Appunti di Analisi e Geometria I

Mattia Ruffini

Settembre 2021

Indice

Capitolo 1

Insiemi

1.1 Numeri Naturali, Interi, Razionali e Reali

Insieme dei numeri naturali Comprende i numewri naturali, interi non negativi, che rispondono all'esigenza di "contare".

Insieme dei numeri Interi Sono i numeri interi positivi e negativi.

Insieme dei numeri razionali Sono i numeri del tipo $\frac{m}{n}$ dove $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Rispondono all'esigenza di misurare i rapporti di grandezze omogenee.

Quando $\frac{1}{m}a = \frac{1}{n}b$, a e b si dicono **grandezze commensurabili**, cioè *ammettono un sottomultiplo comune*. Formalmente si dice che $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$. Tuttavia è sempre vero che esiste un sottomultiplo di a e uno di b? Ovvero, esistono sempre coppie di segmenti non commensurabili tra loro?

1.2 I numeri razionali non bastano

Teorema 1. *La diagonale e il lato di un quadrato costituiscono una coppia di segmenti non commensurabili tra loro.*

Dimostrazione sull'insufficienza dei numeri razionali Per assurdo supponiamo che esistano due numeri m ed n$\in \mathbb{R} \mid (\frac{m}{n})^2 = 2$, cioè $m^2 = 2n^2$. Non è restrittivo pensare che m ed n siano primi tra loro, cioè che non abbiano fattori primi in comune. Da $m^2 = 2n^2$ segue che m^2 è pari, quindi anche m è pari. Se così non fosse allora $m = 2h+1 m^2 = (2h+1)^2 = 4h^2+4h+1 = 2(2h^2 + 2h) + 1$ cioè m^2 è dispari. Possiamo riscrivere $m = 2k(k \in \mathbb{N}$. Allora $m^2 = 4k^2$ e alla fine dell'uguaglianza si giunge a $n^2 = 2k^?2$. Allora n è pari, ma se entrambi m ed n sono pari significa che hanno un sottomultiplo comune, che è 2, ed era escluso nelle ipotesi.

$\nexists$ un numero razionale del tipo $\frac{m}{n} \mid (\frac{m}{n})^2 = 2$. Ovvero i numeri razionali sono insufficienti.

c.v.d.

1.3 L'insieme dei numeri Reali

In questa sezione ci occupiamo di una **presentazione assiomatica**, ovvero non ci interroghiamo riguardo la natura del numero reale (una domanda a cui non avrebbe senso rispondere) bensì **quali sono le proprietà dei numeri reali**.

Definizione di Campo Tra le proprietà presenti in un campo sono presenti le proprietà di addizione e moltiplicazione, la proprietà di ordinamento e la proprietà di completezza.

Proprietà di addizione e sottrazione

Ordinamento del campo Un campo è ordinato quando si richiede che, si postula che, ci sia una relazione di minore, maggiore e uguale tra due numeri.

Relazione di ordine totale. Se $x, y, z \in \mathbb{R} x < y$ e $y < z$, allora $x < z$ (transitività) . Se $x, y \in \mathbb{R} \vee x < y \vee x = y \vee x > y$ (trioctomia).

La relazione di ordine totale deve essere compatibile con le somme, ovvero:

- Se $x < y$ allora $x + z < y + z$;
- Se $x < y$ e $z > 0$, allora $xz > yz$ [1];

[1] Analogamente è possibile dimostrare l'inverso, cioè se $z < 0$ allora $xz > yz$

La completezza del campo In $\mathbb{R}$ saranno presenti gli elementi di $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. Tuttavia mancano alcuni punti in $\mathbb{Q}$, come per esempio $\sqrt{2}$ che corrisponderebbe ad un vuoto. I numeri razionali infatti sono pochissimi rispetto quelli reali. Per dire che un insieme "non ha buchi" si introduce l'**assioma di completezza**.

Se A e B sono due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$, se $\forall a \in A, \forall binB, a < b, allora \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid a \leqslant \lambda \leqslant b$.

Esempio: A è l'insieme dei numeri razionali positivi minori di 2, B è l'insieme dei numeri razionali positivi maggiori di 2. Esiste un certo $\lambda = \sqrt{2}$, tuttavia la radice quadrata di 2 non è compresa nei numeri reali.

Si possono dimostrare due cose:

1. L'esistenza di modelli di campo ordinato completo, che si possono costruire, ad esempio, da $\mathbb{Q}, \mathbb{N}$. (Sezioni di Dedekind, intervalli inscatolati, costruzioni geometriche).

2. Il campo ordinato e completo è unico.

Teorema 2. ***Unicità del campo ordinato completo****. Se K e K' sono due campi ordinati e completi, allora esiste un isomorfismo (e uno solo) da K a K', cioè esiste un'unica applicazione biounivoca $f : K- > K'$, che preserva la somma, il prodotto e l'ordinamento. Ovvero due campi K e K' ordinati e completi si possono identificare tra loro come lo stesso campo.*

1.4 Insiemi limitati

Archimede per trovare la lunghezza della circonferenza considera i poligoni di n lati inscritti e circoscritti. A parità del numero di lati i poligoni circoscritti approssimano il perimetro per eccesso, quelli inscritti per difetto, dunque la lunghezza della circonferenza equivale *all'estremo inferiore di A (insieme dei perimetri dei poligoni circoscritti) e l'estremo superiore di B (insieme dei perimetri dei poligoni inscritti).*

Sia $E \subset \mathbb{R}$:

1. E è **limitato superiormente** se $\exists \beta \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E : x \leqslant \beta$.

2. E è **limitato inferiormente** se $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E : \alpha \leqslant x$.

Teorema 3. ***Esistenza della minima limitazione superiore****. Se $E \subset \mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente, l'insieme delle limitazioni superiori ha sempre una minima. Analogamente esiste una massima limitazione inferiore.*

Questo teorema non vale in $\mathbb{Q}$, perchè la sua minima limitazione superiore è radice di 2, che non esiste in $\mathbb{Q}$.

Definizione di estremo superiore Se $E \subset \mathbb{R}$ è non vuoto e limitato superiormente, la minima limitazione superiore di E si denota come supE e si chiama **estremo superiore di E**. Il numero s=supE ha le seguenti proprietà:

- $\forall x \in Ex \leqslant s$;
- $\forall s' \leq s, \exists x \in E \mid x > s'$;

Se $E \subset \mathbb{R}$ non è limitato superiormente si pone $supE = +\infty$

Dimostrazione dell'esistenza del sup Si denota $Z = z \in \mathbb{R} \mid \forall x \in E, x \leqslant z$, cioè Zè l'insieme delle limitazioni di E, con $Z \neq 0$ perchè per ipotesi E è limitato superiormente. Per l'assioma di completezza (proprietà di separazione) $\exists \lambda \mid \forall x \in E, \forall z \in Z$:
$x \leqslant \lambda \leqslant z$, ovvero:

- $\forall x \in E, x \leqslant \lambda$, cioè λ è una limitazione superiore;
- $\lambda \leqslant z$, cioè λ è **la minima limitazione superiore di E**.

c.v.d.

1.5 La proprietà di Archimede

"L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali non è limitato superiormente"

Dimostrazione Per assurdo L è l'estremo superiore di $\mathbb{N}$. L-1 (¡L) non può essere l'estremo superiore minimo. Quindi deve esistere un numero $N_0 \mid N_0 > L - 1$, ma se $N_0 > L - 1$, cioè $N_0 1 > L ↯$ L=supN non esiste!
c.v.d.

"Siano $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Allora esiste un numero naturale n tale che $na > b$.

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che non esiste n nell'insieme dei numeri naturali tale per cui $na > b$, cioè $\forall nin\mathbb{N}na \leqslant b : n \leqslant \frac{b}{a}$. Significa dire che N è limitato superiormente, cioè $\frac{b}{a} = supN ↯$.
c.v.d.

Capitolo 2

Successioni in $\mathbb{R}$ e limite di una successione

Distanza tra due punti La distanza tra due punti x ed y è così definita:

$$d(x,y) = |x-y|, x, y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

La distanza conserva alcune proprietà:

1. $d(x,y) \geq 0, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
2. $d(x,y) = d(y,x);$
3. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Dunque alla definizione di $\mathbb{R}$ come campo ordinato e completo si aggiunge che è anche uno **spazio metrico**.

Successione Si chiama successione in un insieme A (o di elementi di A) una qualunque funzione da $\mathbb{N} \longrightarrow A$, il cui dominio è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{R}$, ed il codominio è A.

$$(a_n)n \in \mathbb{N}; (a_n); a_n \tag{2.2}$$

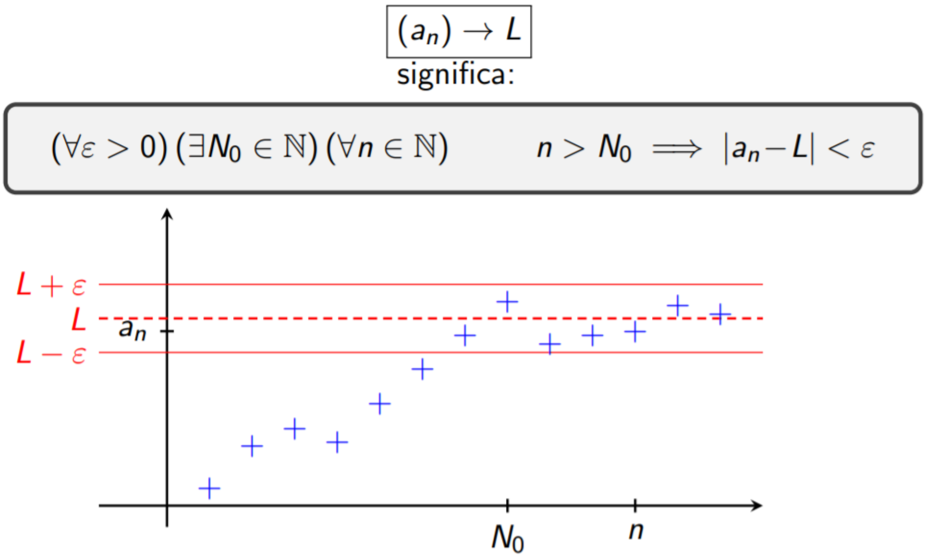
Esempi di successioni sono : $a_n = \frac{1}{n}$, oppure $a_n = \frac{1}{2n}$.

2.1 Convergenza di una successione

Consideriamo una successione a_n in $\mathbb{R}$, con $L \in \mathbb{R}$. Allora a_n converge in L e si scrive $< a_n \longrightarrow L$ oppure $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, se: $\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{R} \mid \forall nin\mathbb{N}, n > N_0 \Longrightarrow |a_n - L| < \epsilon$. In forma sintetica si può scrivere:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n > N_0 \Longrightarrow |a_n - L| < \epsilon \tag{2.3}$$

Riformulazione Sia a_n una successione in $\mathbb{R}$, con $L \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ se $\forall \epsilon > 0 |a_n - L| < \epsilon$ definitivamente, cioè valga per tutti gli n sufficientemente grandi.



Dimostrazione La dimostrazione segue dalla proprietà di Archimede. Sia $\epsilon > 0, \exists N \mid N > \frac{1}{\epsilon}$, e tale N esiste perché $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente. Allora $\forall n \geq N$ abbiamo $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon$, e quindi $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ (la distanza da 1/n a 0 è minore di ϵ).
Per esempio $\frac{1}{n}$ è decrescente, cioè $\frac{1}{n-1} > \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1...}$. Come esercizio si può dimostrare che $\frac{1}{2n}$ converge a 0.

Teorema 4. *Sia a_n una successione in R* ***monotona crescente*** *(in senso lato, cioè $...a_n \leq a_{n+1}...$) e* ***superiormente limitata*** *(cioè $\exists k \in \mathbb{R} \mid \forall n, a_n < k$. Allora la successione converge in $\mathbb{R}$, e converge ad un limite finito L, che è dato dall'estremo superiore dei suoi elementi.*

Un esempio è il numero di Napier e, estremo superiore delle successioni del tipo $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

Dimostrazione Poniamo $A = \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$,e poniamo L=supA (il supA esiste ed è finito per la completezza di $\mathbb{R}$. Prendiamo un $\epsilon > 0$ qualsiasi:

- $L - \epsilon < L$, dunque $L - \epsilon$ non è una limitazione superiore di A, quindi $\exists kin\mathbb{R} \mid L - \epsilon < a_k$;

- La successione a_n è non decrescente. Quindi $\forall n > k, L - \epsilon < a_n \leq L$ (perchè L=supA). Dunque per l'arbitrarietà di ϵ, la successione converge a L.
  Se una successione è monotona crescente ed è superiormente limitata allora questa converge all'estremo superiore dei suoi elementi.

2.2 Unicità del limite

Teorema 5. *Una successione in $\mathbb{R}$ ha al più un limite, ed è unico.*

Supponiamo che $a_n \to L^{'}, a_n \to L^{''}, L^{'} \neq L^{''}$. Prendiamo $\epsilon = \frac{1}{2}|L' - L''| > 0$. Esistono $k', k'' \in \mathbb{N} \mid n > k' \to |a_n - L'| < \epsilon; n > k'' \to |a_n - L''| < \epsilon$. Pongo $K = max\{k', k''\}, \forall n \geq K$:
$|L' - L''| = |L' - a_n + a_n - L''| \leq |L' - a_n| + |a_n - L''| < \epsilon + \epsilon = |L' - L''|$; $\lightning$

Teorema della permanenza del segno

Teorema 6. *Sia a_n una successione in $\mathbb{R}$, e $L \in \mathbb{R}$. Se $a_n \to L, L > 0 (L < 0)$ allora $a_n > 0 (a_n < 0)$ definitivamente.*

Dimostrazione

1. Fissiamo $\epsilon \mid L - \epsilon > 0$. Siccome $a_n \to L$ per ipotesi, allora $\exists N_0 in\mathbb{N} \mid \forall n > N_0 : 0 < L - \epsilon < a : n < L + \epsilon$;

2. Se $a_n \to L, a_n > 0 \forall n$, allora $L \geq 0$. Se $L < 0$, allora $a_n < 0$ definitivamente, contro l'ipotesi.

Capitolo 3

Intervalli compatti inscatolati

Se $a \leq b$, l'insieme $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ si chiama **intervallo chiuso e limitato**, oppure **intervallo compatto**.

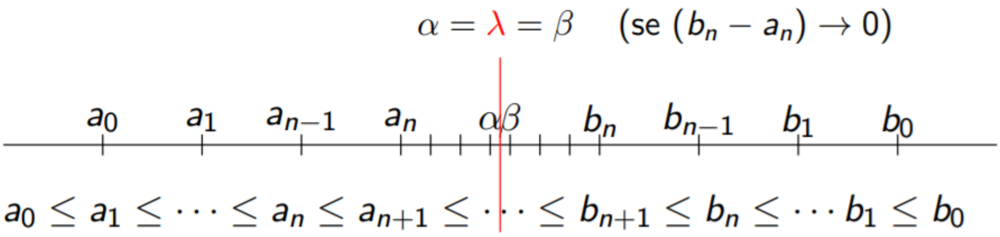
Teorema 7. *Sia* $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ *una successione di intervalli compatti (cioè chiusi e limitati) detti inscatolati, poiché:* $I_0 \subseteq I_1 \subseteq ... \subseteq I_n$

Allora:

1. $\exists$ almeno un punto che appartiene a tutti gli intervalli I_n: $\cap_{n=0}^{+\infty} I_n \neq 0$;

2. Se le lunghezze, o ampiezze $(B_n - a_n) \to 0$ allora esiste unico punto $c \in \mathbb{R}$ che appartiene a tutti gli intervalli I_n: $\cap_{n=0}^{+\infty} I_n = \{c\}$;

Dimostrazione Sia $\alpha = \lambda = \beta$ se $(B_n - a_n) \to 0$.



1. Prendiamo $A = \{a_n, n \in \mathbb{R}\}$ e $B = \{b_m, m \in \mathbb{R}\}$ e $\forall n, m \in \mathbb{N}, a_n < b_m$. Quindi A è limitato superiormente, perché un qualunque elemento di B è una limitazione superiore di A. Analogamente B è limitato inferiormente. Per la proprietà di completezza:$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_m$. In particolare per $n = m$ si ha: $\cap_{n=0}^{+\infty} I_n[a, b] \neq 0$ perchè stiamo parlando di un intervallo compatto. Questo intervallo include l'intervallo $[\alpha, \beta]$ che si dice inscatolato in $[a_n, b_m]$.

2. Supponiamo ora che $(B_n - a_n) \to 0$, allora supponiamo per assurdo che $\alpha < \beta$. Quindi valgono le seguenti disuguaglianze: $a_n < \alpha < \beta < b_m$, quindi $b_m - a_n > \beta - \alpha$, ma se $(B_n - a_n) \to 0$ non può essere maggiore o uguale di un **numero finito positivo**.

Gli intervalli I_n hanno un unico punto in comune.

c.v.d.

3.1 Esistenza ed unicità dell'elemento superiore di due classi contigue di numeri reali

Diciamo che A,B è una coppia di classi contigue di numeri reali se $A, B \subset \mathbb{R}$, cioè sono sottoinsiemi non vuoti di R che soddisfano le seguenti proprietà:

1. Ogni a in a è minore di ogni b in B;

2. Preso un ϵ qualsiasi, esiste una coppia b,a | $b - a < \epsilon$.

Teorema 8. *Se A e B sono classi contigue di numeri reali, allora esiste un unico* $\lambda \in \mathbb{R}$ *che soddisfa:* $a \leq \lambda \leq b$, *presi un qualsiasi a in A, ed un qualsiasi b in B.*

Se esistessero λ_1, λ_2 allora $a - b < \lambda_1 - \lambda_2$ cioè A e B non possono essere classi contigue

Capitolo 4

$\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

Teorema 9. $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists r \in \mathbb{Q} \mid a < r < b$. *Presi due numeri reali qualsiasi allora tra di essi è compreso un numero razionale, cioè l'insieme dei razionali è denso in R.*

Il numero reale $\alpha = a_0.a_1a_2...a_n$ è il limite di una successione y_n di numeri razionali decimali. $|\alpha - y_n|| = \frac{1}{10^n}$, cioè y_k è l'approssimazione di α a meno di 10^k.

Dimostrazione Se $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, allora esiste un razionale r tale che $a < r < b$.
Sia $a, b > 0$. Se $a, b > 0\exists$ un naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(b-a) > 1$, cioè $n > \frac{1}{b-a}$. Allora $n(b-a) > 1 \to nb - na > 1$. Se questa disuguaglianza è vera allora na e nb sono numeri che distano fra di loro più di uno, cioè tra na e nb è presente un numero intero: $na < m < nb$. Quindi: $a < \frac{m}{n} < b$.

Analogamente si può dimostrare che l'insieme dei numeri irrazionali $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$

Capitolo 5

Cardinalità di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$

La cardinalità di $\mathbb{Q}$ è diversa rispetto alla cardinalità di $\mathbb{R}$, ovvero non esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$.

Cosa significa che una funzione è biunivoca Dati un insieme X e un insieme Y, la funzione $X \xrightarrow{f} Y$:

1. **Iniettiva**: $\forall x, x' \in X, x \neq x' allora anche f(x) \neq f(x')$, ovvero per ogni elemento di Y esiste al più un x in X tale per cui $f(x) = y$.

2. **Suriettiva**: dati gli insiemi X e Y, se l'immagine di f è Y, cioè ad ogi elemento di X è corrisposto (deve esistere) un elemento di Y.

Per esempio la funzione $f(x) = x^2$ definita da $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ non è suriettiva. E' invece suriettiva la funzione $f(x) = x^2$ definita da $[0,1] \xrightarrow{f} [0,1]$.

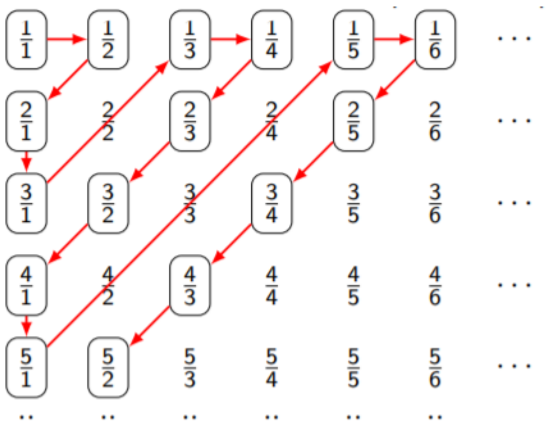
Una funzione è biunivoca (biettiva) o invertibile se è sia iniettiva che suriettiva, cioè: $\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$.

Definizione di cardinalità Quando gli insiemi rispondono tra di loro di una corrispondenza biunivoca si dice che hanno la stessa **cardinalità**, cioè hanno lo stesso numero di elementi. Anche due insiemi infiniti che hanno una corrispondenza biunivoca hanno la stessa cardinalità. Non si è definita la cardinalità dell'insieme, ma il rapporto tra due insiemi.

Insieme numerabile Due insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità? O meglio possiamo definire se un insieme è **numerabile**, cioè se ha la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$.

5.1 $\mathbb{Q}$ è numerabile

Dimostrazione trovata dal matematico *Cantor*. Consideriamo l'insieme dei numeri razionali positivi. Cantor ha avuto l'idea di disporli nel secondo ordine (mettendo nella prima fila tutti i razionali con numeratore uguale a 1, nella seconda fila tutti quelli numeratore 2 e così via):



Se volessi concettualmente contare tutti gli elementi positivi di Q potremmo contare gli elementi della prima fila, tuttavia questo processo durerebbe in eterno. Allora Cantor decide di contare gli elementi a "zig-zag", eliminando i razionali che si ripetono. In questo modo si possono contare tutti i razionali, e ogni numero compare una sola volta. Si aggiunge anche l'elemento zero. Per contare i negativi si modifica la successione:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots \\ \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \frac{1}{5} & \dots \end{array}$$

Esiste una funzione biunivoca da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$. Di conseguenza $\mathbb{Q}$ è numerabile.

c.v.d.

5.2 $\mathbb{R}$ non è numerabile

Questa dimostrazione è solo una delle quattro trovate da Cantor. Supponiamo per assurdo che esista una corrispondenza biunivoca da $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Per semplicità dimostriamo questa corrispondenza nell'intervallo $[0, 1]$, cioè $\mathbb{N} \xrightarrow{f} [0, 1]$. Consideriamo il numero reale $0.\alpha_1^1\alpha_2^1\alpha_3^1\dots$

Al posto della cifra α_1^1 si metta una cifra diversa da α_1^1, e che sia diversa da 0 e da 9 (questo perchè come visto in precedenza per una delle proprietà degli intervalli compatti inscatolati 0 corrisponde al periodo 9). Ora consideriamo il numero $0.\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2...$ e il numero $0.\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^3....$. Sostituiamo con delle cifre diverse da quelle di partenza α_2^2 e α_3^3.

I numeri che creiamo non saranno sicuramente presenti in quella lista, perchè il primo numero differisce della prima cifra decimale, il secondo per la seconda cifra decimale e così via. L'ennesima cifra differisce dell'ennesima cifra $f(n)$.

Capitolo 6

Significato dell'allineamento infinito

Consideriamo per esempio il numero 0.11111111.... Questo numero reale può essere visto come:

1. Considero la successione $a_0 = 0$, $a_1 = 0.1$, $a_2 = 0.11$ ... Ciascuno dei termini della successione a_n è un'approssimazione per difetto di $0.\overline{1}$. Infatti: $a_1 = \frac{1}{10}$; $a_2 = \frac{1}{10} + \frac{11}{100}$; $a_3 = \frac{1}{10} + \frac{11}{100} + \frac{111}{10^{-3}}$... Quindi $0.\overline{1}$ è il limite della successione scritta, e poiché la successione è **crescente, superiormente limitata** per esempio (0.2 è un elemento maggiore di quelli della successione). Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.\overline{1}$;

2. $0.\overline{1}$ è visto come l'estremo superiore di $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$;

3. **Serie geometrica**. $0.\overline{1} = \frac{1}{10} + \frac{11}{100} + \frac{111}{10^{-3}} + ... + \frac{1}{10^n}$. Cioè $0.\overline{1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$

Cosa significa sommare infiniti addendi? Prendiamo per esempio $q \in \mathbb{R}$, voglio calcolare la somma infinita $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n$. Costruisco le **somme parziali**, cioè la somma del primo termine, quella del secondo e del terzo e così via...chiamiamo s_k la successione delle somme parziali. Poichè la successione è limitata superiormente ed è crescente converge ad L: $\lim_{k\to+\infty} s_k = L$.

Suppongo che $|q| < 1$, allora:
$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n)(1 - q)$

$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n - q - q^2 - q^3 - ... - q^{n+1}$

$(1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n)(1 - q) = 1 - q^{n+1}$

Quindi si ha $\lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = L = 0$ (posto $|q| < 1$).

Capitolo 7

Funzioni continue

Definizione Sia $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}, x_0 \in S$. Si dice che f è continua nel punto x_0, se $\forall \epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ per il quale è soddisfatta la seguente condizione: $\forall x \in D, |x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Ovvero quando la distanza tra x e x_0 è minore di δ, allora $f(x) - f(x_0)$ è minore di ϵ, qualunque si fissi una *tolleranza* ϵ.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D[d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(x_0)) > \epsilon]$$

Riformulazioni intuitive

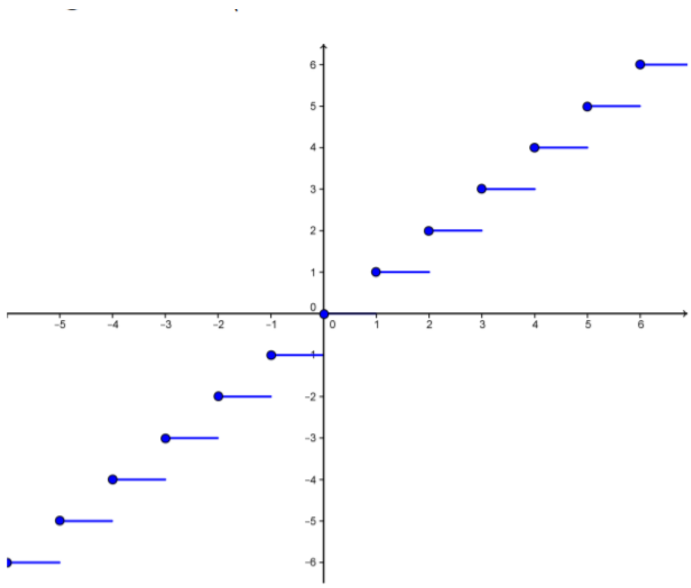
1. Se la distanza $d(x, x_0)$ è piccola, allora è sufficientemente piccola la distanza $d(f(x), f(x_0))$.
2. Supponiamo che x e y siano due grandezze fisiche. f è continua in x_0 se si approssima la misura $f(x_0)$ mediante $f(x)$ con una tolleranza arbitraria $\epsilon > 0$. Affinché la misura x di x_0 sia fatta con sufficiente precisione si prende $\delta > 0$.

Esempi di funzioni continue

1. **Funzione identità** $\forall x, I(x) = x$. E' continua $\forall x$ scelti $\epsilon > 0, \delta > 0$ la condizione è soddisfatta;
2. **Funzione reciproca** $\mathbb{R} \setminus \{\} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, x \neq 0 g(x) = \frac{1}{x}$ è continua. Ovvero $\forall x_0 \in R$, se $d(x, x_0) < \delta$, allora $d(\frac{1}{x}, \frac{1}{x_0}) < \epsilon$;
3. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = x^2$ è continua;
4. $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = sin(x); f(x) = cos(x)$ è continua;

Dimostrazione continuità funzione reciproca

Significato funzione parte intera Un esempio di funzione non continua è la funzione parte intera.



7.1 Intorno di un punto

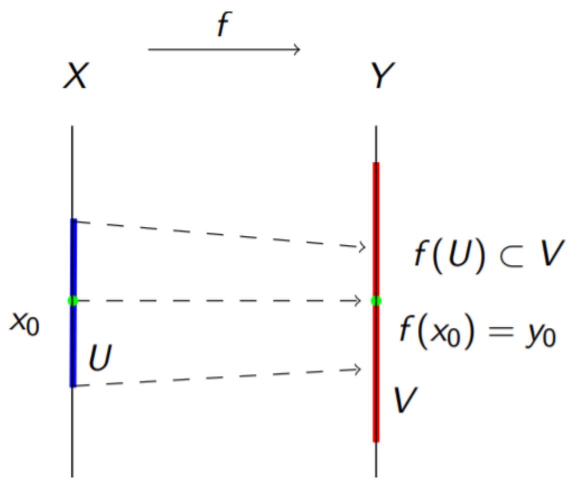
Consideriamo $\mathbb{R}$ spazio metrico, ovvero vale $d(x, y) = |x - y|$. Dato $x_0 \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R} : r > 0$, si chiama **intorno simmetrico / intorno sferico / disco aperto** di centro x_0 e raggio r il sottoinsieme $I(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} \mid x_0 - r < x > x_0 + r\} = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, x_0) < r\}$

In generale, un insieme $U \subset \mathbb{R}$ si dice intorno di un punto x_0 se $\exists r > 0$ tale che:

$$U \supset (x_0 - r, x_0 + r)$$

$$U \supset \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, x_0) < r\}$$

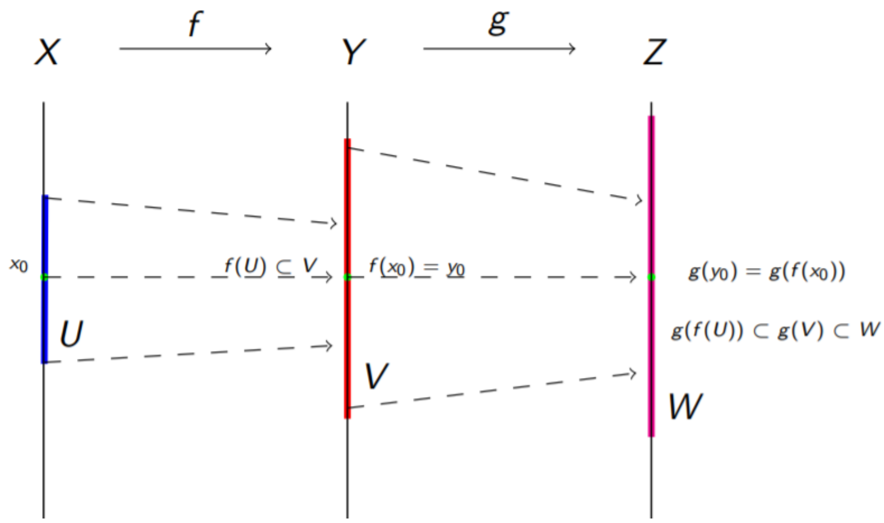
Definizione topologica di continuità Dati $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ spazi metrici qualunque, per esempio $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}$. $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}$ è continua in $x_0 \in \mathbb{X}$, significa che: per ogni intorno $V \ni f(x_0)$ esiste un intorno $U \ni x_0$ tale che $f(U) \subset V$.



Teorema 10. *Siano $\mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}$ e $\mathbb{Y} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}$ due funzioni continue, allora $\mathbb{X} \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{Z}$ è continua.*

Questo perchè per definizione deve esistere un intorno $W : g(V) \subset W$, ovvero:

$$g(f(U)) \subset g(V) \subset W$$



Sia data la seguente funzione $g(x) = \frac{\sin(x^3)+x^4}{1+x^2+\cos(x)^2}, x \in \mathbb{R}$. Poiché la funzione è composta da funzioni continue allora questa sarà continua.

Teorema 11. ***Continuità per successioni*** *Siano $< D \subset \mathbb{R}, \mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, x_0 \in D$. I due seguenti enunciati sono equivalenti:*

- *f è continua in x_0;*
- *Per ogni successione x_n in D, se $x_n \to x_0$, allora $f(x_n)_{n\to+\infty} f(x_0)$, cioè $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$, allora $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$*

Le funzioni continue sono le funzioni che preservano i limiti di successioni. Questo teorema ha una particolare applicazione se si vuole dimostrare che **una funzione non è continua**. Ecco un esempio.

7.2 Limiti

Si dice che x_0 è punto di accumulazione di un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$ se $\exists$ una successione (a_n) in D tale che $a_n \to x_0$, e $a_n \neq x_0 \forall n \in \mathbb{N}$. Esempi:

1. $x_0 = 0$ è punto di accumulazione di $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
2. $x_0 = 1$ è punto di accumulazione di $D = [0, 1]$, per esempio attraverso la successione $(a_n) = 1 - 1^n$;
3. $x_0 = 3$ **non è** un punto di accumulazione per $D = [0, 1]$;

Definizione limite finito Siano $D \subset \mathbb{R}, x_0$ punto di accumulazione di D; $\mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione, $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D), 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

N.B.

- $0 < |x - x_0|$ equivale a dire $x \neq x_0$, questo perché non siamo interessati se esiste x_0 nella funzione, ma soprattutto non ci importa del valore che la funzione assume in x_0.
- Non è detto che il limite esista, **ma se esiste è unico!**.

Seconda versione Supponiamo che x_0 sia un punto di accumulazione di D, $\mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione, $L \in \mathbb{R}$ escludendo $L = \pm\infty$. $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa che ponendo $f(x_0) = L$, la funzione risulta continua in $f(x_0)$. Inoltre data la funzione $\mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, se x_0 è un punto di accumulazione per D e in più $x_0 \in D$, allora f è continua se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Teorema 12. ***Teorema del confronto*** *Siano $D \subset \mathbb{R}$ e f,g,h tre funzioni $\mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, con x_0 punto di accumulazione di D. Se:*

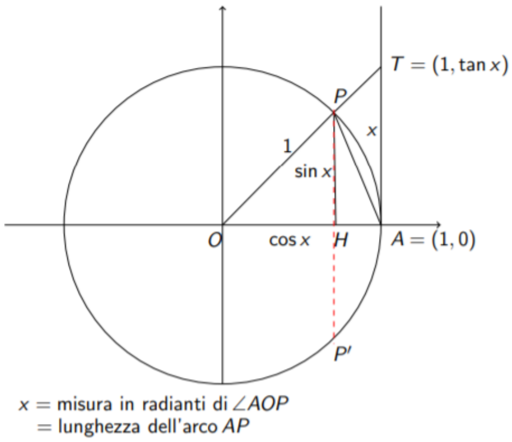
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in D, x \neq x_0$$

e se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L = \lim_{x \to x_0} h(x)$$

, allora:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$



7.3 Intervallo di $\mathbb{R}$

Dati $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$, il segmento compatto (chiuso e limitato) delimitato da x, y, definito come $[x, y]$ è l'insieme:

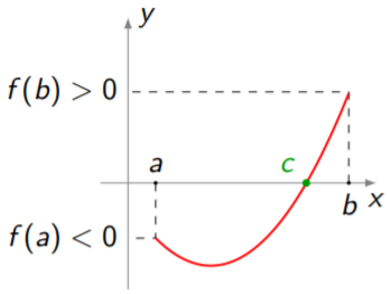
$$[x, y] = \{t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \leq y\}$$

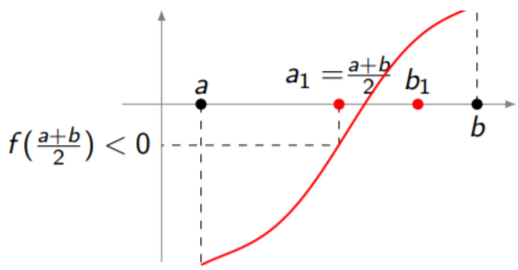
Un sottoinsieme I di $\mathbb{R}$ è un intervallo se soddisfa:

$$(\forall x, y \in I)(x \leq y) \Rightarrow [x, y] \subseteq I$$

ovvero se I contiene due punti, allora I è un intervallo se contiene tutti i punti che compongono quel segmento. Esiste l'intervallo in cui $x = y$, ed esiste l'intervallo vuoto.

Teorema 13. ***Teorema degli zeri*** *Sia* $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione e un intervallo* $I \subset \mathbb{R}$*. Siano* $a, b \in I$*, con* $a < b$*. Supponiamo che* $f(a) e f(b)$ *abbiano valori opposti. Allora esiste almeno un punto* $c \in (a, b)$ *in cui* $f(c) = 0$*.*





Dimostrazione Supponiamo che $f(a) < 0 < f(b)$, e chiamiamo $I_0 = [a_0, b_0]$ l'intervallo $[a, b]$.
Consideriamo il punto medio del segmento ab, che chiamiamo $a_1 = \frac{a+b}{2}$. Se $a_1 = 0$ la dimostrazione è finita. Altrimenti se $f(a_1) < 0$, chiamo $I_1 = [a_1, b_0]$(Se $a_1 > 0$ avrei chiamato $I_1 = [a_0, a_1]$). In questo intervallo si verifica la stessa condizione di partenza, quindi **iteriamo le bisezioni**.Se in uno dei punti medi la funzione si annulla la dimostrazione finisce, altrimenti costruiamo la successione di infiniti intervalli $I_n = [a_n, b_n]$, con $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.
Per il teorema di Cantore sugli intervalli compatti inscatolati $\exists c$ tale che appartiene alle infinite intersezioni della successione. Inoltre questo punto c **deve essere unico perchè** $\frac{b-a}{2^n}$ tende a zero.
Poichè la funzione è continua preserva i limiti di successioni:

- $a_n \to c \Rightarrow f(a_n) \to f(c)$;

- $b_n \to c \Rightarrow f(b_n) \to f(c)$;

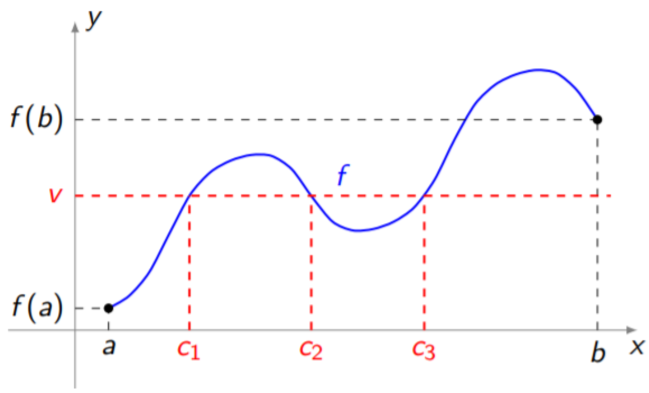
Per il **Teorema della permanenza del segno** se $f(a_n) < 0$ allora $f(c) \leq 0$ e allo stesso modo se $f(b_n) > 0, f(c) \geq 0$ di conseguenza $f(c) = 0$.

c.v.d

Teorema 14. ***Teorema dei valori intermedi*** *Supponiamo che:*

1. $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ *sia un intervallo;* $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *è una funzione;*
2. $a, b \in I$; $a < b$, $f(a) < f(b)$;
3. $v \in \mathbb{R} : f(a) < v < f(b)$;

Tesi: $\exists c \in (a, b) : f(c) = v$.

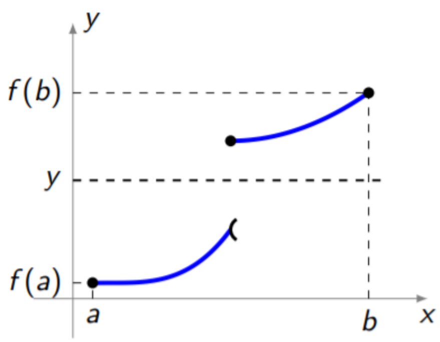


Se $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è funzione continua su un intervallo I, la sua immagine $J = f(I)$ 'e un intervallo. **Le funzioni continue trasformano intervalli in intervalli**.

Dimostrazione $g(x) = f(x) - v$ in $[a, b]$, e soddisfa le ipotesi del teorema. Consideriamo $g(a) = f(a) - v < 0$ e $g(b) = f(b) - v > 0$.Per il teorema degli zeri deve esistere $c \in (a, b) : g(c) = f(c) - v = 0 \Rightarrow$

$$f(c) = v$$

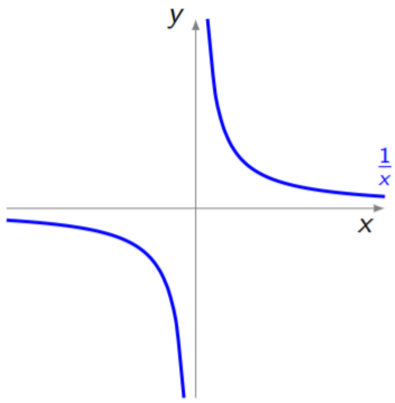
c.v.d.



N.B.

1. L'ipotesi che f(x) sia continua è necessaria;

2. Che f sia in un intervallo è necessario, per esempio la funzione inversa esiste nell'unione di intervalli $(-\infty, 0) \bigcup (0, +\infty)$ che **non è un intervallo**;



Osservazione Se una funzione soddisfa la proprietà dei valori medi di Darboux, cioè presa una coppia di punti x_1 e $x_2 \in I$ dove I è l'intervallo in cui esiste la funzione, questa assume tutti i valori compresi tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$. *Si può concludere che se una funzione in un intervallo ha questa proprietà allora è sicuramente continua?*

Capitolo 8

Alcune funzioni continue

Una funzione da $\mathbb{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, è strettamente crescente se $\forall x_1, x_2 \in D. f(x_1) < f(x_2)$. Una funzione strettamente crescente allora logicamente sarà sicuramente **iniettiva**.
Supponiamo che una funzione sia continua ed invertibile. E' corretto dire che **la sua funzione inversa è sicuramente continua?** Risposta: **no**.

Teorema 15. *L'inversa di una funzione continua è continua solo se il dominio di una funzione è un* ***intervallo****.*

Per esempio si considera una funzione strettamente crescente che conserva l'iniettività, e come codominio della funzione si considera la sua immagine.

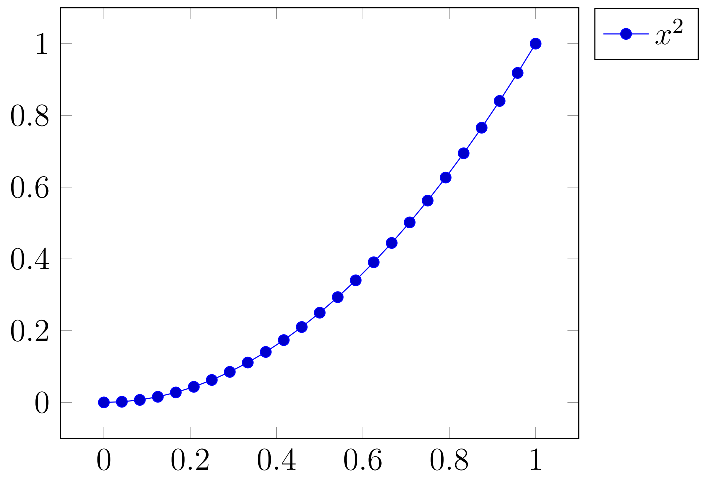
Per esteso Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, e sia $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che questa sia continua e strettamente crescente monotona (ovvero iniettiva). Chiamiamo J l'insieme $f(I)$, cioè l'insieme costruito dagli elementi $f(x)$ al variare di x in I. Poiché $f(I)$ è l'immagine continua di un intervallo, allora anche J è un intervallo. Di conseguenza sono valide le seguenti tesi:

1. La funzione $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è invertibile;

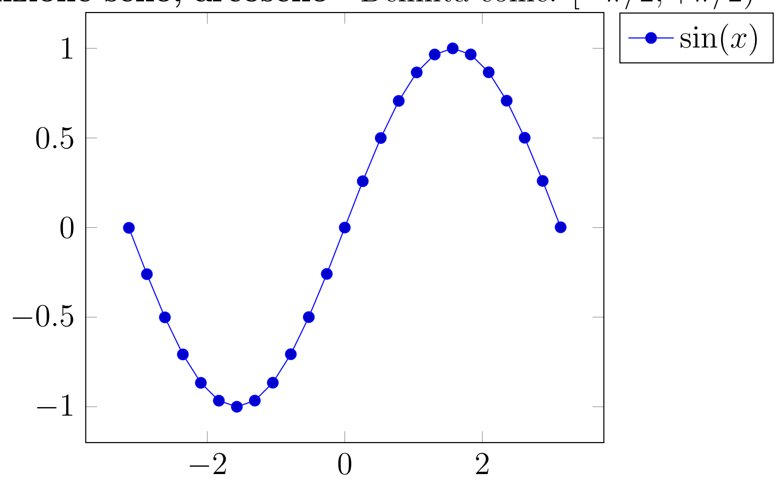
2. La sua funzione inversa $\mathbb{I} \xrightarrow{f^{-1}} \mathbb{R}$ è continua;

8.1 Alcuni esempi

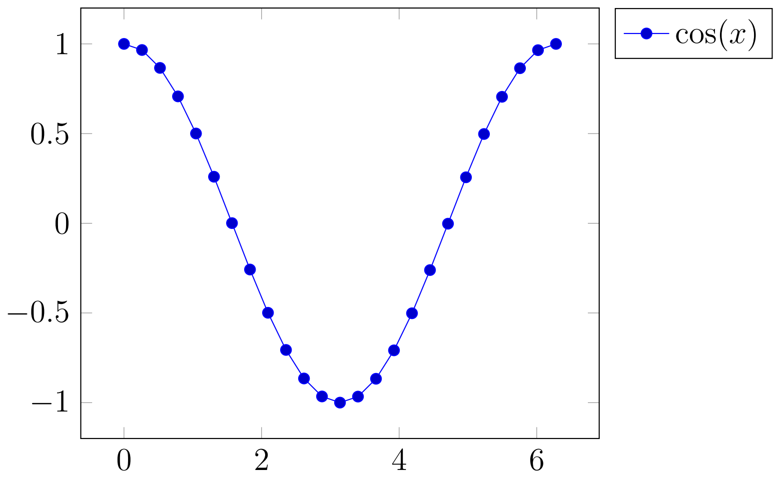
Funzione $(-)^2$ Definita come: $[0, +\infty) \xrightarrow{(-)^2} [0, +\infty)$



Funzione seno, arcoseno Definita come: $[-\pi/2, +\pi/2) \xrightarrow{sin(x)} [-1, +1)$



Funzione coseno, arcocoseno Definita come: $[0, +\pi) \xrightarrow{cos(x)} [-1, +1)$



Funzione tangente

Funzione *exp* e log con base ¿ 1

Funzione *exp* e log con 0 ¡ base ¡ 1

8.2 Dimostrazione seno e coseno sono funzioni continue

Considero la funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{F} \mathbb{R}$. Dato un t arbitrario $F(t) = (cos(t), sin(t))$. Esiste una dimostrazione **fisico cinematica**, ed una **geometrica**.

Dimostrazione cinematica/matematica Ad ogni istante di tempo t, scelto arbitrariamente la funzione F(t) restituisce una coppia di coordinate (cos(t), sin(t)), il cui insieme descrive una circonferenza di raggio unitario. Quindi F(t)descrive **la traiettoria di una curva, è la parametrizzazione di un cammino**. Poichè la definizione di continuità si basa sulla definizione di distanza tra due punti, la distanza tra due punti nel piano equivale a:

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Per definizione di continuità, F(t) è continua se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall t \in \mathbb{R} d(t, t_o) < \delta$, allora $|F(t) - F(t_0)| < \epsilon$, ovvero **il punto $F(t_0)$ deve stare entro un'area, un disco aperto di raggio ϵ e centro $F(t_0)$**

Dimostrazione geometrica Consideriamo un $t + h$, con $h \to 0^+$. Possiamo pensare a t come angolo espresso in radianti, e poichè la circonferenza è unitaria equivale anche all'arco. Quini $h = t + h - t$ è la lunghezza della corda. Possiamo scrivere la seguente disuguaglianza:

$$|cos(t+h) + cos(t)| \leq \sqrt{((cos(t+h) - cos(t))^2 + (sin(t+h) - sin(t))^2}$$

$$\sqrt{((cos(t+h) - cos(t))^2 + (sin(t+h) - sin(t))^2} = |F(t+h) - F(t)| \leq h$$

Di conseguenza $|cos(t + h) + cos(t)| \leq h$, ovvero coseno è continuo perchè $\forall h > 0 \exists \delta : \forall t \in Rd(t - t_0) < \delta$, cioè $|cos(t + h) + cos(t)| \leq h$, considerando in questo caso $\delta = h$.

8.3 Due parole su funzione esponenziale e logaritmo

Le funzioni esponenziale e logaritmo seguono la proprietà di **omomorfismo**.

- $\mathbb{R}$ è un **gruppo additivo**;
- $\mathbb{R}_>$ è un **gruppo moltiplicativo**

Esistono dunque funzioni con queste proprietà:

- Una funzione $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_>$ p un **omomorfismo se** $\forall x, y \in \mathbb{R} f(x + y) = f(x)f(y)$, ovvero f trasforma somme in prodotti;
- Una funzione $\mathbb{R}_> \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è un **omomorfismo se** $\forall x, y \in \mathbb{R}_> g(xy) = g(x) + g(y)$, ovvero trasforma prodotti in somme;

Un omomorfismo preserva la forma tra dominio e codominio.

Applicazioni fisiche

Intensità luminosa Prendiamo in considerazione un raggio luminoso che attraversa una lastra di vetro opaco di $1cm$, e la sua luminosità è ridotta del 20%. Trova la funzione che definisce l'intensità luminosa in funzione dello spessore della lastra di vetro.

$$m(0) = 1$$

$$m(1) = 0.80$$

$m(x)$ è una funzione strettamente decrescente, ed è un **omomorfismo**.

$$m(x+h) = m(x)m(h)$$

, ed m(x) è una funzione esponenziale.

$$m(x) = (0.80)^x$$

Decadimento radioattivo Calcolare la quantità di materia che non decade, cioè che resta. m_0 è la massa iniziale, m_t è la massa che resta, mentre $f(t)$ è la percentuale del decadimento radioattivo in funzione del tempo. Dopo un periodo $t+h$:

$$\begin{aligned} m_{t+h} &= m_0 f(t+h) \\ &= m_0 f(t) f(h) \end{aligned}$$

Se prendessimo T come tempo di dimezzamento: $m_T = m_0(\frac{1}{2})^t$.

Teoremi funzioni omeomorfe

Teorema 16. ***Omomorfismi strettamente crescenti*** *Fissato un b qualunque* > 1*, allora* $\exists!$ *una funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_>$ *che:*

- *Ha la proprietà di omomorfismo;*
- *E' strettamente crescente;*
- $f_b(1) = b$*;*
- *E' invertibile;*

Teorema 17. ***Omomorfismi strettamente decrescenti*** *Fissato un b qualunque con* $0 < b < 1$ *, allora* $\exists!$ *una funzione* $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}_>$ *che:*

- *Ha la proprietà di omomorfismo;*
- *E' strettamente decrescente;*
- $f_b(1) = b$*;*
- *Strettamente monotona e invertibile;*

Capitolo 9

Concetto di derivabilità

Definizione 1 Sia una funzione definita $I \xrightarrow{f} R, I \subset R$ e $x : 0 \in I$. Allora la funzione f è derivabile se esiste ed è finito il **limite del rapporto incrementale**:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

, oppure

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$$

dove il rapporto incrementale indica la rapidità della variazione di f.

Definizione 2 Una funzione $R \xrightarrow{f} R$ è derivabile se e solo se è differenziabile.

Funzione lineare Una funzione $R \xrightarrow{T} R$ è lineare se $\forall h \in R : T(h) = Lh$ (una retta passante per l'origine).

Proprietà di differenziabilità Una funzione $R \xrightarrow{f} R$ lineare è **differenziabile** se

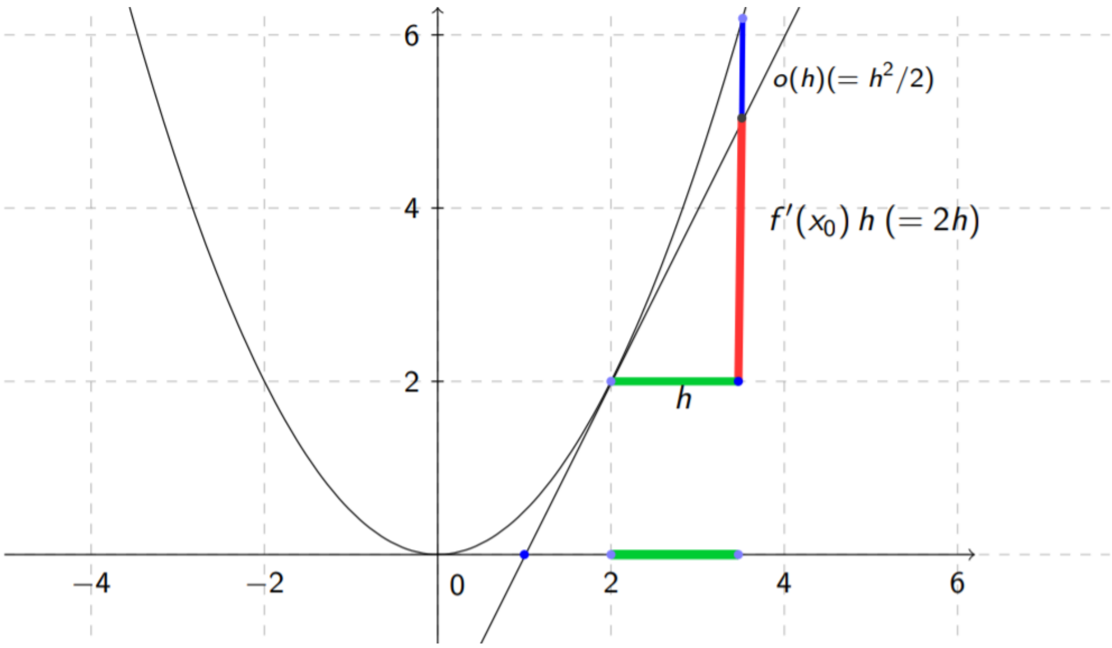
$$f(x_0 + h) - f(x) = f'(x_0)h + o(h)$$

per h che tende a 0. La funzione lineare df_{x_0} si chiama **differenziale** della funzione che ha come codominio ???

Significato geometrico L'incremento $f(x_0+h)-f(x_0)$ è definito come:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h)$$

cioè leggo l'incremento sulla retta tangente al punto x_0. La derivata in $f(x_0)$ infatti è una funzione che approssima l'incremento di una funzione per una



certa quantità tanto piccola che se anche considerata l'errore sarebbe minimo. Questo procedimento è chiamato **approssimazione al primo ordine**.

N.B. Differenziabilità coincide con derivabilità solo in dimensione 1, cioè da R a R.

9.1 Teoremi funzioni derivabili

Teorema 18. ***Derivabilità implica continuità*** *Se f è derivabile in x_0, allora è continua in x_0.*

N.B. **Non è vero il contrario**, cioè una funzione continua è sempre derivabile. Falso.

Dimostrazione 1 Poiché devo dimostrare $f(x) tof(x_0)$, cioè che $f(x)-f(x_0) \to 0$, posso scrivere il limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) =$$

$$\lim_{x \to x_0} [\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)] =$$

$$f'(x_0)0 = 0$$

Quindi $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
c.v.d.

Dimostrazione 2 Poiché per Hp la funzione è derivabile questa conserva anche la proprietà di differenziabilità:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\alpha(x)$$

in cui $< \alpha(x)$ tende a zero per x che tende a x_0.Quindi:

$$f(x) = f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0)$$

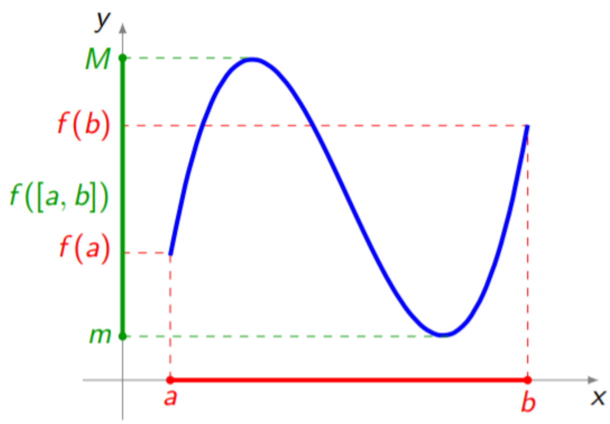
c.v.d.

Teorema 19. ***Teorema di Weierstrass***

1. *Data una funzione $[a, b] \xrightarrow{f} R$ continua su un intervallo compatto e limitato. f allora assume il **valore massimo** e il **valore minimo**. Cioè esistono almeno due $p, q \in [a, b] : \forall x \in [a, b], f(q) \leq f(x) \leq f(p)$;*

2. *Data una funzione $[a, b] \xrightarrow{f} R$ continua su un intervallo compatto e limitato, allora l'immagine della funzione sarà $[m, M]$, dove m è il minimo e M è il massimo.*

Il Teorema di Weistrass afferma che se il dominio di una funzione è un intervallo compatto, anche l'immagine della funzione sarà u intervallo compatto.



Massimo e minimo locale Sia una funzione f $D \xrightarrow{f} R, D \subset R$. Allora:

1. Allora $x_0 \in D$ è un **punto di massimo locale** per f, e il valore $f(x_0)$ si chiama **massimo locale** della funzione, se esiste un intorno I di x_0 se $\forall x \in I$ allora $f(x_0) \geq f(x)$;
2. $x_0 \in D$ è **un punto di minimo locale** per f, e il valore $f(x_0)$ si chiama **minimo locale** per f, se $\exists I$ di $x_0 : \forall x \in I$ allora $f(x_0) \leq f(x)$;

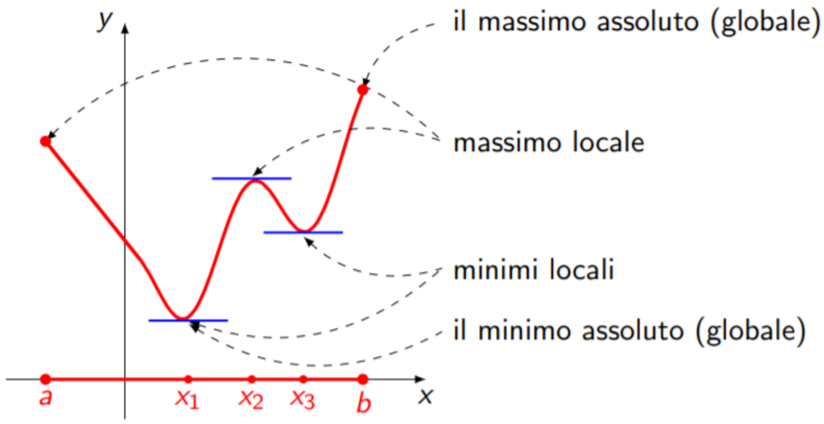
Punto interno Dato un punto $x \in D$, $D \subset R$, si dice intorno se $\exists I(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$, di raggio $r > 0$, incluso in $D : I(x_0, r) \subset D$.

Non si dica solamente che $x_0 \in D$, ma sto dicendo molto di più, cioè che tutti i punti sufficientemente vicini a x_0 appartengono a D, cioè x_0 **non è un punto di frontiera**.

Teorema 20. ***Teorema di Fermat*** *Sia una funzione $f, D \xrightarrow{f} R, D \subset R$. Supponiamo che:*

1. *x_0 sia un punto di massimo(o minimo) locale di f;*
2. *x_0 sia interno a D;*
3. *f sia derivabile in x_0;*

*allora x_0 è un **punto stazionario** (o critico) cioè $f'(x_0) = 0$.*



Dimostrazione Teorema di Fermat Supponiamo x_0 punto di massimo locale per f, quindi esiste un intorno I di x_0 :

- $I(x_0) \subset D$;
- $f(x) - f(x_0) \leq 0, \forall x \in I(x_0)$

Si hanno allora le seguenti disuguaglianze:

$$1)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, x > x_0$$

$$2)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, x < x_0$$

Quindi passando ai limiti per $x \to x_0$:

$$1) \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, x > x_0$$

$$2) \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, x < x_0$$

I limiti precedenti corrispondono alla definizione di rapporto incrementale (ponendo $h = x - x_0$), quindi i limiti devono convergere allo stesso punto:

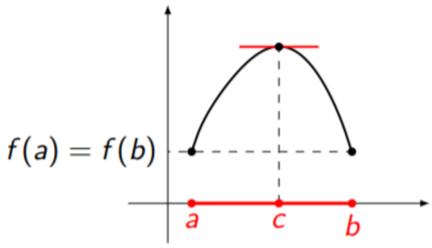
$$1)\frac{0,+}{0}$$

$$2)\frac{0,-}{0}$$

Di conseguenza convergono entrambi a zero, quindi $f'(x_0) = 0$

c.v.d.

Teorema 21. ***Teorema di Rolle*** *Data una funzione $f, [a, b] \xrightarrow{f} R$, continua e definita su un intervallo $[a, b]$, e derivabile in (a, b). Inoltre $f(a) = f(b)$. Allora $\exists$ almeno un $c \in (a, b) : f'(c) = 0$.*



Dimostrazione Teorema di Rolle La dimostrazione in realtà è una conseguenza del teorema di Weistrass. Supponiamo che nell'intervallo $[a, b]$ esistano un massimo M e un minimo m. Allora esistono due casi:

1. Il massimo e il minimo sono agli estremi dell'intervallo, ma poichè per ipotesi $f(a) = f(b)$ allora il massimo e il minimo assumono lo stesso valore, quindi la funzione è costante e la sua derivata prima è nulla per qualsiasi punto nell'intervallo $[a, b]$.

2. Il massimo e il minimo sono due punti interni dell'intervallo $[a, b]$ allora per il teorema di Fermat in quei punti la derivata si annulla.

c.v.d.

Teorema 22. ***Teorema di Lagrange*** *Data una funzione $[a, b] \xrightarrow{f} R$, continua [a,b] e derivabile su (a,b), allora $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

Dimostrazione Teorema di Lagrange Il teorema di Lagrange afferma che esiste un punto c in cui la derivata è uguale all'incremento medio della funzione nell'intervallo. Per dimostrarlo si considera la funzione g(x) differenza tra il segmento AB e la funzione f.

1. Il segmento AB avrà equazione $y - f(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$

2. DI conseguenza $g(x) = f(x) - [+f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)]$

Si nota che agli estremi a e b g(x) assume lo stesso valore, quindi g(b) = g(a).

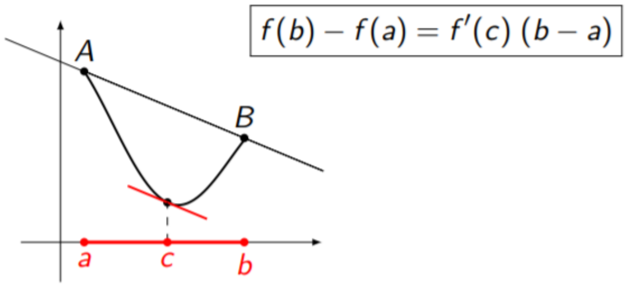
$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Per il Teorema di Rolle deve esistere c tale che la derivata sia nulla:

$$g'(c) = f'(c) = f(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$$

c.v.d.



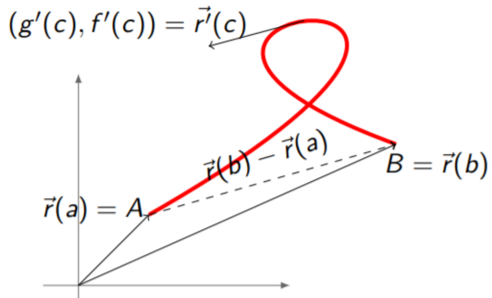
Conseguenza del Teorema di Lagrange Date due funzioni $I \xrightarrow{f} R$ e $I \xrightarrow{g} R$ derivabili, $\forall x \in I, f'(x) = g'(x)$, f e g differiscono per una costante, cioè $(\exists c \in R)(\forall x \in I) f(x) = g(x) + c$.

Teorema 23. ***Teorema di Cauchy (generalizzazione di Lagrange)*** *Date f e g due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b), supponiamo che $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$. Allora $\exists c \in (a, b)$ per cui:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Si dice che sia una generalizzazione di Lagrange perchè se ponessimo $g(x) = x$ allora il teorema di Cauchy è identico a quello di Lagrange.

Interpretazione geometrica La pendenza del segmento AB equivale a $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, dove $A = (g(a), f(a))$ e $B = (g(b), f(b))$, e questa pendenza è uguale a quella del vettore $r(c)$, definita come $\frac{f'(c)}{g'(c)}$



Data una curva parametrizzata $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \longmapsto \vec{r}(t) = (g(t), f(t))$, esiste almeno un $c \in (a, b)$ tale che il vettore velocità $\vec{r}'(c) = (g'(c), f'(c))$ sia parallelo alla corda AB che congiunge i punti estremi. (Vedere le note al sito del corso per la dimostrazione.)

Teorema 24. ***Teorema de L'Hospital, Joh Bernoulli*** *Siano f e g due funzioni continue sull'intervallo [a,b] e derivabili nell'intervallo (a,b). Supponiamo le seguenti ipotesi:*

1. $f(x_0) = g(x_0) = 0$;
2. $g'(x_0) \neq 0$;
3. $\exists$ *finito o infinito* $\lim_{X \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$;

allora esiste $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{X \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Dimostrazione E' una conseguenza diretta del Teorema di Cauchy. Lo dimostriamo nel caso in cui il limite sia finito. Applichiamo il Teorema di Cauchy per la coppia di funzioni f e g.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

poiché in x_0 le funzioni assumono il valore 0, possiamo riscrivere:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Inoltre per $x \to x_0^+$ anche $c \to x_0^+$, perchè $x_0 < c < x$. Quindi:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

Ovviamente **SE** $\exists \lim_{X \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Alcune applicazioni

$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x$ Il limite è una forma di indecisione del tipo $[0(-\infty)]$, ma può essere riscritto nella forma

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$$

$$D(\ln x) = \frac{1}{x}, D(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -x = 0^+$$

Per il Teorema de l'Hospital:

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0^+$$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x}$ Il limite è una forma di indecisione del tipo $[\frac{\infty}{\infty}]$.

$$D(x^n) = nx^{n-1}, D(e^x) = e^x$$

$$D(nx^{n-1}) = n(n-1)x^{n-2}, D(e^x) = e^x$$

Alla ennesima derivata:

$$D(...) = n!, D(e^x) = e^x$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

Per il Teorema de L'Hospital:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

9.2 Regole di derivazione

Date due funzioni derivabili in x f e g, allora:

1. $(f+g)$ è derivabile in x
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
2. fg è derivabile in x, e vale la **regola di Leibniz**
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
3. Con $g(x) \neq 0$ allora
$$\frac{f}{g} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)^2]}$$

Dimostrazione derivata del prodotto di due funzioni Consideriamo l'incremento della funzione prodotto

$$f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a) =$$

Vogliamo scrivere l'incremento nella forma $Ah + o(h)$dove A è la derivata di $f(a)g(a)$, quindi per la proprietà di differenziale A sarà la derivata del prodotto.

$$[f(a) + f'(a)h + o(h)][g(a) + g'(a)h + o(h)] - f(a)g(a)$$
$$[f'(a)g(a) + f(a)g'(a)]h + R(h)$$

dove $R(h)$ è un o-piccolo di $h \to 0$. La parte moltiplicata da h invece è **la parte differenziale**, ed è la derivata del prodotto.

Dimostrazione derivata funzione composta Date due funzioni derivabili f e g, allora la derivata di $g \circ f$ sarà

$$g'(f(x))f'(x)$$

Per $h \to 0$,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) = f(a) + k$$

$$c(a+h) = g(f(a+h)) = g(b+k) = g(b) + g'(b) + o(k)$$
$$c(a) + g'(b)[f'(a+h) + o(h)] + o(k)$$
$$c(a) + g'(b)f'(a)h + g'(b) + o(h) + o(k)$$

Poichè

$$\frac{o(k)}{h} = \frac{o(k)}{k}\frac{k}{h} = \frac{o(k)}{k}\frac{f'(a)h + o(h)}{h} =$$
$$\frac{o(k)}{k}[f'(a) + o(1)] = 0$$

quindi $o(k)$ è un $o(h)$. Alla fine si ha:

$$c(a+b) = c(a) + g'(b)f'(a)h + o(h)$$

$$c'(a) = g'(b)f'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

c.v.d.

9.3 Funzioni monotone o strettamente monotone

Teorema 25. ***Funzioni derivabili strettamente monotone*** *Data una funzione f in un intervallo aperto $I = (a, b)$, con $I \xrightarrow{f} R$, con f derivabile, allora:*

1. *Se $f'(x) > 0 \forall x \in I$, allora la funzione è strettamente crescente;*
2. *Se $f'(x) < 0 \forall x \in I$, allora la funzione è strettamente decrescente;*

Dimostrazione Consideriamo x_1 e $x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$. Allora per il Teorema di Lagrange $\exists c$:

$$f'(c)(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$$

Con: $f'(c) > 0$ e $(x_1 - x_2) < 0$ per ipotesi, dunque sicuramente:

$$f(x_2) > f(x_1)$$

quindi la funzione è strettamente crescente. Si dimostra in modo analogo per (2).

c.v.d.

N.B. L'ipotesi che la funzione sia definita in un intervallo **non si può eliminare**. E inoltre **il fatto che una funzione sia strettamente crescente non implica il fatto che la sua derivata sia strettamente maggiore di 0**, vedi $f(x) = x^3$.

Teorema 26. *Sia $I \xrightarrow{f} R$, con f derivabile, allora:*

1. *f è monotona crescente su $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in I$;*
2. *f è monotona decrescente su $I \leftrightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in I$;*

Dimostrazione Fissiamo $x_0 \in I$. Poiché per ipotesi la funzione è monotona crescente, allora per definizione di limite di rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0)}{h} \geq 0$$

$$f(x_0) \leq f(x_0 + h) \forall x_0 \in I$$

Analogamente lo si dimostra per (2):

c.v.d.

9.4 Funzioni Convesse

Supponiamo di avere una funzione f definita in un intervallo $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$. Allora la funzione f è convessa (o ha concavità verso l'alto) se per ogni coppia di punti M,N, la corda di estremi M,N è sempre al di sopra del grafico. Viceversa la funzione si dice concava (con concavità verso il basso).

Definizione algebrica Una funzione si dice convessa se $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{I}, \forall 0 < t < 1$, si ha

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

Dove:

- $0 < t < 1$ rappresenta i punti della corda;
- Per $t = 0$ $\rightarrow$si ha x_1 (M);
- Per $t = 1$ $\rightarrow$si ha x_2 (N);

Teorema 27. *La condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione derivabile sia convessa in $[a, b]$ è che la retta tangente al grafico stia tutta al disotto del grafico.*

Teorema 28. *Data una funzione f derivabile due volte sull'intervallo aperto $\mathbb{I}$, se $\forall x \in \mathbb{I} : f''(x) \geq 0$.*

Dimostrazione La dimostrazione si esegue attraverso lo sviluppo di Taylor con resto di Lagrange centrato in x_0: $\exists c, x < c < x_0$ per cui:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 \tag{9.1}$$

dove:

- $f(x)$ è l'ordinata sul grafico f;
- $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è l'ordinata sulla retta tangente;
- $\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$ è sempre ≥ 0.

L'equazione 9.1 indica che la differenza tra l'ordinata della funzione e l'ordinata della derivata prima è sempre maggiore o uguale a zero, cioè la retta tangente sta sotto al grafico della funzione.

Figure convesse Una figura è convessa quando presi due punti A, B al suo interno, il segmento che li unisce sta interamente all'interno della figura. f è convessa se il suo sopragrafico è convesso.

Capitolo 10

Formula di Taylor

La Formula di Taylor si divide in **locale**, cioè studia la funzione nell'intorno di un punto, oppure **globale** (studia la funzione nella sua interezza).

Locale Una funzione f è derivabile o differenziabile in un punto se:

$$(1) f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a), x \to a$$

perchè è la definizione di rapporto incrementale:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

L'equazione (1) è chiamata anche **approssimazione lineare**. Questa può essere generalizzata attraverso il **Polinomio di Taylor** (locale) nel modo seguente:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \tag{10.1}$$

Globale Per il Teorema del Valore Medio (o di Lagrange)

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

che può essere generalizzato attraverso il Polinomio di Taylor nella forma:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + ... + \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} \tag{10.2}$$

La Formula di Taylor acquista una grande importanza perchè permette di approssimare qualsiasi funzione ad un polinomio più un resto infinitesimo.

10.1 Polinomio di Taylor Locale con resto di Peano

Il Polinomio di Taylor approssima la funzione meglio di qualunque altro polinomio nel punto a. Sia $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, derivabile n volte in $a \in I$. Allora **esiste un unico polinomio** $P_n(x)$ di grado minore o uguale ad n, soddisfacente le $n+1$ condizioni:

- $P_n(a) = f(a)$
- $P_n'(a) = f'(a), ..., P_n^{(n)}(a) = f^{(n)} = a$

Tale polinomio, detto Polinomio di Taylor di ordine n di f, centrato in a è dato da:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x-a)^n$$

per $n = 1$ il polinomio restituisce la retta tangente, per $n = 2$ restituisce la parabola che approssima meglio la funzione nel punto, per $n = 3$ la cubica ecc...

Dimostrazione (o quasi) Consideriamo una funzione $\mathbb{I} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ derivabile per un numero $n = 3$ volte. Costruiamo il Polinomio di Taylor:

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 \qquad (10.3)$$

Dobbiamo dimostrare che per $i = 0, 1, 2, 3$ sia verificata l'uguaglianza $D^{(i)}(T(x)) = f^{(i)}(x)$, cioè bisogna derivare per tre volte l'equazione 10.3.

- $i = 0$ -

$$T(a) = f(a) + f'(a)(a-a) + \frac{f''(a)}{2!}(a-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(a-a)^3$$

$$T(a) = f(a)$$

- $i = 1$ -

$$T'(a) = 0 + f'(a) + f''(a)(a-a) + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(a-a)^3$$

$$T'(a) = f'(a)$$

- $i = 2$ –
$$T''(x) = 0 + f''(x) + f^{(3)}(a)(x-a)$$
$$T''(a) = 0 + f''(a) + f^{(3)}(a)(a-a)$$
$$T''(a) = f''(a)$$

- $i = 3$ –
$$T^{(3)}(x) = f^{(3)}(a)$$
$$T^{(3)}(a) = f^{(3)}(a)$$

Quindi è verificata la condizione. Si lascia al lettore la dimostrazione per un n indefinito.

Una funzione n volte derivabile in a e il suo Polinomio di Taylor hanno un contatto in a.

Sviluppo per e^x Per la funzione esponenziale e^x, lo sviluppo di Taylor è il seguente:
$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Applicazione nei limiti Consideriamo il seguente limite: $\lim_{x\to 0} \frac{x-sen(x)}{x^3}$. Pur sapendo che $sen(x) \sim x, x \to 0$ arriveremmo alla forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$.

Quindi un metodo possibile è quello di sviluppare il polinomio di Taylor per $n = 3$ di $sen(x)$.Quindi:
$$senx = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$
e questa è una migliore approssimazione di $senx \sim x$. Possiamo riscrivere il limite:
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))}{x^3} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3!} + \frac{o(x^3)}{x^3}) = \frac{1}{6}$$

Altro limite particolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}\frac{e^x-1}{x} = [\infty - \infty]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$$

Riscriviamo con il polinomio di Taylor per $n = 2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) - (1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) + 1}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^2) + o(x^3)}{x^2}$$

Ora per definizione $o(x^3) = o(x^2)$ ed inoltre ...?

Applicazione del Polinomio di Taylor per massimi e minimi

Teorema 29. *Sia una funzione f tale che $f'(a) = ... = f^{n-1}(a) = 0; f^n(a) \neq 0$. Allora*

- *se n è pari e $f^n(a) > 0$, allora f ha un **minimo locale**;*
- *Se n è pari e $f^n(a) < 0$, allora f ha un **massimo locale**;*
- *Se n è dispari, f non ha né massimo ne minimo locale;*

Dimostrazione Scriviamo il Polinomio di Taylor:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x-a)^n \tag{10.4}$$

Per le ipotesi scritte precedentemente:

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x-a)^n \tag{10.5}$$

quindi raccogliamo un $(x-a)^n$:

$$f(x) - f(a) = (x-a)^n[\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{o(x-a)^n}{o(x-a)^n}] \tag{10.6}$$

Nell'equazione 10.6 il termine nelle parentesi quadre lo chiamiamo $Q(x)$. Questo termine avrà il segno determinato solo da $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ perchè per $x \to a$ il termine o-piccolo tende a zero per definizione. Se $n = 2$ per esempio e 10.6 può essere:

1. **positiva**, cioè $f(x) \geq f(a)$, quindi si ha un minimo locale;
2. **negativa**, cioè $f(x) \leq f(a)$, e si ha un massimo locale;

Nel caso di n dispari è impossibile determinare se è presente un massimo o un minimo.

10.2 Polinomio di Taylor Globale con resto di Lagrange

Il Polinomio di Taylor globale, come suggerisce il nome, vale su un intervallo. Sia f una funzione derivabile su un intervallo n volte, allora fissiamo $a \in I$. $\forall x \in I \exists c$ compreso tra a e x, per cui vale la seguente uguaglianza:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (10.7)$$

Nell'equazione 10.7 l'ultimo termine è chiamato **resto di Lagrange**, e inoltre c è un punto che noi non conosciamo.

Valutazione dell'errore Nell'intervallo $[0, \pi/4]$ approssimiamo $sinx$ con Taylor. Per l'equazione 10.7:

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{cos(c)}{5!}x^5 \quad (10.8)$$

Il polinomio di Taylor per $n = 3$ coincide con quello $per n = 4$. L'errore che si commette nella valutazione del seno di un punto nell'intervallo tra $[0, \pi/4]$ equivale a:

$$(\frac{\pi}{4})^5/5! \approx 0.0024 \quad (10.9)$$

cioè il calcolo del seno attraverso il polinomio di Taylor per $n = 3$ ha le prime due cifre decimali esatte.

Serie esponenziale Per il Polinomio di Taylor con resto di Lagrange 10.7 applicato alla funzione esponenziale:

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^c \quad (10.10)$$

Anche se c è ignoto sappiamo che per $n \to +\infty$, il resto di Lagrange sarà:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^n}{n!}e^c = 0 \quad (10.11)$$

Questo perchè:
$$\frac{x^n}{n!}e^c \leq \frac{|x|^n}{n!}e^{|x|}$$
Si ha quindi lo **sviluppo della serie esponenziale**:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{10.12}$$

Questa serie converge e^x, significa che

$$\lim_{n\to+\infty} e^x - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0 \tag{10.13}$$

cioè l'errore tende a zero.

N.B. Un buon modo di visualizzare gli sviluppi di Taylor per $n \to +\infty$ centrati in zero, attraverso questo link: `https://www.geogebra.org/m/s9SkCsvC` .

Capitolo 11

Numeri complessi

$\mathbb{C}$ è l'insieme che è costituito da tutte le espressioni $z = a + ib$, dove i è la soluzione immaginaria all'equazione $i^2 = -1$.
La somma di due numeri complessi: $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$
Il prodotto di due numeri complessi: $(a + ib)(a' + ib')$

$$(a + ib)(a' + ib') = aa' + iab' + ia'b + i^2bb' \tag{11.1}$$

$$(aa' - bb') + i(ab' + a'b) \tag{11.2}$$

I numeri immaginari $z = a + ib$ sono costituiti da una **parte reale** $a = Re(z)$ e una **parte immaginaria** $b = Im(z)$.

Alcune operazioni

- $z = a + ib, \overline{z} = a - ib$;
- $z, w \in \mathbb{C}, \overline{zw} = \overline{zw}$;
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- $|z|^2 = z\overline{z}$

Interpretazione dei complessi Gauss ed Hamilton iniziano ad interpretare i numeri complessi come punti del piano reale $\mathbb{R}$, con una coppia di coordinate (a, b).

11.1 Definizione di $\mathbb{C}$

Il campo a $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è l'insieme $\mathbb{R}^2$ dei punti del piano, $\mathbb{R}^2 = \{(a, b), a, b \in \mathbb{R}\}$ dotato delle seguenti operazioni: **la somma e il prodotto**.

Somma La somma tra due numeri (x, y) e (x', y'), allora la loro somma sarà $(x + x', y + y')$. La somma dunque si fa per **componenti**, e può essere visualizzata come somma di vettori che vanno dall'origine al punto.

Coordinate polari I numeri complessi possono essere visti in forma goniometrica del tipo $z = (rcos\theta; rsen\theta)$. Questo perchè:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{11.3}$$

quindi:

$$x = rcos\theta$$
$$y = rsen\theta$$

Importante è rocprdare che θ **non è unico** (a meno di multipli di $2k\pi, k \in \mathbb{N}$). Mentre r è unico. Scrivere i numeri complessi in forma polare aiuta nella moltiplicazione.

Moltiplicazione Dati due numeri complessi:

$$z = r(\cos\theta, \sin\theta)$$
$$z' = r'(\cos\theta', \sin\theta')$$

quindi $z \cdot z'$:

$$z \cdot z' = r(\cos\theta, \sin\theta)r'(\cos\theta', \sin\theta') \tag{11.4}$$
$$rr'(\cos\theta\cos\theta' + i^2\sin\theta\sin\theta' + i\cos\theta\sin\theta' + i\sin\theta\cos\theta') \tag{11.5}$$
$$rr'[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')]$$
$$rr'[cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')] \tag{11.6}$$

Quindi attraverso l'equazione 11.6 osserviamo che l'argomento di z è $arg(z) = \theta$, $arg(z') = \theta'$, e $arg(zz') = \theta + \theta' = arg(z) + arg(z')$. Infine si interpreta la moltiplicazione come **una rotazione**, **una trasformazione nel piano**.

11.2 Applicazioni dei numeri complessi

Teorema di De Moivre

$$z^n = r^n(\cos(n\theta), \sin(n\theta)) \tag{11.7}$$

Un'applicazione di 11.7 è il calcolo delle **radici ennesime**.

Consideriamo l'equazione in $\mathbb{C}, z^3 = 1$ cioè $z = \sqrt[3]{1}$. Dunque abbiamo i due numeri:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{11.8}$$

$$1 = (1)(\cos(0) + i\sin(0)) \tag{11.9}$$

tuttavia z^3 è:

$$z = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) \tag{11.10}$$

In conclusione si ha

$$z = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = (1)(\cos(0) + i\sin(0)) \tag{11.11}$$

$$3\theta = 0 + 2k\pi \tag{11.12}$$

$$\theta = \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbb{R} \tag{11.13}$$

L'uguaglianza 11.13 ci dice che in $\mathbb{C}$ esistono tre soluzioni, di cui solo una appartiene ai numeri reali, gli altri al piano $\mathbb{R}^2$.

11.3 Rotazione nel piano

Consideriamo il numero complesso $u = \cos\theta + i\sin\theta$, unitario cioè $|u| = 1$. Ora definiamo l'operazione **moltiplicazione per u**, cioè interpretiamo u come un operatore.

$$\mathbb{C} \xrightarrow{F_u} \mathbb{C}$$

$$z \to z \cdot u$$

uz avrà quindi:

1. $|uz| = |z|$
2. $arg(z) = arg(u) + arg(z)$;
3. O è un punto fisso, $O \xrightarrow{F_u} 0$.
4. $zu = z(\cos(\theta + \alpha) + i\sin(\theta + \alpha))$

Quindi si osserva facilmente come la moltiplicazione per u sia **una rotazione di centro all'origine e ampiezza** $arg(u)$.

Notazione esponenziale Un numero complesso può anche essere scritto in forma esponenziale, ovvero

$$r \cdot e^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{11.14}$$

Il perché lo spieghiamo utilizzando due numeri complessi unitari u e u', ovvero $r = 1$. Quindi $u \cdot u'$:

$$u \cdot u' = |u \cdot u'|(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')) \tag{11.15}$$

E sia u che u' sono una rotazione di centro O e ampiezza θ/θ'. Quindi uu' è la rotazione composta $u \circ u'$. Se dunque vale 11.14, allora:

$$(e^{i\theta})(e^{i\theta'}) = e^{i(\theta+\theta')} \tag{11.16}$$

Quindi **le moltiplicazioni sono trasformate in somme**.

Gruppi e la loro interpretazione geometrica L'interpretazione geometrica di $S^1 = u \in C||u| = 1$, dove S^1 è un gruppo rispetto al prodotto, cioè se $u \cdot u' \in S^1$, allora $u \cdot u' \in S^1$. Si dice che s^1 **è il gruppo moltiplicativo delle rotazioni del piano che hanno punto fisso in** O. Quindi la circonferenza unitaria è il gruppo dei complessi con $|u| = 1$. Per esempio il numero complesso i è la rotazione di $\pi/2$.

Definizione di Rotazione

Isometria Data una funzione $\mathbb{C} \xrightarrow{F} \mathbb{C}$, F si dice **isometrica** se $\forall(z, w)$: $|F(z)-F(u)| = |z-w|$. Ovvero **una funzione è un'isometria se preserva le distanze**.

"Una rotazione del piano è un'isometria (preserva le distanze) che ha un unico punto fisso, oppure è l'identità". L'identità trasforma ogni punto in se stesso.

- $F(O) = O$ (punto fisso);
- $F(a) = a$ (identità);

Dunque l'utilizzo della forma esponenziale 11.14 torna utile. Lo sviluppo di Taylor per la funzione esponenziale è:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!} \tag{11.17}$$

Se al posto di x consideriamo $i\theta$:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2} + ... + \frac{(i\theta)^n}{n!} \tag{11.18}$$

tuttavia come ben sappiamo le potenze di i sono cicliche, quindi:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(\theta)^2}{2} - \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(\theta)^4}{4!} + ... + \frac{(i\theta)^n}{n!} \tag{11.19}$$

$$= (1 - \frac{(\theta)^2}{2} + \frac{(\theta)^4}{4!} + ...) + i(\theta - \frac{(\theta)^3}{3!} + ...) \tag{11.20}$$

$$= \cos\theta + i\sin\theta \tag{11.21}$$

Omotetie nel piano Se consideriamo il numero complesso $a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Allora:

1. moltiplicazione per a $\rightarrow$**rotazione**;
2. moltiplicazione per r $\rightarrow$**dilatazione**

Questo tipo di trasformazioni è detta **roto-omotetia**, cioè la composizione di una rotazione e una dilatazione. Fa parte delle omotetie nel piano.

Applicazione allo studio delle isometrie Consideriamo la trasformazione $z \rightarrow u \cdot z + w$, che **ha un punto fisso**. In particolare la trasformazione è una rotazione con traslazione. I punti fissi sono la soluzione all'equazione:

$$uz - w = z$$

$$z = \frac{w}{1-u} \tag{11.22}$$

Isometria della traslazione La traslazione è un'isometria perchè presi z, z' e la traslazione T_w, allora se questa fosse un'isometria:

$$|T_w(z) - T_w(z')| = |z - z'|$$

$$|z + w - z' - w| = |z - z'|$$

Isometria della rotazione Analogamente a prima avremo:

$$R_u(z) - R_u(z')| = uz + w - uz' - w|u(z - z')$$

$$|uz + w - uz' - w| = |u(z - z')|$$
$$|u||z - z'| = (1)|z - z'|$$

Esercizio: trovare il punto fisso della rotazione di $\pi/2$ e della traslazione di 1, (sol: $\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$).

11.4 Teorema fondamentale dell'algebra

Teorema 30. *Ogni polinomio complesso di grado maggiore o uguale a* 1 *ha almeno una radice in* $\mathbb{C}$.

In algebra, un campo K si dice **algebricamente chiuso** se ogni polinomio a coefficienti k ha almeno uno zero in k, quindi il teorema precedente si riformula come

Teorema 31. *Il campo* $\mathbb{C}$ *dei complessi è algebricamente chiuso.*

In generale un polinomio di grado n avrà n soluzioni.
Esercizio: il polinomio $P(z) = z^3 + z + 1$ in $\mathbb{C}$ è iniettivo? E' suriettivo?

Capitolo 12

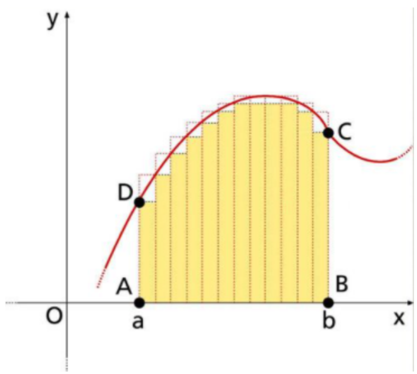
Il calcolo integrale

Cosa significa **integrale deinito** o **integrale di Riemann**? L'integrale definito è il secondo grande problema del calcolo infinitesimale. Venne scoperto a partire dal 1600 da Leibniz e Newton, si è studiato il legame profondo tra il calcolo integrale e il calcolo differenziale.

1. Derivata: data la lunghezza dello spazio percorso da un corpo in ogni istante di tempo, determinare la velocità in ogni istante;

2. Data la velocità del moto in ogni istante di tempo, trovare lo spazio percorso in ogni istante;

Il calcolo integrale nasce dal calcolo delle aree di figure piane. Per determinare l'area sotto la curva di una funzione prima si prova a determinarla attraverso figure più semplici, come dei rettangoli. Si divide l'intervallo $[a, b]$ in n intervalli, non necessariamente di ampiezza uguale. L'area evidenziata sarà circa l'area del pluri-rettangolo inscritto e di quello circoscritto.



Per $n \to \infty$ avremo:

- la somma dei pluri-rettangoli inscritti è S^-;
- la somma dei pluri-rettangoli circoscritti è S^+;

Quindi si definiscono:

- **Integrale inferiore come l'estremo superiore di tutti i pluri-rettangoli inscritti**;
- **Integrale superiore come l'estremo inferiore di tutti i pluri-rettangoli circoscritti**;

Se l'integrale superiore e l'integrale inferiore coincidono, allora la funzione è integrabile sull'intervallo $[a, b]$. Se i due differiscono la funzione non è integrabile sull'intervallo $[a, b]$.

Definizione di Integrale secondo Riemann L'integrale di $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ è (se esiste) il limite:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta x| \to 0} \sum_i f(x_i)\Delta x \tag{12.1}$$

dove $|\Delta x|$ è la massima ampiezza dei sotto-intervalli della partizione che va poi a definire il pluri-rettangolo. Per partizione si intende la divisione in punti tale per cui:

$$a = x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

12.1 Teoria dell'integrazione secondo Riemann

Come suggerisce il titolo di questo paragrafo, esistono diverse teorie dell'integrazione nate nel '900. Consideriamo funzioni $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, che soddisfano

le seguenti condizioni:

1. f è limitata su $[a, b]$, cioè $\exists k \in \mathbb{R}$ e costante, tale per cui $|f(x)| \leq k, \forall x \in [a, b]$;
2. il dominio di integrazione è $[a, b]$ intervallo compatto;

Sia data una funzione $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ limitata sull'intervallo $[a, b]$ e sia P una partizione dell'intervallo $[a, b]$, tale che:

$$a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$$

formato da un insieme finito di punti. Allora:

- $m_i = inf\{f(x)|x \in [a_{i-1}, a_i]\}$;
- $M_i = sup\{f(x)|x \in [a_{i-1}, a_i]\}$;

allora:

- $S^-(f, P) = \sum_i^m m_i(a_i - a_{i-1})$ (**somma inferiore**);
- $S^+(f, P) = \sum_i^M M_i(a_i - a_{i-1})$ (**somma superiore**);

e per ogni partizione P, si ha che $S^+ > S^-$

Per definizione chiamiamo $\underline{I}(f)$ (integrale superiore) l'estremo superiore di tutte le somme inferiori.

$$\underline{I}(f) = sup\{\text{ Tutte le somme inferiori } S^-(f, P), P \in \mathbb{P}\}$$

Allo stesso modo si chiama $\overline{I}(f)$ (integrale superiore) l'estremo inferiore di tutte le somme superiori.

$$\overline{I}(f) = inf\{\text{ Tutte le somme superiori } S^+(f, P), P \in \mathbb{P}\}$$

(è indicato con $\mathbb{P}$ l'insieme di tutte le possibili partizioni).

Per definizione si avrà $\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$. Nel caso in cui fossero uguali, allora:

$$\overline{I}(f) = \underline{I}(f) = \int f(x)dx \tag{12.2}$$

e si definisce l'**integrale definito**.

12.2 Funzioni Riemann-Integrabili

Una funzione $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ limitata sull'intervallo $[a, b]$ si dice **Riemann-integrabile** se

$$\overline{I}(f) = \underline{I}(f) \tag{12.3}$$

se questo è vero, $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ è detto integrale di f su $[a, b]$ e si denota come $\int_a^b f(x)dx$.

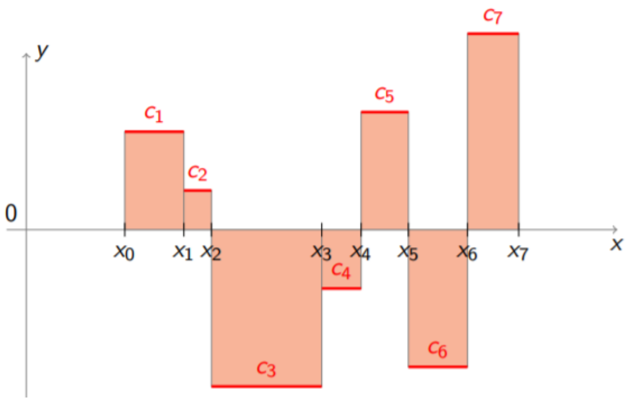
Questa definizione è l'equivalente alla definizione a partire dalle somme di Riemann. Se esiste il limite delle somme di Riemann queste coincidono.

Tra le funzioni Riemann-integrabili ci sono le funzioni costanti

$$\int_a^b k = k(b-a) \tag{12.4}$$

e le funzioni definite "a gradini"

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1} \tag{12.5}$$



Funzione di Dirichlet Data la funzione $[0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se x è razionale} \\ 0 \text{ se x è irrazionale} \end{cases} \tag{12.6}$$

la funzione di Dirichlet è una funzione limitata ma non Riemann-integrabile. Nell'intervallo $[0,1]$ entrano infiniti numeri razionali e irrazionali, quindi si avrà che:

- $S^- = 0, \forall x \in [0,1]$, perchè "approssimo dal basso";
- $S^+ = 1, \forall x \in [0,1]$, perchè "approssimo dall'alto";

in sostanza $\overline{I}(f) \neq \underline{I}(f)$, cioè **non posso definire l'area della figura piana sottesa al grafico**.

Criterio di integrabilità Una funzione $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ limitata sull'intervallo $[a,b]$ è integrabile secondo Riemann **se e solo se** $\forall \epsilon > 0$ esiste una partizione P tale che

$$S^+(f,P) - S^-(f,P) \leq \epsilon \tag{12.7}$$

cioè esiste una partizione per cui l'area del rettangolo circoscritto meno l'area del rettangolo inscritto sono **indefinitamente vicini**, cioè il *sup* e l'*inf* coincidono.

Teorema 32. ***Integrabilità delle funzioni monotone*** *Ogni funzione monotona su un intervallo $[a,b]$ è integrabile su $[a,b]$.*

Dimostrazione Consideriamo una funzione **monotona crescente** $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, con una partizione di ampiezza $\delta = \frac{b-a}{n}$. Sia dato un $\epsilon > 0$. La differenza tra la somma superiore e la somma inferiore sarà:

$$S^+(f,P) - S^-(f,P) = \delta_n[f(b) - f(a)]$$

dove $f(b)$ è l'altezza massima che la funzione assume e $f(a)$ è l'altezza minima (essendo la funzione crescente). **Per n abbastanza grande** la differenza può essere definita come minore o uguale a ϵ.

$$S^+(f,P) - S^-(f,P) = \epsilon$$

dunque per il **criterio di integrabilità, la funzione è integrabile**.

N.B. Qualsiasi funzione crescente è integrabile, e può essere anche discontinua. In generale funzioni che crescono e decrescono (**senza infinite oscillazioni** sono integrabili.

Teorema 33. ***Integrabilità delle funzioni continue sui compatti*** *Se f è una funzione continua su un intervallo compatto $[a,b] \subset \mathbb{R}$, allora f è integrabile su $[a,b]$.*

In generale si ha:

Teorema 34. *Una funzione $[a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ limitata e supponiamo che l'insieme dei punti di discontinuità di f sia finito. Allora f è integrabile.*

12.3 Proprietà degli integrali

Si denota con $\mathcal{R}[a,b]$ lo spazio delle funzioni Riemann-integrabili. Lo spazio $\mathcal{R}[a,b]$ ha la funzione di spazio vettoriale, cioè date due funzioni integrabili moltiplicate fra loro si ottiene una funzione integrabile.

(1) Se $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ e λ, μ, allora $\lambda f + \mu g \in \mathcal{R}[a, b]$.

(2) Linearità $\forall f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b], \forall \lambda \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx \tag{12.8}$$

ovvero **l'integrale è additivo**. Inoltre è anche **omogeneo**:

$$\int_a^b \lambda f_1(x)dx = \lambda \int_a^b f_1(x)dx \tag{12.9}$$

L'operatore di integrazione è lineare:

$$\mathcal{R}[a, b] \xrightarrow{\int_a^b} \mathbb{R}, f \to \int_a^b f(x)dx \tag{12.10}$$

(3) Monotonia Se $f_1, f_2 \in \mathcal{R}[a, b], f_1(x) < f_2(x), x \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b f_1(x)dx \leq \int_a^b f_2(x)dx \tag{12.11}$$

(4) $f \in \mathcal{R}[a, b], c \in (a, b)$. Le restrizioni di f agli intervalli $[a, c]$ e $[c, b]$ sono integrabili:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{12.12}$$

(5) Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e $M \in \mathbb{R}$ è un numero tale che $|f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$, allora:

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq M(b - a) \tag{12.13}$$

(6) Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$, allora $|f(x)| \in \mathcal{R}[a, b]$, e

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \tag{12.14}$$

(7) Se $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$, allora $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$.

Integrale orientato Sia $a > b$, si pone per definizione

$$\int_a^b f(x)dx f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{12.15}$$

$$\int_1^0 f(x)dx = -\int_0^1 f(x)dx$$

con questa definizione di integrale orientato allora $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (qualunque sia la posizione reciproca):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Teorema 35. ***Teorema della media integrale*** *Sia $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Denotiamo $m = inf\{f\}, M = sup\{f\}$, cioè estremi inferiore e superiore di f su $[a, b]$. Allora sappiamo che:*

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

se inoltre f è continua allora

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Dimostrazione Sia $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$. Allora sappiamo che:

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

dividendo per $(b - a)$:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

c.v.d.

Se la funzione è continua allora deve esistere un punto c tale per cui $f(c)(b - a)$ (ovvero l'area del rettangolo di base $(b - a)$ e altezza $f(c)$).

12.4 Esercizio

Consideriamo la funzione $[-1,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

Richiesta: dimostrare che questa funzione sia integrabile, e il suo integrale sia uguale a 0. Dividiamo $[-1,1]$ in sotto intervalli della stessa dimensione di ampiezza $\frac{2}{n}$. Tutti gli intervalli che non contengono l'origine, sono intervalli in cui la funzione è uguale a zero, quindi

$$S^+ = S^- = 0$$

Consideriamo l'intervallo $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ che contiene $x = 0$. L'estremo inferiore è 0, quello superiore sarà:

$$S^+(f) = (\frac{1}{n} + \frac{1}{n})1 = \frac{2}{n}$$

Per $n \to \infty, S^+(f) = 0$. Ovvero:

$$\overline{I}(f) = \underline{I}(f) = 0$$

12.5 Legame tra derivate ed integrali

Immaginiamo che l'area generata tra la funzione e l'asse x sia generata da un segmento che si sposta da a e b. Allora l'area parziale $F(x)$ è definita come

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

$F(x)$ è detta funzione integrale di f, a partire dal punto a (a di base a). Qual è la rapidità di variazione di $F(x)$ da x ad un punto vicino a x? La variazione di questa area sarà

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) + F(x)}{h}$$

ovvero l'area del rettangolino infinitesimo, diviso per la sua base, quindi il limite restituisce un'altezza (l'ordinata del punto x, ammettendo che f sia continua):

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) + F(x)}{h} \; f(x)$$

poichè abbiamo definito il rapporto incrementale di $F(x)$ allora

$$F'(x) = f(x) \tag{12.16}$$

$$F(x) = \int f(x)dx \tag{12.17}$$

12.6 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Teorema 36. ***Continuità della funzione integrale***. *Sia $f \in \mathcal{R}[a,b]$, allora con la funzione integrale*

$$F(x) = int_a^x f(t)dt$$

è continua nell'intervallo $[a,b]$.

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che quando $f \in \mathcal{R}[a,b]$ allora la funzione integrale F è continua, anche se f è discontinua. Data una funzione $f \in \mathcal{R}[a,b]$, per ipotesi questa è limitata, cioè $\exists k||f(x)| \leq k, \forall x \in [a,b]$. Scelgo quindi un $x_0 \in [a,b]$ arbitrario. Allora

$$|F(x) - F(x_0)| = |int_a^x f - \int_a^{x_0} f| = |\int_a^x f + \int_{x_0}^a f|$$
$$= |\int_{x_0}^x f|$$

Sempre per la proprietà degli integrali, il valore assoluto di un integrale è minore o uguale dell'integrale del valore assoluto. Utilizziamo il modullo dell'integrale del valore assoluto perchè vogliamo lavorare con valori positivi:

$$|\int_{x_0}^x f| \leq |\int_{x_0}^x |f||$$

poichè la funzione è limitata allora:

$$|\int_{x_0}^x f| \leq |\int_{x_0}^x k| = k|x - x_0|$$

Quindi la funzione è continua perchè

$$|F(x) - F(x_0)| \leq k|x - x_0| \tag{12.18}$$

con $k|x - x_0| \leq \epsilon$, tale che $|x - x_0| \leq \frac{\epsilon}{k}$, cioè $\delta = |x - x_0| = \frac{\epsilon}{k}$

Si dice che F è una funzione **uniformemente continua**, cioè $\forall x_0 \exists \delta = |x - x_0|$ e ogni x_0 ha un δ differente, non è detto che esiste un δ che valga per ogni x_0.

c.v.d.

Teorema 37. ***Teorema fondamentale del calcolo integrale*** *Sia* $[a, b] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$*, allora:*

1. *La funzione integrale di f,*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è un ***antiderivata*** *di f, ossia è derivabile e $F'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$:*

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

2. *Se G è una qualunque antiderivata di f su $[a, b]$, ossia*

$$G'(x) = f(x), \forall x \in [a, b]$$

allora:

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione (1) Fissiamo un punto $x \in [a, b]$. Allora, mediante un incremento di h:

$$\frac{F(x+h) - F(X)}{h} = \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x))$$
$$= \frac{1}{h}(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f)$$
$$= \frac{1}{h}(\int_x^{x+h} f)$$

che geometricamente rappresenta "la striscetta di area tra x e $x + h$". Per il Teorema della media integrale si ha che:

$$\frac{1}{x+h-x} \int_x^{x+h} f) = f(c)$$

Tuttavia per $h \to 0$ allora $c \to x$, perchè $c \in [x, x + h]$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(X)}{h} = f(x) \tag{12.19}$$

$$F'(x) = f(x) \tag{12.20}$$

c.v.d.

Dimostrazione (2) Sia $G(x)$ una funzione derivabile tale che $G'(x) = f(x)$. Poichè:

$$G'(x) = f(x) = F'(x)$$

- G e F hanno la stessa derivata (che è f);
- G e F devono differire per una costante;
- $G(x) = \int_a^x f(t)dt + c$;

quindi si ha che:

$$G(b) - G(a) = [\int_a^b f(t)dt + c] - [\int_a^a f(t)dt + c]$$

$$\int_a^b f(t)dt + c$$

c.v.d.

Per calcolare un integrale devi cercare la funzione la cui derivata è $f(x)$.

12.7 Integrali generalizzati

Si parla di integrali generalizzati quando cade una delle due ipotesi di Reinmann:

1. Dominio di integrazione non limitato;
2. Dominio limitato, ma la funzione non è limitata;

12.7.1 (1) Dominiio di integrazione non limitato

Per esempio una funzione che ha un intervallo da $(a, +\infty)$. Per calcolare questo integrale prima definisco l'integrale di Riemann:

$$\int_a^t f(x)dx$$

e per $t \to +\infty$ se il limite esiste allora

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx \tag{12.21}$$

altrimenti si dice che **l'integrale diverge, o è divergente a** $+\infty$.

Esempio (1) $[1, +\infty) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2}, f \notin \mathcal{R}[a, b]$. Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\int_1^t \frac{1}{x^2} = [-\frac{1}{x}]_1^t = -\frac{1}{t} + 1$$

$$\lim_{t \to +\infty} -\frac{1}{t} + 1 = 1$$

L'integrale della funzione nell'intervallo $[1, +\infty)$ è 1.

12.7.2 (2) Funzione non limitata

Se una funzione non è limitata per esempio è del tipo $(0, b) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Allora si calcola l'integrale di Riemann:

$$\int_t^b f(x)dx$$

e per $t \to 0$ se il limite esiste l'integrale sarà:

$$\lim_{t \to 0} \int_t^b f(t)dt = \int_0^b f(x)dx \tag{12.22}$$

Esempio (2) $(0, 1) \xrightarrow{f} \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Quindi definiamo:

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = [2\sqrt{x}]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$$

$$\lim_{a \to 0} 2 - 2\sqrt{a} = 2$$

La funzione ha un integrale di 2.

N.B. Le funzioni considerate negli esempi sono le inverse, infatti i grafici sono simmetrici rispetto la bisettrice del primo quadrante. L'area della seconda funzione è pari a 2 perchè all'area viene aggiunto l'area di un quadrato di lato 1.

Un esempio fondamentale del calcolo degli integrali generalizzati è il seguente:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}, a \in \mathbb{R}$$

Per $a \neq 1$ la primitiva della funzione integranda è $\frac{x^{1-a}}{1-a}$. Secondo la definizione di integrale generalizzato, lo si calcola nei due casi:

1. $a < 1$
$$\lim_{t\to+\infty}[\frac{x^{1-a}}{1-a}]_1^t = \frac{1}{a-1}$$
ovvero l'integrale converge;

2. $a > 1$
$$\lim_{t\to+\infty}[\frac{x^{1-a}}{1-a}]_1^t = +\infty + \frac{1}{a-1}$$
ovvero l'integrale diverge a più infinito;

Teorema 38. ***Criterio del confronto asintotico*** *Siano f e g due funzioni continue (anche solamente integrabili positive) su una stessa semiretta $I = (a, +\infty)$. Supponiamo $f(x)$ $g(x)$, per $x \to +\infty$. Allora f è integrabile (in senso generalizzato) a $+\infty$* ***se e solo se*** *g lo è. Si dice che f e g hanno lo stesso carattere.*

Dimostrazione Per ipotesi $\lim_{x\to+infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, cioè $\forall\epsilon > 0$,esiste un intorno $(M, +\infty)$ di $+\infty$, tale che $\forall x \in (M, +\infty)$:

$$1 - \epsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 1 + \epsilon \tag{12.23}$$

Cioè
$$(1)(1 - \epsilon)g(x) \leq f(x) \leq (1 + \epsilon)g(x)$$

Per **il criterio del confronto**, se g(x) è integrabile a $+\infty$ se

$$f(x) \leq (1 + \epsilon)g(x)$$

ovvero quando f(x) è integrabile a più infinito significa che l'area sottesa a più infinito converge, è finita. Se questa è però vale per $g(x)$, allora è vero anche per $(1+\epsilon)g(x)$ essendo $1+\epsilon$ un numero. Poichè vale la disuguaglianza (1) significa che la funzione $f(x)$ sta tutta al di sotto del grafico di $(1+\epsilon)g(x)$, quindi se questa funzione è integrabile anche f lo è , **se f e g sono funzioni positive**. Se g non è integrabile, cioè diverge a infinito, significa che anche l'area sottesa a $(1 - \epsilon)g(x)$ diverge e per la disuguaglianza (1) anche l'integrale di $f(x)$ diverge.

c.v.d.

Capitolo 13

Serie Numeriche

Teorema 39. ***Carattere della serie numerica.*** *Considerata la serie*

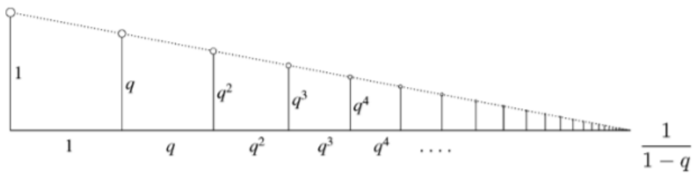
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + ... + q^n \tag{13.1}$$

1. *Se* $|q| < 1$ *converge a* $\frac{1}{1-q}$*;*
2. *Se* $|q| \geq 1$ *diverge a più infinito;*
3. *Se* $|q| \leq -1$ *è oscillante;*

Calcoliamo la somma $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$, ovvero la somma dei primi n termini.

1. $|q| < 1$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$
2. $|q| \geq 1$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = +\infty$$
3. $|q| \leq -1$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = +\infty$$
ovvero ha valore più infinito in valore assoluto, ma cambia alternativamente segno;

Teorema 40. ***Condizione necessaria per la convergenza*** *Se una serie numerica* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *converge, allora* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$



Interpretazione geometrica

Dimostrazione Supponiamo che la serie converga, e che quindi

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = L \in \mathbb{R}$$

Il termine ennesimo della serieallora avrà come valore

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = L - L = 0.$$

c.v.d. Se una serie geometrica il termine ennesimo non converge a zero, allora la serie non può convergere a zero.

Serie armonica divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = +\infty \tag{13.2}$$

La serie armonica divergente, sebbene $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ non converge.

13.1 Serie geometriche e integrali

13.1.1 Criterio dell'integrale

Teorema 41. ***Criterio dell'integrale*** *Sia* $[1, +\infty] \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ *una funzione* ***positiva e decrescente*** *allora* $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ *converge se e solo se* $\int_1^{+\infty} f$ *converge.*

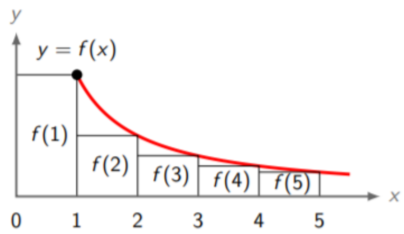


Figura : $\int_1^\infty f(x) > \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$

Essendo la funzione decrescente è sempre Riemann integrabile. La funzione assume nel punto 1 un valore $f(1)$, cioè l'altezza di un rettangolo che ha base 1. Allo stesso modo in $f(2)$ la funzione assume l'altezza del rettangolo che ha base compresa tra 1 e 2. Se l'area al di sotto della funzione è finita, a maggio ragione $f(1) + f(2) + ... + f(n)$ è finita. Quindi si ha:

$$\int_1^{+\infty} f(x) > \sum_{n=2}^{+\infty} f(n) \tag{13.3}$$

Se l'integrale converge, deve convergere anche la serie.

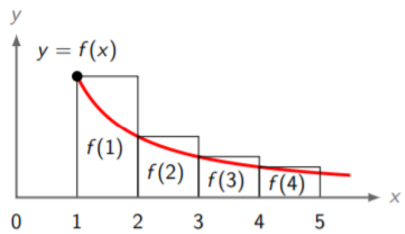
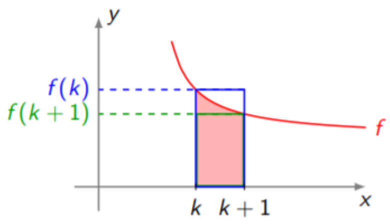


Figura : $\int_1^\infty f(x) < \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

Se consideriamo i rettangoli circoscritti, $f(1) + f(2) + ... + f(n)$ è la somma dei rettangoli circoscritti, e se la serie converge a maggio ragione deve convergere l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)$.

In generale si ha

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) \leq f(k), k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \tag{13.4}$$



Posto $S_n = f(1) + f(2) + ... + f(n)$ allora si ha

$$S_{n+1} - f(1) \leq \int_1^{n+1} f \leq S_n \tag{13.5}$$

Ovvero $\int_1^{n+1} f$ e $\lim_{n\to+\infty} S_n$ devono o entrambi convergere a un numero finito, o divergere.

Serie armoniche generalizzate Mediante un confronto tra le serie e gli integrali del tipo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$$

si ha un risultato importante.

Teorema 42. ***Serie armoniche generalizzate***

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a} \tag{13.6}$$

- *Converge se* $a > 1$*;*
- *Diverge se* $a \leq 1$*;*

Serie armonica generalizzata con logaritmo

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \cdot (\log n)^\beta \tag{13.7}$$

- Converge per $\alpha > 1, \forall \beta \in \mathbb{R}$ oppure $\alpha = 1, \beta > 1$;
- Diverge positivamente per $\alpha < 1, \forall b \in \mathbb{R}$ oppure $\alpha = 1, \beta \leq 1$;

13.2 Studiare il carattere di una serie geometrica

13.2.1 Criterio della radice

Teorema 43. ***Criterio della radice/Criterio di Cauchy*** *Supponiamo di avere una serie $\sum_n a_n$ a termini positivi, e poniamo che esista*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \tag{13.8}$$

allora se $0 \leq L < 1$ la serie converge, se $L > 1$ la serie diverge, se $L = 1$ non possiamo concludere nulla.

Dimostrazione Supponiamo che il limite esista e che $0 \leq L < 1$. Scegliamo un numero q tale che $L < q < 1$. Dal momento che $\sqrt[n]{a_n} \to n$ per un N_0 sufficientemente grande, si avrà che

$$\sqrt[n]{a_n} < q$$

$$a_n < q^n$$

definitivamente. a_n dunque è la minorante di una serie avente carattere generale $q^n, q < 1$, che converge, e la minorante positiva di una serie positiva convergente converge. Nel caso in cui $L > 1$ vale che

$$\sqrt[n]{a_n} > 1$$

$$a_n > q^n$$

definitivamente. Poichè a_n non tende a zero (condizione necessaria alla convergenza, la serie diverge.

c.v.d.

Esercizi

1. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3}{(\log n)^n}$
2. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n}{n^n}$

13.2.2 Criterio del rapporto

Teorema 44. ***Criterio del rapporto*** *Sia* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ *una serie a termini positivi, e poniamo che il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \tag{13.9}$$

allora se $0 \leq L < 1$ *la serie converge, se* $L > 1$ *la serie diverge, se* $L = 1$ *non possiamo concludere nulla.*

Dimostrazione Supponiamo che $0 \leq L < 1$, e scegliamo q tale che $L < q < 1$. Quindi sappiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < q$$

cioè esiste un punto N_0 tale per cui quella disuguaglianza inizia a valere, cioè definitivamente. Moltiplichiamo i termini della disuguaglianza per i termini precedenti:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} ... \cdot \frac{a_1}{a_0} < q \cdot q \cdot ... \cdot q = q^{n+1}$$

ma i termini del primo membro si semplificano tra loro;

$$\frac{a_{n+1}}{a_0} < q_0^{n+1}$$

$$a_{n+1} < a_0 \cdot q_0^{n+1}$$

La serie $\sum_n a_0 \cdot q_0^{n+1} = a_0 \sum_n q_0^{n+1}$ converge essendo $q < 1$, e poichè a_{n+1} è minorante di questa serie anche lei converge. Si dimostra che la successione diverge per $L > 1$ in modo analogo.

c.v.d.

Esercizi

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$

13.3 Serie a termine di segno qualunque

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si definisce **assolutamente convergente** se la serie dei valori assoluti $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ è convergente.

Teorema 45. *Se una serie è assolutamente convergente, allora è convergente, ovvero se $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ converge è vero dire che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge. E' sbagliato dire l'opposto.*

Dimostrazione Definiamo come

$$b_k = \begin{cases} a_k, a_k \geq 0 \\ 0, a_k < 0 \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} 0, a_k \geq 0 \\ -a_k, a_k < 0 \end{cases}$$

si noti come $0 \leq b_k \leq |a_k|$ e $0 \leq c_k \leq |a_k|$. E soprattutto $a_k = b_k - c_k$. Poichè $\sum_n |a_n|$ converge per ipotesi , allora per il criterio del confronto convergono anche $\sum_n b_n$ e $\sum_n c_n$.

c.v.d.

La serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} \tag{13.10}$$

converge per ogni $x \in \mathbb{R}$ (anche negativo), perchè si studia la serie dei valori assoluti (in modo da avere una serie positiva) e applicando il criterio del rapporto. In particolare si definisce

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{13.11}$$

Questo perchè la formula di Peano scritta con resto di Lagrange ha un resto che tende a zero ed è trascurabile.

13.3.1 Criterio di Leibniz

Teorema 46. ***Criterio di Leibniz*** *Sia $a_n, n \in \mathbb{N}$, una successione* ***positiva, decrescente e infinitesima****. Allora la serie:*

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^n a_n$$

converge e il suo limite è 0.

Dimostrazione Consideriamo la successione delle somme parziali S_n :

$$S_0 = a_0$$
$$S_1 = a_0 - a_1$$
$$S_2 = a_0 - a_1 + a_2$$
$$S_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^n a_n$$

La successione delle somme parziali è decrescente (perchè per ipotesi la successione deve essere positiva, decrescente e infinitesima, infatti:

$$S_{2k+2} = S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} < S_{2k}$$

dove S_{2k+2} è la somma parziale S_{2k} più i due termini che la seguono (uno negativo e uno positivo).

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} + a_{2k} - a_{2k+1} > S_{2k-1}$$

ovvero le somme parziali con indice dispari sono crescenti. A priori la successione S_{2k+2} essendo decrescente o tende ad un limite finito o tende a $-\infty$, mentre S_{2k+1} essendo crescente tende a più infinito. Quindi:

$$\lim_{k \to +\infty} S_{2k+2} - S_{2k-1} = S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2} - S_{2k-1} + a_{2k} - a_{2k+1} = a_{2k}$$

$$\lim_{k \to +\infty} a_{2k} = 0$$

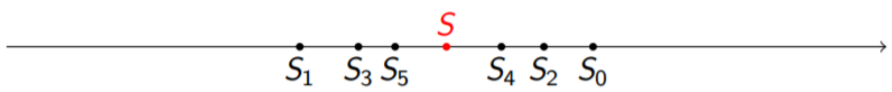
(uguale a 0 per ipotesi). Poichè dunque la loro differenza è infinitesima, le due somme parziali non possono essere entrambe divergenti, ma **devono tendere entrambe a limiti finiti e allo stesso limite**:

$$\lim_{k \to +\infty} S_{2k} = \lim_{k \to +\infty} S_{2k+1} = S$$

Esercizio

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

(Verificare la convergenza con il criterio di Leibniz).


S
S_1
S_3
S_5
S_4
S_2
S_0

Capitolo 14

Spazio della fisica classica

Lo spazio della fisica classica è formato da punti e vettori. Esistono grandezze scalari, cioè numeri, ed altrie enti come per esempio i vettori.

Vettori Sono anche chiamati "lunghezze ordinate" o "segmenti ordinati". Sono definiti da **una lunghezza, una retta/direzione del segmento, un verso**. Qual è il legam tra punti e vettori? **Ogni coppia ordinata di punto individua un unico vettore**.

Tuttavia lo stesso vettore può essere rappresentato da infinite coppie di punti. Inoltre un vettore può essere visto come una traslazione nello spazio di punti.

Operazioni con i vettori Valgono la proprietà commutativa e associativa. La moltiplicazione di un vettore per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ equivale a

$$\lambda \cdot \vec{v} = \vec{u}$$

dove $\uparrow u$ è un vettore con direzione e verso di v ma lunghezza pari a λv.

Prodotto scalare tra vettori Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ il prodotto scalare è definito come

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta \tag{14.1}$$

dove θ è l'angolo compreso tra i due vettori. Attraverso la definizione di prodotto scalare tra due vettori si definisce lunghezza di un vettore:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cos 0 = |\vec{a}|^2$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$$

Inoltre si può ricavare anche l'angolo compreso tra essi:

$$\cos\theta = \frac{veca \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Un'altra proprietà del prodotto scalare è che se due vettori sono ortogonali tra loro, il loro prodotto è nullo.

Proiezione di a su un vettore unitario Sia $\vec{a}$ un vettore qualunque, e $\vec{u}$ un vettore unitario, allora il prodotto scalare tra i due equivale alla proiezione di $\vec{a}$ sulla direttrice di $\vec{u}$.

14.1 Calcolo delle aree e dei volumi

Data una coppia di vettori **a, b**, il prodotto vettoriale calcolato in $\mathbb{R}^3$ $\vec{a} \times \vec{b}$ è il vettore definito dalle proprietà:

1. è ortogonale sia ad **a** che **b**;
2. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, ovvero è **anti-commutativo**;
3. la lunghezza $\vec{a} \times \vec{b}$ è uguale all'area del parallelogramma generato da **a** e **b**, vale a dire
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \tag{14.2}$$
dove θ, $0 < \theta < \pi$è l'angolo compreso tra i due vettori;
4. Quando $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$ la terna (**a**, **b**, $\vec{a} \times \vec{b}$) è la base ordinata $\mathbb{R}^3$. Se **a** e **b** sono paralleli il loro prodotto vettoriale restituisce il vettore nullo $< \vec{0}$.

Il prodotto vettoriale è orientato positivamente orientato quando prendo **a**, **b** e $\vec{a} \times \vec{b}$, il determinante della matrice è maggiore di zero.

Cosa significa che il prodotto è positivamente orientato? Significa che presi i vettori **a**, **b** e $\vec{a}\times\vec{b}$ e θ l'angolo compreso tra essi, **a si sovrappone a b con una rotazione antioraria**.

Proprietà del prodotto vettoriale

1. **Bilineare**
$$(\vec{a_1}+\vec{a_2}) \times b = \vec{a_1} \times \vec{b} + \vec{a_2} \times \vec{b}$$

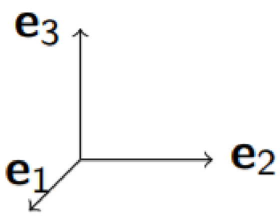
$$(h\vec{a}) \times \vec{b} = h(a \vec{\times} \vec{b})$$

2. **Alternativo/anti-commutativo** -

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

3. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ se e solo se $\vec{a}//\vec{b}$;

Esempi di prodotto vettoriale Consideriamo e_1, e_2, e_3 i vettori della **base ortonormale di** $\mathbb{R}^3$.



Allora sappiamo che:

$$\begin{aligned}
e_1 \times e_2 &= e_3 \\
e_2 \times e_3 &= e_1 \\
e_3 \times e_1 &= e_2 \\
e_2 \times e_1 &= -e_3 \\
e_3 \times e_2 &= -e_1 \\
e_1 \times e_3 &= -e_2
\end{aligned}$$

Tuttavia conoscendo solo il primo prodotto gli altri sono ovvi per la **simmetria come permutazione circolare**.

14.2 Componenti del prodotto vettoriale

Teorema 47. *Il prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$ dei vettori $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ è il vettore di componenti*

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

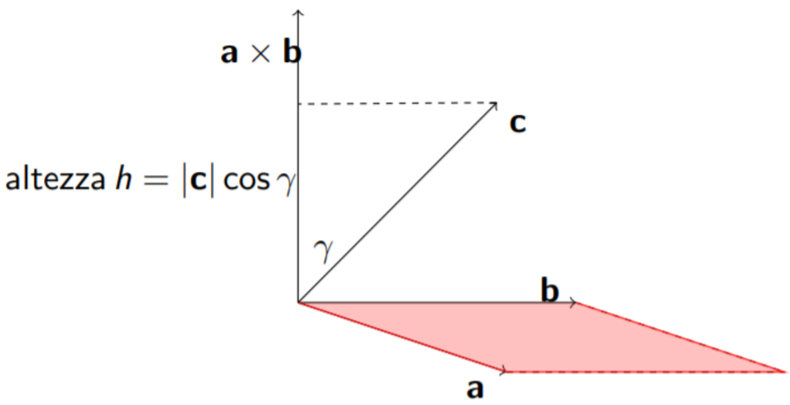
$$det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix} det \begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{bmatrix} det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

Per le proprietà elencate prima si trova una componente e per permutazione ciclica si trovano le altre.

Area del parallelogramma e del volume L'area del parallelogramma, quindi sarà $a_1 b_2 - a_2 b_1$ per la definizione di prodotto vettoriale.

Poichè il volume è base per altezza, allora possiamo riscriverlo come

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)|\vec{a} \times \vec{b}|$$



Consideriamo dunque $|\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos \gamma$, dove il primo termine è l'area di base, il secondo è l'altezza del parallelepipedo.Quindi i vettori sono complanari se e solo se il prodotto precedentemente definito è nullo. Si definisce quindi il **prodotto misto**: *volume orientato, può anche essere negativo, ci dà il valore assoluto del volume e se $\vec{c}$ sta nel semispazio superiore o inferiore.*

$$(\vec{a} \times \vec{b})c = det \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{14.3}$$

14.2.1 Regola di Laplace per il calcolo del determinante

$$det\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 det\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 det\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 det\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \tag{14.4}$$

14.3 Esercizi nello spazio fisico

(1) Dati i punti $A(1, 0, -1)$ e $B(2, -3, 4)$ determinare:

1. Un'equazione parametrica della retta r passante per A e B;
2. Un'equazione parametrica vettoriale di una retta r_1 passante per B ed avente come direzione $\vec{v} = (4, 1, -1)$;
3. Un'equazione parametrica vettoriale della retta r_2 passante per A e perpendicolare a r_1;
4. Le coordinate di $R_0 = r_1 \bigcap r_2$;
5. distanza di A da r_1;
6. Un'equazione vettoriale della retta r_3, passante per B e parallela a r_2 ;

1.1 Il vettore direzione della retta $\vec{AB} = td\vec{r}, t \in \mathbb{R}$, ovvero:

$$d\vec{r} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = (1, -3, 5)$$

Un generico punto P(x,y,z) appartiene alla retta se i vettore $\vec{AP}$ è parallelo al vettore $td\vec{r}$:

$$\begin{bmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z+1 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$r : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+1 \\ -3t \\ 5t-1 \end{bmatrix}$$

L'ultima equazione rappresenta **l'equazione parametrica della retta** r.

$$r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t \\ z = 5t - 1 \end{cases}$$

1.2 La retta r_1 con un vettore direzione $\vec{v} = (4, 1, -1)$ sarà:

$$r_1 : \begin{cases} x = 4u + 2 \\ y = u - 3 \\ z = -u + 4 \end{cases}$$

1.3 La retta r_2 sarà perpendicolare al vettore $A\vec{R}_1$ dove R_1 è il punto sulla retta r_1 e di coordinate $(4u + 2, u - 3, -u + 4)$.

$$A\vec{R}_1 = \begin{bmatrix} 4u + 2 - 1 \\ u - 3 \\ -u + 4 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4u + 1 \\ u - 3 \\ -u + 5 \end{bmatrix}$$

inoltre vale la condizione $|A\vec{R}_1| \cdot |\vec{v}| = 0$

$$\begin{aligned} 4(4u + 1) + 1(u - 3) - 1(-u - 5) = 0 \\ 16u + 4 + u - 3 + u - 5 = 0 \\ u = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Dunque sappiamo che

$$d\vec{r_2} = A\vec{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{17}{9} \\ -\frac{25}{9} \\ \frac{43}{9} \end{bmatrix}$$

$$r_2 : \begin{cases} x = \frac{17}{9}v + 1 \\ -\frac{25}{9}v \\ \frac{43}{9}v - 1 \end{cases}$$

1.4 $r_1 \bigcap r_2 = R_1 = (\frac{26}{9}, -\frac{25}{9}, \frac{34}{9})$.

1.5 $d(A, R_1) = \sqrt{(\frac{17}{9})^2 + (-\frac{25}{9})^2 + (\frac{43}{9})^2}$

1.6 Poichè $\vec{dr_3} // \vec{dr_2}$:

$$\vec{dr_3} = \begin{bmatrix} 17 \\ -25 \\ 43 \end{bmatrix}$$

quindi

$$r_3 : \begin{cases} x = 17s + 2 \\ y = -25s - 3 \\ z = 43s + 4 \end{cases} \quad , s \in \mathbb{R}$$

(2) Dati i punti A(-1,-1,0), B(3,2,-2), C(0,0,4)

1. Verificare che ABC non sono allineati;
2. Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per AB;
3. Determinare un'equazione parametrica vettoriale del piano π passante per A, B e C;
4. Calcolare l'equazione cartesiana del piano π ;
5. Il punto $Q(1, 1, 1)$ appartiene a π ? In caso negativo determinare la distanza da Q a π ;

2.1 Per verificare che i tre punti non siano allineati basta trovare i vettori $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$, se questi non sono paralleli allora la condizione è verificata.

$$\vec{AB} = B - A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{AC} = C - A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A, B e C non sono allineati.

2.2

$$r_{AB} : \begin{cases} 2t + 3 \\ 3t + 2 \\ -2t - 2 \end{cases}$$

Per determinare l'equazione cartesiana della retta si deve esplicitare t in funzione di una coordinata:

$$t = \frac{z+2}{-2}$$
$$z = 2(\frac{z+2}{-2}) + 3$$
$$\begin{cases} x = -z + 1 \\ y = 3(\frac{z+2}{-2}) + 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ 2y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

L'equazione cartesiana della retta equivale all'intersezione tra piani.

2.3 Il piano π è definito dai due vettori $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. Possiamo definire il vettore $\vec{AQ}$:

$$\vec{AQ} = u\vec{AB} + j\vec{AC}$$
$$\vec{AQ} = Q - A = u\vec{AB} + j\vec{AC} + A$$
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\pi : \begin{cases} x = 2u - v + 1 \\ 3u + v - 1 \\ -2u + 4v \end{cases}$$

ecco l'equazione parametrica del piano π.

2.4 Per trovare l'equazione cartesiana del piano esistono vari metodi. Il primo sfrutta il fatto che ogni piano è definito da un vettore normale, e conoscendo i vettori di giacitura calcoliamo $\vec{n}$, valgono le due espressioni:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} \tag{14.5}$$
$$\vec{AQ} \cdot \vec{n} = \vec{AQ} \cdot \vec{a} \times \vec{b} \tag{14.6}$$

dove la seconda espressione è la definizione di prodotto misto. Quindi si ha che:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ -1\ 1\ 4 & & \end{vmatrix}$$

$$(x-1)14-(y+1)6+5z=0$$
$$14x-14-6y-6+5z=0$$
$$14x-6y+5z-20=0$$

Oppure avendo già l'equazione parametrica devi "eliminare i parametri"

$$\pi : \begin{cases} x = 2u - v + 1 \\ 3u + v - 1 \\ -2u + 4v \end{cases}$$

$$x+y=5u \longrightarrow u = \frac{1}{5}(x+y)$$
$$v = y + 1 - \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}y$$
$$\longrightarrow z = -2[\frac{1}{5}(x+y)] + 4(y+1-\frac{3}{5}x-\frac{3}{5}y)$$
$$...$$
$$14x-6y+5z-20=0$$

L'ultimo metodo è anche il più veloce dal punto di vista pratico. La retta r_{AB} definisce un fascio di piani, tra i quali è presente π che passa per il punto C(0,0,4).

$$k(x+z-1)+l(2y+3z+2)=0, k, l \in \mathbb{R}$$
$$3k+14l=0$$
$$l = -\frac{3}{14}k$$
$$k = 14, l = -3$$
$$14(x+z-1)+3(2y+3z+2)=0$$
$$14x-6y+5z-20=0$$

2.5 Sostituiamo le coordinate di Q nell'equazione cartesiana del piano, e Q non appartiene al piano.

2.6 La distanza da Q a π è parallela al vettore normale del piano.

$$t: \begin{cases} 14k+1 \\ -6k+1 \\ +5k+1 \end{cases}$$

$$t \bigcap \pi = 14(14k+1) - 6(-6k+1) + 5(5k+1) - 20 = 0$$

$$k = \frac{7}{257}$$

$$H = \begin{bmatrix} 14(\frac{7}{257})+1 \\ -6(\frac{7}{257})+1 \\ +5(\frac{7}{257})+1 \end{bmatrix}$$

$$d(Q,H) = |\vec{QH}| = ... = \frac{7 \cdot \sqrt{257}}{257}$$

Capitolo 15

Curve

Una curva parametrizzata è una funzione

$$[a,b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$$
$$t \to C(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a,b]$$

con C punto mobile al variare di t. Si definisce **sostegno di una curva C** l'insieme dei punti $C(t)$, ovvero ImC:

$$ImC = \{C(t) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$$

Una curva C è di classe C^1 se anche le sue componenti $x(t), y(t), z(t)$ sono di classe C^1, cioè **derivabili e con derivate continue**.

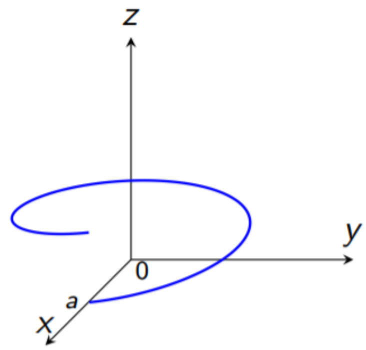
Elica cilindrica

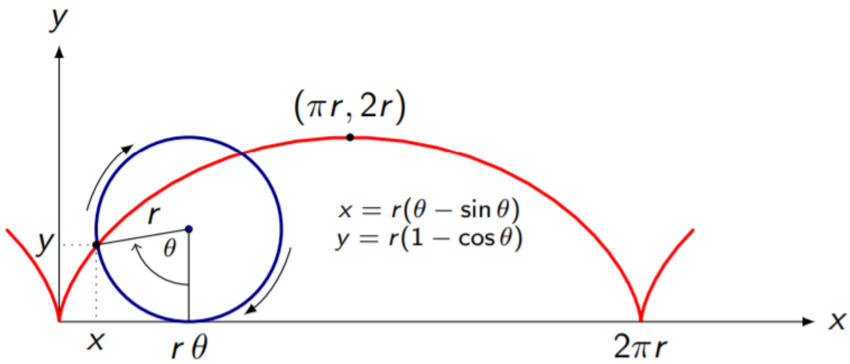
$$[0, 2\pi] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$$
$$C(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

La curva $C(t)$ rappresenta un'**elica cilindrica**:

- Nel piano xy, la proiezione della curva nello spazio è una circonferenza di raggio a;
- La proiezione sull'asse z di bt rappresenta un punto mobile che si muove di moto rettilineo uniforme, cioè con velocità costante;

Cicloide La cicloide 'e la curva descritta da un punto di una circonferenza di raggio r quando la circonferenza rotola, senza strisciare, sull'asse delle x.





15.1 Lunghezza di una poligonale inscritta a una curva

Consideriamo una curva $C(t)$, i cui estremi sono $C(a)$ e $C(b)$. Si prende una suddivizione $\Delta = (t_0, ..., t_k, ..., t_n)$ di $[a, b]$, con $t_0 = a < ... < t_k < ... < t_n = b$.

$$l_\Delta = \sum_{k=1}^{m} |C(t_k) - C(t_{k-1+}| \tag{15.1}$$

e questa lunghezza l_Δ rappresnta la lunghezza della poligonale inscritta alla curva.

Lunghezza di un cammino continuo Si dice lunghezza si un cammino continuo $[a, b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$ **l'estremo superiore** delle lunghezze ti tutte le poligonali inscritte

$$L(C) = sup l_\Delta \tag{15.2}$$

al variare di Δ nell'insieme di tutte le partizioni dell'intervallo $[a, b]$. Inoltre il cammino C è detto **rettificabile se** $L(C) < +\infty$

Teorema 48. *Ogni curva* $[a, b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$ *di classe* C^1 *su un intervallo compatto* $[a, b]$ *è rettificabile, e la sua lunghezza equivale a:*

$$L(C) = \int_a^b |C'(t)|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt \tag{15.3}$$

dove $C'(t)$ *è il vettore* ***velocità istantaneo****, e il suo modulo è la velocità scalare.*

15.1.1 Esempio lunghezza della circonferenza

$$\begin{aligned} C(t) &= (R\cos t, R\sin t) \\ C'(t) &= (-R\sin t, R\cos t) \\ |C'(t)| &= \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R \\ L(C) &= \int_0^{2\pi} Rdt = 2\pi R \end{aligned}$$

15.1.2 Esempio lunghezza dell'elica cilindrica

$$\begin{aligned} C(t) &= (a\cos t, a\sin t, bt) \\ C'(t) &= (-a\sin t, a\sin t, bt) \\ |C'(t)| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ L(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2}dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

15.2 Lunghezza del grafico

Data una funzione di classe C^1

$$y = f(x), x \in [a, b]$$

Il grafico f è quindi sostegno della curva $C = (t, f(t)), t \in [a, b]$. Dunque la lunghezza del grafico è definita come:

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dt \tag{15.4}$$

dove $\sqrt{1 + f'(x)^2} = |C'(t)|$, cioè la lunghezza del vettore tangente.

Esempio Calcola la lunghezza di $f(x) = \frac{x^2}{8} - \log x, x \in [1, 4]$.

$$C(t) = (t, \frac{t^2}{8} - \log t)$$
$$C'(t) = (1, \frac{t}{4} - \frac{1}{t})$$
$$L(C) = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{t}{4} - \frac{1}{t}} dt =$$
$$\frac{15}{8} + \log 4$$

15.3 Integrali Curvilinei

Prima di introdurre la formulazione matematica dell'integrale curvilineo, si pensi al significato fisico. Immaginiamo che la curva C sia rappresentata nel mondo reale da un filo molto sottile. Esiste una funzione $f = \mu$ che rappresenta **la densità lineare di massa** . Dunque sappiamo che la massa di un generico "archetto" del filo, avente curva ΔS_i attorno ad un punto P_i:

$$\Delta m_i = \mu(P_i)\Delta S_i$$

si noti che la densità non è omogenea per tutta la lunghezza del filo ma dipende dal punto P_i. In breve possiamo scrivere $\Delta m = \mu \Delta S$. Dunque l'integrale

$$\int_C \mu ds = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{N} \mu(P_i)\Delta S_i \tag{15.5}$$

si interpreta come **massa totale del filo la cui densità lineare di massa è** μ.

Sono dati:

- $[a, b] \xrightarrow{C} \mathbb{R}^3$ $t \to C(t) = (x(t), y(t), z(t))$;
- Una funzione continua $D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, dove D contiene il sostegno di C: $ImC \subset D$.

Allora **l'integrale di** f **lungo** C

$$\int_C f(x, y, z)ds = int_a^b f(C(t))|C'(t)|dt \tag{15.6}$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt \tag{15.7}$$

15.3.1 Calcolo di $\int_C f ds$ per l'elica cilindrica

$$C(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = t \end{cases}$$

Si chiede di calcolare $\int_C zds$ ovvero la massa totale se la densità di massa è $\mu(x, y, z) = z$ ovvero $dm = \mu ds = zds$.

Sappiamo che:

- $f(x, y, z) = z$;
- $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt$;

$$\int_C zds = \int_0^{2\pi} t\sqrt{2}dt = 2\sqrt{2}\pi^2$$

N.B. La lunghezza del grafico espressa nell'equazione 15.3 è solamente un caso particolare dell'integrale curvilineo del tipo $\int_C f ds$, in particolare $f = 1$.

15.3.2 Baricentri di Linee

Data μ la densità lineare di massa di un filo, allora si ha che $dm = \mu ds$. **Si definisce il baricentro, o centro di massa** del filo, il punto G della linea C le cui coordinate sono

$$x_G = \frac{\int_C x \cdot \mu ds}{\int_C zds}$$
$$y_G = \frac{\int_C y \cdot \mu ds}{\int_C zds}$$
$$z_G = \frac{\int_C z \cdot \mu ds}{\int_C zds}$$

Un caso particolare è quando μ è costante, e allora il baricentro è detto **centroide**, e posto che $L = \int_C ds$ come lunghezza di C, si ha che:

$$x_G = \frac{1}{L}\int_C xds$$
$$y_G = \frac{1}{L}\int_C yds$$
$$z_G = \frac{1}{L}\int_C zds$$

Calcola il baricentro della semicirconferenza γ

Si ha una curva con i seguenti parametri: $C(t) = (R\cos t, R\sin t), t \in [0, \pi]$. Si chiede di trovare le coordinate del baricentro.

$$x_G = \frac{1}{L}\int_C x ds \ , \ y_G = \frac{1}{L}\int_C y ds$$

$$L = \pi R \ , \ ds = Rdt$$

$$x_G = \frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R\cos t \cdot Rdt = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \cos t dt = 0$$
$$y_G = \frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R\sin t \cdot Rdt = \frac{R}{\pi}\int_0^\pi \sin t dt = \frac{2}{\pi}R$$

15.4 Grandezze scalari e vettoriali associate ad una curva

1. $\underline{\alpha}'(t)$ è il **vettore tangente** o **vettore velocità istantanea**;
2. $|\underline{\alpha}'(t)|$ è il modulo del vettore tangente; o**velocità scalare istantanea** ed è noto anche come $v(t)$;
3. La **funzione lunghezza d'arco** da $t_0 \in I, I \xrightarrow{s} \mathbb{R}^3$ con

   $$s(t) = \int_{t_0}^t |\underline{\alpha}'(u)| du$$

   equivale alla lunghezza dell'arco o lo spazio percorso da t_0 a t;
4. $s'(t) = |\underline{\alpha}'(t)| = v(t)$ cioè equivale alla velocità scalare istantanea;
5. α'' è il **vettore accelerazione**;

15.5 Curvature nello spazio

Consideriamo una curva, e prendiamo un punto P appartenente al sostegno di tale curva. Si prendono due punti vicini P', P'' per i quali passa una e una sola circonferenza. Facciamo tendere $P', P'' \to P$. Questa circonferenza **ha una posizione limite** nella circonferenza C di centro Γ e raggio R. Allora si definisce curvatura

$$k = \frac{1}{R}$$

più la circonferenza ha un raggio grande, più la curvatura è minore. Questa è la definizione di **Newton** di curvatura, che è molto intuitiva, ma attraverso questa definizione è molto difficile il calcolo della curvatura.

15.5.1 Parametro di una curva

Esistono diversi modi per parametrizzare una curva nello spazio per esempio utilizzando come parametro il **tempo** oppure l'**angolo**. Tuttavia il modo più naturale di parametrizzare una curva è la **lunghezza d'arco**.

Per descrivere una curva, si sceglie un punto P_0 e un punto P successivo. Si definisce come S la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{P_0P}$. Questa lunghezza si chiama **lunghezza d'arco**. Si dice che una curva è parametrizzata attraverso una lunghezza d'arco se e solo se **il vettore tangente è lungo uno**.

Una curva $J \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3$ *si dice parametrizzata alla lunghezza d'arco se*

$$|\underline{\alpha}| = 1$$

questo perchè fissato con s_0 una lunghezza, allora la lunghezza dell'arco da $\alpha(s_0)$ ad $\alpha(s)$ è uguale a:

$$\int_{s_0}^{S} |\underline{\alpha}'(u)du|$$

ma se $|\underline{\alpha}'(u) = 1$ allora

$$\int_{s_0}^{S} 1 \cdot du = s - s_0$$

cioè la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{P_0P}$ è uguale alla distanza tra i due punti.

Esistono dei modi per passare ad un parametro diverso conoscendo le componenti di una curva, in particolare si sa che

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\underline{\alpha}'(u)|du \tag{15.8}$$

si può trovare t in funzione di s teoricamente ma è molto poco probabile riuscirci.

Solitamente si preferisce la curva parametrizzata alla lunghezza d'arco perchè in qualche modo la lunghezza d'arco è un'informazione intrinseca della curva.

Si definisce il vettore $\vec{T}$ tangente alla curva $\underline{\alpha}$, parametrizzato alla lunghezza d'arco in s

$$\vec{T}(s) = \underline{\alpha}'(s)$$

il cui modulo è uno, cioè è un **vettore unitario**

15.6 Definizione di curvatura

La **curvatura** di $I \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^3, s \to \underline{\alpha(s)}$ parametrizzata alla lunghezza d'arco è $k(s)$ definito come

$$k(s) = |T'(s)| = |\alpha''(s)| \tag{15.9}$$

ovvero la curvatura della curva in s è la **lunghezza del vettore accelerazione**.

Esempio Sia data la curva $\underline{\alpha}(s) = us + b$, ovvero una retta. Allora essendo il vettore tangente $\vec{T} = u$ costante $T'' = 0$, ovvero la curvatura della retta è uguale a zero.

Un lemma Supponiamo di avere un vettore di lunghezza costante $\vec{v}(t) \in \mathbb{R}^3$ al variare di t. Allora $\vec{v'}(t)$ è ortogonale a $\vec{v}(t)$. Se $\vec{v}(t)$ è costante:

$$\begin{aligned} v(t) \cdot v(t) &= cost \\ D(v(t) \cdot v(t)) &= v'(t)v(t) + v(t)v'(t) \\ 2v'(t)v(t) &= 0 \end{aligned}$$

perchè $v(t)$ è costante, ma per definizione due vettori sono ortogonali se il loro prodotto scalare è nullo.

15.6.1 Il vettore normale $\vec{N}$

Data una curva $I \xrightarrow{\alpha}$ parametrizzata alla lunghezza d'arco e preso $s \in I$ tale che $T'(s) \neq 0$, allora si definisce il **vettore normale** $\vec{N} = N(s)$ il **vettore unitario** determinato dalla seguente uguaglianza

$$T'(s) = k(s)N(s) \tag{15.10}$$

dove $k(s) = |T'(s)| > 0$ è la **curvatura** in s, e $\vec{N}$ è un vettore di modulo 1. Quindi

$$\vec{N} = \frac{\vec{T}'(s)}{|\vec{T}'(s)| = \frac{\vec{T}'(s)}{k(s)}} \tag{15.11}$$

inoltre il piano definito dai vettori $N(\vec{s})$ e $T(\vec{s})$ è detto **piano osculatore** della curva in s. Ovviamente se la curva è bidimensionale, il piano osculatore è il piano su cui giace la curva stessa.

Vettore binomiale Il vettore binomiale è definito come

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$$

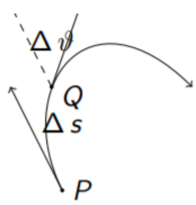
La terna di vettori $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ crea il **triedro intrinseco della curva**, un sistema di riferimento.

$\vec{N}, \vec{B}$	**normale**
$\vec{T}, \vec{B}$	**rettificante**
$\vec{N}, \vec{T}$	**osculatore**

15.7 Rilettura di curvatura

Data una curva consideriamo un punto P, e il vettore tangente alla curva nel punto è $\vec{T}$. Dopo una lunghezza Δs si prende un punto Q vicino a P, che ha un altro vettore tangente. L'angolo che si forma tra i due vettori $\Delta\theta$ definisce **la rapidità di variazione della curvatura nel punto**, quindi si definisce la curvatura nel punto come

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|} \tag{15.12}$$

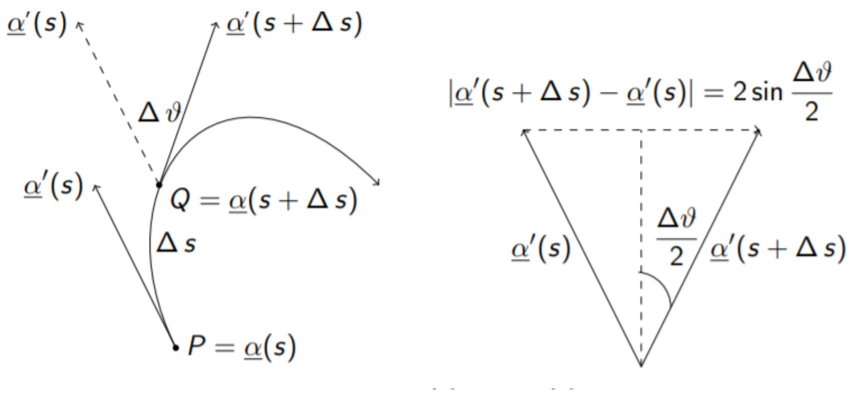


Perchè si hanno due definizioni di curvatura e sono equivalenti?

15.8 Equivalenza delle definizioni

Se consideriamo i vettori in un putno si ha che:

- $\underline{\alpha}'(s + \Delta s)$ e $\underline{\alpha}'(s)$ sono due vettori unitari;



- $\underline{\alpha}'(s+\Delta s) - \underline{\alpha}'(s)$ **è un vettore corda**;
- L'angolo tra i due vettori è $\Delta\theta$;

$$\begin{aligned}\underline{\alpha}'(s+\Delta s) - \underline{\alpha}'(s) = 2\sin\frac{\Delta\theta}{2}\cdot\frac{1}{|\Delta s|}\\ \frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{|\Delta s|}\cdot\frac{\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\end{aligned}$$

Quindi la curvatura può essere definita come

1. Modulo della derivata seconda $k(s) = |\underline{\alpha}''(s)|$;
2. Rapidità in cui la curva si discosta dalla direzione della retta tangente in P;

C'è una forte correlazione tra **accelerazione, curvatura, forza e derivata seconda**.

15.9 Curvatura con un parametro arbitrario

Teorema 49. *Sia $I \overset{\alpha}{\to} \mathbb{R}^3$ una curva di classe C^2 regolare, parametrizzata con un parametro arbitrario. Allora la curvatura $k(t)$ esiste in ogni suo punto ed è definita come*

$$k(t) = \frac{|\underline{\alpha}'(t) \times \underline{\alpha}''(t)|}{|\underline{\alpha}'(t)|^3} \tag{15.13}$$

con $\underline{\alpha}'(t)$ vettore tangente alla curva.

Dimostrazione Abbiamo una curva con un parametro arbitrario

$$s = s(t) = \int_{t_0}^{t} |\underline{\alpha}'(\mathbb{T})| d\mathbb{T}$$

inoltre possiamo esplicitare la curva $\underline{\alpha}(t)$ come $\underline{\alpha}(s(t))$ (la curva in funzione del "tempo", e la curva in funzione dello "spazio percorso").

$$\frac{ds}{dt} = |\underline{\alpha}'(t) = v(t)| \tag{15.14}$$

$$\underline{\alpha}'(t) = \frac{d\underline{\alpha}(t)}{dt} = \frac{d\underline{\alpha}}{dt}\frac{ds}{dt} = vT \tag{15.15}$$

$$\underline{\alpha}''(t) = \frac{d}{dt}\frac{(d(\underline{\alpha}(t)))}{dt} = \frac{d(vT)}{dt} = \frac{dv}{dt}T + v\frac{dT}{dt} \tag{15.16}$$

$$= \frac{dv}{dt}T + v\frac{dT}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{15.17}$$

$$= \frac{dv}{dt}T + v^2 kN \tag{15.18}$$

ovvero il vettore accelerazione $\underline{\alpha}''(t)$ **ha una componente lungo T e una lungo N.**

E' facile applicare l'equazione 15.18 al moto di un punto materiale lungo una curva, per semplicità un moto circolare uniforme: la componente tangente dell'accelerazione è nulla, mentre la componente normale alla curva dell'accelerazione vale v^2k, dove k è la curvatura, ma la curvatura della circonferenza equivale $\frac{1}{R}$, quindi l'accelerazione in base alle componenti sarà:

$$\underline{\alpha}''(t) = 0 + \frac{v^2}{R}$$

E' un risultato molto importante, perchè significa che ogni curva localmente si approssima al secondo ordine con una circonferenza (al primo ordine con una retta) che ha curvatura $k = \frac{1}{R}$.

Un controesempio del fatto che il vettore accelerazione non è sempre perpendicolare al vettore tangente, è il moto dei pianeti su un'ellisse.