Principi di Ingegneria Elettrica

Mattia Ruffini

Settembre 2022

Indice

Capitolo 1

Introduzione

L'elettrotecnica si basa sulle quattro leggi di Maxwell formulate nel 1873. Sono le seguenti:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L \tag{1.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{1.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j_L + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1.4}$$

Dove

- $\vec{D}$ è il vettore **induzione dielettrica**, e ρ_L è la densità di carica libera;
- $\vec{B}$ è il vettore **induzione magnetica**;
- $\vec{E}$ è il **campo elettrico**;
- $\vec{H}$ è il vettore **campo magnetico** mentre j_L è la densità di corrente;

I vettori di induzioni sono legati ai loro rispettivi campi:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

dove ϵ è la **permettività** mentre μ è la **permeabilità**. Queste equazioni sono alle derivate parziali nello spazio, di conseguenza la loro applicazione è molto difficile. Nell'elettrotecnica possono essere fatte delle semplificazioni in quando le onde elettromagnetiche hanno frequenze relativamente basse. Per onde elettromagnetiche con frequenza molto alta (come negli smartphone) devono essere applicate le leggi di Maxwell in modo rigoroso.

Nonostante la difficoltà nel comprendere queste leggi queste dicono alcune informazioni interessanti.

1. La divergenza di $\vec{D}$ indica come un punto si allontana da un altro. Se la divergenza è nulla, non si allontana, se la divergenza è positiva si allontana e se è negativa il punto si avvicina. Dunque è possibile definire le linee del campo elettrico, che escono dalle cariche positive ed entrano in quelle negative. Negli altri punti di passaggio la divergenza è di passaggio. In analisi quando la divergenza è nulla si ha o un massimo (cariche positive) o un minimo (cariche negative).

2. Analogamente a prima, la divergenza dell'induzione magnetica è nulla, dunque le linee di campo non hanno una sorgente e un "pozzo", ma sono chiuse. Esiste infatti un dipolo magnetico e non un monopolo.

3. Le ultime due leggi indicano che il campo elettrico è prodotto da una variazione del campo magnetico, e a sua volta il campo magnetico indotto è prodotto dalla variazione del campo elettrico. Inoltre è vera la relazione per cui
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{1.5}$$

1.1 Alcune leggi

Si definisce **corrente continua** una corrente costante nel tempo. E' una corrente alternata una corrente la cui intensità varia nel tempo. In Europa la frequenza della corrente alternata è di 50 Hz, con una tensione di 230 Volt.

La corrente elettrica è definta *come la quantità di carica positiva che passa attraverso una sezione nell'unità di tempo*

$$i = \frac{dq}{dt}\,[A] \tag{1.6}$$

La **tensione** è il lavoro per unità di carica

$$V = \frac{dW}{dq}\,[V] \tag{1.7}$$

La velocità di deriva degli elettroni è diversa dall'intensità di corrente e non è la velocità della luce.

Attraverso il lavoro elettrico è possibile fare diverse operazioni: produrre calore, produrre lavoro meccanico, produrre lavoro chimico o di altro tipo oppure immagazzinare energia.

1.2 Bipoli elettrici

I bipoli elettrici sono elementi che vengono utilizzati nella creazione di un circuito elettrico e hanno una specifica funzione.

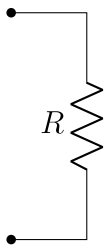
Normalmente per studiare un i bipoli si utilizza la **convenzione degli utilizzatori**, ovvero si misura la corrente in entrata di un polo, e quel polo sarà a potenziale maggiore. Esiste anche la **convenzione dei generatori** che per essere ottenuta bisogna invertire un parametro alla convenzione degli utilizzatori.

- **Resistori** La potenza elettrica viene convertita in calore. Il resistore è il terminale, e il suo parametro è la **resistenza**. Per la legge di Ohm

$$V = Ri \tag{1.8}$$

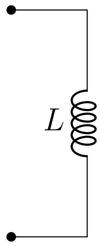
E inoltre

$$P = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R} \tag{1.9}$$



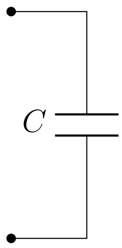
- **Induttori**, che hanno come parametro l'induttanza [Henry]. Un induttore è anche resistore ma prevale l'effetto induttivo.

$$V = L\frac{di}{dL} \tag{1.10}$$



Condensatori, che hanno come parametro la capacità [Farad]. Sono delle piastre cariche separate da un materiale isoelettrico. Immagazzina energia sotto forma di campo elettrico.

$$i = C\frac{dV}{dt} \tag{1.11}$$



Tensione o differenza di potenziale? Si parla di differenza di potenziale quando il campo vettoriale a cui è associato è conservativo. Il campo elettrico **non è conservativo** perchè valgono le leggi di Maxwell, tra cui

$$\nabla\vec{E} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Per questo motivo si utilizza il termine tensione e non differenza di potenziale.

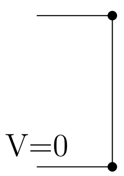
1.3 Cortocircuiti, circuiti aperti, generatori

Cortocircuito In caso di regime **stazionario, cioè con corrente costante** per gli induttori sappiamo che

$$v = L\frac{di}{dt} = 0$$

per qualsiasi corrente e si ha un cortocircuito. Il simbolo del cortocircuito è il seguente,...

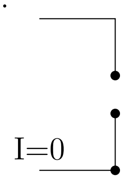
Un corto circuito è un elemento che può essere percorso da qualsiasi corrente ma non ha tensione ai suoi capi. Un altro esempio di cortocirciuto è quello con resistenza nulla ($R = 0$).



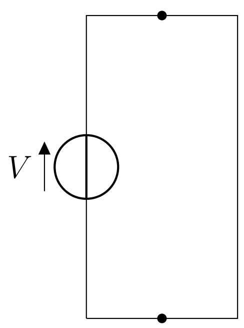
Circuito aperto Considerando un condensatore in regime stazionario in cui la tensione rimane costante, poichè

$$i = C\frac{dv}{dt} = 0$$

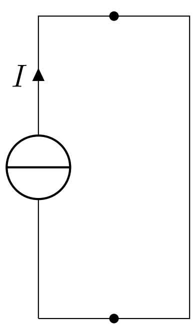
per qualsiasi tensione. Quindi il circuito è aperto e non vi è corrente. L'analogo per il resistore è quando la resistenza è idealmente infinita ($R = \infty$).



Generatore ideale di Tensione Il generatore ideale di tensione impone una tensione ai suoi capi, *qualunque sia la corrente che lo attraversa.* La connessione di due bipoli crea un circuito o rete elettrica.



Generatore ideale di corrente E' un dispositivo che impone una corrente per qualsiasi tensione. Il generatore ideale di corrente nella realtà non esiste, è una modellazione di un sottosistema nei sistemi complessi.



1.4 Leggi di Kirchhoff

1. **Legge delle tensioni**

   La sommatoria delle tensioni misurate in un percorso chiuso è uguale a zero.

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 0 \tag{1.12}$$

2. **Legge delle correnti**

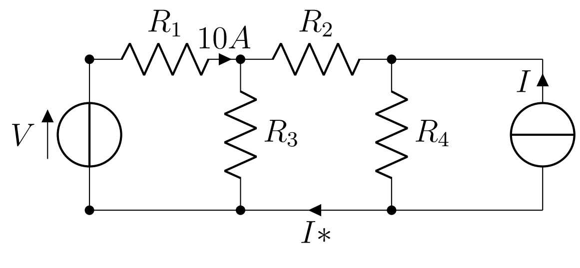
   Presa una superficie qualsiasi chiusa, la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti, oppure, *la sommatoria delle correnti prese con il loro segno è nulla.*

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \tag{1.13}$$

Teorema 1 (Teorema fondamentale dell'elettrotecnica)**.** *Dato un circuito elettrico qualsiasi, le leggi di Kirchhoff delle correnti e delle tensioni, e le leggi di Ohm costituiscono un numero di equazioni sufficienti per risolvere la rete. La soluzione del circuito* ***esiste ed è unica****.*

Di conseguenza, per semplificare le reti, è possibile utilizzare mezzi che non infrangano queste leggi.

Un esempio di applicazione delle leggi di Kirchhoff è il seguente. Sia data la seguente rete.

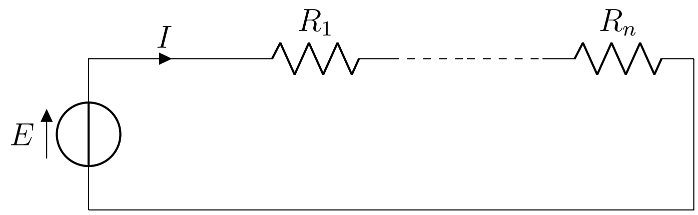


Che corrente si avrà in $I*$? Scegliendo la giusta superficie chiusa è ovvio che $I* = 10A$.

Capitolo 2

Connessioni in serie e parallelo

2.1 In serie



Per i resistori in serie la tensione ai capi del primo resistore e ai capi dell'ultimo sono uguali. Per la legge di Kirchhoff sulle tensioni e la legge di Ohm si ha che:

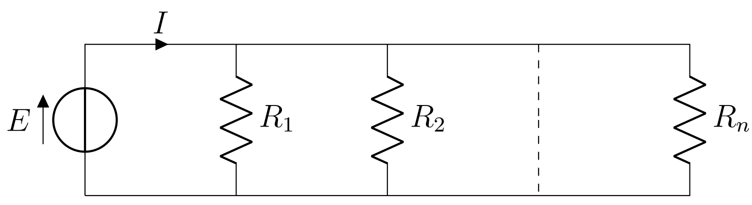
$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n \tag{2.1}$$

$$V = I(R_1 + R_2 + ... + R_n) \tag{2.2}$$

Tuttavia se il nostro obiettivo è semplificare la rete con una resistenza equivalente, cioè arrivare ad un'equazione del tipo $V = IR_eq$ si arriva alla conclusione per cui

$$R_eq = R_1 + R_2 + ... + R_n \tag{2.3}$$

2.2 In parallelo



Per i resistori in parallelo si introduce la **conduttanza** $G = \frac{1}{R}\,[S]$. L'unità di misura è il Siemens. Esiste anche l'**elastanza induttiva e capacitiva per induttori e condensatori**.

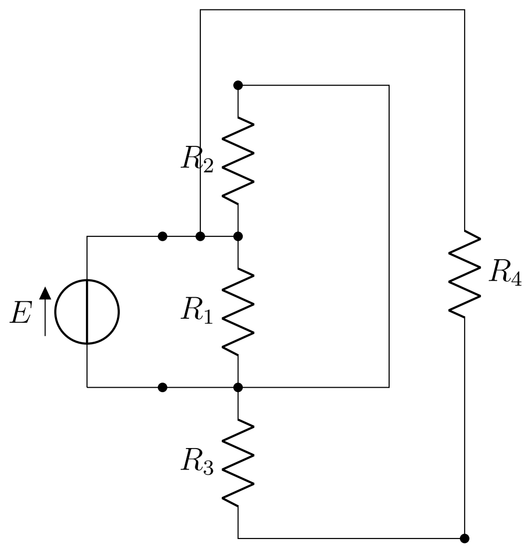
Nelle reti con resistenze in parallelo rimane costante la tensione, cambia la corrente che attraversa i nodi. Quindi si hanno le seguenti equazioni.

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_n \tag{2.4}$$
$$I = G_1V + G_2V + ... + G_nV \tag{2.5}$$

Quindi si ha che

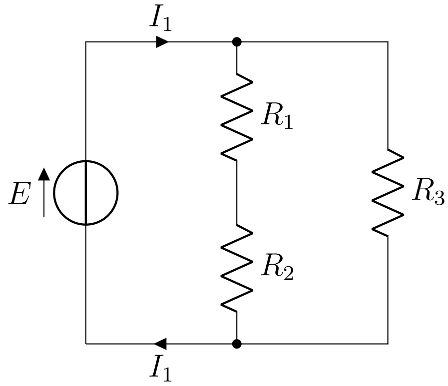
$$\frac{1}{R_eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n} \tag{2.6}$$

2.3 Semplificazione delle reti



Teorema 2. *Teorema fondamentale dell'elettrotecnica * Data una rete elettrica, l'insieme delle leggi di Kirchhoff delle correnti e delle tensioni e le leggi dei legami costitutivi (Ohm, Faraday per induzione e capacità) queste leggi costituiscono un numero di equazioni linearmente indipendenti per risolvere la rete.*

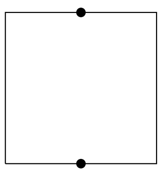
Dimostrazione Consideriamo una rete qualsiasi



In questa rete, se scriviamo la legge di Kirchhoff delle correnti per tutte le correnti, queste compariranno in un'equazione con verso positivo e in un'equazione con verso negativo, perchè la stessa legge di Kirchoff per cui data una linea chiusa le correnti che entrano devono uscire. Per trovare le equazioni lineari indipendenti devo far sì che le equazioni non siano l'opposto, quindi tolgo una delle due equazioni per una corrente, in particolare per n nodi avrò $n - 1$ equazioni.

Lo stesso ragionamento si può fare per la legge dei legami costitutivi, in particolare per ogni bipolo avrò una specifica equazioni, quindi per l bipoli ho l equazioni linearmente indipendenti.

Si consideri ora la rete minima formata da due nodi e due bipoli. Una rete di questo tipo è chiamata **anello**.



Le equazioni agli anelli sono indipendenti, perchè i bipoli compaiono una sola volta. Si dimostra tramite il principio di induzione che le equazioni indipendenti per la legge di Kirchhoff delle tensioni è $l - n + 1$. In totale si hanno $2l$ equazioni linearmente indipendenti.

Principio di sovrapposizione del campo degli effetti Il principio di sovrapposizione degli effetti è un metodo per la risoluzione delle reti. Il metodo consiste nel rimuovere volta per volta i generatori presenti nel circuito.

- I generatori di tensione diventano dei cortocircuiti;

- I generatori di corrente diventano circuiti aperti;

Una volta diviso i casi quanti sono i generatori nel circuito, per ogni utilizzatore si avrà tante tensioni o correnti quante lo sono i generatori. La somma delle tensioni o delle correnti porta alla tensione o corrente effettiva dell'utilizzatore.

Partitore di tensione Si applica solo quando sono presenti **resistenze in serie**. Per un circuito con due resistenze in serie si avrà:

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \tag{2.7}$$

Partitore di corrente Si applica solamente **per resistori in parallelo**. data una rete con due resistenze in parallelo si ha

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} A \tag{2.8}$$

$$I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \tag{2.9}$$

Resistenza e conduttanza sono termini **duali**, di conseguenza possono essere invertiti. Il principio di dualismo è anche presente nei teoremi di Thevenin e Norton.

Si ricordi che un generatori di corrente ai suoi capi **ha sempre una tensione**. Quando nel circuito sono presenti almeno due generatori, allora non è detto che tutti forniscano potenza. E' possibile che alcuni generatori assorbano potenza (la loro tensione ai capi è negativa) e quindi stiano ricaricando.

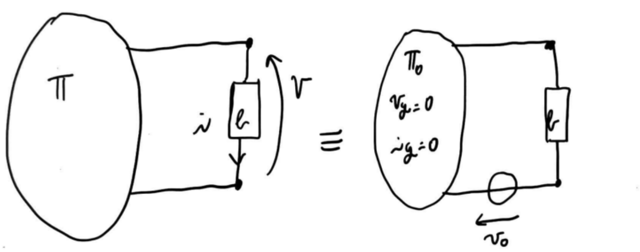
Teorema di sostituzione

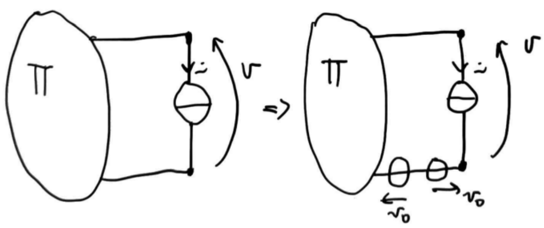
Se ho un bipolo qualsiasi di cui conosco tensione e corrente, se sostituisco il bipolo con un generatore di tensione con la medesima tensione, o di corrente con la medesima corrente, il circuito non cambia.

Teorema di Thevenin

Teorema di Thevenin *

Data una rete lineare a cui è collegata un generico bipolo "b", agli effetti del calcolo della corrente e della tensione, posso sostituire la rete con una rete con tensione misurata a vuoto senza "b" e una resistenza equivalente misurata spegnendo i generatori.



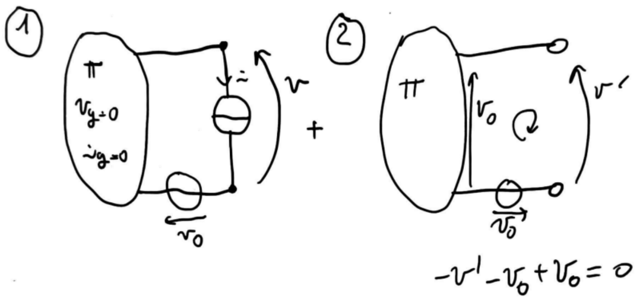


Dimostrazione Si applica come prima cosa il Teorema di sostituzione, sostituendo il bipolo "b" con un generatore di corrente che ha la stessa corrente misurata ai capi di "b".

Dopodichè si applica il principio di sovrapposizione delle causa e degli effetti, in particolare la rete che abbiamo viene divisa in due, e la somma di queste due reti equivale alla rete originaria.

1. La prima rete è composta dalla rete lineare con i generatori spenti, a cui è collegata in serie un generatore di tensione che applica una tensione v_0. La tensione v_0 è la stessa misurata a vuoto ai capi della rete Π. Infine in serie è collegato il generatore di corrente con una corrente i. Questa rete equivale all'equivalente di Thevenin.

2. La seconda rete è formata dalla rete Π con un circuito aperto. In serie però è presente un generatore di tensione v_0 che ha verso opposto a quello nella rete di Thevenin.



Sommando le due reti si ottiene la rete iniziale da risolvere. Tuttavia il nostro obiettivo è dimostrare l'equivalenza tra la rete di partenza e quella di Thevenin, quindi bisogna dimostrare che l'effetto della seconda rete è nullo. Poichè il circuito è aperto si osserva che la corrente è nulla. Mentre la tensione v' ai capi del circuito aperto si misura con le leggi di Kirchhoff:

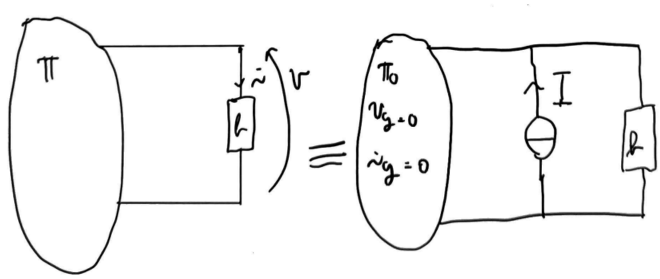
$$-v' - v_0 + v_0 = 0 \tag{2.10}$$

quindi anche la tensione è nulla, in quanto la tensione del generatore aggiunto è opposta ma di medesima intensità a quella della rete Π per ipotesi.

Teorema di Norton

Teorema di Norton * (duale di Thevenin)

Data una rete lineare Π con un bipolo "b", la rete diventa equivalente a un generatore di corrente in parallelo alla conduttanza equivalente, in cui il generatore ha la stessa corrente della rete chiusa, e la conduttanza è calcolata con i generatori di corrente e tensione della rete Π spenti.

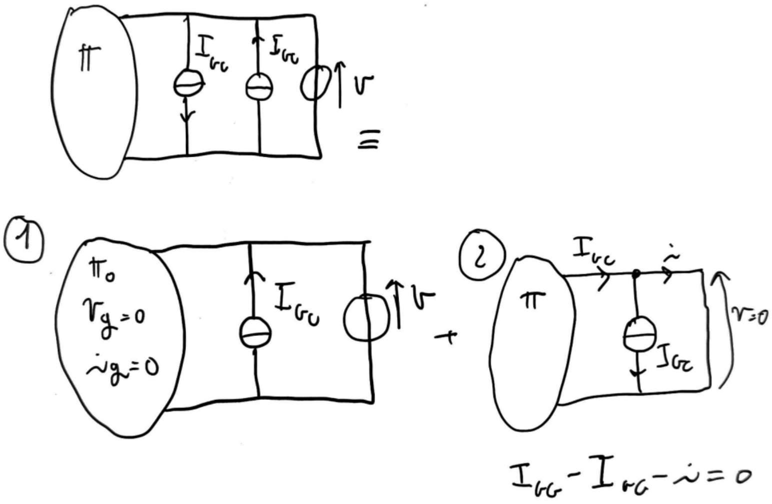


Poichè il Teorema di Norton è il duale di Thevenin, è possibile passare da uno all'altro sostituendo le parole duali, come serie e parallelo, resistenza e conduttanza, generatore di tensione e generatore di corrente.

Dimostrazione Analogamente alla dimostrazione del teorema di Thevenin, si parte dal Teorema di sostituzione e di conseguenza sostituendo il bipolo b con un generatore di tensione v. Alla rete inoltre si aggiungono due generatori di corrente in parallelo di intensità I_{gc} ma di verso opposto. Si divide la rete in due.

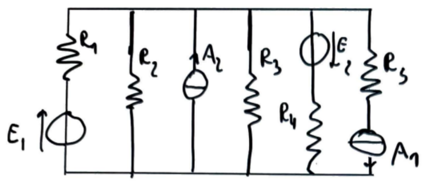
1. La rete equivalente di Norton è composta dalla rete Π con i generatori spenti, in parallelo il generatore di corrente I_{gc}. La corrente I_{gc} è la stessa misurata dalla rete Π con un cortocircuito. E inoltre in parallelo con il generatore di corrente è presente il generatore di tensione.

2. L'altra rete è composta dalla rete Π, dal generatore di corrente in parallelo con verso opposto a quello della rete di Norton. Per la legge di Kirchoff ai nodi si ha
$$I_{gc} - i + I_{gc} = 0 \tag{2.11}$$
quindi la corrente nel circuito è nulla, così come la tensione in quanto è presente un cortocircuito.

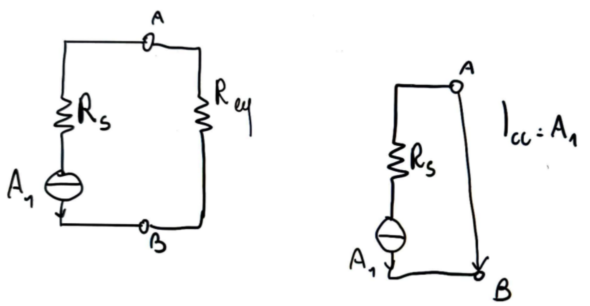


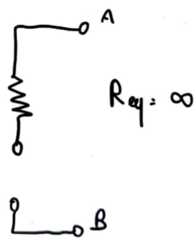
2.4 Formula di Millman

Reti binodali Dopo una semplificazione delle reti attraverso i teoremi di Thevenin e Norton spesso si arriva ad una rete con due nodi e i bipoli collegati in parallelo. Come in questo caso:

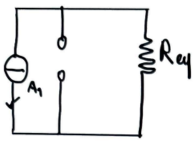


1. La rete composta da R_5 e il generatore di corrente A_1 può essere semplificata secondo il Teorema di Norton. Si misurano l'intensità di corrente a vuoto e la resistenza equivalente.

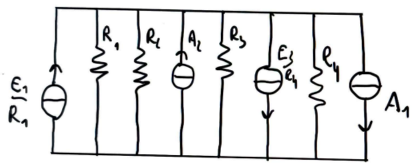




Si nota che ai fini del restante circuito collegato la resistenza R_5 può non essere considerata.



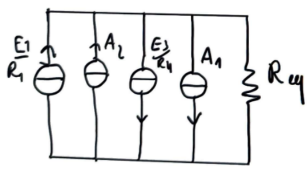
2. Per misurare la tensione della rete binodale si applicano nuovamente Thevenin e Norton.



3. Si misura la resistenza equivalente essendoci solamente resistenze in parallelo. La corrente totale sarà la somma delle correnti. Quindi banalmente la tensione ai capi del circuito sarà:

$$V = \frac{\frac{E_1}{R_1} + A_2 - \frac{E_2}{R_4} - A_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \tag{2.12}$$

e corrisponde alla **formula di Millman**.



Capitolo 3

Corrente Alternata

Nei regimi di corrente alternata, le equazioni di Maxwell cambiano risultato rispetto alle reti DC. Di conseguenza non è possibile utilizzare le leggi di Ohm e Kirchhoff. Tuttavia per frequenze relativamente basse è possibile fare le giuste approssimazioni. In particolare quando

$$R < \lambda \tag{3.1}$$

E' possibile fare alcune approssimazioni. Poichè per le onde elettromagnetiche $\lambda = c/f$, per corrente alternata a 50 Hz il circuito deve essere minore di 6000 Km. Per frequenze molto alte (come quelle dei telefoni) queste approssimazioni non valgono più.

Tensione in corrente alternata Immaginiamo un circuito con un generatore di tensione a cui sono collegati in serie un resistore, un induttore e un condensatore.

$$\left| \begin{array}{c|c} R & v_R = Ri \\ L & v_L = L\frac{di}{dt} \\ C & v_C = \frac{1}{C}\int i\,dt \end{array} \right|$$

La tensione del generatore sarà dunque data dalla legge di Kirchhoff:

$$v = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt \tag{3.2}$$

la soluzione di questa equazione è estremamente complessa, se si pensa inoltre che la soluzione è sinusoidale la risoluzione sembra ancora più complessa.

3.1 Trasformata di Steinmetz

La trasformata di Steinmetz lega in una relazione biunivoca le sinusoidi con i numeri complessi

$$a + jb \Longleftrightarrow A\cos(\omega t + \phi) \tag{3.3}$$

Si ricorda la relazione di Eulero $e^{j\pi} + 1 = 0$ dove $j = \sqrt{-1}$. La relazione di Eulero lega i numeri complessi con le coordinate del piano.

Grazie alla relazione di Eulero e la trasformata di Steinbeck la soluzione all'equazione 3.2 diventerà

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V_{max}\cos(\omega t + \phi) = \Re\left(V_{max}e^{j(\omega t+\phi)}\right) \tag{3.4}$$

Se la tensione è sinusoidale nella legge di Ohm non cambia la frequenza ma solo l'intensità (ampiezza) della corrente alternata. Lo stesso vale per induttori e condensatori. Quindi data la frequenza del generatore di tensione, questa sarà la stessa frequenza della corrente. Quindi valgono sia le leggi di Ohm che di Kirchhoff, in quanto le grandezze sono alla stessa frequenza.

$$\Re\left(V_{max}e^{j\phi}e^{j\omega t}\right) = \Re\left(\overline{V^*}e^{j\omega t}\right) \tag{3.5}$$

Poichè la frequenza è costante la parte trascurabile della trasformata di Steinmetz è $e^{j\omega t}$ in quanto sarà la stessa per un qualsiasi istante. Invece è **significativa** la grandezza $V_{max}e^{j\phi}$ chiamata anche **antitrasformata di Steinmetz**. La grandezza $\overline{V^*}$ è un numero reale, e la tensione effettiva nel circuito è data dalla parte reale. La corrente in modo analogo avrà una forma del tipo

$$i = \Re\left(\overline{I^*}e^{j\omega t}\right) \tag{3.6}$$

Le grandezze $\overline{I^*}$ e $\overline{V^*}$ sono chiamati **fasori**. Le leggi di Ohm e Kirchhoff valgono per i fasori, infatti

$$\begin{aligned} v &= R\Re\left(\overline{I^*}e^{j\omega t}\right) \\ &= \Re\left(R\cdot\overline{I^*}e^{j\omega t}\right) \\ &\to \overline{V^*} = R\cdot\overline{I^*} \end{aligned}$$

Essendo i fasori costanti posso utilizzarli nella legge di Ohm e nelle altre.

3.2 Induttori

Dato un circuito con un induttore L si ha che

$$
\begin{aligned}
v &= L\frac{d\Re\left(\overline{I^*}e^{j\omega t}\right)}{dt} \\
&= \Re\left(L\overline{I^*}\cdot j\omega\right) \\
&\rightarrow \overline{V^*} = j\omega L\overline{I^*}
\end{aligned}
$$

Viene chiamata **reattanza** la grandezza $X = \omega L\,[\Omega]$.

Impedenza Se in un circuito è presente una resistenza e un induttore, utilizzando la legge di Ohm sui fasori si ha che

$$\overline{V^*}_R = R\overline{I^*} \tag{3.7}$$

$$\overline{V^*}_L = j\omega L\overline{I^*} = jX_L\overline{I^*} \tag{3.8}$$

$$\rightarrow \overline{V^*} = \overline{I^*}\left(R + jX_L\right) \tag{3.9}$$

La grandezza $R + jX_L = \overline{Z}$ viene chiamata **impedenza**.

3.3 Condensatori

Si applica la legge di Ohm sui fasori.

$$\overline{I^*} = C\frac{\Re\left(\overline{V^*}e^{j\omega t}\right)}{dt} \tag{3.10}$$

$$\overline{I^*} = j\omega C\overline{V^*} \tag{3.11}$$

$$\rightarrow \frac{1}{j\omega C}\overline{I^*} \tag{3.12}$$

$$= -\frac{j}{\omega C}\overline{I^*} \tag{3.13}$$

Viene chiamata **reattanza del condensatore** la grandezza $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Quindi si ha

$$\overline{V^*} = -jX_C\overline{I^*} \tag{3.14}$$

Quindi si l'impedenza di un circuito con resistenza, induttore e condensatore sarà: $\overline{Z} = R + j(X_L - X_C)$.

Valore efficace Il valore efficace, o fasore efficace è il fasore diviso la radice quadrata di due. Il valore efficace di una grandezza è quella che produce le stesse perdite. Per le nostre case il valore efficace della tensione è 230 V. La massima tensione che si raggiunge è di 325 V.

3.4 Ritardo o anticipo della corrente

Consideriamo un bipolo con una certa impedenza e attraversato da una corrente alternata i. Sul bipolo si avrà una caduta di tensione v. Passando ai fasori con i valori efficaci si ha che

$$\overleftarrow{I} = \frac{\overline{V}}{\overline{\overline{Z}}} \tag{3.15}$$

3.4.1 Resistore e induttore

Quando il nostro bipolo è costituito da un resistore e un induttore allora l'impedenza sarà $\overline{Z} = R + jx_L$. Per la relazione scritta abbiamo che

$$\begin{aligned} Ie^{j\phi} &= \frac{e^{j\phi_i}e^{j\phi_v}}{Ze^{j\phi_z}} \\ &= \frac{V}{Z}e^{j(\phi_v - \phi_z)} \end{aligned}$$

Un modo per riscrivere l'impedenza come numero complesso è

$$\overline{Z} = \sqrt{R^2 + x_L^2} \cdot e^{j\arctan(\frac{x_L}{R})} \tag{3.16}$$

L'angolo di sfasamento ϕ_z è positivo, dunque poichè $\phi_i = \phi_v - \phi_z$ allora la corrente sarà più indietro rispetto la tensione, quindi rispetto ad un istante di tempo iniziale la corrente **è in ritardo**.

I circuiti omicroinduttivi sono molto importanti, in quanto rappresentano la maggior parte dei circuiti composti da resistenze e i fili possono avere delle conformazioni in modo da diventare induttori.

3.4.2 Resistore e condensatore

Ora consideriamo un bipolo composto da una resistenza e un condensatore. L'impedenza sarà $\overline{Z} = R - x_c$. In modo analogo a quello precedente l'impedenza sarà:

$$\overline{Z} = \sqrt{R^2 + x_c^2} \cdot e^{j\arctan(\frac{1}{\omega CR})} \tag{3.17}$$

L'angolo ϕ_z in questo caso è negativo quindi poichè $\phi_i = \phi_v - \phi_z$ la corrente avrà un angolo di sfasamento maggiore e dunque la corrente sarà più avanti ovvero **in anticipo**.

3.4.3 Solo induttore o condensatore

Nei circuiti con solo induttori la corrente sarà in ritardo con un angolo di $\pi/2$ rispetto la tensione. Per i circuiti con solo condensatori la corrente sarà in anticipo di $\pi/2$.

3.5 Potenza

Abbiamo la tensione e la corrente definite come

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2}V\cos(\omega t + \phi) \\ i &= \sqrt{2}I\cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Poichè tensione e corrente hanno lo stesso angolo di sfasamento il circuito ha solo un resistore R. La potenza in funzione del tempo sarà quindi

$$p = 2VI\cos^2(\omega t + \phi) \tag{3.18}$$

Si avrà quindi una potenza media chiamata anche **potenza attiva**

$$P_m = P_a = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt \tag{3.19}$$

Utilizzando le formule di prostaferesi si ha che

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \\ &= 2VI\,\frac{1}{2}\,(\cos(2\omega t) + \cos(0)) \\ &= VI + VI\cos(2\omega t) \end{aligned}$$

Quindi si ha che la potenza efficace è $\frac{1}{2}VI$.

Come valore è importante anche la **potenza applicata**, che equivale **alla massima oscillazione rispetto il valore medio**.

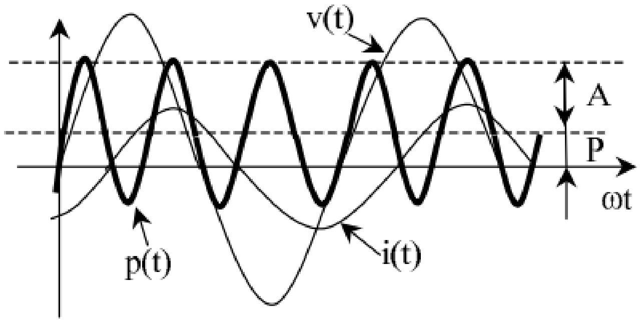
Corrente in ritardo Se la corrente è in ritardo la potenza ha un valore medio positivo. In particolare quando la potenza ha un valore negativo significa che accumula energia e successivamente la restituisce. Un circuito in corrente alternata con solo un induttore la potenza induttiva è nulla, non c'è uno scambio di energia quindi il generatore cede potenza che viene completamente accumulata dall'induttore che la restituisce poi.

Ammettenza L'ammettenza è definita come

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{\overline{Z}}} \tag{3.20}$$

3.6 Potenza attiva e potenza reattiva

Consideriamo un circuito con una resistenza e un induttore in regime di corrente alternata. La corrente sarà in ritardo rispetto la tensione.



La potenza quindi sarà

$$p = vi = 2VI\cos(\omega t) \cdot \cos(2\omega t - \phi) \tag{3.21}$$

Utilizzando le formule di Werner si ha che

$$p = VI\cos(\phi) + VI\cos(2\omega t - \phi) \tag{3.22}$$

In particolare si evidenziano due termini.

1. La **potenza attiva**
$$P_a = VI\cos(\phi) \tag{3.23}$$
che corrisponde anche alla potenza media, e infatti corrisponde a $\frac{1}{T}\int_0^T pdt$. La potenza attiva si misura in W

2. La **potenza apparente** $A = VI$. La potenza apparente dà un indice su come deve essere modellato il sistema affinchè funzioni. La potenza apparente è la massima oscillazione della potenza istantanea attorno al valore medio. La potenza apparente si misura in $[VA]$ (Voltampere).

L'altro termine della potenza è $VI\cos(2\omega t - \phi)$. Attraverso la formula di scomposizione del coseno della differenza possiamo riscriverlo come

$$VI[\cos(2\omega t)\cos(\phi) + \sin(2\omega t)\sin(\phi)]$$
$$\rightarrow p = VI\cos(\phi) + VI\cos(\phi)\cos(2\omega t) + VI\sin(\phi)\sin(2\omega t)$$

Potenza reattiva E' chiamata potenza reattiva il termine della potenza

$$Q = VI\sin(\phi) \tag{3.24}$$

La potenza reattiva Q è misurata in voltampere reattivi. La potenza attiva sarà $S = \sqrt{P_a^2 + Q^2}$. La potenza reattiva indica l'accumulo dell'induttore o il condensatore. In particolare l'accumulo degli induttori e dei conduttori è sfasato di $\pi/2$. In un circuito con un induttore e un condensatore si ha

$$\begin{aligned} L: &\ VI\sin(\phi)\sin(2\omega t) \\ C: &\ VI\sin(-\phi)\sin(2\omega t) \end{aligned}$$

la potenza reattiva totale è nulla. In un circuito di questo tipo, dopo aver caricato l'induttore e il condensatore, anche dopo aver staccato il generatore l'induttore e il condensatore accumulano e scaricano energia continuamente.

3.7 Teorema di Telleghen e corollario di Bucherot

Teorema di Telleghen

Dato un grafo orientato, definita una serie di variabili i_k che soddisfa le leggi di Kirchoff delle correnti, definita una serie di variabili v_k che soddisfa la legge di Kirchoff delle tensioni, allora si ha che

$$\sum_{k=1}^{n} i_k \cdot v_k = 0 \tag{3.25}$$

Poichè le variabili scelte possono **non essere grandezze fisiche**, basta che soddisfino le leggi di Kirchoff. Quindi, per esempio, considerando una rete con una resistenza in corrente alternata si ha che

$$\overline{VI_1} - \overline{V_2 I_2} = 0 \tag{3.26}$$

$$Ve^{j\phi_v}Ie^{-j\phi_i} = VIe^{j(\phi_v - \phi_i)} \tag{3.27}$$

$$= Ae^{j\phi} = VI\cos(\phi) + jVI\sin(\phi) \tag{3.28}$$

$$= P + jQ = A \tag{3.29}$$

Quindi si ha che $A = \sqrt{P^2 + Q^2}$. Il cambio di segno dell'angolo ϕ è dato perchè utilizziamo il congiunto del fasore $\overline{I}$, ovvero cambiamo segno alla parte immaginaria.

Corollario di Bucherot

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \overline{V} \cdot \underline{I} = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} P_k + jQ_k = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} P_k = 0 \end{cases} \tag{3.30}$$

La relazione $\sum_{k=1}^{n} P_k = 0$ indica sia la conservazione dell'energia, ma anche che tutto il lavoro immesso viene consumato e il bilancio totale all'interno del circuito è nullo. Quindi se questo è vero la potenza attiva deve essere sempre nulla, se il generatore fornisce potenza l'induttore e il condensatore accumulano.

3.7.1 Risoluzione delle reti con Bucherot

Il corollario di Bucherot afferma che

$$\sum_k \overline{V_k} \underline{I_k} = 0 \tag{3.31}$$

ovvero la sommatoria dei fasori tensione moltiplicati ai coniugati dei fasori è nullo. Si ha che

$$\begin{aligned} Ve^{j\phi_V} \cdot Ie^{-j\phi_i} \\ = VIe^{j\phi} \\ = VI\cos(\phi) + jVI\sin(\phi) \end{aligned}$$

Si osserva che il prodotto tra il fasore tensione e il coniugato del fasore corrente equivale a

$$P + jQ = \overline{A} \tag{3.32}$$

Il modulo della potenza apparente è quindi

$$\begin{aligned} A = \sqrt{P^2 + Q^2} \\ = \sqrt{V^2 I^2 \cos^2(\phi) + V^2 I^2 \sin^2(\phi)} \\ = VI \end{aligned}$$

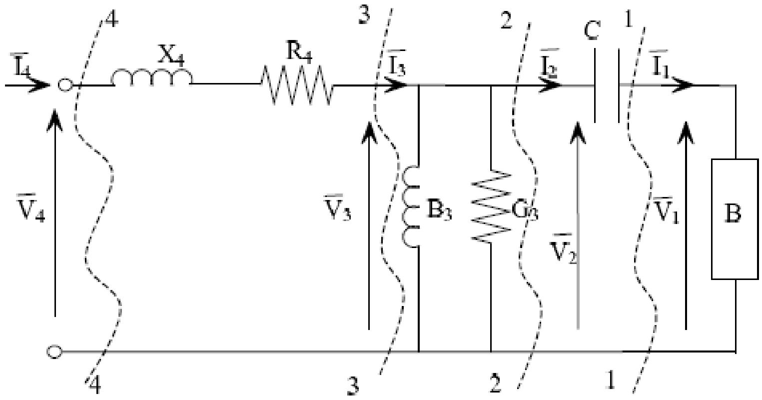
Quindi dal Teorema di Bucherot ha come conseguenza

$$\sum_k \overline{A_k} = 0 \tag{3.33}$$

$$\sum_k P_k = 0 \tag{3.34}$$

$$\sum_k Q_k = 0 \tag{3.35}$$

Ovvero **si conserva la potenza efficace e si conserva la potenza reattiva**. Per convenzione $Q > 0$ per gli **induttori**, ovvero gli induttori consumano potenza reattiva. D'altro canto per i **condensatori** si ha $Q < 0$, ovvero i condensatori si **comportano come dei generatori di potenza reattiva**.



Esempio di circuito

Il Teorema di Bucherot è utile quando conosciamo le caratteristiche del carico B e dobbiamo trovare le caratteristiche del generatore, oppure conosciamo le caratteristiche del generatore e dobbiamo trovare le proprietà del carico.

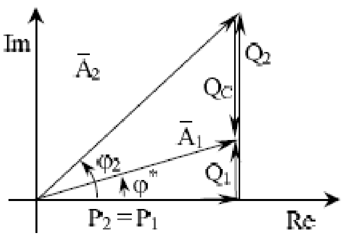
Abbiamo un carico B con una certa impedenza, tensione V_1 e corrente I_1. Nella sezione 2, rispetto alla 1 viene conservata la corrente $I_2 = I_1$ in quanto in serie. La potenza attiva si conserva, in quanto nella sezione 2 è presente un condensatore che fa variare la potenza reattiva. $P_1 = P_2$, $Q_2 = Q_1 - x_c I_1^2$. La potenza apparente sarà dunque $A = VI = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2}$. In modo analogo si procede con le altre sezioni.

Molto importante è il fatto che misurando da destra a sinistra, per trovare la tensione del generatore i condensatori hanno una potenza reattiva negativa. Usando Bucherot da sinistra a destra invece i condensatori si comportano come **generatori**.

3.8 Rifasamento

Il rifasamento è un processo necessario quando in un'industria l'angolo di sfasamento tra potenza apparente, potenza attiva e potenza reattiva assume un certo valore.

La norma prevede che si abbia un $\cos\phi > 0,95$ dal 2016. Ovvero la potenza reattiva della rete dell'industria non superi un certo valore. Ovvero bisogna stare attenti al consumo degli induttori.



Da come si vede nel diagramma dei fasori la potenza apparente diminuisce di modulo e quindi dal punto di vista dei sistemi possono essere utilizzati fili con una sezione minore ovvero minor spreco di potenza dissipata attraverso calore.

Capitolo 4

Sistemi trifase

I sistemi trifase sono composti da tre fili a cui ciascuno è applicato un generatore (le fasi) ed eventualmente un filo neutro. Nelle nostre case i sistemi sono monofase (una fase e un filo neutro).
I generatori sui fili sono $\bar{E}_1$, $\bar{E}_2$ e $\bar{E}_3$. Per la notazione le tensioni sono agglomerate in questa legge:

$$\bar{V_{12}} + \bar{V_{23}} - \bar{V_{31}} = 0 \tag{4.1}$$

Un sistema trifase è simmetrico quando le tensioni di fase hanno lo stesso modulo e sono sfasate da $2/3\pi$. Quindi si ha

$$|\bar{E_1}| = |\bar{E_2}| = |\bar{E_3}| = E \tag{4.2}$$

$$e_1(t) = \sqrt{2}E\cos(\omega t) \tag{4.3}$$

$$e_2(t) = \sqrt{2}E\cos(\omega t - \frac{2}{3}\pi) \tag{4.4}$$

$$e_3(t) = \sqrt{2}E\cos(\omega t + \frac{2}{3}\pi) \tag{4.5}$$

I sistemi trifase sono detti **simmetrici se** e_2 **è in ritardo di** $2/3\pi$ **rispetto ad** e_1. Il sistema è chiamato **inverso** se invece e_2 è in anticipo di $2/3\pi$. Il sistema è **asimmetrico** se l'angolo di sfasamento è diverso di $2/3\pi$.

4.1 Equivalenza stella-triangolo

Per la configurazione a stella sappiamo che

$$\bar{V_{12}} = \bar{E_1} - \bar{E_2}$$
$$\bar{V_{23}} = \bar{E_2} - \bar{E_3}$$
$$\bar{V_{31}} = \bar{E_3} - \bar{E_1}$$

Da triangolo a stella

- Lato 1-2:
$$Z_{s1} + Z_{s2} = \frac{Z_{t3}(Z_{t1} + Z_{t2})}{Z_{t1} + Z_{t2} + Z_{t3}}$$
- Lato 2-3:
$$Z_{s2} + Z_{s3} = \frac{Z_{t1}(Z_{t2} + Z_{t3})}{Z_{t1} + Z_{t2} + Z_{t3}}$$
- Lato 3-1:
$$Z_{s1} + Z_{s3} = \frac{Z_{t1}(Z_{t2} + Z_{t3})}{Z_{t1} + Z_{t2} + Z_{t3}}$$

Sottraendo 1-2 con 2-3 si ha che

$$[Z_{s1} - Z_{s3} = \frac{Z_{t2}(Z_{t3} - Z_{t1})}{Z_{t1} + Z_{t2} + Z_{t3}}$$

e poi sommiamo con 3-1 :

$$Z_{s1} = \frac{Z_{t2}Z_{t3}}{Z_{t1} + Z_{t2} + Z_{t3}}$$

Quindi anche le altre saranno:

$$Z_{s1} = \frac{Z_{t2}Z_{t3}}{Z_{t1} + Z_{t2} + Z_{t3}}$$
$$Z_{s2} = \frac{Z_{t1}Z_{t3}}{Z_{t1} + Z_{t2} + Z_{t3}}$$
$$Z_{s3} = \frac{Z_{t1}Z_{t1}}{Z_{t1} + Z_{t2} + Z_{t3}}$$

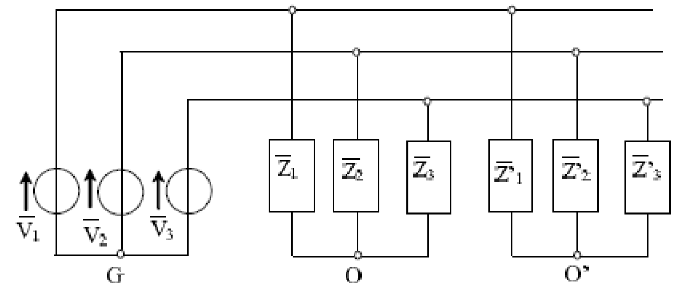
Se il sistema trifase è simmetrico si ha che $Z_s = \frac{1}{3}Z_t$.

Da stella a triangolo Per dimostrare come si passa da stella a triangolo o lo si dimostra in modo analogo al precedente, o si utilizza il principio di dualità, quini anzichè usare l'impedenza si usa l'ammettenza.

$$Y_{t1} = \frac{Y_{s2}Y_{s3}}{Y_{s1} + Y_{s2} + Y_{s3}}$$
$$Y_{t2} = \frac{Y_{s1}Y_{s3}}{Y_{s1} + Y_{s2} + Y_{s3}}$$
$$Y_{t3} = \frac{Y_{s1}Y_{s1}}{Y_{s1} + Y_{s2} + Y_{s3}}$$

4.2 Reti trifase

I carichi applicati alle reti trifase sono o laterali o posti alla fine della rete. Per le reti trifase è molto facile calcolare le tensioni sui centri stella, e quindi conoscere le tensioni applicate ai carichi.



Qualunque cosa accada, non mettere mai un carico sulla rete trifase nella stessa direzione della fase a meno che non sia alla fine.

Le reti trifase maggiormente presenti sono sistemi simmetrici (tensioni delle fasi identiche in modulo) e con angolo di sfasamento pari a $2\pi/3$. I sistemi simmetrici sono detti diretti quando E_2 è in ritardo rispetto a E_1. Per calcolare le tensioni ai capi dei centri stella è possibile utilizzare Millmann.

4.3 Calcolo delle potenze

L'obiettivo è quello di calcolare la potenza di un sistema trifase, in cui sono presenti tre carichi $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$. La potenza totale sarà data da:

$$P_{tot} = \Re(\bar{E}_1 \underline{I_1}) + \Re(\bar{E}_2 \underline{I_2}) + \Re(\bar{E}_3 \underline{I_3})$$
$$Q_{tot} = \Im(\bar{E}_1 \underline{I_1}) + \Im(\bar{E}_2 \underline{I_2}) + \Im(\bar{E}_3 \underline{I_3})$$

Realmente bisogna inserire un wattmetro per calcolare la potenza della rete. Per evitare di inserire tre wattmetri per una rete si crea un punto artificiale di misura nella rete, chiamato per esempio G_2 a cui sono collegate delle resistenze in modo trasversale alla rete. Per Millman si ha che la tensione tra i generatori e il nuovo punto artificiale sarà:

$$V_{G_1G_2} = \frac{\frac{E_1}{R} + \frac{E_2}{R} + \frac{E_3}{R}}{\frac{3}{R}} \tag{4.6}$$

che indica lo spostamento del baricentro del triangolo che ha come vertici le tensioni. Quando il sistema è simmetrico si ha che $V_{G_1G_2} = 0$. Il metodo è meno complesso che che portare un filo fino al generatore, tuttavia è molto laborioso.

4.3.1 Inserzione Aron

L'inserzione Aron è un metodo per calcolare la potenza dei sistemi trifase. Date due fasi collego due wattmetri e il positivo delle tensioni si collega alla fase stessa, il negativo invece alla fase non utilizzata. la potenza totale sarà:

$$P_{tot} = P_1 + P_2 \tag{4.7}$$

Qualunque sia la corrente. E' un'inserzione molto comoda in quanto permette di risparmiare un wattmetro e non perdo tempo a cercare centri stella. Le potenze calcolate dai wattmetri non hanno alcun significato fisico, è possibile che una delle potenze misurate sia negativa.

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che

$$P_{tot} = P_{w1} + P_{w2} = \Re(\bar{E}_1\underline{I_1}) + \Re(\bar{E}_2\underline{I_2}) + \Re(\bar{E}_3\underline{I_3}) \tag{4.8}$$

Quindi data una rete trifase con wattmetri in inserzione Aron, avremo che:

$$\bar{V_{w1}} = \bar{V_1} - \bar{V_3}$$
$$\bar{V_{w2}} = \bar{V_2} - \bar{V_3}$$

Inoltre applicando la legge di Kirchoff alla superficie che racchiude i generatori si ha che: $\bar{I_{w3}} = -\bar{I_{w2}} - \bar{I_{w1}}$. Quindi le potenze dei wattmetri saranno:

$$P_{w1} = \Re((\bar{V_1} - \bar{V_3})\underline{I_{w1}})$$
$$P_{w2} = \Re((\bar{V_2} - \bar{V_3})\underline{I_{w2}})$$

Quindi sommando le potenze si ha che

$$\begin{aligned} P_{w1} + P_{w2} &= \Re((\bar{V_1} - \bar{V_3})\underline{I_{w1}}) + \Re((\bar{V_2} - \bar{V_3})\underline{I_{w2}}) \\ &= \Re(\bar{V_1}\underline{I_{w1}} - \bar{V_3}\underline{I_{w1}} + \bar{V_2}\underline{I_{w2}} - \bar{V_3}\underline{I_{w2}}) \\ &= \Re(\bar{V_1}\underline{I_{w1}} + \bar{V_2}\underline{I_{w2}} + \bar{V_3}(\underline{I_{w1}} - \underline{I_{w2}})) \\ &= \Re(\bar{V_1}\underline{I_{w1}} + \bar{V_2}\underline{I_{w2}} + \bar{V_3}(\underline{I_{w3}})) \end{aligned}$$

4.4 Rifasamento trifase

Durante il rifasamento non bisogna rifasare le singole fasi ma si rifasa la rete intera utilizzando la potenza totale e la potenza reattiva. La maggior parte delle volte il carico dei condensatori è simmetrico, in modo da rendere più semplice il calcolo.

4.5 Monofase equivalente

I sistemi monofase simmetrici e diretti a cui sono attaccati carichi trasversali simmetrici hanno una tensione tra i nodi stella nulla: è presente un **corto circuito virtuale tra i centri stella dei carichi**: dal punto di vista della risoluzione della rete è possibile studiare le singole fasi equivalenti, dette anche **monofase equivalenti**.

Capitolo 5

Equazioni di stato

Una rete elettrica con un generatore di tensione e una resistenza con un interruttore può essere studiato rispetto al tempo. In particolare come evolve la corrente una volta chiuso l'interruttore.

Stato di un sistema fisico Si definisce stato di un sistema fisico l'insieme di variabili che soddisfano le seguenti condizioni:

- La conoscenza dello stato e degli ingressi in un istante di tempo t^* consente di valutare ogni altra grandezza del sistema fisico;
- La conoscenza dello stato al tempo t^* e degli ingressi consente di valutare lo stato per ogni istante di tempo $t > t^*$.

In modo analogo i gradi di libertà sono quelle variabili che definiscono lo stato fisico di un sistema meccanico.

Le reti elettriche sono definite da un'equazione differenziale la cui soluzione sarà data da una soluzione omogenea e una soluzione particolare.

Capitolo 6

Elettromagnetismo

6.1 Proprietà dei materiali ferromagnetici

I materiali ferromagnetici si distinguono dagli altri in quanto la loro permeabilità è circa 1000-10000 volte la permeabilità elettromagnetica nel vuoto. I materiali ferromagnetici sono caratterizzati da non linearità, in quanto una volta generato un campo indotto, questo per essere annullato deve essere sottoposto ad un campo elettromagnetico detto **forza coercitiva** non nulla. In modo analogo quando $H = 0$ il campo indotto è detto **induzione residua**.

I magneti permanenti sono fatti in terre rare come il neodimio, e hanno un'alta induzione residua.

6.2 Leggi di Maxwell

Le forze elettromagnetiche sono descritte dalle leggi di Maxwell:

$$\begin{cases} \nabla \vec{H} = \sigma_{lib} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \nabla \vec{B} = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

A basse frequenze si ha che $\nabla \vec{H} = \sigma_{lib}$. Dato un volume generico τ integrando si trova il campo indotto.

$$\int_{\tau} \nabla \vec{B} d\vec{\tau} = 0 \tag{6.2}$$

per il teorema della divergenza l'integrale di volume diventa un integrale di superficie:

$$\int_{S} \vec{B}\vec{n} dS = 0 \tag{6.3}$$

e si ha che $\phi = \vec{B}\vec{n}dS$ è **il flusso di induzione elettromagnetica** la cui unità di misura sono i Weber. Su una superficie chiusa il flusso di induzione elettromagnetica è nullo. Poichè presa una superficie tra un trasformatore il flusso in entrata equivale al flusso in uscita, si ha che $\sum_S \phi = 0$ prende il nome di **leggi di Kirchoff delle correnti elettromagnetiche**.

E' possibile integrare il campo magnetico lungo una superficie S

$$\int_S \nabla\vec{H}\vec{n}dS = \int_S \sigma_{lib}\vec{n}dS \tag{6.4}$$

Le cariche libere sono definite come $\sigma = I/A$, quindi l'integrale lungo la superficie diventa

$$\int_S I = NI \tag{6.5}$$

dove N è il numero di spire. NI è chiamata **forza magnetico motrice**. Per il Teorema di Stokes è possibile riscrivere l'integrale del campo magnetico:

$$\int_S \vec{H}d\vec{l} = NI \tag{6.6}$$

In un trasformatore in cui le linee di campo attraversano il ferro e l'aria si ha che

$$\int_{lfe} \vec{H}d\vec{l} + \int_{\delta} \vec{H}d\vec{l} = NI \tag{6.7}$$

Gli integrali sono chiamati U e rappresentano la caduta di tensione magnetica. Si ha che $U = Hl$ e $H = B/\mu$.

$$U = Hl = \frac{B}{\mu}l\frac{A}{A} = \frac{1}{\mu}\frac{l}{A}\phi \tag{6.8}$$

Dove $\frac{1}{\mu}\frac{l}{A} = \theta$ ed è chiamata **riluttanza**. La legge $\sum U = NI$ prende il nome di **legge di Kirchoff delle tensioni magnetiche**. Inoltre $U = \phi\theta$ è la **legge di Ohm magnetica**.

Di conseguenza è possibile scrivere dei sistemi magnetici come i trasformatori in circuiti equivalenti con tensioni equivalenti e riluttanze equivalenti.