Costruzioni di Macchine 1

Mattia Ruffini

Settembre 2022

Indice

Capitolo 1

Analisi Cinematica

L'analisi cinematica studia l'equilibrio di un sistema di corpi rigidi soggetti a forze o coppie. L'equilibrio può essere di rotazione o verticale, e sono descritti da un numero di equazioni linearmente indipendenti.

Nell'analisi cinematica si contano i gradi di libertà di un sistema di corpi, e si verifica che i vincoli siano stati scelti in modo efficace attraverso un approccio matematico e grafico.

Si definiscono i gradi di libertà il numero di parametri indipendenti per fissare la posizione di un punto materiale nello spazio. Quando il punto materiale è vincolato diminuiscono i gradi di libertà: se il punto è vincolato ad un piano avrà 2 gdl.

Un sistema di n punti possiede $3n$ gradi di libertà. Un sistema di punti è **rigido** se le distanze tra i punti rimangono costanti.

Per n punti rigidi si possono definire $n(n-1)/2$ equazioni linearmente indipendenti che descrivono il sistema rigido.

1. Vincoli insufficienti: $gdv < gdl$;
2. **Isostatico**: $gdv = gdl$;
3. **Iperstatico**: $gdv > gdl$;

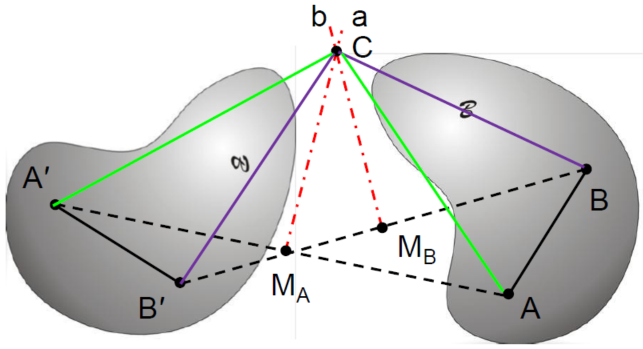
Qualora i vincoli dovessero essere efficaci esiste un numero di equazioni linearmente indipendenti per risolvere l'equilibrio del corpo rigido. Un copro rigido può compiere due movimenti: rotazione e traslazione.

1. **Traslazione**: le direzioni rettilinee del corpo dopo lo spostamento rimangono parallele a loro;

2. **Rotazione**: un punto solidale con il corpo denominato *centro di rotazione* abbia spostamento nullo;

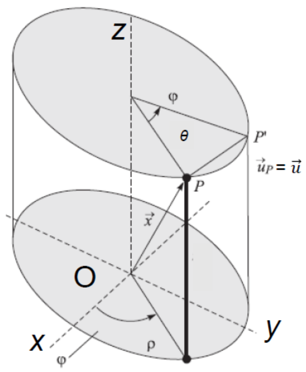
3. **Rototraslazione**: la composizione dei due movimenti;

In generale qualsiasi movimento di un corpo rigido nel piano può essere ridotto ad una pura rotazione attorno un centro di rotazione.



1.1 Linearizzazione di un movimento rigido

Per spostamenti infinitesimi i movimenti di rototraslazione possono essere linearizzati.



Consideriamo la rotazione di un disco rigido attorno al suo asse. Un punto P dopo una rotazione di un angolo θ sarà nella posizione P'. Il vettore

$\vec{x}$ avrà coordinate

$$x = \rho\cos(\phi)$$
$$y = \rho\sin(\phi)$$
$$z = z$$

mentre $\vec{x'}$

$$x' = \rho\cos(\phi+\theta)$$
$$y' = \rho\sin(\phi+\theta)$$
$$z' = z$$

Il vettore spostamento è definito come $\vec{u} = \vec{x'} - \vec{x}$. Il vettore spostamento avrà coordinate:

$$u = \rho\cos(\phi+\theta) - \rho\cos(\phi)$$
$$v = \rho\sin(\phi+\theta) - \rho\sin(\phi)$$
$$w = 0$$

Poichè stiamo parlando di piccole oscillazioni possiamo considerare la rotazione di un angolo infinitesimo $d\theta$.

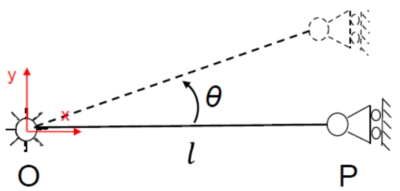
$$d\vec{u} = (\frac{\partial\vec{u}}{\partial\theta})_{\theta=0}d\theta \tag{1.1}$$

Le componenti del vettore spostamento in forma differenziale diventano

$$du = -\rho\sin(\phi)\,d\theta = -y\,d\theta$$
$$dv = \rho\cos(\phi)\,d\theta = x\,d\theta$$
$$dw = 0$$

E' quindi presente una linearità tra le componenti. In forma vettoriale possiamo scrivere

$$d\vec{u} = d\theta\,\vec{k}\times\vec{x} \tag{1.2}$$



Consideriamo il corpo rigido in figura. Se analizziamo l'esempio con i grandi spostamenti avremo uno spostamento del tipo

$$u = l(\cos\theta - 1)$$
$$v = l\sin\theta$$

Si noti che la componente u non è compatibile con il vincolo del carrello. Se analizziamo lo spostamento con le piccole oscillazioni avremo (derivando con $\theta = 0$ le componenti del vettore spostamento).

$$d\theta = \begin{cases} 0\,d\theta \\ l\,d\theta \end{cases}$$

In cui lo spostamento orizzontale è zero, quindi compatibile con il vincolo del carrello.

Applicazione nei moti nel piano

- Rotazione attorno ad un punto O:
$$d\vec{u_p} = d\vec{\theta} \times (P - O)$$
- Roto-traslazione nel piano:
$$d\vec{u_p} = d\vec{u_O} + d\vec{\theta} \times (P - O)$$

Nel piano quindi possiamo definire il vettore spostamento **infinitesimo** (non appesantiamo la notazione) come

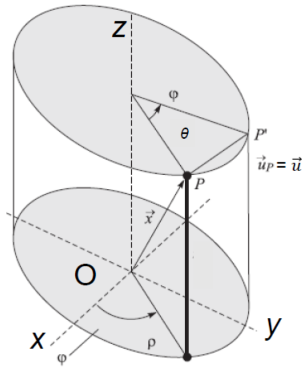
$$\vec{u_p} = \begin{cases} u_p = u_0 - \theta(y_p - y_0) \\ v_p = v_0 + \theta(x_p - x_0) \end{cases} \tag{1.3}$$

Per θ diverso da zero, in un moto piano esiste sempre un asse di pura rotazione che interseca il piano di moto nel **centro di istantanea rotazione**. Per trovare le coordinate del CIR per via analitica, poichè il CIR non si sposta nel piano possiamo utilizzare le equazioni scritte precedentemente che indicavano le componenti del vettore spostamento.

$$\begin{cases} u_{CIR} = u_0 - \theta(y_{CIR} - y_0) = 0 \\ v_{CIR} = v_0 + \theta(x_{CIR} - x_0) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

quindi si ha

$$\begin{cases} x_{CIR} = -\frac{v_o}{\theta} + x_0 \\ Y_{CIR} = \frac{u_o}{\theta} + y_0 \end{cases} \tag{1.5}$$



CIR per movimenti di traslazione

Per movimenti solamente traslatori il centro di rotazione istantanea è all'infinito lungo la perpendicolare della direzione di spostamento. Si ricorda che rette parallele si intersecano all'infinito, è un teorema importante per capire se le strutture sono labili o meno. In particolare, **se non trovo un CIR per il corpo rigido , significa che il corpo rigido è ben vincolato**.

Capitolo 2

Reazioni vincolari

L'equilibrio di un corpo è definito dalla risultante delle forze e dal risultante dei momenti che agiscono sul corpo rigido, ovvero

$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \\ \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{(P_i - O)} \times \vec{F}_i \end{cases} \tag{2.1}$$

Per un corpo lo spostamento infinitesimo è dato da

$$d\vec{u}_{P_i} = d\vec{u}_O + d\vec{\theta} \times \overrightarrow{(P_i - O)} \tag{2.2}$$

che corrispondono alle componenti di traslazione e rotazione. Per uno spostamento infinitesimo, il lavoro compiuto dalle forze allora sarà

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot d\vec{u}_{P_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \left(d\vec{u}_O + d\vec{\theta} \times \overrightarrow{(P_i - O)}\right) \\ &= \vec{R} \cdot d\vec{u}_O + d\vec{\theta} \cdot \vec{M}_i \end{aligned}$$

2.1 Corpo rigido non vincolato

per un corpo rigido non vincolato l'equilibrio è dato quando sia la risultante delle forze che dei momenti è nulla. In particolare per le leggi della meccanica

- Se il corpo rigido è in quiete rimane in quiete;
- Se il corpo rigido ruota o trasla con una certa velocità allora la velocità rimane invariata;

Il polo rispetto cui calcoliamo i momenti lo scegliamo noi. Questo perchè il momento di un corpo rigido in un punto O' sarà:

$$M_{O'} = M_O + (O \vec{-} O') \times \vec{R} \tag{2.3}$$

Se $\vec{R} = 0$ si ha che $\vec{M_{O'}} = \vec{M_o}$.

2.2 Corpo rigido non vincolato

Il **vincolo** è una reazione (forza o coppia) detta vincolare che impedisce uno o più tipi di movimento al corpo rigido. In particolare ogni reazione vincolare impedisce un grado di libertà.

Le reazioni vincolari sono un'aggiunta al sistema di carichi applicati al corpo rigido, e il problema è lo stesso del corpo rigido non vincolato: determinare l'equilibrio attraverso un sistema di forze. La **condizione necessaria e sufficiente** affinchè un sistema di corpi rigidi sia in equilibrio è che:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M_O} = \vec{0} \end{cases} \tag{2.4}$$

Come nel corpo non vincolato, **il polo di applicazione del momento è qualsiasi**.

Nello spazio si ha che

$$\begin{cases} \vec{R} = R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k} = \vec{0} \\ \vec{M_O} = M_x\hat{\imath} + M_y\hat{\jmath} + M_z\hat{k} = \vec{0} \end{cases} \tag{2.5}$$

ovvero si hanno sei equazioni. Nel piano, poichè sono possibili tre gradi di libertà, si hanno tre equazioni linearmente indipendenti. Le incognite sono le reazioni vincolari esterne (rispetto a terra) ed interne (con vincoli relativi tra i corpi rigidi). Sistemi equipollenti portano al medesimo risultato nel calcolo delle reazioni vincolari.

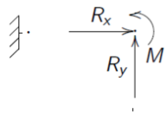
2.3 I vincoli

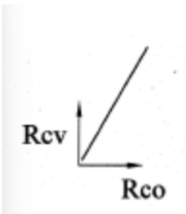
Le reazioni vincolari hanno componenti indipendenti pari ai gradi di vincolo di un componente. Molto importante è che i vincoli siano lisci (non ci deve essere dispersione di lavoro). I vincoli devono essere **bilateri**, ovvero le reazioni sono possibili lungo tutta la retta di applicazione dei vincoli e **perfetti**, ovvero non soffrono di rotture e **lo spostamento infinitesimo è nullo**.

Incastro L'incastro è un vincolo triplo, quindi avrà tre reazioni vincolari. Le componenti del vettore spostamento sono u_c, v_c, θ, mentre le componenti delle forze sono R_x, FRy, M.
Poichè la caratterizzazione energetica dei vincoli perfetti è che il lavoro sia nullo e che lo spostamento (per l'incastro) sia nullo in tutte le direzioni il lavoro sarà:

$$\begin{aligned} L &= u_c\, R_x + v_c\, R_y + \theta\, M \\ &= 0 \end{aligned}$$

Quindi poichè lo spostamento è nullo, e il lavoro sarà sempre nullo, le reazioni vincolari R_x, FRy, M possono assumere un valore qualsiasi.



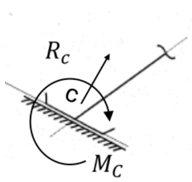


Cerniera

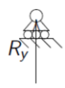
Nella cerniera si avrà che

$$L = u_c\, R_x + v_c\, R_y + \theta\, M = 0 \tag{2.6}$$

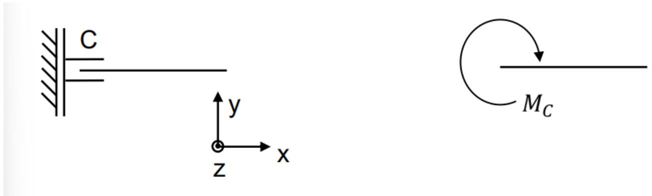
Poichè lo spostamento lungo x e y è nullo, affinchè il lavoro sia nullo la reazione vincolare del momento deve essere nulla: $\vec{M} = 0$.



Pattino Con un ragionamento analogo si osserva che affinchè il lavoro sia nullo, deve essere la componente R_x ad essere nulla.



Carrello Nel carrello sia il momento che la forza orizzontale sono nulle, in quanto il vincolo è solo verticale.

Bipattino 

Nel bipattino le reazioni vincolari parallele ai piani di scorrimento devono essere nulle.

Sistema di corpi rigidi Nei sistemi di corpi rigidi è importante calcolare le reazioni interne dei vincoli relativi tra i corpi rigidi. Dal punto di vista cinematico è ancora possibile utilizzare le bielle.

Approccio matematico Si schematizza innanzitutto la struttura e se ne evidenziano le reazioni vincolari. Si imposta il sistema di equazioni cardinali e si risolve.

E' un metodo utilizzato perlopiù per software o esempi semplici.

Metodo manuale Dopo aver schematizzato la struttura ed aver evidenziato le reazioni vincolari per prima cosa **risolvo il problema rispetto alla terra**, **apro i nodi della struttura**, **individuo le equazioni di equilibrio e trovo le incognite**.

Carichi distribuiti Le equazioni cardinali della statica fanno riferimento a forze concentrate in un solo punto rispetto il corpo rigido. tuttavia è possibile utilizzare carichi con forze in volume, ovvero la cui distribuzione non è uniforme. Per risolvere questo problema devo trovare un sistema di forze equipollenti.

Conviene trovare un punto per cui i momenti di tutte le forze si annullano, ovvero le forze vanno applicate lungo la retta del baricentro del corpo. Quindi il sistema di risoluzione sarà composto da **una forza risultante e momento nullo**. La retta di applicazione è parallela al fascio improprio delle forze.

Per esempio il peso di una trave non distribuito uniformemente, a parità di spessore si ha

$$F_{tot} = tg \int f(s)\, ds \tag{2.7}$$

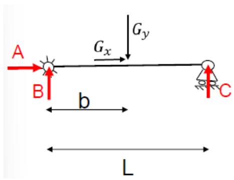
2.4 Analisi cinematica e calcolo delle reazioni vincolari

Teorema 1 (Teorema di Rouchè-Capelli)**.** *Affinchè un sistema lineare di n variabili ammetta una soluzione, è necessario che il sistema sia compatibile, ovvero che il rango della matrice dei coeeficienti sia uguale al rango della matrice stessa orlata con i termini noti.*

$$r(A) = r(A|\vec{b}) \tag{2.8}$$

Inoltre il numero di soluzioni è dato da ∞^{n-R} con R rango del sistema.

Caso isostatico ben vincolato



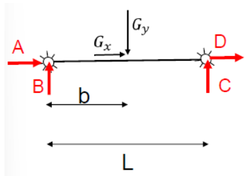
$$\begin{cases} A + G_x = 0 \\ B + C - G_y = 0 \\ CL - G_y b = 0 \end{cases}$$

Quindi in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0L & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_x \\ G_y \\ G_y b \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Il numero di soluzione è uno, perchè il rango della matrice dei coefficienti è lo stesso della matrice orlata dei termini noti.

Caso iperstatico

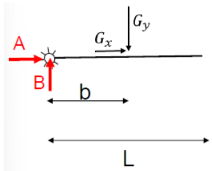


$$\begin{cases} A + D + G_x = 0 \\ B + C - G_y = 0 \\ CL - G_y b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_x \\ G_y \\ G_y b \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Quindi il rango della matrice orlata è maggiore della matrice dei coefficienti e si hanno infinite soluzioni. D diventa un parametro.

Caso ipostatico

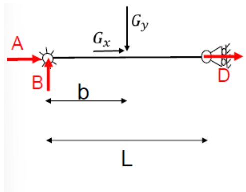


$$\begin{cases} A + G_x = 0 \\ B - G_y = 0 \\ -G_y b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_x \\ G_y \\ G_y b \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Se $G_y \neq 0$ allora il sistema è impossibile.

Caso labile



$$\begin{cases} A + G_x + D = 0 \\ B - G_y = 0 \\ -G_y b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -G_x \\ G_y \\ G_y b \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Si ha che $n = 3$, il rango della matrice è 2 e il rango della matrice orlata è 3. Quindi si hanno infinite soluzione. Si nota che il sistema è iperstatico orizzontalmente.

2.5 Azioni interne

Immaginiamo di spezzare un'asta rigida. Tra i due componenti che si sono creati avremo delle reazioni interne, che possono essere **reazione assiale**, **taglio** e **momento flettente**.

Per quanto riguarda il momento questo si trova spesso in funzione della distanza

Per trovare le reazioni interne in generale si suddivide la struttura in domini. Spezzo la struttura in un punto generico del dominio e calcolo le reazioni interne.