Appunti di Analisi e Geometria I

Mattia Ruffini

Settembre 2021

Indice

Insiemi

1.1 Numeri Naturali, Interi, Razionali e Reali

Insieme dei numeri naturali Comprende i numewri naturali, interi non negativi, che rispondono all'esigenza di "contare".

Insieme dei numeri Interi Sono i numeri interi positivi e negativi.

Insieme dei numeri razionali Sono i numeri del tipo $\frac{m}{n}$ dove $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Rispondono all'esigenza di misurare i rapporti di grandezze omogenee.

Quando $\frac{1}{m}a = \frac{1}{n}b$, a e b si dicono **grandezze commensurabili**, cioè *ammettono un sottomultiplo comune*. Formalmente si dice che $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$. Tuttavia è sempre vero che esiste un sottomultiplo di a e uno di b? Ovvero, esistono sempre coppie di segmenti non commensurabili tra loro?

1.2 I numeri razionali non bastano

Teorema 1. *La diagonale e il lato di un quadrato costituiscono una coppia di segmenti non commensurabili tra loro.*

Dimostrazione sull'insufficienza dei numeri razionali Per assurdo supponiamo che esistano due numeri m ed n$\in \mathbb{R} \mid (\frac{m}{n})^2 = 2$, cioè $m^2 = 2n^2$. Non è restrittivo pensare che m ed n siano primi tra loro, cioè che non abbiano fattori primi in comune. Da $m^2 = 2n^2$ segue che m^2 è pari, quindi anche m è pari. Se così non fosse allora $m = 2h + 1 m^2 = (2h+1)^2 = 4h^2 + 4h + 1 =$

$2(2h^2 + 2h) + 1$ cioè m^2 è dispari. Possiamo riscrivere $m = 2k(k \in \mathbb{N}$. Allora $m^2 = 4k^2$ e alla fine dell'uguaglianza si giunge a $n^2 = 2k^?2$. Allora n è pari, ma se entrambi m ed n sono pari significa che hanno un sottomultiplo comune, che è 2, ed era escluso nelle ipotesi.

$\nexists$ un numero razionale del tipo $\frac{m}{n} \mid (\frac{m}{n})^2 = 2$. Ovvero i numeri razionali sono insufficienti.

c.v.d.

1.3 L'insieme dei numeri Reali

In questa sezione ci occupiamo di una **presentazione assiomatica**, ovvero non ci interroghiamo riguardo la natura del numero reale (una domanda a cui non avrebbe senso rispondere) bensì **quali sono le proprietà dei numeri reali**.

Definizione di Campo Tra le proprietà presenti in un campo sono presenti le proprietà di addizione e moltiplicazione, la proprietà di ordinamento e la proprietà di completezza.

Proprietà di addizione e sottrazione

Ordinamento del campo Un campo è ordinato quando si richiede che, si postula che, ci sia una relazione di minore, maggiore e uguale tra due numeri.
Relazione di ordine totale. Se $x, y, z \in \mathbb{R} x < y$ e $y < z$, allora $x < z$ (transitività) . Se $x, y \in \mathbb{R} \vee x < y \vee x = y \vee x > y$ (trioctomia).
La relazione di ordine totale deve essere compatibile con le somme, ovvero:

- Se $x < y$ allora $x + z < y + z$;
- Se $x < y$ e $z > 0$, allora $xz > yz$ [1];

La completezza del campo In $\mathbb{R}$ saranno presenti gli elementi di $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Tuttavia mancano alcuni punti in $\mathbb{Q}$, come per esempio $\sqrt{2}$ che corrisponderebbe ad un vuoto. I numeri razionali infatti sono pochissimi rispetto quelli reali. Per dire che un insieme "non ha buchi" si introduce l'**assioma di completezza**.

[1] Analogamente è possibile dimostrare l'inverso, cioè se $z < 0$ allora $xz > yz$

Se A e B sono due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, se $\forall a \in A, \forall binB, a < b, allora \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid a \leqslant \lambda \leqslant b$.

Esempio: A è l'insieme dei numeri razionali positivi minori di 2, B è l'insieme dei numeri razionali positivi maggiori di 2. Esiste un certo $\lambda = \sqrt{2}$, tuttavia la radice quadrata di 2 non è compresa nei numeri reali.

Si possono dimostrare due cose:

1. L'esistenza di modelli di campo ordinato completo, che si possono costruire, ad esempio, da $\mathbb{Q}, \mathbb{N}$. (Sezioni di Dedekind, intervalli inscatolati, costruzioni geometriche).

2. Il campo ordinato e completo è unico.

Teorema 2. ***Unicità del campo ordinato completo***. *Se K e K' sono due campi ordinati e completi, allora esiste un isomorfismo (e uno solo) da K a K', cioè esiste un'unica applicazione biounivoca $f : K- > K'$, che preserva la somma, il prodotto e l'ordinamento. Ovvero due campi K e K' ordinati e completi si possono identificare tra loro come lo stesso campo.*

1.4 Insiemi limitati

Archimede per trovare la lunghezza della circonferenza considera i poligoni di n lati inscritti e circoscritti. A parità del numero di lati i poligoni circoscritti approssimano il perimetro per eccesso, quelli inscritti per difetto, dunque la lunghezza della circonferenza equivale *all'estremo inferiore di A (insieme dei perimetri dei poligoni circoscritti) e l'estremo superiore di B (insieme dei perimetri dei poligoni inscritti).*

Sia $E \subset \mathbb{R}$:

1. E è **limitato superiormente** se $\exists \beta \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E : x \leqslant \beta$.

2. E è **limitato inferiormente** se $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E : \alpha \leqslant x$.

Teorema 3. ***Esistenza della minima limitazione superiore***. *Se $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente, l'insieme delle limitazioni superiori ha sempre una minima. Analogamente esiste una massima limitazione inferiore.*

Questo teorema non vale in $\mathbb{Q}$, perchè la sua minima limitazione superiore è radice di 2, che non esiste in $\mathbb{Q}$.

Definizione di estremo superiore Se $E \subset \mathbb{R}$ è non vuoto e limitato superiormente, la minima limitazione superiore di E si denota come supE e si chiama **estremo superiore di E**. Il numero s=supE ha le seguenti proprietà:

- $\forall x \in E x \leqslant s$;
- $\forall s' \leq s, \exists x \in E \mid x > s'$;

Se $E \subset \mathbb{R}$ non è limitato superiormente si pone $supE = +\infty$

Dimostrazione dell'esistenza del sup Si denota $Z = z \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E, x \leqslant z$, cioè Zè l'insieme delle limitazioni di E, con $Z \neq 0$ perchè per ipotesi E è limitato superiormente. Per l'assioma di completezza (proprietà di separazione) $\exists \lambda \mid \forall x \in E, \forall z \in Z$:
$x \leqslant \lambda \leqslant z$, ovvero:

- $\forall x \in E, x \leqslant \lambda$, cioè λ è una limitazione superiore;
- $\lambda \leqslant z$, cioè λ è **la minima limitazione superiore di E**.

c.v.d.

1.5 La proprietà di Archimede

"L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali non è limitato superiormente"

Dimostrazione Per assurdo L è l'estremo superiore di $\mathbb{N}$. L-1 (¡L) non può essere l'estremo superiore minimo. Quindi deve esistere un numero $N_0 \mid N_0 > L - 1$, ma se $N_0 > L - 1$, cioè $N_0 1 > L \lightning$ L=supN non esiste!
c.v.d.

"Siano $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Allora esiste un numero naturale n tale che $na > b$.

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che non esiste n nell'insieme dei numeri naturali tale per cui $na > b$, cioè $\forall nin\mathbb{N}na \leqslant b : n \leqslant \frac{b}{a}$. Significa dire che N è limitato superiormente, cioè $\frac{b}{a} = supN \lightning$.

c.v.d.

Successioni in $\mathbb{R}$ e limite di una successione

Distanza tra due punti La distanza tra due punti x ed y è così definita:

$$d(x,y) = |x-y|, x,y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

La distanza conserva alcune proprietà:

1. $d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$;
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Dunque alla definizione di $\mathbb{R}$ come campo ordinato e completo si aggiunge che è anche uno **spazio metrico**.

Successione Si chiama successione in un insieme A (o di elementi di A) una qualunque funzione da $\mathbb{N} \longrightarrow A$, il cui dominio è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{R}$, ed il codominio è A.

$$(a_n)n \in \mathbb{N}; (a_n); a_n \tag{2.2}$$

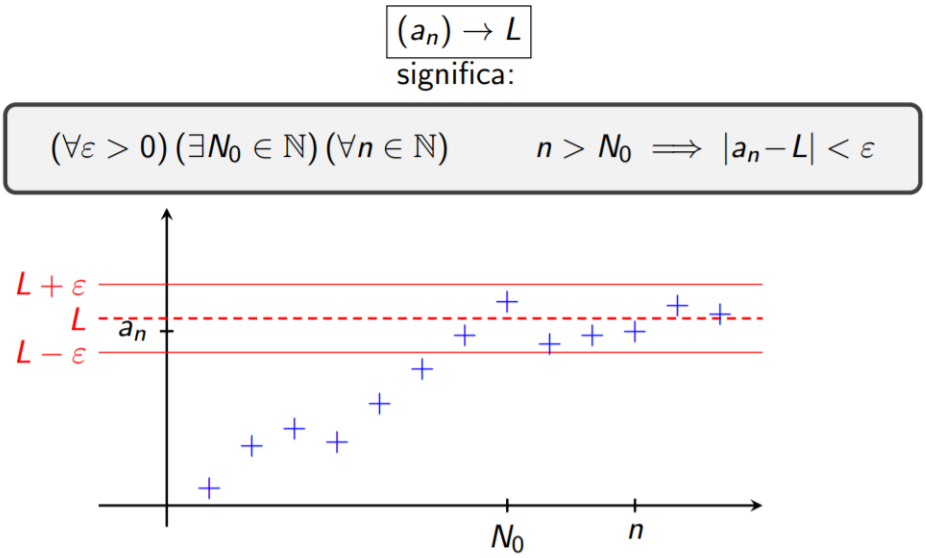
Esempi di successioni sono : $a_n = \frac{1}{n}$, oppure $a_n = \frac{1}{2n}$.

2.1 Convergenza di una successione

Consideriamo una successione a_n in $\mathbb{R}$, con $L \in \mathbb{R}$. Allora a_n converge in L e si scrive $< a_n \longrightarrow L$ oppure $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, se: $\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{R} \mid \forall n in \mathbb{N}, n > N_0 \Longrightarrow |a_n - L| < \epsilon$. In forma sintetica si può scrivere:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n > N_0 \Longrightarrow |a_n - L| < \epsilon \tag{2.3}$$

Riformulazione Sia a_n una successione in $\mathbb{R}$, con $L \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ se $\forall \epsilon > 0 |a_n - L| < \epsilon$ definitivamente, cioè valga per tutti gli n sufficientemente grandi.



Dimostrazione La dimostrazione segue dalla proprietà di Archimede. Sia $\epsilon > 0, \exists N \mid N > \frac{1}{\epsilon}$, e tale N esiste perché $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente. Allora $\forall n \geq N$ abbiamo $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$, e quindi $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ (la distanza da 1/n a 0 è minore di ϵ).
Per esempio $\frac{1}{n}$ è decrescente, cioè $\frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1...}$. Come esercizio si può dimostrare che $\frac{1}{2n}$ converge a 0.

Teorema 4. *Sia a_n una successione in R* ***monotona crescente*** *(in senso lato, cioè $...a_n \leq a_{n+1}...$) e* ***superiormente limitata*** *(cioè $\exists k \in \mathbb{R} \mid \forall n, a_n < k$. Allora la successione converge in $\mathbb{R}$, e converge ad un limite finito L, che è dato dall'estremo superiore dei suoi elementi.*

Un esempio è il numero di Napier e, estremo superiore delle successioni del tipo $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

Dimostrazione Poniamo $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$,e poniamo L=supA (il supA esiste ed è finito per la completezza di $\mathbb{R}$. Prendiamo un $\epsilon > 0$ qualsiasi:

- $L - \epsilon < L$, dunque $L - \epsilon$ non è una limitazione superiore di A, quindi $\exists k in \mathbb{R} \mid L - \epsilon < a_k$;

- La successione a_n è non decrescente. Quindi $\forall n > k, L - \epsilon < a_n \leq L$ (perchè L=supA). Dunque per l'arbitrarietà di ϵ, la successione converge a L.
  Se una successione è monotona crescente ed è superiormente limitata allora questa converge all'estremo superiore dei suoi elementi.

2.2 Unicità del limite

Teorema 5. *Una successione in $\mathbb{R}$ ha al più un limite, ed è unico.*

Supponiamo che $a_n \to L^{'}, a_n \to L^{''}, L^{'} \neq L^{''}$. Prendiamo $\epsilon = \frac{1}{2}|L' - L''| > 0$. Esistono $k', k'' \in \mathbb{N} \mid n > k' \to |a_n - L'| < \epsilon; n > k'' \to |a_n - L''| < \epsilon$. Pongo $K = max\{k', k''\}, \forall n \geq K$:
$|L' - L''| = |L' - a_n + a_n - L''| \leq |L' - a_n| + |a_n - L''| < \epsilon + \epsilon = |L' - L''|; \lightning$

Teorema della permanenza del segno

Teorema 6. *Sia a_n una successione in $\mathbb{R}$, e $L \in \mathbb{R}$. Se $a_n \to L, L > 0 (L < 0)$ allora $a_n > 0 (a_n < 0)$ definitivamente.*

Dimostrazione

1. Fissiamo $\epsilon \mid L - \epsilon > 0$. Siccome $a_n \to L$ per ipotesi, allora $\exists N_0 in \mathbb{N} \mid \forall n > N_0 : 0 < L - \epsilon < a : n < L + \epsilon$;

2. Se $a_n \to L, a_n > 0 \forall n$, allora $L \geq 0$. Se $L < 0$, allora $a_n < 0$ definitivamente, contro l'ipotesi.

Intervalli compatti inscatolati

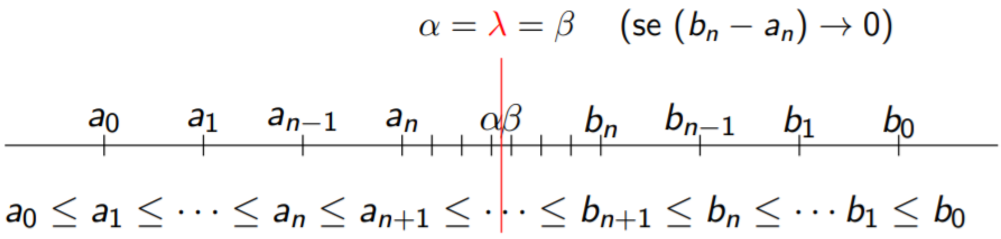
Se $a \leq b$, l'insieme $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ si chiama **intervallo chiuso e limitato**, oppure **intervallo compatto**.

Teorema 7. *Sia* $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ *una successione di intervalli compatti (cioè chiusi e limitati) detti inscatolati, poiché:* $I_0 \subseteq I_1 \subseteq ... \subseteq I_n$

Allora:

1. $\exists$ almeno un punto che appartiene a tutti gli intervalli I_n: $\cap_{n=0}^{+\infty} I_n \neq 0$;
2. Se le lunghezze, o ampiezze $(B_n - a_n) \to 0$ allora esiste unico punto $c \in \mathbb{R}$ che appartiene a tutti gli intervalli I_n: $\cap_{n=0}^{+\infty} I_n = \{c\}$;

Dimostrazione Sia $\alpha = \lambda = \beta$ se $(B_n - a_n) \to 0$.



1. Prendiamo $A = \{a_n, n \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{b_m, m \in \mathbb{R}\}$ e $\forall n, m \in \mathbb{N}, a_n < b_m$. Quindi A è limitato superiormente, perché un qualunque elemento di B è una limitazione superiore di A. Analogamente B è limitato inferiormente. Per la proprietà di completezza:$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_m$. In particolare per $n = m$ si ha: $\cap_{n=0}^{+\infty} I_n[a, b] \neq 0$ perchè stiamo parlando di un intervallo compatto. Questo intervallo include l'intervallo $[\alpha, \beta]$ che si dice inscatolato in $[a_n, b_m]$.

2. Supponiamo ora che $(B_n - a_n) \to 0$, allora supponiamo per assurdo che $\alpha < \beta$. Quindi valgono le seguenti disuguaglianze: $a_n < \alpha < \beta < b_m$, quindi $b_m - a_n > \beta - \alpha$, ma se $(B_n - a_n) \to 0$ non può essere maggiore o uguale di un **numero finito positivo**.

Gli intervalli I_n hanno un unico punto in comune.

c.v.d.

3.1 Esistenza ed unicità dell'elemento superiore di due classi contigue di numeri reali

Diciamo che A,B è una coppia di classi contigue di numeri reali se $A, B \subset \mathbb{R}$, cioè sono sottoinsiemi non vuoti di R che soddisfano le seguenti proprietà:

1. Ogni a in a è minore di ogni b in B;

2. Preso un ϵ qualsiasi, esiste una coppia b,a $\mid b - a < \epsilon$.

Teorema 8. *Se A e B sono classi contigue di numeri reali, allora esiste un unico $\lambda \in \mathbb{R}$ che soddisfa: $a \leq \lambda \leq b$, presi un qualsiasi a in A, ed un qualsiasi b in B.*

Se esistessero λ_1, λ_2 allora $a - b < \lambda_1 - \lambda_2$ cioè A e B non possono essere classi contigue

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

Teorema 9. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists r \in \mathbb{Q} \mid a < r < b$. *Presi due numeri reali qualsiasi allora tra di essi è compreso un numero razionale, cioè l'insieme dei razionali è denso in R.*

Il numero reale $\alpha = a_0.a_1a_2...a_n$ è il limite di una successione y_n di numeri razionali decimali. $|\alpha - y_n|| = \frac{1}{10^n}$, cioè y_k è l'approssimazione di α a meno di 10^k.

Dimostrazione Se $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, allora esiste un razionale r tale che $a < r < b$.
Sia $a, b > 0$. Se $a, b > 0 \exists$ un naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(b - a) > 1$, cioè $n > \frac{1}{b-a}$. Allora $n(b - a) > 1 \to nb - na > 1$. Se questa disuguaglianza è vera allora na e nb sono numeri che distano fra di loro più di uno, cioè tra na e nb è presente un numero intero: $na < m < nb$. Quindi: $a < \frac{m}{n} < b$.

Analogamente si può dimostrare che l'insieme dei numeri irrazionali $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

Cardinalità di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

La cardinalità di $\mathbb{Q}$ è diversa rispetto alla cardinalità di $\mathbb{R}$, ovvero non esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$.

Cosa significa che una funzione è biunivoca Dati un insieme X e un insieme Y, la funzione $X \xrightarrow{f} Y$:

1. **Iniettiva**: $\forall x, x' \in X, x \neq x' allora anche f(x) \neq f(x')$, ovvero per ogni elemento di Y esiste al più un x in X tale per cui $f(x) = y$.

2. **Suriettiva**: dati gli insiemi X e Y, se l'immagine di f è Y, cioè ad ogi elemento di X è corrisposto (deve esistere) un elemento di Y.

Per esempio la funzione $f(x) = x^2$ definita da $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ non è suriettiva. E' invece suriettiva la funzione $f(x) = x^2$ definita da $[0, 1] \xrightarrow{f} [0, 1]$.

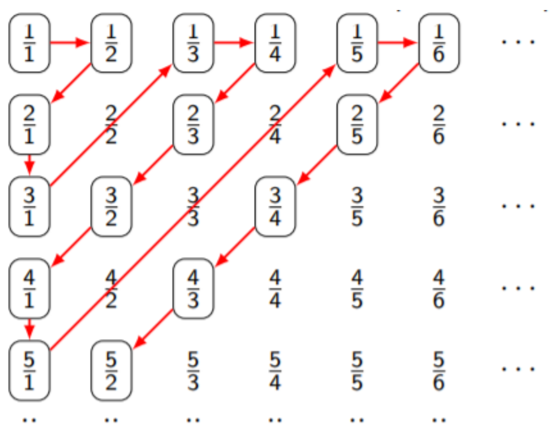
Una funzione è biunivoca (biettiva) o invertibile se è sia iniettiva che suriettiva, cioè: $\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$.

Definizione di cardinalità Quando gli insiemi rispondono tra di loro di una corrispondenza biunivoca si dice che hanno la stessa **cardinalità**, cioè hanno lo stesso numero di elementi. Anche due insiemi infiniti che hanno una corrispondenza biunivoca hanno la stessa cardinalità. Non si è definita la cardinalità dell'insieme, ma il rapporto tra due insiemi.

Insieme numerabile Due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità? O meglio possiamo definire se un insieme è **numerabile**, cioè se ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.

5.1 $\mathbb{Q}$ è numerabile

Dimostrazione trovata dal matematico *Cantor*. Consideriamo l'insieme dei numeri razionali positivi. Cantor ha avuto l'idea di disporli nel secondo ordine (mettendo nella prima fila tutti i razionali con numeratore uguale a 1, nella seconda fila tutti quelli numeratore 2 e così via):



Se volessi concettualmente contare tutti gli elementi positivi di Q potremmo contare gli elementi della prima fila, tuttavia questo processo durerebbe in eterno. Allora Cantor decide di contare gli elementi a "zig-zag", eliminando i razionali che si ripetono. In questo modo si possono contare tutti i razionali, e ogni numero compare una sola volta. Si aggiunge anche l'elemento zero. Per contare i negativi si modifica la successione:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	...
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{1}{5}$	...

Esiste una funzione biunivoca da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$. Di conseguenza $\mathbb{Q}$ è numerabile.

c.v.d.

5.2 $\mathbb{R}$ non è numerabile

Questa dimostrazione è solo una delle quattro trovate da Cantor. Supponiamo per assurdo che esista una corrispondenza biunivoca da $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Per semplicità dimostriamo questa corrispondenza nell'intervallo $[0, 1]$, cioè $\mathbb{N} \xrightarrow{f} [0, 1]$. Consideriamo il numero reale $0.\alpha_1^1\alpha_2^1\alpha_3^1....$

Al posto della cifra α_1^1 si metta una cifra diversa da α_1^1, e che sia diversa da 0 e da 9 (questo perchè come visto in precedenza per una delle proprietà degli intervalli compatti inscatolati 0 corrisponde al periodo 9). Ora consideriamo il numero $0.\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2...$ e il numero $0.\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^3.....$ Sostituiamo con delle cifre diverse da quelle di partenza α_2^2 e α_3^3.

I numeri che creiamo non saranno sicuramente presenti in quella lista, perchè il primo numero differisce della prima cifra decimale, il secondo per la seconda cifra decimale e così via. L'ennesima cifra differisce dell'ennesima cifra $f(n)$.

Significato dell'allineamento infinito

Consideriamo per esempio il numero 0.11111111.... Questo numero reale può essere visto come:

1. Considero la successione $a_0 = 0$, $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.11$ ... Ciascuno dei termini della successione a_n è un'approssimazione per difetto di $0.\overline{1}$. Infatti: $a_1 = \frac{1}{10}$; $a_2 = \frac{1}{10} + \frac{11}{100}$; $a_3 = \frac{1}{10} + \frac{11}{100} + \frac{111}{10^{-3}}$... Quindi $0.\overline{1}$ è il limite della successione scritta, e poiché la successione è **crescente, superiormente limitata** per esempio (0.2 è un elemento maggiore di quelli della successione). Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.\overline{1}$;

2. $0.\overline{1}$ è visto come l'estremo superiore di $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$;

3. **Serie geometrica**. $0.\overline{1} = \frac{1}{10} + \frac{11}{100} + \frac{111}{10^{-3}} + ... + \frac{1}{10^n}$. Cioè $0.\overline{1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$

Cosa significa sommare infiniti addendi? Prendiamo per esempio $q \in \mathbb{R}$, voglio calcolare la somma infinita $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$. Costruisco le **somme parziali**, cioè la somma del primo termine, quella del secondo e del terzo e così via...chiamiamo s_k la successione delle somme parziali. Poichè la successione è limitata superiormente ed è crescente converge ad L: $\lim_{k \to +\infty} s_k = L$.

Suppongo che $|q| < 1$, allora:
$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n)(1 - q)$

$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n - q - q^2 - q^3 - ... - q^{n+1}$

$(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1}$

Quindi si ha $\lim_{n \to +\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = L = 0$ (posto $|q| < 1$).

Funzioni continue

Definizione Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0 \in S$. Si dice che f è continua nel punto x_0, se $\forall \epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per il quale è soddisfatta la seguente condizione: $\forall x \in D, |x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Ovvero quando la distanza tra x e x_0 è minore di δ, allora $f(x) - f(x_0)$ è minore di ϵ, qualunque si fissi una *tolleranza* ϵ.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D[d(x, x_0) < \delta \implies d(f(x), f(x_0)) > \epsilon]$$

Riformulazioni intuitive

1. Se la distanza $d(x, x_0)$ è piccola, allora è sufficientemente piccola la distanza $d(f(x), f(x_0))$.

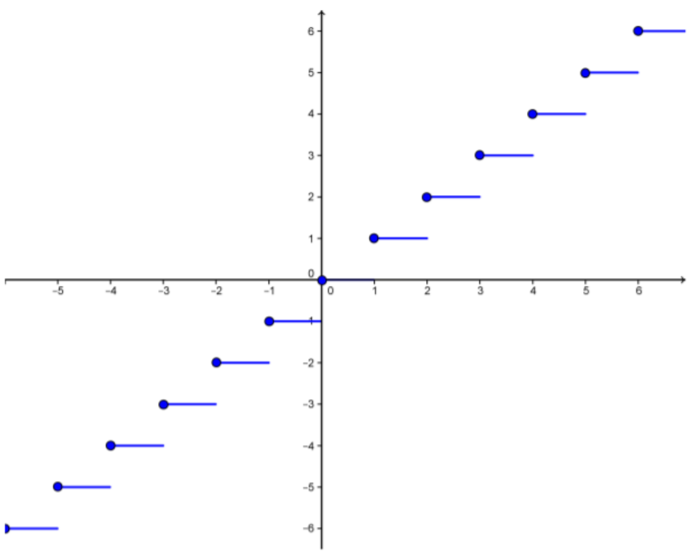
2. Supponiamo che x e y siano due grandezze fisiche. f è continua in x_0 se si approssima la misura $f(x_0)$ mediante $f(x)$ con una tolleranza arbitraria $\epsilon > 0$. Affinché la misura x di x_0 sia fatta con sufficiente precisione si prende $\delta > 0$.

Esempi di funzioni continue

1. **Funzione identità** $\forall x, I(x) = x$. E' continua $\forall x$ scelti $\epsilon > 0, \delta > 0$ la condizione è soddisfatta;
2. **Funzione reciproca** $\mathbb{R} \setminus \{\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, x \neq 0 g(x) = \frac{1}{x}$ è continua. Ovvero $\forall x_0 \in R$, se $d(x, x_0) < \delta$, allora $d(\frac{1}{x}, \frac{1}{x_0}) < \epsilon$;
3. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = x^2$ è continua;
4. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = sin(x); f(x) = cos(x)$ è continua;

Dimostrazione continuità funzione reciproca

Significato funzione parte intera Un esempio di funzione non continua è la funzione parte intera.



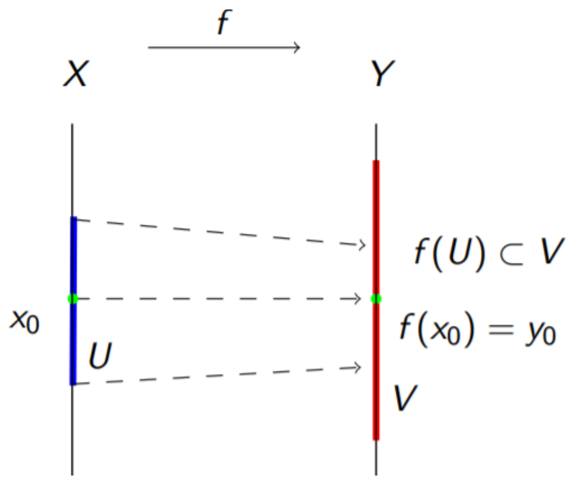
7.1 Intorno di un punto

Consideriamo $\mathbb{R}$ spazio metrico, ovvero vale $d(x, y) = |x - y|$. Dato $x_0 \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R} : r > 0$, si chiama **intorno simmetrico / intorno sferico / disco aperto** di centro x_0 e raggio r il sottoinsieme $I(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x > x_0 + r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, x_0) < r\}$

In generale, un insieme $U \subset \mathbb{R}$ si dice intorno di un punto x_0 se $\exists r > 0$ tale che:

$$U \supset (x_0 - r, x_0 + r)$$
$$U \supset \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, x_0) < r\}$$

Definizione topologica di continuità Dati $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ spazi metrici qualunque, per esempio $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}$. $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}$ è continua in $x_0 \in \mathbb{X}$, significa che: per ogni intorno $V \ni f(x_0)$ esiste un intorno $U \ni x_0$ tale che $f(U) \subset V$.



Teorema 10. *Siano* $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}$ *e* $\mathbb{Y} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}$ *due funzioni continue, allora* $\mathbb{X} \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{Z}$ *è continua.*

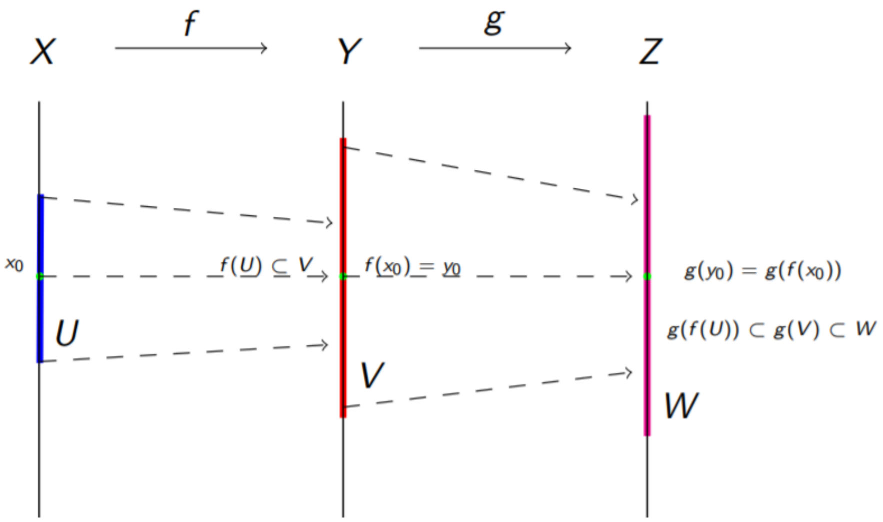
Questo perchè per definizione deve esistere un intorno $W : g(V) \subset W$, ovvero:

$$g(f(U)) \subset g(V) \subset W$$

Sia data la seguente funzione $g(x) = \frac{\sin(x^3)+x^4}{1+x^2+\cos(x)^2}, x \in \mathbb{R}$. Poiché la funzione è composta da funzioni continue allora questa sarà continua.

Teorema 11. ***Continuità per successioni*** *Siano* $< D \subset \mathbb{R}, \mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, x_0 \in D$. *I due seguenti enunciati sono equivalenti:*

- *f è continua in x_0;*
- *Per ogni successione x_n in D, se $x_n \to x_0$, allora $f(x_n)_{n\to+\infty} f(x_0)$, cioè $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$, allora $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$*



Le funzioni continue sono le funzioni che preservano i limiti di successioni. Questo teorema ha una particolare applicazione se si vuole dimostrare che **una funzione non è continua**. Ecco un esempio.

7.2 Limiti

Si dice che x_0 è punto di accumulazione di un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$ se $\exists$ una successione (a_n) in D tale che $a_n \to x_0$, e $a_n \neq x_0 \forall n \in \mathbb{N}$. Esempi:

1. $x_0 = 0$ è punto di accumulazione di $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
2. $x_0 = 1$ è punto di accumulazione di $D = [0, 1]$, per esempio attraverso la successione $(a_n) = 1 - 1^n$;
3. $x_0 = 3$ **non è** un punto di accumulazione per $D = [0, 1]$;

Definizione limite finito Siano $D \subset \mathbb{R}, x_0$ punto di accumulazione di D; $\mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione, $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D), 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

N.B.

- $0 < |x - x_0|$ equivale a dire $x \neq x_0$, questo perché non siamo interessati se esiste x_0 nella funzione, ma soprattutto non ci importa del valore che la funzione assume in x_0.
- Non è detto che il limite esista, **ma se esiste è unico!**.

Seconda versione Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione di D, $\mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione, $L \in \mathbb{R}$ escludendo $L = \pm\infty$. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa che ponendo $f(x_0) = L$, la funzione risulta continua in $f(x_0)$. Inoltre data la funzione $\mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, se x_0 è un punto di accumulazione per D e in più $x_0 \in D$, allora f è continua se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teorema 12. ***Teorema del confronto*** *Siano $D \subset \mathbb{R}$ e f,g,h tre funzioni $\mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, con x_0 punto di accumulazione di D. Se:*

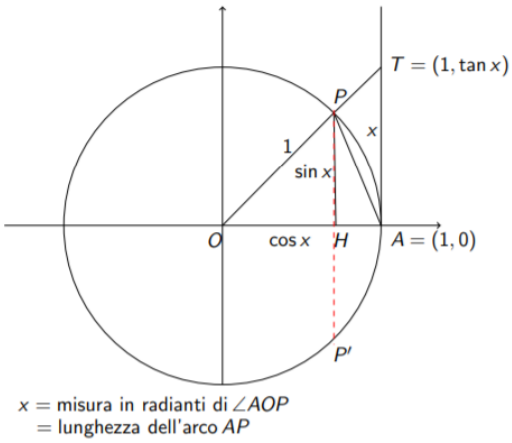
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in D, x \neq x_0$$

e se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L = \lim_{x \to x_0} h(x)$$

, allora:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$



7.3 Intervallo di $\mathbb{R}$

Dati $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$, il segmento compatto (chiuso e limitato) delimitato da x, y, definito come $[x, y]$ è l'insieme:

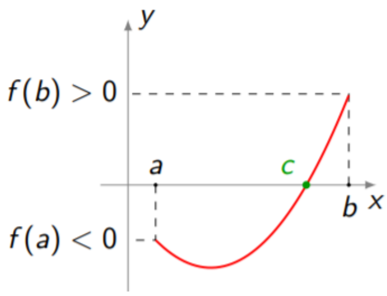
$$[x, y] = \{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \leq y\}$$

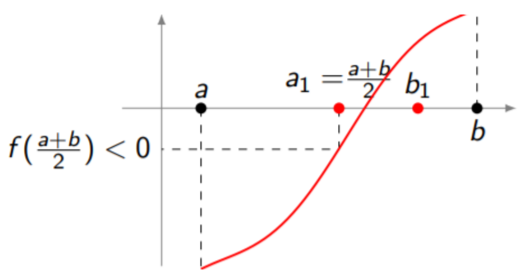
Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ è un intervallo se soddisfa:

$$(\forall x, y \in I)(x \leq y) \Rightarrow [x, y] \subseteq I$$

ovvero se I contiene due punti, allora I è un intervallo se contiene tutti i punti che compongono quel segmento. Esiste l'intervallo in cui $x = y$, ed esiste l'intervallo vuoto.

Teorema 13. ***Teorema degli zeri*** *Sia* $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione e un intervallo* $I \subset \mathbb{R}$*. Siano* $a, b \in I$*, con* $a < b$*. Supponiamo che* $f(a)ef(b)$ *abbiano valori opposti. Allora esiste almeno un punto* $c \in (a, b)$ *in cui* $f(c) = 0$*.*





Dimostrazione Supponiamo che $f(a) < 0 < f(b)$, e chiamiamo $I_0 = [a_0, b_0]$ l'intervallo $[a, b]$.
Consideriamo il punto medio del segmento ab, che chiamiamo $a_1 = \frac{a+b}{2}$. Se $a_1 = 0$ la dimostrazione è finita. Altrimenti se $f(a_1) < 0$, chiamo $I_1 = [a_1, b_0]$(Se $a_1 > 0$ avrei chiamato $I_1 = [a_0, a_1]$). In questo intervallo si verifica la stessa condizione di partenza, quindi **iteriamo le bisezioni**.Se in uno dei punti medi la funzione si annulla la dimostrazione finisce, altrimenti costruiamo la successione di infiniti intervalli $I_n = [a_n, b_n]$, con $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.
Per il teorema di Cantore sugli intervalli compatti inscatolati $\exists c$ tale che appartiene alle infinite intersezioni della successione. Inoltre questo punto c **deve essere unico perchè** $\frac{b-a}{2^n}$ tende a zero.
Poichè la funzione è continua preserva i limiti di successioni:

- $a_n \to c \Rightarrow f(a_n) \to f(c)$;
- $b_n \to c \Rightarrow f(b_n) \to f(c)$;

Per il **Teorema della permanenza del segno** se $f(a_n) < 0$ allora $f(c) \leq 0$ e allo stesso modo se $f(b_n) > 0, f(c) \geq 0$ di conseguenza $f(c) = 0$.

c.v.d

Teorema 14. ***Teorema dei valori intermedi*** *Supponiamo che:*

1. $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ *sia un intervallo;* $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è una funzione;*
2. $a, b \in I$; $a < b$, $f(a) < f(b)$;
3. $v \in \mathbb{R} : f(a) < v < f(b)$;

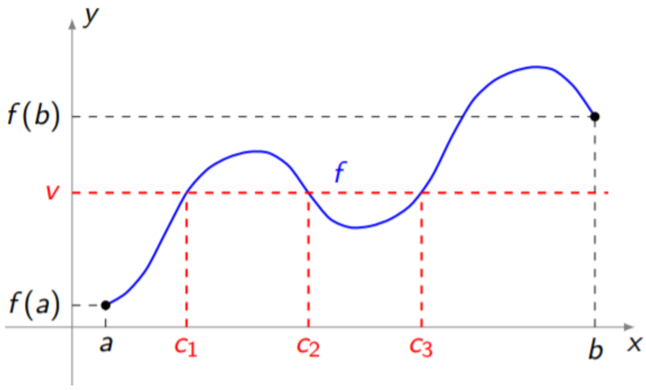
Tesi: $\exists c \in (a, b) : f(c) = v$.

Se $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è funzione continua su un intervallo I, la sua immagine $J = f(I)$ 'e un intervallo. **Le funzioni continue trasformano intervalli in intervalli**.

Dimostrazione $g(x) = f(x) - v$ in $[a, b]$, e soddisfa le ipotesi del teorema. Consideriamo $g(a) = f(a) - v < 0$ e $g(b) = f(b) - v > 0$.Per il teorema degli zeri deve esistere $c \in (a, b) : g(c) = f(c) - v = 0 \Rightarrow$

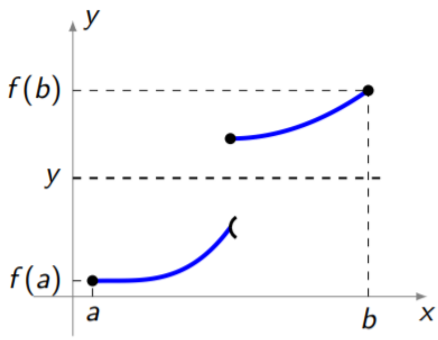
$$f(c) = v$$

c.v.d.

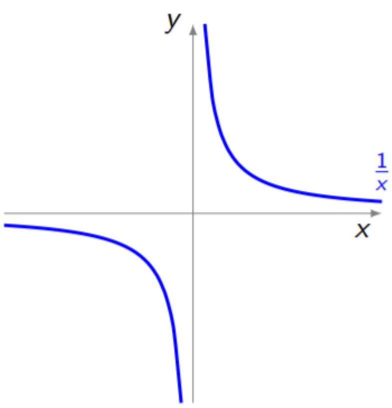


N.B.

1. L'ipotesi che f(x) sia continua è necessaria;



2. Che f sia in un intervallo è necessario, per esempio la funzione inversa esiste nell'unione di intervalli $(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$ che **non è un intervallo**;



Osservazione Se una funzione soddisfa la proprietà dei valori medi di Darboux, cioè presa una coppia di punti x_1 e $x_2 \in I$ dove I è l'intervallo in cui esiste la funzione, questa assume tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$. *Si può concludere che se una funzione in un intervallo ha questa proprietà allora è sicuramente continua?*