vettori fondamentali sono:

$$\begin{aligned} \vec{e_1} &= (1, 0, 0, 0, ..., 0) \\ \vec{e_2} &= (0, 1, 0, 0, ..., 0) \\ &\quad ... \\ \vec{e_n} &= (0, 0, 0, 0, ..., 1) \end{aligned}$$

Inoltre **il vettore nullo è sempre combinazione lineare di una qualunque combinazione di vettori**.

1.6 Sottospazio Vettoriale

Definisco V come spazio vettoriale, e $W \subseteq V, W \neq \varnothing$. W è uno spazio vettoriale di V se:

- $\forall \vec{w_1}, \vec{w_2} \in \vec{w_1} + w_2 \vec{\in} W$ ovvero W **è chiuso rispetto la somma**;
- $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \vec{w} \in W, t \cdot \vec{w} \in W$, ovvero W **è chiuso rispetto il prodotto per uno scalare**.

W **è un sottospazio vettoriale di** V **se è uno spazio vettoriale**.

La condizione necessaria affinchè W sia un sottospazio vettoriale di V è che $\vec{0} \in W$.

Consideriamo $\vec{w} \in W, t = 0$. Se $t\vec{w} \in W$, allora per la proprietà ***** $\vec{0} \in W$.

Dimostrazione $0 \cdot w = 0$

$$\begin{aligned} w + 0w &= w \\ w - w + 0w &= w - w \\ 0 + 0w &= 0 \\ 0w &= 0 \end{aligned}$$

Se V è uno spazio vettoriale, allora il più piccolo sottospazio vettoriale è quello il cui elemento è esclusivamente il vettore nullo. Mentre il sottospazio vettoriale più grande è quello che coincide con V. Questi sottospazi sono chiamati **banali**.

Esempi I sottospazi di $\mathbb{R}^3$ sono: $\mathbb{R}^3, (0,0,0)$, i piani per l'origine, le rette per l'origine. I sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono $\mathbb{R}^2, (0,0)$ e le rette passanti per l'origine.

Se consideriamo lo spazio vettoriale dei polinomi $\mathbb{R}[x]$, lo spazio vettoriale dei polinomi con grado minore o uguale a n è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Un polinomio di quinto grado sommato ad un altro polinomio di quinto grado, è sempre di quinto grado. Un polinomio di quinto grado moltiplicato per un numero è un polinomio di quinto grado.

Anche il sottoinsieme delle funzioni reali di variabile reale che appartengono a C^1 è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale:

$$f, g \in C^1(\mathbb{R}), f + g \in C^1$$

$$c \in \mathbb{R}, f \in C^1(\mathbb{R}), cf \in C^1$$

ovvero C^1 è chiuso rispetto le operazioni di somma e prodotto con uno scalare.

1.7 Sottospazio generato da k vettori

Dato uno spazio vettoriale V e k vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k} \in V$ qual è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene i vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k} \in V$?

Per semplicità consideriamo $V = \mathbb{R}^3$ con e i vettori

$$\begin{aligned} \vec{v_1} &= (1,0,0) \\ \vec{v_2} &= (0,1,0) \\ \vec{v_3} &= (1,1,0) \end{aligned}$$

Il sottospazio vettoriale di V in questo caso è il piano xy. Osserviamo che il sottospazio vettoriale di V deve essere uno spazio vettoriale, questo deve essere **chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto**. Quindi dati k vettori di V deve essere contenuto nel suo sottospazio vettoriale:

$$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + ... + c_k\vec{v_k} \tag{1.5}$$

ovvero il sottospazio vettoriale di V deve contenere **tutte le combinazioni lineari dei vettori** $\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k}$.

Definizione 1.7.1 (Sottospazio vettoriale)**.** Dato uno spazio vettoriale V e i suoi k elementi, il suo sottospazio vettoriale si chiama W ed è l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei k elementi di V. Ed è il più piccolo sottospazio di V.

Dimostrazione chiuso rispetto la somma Sia W sottospazio vettoriale di V. Presi due elementi di $W, \vec{w_1}, \vec{w_2}$ combinazioni lineari dei k elementi di V, definiti nel seguente modo:

$$\vec{w_1} = c_1\vec{v_1} + ... + c_k\vec{v_k}$$
$$\vec{w_2} = d_1\vec{v_1} + ... + d_k\vec{v_k}$$

poichè valgono la proprietà commutativa e distributiva si ha:

$$\vec{w_1} + \vec{w_2} = (c_1 + d_1)\vec{v_1} + ... + (c_k + d_k)\vec{v_k}$$

allora W è chiuso rispetto la somma. Prende il nome di **Span**$(\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k})$ il sottospazio generato dai vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k}$.

$Span(\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k}) = \{\vec{v} \in V : \vec{v} = c_1\vec{v_1} + ... + c_k\vec{v_k}\}$
Esiste un numero minimo di vettori necessario affinchè siano generatori di uno spazio vettoriale.

1.8 Dipendenza e Indipendenza Lineare

Sia V uno spazio vettoriale con $\vec{v_1}, \vec{v_2}..., \vec{v_k} \in V$.

Teorema 1. La famiglia di vettori $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ è **linearmente indipendente** se uno dei vettori della famiglia è combinazione lineare degli altri. Nel caso opposto si dice che la famiglia di vettori è **linearmente indipendente**.

Esempio con $\mathbb{R}^3$ Consideriamo $V = \mathbb{R}$, con

$$\vec{w_1} = (1, 0, -1) \tag{1.6}$$
$$\vec{w_2} = (0, 1, -1) \tag{1.7}$$
$$\vec{w_1} = (1, 1, -2) \tag{1.8}$$

Allora la famiglia di vettore $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}$ è linearmente indipendente, in quanto $\vec{w_3}$ è combinazione lineare degli altri due.

$$\begin{aligned}\vec{w_3} = (1, 1, -2) = c_1(1, 0, -1) + c_2(0, 1, -1)\\ = (c_1, c_2, -c_1 - c_2)\\ c_1 = 1\\ c_2 = 1\\ \vec{w_3} = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2\end{aligned}$$

Esempio con i vettori unitari e_n Consideriamo i vettori $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ e verifichiamo che siano **linearmente indipendenti**. Si vede subito come per esempio non esista $c \in \mathbb{R}$ per cui e_1 sia combinazione lineare degli altri vettori, in particolare per cui $c \cdot 0 = 1$. Vale per tutte le n-uple di $\mathbb{R}^n$.

Quando una famiglia di vettori è dipendente indipendente

- Se una famiglia di vettori contiene $\vec{0}$ allora è linearmente dipendente;
- Se una famiglia di vettori linearmente dipendenti aggiunge un qualunque vettore è ancora linearmente dipendente;
- Se ad una famiglia di vettori linearmente indipendente tolgo un vettore ottengo ancora una famiglia linearmente indipendente;

L'ultimo punto perchè consideriamo $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k}$ linearmente indipendente allora anche $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_{k-1}}$ è indipendente, oppure andrebbe contro il secondo principio se fosse dipendente.

Definizione Equivalente La definizione di dipendenza lineare funziona solamente quando si hanno almeno due vettori. Ovvero dati $\vec{v_1}, \vec{v_2}$. Questi sono linearmente dipendenti se

$$\vec{v_1} = c\vec{v_2}$$
$$\vec{v_2} = d\vec{v_1}$$

Per esempio se fossimo in $\mathbb{R}^3$ si parla di vettori paralleli. Tuttavia **è impossibile applicare la definizione se la famiglia è costituita da un solo vettore**. Dunque ecco una definizione equivalente: "$\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k}$*sono linearmente dipendenti se* $\exists$ *una loro combinazione lineare uguale al vettore nullo* **con i coefficienti non tutti nulli**".

Per esempio se consideriamo la famiglia di vettori $\vec{w_1}, \vec{w_2}, \vec{w_3}$ definiti nell'equazione 1.6 questi sono linearmente dipendenti perchè

$$\vec{w_1} + \vec{w_2} - \vec{w_3} = \vec{0}$$

e questa è una combinazione lineare il cui risultato è il vettore nullo. L'esempio classico è con $\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}$ in quanto non esiste una loro combinazione lineare uguale al vettore nullo con almeno un coefficiente diverso da zero.

Casi particolari Se esiste un solo vettore $\vec{v} \in V, \exists c \neq 0$:

$$c \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

allora si ha che $\vec{v} = \vec{0}$ e V **è linearmente dipendente**. Altrimenti se $\vec{v} \neq 0$ sarebbe linearmente indipendente.

Capitolo 2

Basi e dimensioni

Definizione 2.0.1 (Base di uno spazio vettoriale)**.** Sia V uno spazio vettoriale qualsiasi con $a = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k}\}$ dove a è una famiglia di vettori di V. Allora a è una base di V se

1. $span(\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k}) = V$ cioè la famiglia a costituisce i generatori di V, oppure ogni vettore di V è combinazione lineare di $\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k}$;
2. la famiglia a è linearmente indipendente;

Per esempio la base di $\mathbb{R}^n$ è $a = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, ..., \vec{e_n}\}$. Se invece consideriamo $\mathbb{R}^3$ oltre alla base canonica un'altra base può essere data da vettori **non necessariamente perpendicolari tra loro**. L'importante è che $span(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}) = \mathbb{R}^3$ e che i tre vettori **siano linearmente indipendenti**, come vuole la definizione. Nel caso di $\mathbb{R}^3$ i tre vettori non devono essere tutti e tre appartenenti allo stesso piano.

Esempio $V = \mathbb{R}_n[x]$ Consideriamo la famiglia di vettori

$$a = \{1, x, x^2, ..., x^n\}$$

in cui a è la base canonica di V. Nel caso di questo spazio vettoriale si avrà:

$$\forall p(x) \in V, p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

dunque ogni elemento di V può essere riscritto come combinazione lineare di a:

$$p(x) = 1a_0 + a_1x + ... + a_nx_n$$
$$\rightarrow span(1, x, x^2, ..., x^n) = \mathbb{R}_n[x]$$

La prima richiesta affinchè a sia una base di V è verificata. Ora bisogna verificare che i vettori di a siano **linearmente indipendenti**.

$$a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = 0$$
$$a_0 + a_1x + ... + a_nx^n = 0 + 0x + ... + 0x^n$$

Affinchè esista una combinazione lineare uguale al vettore nullo tutti i coefficienti devono essere uguale a zero : a **è una famiglia di vettori linearmente indipendenti**.

Esempio $V = \mathbb{R}[x]$ In questo caso V **non ha una base**, in quanto **non esiste una combinazione lineare di** k **vettori finiti che è uguale a tutti i polinomi con grado** k.

In generale se

$$span(\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k}) = V$$
$$max[grp_1, grp_2, ..., grp_k] = N$$

se $p \in V$ ha un grado maggiore di N , p **non è combinazione lineare di** $(\vec{p_1}, \vec{p_2}, ..., \vec{p_n}$.

Teorema 2 (Numero di vettori di una base). Se uno spazio vettoriale V è **finitamente generato** (cioè è lo *span* di un numero finito di vettori) allora **ammette una base**, **e ogni base di** V **è formato dallo stesso numero di vettori**.

Esempi La base di $\mathbb{R}^n$ è formata da n vettori, perchè la base canonica è formata da n vettori. Mentre lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_n[x]$ è la base canonica è formata da $n + 1$ vettori, quindi ogni base dovrà avere $n + 1$ vettori.

2.1 Dimensioni

Il numero di vettori di una base si chiama **dimensione** di uno spazio vettoriale.

$$dim\mathbb{R}^n = n$$
$$dim\mathbb{R}_n[x] = n + 1$$

Nel caso in cui $V = 0$ la sua dimensione è 0 per convenienza, in quanto non esiste una base. Se W è un sottospazio vettoriale di $V, dimV = n$, allora:

$$0 \leq dimW \leq dimV = n$$

Teorema 3 (Massimo numero di vettori linearmente indipendenti)**.** Se $dimV = n$, n è il massimo numero di vettori di V **linearmente indipendenti**.

Preso $m > n$ e $a = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ dove a è una famiglia di vettori di $V, dimV = n$ allora a **è linearmente dipendente**. Inoltre n è il numero minimo di vettori che generano V:

$$m < n, span(v_1, v_2, ..., v_m) \neq V$$

Infine, presi n vettori di V **linearmente indipendenti, essi formano una base di** V, con $dimV = n$.

Per esempio se consideriamo $V = \mathbb{R}^3$ e prendiamo 4 vettori, questi **saranno linearmente dipendenti**. Presi invece 2 vettori qualsiasi allora di sicuro **non sono generatori di** V, perchè anche se fossero linearmente indipendenti sono generatori di un piano, se fossero linearmente dipendenti invece generano una retta. Infine, presi tre vettori linearmente indipendenti questi formano una base di $\mathbb{R}^3$.

2.2 Coordinate di un vettore

Solitamente nel piano noi scegliamo di utilizzare la base canonica di $\mathbb{R}^2$, quindi dato un punto P di coordinate (x, y), il vettore P avrà coordinate

$$P = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$$

tuttavia **è possibile stabilire basi non canoniche in qualunque spazio vettoriale**.

Sia V uno spazio vettoriale e a una famiglia di vettori $a = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}$ che sia base di V . Preso un qualunque vettori di V dunque si ha:

$$\vec{v} = c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + ... + c_n\vec{v_n} \tag{2.1}$$

cioè è combinazione lineare della base di V. Inoltre i coefficienti di $\vec{v}$ $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sono chiamati **coordinate di** $\vec{v}$ **rispetto la base** a. Vale che: **se i generatori sono linearmente indipendenti le coordinate di un vettore sono uniche**. semplicemente perchè

$$c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + ... + c_n\vec{v_n} = d_1\vec{v_1} + d_2\vec{v_2} + ... + d_n\vec{v_n}$$

e affinchè sia valida questa uguaglianza allora i coefficienti devono essere gli stessi, cioè a **ciascun vettore è associata una n-upla di coordinate**.

Capitolo 3

Proprietà di $\mathbb{R}^n$

E' possibile definire in $\mathbb{R}^n$ il **prodotto scalare**. Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, il prodotto scalare tra i due vettori è definito come:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \tag{3.1}$$

Valgono la proprietà commutativa, distributiva e altre:

1. $(x, y) = (y, x)$;
2. $(tx, y) = t(x, y, t \in \mathbb{R})$;
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
4. $(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$

E' definito modulo di x come:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \tag{3.2}$$

dato che $(x, x) = x^2$.

Inoltre il prodotto scalare tra vettori in fisica è definito come

$$(x, x) = |x||y| \cos\theta$$

tuttavia **questa definizione non è valida in $\mathbb{R}^n$ perchè l'angolo fuori dalla terza dimensione perde di significato geometrico**. Se i vettori sono ortogonali il prodotto scalare è nullo.

3.1 Generalizzazione del Teorema di Pitagora

Se due vettori sono ortogonali, allora la norma

$$|x^2 + y^2| = |x|^2 + |y|^2 \tag{3.3}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} |x+y|^2 = (x+y, x+y) &= (x, x+y) + (y, x+y) \\ &(x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \\ &= |x|^2 + 0 + 0 + |y|^2 \end{aligned}$$

Proprietà della Norma

1. $|x| \geq 0$. $|x| = 0$ se e solo se $\vec{x} = \vec{0}$;
2. $|tx| = |t||x|, t \in \mathbb{R}$;
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$ (disuguaglianza triangolare);

3.2 Basi di $\mathbb{R}^n$

Si definisce base **ortogonale** di $\mathbb{R}^n$ una base **in cui i vettori sono due a due ortogonali**.

Una base si definisce **ortonormale** una base ortogonale in cui tutti i vettori hanno norma 1 (sono dei versori). La base canonica di $\mathbb{R}^n$ è **ortonormale**.

Le basi ortonormali sono comode perchè si possono calcolare le coordinate di un vettore attraverso il prodotto scalare.

Sia $b = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, allora un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{v_1}) &= (c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} + ... + c : n\vec{v_n}, v_i) \\ &= c_1(\vec{v_1}, \vec{v_i}) + ... + c_n(\vec{v_n}, \vec{v_i}) \\ &= c_i(\vec{v}, \vec{v_i}) = c_i|\vec{v_i}|^2 \\ &\to c_i = \frac{(\vec{v}, \vec{v_i})}{|\vec{v_i}|^2} \end{aligned}$$

Se la base fosse ortonormale: $c_i = (\vec{v}, \vec{v_i})$.

Proiezione di un vettore La proiezione di un vettore $\vec{v}$ lungo una retta r definita dal versore $\vec{u_r}$ è definita come:

$$P_u(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos \alpha \tag{3.4}$$

e ha direzione di $\vec{u_r}$ e verso

$$\frac{(\vec{u_r}, \vec{u_r})}{|\vec{v}|^2}$$

inoltre il vettore $\vec{v} - P_u(\vec{v})$ **è perpendicolare alla retta** r.

Trovare una base ortonormale Denotiamo

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$$

Il primo metodo consiste nello scegliere tre vettori di W in modo che non siano paralleli, che abbiano norma unitaria, e che il loro prodotto scalare sia nullo.

Il secondo metodo consiste nel prendere un vettore $\vec{v_1} = (1, 1, 3)$ e un generico vettore $\vec{v} = (x, y, x + 2y)$. Il loro prodotto scalare **deve essere nullo affinchè la base sia ortonormale**:

$$(\vec{v}, \vec{v_1}) = 4x + 7y = 0$$

Scelgo tra gli infiniti x e y una coppia, per esempio $x = -7, y = 4$. Si ha dunque:

$$\vec{v} = (-7, 4, 1)$$

Infine devo solo normalizzare.

3.3 Sottospazio ortogonale

In $\mathbb{R}^n$ consideriamo un sottospazio W. Il sottospazio vettoriale formato dagli elementi $\mathbb{R}^n$ che sono ortogonali a tutti gli elementi di W è definito come

$$W : \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : (\vec{v}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{w} \in W\} \tag{3.5}$$

Se $W = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}$, $W_p = r = span(1, 2, -1)$.

Esercizio In $\mathbb{R}^n$ consideriamo $W = span(\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_k})$. Se $\vec{v_k}$ è combinazione lineare degli altri, cioè i generatori non sono linearmente indipendenti allora è vero che:

$$W = span(\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_{k-1}})$$

Capitolo 4

Matrici

Una matrice è una tabella formata da m righe e n colonne.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

cioè ogni riga è una n-upla di numeri, e ogni riga è un elemento di $\mathbb{R}^n$. L'insieme della matrici $m \times n$ è uno spazio vettoriale rispetto a somma tra due matrici e prodotto per uno scalare.

- Somma tra due matrici:

$$\begin{bmatrix} a_1 1 & ... & a_{1n} \\ ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 1 & ... & b_{1n} \\ ... \\ b_{m1} & ... & b_{mn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & ... & a_{1n} + b_{1n} \\ ... \\ a_{m1} + b_{m1} & ... & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

- Prodotto per uno scalare:

$$t \cdot \begin{bmatrix} a_1 1 & ... & a_{1n} \\ ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ta_1 1 & ... & ta_{1n} \\ ... \\ ta_{m1} & ... & ta_{mn} \end{bmatrix}$$

Base canonica di $M(m,n)$ La base canonica di M è l'insieme delle matrici

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & ... & 0 \\ ... & & \\ 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$
$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & ... & 1 \\ ... & & \\ 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$
$$...$$
$$E_n = \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & & \\ 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$$

e la dimensione di $dimM(m,n) = m \cdot n$.

4.1 Proprietà delle matrici

Una matrice $Am \times m$ si dice quadrata di ordine m.

Una matrice quadrata di ordine m è detta **triangolare superiore** se gli elementi $a_{ij} = 0, i > j$.

Una matrice quadrata di ordine m è detta **matrice diagonale** se tutti gli elementi $a_{ij} = 0, i = j$.

Sia A una matrice di m righe e n colonne. La matrice trasposta A^t di n righe e m colonne se a_{ij} di A^t è l'elemento a_{ji} di A. Nel caso in cui $A = A^t$ allora:

1. A deve essere quadrata;
2. deve essere **simmetrica** rispetto la diagonale principale;
3. $a_{ij} = a_{ji}$;

4.2 Prodotto righe per colonne di due matrici

Siano $Am \times n$ e $Bn \times k$ allora la matrice AB è una matrice $m \times k$. L'elemento in posizione ij di AB è il prodotto scalare tra la riga i di A e la colonna j di B.

$$\begin{aligned} a_i &= \{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}\} \\ b_i &= \{b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}\} \\ \rightarrow a_i b_j &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} \end{aligned}$$

Proprietà del prodotto tra due matrici

1. $(AB) \cdot C = A \cdot (bC)$ **associativa**
2. $A(tB) = t(AB)$ **omogeneità**
3. $A(B + C) = AB + AC$ **distributiva verso destra**
4. $(A + B)C = AC + BC$ **distributiva verso sinistra**
5. $(AB)^t = B^t \cdot A^t$
6. **non è commutativo**

Prodotto tra due vettori di $\mathbb{R}^n$ Dati due vettori definiti come:

$$\vec{x} = n \times 1$$
$$\vec{y} = 1 \times n$$

è possibile scriverli come vettori riga o colonna, nella loro forma matriciale:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix}$$
$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{bmatrix}$$

e il prodotto **righe per colonne** è definito come:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & ... & x_1y_n \\ x_2y_1 & ... & & \\ ... & & & \\ x_ny_1 & x_ny_2 & ... & x_ny_n \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

e il prodotto **scalare** è definito come:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n \tag{4.3}$$

Ovviamente per passare dal vettore colonna al vettore riga bisogna fare la trasposta.

4.3 Prodotto matrice per vettore

Siano dati una matrice $Am \times n$ e $\vec{x}n \times 1$. Allora il prodotto $A\vec{x}$ è un vettore $m \times 1$ come definito dal prodotto righe per colonne:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} = A(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + ... + x_n\vec{e_n}) = \tag{4.4}$$

$$A(x_1\vec{e_1}) + A(x_2\vec{e_2}) + ...A(x_n\vec{e_n}) = \tag{4.5}$$

$$x_1A\vec{e_1} + x_2A\vec{e_2} + ... + x_nA\vec{e_n} \tag{4.6}$$

possiamo definire il prodotto tra la matrice A e i vettori canonici:

$$A\vec{e_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & & \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix} = \tag{4.7}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ ... \\ a_{m1} \end{bmatrix} = \vec{a^1} \tag{4.8}$$

dove a^1 è **la prima colonna della matrice** A. Di conseguenza

$$A \cdot \vec{x} = x_1\vec{a^1} + x_2\vec{a^2} + ... + x_n\vec{a^n} \tag{4.9}$$

ovvero $A\vec{x}$ è la combinazione lineare dei vettori colonna della matrice A con coefficienti le componenti del vettore $\vec{x}$.

Elemento neutro del prodotto L'elemento neutro del prodotto **è definito esclusivamente per matrici quadrate**

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

ovvero una matrice con la diagonale principale uguale a 1 e il resto pari a zero. Sia A una matrice qualsiasi, allora

$$I \cdot A = A \cdot I$$

Una matrice è invertibile se esiste una matrice $Bn \times m$ **tale che** $AB = BA = I$, e B è l'inversa di A . La matrice nulla non è invertibile, e non tutte le matrici sono invertibili.

Capitolo 5

Determinante di una matrice

Sia A una matrice $n \times n$, con $n = 1$: $A = [a]$. Allora:

$$detA = det[a] = a \tag{5.1}$$

Per definire il determinante di una matrice si procede in maniera ricorsiva. Supponendo di conoscere il determinante di una matrice di un elemento allora lo possiamo definire per una matrice di ordine n.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Cancellando alcune righe e/o colonne di A si ottiene una **sotto-matrice di** A. Se cancello lo stesso numero di righe e colonne la sotto-matrice è quadrata. Cancellando la prima riga e colonna di A si ottiene la sotto-matrice M_{11}:

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & \\ a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Si chiama **complemento algebrico dell'elemento che compare in posizione** iJ **della matrice** A**, chiamato** A_{ij}

$$A = (-1)^{i+j} detM_{ij} \tag{5.3}$$

per esempio:

$$A_{11} = (-1)^2 detM_{11}$$
$$A_{12} = (-1)^3 detM_{12}$$

allora si definisce il determinante di A:

$$detA = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + ... + a_{1n}A_{1n} \tag{5.4}$$

cioè **la somma dei prodotti tra gli elementi della prima riga per i loro complementi algebrici**.

5.1 Teoremi di Laplace

Teorema 4 (I Teorema di Laplace)**.** La somma dei prodotti degli elementi di una qualunque riga/ colonna di A per i coefficienti algebrici **è sempre uguale al determinante di** A.

Teorema 5 (II Teorema di Laplace)**.** La somma dei prodotti degli elementi di una riga/colonna di A per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga/colonna **è uguale a 0**.

5.2 Proprietà del determinante

Sia $An \times n$ una matrice quadrata qualsiasi. Allora valgomo le seguenti proprietà:

1. $detA = det(A^t)$;
2. Se una riga/colonna di A è nulla, allora $detA = 0$;
3. Se si **scambiano due righe o due colonne** di A il determinante **cambia di segno**;
4. Se 2 righe o colonne di A sono uguali, allora il determinante di A è **nullo**;
5. Se si moltiplica una colonna o una riga id A per uno scalare, allora

$$det \begin{bmatrix} \vec{a_1} \\ t\vec{a_2} \\ ... \\ \vec{a_n} \end{bmatrix} = t \cdot det \begin{bmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} \\ ... \\ \vec{a_n} \end{bmatrix}$$

   Se moltiplico tutta la matrice per uno scalare allora:

$$det(tA) = t^n detA$$

6. Se due righe di A sono **proporzionali** allora il determinante è **nullo**;

7. Se una riga o colonna è somma di due vettori allora

$$det \begin{bmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{b} + \vec{c} \\ ... \\ \vec{a_n} \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{b} \\ ... \\ \vec{a_n} \end{bmatrix} + det \begin{bmatrix} \vec{a_1} \\ +\vec{c} \\ ... \\ \vec{a_n} \end{bmatrix}$$

8. Se una riga/colonna è combinazione lineare delle altre righe/colonne, allora il determinante di A è **nullo**

$$\begin{bmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} \\ ... \\ \vec{a_n} \end{bmatrix}$$

$$\vec{a_1} = c_2\vec{a_2} + ... + c_n\vec{a_n}$$

$$\to detA = 0$$

9.

Teorema 6 (Teorema di Binet)**.** Siano A e B due matrici quadrate entrambe $n \times n$. Allora:

$$det(AB) = detA \cdot detB \tag{5.5}$$

10. **Il determinante della matrice identità è uguale a 1** ;

11. Sia D una matrice del tipo

$$D = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & t_2 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... \\ 0 & 0 & ... & t_n \end{bmatrix}$$

allora $detD = t_1 \cdot t_2 \cdot ... \cdot t_n$

Torniamo in particolare alla proprietà numero 8 . Questa proprietà vale per n vettori in $\mathbb{R}^n$. I vettori $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n}$ sono **linearmente indipendenti se**

$$det \begin{bmatrix} \vec{x_1} \\ \vec{x_2} \\ ... \\ \vec{x_n} \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} \vec{x_1} & \vec{x_2} & ... & \vec{x_n} \end{bmatrix} = 0 \tag{5.6}$$

5.3 Matrice Inversa di una matrice quadrata

Data una matrice quadrata $An \times n$. Per definizione A è invertibile se esiste B per cui $AB = I$. Si dimostra che A **è invertibile se e solo se** $detA \neq 0$. Per la dimostrazione utilizziamo il Teorema di Binet, ovvero

$$det(AB) = detA \cdot detB = detI = 1$$

di conseguenza $detA$ **non può essere nullo**. E' una **condizione necessaria e sufficiente**.

5.3.1 Matrice dei complementi algebrici e matrice inversa

Sia A una matrice quadrata del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Allora la matrice dei complementi algebrici sarà

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ ... & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & ... & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Si chiama invece **matrice aggiunta di A** la matrice trasposta di A^*:

$$(A^*)^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Allora si definisce dunque la matrice inversa di A come:

$$A^{-1} = \frac{1}{detA}(A^*)^t \tag{5.7}$$

Teorema 7 (Unicità della matrice inversa)**.** Se A è invertibile, cioè $detA \neq 0$, allora la sua inversa **è unica**.

La dimostrazione è molto semplice. Siano B e C due inverse di A **distinte**.

$$
\begin{aligned}
C(AB) &= CI \\
(CA)B &= C \\
IB &= C \\
B &= C, \lightning
\end{aligned}
$$

■

Teorema 8 (Invertibilità del prodotto)**.** Siano A e B due matrici $n \times n$, allora il prodotto $A \cdot B$ è invertibile se e solo se A e B sono invertibili e

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1} \tag{5.8}$$

Infine si definisce una matrice A **singolare** se il suo determinante è nullo, altrimenti è detta **non singolare**.

5.4 Rango di una matrice

Sia data la famiglia di vettori $\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n} \in \mathbb{R}^n$ e sia $W = span(\vec{x_1}, \vec{x_2}, ..., \vec{x_n})$. W è sottospazio di $\mathbb{R}^n$. Allora $W = c_1\vec{x_1}, c_2\vec{x_2}, ..., c_n\vec{x_n}$ e la dimensione di W è definita come $dimW$ ed **è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti di** W. Questo risultato è importante e deve essere tenuto ben a mente in questa sezione.

Sia A una matrice $m \times n$ e lo spazio riga della matrice è chiamato $Row(A)$, definito come:

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a_1} \\ \vec{a_2} \\ ... \\ \vec{a_m} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

$$Row(A) = span(\vec{a_1} \tag{5.10}$$

$$\vec{a_2} \tag{5.11}$$

$$... \tag{5.12}$$

$$\vec{a_m}) \tag{5.13}$$

e inoltre $Row(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Si definisce rango di A $r(A)$ come

$$r(A) = dim[Row(A)] \tag{5.14}$$

analogamente si può definire il sottospazio $Col(A)$ analogo a $Row(A)$ ma per le colonne di A.

$$Col(A) = span(\vec{a^1}, \vec{a^2}, ..., \vec{a^n}) \tag{5.15}$$

5.4.1 Calcolo del rango

Primo Metodo Data una matrice A qualsiasi allora $r(A) = r$ se esiste una sotto-matrice quadrata di A di ordine r **non singolare** e se tutte le sotto-matrici quadrate di A di ordine $r + 1$ sono singolari.

Riduzione a scala Data una matrice A qualsiasi, questa la riduciamo a scala e chiamiamo S la sua matrice ridotta. Allora

$$r(A) = dim[Row(A)] = dim[Row(S)] \tag{5.16}$$

Ovvero $r(A)$ equivale al numero di righe di S non nulle, cioè al numero di pivot. Vale la seguente proprietà:

$$dim[Row(A)] = dim[Col(A)] \tag{5.17}$$

Teorema 9. Sia A una matrice $m \times n$. Allora il **massimo numero di righe linearmente indipendenti coincide con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti**.

Un'osservazione molto importante è che data una matrice, e la sua riduzione a scala, **lo spazio riga rimane inalterato**, ma **lo spazio colonna viene alterato, anche se viene mantenuta la dimensione**.

Un'altra osservazione è che **una matrice quadrata ha rango** n **se** $det \neq 0$.

Capitolo 6

Applicazioni lineari

Un'applicazione lineare è una delle funzioni più semplici (dopo quelle costanti) tra spazi vettoriali. Siano V e W due spazi vettoriali. Allora

$$L : V \to W$$

è lineare se è additiva ed è omogenea:

- (Additività) $\forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$, allora $L(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = L(\vec{v_1}) + L(\vec{v_2})$, ovvero conserva la somma;
- (Omogeneità) $\forall \vec{v} \in V, \forall t \in \mathbb{R}$, allora $L(t\vec{v} = tL(\vec{v}))$, ovvero conserva il prodotto;

Inoltre se L è lineare allora $L(0) = 0$:

$$L(0\vec{v}) = 0L(\vec{v}$$
$$L(0) = 0$$
$$\blacksquare$$

Questa **è una condizione necessaria** ma **non** sufficiente. Infatti prendiamo per esempio $L : x \to x^2, \sin x$. Il quadrato della somma non conserva la somma dei quadrati, quindi L non è lineare.

Una qualunque applicazione $L(x) = a \cdot x$ è lineare, infatti:

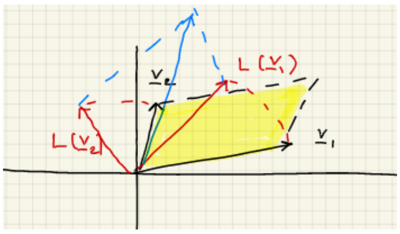
- $L(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = a(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = a\vec{x_1} + a\vec{x_2} = L(\vec{x_1} + L(\vec{x_2})$
- $L(t\vec{x}) = a(t\vec{x}) = ta(\vec{x}) = tL(\vec{x})$

Un altro esempio è $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (traslazione di un vettore $\vec{u} = (a, b)$).

$$L(x, y) = L(x + a, y + b)$$

In questo caso però $\vec{0}$ **non è contenuto**, dunque **la traslazione non è un'applicazione lineare**. Questo a meno che la traslazione non sia **l'applicazione identica**, cioè $a = 0, b = 0$. L'applicazione identica trasforma uno spazio lineare in un altro. Anche l'**applicazione nulla** è lineare: $L(\vec{x}) = 0$.

Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione che ruota attorno all'origine di un angolo θ in senso antiorario. Anche in questo caso, attraverso un controllo grafico, si verifica che L è lineare omogenea ed additiva.



6.1 Nucleo e Immagine di un'applicazione lineare

Sia $L : V \to W$ un'applicazione lineare. Si chiama **nucleo** di L

$$kerL = \{\vec{v} \in V : L(\vec{v}) = 0\} \tag{6.1}$$

e inoltre $kerL \neq \emptyset$ perchè l'elemento nullo appartiene sempre a $L(\vec{v})$. Inoltre si definisce immagine di L con $imL = L(\vec{v})$, ovvero l'insieme di vettori del codominio che sono immagine di uno o più vettori del dominio.

Teorema 10. Il $kerL$ è **sottospazio vettoriale di** V mentre imL è **sottospazio vettoriale di** W.

Ecco la dimostrazione. Siano $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in kerL$. Allora $kerL$ è chiuso rispetto la somma:

$$\begin{aligned} L(\vec{v_1} + \vec{v_2}) &= \\ L(\vec{v_1}) + L(\vec{v_2}) &= \\ 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

ed è chiuso rispetto il prodotto per uno scalare:

$$L(t\vec{v}) = t \cdot L(\vec{v})$$
$$t \cdot 0 = 0$$

■

Dimostrazione di imL come sottospazio vettoriale: siano

$$L(\vec{v_1}) = \vec{w_1}$$
$$L(\vec{v_2}) = \vec{w_2}$$

Additività:

$$L(\vec{v_1}) + L(\vec{v_2}) = L(\vec{v_1} + \vec{v_2}) \in imL$$

Omogeneità:

$$t \cdot L(\vec{v}) = L(t \cdot \vec{v}) \in imL$$

■

Per esempio identifichiamo l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, che associa ad un punto nello spazio la sua proiezione in $\mathbb{R}^2$. Il suo $kerL$ sarà l'asse z, mentre imL sarà tutto $\mathbb{R}^2$. Questa applicazione **non è iniettiva, ma è suriettiva**. In particolare data una qualsiasi applicazione lineare **se e solo se**

$$kerL = \{\vec{0}\} \tag{6.2}$$

cioè $kerL$ è un sottospazio banale di V. Segue la dimostrazione, dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ tali che $L(\vec{v}) = L(\vec{u})$. Allora

$$L(\vec{v}) = L(\vec{u})$$
$$L(\vec{v}) - L(\vec{u}) = 0$$
$$\to L(\vec{v} - \vec{u}) = 0$$
$$\to \vec{v} - \vec{u} = 0$$
$$\vec{v} = \vec{u}$$

■

Sia $L : V \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare che ad ogni elemento di V associa una n-upla di coordinate reali, ovvero $L(\vec{v}) = [\vec{v}]_a$. Si avrà:

$$kerL = \{[\vec{v}]_a = 0\}$$
$$\to \vec{v} = 0\vec{v_1} + ... + 0\vec{v_n}$$

cioè il $kerL$ è costituito dall'elemento che scritto come combinazione lineare degli altri elementi, e affinchè sia nullo tutti i coefficienti devono essere nulli, quindi l'applicazione **è iniettiva**. Inoltre **è suriettiva** perchè $imL = \mathbb{R}^n$. In questo caso L è **biounivoca** o **isomorfismo**.

6.2 Relazione tra dimensioni di V, $kerL$, imL

Osserviamo inoltre che L è iniettiva se e solo se $kerL = 0$, ovvero

$$dim(kerL) = 0 = kerL$$

Allo stesso modo è suriettiva **se e solo se**

$$dim(imL) = m = dimW$$

Teorema 11 (di Nullità più Rango)**.** Se $L : V \to W$ è un'applicazione lineare, con $dimV = n$, allora

$$dim(kerL) + dim(imL) = dim(V) = n \tag{6.3}$$

dove $dim(kerL)$ è **la nullità** e $dim(imL)$ è **il rango**.

6.3 Esempio di funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Nel caso in cui $n = m = 1$, allora $L(x) = a \cdot x$. Invece sia $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, allora $L(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$. Allora si avrà che:

$$\begin{aligned} a &\to A, m \times n \\ x &\to \vec{x}, n \times 1 \\ \to L(\vec{x}) &= A \cdot \vec{x} = m \times 1 \end{aligned}$$

Questa è un'applicazione lineare perchè gode di additività e omogeneità. Un esempio è il seguente: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Allora A è una matrice 2×3.

$$L(x, y, z) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & d & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ x \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{bmatrix}$$

Parte II

Equazioni Differenziali

Capitolo 7

Introduzione fisica

Dinamica La seconda legge della dinamica afferma che la risultante di un corpo soggetto ad una forza equivale a $F = ma$ ma poichè l'accelerazione è la derivata seconda dello spostamento $F = my''(t)$. Se consideriamo un corpo in movimento attaccato ad una molla possiamo riscrivere le risultanti sul corpo come:

$$my''(t) = -ky$$

E ancora considerando l'attrito prodotto con l'aria o con qualsiasi altro materiale, cioè lo smorzamento ecco che l'equazione diventa:

$$\begin{aligned} my''(t) &= -ky - my' + f(t) \\ my''(t) &= F(t, y, y') \\ &\mathsf{F}(t, y, y', y'') \end{aligned}$$

che è un'equazione **differenziale ordinaria del secondo ordine**. Un'equazione differenziale è un'equazione in cui l'incognita compare come variabile $y(t)$, che compare anche mediante le sue derivate.

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) \tag{7.1}$$

dove a, b, c, f sono costanti e $a \neq 0$ e dove f è detto **forzante**.

Circuiti RLC Le equazioni differenziali sono presenti anche nei circuiti RLC. Scriviamo il potenziale di un circuito RLC come:

$$\begin{aligned}
E(t) &= Li'(t) + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} \\
E(t) &= Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} \\
\rightarrow \frac{d}{dt}[E(t)] &= \frac{d}{dt}[Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{q(t)}{C}] \\
E'(t) &= Li''(t) + Ri'(t) + \frac{i(t)}{C}
\end{aligned}$$

quindi l'equazione del circuito può essere scritta come equazioni differenziali lineari del secondo ordine sia in funzione di $q(t)$ e $i(t)$.

Moto del pendolo In un moto del pendolo lo spostamento del corpo appeso al filo equivale a $s(t) = l\theta(t)$. La velocità e accelerazione sono rispettivamente $l\theta'(t)$ e $l\theta''(t)$. La seconda legge della dinamica può essere riscritta come

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\sin\theta(t)$$

che **è un'equazione differenziale non lineare, in quanto compare la funzione seno**. Tuttavia per le piccole oscillazioni $\sin\theta = \theta$, dunque:

$$\theta'' = -\frac{g}{l}\theta(t)$$

Capitolo 8

Problema di Cauchy

data un'equazione differenziale del tipo

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

con a, b, c, f costanti in I e $a \neq 0$, allora sarà soluzione dell'equazione differenziale nell'intervallo I una funzione $y : I \to \mathbb{R}$ **derivabile due volte** che sostituita nell'equazione iniziale dà un'identità su I, cioè la soddisfa.

Esempio

$$y'' - y' - 2y = 0$$
$$a(t) = 1, b(t) = -, c(t) = -1, , f(t) = 0$$

Prendiamo la funzione esponenziale $y = e^{2t}$. Verifichiamo che sia soluzione.

$$y'(t) = 2e^{2t}$$
$$y''(t) = 4\exp^{2t}$$
$$\to 4\exp^{2t} - 2e^{2t} - 2(e^{2t}) = 0$$

La soluzione è verificata **per ogni** $t \in \mathbb{R}$. Se non fosse così ma solo per alcuni valori, allora non sarebbe soluzione.

Quante soluzioni può avere un'equazione differenziale del secondo ordine Se $y''(t) = 0$ allora $y(t) = c_1 t + c_2$. **Un'equazione differenziale ha infinite soluzioni, se è del secondo ordine allora ha infinite soluzioni che dipendono da due parametri**.

Definizione 8.0.1 (Integrale Generale)**.** Si chiama **Integrale Generale** la totalità delle soluzioni in dipendenza da due parametri.

Una volta che si conoscono i due parametri iniziali e l'equazione differenziale allora si ha il **Problema di Cauchy**.

Teorema 12 (Teorema di Cauchy)**.** data un'equazione differenziale del tipo

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

con a, b, c, f costanti in I e $a \neq 0$ allora il problema di Cauchy con condizioni iniziali assegnate

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases} \tag{8.1}$$

ha una e una sola soluzione in tutto l'intervallo I.

Il significato fisico è determinare la legge oraria di un corpo sapendo che sono note posizione e velocità. Per risolvere il problema di Cauchy:

1. Determinare l'integrale generale ;
2. Imporre le condizioni iniziali;
3. Sostituire i valori;

8.1 Integrale generale

Come è formato l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale? Innanzitutto chiamiamo

$$L = a\frac{d}{dt^2} + b\frac{d}{dt} + c$$
$$Ly = a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t)$$

L gode della proprietà di linearità. Dati $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$c_1y_1 + c_2y_2 = c_1Ly_1 + c_2Ly_2$$

cioè il prodotto di L per una combinazione lineare è esso stesso la combinazione lineare di y_1 e y_2 con coefficienti Lc_1 e Lc_2.

Poichè L gode della linearità, le equazioni differenziali del tipo

$$Ly = f \tag{8.2}$$

sono lineari. Godono del principio di sovrapposizione:

$$c_1 Ly_1 + c_2 Ly_2 = c_1 f_1 + c_2 f_2 \tag{8.3}$$

questo è molto importante perchè se chiamiamo $y = c_1 Ly_1 + c_2 Ly_2$ allora

$$L(y) = c_1 f_1 + c_2 f_2 \tag{8.4}$$

dove y soddisfa l'equazione differenziale con forzante $c_1 f_1 + c_2 f_2$.

Teorema 13 (Principio di Sovrapposizione)**.** Se y_1 è soluzione di $ay'' + by' + cy = f_1$ e y_2 è soluzione di $a''_y + b'_y + c = f_2$, allora la funzione $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ **è soluzione di**

$$ay'' + by' + cy = c_1 f_1 + c_2 f_2 \tag{8.5}$$

Consideriamo un'equazione omogenea, con termine noto nullo. Se $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$, cioè y_1, y_2 sono soluzioni dell'equazione omogenea per il principio di sovrapposizione:

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 Ly_1 + c_2 Ly_2 = 0 \tag{8.6}$$

ogni combinazione lineare della soluzione dell'equazione omogenea è anch'essa soluzione. Cioè **l'insieme** S **delle soluzioni forma uno spazio vettoriale**. Si dimostra che se l'equazione è di ordine 2, anche la dimensione dello spazio vettoriale è di ordine 2.

Teorema 14 (di struttura)**.** L'integrale generale di

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

con a, b, c costanti in I e $a \neq 0$ è dato da tutte le combinazioni lineare

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y(2(t), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{8.7}$$

con $y_1(t), y_2(t)$ **sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione stessa**.

8.2 Forzante non nullo

Quando il forzante non è nullo, l'equazione differenziale è detta **completa**. Si può ricavare dall'equazione completa la sua **omogenea associata**:

$$Ly = f$$
$$\to Ly = 0$$

la seconda equazione è l'omogenea associata. Chiamiamo $Ly_o = 0, Ly_p = f$. Per il **principio di sovrapposizione**:

$$L(y_0 + y_p) = Ly_0 + Ly_p = 0 + f = f \tag{8.8}$$

oppure se $Ly_1 = f, Ly_2 = f$ allora:

$$L(y_1 - y_2) = Ly_1 - Ly_2 = f - f = 0 \tag{8.9}$$

Data una qualunque soluzione y_p allora, allora le altre soluzioni sono :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) \tag{8.10}$$

con y_0 soluzione di $Ly = 0$.

Teorema 15 (di Struttura per Equazioni Complete)**.** L'integrale generale di

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

con a, b, c, f costanti in I e $a \neq 0$ è dato da **tutte e sole** funzioni

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y(2(t) + y_p(t), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{8.11}$$

con y_1, y_2 soluzioni di $Ly = 0$ mentre y_p è una soluzione particolare dell'equazione completa

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

8.3 $\Delta > 0$

Consideriamo una qualsiasi equazione differenziale omogenea. Per il teorema di struttura è sufficiente trovare due soluzioni linearmente indipendenti, ovvero il cui rapporto **non sia costante, o una non sia multiplo dell'altra**.

Esempio

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

Soluzioni proporzionali alle loro derivate. Quindi equazioni del tipo $e^{\lambda t}$:

$$\begin{aligned} y &= e^{\lambda t} \\ y' &= \lambda e^{\lambda t} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda t} \\ \rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 3e^{\lambda t} &= 0 \\ (\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0, e^{\lambda t} &\neq 0 \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Quindi si arriva ad un'equazione algebrica di secondo grado, in cui $\lambda = -1, \lambda = -3$. Le due soluzioni sono:

$$e^{-t}, e^{-3t}$$

sono linearmente indipendenti, il loro rapporto è e^{2t} che non è costante. Il polinomio

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \tag{8.12}$$

è detto **polinomio caratteristico** associato all'equazione differenziale. Se $\Delta > 0$ corrispondono due soluzioni y_1, y_2 dell'equazione differenziale linearmente indipendenti. Per il teorema di struttura 14 si scrive l'integrale generale:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

8.4 $\Delta < 0$

Esempio

$$y'' + 2y' + 10y = 0, y(t) = e^{\lambda t}$$

si trova l'equazione caratteristica e le soluzioni

$$\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0, \Delta < 0$$
$$\rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 3i$$

se sostituiamo i valori si trovano

$$y_1(t) = e^{(-1+3i)t}$$
$$y_2(t) = e^{(-1-3i)t}$$

per la formula di Eulero si ricavano i numeri complessi associati:

$$y_1(t) = e^{-t}(\cos(3t) + i\sin(3t))$$
$$y_2(t) = e^{-t}(\cos(3t) - i\sin(3t))$$

Da queste soluzioni complesse e coniugate si possono trovare due funzioni reali in questo (perchè ogni combinazione lineare è soluzione):

$$u_1(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2} = e^{-t}\cos(3t) \tag{8.13}$$

$$u_2(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{2i} = e^{-t}\sin(3t) \tag{8.14}$$

e sono due soluzioni reali linearmente indipendenti. L'integrale generale sarà dunque:

$$y(t) = c_1 e^{-t}\cos(3t) + c_2 e^{-t}\sin(3t)$$

Generalizzazione

$$
\begin{aligned}
a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \Delta < 0 \\
\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \\
\rightarrow u_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\
\rightarrow u_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\
\Rightarrow y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

8.5 $\Delta = 0$

Esempio

$$
\begin{aligned}
y'' - 6' + 9y = 0 \\
\rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \\
\Delta = 0
\end{aligned}
$$

Due radici reali e coincidenti $\lambda_{1,2} = 3$. Troviamo **una sola** soluzione dell'equazione differenziale: $y_1(t) = e^{3t}$ e tutte le sue funzioni multiple $c \cdot e^{3t}, \forall c \in \mathbb{R}$. Dobbiamo dunque trovare un'altra soluzione che sia linearmente indipendente da quella trovata. In particolare si cerca la funzione $c(t)$ tale che

$$y_2(t) = C(t)e^{3t}$$

con $y_2(t)$ soluzione dell'equazione differenziale. Per farlo si calcolano le derivate di y_2 e si sostituiscono nell'equazione differenziale:

$$
\begin{aligned}
y_2' = e^{3t}[C'(t) + 3C(t)] \\
y_2'' = e^{3t}[C''(t) + 6C'(t) + 9C(t)] \\
\rightarrow e^{3t}[C''(t) + 6C'(t) + 9C(t) - 6C'(t) + -18C(t) + 9C(t) = 0] \\
C''(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Integrando due volte si trova $C(t) = c_1 t + c_2, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. In particolare per questo esempio $C(t) = t$. Dunque si ha:

$$
\begin{aligned}
y_1(t) = e^{3t} \\
y_2(t) = te^{3t}
\end{aligned}
$$

e sono linearmente indipendenti. Per il Teorema di Struttura 15

$$y(t) = e^{3t}(c_1 t + c_2), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Altro metodo Se le soluzioni dell'equazione caratteristica sono reali e distinte l'integrale generale equivale a :

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

Poichè l'equazione è lineare ed omogenea, ogni combinazione lineare è ancora soluzione dell'equazione differenziale.

$$c_1 = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
$$c_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$
$$\phi(t) = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}$$

Studiamo il comportamento di $\phi(t)$ quando $\lambda_1 \to \lambda_2$. Dunque poniamo $\lambda_2 = \lambda_1 + \epsilon$ e tendiamo $\epsilon \to 0$.

$$\phi(t) = \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{8.15}$$
$$= \frac{e^{(\lambda_1 + \epsilon)t} - e^{\lambda_1 t}}{\epsilon} \tag{8.16}$$
$$\to \lim_{\epsilon \to 0} \frac{e^{(\lambda_1 + \epsilon)t} - e^{\lambda_1 t}}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} e^{\lambda_1 t} t \tag{8.17}$$

Dunque la funzione limite risolve l'equazione differenziale limite che corrisponde al polinomio caratteristico che ha due radici coincidenti uguali a λ_1.

8.6 Integrale Generale e problema di Cauchy per l'Equazione Omogenea

Data un'equazione lineare omogenea si scrive l'equazione caratteristica associata, e se ne ricavano le soluzioni, in modo che siano linearmente indipendenti. Per ottenere un'unica soluzione dall'integrale generale bisogna porre delle condizioni iniziali del tipo

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Risolvere il problema di Cauchy per un'equazione differenziale omogenea significa **trovare la legge che descrive come cambia una certa quantità $y(t)$ nel tempo** (per esempio la posizione del punto materiale, conoscendo la posizione iniziale e la velocità iniziale).

Parte III

Esercitazioni

Capitolo 9

Sistemi Lineari

Un sistema lineare è formato da m equazioni di primo grado in n incognite.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{9.1}$$

oppure più sinteticamente un sistema può essere riscritto in modo matriciale:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{9.2}$$

9.1 Riduzione a scala

$$\begin{bmatrix} a & * & * & * & * & * \\ & b & * & * & * & * \\ & & c & * & * & * \end{bmatrix} \tag{9.3}$$

dove gli spazi vuoti equivalgono a zero, * sono numeri qualsiasi e a, b, c sono detti **pivot della matrice**.

Esempio di riduzione a scala

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

in questo caso i pivot della matrice sono $1, 1, 1$.

9.2 Risoluzione di sistemi lineari mediante riduzione a scala (Metodo di eliminazione di Gauss)

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ x + y + 3z = k - 1 \\ 2x + ky - z = 1 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 3 & k-1 \\ 2 & k & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - 2R_1]{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 0 & 3-k & k-3 \\ 0 & k-2 & -1-2k & -3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & k-2 & -1-2k & -3 \\ 0 & 0 & 3-k & k-3 \end{array}\right]$$

Discussione

- Se $k \neq 2$ e $k \neq 3$ esiste una sola soluzione, e il numero di pivot è 3.
- Se $k = 2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{5R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right]$$

  cioè il sistema è impossibile, in quanto nella terza equazione risulta $0 = -8$, dunque non ammette soluzioni

- Se $k = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  cioè il sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da $z = t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = 2 - 3t + 3 - 7t = 3 - 10t \\ y = 7t - 3 \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$