

Costruzioni di Macchine 1

Mattia Ruffini

Settembre 2022

Indice

1	Analisi Cinematica	3
1.1	Linearizzazione di un movimento rigido	4
2	Reazioni vincolari	8
2.1	Corpo rigido non vincolato	8
2.2	Corpo rigido non vincolato	9
2.3	I vincoli	9
2.4	Analisi cinematica e calcolo delle reazioni vincolari	12
3	Azioni interne	14
3.1	Metodo differenziale	14
4	Azioni interne in tre dimensioni	16
5	Sforzo	17
5.1	Stato di sforzo nel piano	19
5.2	Stato di sforzo per piani orientati	21
5.3	Sforzi principali	22
5.4	Cerchio di Mohr	23
6	Deformazione e problema elastico	25
6.1	Legge di Hooke	27
6.2	Il problema elastico	28
7	De Saint-Venant	29
7.1	Ipotesi	29
7.2	Flessione-linea elastica	31
7.3	Curvatura	33
7.4	Azione assiale	34
7.5	Azione di taglio	36
7.6	Torsione	40

8	Verifica di resistenza statica dei materiali metallici	42
8.1	Materiali fragili	42
8.1.1	Criterio di Galileo-Rankine-Navier	42
8.2	Materiali Duttili	43
8.2.1	Criterio di Guest-Tresca	43
8.2.2	Criterio di Huber, Hencky, Von Mises	44
8.3	Effetto di Intaglio	47

Capitolo 1

Analisi Cinematica

L'analisi cinematica studia l'equilibrio di un sistema di corpi rigidi soggetti a forze o coppie. L'equilibrio può essere di rotazione o verticale, e sono descritti da un numero di equazioni linearmente indipendenti.

Nell'analisi cinematica si contano i gradi di libertà di un sistema di corpi, e si verifica che i vincoli siano stati scelti in modo efficace attraverso un approccio matematico e grafico.

Si definiscono i gradi di libertà il numero di parametri indipendenti per fissare la posizione di un punto materiale nello spazio. Quando il punto materiale è vincolato diminuiscono i gradi di libertà: se il punto è vincolato ad un piano avrà 2 gdl.

Un sistema di n punti possiede $3n$ gradi di libertà. Un sistema di punti è **rigido** se le distanze tra i punti rimangono costanti.

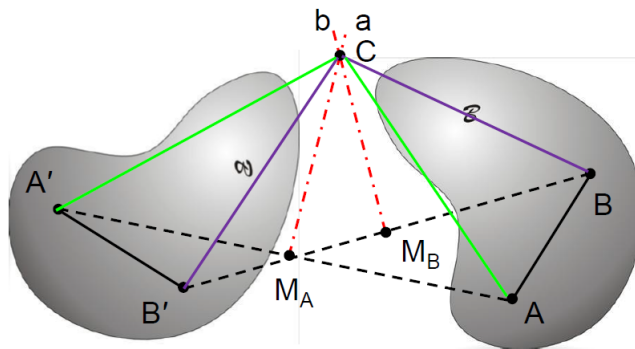
Per n punti rigidi si possono definire $n(n - 1)/2$ equazioni linearmente indipendenti che descrivono il sistema rigido.

1. Vincoli insufficienti: $g_{dv} < g_{dl}$;
2. **Isostatico**: $g_{dv} = g_{dl}$;
3. **Iperstatico**: $g_{dv} > g_{dl}$;

Qualora i vincoli dovessero essere efficaci esiste un numero di equazioni linearmente indipendenti per risolvere l'equilibrio del corpo rigido. Un corpo rigido può compiere due movimenti: rotazione e traslazione.

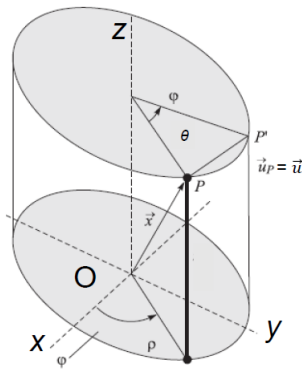
1. **Traslazione:** le direzioni rettilinee del corpo dopo lo spostamento rimangono parallele a loro;
2. **Rotazione:** un punto solidale con il corpo denominato *centro di rotazione* abbia spostamento nullo;
3. **Rototraslazione:** la composizione dei due movimenti;

In generale qualsiasi movimento di un corpo rigido nel piano può essere ridotto ad una pura rotazione attorno un centro di rotazione.



1.1 Linearizzazione di un movimento rigido

Per spostamenti infinitesimi i movimenti di rototraslazione possono essere linearizzati.



Consideriamo la rotazione di un disco rigido attorno al suo asse. Un punto P dopo una rotazione di un angolo θ sarà nella posizione P' . Il vettore

\vec{x} avrà coordinate

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos(\phi) \\y &= \rho \sin(\phi) \\z &= z\end{aligned}$$

mentre \vec{x}'

$$\begin{aligned}x' &= \rho \cos(\phi + \theta) \\y' &= \rho \sin(\phi + \theta) \\z' &= z\end{aligned}$$

Il vettore spostamento è definito come $\vec{u} = \vec{x}' - \vec{x}$. Il vettore spostamento avrà coordinate:

$$\begin{aligned}u &= \rho \cos(\phi + \theta) - \rho \cos(\phi) \\v &= \rho \sin(\phi + \theta) - \rho \sin(\phi) \\w &= 0\end{aligned}$$

Poichè stiamo parlando di piccole oscillazioni possiamo considerare la rotazione di un angolo infinitesimo $d\theta$.

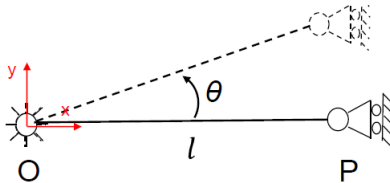
$$d\vec{u} = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta}\right)_{\theta=0} d\theta \quad (1.1)$$

Le componenti del vettore spostamento in forma differenziale diventano

$$\begin{aligned}du &= -\rho \sin(\phi) d\theta = -y d\theta \\dv &= \rho \cos(\phi) d\theta = x d\theta \\dw &= 0\end{aligned}$$

E' quindi presente una linearità tra le componenti. In forma vettoriale possiamo scrivere

$$d\vec{u} = d\theta \vec{k} \times \vec{x} \quad (1.2)$$



Consideriamo il corpo rigido in figura. Se analizziamo l'esempio con i grandi spostamenti avremo uno spostamento del tipo

$$\begin{aligned}u &= l(\cos \theta - 1) \\v &= l \sin \theta\end{aligned}$$

Si noti che la componente u non è compatibile con il vincolo del carrello. Se analizziamo lo spostamento con le piccole oscillazioni avremo (derivando con $\theta = 0$ le componenti del vettore spostamento).

$$d\theta = \begin{cases} 0 & d\theta \\ l & d\theta \end{cases}$$

In cui lo spostamento orizzontale è zero, quindi compatibile con il vincolo del carrello.

Applicazione nei moti nel piano

- Rotazione attorno ad un punto O :

$$d\vec{u}_p = d\vec{\theta} \times (P - O)$$

- Roto-traslazione nel piano:

$$d\vec{u}_p = d\vec{u}_O + d\vec{\theta} \times (P - O)$$

Nel piano quindi possiamo definire il vettore spostamento **infinitesimo** (non appesantiamo la notazione) come

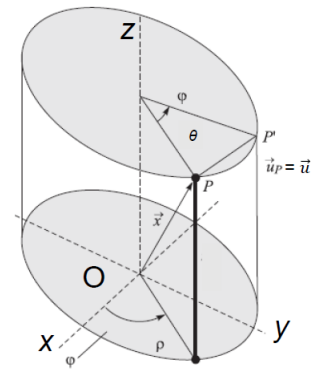
$$\vec{u}_p = \begin{cases} u_p = u_0 - \theta(y_p - y_0) \\ v_p = v_0 + \theta(x_p - x_0) \end{cases} \quad (1.3)$$

Per θ diverso da zero, in un moto piano esiste sempre un asse di pura rotazione che interseca il piano di moto nel **centro di istantanea rotazione**. Per trovare le coordinate del CIR per via analitica, poichè il CIR non si sposta nel piano possiamo utilizzare le equazioni scritte precedentemente che indicavano le componenti del vettore spostamento.

$$\begin{cases} u_{CIR} = u_0 - \theta(y_{CIR} - y_0) = 0 \\ v_{CIR} = v_0 + \theta(x_{CIR} - x_0) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

quindi si ha

$$\begin{cases} x_{CIR} = -\frac{v_0}{\theta} + x_0 \\ Y_{CIR} = \frac{u_0}{\theta} + y_0 \end{cases} \quad (1.5)$$



CIR per movimenti di traslazione

Per movimenti solamente traslatori il centro di rotazione istantanea è all'infinito lungo la perpendicolare della direzione di spostamento. Si ricorda che rette parallele si intersecano all'infinito, è un teorema importante per capire se le strutture sono labili o meno. In particolare, **se non trovo un CIR per il corpo rigido, significa che il corpo rigido è ben vincolato.**

Capitolo 2

Reazioni vincolari

L'equilibrio di un corpo è definito dalla risultante delle forze e dal risultante dei momenti che agiscono sul corpo rigido, ovvero

$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \\ \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{P}_i - O) \times \vec{F}_i \end{cases} \quad (2.1)$$

Per un corpo lo spostamento infinitesimo è dato da

$$d\vec{u}_{P_i} = d\vec{u}_O + d\vec{\theta} \times (\vec{P}_i - O) \quad (2.2)$$

che corrispondono alle componenti di traslazione e rotazione. Per uno spostamento infinitesimo, il lavoro compiuto dalle forze allora sarà

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot d\vec{u}_{P_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot (d\vec{u}_O + d\vec{\theta} \times (\vec{P}_i - O)) \\ &= \vec{R} \cdot d\vec{u}_O + d\vec{\theta} \cdot \vec{M}_i \end{aligned}$$

2.1 Corpo rigido non vincolato

per un corpo rigido non vincolato l'equilibrio è dato quando sia la risultante delle forze che dei momenti è nulla. In particolare per le leggi della meccanica

- Se il corpo rigido è in quiete rimane in quiete;
- Se il corpo rigido ruota o trasla con una certa velocità allora la velocità rimane invariata;

Il polo rispetto cui calcoliamo i momenti lo scegliamo noi. Questo perchè il momento di un corpo rigido in un punto O' sarà:

$$M_{O'} = M_O + (O \vec{-} O') \times \vec{R} \quad (2.3)$$

Se $\vec{R} = 0$ si ha che $\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O$.

2.2 Corpo rigido non vincolato

Il **vincolo** è una reazione (forza o coppia) detta vincolare che impedisce uno o più tipi di movimento al corpo rigido. In particolare ogni reazione vincolare impedisce un grado di libertà.

Le reazioni vincolari sono un'aggiunta al sistema di carichi applicati al corpo rigido, e il problema è lo stesso del corpo rigido non vincolato: determinare l'equilibrio attraverso un sistema di forze. La **condizione necessaria e sufficiente** affinché un sistema di corpi rigidi sia in equilibrio è che:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = \vec{0} \end{cases} \quad (2.4)$$

Come nel corpo non vincolato, **il polo di applicazione del momento è qualsiasi**.

Nello spazio si ha che

$$\begin{cases} \vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k} = \vec{0} \\ \vec{M}_O = M_x \hat{i} + M_y \hat{j} + M_z \hat{k} = \vec{0} \end{cases} \quad (2.5)$$

ovvero si hanno sei equazioni. Nel piano, poichè sono possibili tre gradi di libertà, si hanno tre equazioni linearmente indipendenti. Le incognite sono le reazioni vincolari esterne (rispetto a terra) ed interne (con vincoli relativi tra i corpi rigidi). Sistemi equipollenti portano al medesimo risultato nel calcolo delle reazioni vincolari.

2.3 I vincoli

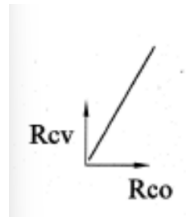
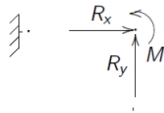
Le reazioni vincolari hanno componenti indipendenti pari ai gradi di vincolo di un componente. Molto importante è che i vincoli siano lisci (non ci deve essere dispersione di lavoro). I vincoli devono essere **bilateri**, ovvero le reazioni sono possibili lungo tutta la retta di applicazione dei vincoli e **perfetti**, ovvero non soffrono di rotture e **lo spostamento infinitesimo è nullo**.

Incastro L'incastro è un vincolo triplo, quindi avrà tre reazioni vincolari. Le componenti del vettore spostamento sono u_c, v_c, θ , mentre le componenti delle forze sono R_x, R_y, M .

Poichè la caratterizzazione energetica dei vincoli perfetti è che il lavoro sia nullo e che lo spostamento (per l'incastro) sia nullo in tutte le direzioni il lavoro sarà:

$$L = u_c R_x + v_c R_y + \theta M = 0$$

Quindi poichè lo spostamento è nullo, e il lavoro sarà sempre nullo, le reazioni vincolari R_x, R_y, M possono assumere un valore qualsiasi.

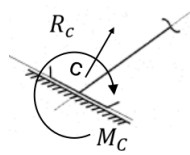


Cerniera

Nella cerniera si avrà che

$$L = u_c R_x + v_c R_y + \theta M = 0 \quad (2.6)$$

Poichè lo spostamento lungo x e y è nullo, affinché il lavoro sia nullo la reazione vincolare del momento deve essere nulla: $\vec{M} = 0$.



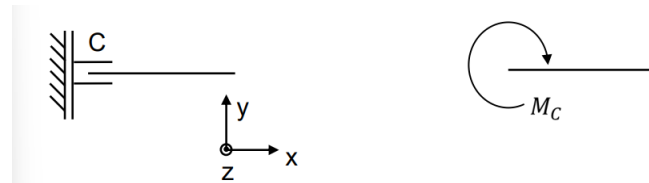
Pattino

Con un ragionamento analogo si osserva che affinché il lavoro sia nullo, deve essere la componente R_x ad essere nulla.



Carrello

Nel carrello sia il momento che la forza orizzontale sono nulle, in quanto il vincolo è solo verticale.

**Bipattino**

Nel bipattino le reazioni vincolari parallele ai piani di scorrimento devono essere nulle.

Sistema di corpi rigidi Nei sistemi di corpi rigidi è importante calcolare le reazioni interne dei vincoli relativi tra i corpi rigidi. Dal punto di vista cinematico è ancora possibile utilizzare le bielle.

Approccio matematico Si schematizza innanzitutto la struttura e se ne evidenziano le reazioni vincolari. Si imposta il sistema di equazioni cardinali e si risolve.

E' un metodo utilizzato perlopiù per software o esempi semplici.

Metodo manuale Dopo aver schematizzato la struttura ed aver evidenziato le reazioni vincolari per prima cosa **risolvo il problema rispetto alla terra, apro i nodi della struttura, individuo le equazioni di equilibrio e trovo le incognite.**

Carichi distribuiti Le equazioni cardinali della statica fanno riferimento a forze concentrate in un solo punto rispetto il corpo rigido. tuttavia è possibile utilizzare carichi con forze in volume, ovvero la cui distribuzione non è uniforme. Per risolvere questo problema devo trovare un sistema di forze equipollenti.

Conviene trovare un punto per cui i momenti di tutte le forze si annullano, ovvero le forze vanno applicate lungo la retta del baricentro del corpo. Quindi il sistema di risoluzione sarà composto da **una forza risultante e momento nullo**. La retta di applicazione è parallela al fascio improprio delle forze.

Per esempio il peso di una trave non distribuito uniformemente, a parità di spessore si ha

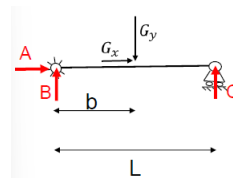
$$F_{tot} = tg \int f(s) ds \quad (2.7)$$

2.4 Analisi cinematica e calcolo delle reazioni vincolari

Teorema 1 (Teorema di Rouchè-Capelli). *Affinchè un sistema lineare di n variabili ammetta una soluzione, è necessario che il sistema sia compatibile, ovvero che il rango della matrice dei coefficienti sia uguale al rango della matrice stessa orlata con i termini noti.*

$$r(A) = r(A|\vec{b}) \quad (2.8)$$

Inoltre il numero di soluzioni è dato da ∞^{n-R} con R rango del sistema.



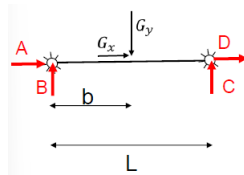
$$\begin{cases} A + G_x = 0 \\ B + C - G_y = 0 \\ CL - G_y b = 0 \end{cases}$$

Caso isostatico ben vincolato

Quindi in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_x \\ G_y \\ G_y b \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Il numero di soluzione è uno, perchè il rango della matrice dei coefficienti è lo stesso della matrice orlata dei termini noti.



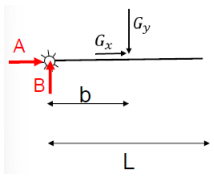
$$\begin{cases} A + D + G_x = 0 \\ B + C - G_y = 0 \\ CL - G_y b = 0 \end{cases}$$

Caso iperstatico

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_x \\ G_y \\ G_y b \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Quindi il rango della matrice orlata è maggiore della matrice dei coefficienti e si hanno infinite soluzioni. D diventa un parametro.

Caso ipostatico

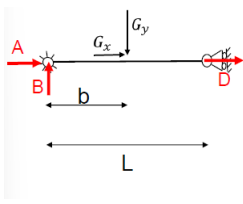


$$\begin{cases} A + G_x = 0 \\ B - G_y = 0 \\ -G_y b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_x \\ G_y \\ G_y b \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Se $G_y \neq 0$ allora il sistema è impossibile.

Caso labile



$$\begin{cases} A + G_x + D = 0 \\ B - G_y = 0 \\ -G_y b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_x \\ G_y \\ G_y b \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Si ha che $n = 3$, il rango della matrice è 2 e il rango della matrice orlata è 3. Quindi si hanno infinite soluzioni. Si nota che il sistema è iperstatico orizzontalmente.

Capitolo 3

Azioni interne

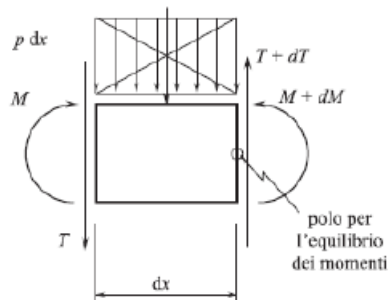
Immaginiamo di spezzare un'asta rigida. Tra i due componenti che si sono creati avremo delle reazioni interne, che possono essere **reazione assiale**, **taglio** e **momento flettente**.

Per quanto riguarda il momento questo si trova spesso in funzione della distanza

Per trovare le reazioni interne in generale si suddivide la struttura in domini. Spezzo la struttura in un punto generico del dominio e calcolo le reazioni interne.

3.1 Metodo differenziale

Per applicare il metodo differenziale si considera un concio infinitesimo a cui è applicato un carico. Sul concio agiranno delle forze interne.



Equilibrio verticale:

$$\begin{aligned} -T(x) + T(x + dx) - p(x)dx &= 0 \\ -T(x) + T(x) + dT - p(x)dx &= 0 \\ \frac{dT}{dx} &= p(x) \end{aligned}$$

Equilibrio del momento:

$$\begin{aligned} T(x)dx + [p(x)dx]\frac{dx}{2} - M(x) + M(x + dx) &= 0 \\ T(x)dx + dM &= 0 \\ \frac{dM}{dx} &= -T(x) \end{aligned}$$

Il termine al quadrato si semplifica in quanto o-piccolo di ordine superiore.

Arriviamo quindi alle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dx} = p(x) \\ \frac{dM}{dx} = -T(x) \\ \frac{d^2M}{dx^2} = -p(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

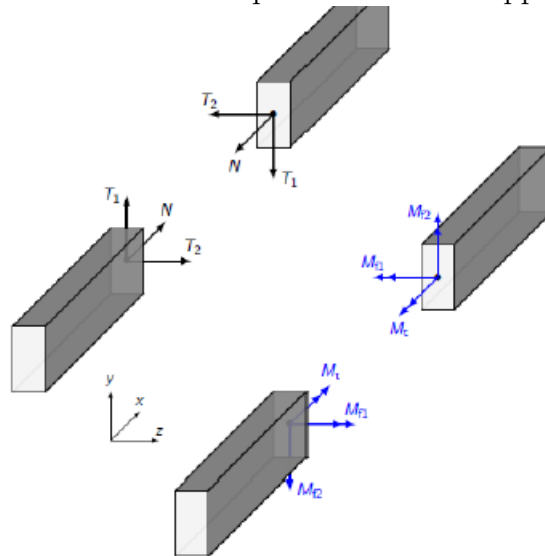
Il metodo differenziale permette una veloce verifica dei conti.

Capitolo 4

Azioni interne in tre dimensioni

Per studiare le azioni interne di corpi a tre dimensioni, bisogna studiare il piano che contiene la parte di struttura che si vuole studiare e la forza applicata.

In tre dimensioni nelle azioni interne sono presenti un'azione normale N , due azioni di taglio T_1 e T_2 , due momenti flettenti M_{f1} e M_{f2} , e il **momento torcente** che nasce dal trasporto della forza applicata.



Il momento torcente è un vettore, disegnato come doppio vettore e diretto come l'asse della trave. In generale si considera positivo il momento uscente.

Capitolo 5

Sforzo

Sforzo normale Si definisce lo sforzo normale medio come

$$\bar{\sigma} = \frac{N}{A} \quad (5.1)$$

Data una trave sottoposta ad azioni interne generiche si considera una spidica sezione Γ di area A , allora si definiscono:

- Sforzo normale medio

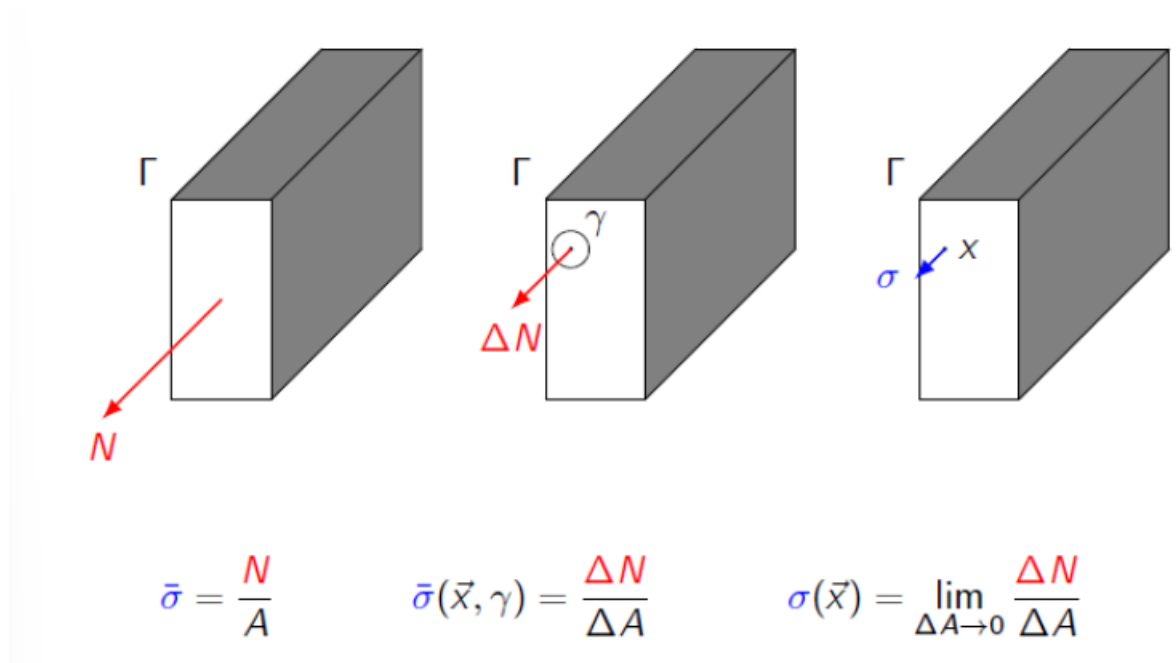
$$\bar{\sigma} = \frac{N}{A} \quad (5.2)$$

- Dato un punto $x \in \Sigma$ e dato un intorno di x di area ΔA , lo sforzo medio sull'intorno di x γ sarà

$$\bar{\sigma}(x, \gamma) = \frac{\Delta N}{\Delta A} \quad (5.3)$$

- Lo sforzo puntuale è definito come

$$\sigma(x) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} \quad (5.4)$$

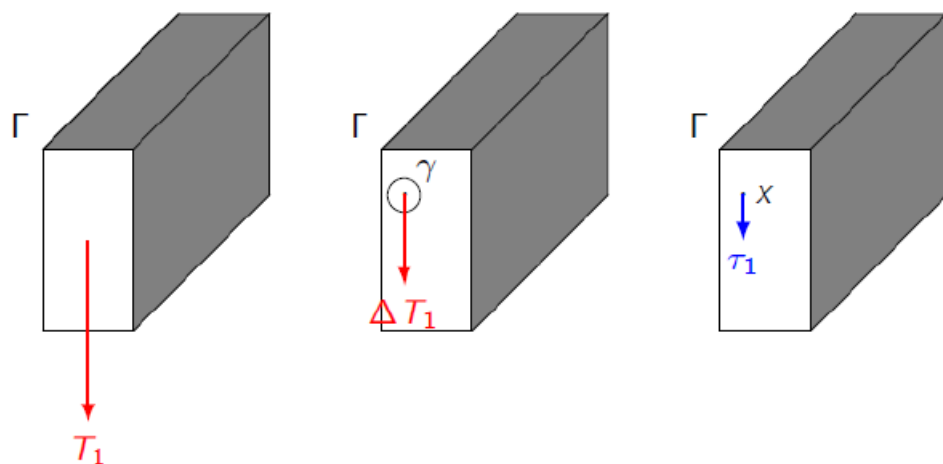


Sforzi tangenziali Lo sforzo tangenziale è definito come

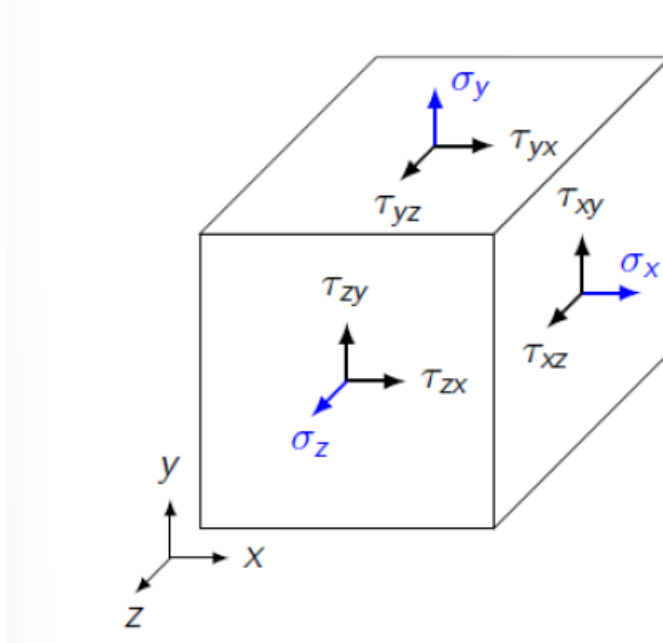
$$\bar{\tau}_i = \frac{T_i}{A} \quad (5.5)$$

$$\bar{\tau}_i(x, \gamma) = \frac{\Delta T_i}{\Delta A} \quad (5.6)$$

$$\tau_i(x) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T_i}{\Delta A} \quad (5.7)$$



Parametri dello stato di sforzo Consideriamo un concio cubico. Possiamo definire 9 parametri di sforzo ciascuno per una faccia del cubo (le altre tre facce hanno sforzi uguali di verso opposto).



Tensore degli sforzi

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Grazie al **tensore degli sforzi** puoi determinare tutti gli sforzi. Una situazione che spesso accade è che gli sforzi su una faccia del concio si annullano, quindi il tensore degli sforzi (per esempio annullando le componenti sulla faccia z) diventa:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

5.1 Stato di sforzo nel piano

Valutiamo l'equilibrio di un cubetto infinitesimo nel piano. Il volume del cubo è $V = dxdydz$. Sul cubo è applicata una forza di volume.

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ [\sigma_x(x+dx, y) - \sigma_x(x, y)]dydz \\ + [\tau_{yx}(x, y+dy) - \tau_{yx}(x, y)]dxdz \\ + f_x(x, y) \cdot dxdydz &= 0 \end{aligned}$$

Lungo y

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ [\sigma_y(x, y + dy) - \sigma_y(x, y)]dydz \\ + [\tau_{xy}(x + dx, y) - \tau_{xy}(x, y)]dydz \\ f_x(x, y) \cdot dxdydz &= 0 \end{aligned}$$

Sostituendo e semplificando $dx dy dz$ si ottengono **le equazioni indefinite di equilibrio**.

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + f_x = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

Queste equazioni servono per la definizione differenziale del problema elastico.

L'equilibrio del momento sarà

$$\begin{aligned} &[\sigma_x(x + dx, y) - \sigma_x(x, y)]dydz \frac{dy}{2} \\ &= [\sigma_x(x, y) + d\sigma(x, y) - \sigma_x(x, y)]dydz \frac{dy}{2} \\ &= d\sigma_X(x, y)dydz \frac{dy}{2} \end{aligned}$$

che è un infinitesimo di quattro ordini superiore, quindi trascurabile. Il contributo al momento delle componenti di taglio sarà

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, y)dydx \cdot dx - \tau_{yx}(x, y)dxdz \cdot dy &= 0 \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \end{aligned}$$

Quindi il tensore degli sforzi diventa simmetrico. Quindi lo stato di sforzo è definito in un punto da solamente sei componenti di sforzo. Il tensore di sforzo è simmetrico.

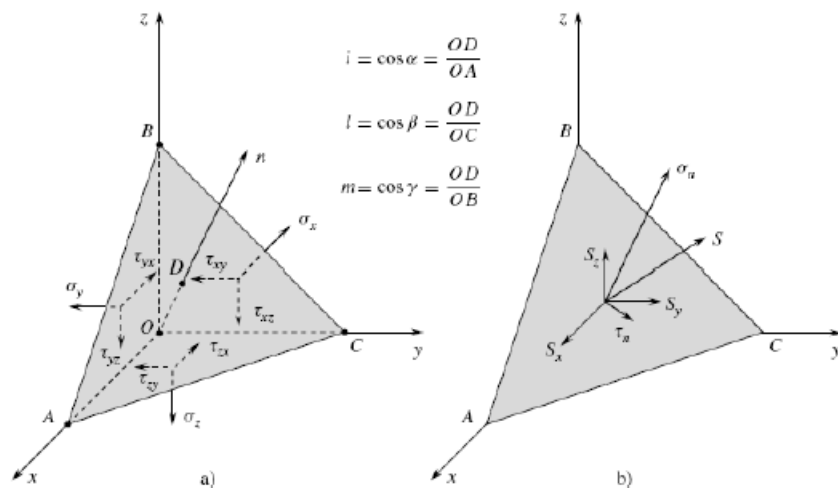
Convenzione dei segni Per gli sforzi normali lo sforzo normale è positivo se di trazione e negativo se di compressione. Per gli sforzi tangenziali si guardi la tabella qui sotto.

	n_i concorde con l'asse i	n_i discorde con l'asse i
τ_{ij} positivo	se concorde con l'asse j	se discorde con l'asse j
τ_{ij} negativo	se discorde con l'asse j	se concorde con l'asse j

5.2 Stato di sforzo per piani orientati

Lo stato di sforzo è una proprietà locale, cioè dipende da punto a punto nel corpo rigido. E' possibile studiare come le componenti di sforzo variano al variare del sistema di riferimento utilizzato. Lo stato di sforzo rimane invariato, a cambiare sono le **componenti dello stato di sforzo**.

Tetraedro di Cauchy Il tetraedro è formato tagliando per la diagonale un cubo, in modo da formare una nuova faccia. Il nostro obiettivo è studiare le componenti dello sforzo rispetto a \hat{n} , il vettore normale alla superficie considerata.



Il nuovo sforzo sarà $\bar{S} = \bar{\sigma}_n + \bar{\tau}_n$ rispetto al nuovo piano, oppure $\bar{S} = \bar{S}_x + \bar{S}_y + \bar{S}_z$. Inoltre si denotano

$$i = \cos \alpha = \frac{OD}{OA}$$

$$l = \cos \beta = \frac{OD}{OC}$$

$$m = \cos \gamma = \frac{OD}{OB}$$

con D il punto in cui è applicato lo sforzo S e α è l'angolo tra x e S , β è l'angolo tra y e S e γ è l'angolo tra z e S . La condizione di equilibrio è che la sommatoria delle forze è nulla lungo tutti gli assi.

$$\begin{cases} S_x = \sigma_x i + \tau_{yx} l + \tau_{zx} m \\ S_y = \tau_{xy} i + \sigma_y l + \tau_{zy} m \\ S_z = \tau_{xz} i + \tau_{yz} l + \sigma_z m \end{cases} \quad (5.10)$$

Il sistema può essere sintetizzato nella forma $\bar{S} = \bar{\sigma} \cdot \hat{n}$. Dove \hat{n} è il versore del piano tagliato, $\bar{\sigma}$ è il tensore degli sforzi e \bar{S} è lo sforzo rispetto al nuovo sistema di riferimento. Quindi si ha che

$$\sigma_n = \hat{n}^T \cdot \bar{S} = \hat{n}^T \cdot \bar{\sigma} \cdot \hat{n} \quad (5.11)$$

$$\tau_n = \sqrt{|\bar{S}|^2 - \sigma_n} \quad (5.12)$$

In cui σ_n è chiamato sforzo normale e τ_n è lo sforzo tangenziale.

5.3 Sforzi principali

Immaginiamo di ruotare il nostro cubo infinitesimo, o ruotare il sistema di riferimento. Le componenti del tensore degli sforzi cambiano e per alcuni sistemi di riferimento si ha che rimangono solamente le componenti di trazione o compressione. Quindi la matrice del tensore è diagonale, e **i tre sforzi sono ortogonali tra loro** e sono chiamati **sforzi principali**. Se gli sforzi sono principali, allora si ha che $\bar{S} = S \cdot \hat{n}$. Lo sforzo normale invece sarà

$$\sigma_n = \hat{n}^T \cdot \bar{S} \quad (5.13)$$

Quindi si ha che

$$\bar{\sigma} \cdot \hat{n} = S \hat{n} \quad (5.14)$$

$$(\bar{\sigma} - S \bar{I}) \cdot \hat{n} = 0 \quad (5.15)$$

$$\det(\bar{\sigma} - S \bar{I}) = 0 \quad (5.16)$$

Ovvero è un problema di **autovalori**. Denotiamo $S = \sigma_p$ come sforzo perpendicolare.

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - S & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - S & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - S \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Ovvero si ha che $\sigma_p^3 - I\sigma_p^2 - I_2\sigma_p - I_3 = 0$.

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \tau_{xy} + \tau_{yz} + \tau_{zx} - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x\tau_{yz}^2 + \sigma_y\tau_{zx}^2 + \sigma_z\tau_{xy}^2)$$

Ovvero prima risolviamo rispetto allo sforzo perpendicolare $\sigma_p = S$. Ovvero si hanno $\infty^{3-2} = \infty$ soluzioni, in quanto \hat{n} può assumere qualsiasi valore. Le soluzioni sono tre autovalori chiamati **sforzi principali**. Per trovare

un'unica soluzione bisogna imporre la condizione sul versore \hat{n} che deve avere modulo uno:

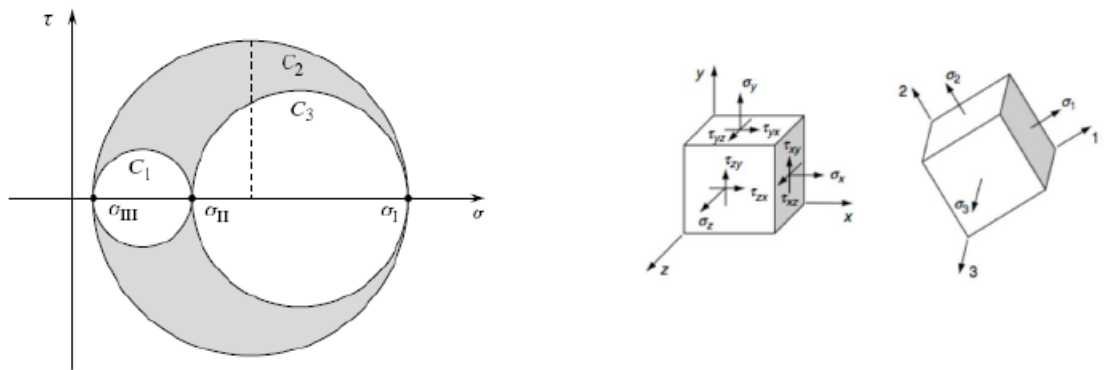
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (5.18)$$

e quindi si ha che

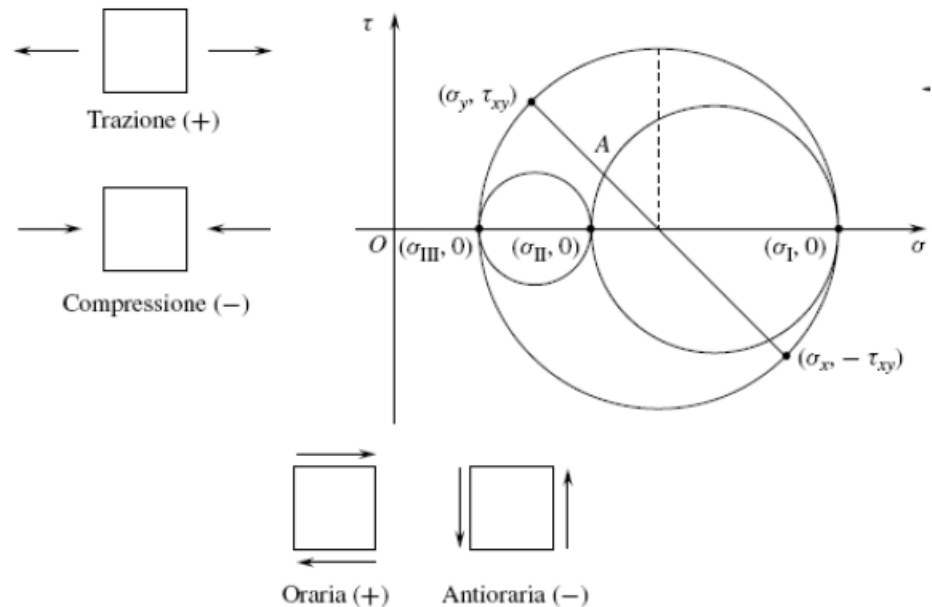
$$\bar{\bar{\sigma}}_n = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

5.4 Cerchio di Mohr

Il cerchio di Mohr è un metodo grafico per trovare gli sforzi principali. Per farlo si utilizza il piano $\tau - \sigma$ in cui sono presenti tre circonferenze che intersecano l'asse in corrispondenza degli sforzi principali.



Attraverso i cerchi di Mohr è possibile stabilire il campo di esistenza degli sforzi, rappresentati dall'area grigia. Invece le circonferenze rappresentano gli sforzi in cui **la normale è perpendicolare alla direzione principale non coinvolta**. Per disegnare i cerchi di Mohr bisogna utilizzare una specifica convenzione per gli sforzi.



Molto spesso per le comuni applicazioni le componenti della faccia il cui asse è uscente o entrante dal piano sono nulle:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

In questi casi lo stato di sforzo è definito **piano**. Attraverso le basi della geometria si possono trovare gli sforzi principali.

$$\sigma_I, \sigma_{II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Si ricorda che se ruotiamo il cubo di un angolo α nel piano x-y, nel piano di

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Mohr si avrà invece una rotazione di 2α .

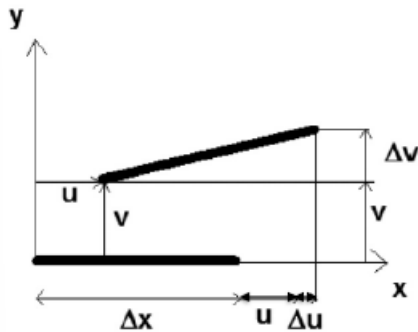
Capitolo 6

Deformazione e problema elastico

Si definisce la **deformazione ingegneristica** media come

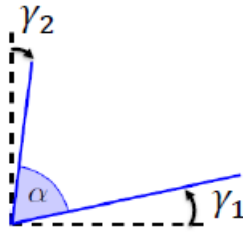
$$\bar{\epsilon} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (6.1)$$

e la deformazione ingegneristica indica la variazione di lunghezza di un corpo rispetto la lunghezza iniziale. Una fibra infinitesima può subire una deformazione infinitesima lungo il piano x-y.



Lungo x lo spostamento infinitesimo sarà: $\Delta u = u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z)$. Quindi la deformazione in direzione x con $\Delta x \rightarrow 0$ sarà $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$. Analogamente lungo y e lungo z è possibile definire la deformazione ingegneristica $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$.

In modo analogo alla deformazione della lunghezza esiste anche una **rotazione relativa**.



E si definisce lo **scorrimento angolare** $\gamma_{xy} = \pi/2 - \alpha = \gamma_1 + \gamma_2$. Lo scorrimento angolare indica di quanto diminuisce l'angolo originariamente retto tra due segmenti.

Per piccoli angoli si ha che $\gamma_1 \approx \tan \gamma_1 = \frac{\Delta v}{\Delta x}$. Quindi si ha che $\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x}$ e $\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$. Quindi si ha che

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.2)$$

In modo analogo si ha che

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned}$$

Tensore delle deformazioni Abbiamo dunque sei componenti dello stato di deformazione di un punto ed è possibile stabilire un tensore delle deformazioni.

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

In cui i termini extra-diagonali sono equivalenti a metà degli angoli di scorrimenti, per esempio $\epsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2}$.

La deformazione è definita come un tensore simmetrico del secondo ordine. Per definire il tensore delle deformazioni o si segue un approccio geometrico come sopra. oppure è possibile definire il tensore a partire dalle equazioni del continuo deformabile. In questo tensore gli angoli di scorrimento sarebbero stati divisi per due, per definire i termini extra-diagonali.

6.1 Legge di Hooke

Dato uno sforzo σ e la deformazione ϵ tramite la legge di Hooke esiste una proporzionalità diretta tra sforzo e deformazione:

$$\sigma = E\epsilon \quad (6.4)$$

in cui E è definito come **modulo di Young**. Per gli acciai al carbonio si ha che $E \approx 200GPa$ e per l'alluminio $E \approx 70GPa$.

Mediante la legge di Hooke si può valutare la deformazione di un provino cilindrico sottoposto ad uno sforzo, quindi $\epsilon = \frac{\sigma_x}{E}$. Tuttavia la deformazione a causa del fenomeno di strizione sarà presente anche ϵ_y e ϵ_z . Le deformazioni lungo y e z saranno:

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} \end{aligned}$$

dove ν è il **coefficiente di Poisson** ed è il parametro che regola l'influenza delle deformazioni trasversali. Le gomme vulcanizzate hanno $\nu = 0.49$, l'alluminio ha $\nu = 0.35$ e l'acciaio al carbonio $\nu = 0.29$. Quindi è possibile definire le deformazioni date da uno sforzo assiale come

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (6.5)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (6.6)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (6.7)$$

E' possibile dimostrare attraverso i cerchi di Mohr per le deformazioni che gli angoli di scorrimento sono

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \quad (6.8)$$

e si definisce il **modulo di elasticità tangenziale** come

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.9)$$

quindi si ha che $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$. Nei materiali isotropi e le deformazioni finchè non ci si avvicina ai limiti in cui inizia lo snervamento, le deformazioni sono

funzioni lineari degli sforzi assiali.

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \\ \gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz} \end{cases} \quad (6.10)$$

e queste equazioni indicano il **legame costitutivo**.

6.2 Il problema elastico

- Equazioni indefinite di equilibrio nel piano 2D, equazioni dell'equilibrio del corpo:

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) = f_x \\ -\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right) = f_y \end{cases} \quad (6.11)$$

- Legame costitutivo, ovvero legge di Hooke:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

- Compatibilità, legami per piccoli spostamenti e piccole deformazioni nel piano 2D:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy} \end{cases} \quad (6.13)$$

Capitolo 7

De Saint-Venant

L'insieme di equazioni indefinite di equilibrio, le equazioni del legame costitutivo e la compatibilità degli spostamenti si legano al **problema elastico**. De Saint-Venant risolve il problema molto complesso per alcuni casi specifici, in particolare per **travi snelle**, e utilizza un approccio agli sforzi.

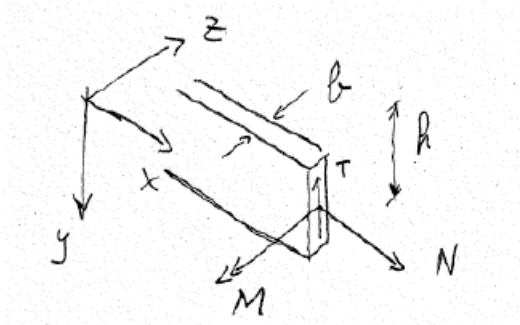
De Saint-Venant utilizza le equazioni del legame costitutivo riscrivendole attraverso gli sforzi. Questo approccio è valido per corpi **non** vincolati. Le equazioni valide per travi vincolate sono dette **equazioni di Mitchell-Beltrami** ma la difficoltà del loro utilizzo è porre le condizioni al contorno.

7.1 Ipotesi

La geometria dei corpi in cui è possibile utilizzare la teoria di Saint-Venant è una trave snella (lunghezza maggiore della larghezza), trave ad asse rettilineo e con **sezione costante**.

Il materiale deve avere una deformazione elastica lineare, deve essere omogeneo ed isotropo. I corpi devono essere soggetti a forze di volume nulle, a forze di superficie agenti sulle basi (faccia iniziale e faccia finale) e le ricerche della soluzione devono essere sufficientemente lontane dai punti di applicazione dei carichi. Il corpo deve essere in equilibrio e il sistema di riferimento deve essere **principale di inerzia**.

Soluzione Sia data una trave a sezione rettangolare $b \times h$, caricata nel piano xy da N, M, T . Per semplicità poniamo $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.



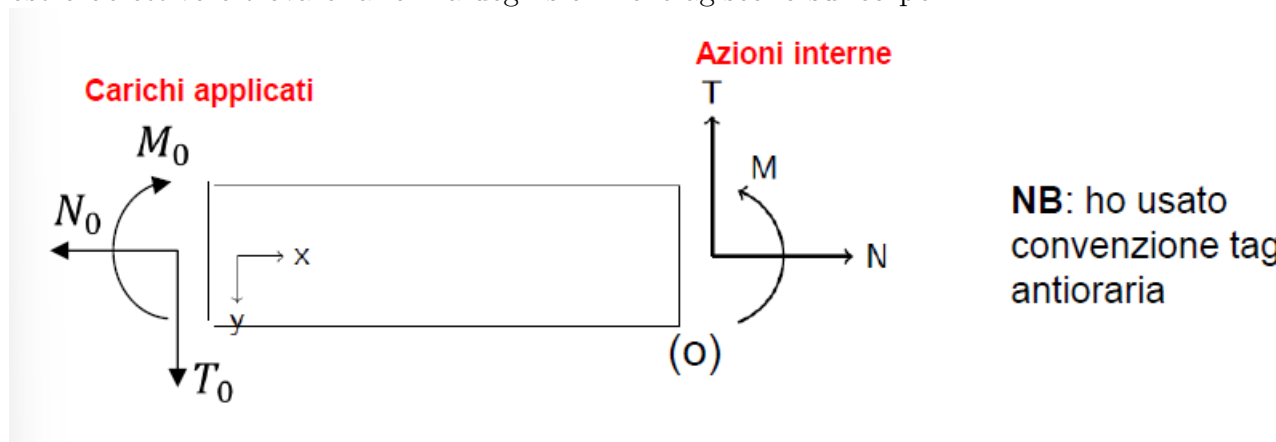
Poichè le deformazioni elastiche sono lineari vale il principio di **sovrapposizione lineare degli effetti**, quindi possiamo studiare il problema in sedi separate: prima assiale, poi di taglio e poi flessionale e torsione.

Vale anche il principio di **equivalenza elastica**, formulato per primo da de Saint-Venant. Tale principio afferma che le distribuzioni di sforzi agenti sulle sezioni della trave dipendono solamente **dalla risultante dei carichi applicati alle basi** e dalle conseguenti azioni interne, e non dai carichi esterni, purchè ci si trovi ad una distanza sufficiente dai punti di applicazione dei carichi.

Il principio di equivalenza elastica permette di rappresentare le azioni interne quali integrali degli sforzi.

$$\begin{cases} N(x) = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x(x, y) dy \\ T(x) = -b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}(x, y) dy \\ M(x) = b \int_{-h/2}^{h/2} y \sigma_x(x, y) dy \end{cases} \quad (7.1)$$

Il nostro obiettivo è trovare la forma degli sforzi che agiscono sul corpo.



Si ha che $N = N_0$ e $M = M_0 - xT_0$. De Saint-Venant trova una soluzione per σ_x che rispetti l'equilibrio e la congruenza interna:

$$\sigma_x = a + a_2y - xb_2y = a + y(a_2 - xb_2) \quad (7.2)$$

Inserendo tale soluzione nella forma integrale delle azioni interne si ha che

$$N = \int \sigma_x dA = b \int_{-h/2}^{h/2} a + y(a_2 - xb_2) dy = abh = aA \quad (7.3)$$

$$M = \int y\sigma_x dA = b \int_{-h/2}^{h/2} [ya + y^2(a_2 - xb_2)] dy = (a_2 - xb_2)J_{zz} \quad (7.4)$$

dove J_{zz} è il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrico z . Quindi abbiamo che

$$\begin{cases} N = N_0 = aA \\ M = M_0 - xT_0 = (a_2 - xb_2)J_{zz} \end{cases} \quad (7.5)$$

quindi si ha che $a = N_0/A$ e $a_2 = M_0/J_{zz}$ e $b_2 = T_0/J_{zz}$. Sostituendo nell'espressione di σ_x si ha che

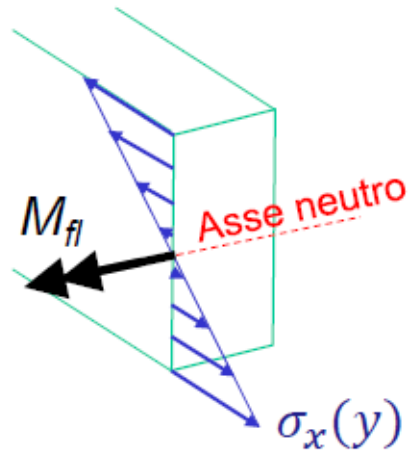
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \left(\frac{M}{J_{zz}}\right)y \quad (7.6)$$

Si è quindi trovata l'espressione dello sforzo in funzioni delle azioni interne assiale e il momento flettente in uno stato piano di sforzo. In modo analogo si può trovare un'espressione che lega tagli e momento torcente agli sforzi di taglio τ .

7.2 Flessione-linea elastica

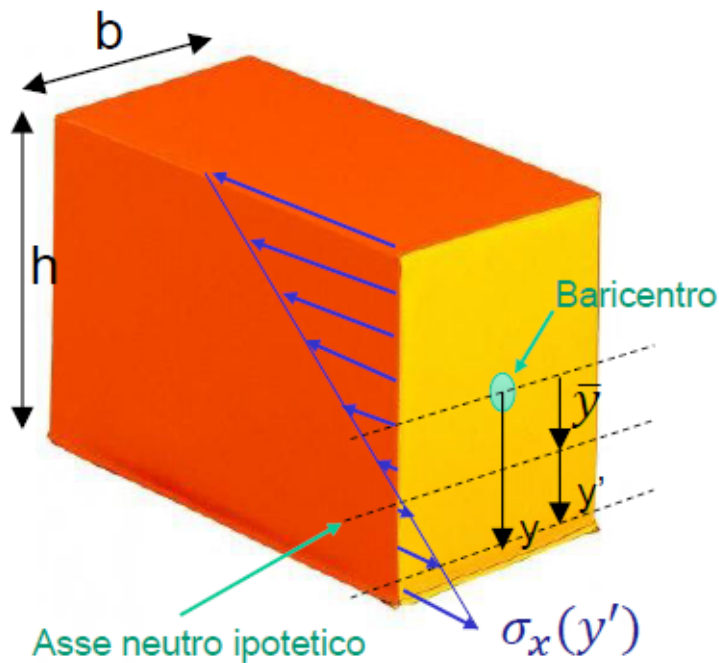
In seguito ad una flessione nascono degli sforzi che devono essere calcolati. Lo sforzo causato dal momento flettente è dato dalla formula di **Navier**

$$\sigma_x = \left(\frac{M}{J_{zz}}\right)y \quad (7.7)$$



Esiste un asse detto **asse neutro** per cui le fibre non sono ne tese ne compresse sotto l'effetto del momento flettente. Si dimostra che l'asse neutro passa per il baricentro geometrico della sezione. Essendo applicato solo momento flettente si ha che

$$N = \int_a \sigma_x dA = 0 \quad (7.8)$$



Per studiare l'orientazione dello sforzo causato dal momento flettente si utilizza un sistema di riferimento principale di inerzia. Lo sforzo massimo sarà agli estremi della sezione. Si dimostra che per una sezione circolare si ha

$$J_{zz} = \frac{\pi D^4}{64} \quad (7.9)$$

$$\sigma_x = \frac{32M}{\pi D^3} \quad (7.10)$$

e per una sezione rettangolare si ha

$$J_{zz} = \frac{bh^3}{12} \quad (7.11)$$

$$\sigma_x = \frac{6M}{bh^2} \quad (7.12)$$

7.3 Curvatura

Una trave snella sotto un momento di flessione avrà una certa curvatura causata dalla deformazione e sarà uniforme di raggio ρ . La curvatura quindi è $k = \frac{1}{\rho}$. Per piccoli spostamenti si ha che

$$k \approx -\frac{d^2v}{dx^2} \quad (7.13)$$

In presenza di un carico distribuito in modo trasversale $p(x)$ si hanno:

- **Equilibrio**, ovvero legame tra carico distribuito e azione interna di momento flettente.

$$-\frac{d^2M}{dx^2} = p(x) \quad (7.14)$$

- **Principio di Saint-Venant e legame costitutivo:**

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} y\sigma_x(y)b dy \quad (7.15)$$

con $\sigma_x(y) = E\epsilon_x(y)$.

- **Compatibilità e geometria:**

$$\epsilon_x(y) = -y\frac{d^2v}{dx^2} \quad (7.16)$$

Quindi si risolve il problema elastico con **l'equazione della linea elastica**:

$$EJ_{zz} \frac{d^4 v}{dx^4} = p(x) \quad (7.17)$$

e anche

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{p(x)}{EJ} \quad (7.18)$$

Dove questa è un'equazione differenziale al quarto ordine che possiamo risolvere integrando mettendo condizioni al contorno per trovare le costanti di integrazione.

7.4 Azione assiale

Esistono organi di macchine e componenti di strutture caratterizzati dalla sola presenza della sola azione assiale N applicata nel baricentro della sezione. Alcuni organi possono essere bulloni, tiranti o bielle.

Questi organi spesso possono essere rappresentati idealmente da solidi ad asse rettilineo e sezione costante, ovvero travi snelle (ipotesi di De Saint Venant).

Lo stato di sforzo Poichè tutte le parti del corpo sono in equilibrio, data una forza assiale N allora sarà presente una forza interna N di stesso modulo ma verso opposto. Questa forza assiale interna sarà data dal contributo di tutti i punti appartenenti alla sezione della trave. In particolare si definisce uno **stato di sforzo** di un punto, che serve per definire l'azione assiale agente sulla sezione:

$$N = \int_A \sigma_x A \quad (7.19)$$

Consideriamo quindi una trave a sezione costante sollecitata da un carico assiale N . L'altezza della trave è h e il sistema di riferimento preso è un sistema principale di inerzia. Quindi possiamo definire :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x = \frac{N}{A} \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{N}{EA} \\ \epsilon_y = -\nu \frac{N}{EA} \\ \gamma_{xy} = 0 \end{array}$$

Per esempio considerando un'azione assiale costante nel tratto di interesse, le deformazioni lungo x e y saranno date dall'integrale delle deformazioni

percentuali lungo il tratto scelto:

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \frac{N}{EA}x + C_1 \\v(x, y) &= -\nu \frac{N}{EA}y + C_2\end{aligned}$$

Per trovare le costanti di integrazione bisogna porre condizioni al contorno. Per semplicità vengono rappresentate solamente le deformazioni e gli sforzi riferiti all'asse, e non a tutti i punti della sezione della trave, questo perchè utilizziamo un sistema di riferimento principale di inerzia. Quindi per $y = 0$ si ottiene che:

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= \frac{N}{EA}x + C_1 \\v(x, 0) &= +C_2\end{aligned}$$

mentre gli sforzi e deformazioni sono

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{N8x}{A} \\ \epsilon_x &= \frac{N(x)}{EA}\end{aligned}$$

Sottolineando che sia σ_x che ϵ_x sono distribuiti in modo uniforme sulla sezione A della trave, e quindi non dipendono da y e da z .

Azione assiale distribuita Nel caso di un'azione assiale distribuita lungo la lunghezza della trave per unità di lunghezza $f_l(x)$ si definisce l'azione assiale come

$$f_l(x) = -\frac{dN}{dx} \quad (7.20)$$

Il meno è presente perchè l'azione assiale è opposta alle azioni interne. Quindi utilizzando l'equazione precedente che lega le deformazioni con l'azione assiale, ovvero l'equazione che descrive il legame costitutivo, si ha che

$$\epsilon_x(x) = \frac{N(x)}{EA} \quad (7.21)$$

L'equazione di congruenza o compatibilità sarà

$$\frac{du}{dx} = \epsilon_x(x) \quad (7.22)$$

Quindi si arriva all'**equazione agli spostamenti** che descrive la **linea elastica assiale**:

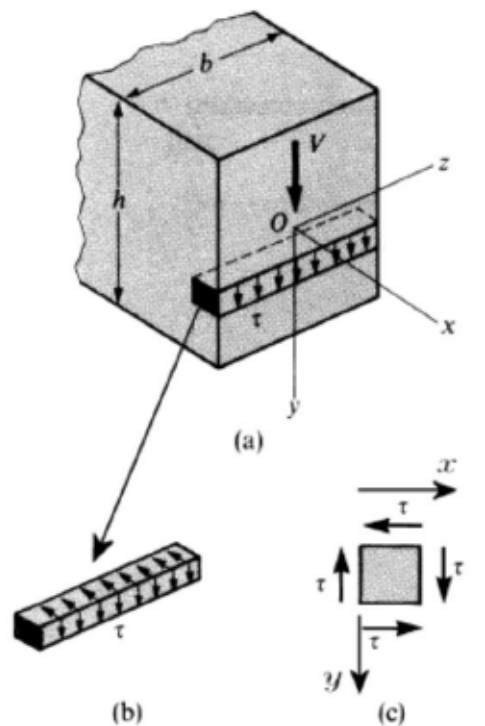
$$EA \frac{d^2u}{dx^2} = -f_l(x) + c.c. \quad (7.23)$$

7.5 Azione di taglio

Nel caso in cui su una trave snella agisce solamente momento flettente puro siamo in grado di definire la deformata, in particolare poichè $T = -dM/dx$ se $M = cost$ allora l'azione di taglio è nulla.

Nel caso sia presente un'azione di taglio vale il **principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti** quindi bisogna sommare l'azione causata dal taglio a quella causata dal momento flettente. In particolare il taglio aggiunge allo stato di sforzo σ_x una **nuova distribuzione di sforzi tangenziali** detti di **scorrimento** o di **taglio**.

Come prima cosa dobbiamo quindi definire lo stato di sforzo di taglio, imporre delle condizioni al contorno e infine definire le deformazioni e gli spostamenti. La distribuzione delle sollecitazioni di taglio dipende dalla forma della sezione, il caso più semplice dunque corrisponde a sezioni **compatte e simmetriche**.

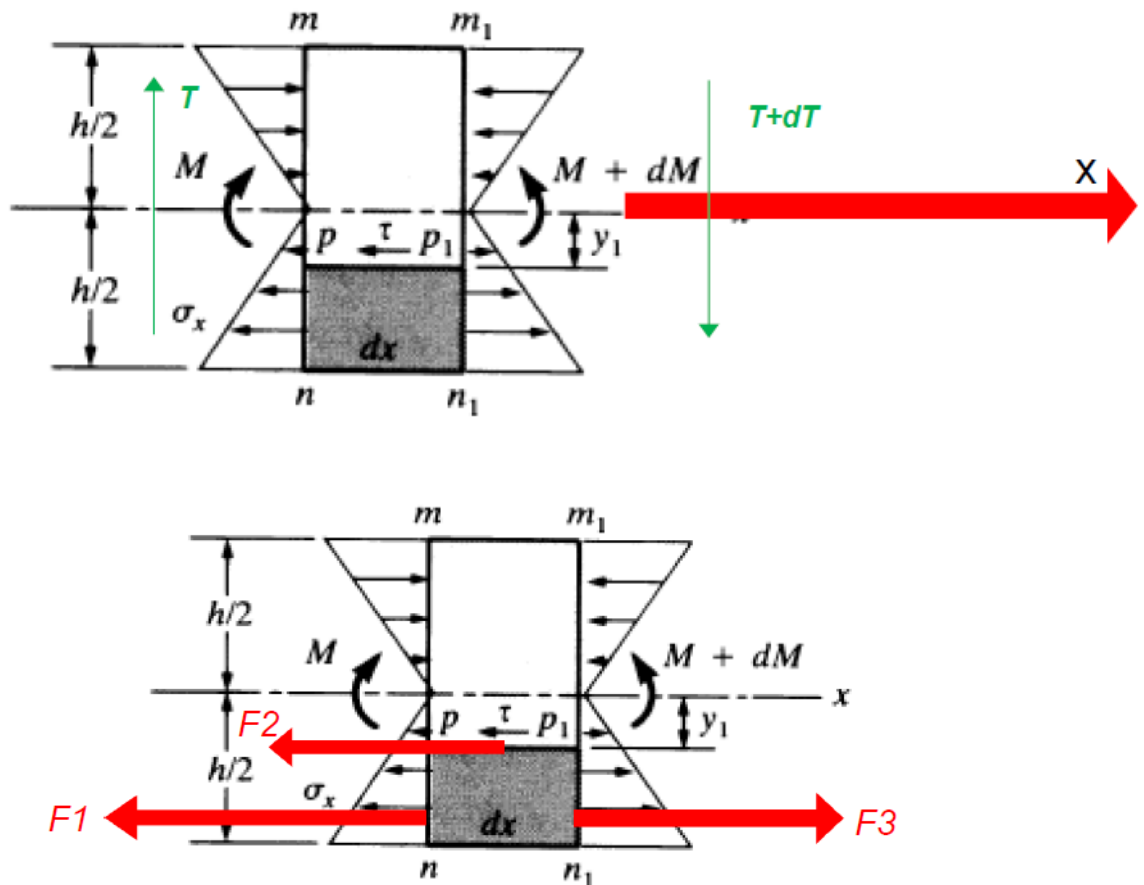


Consideriamo una sezione rettangolare rispetto un sistema di riferimento principale di inerzia. Si ipotizza che la distribuzione degli sforzi di taglio rimane costante lungo qualsiasi corda perpendicolare alla direzione di carico.

AI bordi della sezione gli sforzi sono tangenti e diretti parallelamente alla forza di taglio.

Affinchè la corda scelta rimanga in equilibrio rispetto alla rotazione sull'asse z gli sforzi di taglio generati sulla faccia perpendicolare all'asse x detti τ_{xy} avranno dei corrispettivi τ_{yx} , ovvero sforzi di taglio perpendicolari all'asse y e presenti sulla sezione della corda con faccia verso l'alto. In modo analogo su tutte le sezioni della corda saranno presenti degli sforzi che si annullano vicendevolmente.

Per trovare la distribuzione degli sforzi τ è sufficiente imporre l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse x .



Poichè sulla trave agisce una forza di taglio sarà presente un momento flettente M su una faccia e $M + dM$. Il momento flettente causa uno sforzo σ_x sulle facce np e n_1p_1 . Gli sforzi a loro volta danno origine alle forze F_1 e F_3 . Lo sforzo di taglio τ invece dà origine ad una forza F_2 sulla faccia pp_1 .

Non sono considerati gli sforzi di taglio sulle facce verticali in quanto non contribuiscono alla traslazione orizzontale. Poichè è presente un incremento di momento tra le due facce anche gli sforzi assiali saranno diversi, perciò bisogna porre una condizione di equilibrio.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x dA &= \frac{My}{J_{zz}} dA \\ \sigma_x dA &= \frac{(M+dM)y}{J_{zz}} dA \\ \tau \end{aligned} \right| \begin{aligned} F_1 &= \int_{A(y_1)} \frac{My}{J_{zz}} dA \\ F_3 &= \int_{A(y_1)} \frac{(M+dM)y}{J_{zz}} dA \\ F_2 &= \tau b dx \end{aligned}$$

La condizione di equilibrio sarà:

$$F_2 = F_3 - F_1 \quad (7.24)$$

$$\tau b dx = \int_{A(y_1)} \frac{(M+dM)y}{J_{zz}} dA - \int_{A(y_1)} \frac{My}{J_{zz}} dA \quad (7.25)$$

$$\rightarrow \tau = \frac{dM}{dx} \left(\frac{1}{Jb} \right) \int_{A(y_1)} y dA \quad (7.26)$$

Dove l'integrale nella definizione dello sforzo di taglio rappresenta il momento statico rispetto all'asse baricentrico z della porzione di sezione sottesa dalla corda alla distanza y_1 dall'asse z e si indica con la lettera S . Poichè è vero che $T = dM/dx$ si arriva alla **formula di Jourawski**:

$$\tau = \frac{TS(y_1)}{J_{zz}b} \quad (7.27)$$

In particolare poichè per le ipotesi di De Saint Venant gli sforzi di taglio sono nulli agli estremi, si ha che il momento statico sarà nullo per $y = \pm h/2$.

Il momento statico si calcola come

$$S = b \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \left(y_1 + \frac{\frac{h}{2} - y_1}{2} \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (7.28)$$

quindi si ha che

$$\tau = \frac{T}{2J} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \quad (7.29)$$

L'andamento dello sforzo di taglio è parabolico con un massimo in corrispondenza dell'asse neutro e sollecitazioni nulle agli estremi.

Nel caso di sezioni non rettangolari per le proprietà degli sforzi di taglio coniugati sulle facce laterali non possono esistere sforzi di taglio quindi in corrispondenza dei bordi gli sforzi sono tangenti. Per questo motivo la formula

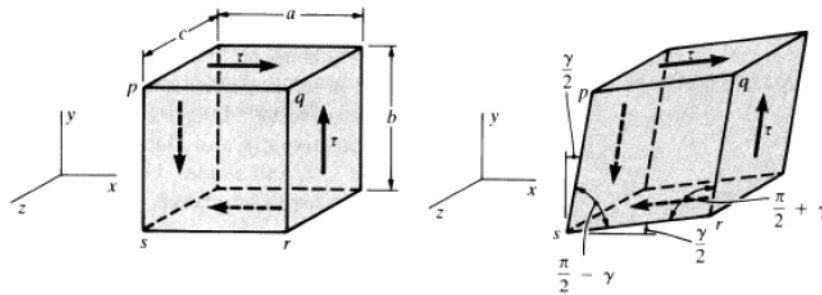
di Jourawski si può applicare su travi a sezione circolare per determinare gli sforzi di taglio al diametro, ovvero dove sono massimi, in particolare **per le sezioni circolari si ha che**

$$\tau_{max} = \frac{TS}{Jb} = \frac{4T}{3A} \quad (7.30)$$

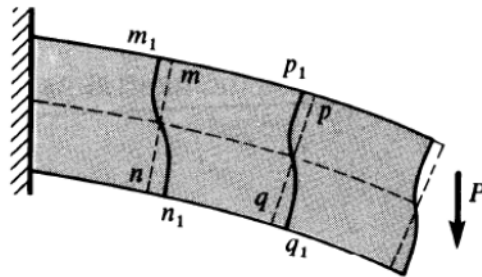
dove $J = 2r$ e $S = 2r^3/3$. Per i materiali elastici lineari la legge di Hooke per il taglio esprime la proporzionalità tra τ e γ per mezzo della costante G detta modulo d'elasticità tangenziale:

$$\tau = G\gamma$$

$$G = \frac{E}{(2 + 1)\nu}$$



In una sezione rettangolare di una trave soggetta a taglio costante le γ seguono l'andamento delle τ per cui $\gamma = \tau/G$. Poichè gli sforzi di taglio non sono uguali in tutti i punti della sezione, questa che prima era piana subirà un ingobbamento.



L'ingobbamento è caratterizzato da un punto di flesso in corrispondenza dello sforzo di taglio massimo. mentre alle estremità essendo $\gamma = 0$ il profilo della sezione si mantiene perpendicolare alle superfici superiore ed inferiore.

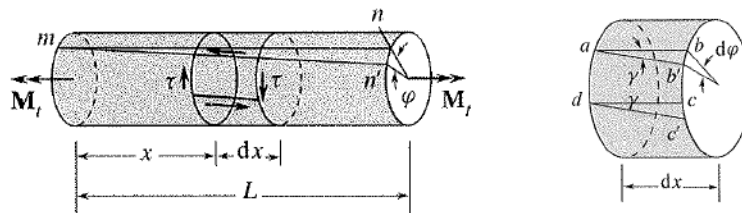
L'effetto dovuto al momento flettente è predominante dall'effetto di taglio e lo spostamento in y della linea media è nullo. Per questo motivo la linea elastica trascura gli effetti del taglio per la determinazione degli spostamenti.

7.6 Torsione

Sistemi di forze fuori asse o momenti diretti come l'asse longitudinale di un solido generano momenti di torsione. Esempi di momenti di torsione sono generati sugli alberi di veicoli, eliche, alberi di macchine utensili, componenti di sforzo di veicoli terrestri e viti (durante il serraggio). L'obiettivo è capire che sforzi nascono a partire dal momento di torsione e le conseguenti deformazioni e spostamenti.

Per determinare una definizione allo sforzo causato dal momento di torsione si parte dalle equazioni di **compatibilità e congruenza**. Ovvero si definisce lo spostamento o deformazione di un solido sottoposto a torsione, si ricavano le deformazioni, tramite legame costitutivo ricaviamo gli sforzi e li leghiamo al momento torcente applicato.

Si suppone a causa della simmetria e geometria che le sezioni piane ruotino in modo rigido attorno all'asse di rotazione longitudinale. Ovvero le sezioni rimangono piane, i segmenti radiali rimangono rettilinei e se gli spostamenti sono piccoli anche la lunghezza dell'asse non cambia.

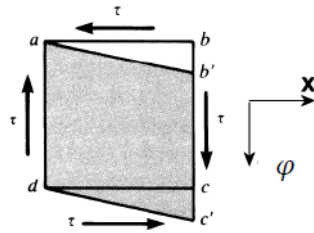


L'angolo di rotazione è denominato con la lettera greca ϕ . Per elementi infinitesimi la rotazione relativa diventa $d\phi$. Un elemento di area $abcd$ si deforma a causa del momento torcente. La deformazione è quantificata rispetto l'angolo $\gamma = bb'/ab$. Si ha che $\gamma dx = d\phi R$, quindi si ha

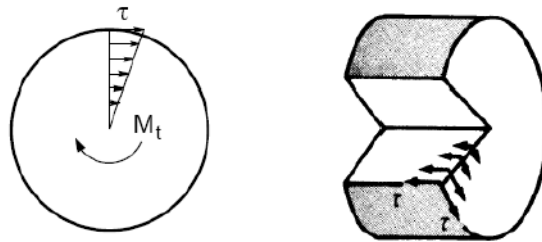
$$\gamma = R \frac{d\phi}{dx} = R\Phi \quad (7.31)$$

e denotiamo con Φ l'angolo **unitario di torsione** che indica la variazione dell'angolo di rotazione relativa rispetto la lunghezza dell'asse.

Ricordando ora le legge di Hooke per un elemento infinitesimo si ha che $\tau = G\gamma = GR\Phi$. Quindi per un punto qualsiasi posto alla generica distanza radiale r dell'asse x poichè i segmenti radiali si mantengono rettilinei si ha che $\tau = Gr\Phi$.



Gli sforzi τ sono diretti circonfenzialmente in ogni punto della sezione, e variano in base alla distanza dall'asse longitudinale. Sono presenti anche le componenti longitudinali dello sforzo.



un elemento di area dA corrisponde ad un arco infinitesimo dell'anello di raggio r e altezza dr ed è soggetto da una forza circonfenziale τdA il cui momento varrà $\tau r dA$.

per il secondo principio di equivalenze elastica (Principio di De Saint Venant) si ottiene che

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A \tau dS r = \int_A G r \Phi r dA \\ &= \int_A G \Phi r^2 dA = G \Phi \int_A r^2 dA = G \Phi J_p \end{aligned}$$

Dove J_p è il momento polare di inerzia della sezione. Per una sezione circolare piena si ha che $J_p = \pi D^4/32$ e quindi $\tau_{max} = 16M_t/\pi D^3$. L'angolo unitario di torsione sarà quindi $\Phi = M_t/GJ_p$ e la rotazione relativa invece $\phi = M_t L/GJ_p$. In particolare il rapporto GJ_p/L prende il nome di **rigidezza torsionale** e rappresenta il momento necessario per ottenere un angolo di rotazione unitario.

Per le sezioni circolare cave invece $J_p = \pi/32 * (d_2^4 - d_1^4)$. Il vantaggio delle sezioni circolari è il miglior impiego del materiale, utilizzato nelle zone maggiormente sollecitate.

Capitolo 8

Verifica di resistenza statica dei materiali metallici

Per verificare la resistenza di un componente metallico bisogna controllare il parametro indice dello sforzo di un materiale. Questo parametro deve essere minore di un valore ammissibile definito in base al materiale.

Poichè i dati di resistenza del materiale sono relativi nella maggior parte delle volte in prove di trazione semplice, per confrontare lo sforzo del materiale con la prova di trazione monoassiale serve un criterio equivalente. Si definisce lo **sforzo equivalente** che rende equivalente rispetto al pericolo di cedimento a trazione tutti gli stati di sforzo con lo stesso valore equivalente. Lo sforzo equivalente **deve essere invariante rispetto al sistema di riferimento**, quindi esprimibile attraverso gli sforzi principali, deve avere una corrispondenza sperimentale e deve dipendere da meccanismi di cedimento del materiale.

Nei materiali fragili il valore di cedimento è lo sforzo a rottura, per i materiali duttili il valore di cedimento è lo sforzo a snervamento.

8.1 Materiali fragili

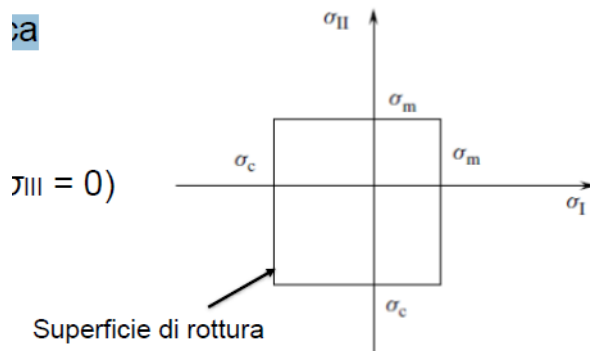
8.1.1 Criterio di Galileo-Rankine-Navier

I materiali fragili si rompono per distacco, perpendicolarmente alla massima sollecitazione (rottura trans-granulare o inter-granulare). La grandezza indice del pericolo in questo criterio è la massima sollecitazione principale, sono quindi equivalenti rispetto al pericolo di cedimento tutti gli stati di sforzo

che presentano uguale sforzo principale massimo. In modo analogo questo vale per la compressione.

$$\sigma_{p,max} \leq \frac{\sigma_m}{\eta}$$

$$|\sigma_{p,max}| \leq \frac{|\sigma_c|}{\eta}$$



Affinchè il materiale non abbia cedimento a trazione questo deve stare all'interno dell'area evidenziata dagli sforzi limite.

8.2 Materiali Duttili

8.2.1 Criterio di Guest-Tresca

Secondo il Criterio di Guest-Tresca i materiali duttili raggiungono cedimento per scorrimento per effetto delle sollecitazioni tangenziali. La grandezza indice del pericolo è dunque il massimo sforzo tangenziale che si raggiunge per piani inclinati di 45 gradi.

$$\tau_{max} \leq \frac{\tau_{sn}}{\eta}$$

Per calcolare lo sforzo tangenziale massimo di snervamento si utilizza il cerchio di Mohr. Ruotando il cerchio di 2α pari a 90 gradi si trova lo sforzo tangenziale massimo, che quindi corrisponde ad una direzione di 45 gradi.

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{p,max} - \sigma_{p,min}}{2} \leq \frac{\sigma_{sn}}{2\eta}$$

$$\sigma_{GT} = \sigma_{p,max} - \sigma_{p,min} \leq \frac{\sigma_{sn}}{\eta}$$

In stato piano di sforzo:

Negli elementi meccanici, per le situazioni più frequenti di carico, capita spesso di conoscere una direzione principale derivante dal fatto che esiste almeno una superficie scarica

Consideriamo $\sigma_{III} = 0$ e determiniamo il luogo dei punti limite secondo il criterio di Guest-Tresca nel piano $\sigma_{II} - \sigma_I$

Caso

Se $\sigma_{II} > \sigma_I > 0$

Se $\sigma_I > \sigma_{II} > 0$:

Se $\sigma_{II} < \sigma_I < 0$:

Se $\sigma_I < \sigma_{II} < 0$:

Se $\sigma_I < 0$ e $\sigma_{II} > 0$:

Se $\sigma_I > 0$ e $\sigma_{II} < 0$:

Condizione limite

$$\sigma_{II} = \sigma_{sn}$$

$$\sigma_I = \sigma_{sn}$$

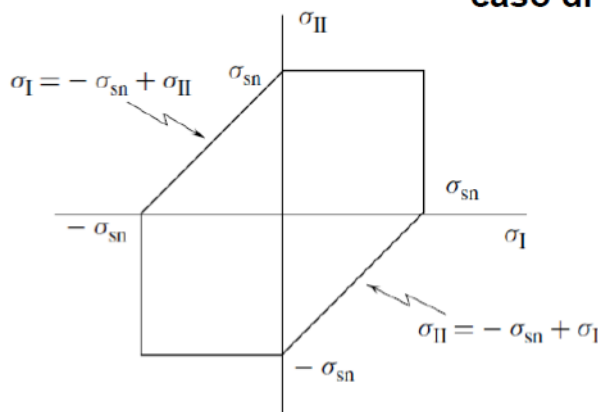
$$|\sigma_{II}| = |\sigma_{sn}|$$

$$|\sigma_I| = |\sigma_{sn}|$$

$$\sigma_{II} - \sigma_I = \sigma_{sn}$$

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_{sn}$$

Rappresentazione grafica
del criterio di Guest-Tresca nel
caso di sforzo piano ($\sigma_{III} = 0$)



Nel caso di torsione pura si avrà che $\sigma_{II} = 0$, $\sigma_I = \tau$ e $\sigma_{III} = -\tau$. Quindi nella condizione limite di snervamento si ha che il limite di snervamento è

$$\tau_{sn} = 2\tau \leq \frac{\sigma_{sn}}{2\eta}$$

8.2.2 Criterio di Huber, Hencky, Von Mises

In questo criterio la grandezza indice di pericolo è l'energia specifica per unità di volume elastica di deformazione e relativa alla variazione di forma (tensore deviatorico).

infatti ogni materiale sollecitato subisce un cambiamento di forma, di volume o entrambi. L'energia immagazzinata nel corpo per avere questa tra-

sformazione viene immagazzinata sottoforma di energia elastica. Esiste un limite nel materiale capace di assorbire energia di distorsione, ossia energia tendente a cambiare la forma ma non il volume. Ogni tentativo di incrementare l'energia di distorsione nel corpo genera snervamento.

Un qualunque tensore degli sforzi può essere rappresentato come somma del tensore idrostatico degli sforzi e del tensore deviatore degli sforzi. Si definiscono quindi il tensore idrostatico degli sforzi σ'_{ij} e il tensore deviatore degli sforzi S_{ij} come

$$\sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

$$S_{ij} = \bar{\sigma} - \sigma'_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Sottraendo la stessa componente in tutte le componenti del tensore degli sforzi originario gli sforzi principali non cambiano, infatti nel piano di Mohr l'operazione corrisponde ad una traslazione dei cerchi. Quindi **le direzioni degli sforzi principali rimangono le stesse**, mentre gli sforzi principali saranno:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_I - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} - \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

La componente **idrostatica** produce una dilatazione volumica, la **componente deviatorica** produce una deformazione a dilatazione cubica nulla.



Gli invarianti del tensore deviatore degli sforzi saranno:

$$J_I = S_I + S_{II} + S_{III} = 0 \quad (8.4)$$

$$J_{II} = \frac{1}{2}(S_I^2 + S_{II}^2 + S_{III}^2) \quad (8.5)$$

$$J_{III} = \frac{1}{3}(S_I^3 + S_{II}^3 + S_{III}^3) \quad (8.6)$$

Considerando il caso assiale, l'energia accumulata a seguito di uno spostamento δ_1 dovuto ad un carico P sarà $L = \int_0^{\delta_1} P d\delta$. Per un materiale elastico lineare si avrà

$$L = \frac{P_1 \delta_1}{2} \quad (8.7)$$

E dunque si definisce l'energia di deformazione per unità di volume:

$$z_e = \frac{L}{V} = \frac{\frac{1}{2} P \delta}{Al} = \frac{1}{2} \delta \epsilon \quad (8.8)$$

Per il tensore idrostatico degli sforzi l'energia immagazzinata restituisce il lavoro di variazione di volume, poco pericolosa. Per il tensore deviatorico degli sforzi invece il lavoro è variazione di forma, e restituisce l'indice di pericolo. Nel caso generale triassiale secondo il sistema di riferimento principale il cedimento si ha quando l'energia specifica di distorsione è uguale a quella che provoca cedimento nella prova di trazione.

$$z_d = \frac{J_{II}}{2G}$$

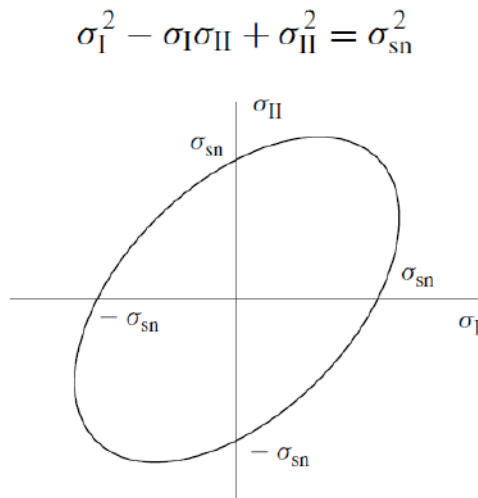
Si ha che

$$J_{II} = \frac{\sigma_{sn}^2}{3}$$

Dopo alcuni conti ignoti si ha che lo sforzo **equivalente di Von Mises** è :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - \sigma_I \sigma_{II} - \sigma_{II} \sigma_{III} - \sigma_I \sigma_{III}} \quad (8.9)$$

Nel caso di sforzo piano si ha che $\sigma_{III} = 0$ si ha che $\sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2 = \sigma_{sn}^2$, che descrive l'equazione di un'ellisse.



Nel caso della torsione pura sono già note le sollecitazioni principali ed è possibile determinare il limite di snervamento.

$$\sigma_{VM} = \sqrt{3\tau_{sn}^2} = \sigma_{sn} \quad (8.10)$$

Mentre per Guest-Tresca la sollecitazione tangenziale di snervamento era $\tau_{sn} = \frac{\sigma_{sn}}{2}$. A confronto i due criteri ci fanno vedere che il criterio di Von Mises è più conservativo.

8.3 Effetto di Intaglio

Tramite l'effetto di intaglio è possibile quantificare l'effetto geometrico dello stato di sforzo che permette di ricavare la sollecitazione massima della particolare geometria di interesse. Esiste una condizione limite per cui un organo di una macchina al variare del materiale, del tipo di sollecitazione e dalla forma che ha può sopportare.

Per l'effetto di intaglio spesso si ha che localmente si hanno sollecitazioni più elevate, ma in genere sono confinate in una zona attorno alla discontinuità. L'effetto di intaglio è inoltre utile per trattare travi che non sono "ideali" e presentano delle varie forme. Attraverso il coefficiente di intaglio si ricava la condizione limite che un organo di macchina può sopportare.

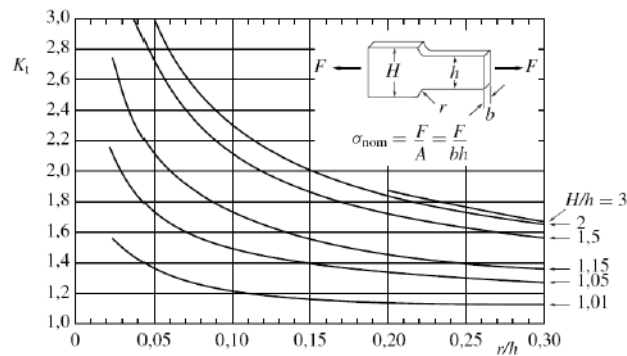
Per calcolare gli sforzi presenti su un organo di macchina con un intaglio si utilizza lo sforzo nominale, ovvero lo sforzo che risponde alla condizione di equilibrio

$$F = \int_A \sigma dA \quad (8.11)$$

Dal punto di vista del calcolo della resistenza il problema della valutazione dell'effetto di intaglio si ha introducendo il coefficiente di intaglio teorico k_t , che esprime il rapporto tra lo sforzo massimo presente nell'intorno della discontinuità e lo sforzo nominale. Per esempio nel caso assiale si ha

$$\sigma_{nom} = \frac{F}{hb} k_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$$

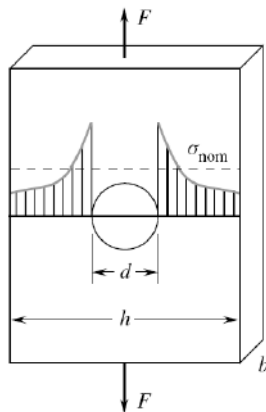
dove h e b sono la lunghezza e lo spessore di una trave a sezione rettangolare. k_t dipende dalla geometria del problema in esame e dal tipo di carico applicato, non dal materiale. Quindi per materiali diversi con geometrie con gli stessi rapporti geometrici il k_t è il medesimo.



Andamento di K_t in una trave sottile a sezione rettangolare, con variazione di sezione, soggetta trazione^[1].

Un tipo di intaglio molto comune è quello del foro passante di diametro d . La massima perturbazione si ha nell'intorno di discontinuità. La sollecitazione nominale sarà:

$$\sigma_{nom} = \frac{F}{(h - d)b} \quad (8.12)$$



L'effetto di intaglio interessa anche organi di macchina soggetti a torsione. Il coefficiente di intaglio per sforzi torsionali è definito come:

$$k_t = \frac{\tau_{max}}{\tau_{nom}} \quad (8.13)$$

Per verificare un componente a resistenza statica occorre valutare il valore limite del carico che è possibile applicare. Si definisce il **coefficiente di intaglio statico sperimentale** il rapporto tra il carico limite di un elemento liscio e l'effettivo carico limite del provino intagliato con la stessa sezione resistente del provino liscio.

Materiali fragili I materiali fragili sono caratterizzati da un diagramma lineare fino al carico di rottura. Quindi un provino con intaglio avente coefficiente k_t cederà a rottura per una forza pari a


$$F'_{lim} = \frac{\sigma_{max}}{k_t} = \frac{R_m A}{k_t} \quad (8.14)$$

Quindi il coefficiente sperimentale sarà

$$k_s = \frac{F_{lim}}{F'_{lim}} = k_t \quad (8.15)$$


Quindi il coefficiente sperimentale e teorico coincidono, con F_{lim} la forza limite senza intaglio.


Materiali duttili Nei materiali duttili è presente una forza limite a prima plasticizzazione e una seconda a plasticizzazione. La prima si raggiunge quando lo sforzo massimo è pari allo sforzo di snervamento e si ha un cedimento locale presente nell'intorno dell'intaglio. Successivamente quando si raggiunge lo sforzo di snervamento lungo tutta la sezione si ha cedimento totale. Quindi a plasticizzazione totale il coefficiente di intaglio è pari a 1 e lo sforzo nominale è pari allo sforzo di snervamento. Nella prima plasticizzazione il coefficiente di intaglio è k_t e lo sforzo nominale sarà il carico di snervamento diviso il coefficiente di intaglio.

materiali fragili: $K_s = K_t$  $\sigma_{nom} \leq \frac{R_m}{K_t \cdot \eta}$

σ_{nom} = Sforzo NOMINALE

materiali duttili (dipende da normativa)

Se ammettiamo **plasticizzazione totale** come limite di cedimento $K_s = 1$  $\sigma_{nom} \leq \frac{R_{sn}}{K_s \cdot \eta} = \frac{R_{sn}}{\eta} = \sigma_{amm}$

Se ammettiamo **prima plasticizzazione** come limite di cedimento $K_s = K_t$  $\sigma_{nom} \leq \frac{R_{sn}}{K_t \cdot \eta} = \sigma_{amm}$