Appunti di Fisica Sperimentale

Mattia Ruffini

Febbraio 2022

Indice

Parte I

Meccanica

Capitolo 1

Grandezze Fisiche

Nello studio della Fisica bastano solamente **poche regole fondamentali**. Non bisogna studiare le mille casistiche differenti, basta ricondursi al caso generale per risolvere un problema. La Fisica inoltre è una scienza **quantitativa**, ovvero si occupa solamente di quello che riesce a misurare. Misurare, come insegna la matematica, significa **confrontare una grandezza con un'unità di misura.** Dal 2019 il Sistema Internazionale (SI) è riuscito a definire tutte le grandezze fisiche con costanti universali. Per quanto riguarda la Meccanica sono tre le grandezze fondamentali: **tempo, lunghezza, massa**. Il tempo ovviamente si misura in s (secondi), lo spazio in m (metri) e la massa in chilogrammi Kg.

Il Tempo Nel 1799 il secondo è definito come $\frac{1}{86400}$ giorni, tuttavia come si sa a causa di fenomeni fisici e naturali il tempo di un giorno può variare, dunque questa definizione di secondo è obsoleta. Siamo nel 1967 quando si definisce il secondo attraverso le oscillazioni del Cesio 183, perchè questo emette una frequenza pari a $\nu = \frac{1}{9'192'632'770}$ ed è costante nell'universo. Un secondo quindi è definito come $1s = 9'192'632'770$ oscillazioni di Cesio 183.

Lunghezza Nel 1759 si definisce un metro come la 40 milionesima parte dell'equatore terrestre. Poichè la Terra non è una sfera perfetta questa definizione non è corretta secondo il SI. Dunque dal 1983 si definisce un metro come la distanza che la luce percorre in $\frac{1}{299'792'458s}$.

Massa La definizione di massa è legata alla **costante di Planck**. In particolare:

$$h = 6.0260015 \cdot 10^{-15} \frac{Kg \cdot m}{s^2}$$

Se espressa in elettronVolt la costante di Planck equivale a:

$$h = 4.14...eV$$

per questo motivo il **14 Aprile è la data del Quantum Day**.

Grandezze derivate Oltre alle grandezze fisiche fondamentali esistono le grandezze derivate. Un esempio ne è la velocità, definita come lo spazio percorso in un intervallo di tempo ($\frac{m}{s}$) oppure la forza ($\frac{Kg \cdot m}{s^2} = N$). Un ottimo modo per verificare se i nostri calcoli o supposizioni sono corrette è eseguire l'analisi dimensionale.

Grandezze adimensionali Esistono grandezze adimensionali, un esempio sono gli angoli in radianti definiti come

$$\theta = \frac{l}{r}$$

dove r è il raggio della circonferenza mentre l è la lunghezza dell'arco individuato dall'angolo θ. Una regola importante in fisica è che **l'argomento di qualsiasi funzione trigonometrica deve essere adimensionale**. Allo stesso modo **anche l'argomento di una funzione esponenziale deve essere adimensionale**. Esempi con il moto armonico o l'intensità di un fascio luminoso attraverso un mezzo:

$$x(t) = Acos(\omega \cdot t)$$
$$I_0 = Ie^{-\alpha x}$$

dove α sarà una costante con unità di misura $\frac{1}{m}$ se x è la lunghezza del mezzo attraverso cui passa il fascio luminoso.

1.1 Operazioni con cifre significative

Le cifre significative indicano l'accuratezza con cui conosciamo una certa quantità.

Moltiplicazione Con una moltiplicazione si tiene il numero di cifre significative del numero che ne ha meno.

Somma Nella somma invece si tiene il numero di cifre decimali che ne ha di più (togliendo gli zeri iniziali). Esempi:

$$3.12 + 2.21 = 5.33$$

$$10.12 + 2.21 = 12.33$$

$$9.42 \cdot 10^{-2} + 7.6 \cdot 10^{-3} = 9.42 \cdot 10^{-2} + 0.76 \cdot 10^{-2} = 10.18 \cdot 10^{-2}$$

Capitolo 2

Cinematica

La prima parte del corso di Fisica Sperimentale riguarda la **meccanica**, che ha sua volta è composta da **cinematica e dinamica** . La cinematica è la descrizione matematico-geometrica del mondo. La dinamica invece studia *le cause del moto.*
Per entrare nella cinematica innanzitutto ci serve un **sistema di riferimento** per la descrizione del moto. (perchè questo dipende dall'osservatore). L'esempio storico è il fatto che il moto di Marte dalla terra è un moto ciclico, mentre il moto di Marte dal sole è ellittico. Innanzitutto si definisce la traiettoria del moto come **il luogo dei punti occupati in diversi istanti di tempo da un oggetto**.

Data una qualsiasi traiettoria, dati un ascissa curvilinea e un istante di tempo indica dove si trova il punto sulla traiettoria. Da questa definizione nasce la **legge oraria del moto** $s(t)$.

2.1 Legge oraria, velocità e accelerazione

La legge oraria in funzione del tempo indica la distanza del corpo dall'origine. Definiamo:

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0)$$

Il rapporto tra queste due grandezze definisce la velocità media:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{2.1}$$

ed equivale al coefficiente angolare della retta passante per i due punti agli istanti t_1 e t_0.

La velocità scalare istantanea Si definisce **velocità scalare istantanea** come

$$v_s(t) = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} s'(t) \tag{2.2}$$

perchè è la definizione di limite del rapporto incrementale.

Accelerazione scalare In modo analogo per la velocità istantanea l'accelerazione è definita come:

$$a_s(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = v'(t) \tag{2.3}$$

Si può continuare a derivare, in particolare la derivata dell'accelerazione è chiamata **strappo**, ma è utilizzata in campi differenti da quelli della cinematica.

Dall'accelerazione si possono ricavare velocità e legge oraria attraverso l'integrale.

$$\int_{t_0}^{t_1} v_s = \int_{t_0}^{t_1} a_s dt \tag{2.4}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} d_s = \int_{t_0}^{t_1} v_s dt \tag{2.5}$$

Segno della velocità

- Se $v > 0$ il punto si muove in avanti;
- Se $v < 0$ il punto si muove indietro;
- Se $v = 0$ il punto si trova nel **momento di inversione del moto**;

Segno di velocità ed accelerazione

- $a > 0, v > 0$ la velocità aumenta in modulo e il corpo si sposta in avanti;
- $a < 0, v > 0$ la velocità diminuisce in modulo ma il corpo continua ad andare avanti;
- $a < 0, v < 0$ la velocità aumenta in modulo **ma con segno negativo**;
- $a = 0$ si ha il massimo modulo della velocità;

2.2 Moto uniforme

Nel moto uniforme la velocità del corpo è **costante**. Di conseguenza la legge oraria:

$$\int_0^t d_s = \int_0^t v_s dt$$
$$s(t) - s_0 = v_0 t$$
$$s(t) = s_0 + v_0 t$$

2.3 Moto uniformemente accelerato

Nel moto uniformemente accelerato invece è l'accelerazione ad essere costante. Da ciò si ricavano la velocità istantanea e le leggi orarie. Velocità:

$$\int_0^t v_s = \int_0^t a_s dt$$
$$v(t) = v_0 + at$$

Legge oraria:

$$\int_0^t d_s = \int_0^t v_s dt$$
$$s(t) - s_0 = \int_0^t (v_0 + at) dt$$
$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Per sapere se un moto è uniformemente accelerato basta osservare se lo spazio percorso è proporzionale al quadrato del tempo. Ovvero se consideriamo un corpo che scivola lungo un piano inclinato in un intervallo di tempo compie una distanza percorsa Δs. Se raddoppiamo il tempo allora quadruplica la distanza percorsa.

2.4 Formula senza il tempo

Dalla velocità ricaviamo il tempo

$$t = \frac{v(t) - v_0}{a} \tag{2.6}$$

A questo punto sostituiamo il tempo nella legge oraria del moto uniformemente accelerato:

$$s(t) = s_0 + v_0(\frac{v(t) - v_0}{a}) + \frac{1}{2}a(\frac{v(t) - v_0}{a})^2 \tag{2.7}$$

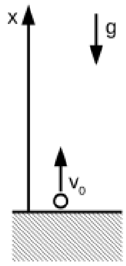
$$a(s - s_0) = v_0 v - (v_0)^2 + \frac{1}{2}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2) \tag{2.8}$$

$$2a\Delta s = v^2 - v_0^2 \tag{2.9}$$

Cenno storico Tutti i gravi, oggetti in caduta, cadono con accelerazione costante $g = 9.81\frac{m}{s^2}$, e quando è solamente la forza peso ad essere esercitata su di essi (senza attriti come quello dell'aria), cadono allo stesso momento.

2.5 Lancio e caduta di un grave

Il lancio e la caduta di un grave è un tipo di moto rettilineo uniformemente accelerato. Consideriamo un sistema di riferimento di questo tipo:



Poichè la parte positiva del nostro asse punta verso l'alto, allora l'accelerazione esercitata dalla Terra sarà negativa. Per prima cosa si scrivono la legge oraria e la velocità in funzione del tempo:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2.10}$$

$$v = v_0 - gt \tag{2.11}$$

dobbiamo trovare l'altezza massima e l'istante in cui il corpo raggiunge l'altezza massima (h_{max}, t_{max}).

Metodo 1 Nel momento di inversione di moto, la velocità istantanea sarà nulla, dunque

$$
\begin{aligned}
0 &= v_0 - g t_{max} \\
\Rightarrow t_{max} &= \frac{v_0}{g} \\
h_{max} = h_0 + v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g (\frac{v_0}{g})^2 \\
\Rightarrow h_{max} &= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}
\end{aligned}
$$

Metodo 2 In questo caso utilizziamo la formula senza il tempo:

$$
\begin{aligned}
-2 h_{max} g &= v^2 (= 0) - v_0^2 \\
\Rightarrow h_{max} &= \frac{v_0^2}{g}
\end{aligned}
$$

e poi si ricava il tempo dalla legge oraria o dalla velocità.

Tempo di caduta Per calcolare il tempo di caduta bisogna porre la posizione finale del corpo nulla (ovvero uguale a quella iniziale).

$$
\begin{aligned}
0 &= v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\
\Rightarrow t &= 0, t = \frac{2 v_0}{g}
\end{aligned}
$$

e da questo tempo si può trovare la velocità di caduta, che avrà modulo sicuramente diverso da zero e verso opposto a quello positivo del nostro sistema di riferimento.

2.6 Moto Bidimensionale

Nel moto bidimensionale si va a considerare il vettore $\Delta\vec{r} = r(\vec{t_1}) - r(\vec{t_0})$ dove per $\vec{r}$ si intende il vettore posizione che indica in che punto si trova il corpo nello spazio se guardiamo la traiettoria su u piano cartesiano. Detto questo si può calcolare la velocità scalare del corpo:

$$
\vec{v} = \frac{dr(\vec{t})}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}
$$

ovvero il vettore velocità ha **direzione tangente alla traiettoria** e **verso contiguo alla direzione del moto**. Per trovare il modulo del vettore velocità posso considerare il moto come composizione di moti rettilinei e curvilinei. Questa operazione è possibile perchè ogni curva può essere approssimata ad una circonferenza per il cerchio osculatore. Consideriamo un qualsiasi arco di circonferenza: avrà un raggio R, un'ampiezza $\Delta\theta$ e l'arco di circonferenza Δs equivale alla differenza della posizione finale e quella iniziale ricavate dalla legge oraria. Il modulo del vettore $\Delta\vec{r}$ sarà

$$|\Delta\vec{r}| = 2R\sin\frac{\Delta\theta}{2} \tag{2.12}$$

sostituendo questa uguaglianza nel limite del rapporto incrementale si ha:

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{2.13}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2R\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\frac{\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} \tag{2.14}$$

Ovviamente se $\Delta t\to 0, \Delta\theta\to 0$, quindi si ha;

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R\Delta\theta}{\Delta t} \tag{2.15}$$

poichè $\Delta s = R\Delta\theta$ per definizione di radiante:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_s \tag{2.16}$$

ovvero il suo modulo è quello della velocità scalare. Per scrivere il vettore velocità quindi si utilizza **un sistema di riferimento intrinseco alla traiettoria**. Ovvero immaginiamo un vettore unitario $\vec{u_t}$ tangente a ogni punto della traiettoria. Allora:

$$\vec{v} = v_s\vec{u_t} \tag{2.17}$$

molto importante è ricordare che $\vec{u_t}$ cambia direzione e verso ad ogni istante della traiettoria, cioè è in funzione del tempo.

Vettore accelerazione Per trovare il vettore accelerazione consideriamo la nostra traiettoria in un sistema di riferimento fisso. Quindi il vettore posizione in un instante può essere scomposto nel modo seguente:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \tag{2.18}$$

Per definizione la velocità scalare equivale a:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{2.19}$$

$$= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{i} + x(t) \cdot \frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{j} + y(t) \cdot \frac{d\vec{j}}{dt} \tag{2.20}$$

$$= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{j} \tag{2.21}$$

Le componenti $x(t) \cdot \frac{d\vec{i}}{dt}$ e $y(t) \cdot \frac{d\vec{j}}{dt}$ sono nulle perchè il sistema di riferimento è fisso, la loro direzione, verso e modulo è costante. $\vec{v}$ è ancora una volta tangente alla traiettoria. Ora che abbiamo il vettore velocità è possibile trovare l'accelerazione vettoriale, divisa in sue componenti:

- Componente tangente alla traiettoria:

$$\frac{dv_s}{dt}\vec{u_t} \tag{2.22}$$

- Componente radiale (perpendicolare) alla traiettoria:

$$v_s\frac{d\vec{u_t}}{dt} = \frac{v_s^2}{R} \cdot \vec{u_n} \tag{2.23}$$

  dove $\vec{u_n}$ è il vettore normale alla traiettoria.

N.B. La componente radiale dell'accelerazione è presente **solamente quando la direzione del vettore $\vec{u_t}$ cambia nel tempo, altrimenti questa componente è nulla. La componente radiale dell'accelerazione è detta accelerazione centripeta**.

$$\vec{a}(t) = a_t\vec{u_t} + a_c\vec{u_n} \tag{2.24}$$

$$a_t = \frac{dv_s}{dt} \tag{2.25}$$

$$a_c = \frac{v_s^2}{R} \tag{2.26}$$

Calcolo della componente centripeta dell'accelerazione Consideriamo il vettore $v_s\frac{d\vec{u_t}}{dt}$. Il modulo di questo vettore è dato dalla variazione del vettore $\vec{u_t}$ nel tempo.

$$\Delta\vec{u_t} = 2|\vec{u_t}|\sin(\frac{\Delta\theta}{2})$$

quindi possiamo riscrivere il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u_t}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2|\vec{u_t}|\sin(\frac{\Delta\theta}{2})}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\frac{\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} \tag{2.27}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\frac{\Delta s}{R}}{dt} = \frac{v_s}{R} \tag{2.28}$$

$$\Rightarrow v_s\frac{d\vec{u_t}}{dt} = \frac{v_s^2}{R} \tag{2.29}$$

2.7 Moto circolare uniforme

Nel moto circolare uniforme un corpo si muove lungo una traiettoria circolare. Si definiscono velocità ed accelerazione per questo moto:

- $$\vec{v} = v_s\vec{u_t}$$
- $$\vec{a} = \frac{dvs}{dt}\vec{u_t} + \frac{v_s^2}{R}\vec{u_n}$$

Possiamo riscrivere le equazioni del moto circolare con **coordinate angolari** anzichè utilizzare ascisse curvilinee.

$$\theta = \frac{s(t)}{R}$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\frac{s(t)}{R}}{R} = \frac{v_s}{R}$$

Nel caso del moto circolare uniforma se v_s è costante anche ω sarà costante, ed è chiamata **velocità angolare**. Inoltre vale $\theta = \omega t$. Il tempo del periodo è definito come

$$2\pi = \omega T$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = Hz$$

Velocità angolare, raggio e velocità sono legati dal seguente prodotto vettoriale:

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{R} \tag{2.30}$$

mentre l'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{2.31}$$

$$= \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{R})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} \tag{2.32}$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}) \tag{2.33}$$

e $|\vec{a}| = \omega^2 R$

2.8 Moto circolare uniformemente accelerato

Nel moto circolare uniformemente accelerato l'accelerazione a_s tangente alla traiettoria è costante. Si avrà dunque:

$$\vec{a} = a_s \vec{u_t} + \frac{v_s^2}{R} \vec{u_n} \tag{2.34}$$

e le leggi orarie saranno:

$$a_s = cost \tag{2.35}$$

$$v_s = v_0 + a_s t \tag{2.36}$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_s t^2 \tag{2.37}$$

Possiamo riscrivere le leggi del moto con una descrizione angolare. In particolare si definisce

$$v = \omega R$$

$$\rightarrow \frac{d\omega(t)}{dt} R = \alpha$$

dove α è l'accelerazione angolare scalare. Il vettore accelerazione sarà definito come

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R} \tag{2.38}$$

$$\rightarrow \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{R})}{dt} \tag{2.39}$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} \tag{2.40}$$

$$\vec{\alpha} \times \vec{R} - \omega^2 \vec{R} \tag{2.41}$$

2.9 Moto parabolico

Il moto parabolico è la composizione di un moto rettilineo uniforme lungo l'asse delle ascisse e un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo le ordinate. Le leggi orarie:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \tag{2.42}$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\theta \\ v_y(t) = v_0 \sin\theta + a_y t \end{cases} \tag{2.43}$$

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 \cos\theta t \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{2.44}$$

La traiettoria del moto parabolico può essere trovata se si trova il tempo da una legge oraria e lo si sostituisce nell'altra.

$$\begin{cases} t = \frac{x-x_0}{v_0 \cos\theta} \\ y(t) = y_0 + v_0 \sin\theta \frac{x-x_0}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2}g(\frac{x-x_0}{v_0 \cos\theta})^2 \end{cases} \tag{2.45}$$

$$\begin{cases} t = \frac{x-x_0}{v_0 \cos\theta} \\ y(t) = y_0 + (x - x_0)\tan\theta - \frac{1}{2}g(\frac{x-x_0}{v_0 \cos\theta})^2 \end{cases} \tag{2.46}$$

che è una parabola. Nel moto parabolico l'ordinata più alta è raggiunta nel momento di inversione del moto, dunque si trova il tempo di altezza massima quando la velocità lungo le ordinate è nulla, e dal tempo con la legge oraria si ricava l'altezza massima.
Per trovare la gittata si trova il tempo quando le ordinate sono nulle (due soluzioni. una accettabile l'altra no). La gitta più lunga si ha quando l'angolo iniziale della velocità è di $\frac{\pi}{4}$.

Capitolo 3

Dinamica

La disica Newtoniana opera entro certi limi.

- Gli oggetti con dimensioni dell'ordine dei micron o nm non possono essere studiati secondo la fisica classica, ma devono essere applicate le leggi **della meccanica quantistica**.
- Per oggetti con una velocità pari a quella della luce deve essere utilizzata la **teoria della relatività**

3.1 Principio di Inerzia

Il **Principio di Inerzia** o **Prima legge della Dinamica** afferma che su un corpo la cui forza risultante che agisce su di esso è pari a $\vec{F} = \vec{0}$ allora il corpo si muove di **moto rettilineo uniforme**.

Il Principio di Inerzia risale a prima di Galileo, però la formulazione era errata, in quanto si pensava che se la froza risultante è nulla, allora anche la velocità del corpo era nulla. Fu Galileo ad accorgersi dell'errore facendo scorrere una pallina su un piano inclinato e poi su un piano diminuendo l'attrito e osservando che la pallina continuava il moto.

Sistema di riferimento inerziale Un sistema di riferimento è inerziale se l'osservatore si muove di moto rettilineo uniforme, quindi la velocità di un corpo in movimento è la medesima per ogni sistema di riferimento inerziale. La Terra **non è un sistema di riferimento inerziale** in quanto all'equatore è presente un'accelerazione centripeta causata dal moto di rotazione, tuttavia può essere trascurata.

3.2 II Legge della Dinamica

La Seconda Legge della Dinamica (o seconda Legge di Newton) afferma che

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{3.1}$$

Questa legge è da guardarsi come una relazione di causa ed effetto. **Una forza provoca un'accelerazione, e il coefficiente di proporzione è la massa**. L'unità di misura della forza è il Newton (N). Inoltre la forza è un **vettore**, perchè sono rispettate le proprietà di somma vettoriale.

Una nota importante è che Newton non definisce la Forza come scritto sopra, ma attraverso la **quantità di moto**, da lui chiamata "*momentum*", definita come $\vec{P} = m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{3.2}$$

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}, m(t) = cost \tag{3.3}$$

N. B. L'ultima equazione ha senso se e solo se la massa è costante nel tempo. Se così non fosse (come nel lancio di un razzo il cui 85% del peso è fatto dal carburante che viene bruciato, allora bisogna ricorrere alla formulazione originale di Newton per quanto riguarda la forza.

Impulso Dall'equazione 3.2 si ricava la quantità di moto integrando:

$$\int_0^t d\vec{P} = \int_0^t \vec{F}dt \tag{3.4}$$

$$\Delta\vec{P} = \int_0^t \vec{F}dt = \vec{J} \tag{3.5}$$

dove $\Delta\vec{P} = \vec{J}$ è noto come **impulso**. Si ricava inoltre la forza media esercitata in un intervallo di tempo:

$$\vec{F_m} = \frac{1}{t - t_0}\int_0^t \vec{f}dt \tag{3.6}$$

(applicazione del Teorema della Media Integrale).

$$\Delta\vec{P} = \vec{J} = \vec{F_m}\Delta t \tag{3.7}$$

3.3 Principio di Azione-Reazione

Le froze nascono da un'interazione, e ogni volta che è presente un'interazione che genera una forza, è presente una forza di verso opposto e stessa direzione a quella generata. Lo vediamo nell'attrazione reciproca tra Terra e Sole:

$$m_t a_t = M_s a_s$$
$$a_s = \frac{m_t a_t}{M_s}$$

poichè $M_s >> m_t$ la forza di attrazione che la Terra esercita sul Sole è infinitesima in confronto dell'attrazione che il Sole esercita sulla Terra.

3.4 Forze che determinano i fenomeni naturali

1. **Gravitazionale**;
2. Nucleare **debole**;
3. **Elettromagnetica**;
4. Nucleare **forte**;

per tutte queste forze è importante **il raggio d'azione, andamento asintotico, e intensità relativa**.

Interazione	Intensità	Asintoto	Raggio
Gravitazionale	1	$\frac{1}{R^2}$	∞
Debole	10^{25}	-	$10^{-18}m$
Elettromagnetica	10^{36}	$\frac{1}{R^2}$	∞
Forte	10^{38}	-	$10^{-15}m$

Nel nucleo atomico la forza elettromagnetica tende a spaccare il nucleo (c molti protoni sono vicini e hanno la stessa carica) ma questa è vinta dall'interazione nucleare forte. L'interazione nucleare debole è responsabile del decadimento β.

3.5 Forza Gravitazionale

La forza gravitazionale che la Terra esercita su un corpo di massa m a distanza r da suo centro di massa è:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\vec{u_r} \tag{3.8}$$

dove γ è una costante universale e vale $6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/Kg^2$. Il meno nell'equazione 3.8 indica la natura **attrattiva di tale forza**. Ovviamente se $r << R_t$ allora il termine

$$\vec{g} = -\gamma \frac{M}{R_t^2}\vec{u_r} = 9.81 m/s^2$$

ed è una costante, da cui deriva la forza peso di un corpo in prossimità della superficie terrestre:

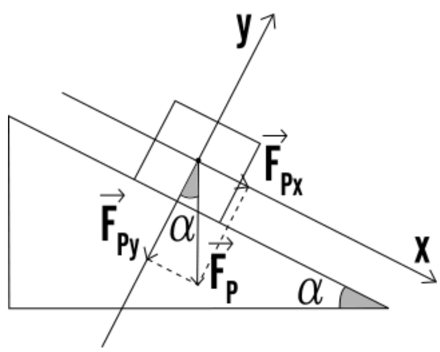
$$\vec{F_p} = m\vec{g}$$

Reazione vincolare Per il Terzo Principio della Dinamica ad una forza c' è sempre una forza opposta. Quando un corpo poggia su una superficie, questa forza è chiamata **reazione vincolare** chiamata $\vec{N}$. La reazione vincolare è una forza relativa, cioè non ha un valore proprio, ma dipende dalla forza che agisce sul corpo, la sua direzione è perpendicolare al piano il verso è uscente da esso. Nel caso di un corpo fermo su una superficie lungo l'asse delle y si avrà:

$$N - mg = 0$$

3.6 Piano inclinato

Un corpo su un piano inclinato le sue forze vengono scomposte lungo gli assi perpendicolari e ortogonali al piano inclinato.

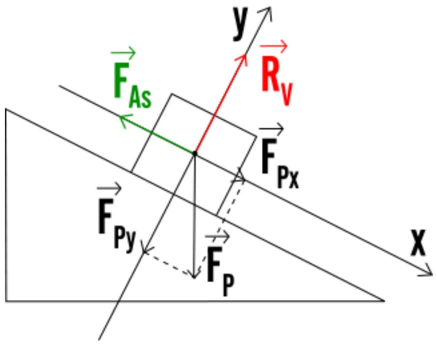


Forze d'attrito Esistono diverse forze d'attrito: **radente, mordente e viscoso**. In particolare nello scivolamento dei copri entra in gioco l'attrito radente **dinamico e statico**. La forza d'attrito non dipende dall'area di appoggio del corpo sulla superficie.

La forza d'attrito statico uguaglia la forza a cui è sottoposto un corpo fino a quando la forza è esercitata sul corpo e questo si muove. Si oppone al movimento.

$$F_a = \mu_s N \tag{3.9}$$

la sua direzione è la stessa del piano su cui poggia il corpo.



Esiste anche una forza di attrito dinamico: non dipende dall'area di contatto, si oppone al movimento, non dipende dalla velocità degli oggetti, non dipende dalla velocità relativa agli oggetti.

$$F_{ad} = \mu_d N \tag{3.10}$$

E' da tenere presente che sempre $\mu_d < \mu_s$. L'attrito statico è fondamentale per il movimento: il piede esercita una forza sull'asfalto che è contrastata dalla forza di attrito statico, se non ci fosse la forza di attrito scivoleremmo. La forza di attrito statico è utilizzata anche nei freni con ABS delle automobili: evitano lo slittamento perchè la pinza dei freni esercita una forza per avere accelerazione nulla nel punto del pneumatico a contatto con l'asfalto, quindi agisce l'attrito statico.

3.7 Attrito viscoso

Si ha attrito viscoso quando un corpo si muove in un fluido. In generale la forza di attrito è proporzionale ad una potenza della velocità:

$$F_a \propto v^m$$

Dunque la forza di attrito viscoso, dunque **non è una forza costante del tempo**, ed è sempre opposta al movimento del corpo.

Modello si Stokes Sia dato un oggetto sferico di raggio R il modulo della forza d'attrito vale:

$$F_a = 6\pi\gamma Rv \tag{3.11}$$

dove γ è il coefficiente di viscosità. Per l'aria a 20 gradi celsius $\lambda = 1.71 \cdot 10^{-6} Ns/m^2$. Il modello di Stokes è valido solamente per corpi che si muovono in moto laminare.

II Modello Il secondo modello è valido per moti turbolenti.

$$F_a = \frac{1}{2} c\rho\pi R^2 v^2 \tag{3.12}$$

dove c è il coefficiente correttivo adimensionale (per l'aria $c = 1$), e ρ è la densità del fluido ($1.29 Kg/m^3$).

Esempio Un corpo in caduta libera si muove di moto laminare e risente dell'attrito viscoso con l'aria.

3.8 Tensione di una fune

Quando una forza è applicata ad una fune si può avere esclusivamente il trascinamento del corpo. La fune è considerata **con massa trascurabile e lunghezza inestensibile**. Se fosse estensibile la cinematica di un punto sulla corda sarebbe diversa dalla cinematica del corpo trascinato. Dunque la fune crea **un vincolo cinematico**:

- Se una fune si sposta di Δs anche il corpo si sposta da Δs;
- Se un punto della fune si sposta con velocità v anche il corpo a cui è legato si sposta di velocità v;
- Lo stesso principio vale per l'accelerazione;

Se la fune avesse una massa non trascurabile allora la tensione applicata ad un capo della fune non sarebbe la stessa all'altro capo.

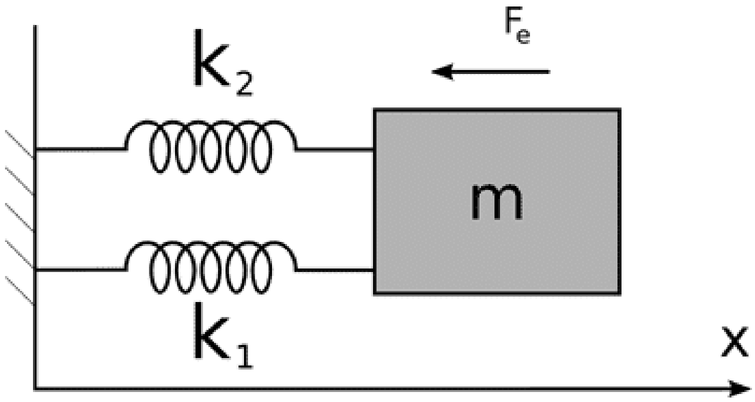
3.9 Forza elastica

Si definisce come la forza elastica esercitata da una molla su un corpo come:

$$F = -kx$$

dove K è la **costante elastica della molla**. Possiamo riscrivere la seconda legge della dinamica come equazione differenziale e si ha:

$$\frac{d^2x}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{3.13}$$

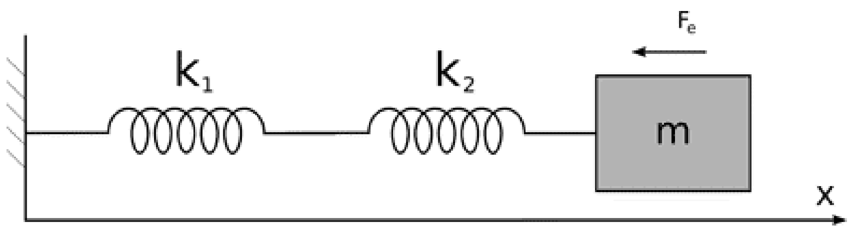


Molle in parallelo Se le molle hanno questa disposizione allora sono disposte in **parallelo**. Il corpo è soggetto ad un **unico spostamento** x, e così anche le molle.

$$\begin{cases} F_1 = -k_1 x \\ F_2 = -k_2 x \end{cases} \rightarrow F_1 + F_2 = -k_1 x - k_2 x$$

$$\vec{F_{tot}} = -(k_1 + k_2)\vec{x} \tag{3.14}$$

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i \tag{3.15}$$



Molle in serie In questo caso le molle sono dette in **serie**, e in questo caso la prima molla avrà un suo spostamento e la seconda un altro spostamento, dunque differenti. Tuttavia il sistema di molle è **soggetto ad un'unica forza**.

$$\begin{cases} F = -k_1 x_1 \\ F = -k_2 x_2 \end{cases} \rightarrow x_{tot} = x_1 + x_2 = -F(\frac{k_2 + k_1}{k_1 k_2})$$

$$F = -(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2})x \tag{3.16}$$

$$k_e q = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} \tag{3.17}$$

3.10 Moto armonico

Un corpo attaccato ad una molla oscilla attorno alla posizione di riposo: si dice che il corpo compie un **moto armonico**. Si definisce la **pulsazione** o **frequenza naturale** ω come

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Si definisce quindi una funzione periodica:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \tag{3.18}$$

Il moto è dunque periodico, e il periodo equivale a $T = \frac{2\pi}{\omega}$. A equivale all'ampiezza massima che il corpo raggiunge. Essendo la velocità la derivata della posizione rispetto il tempo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \tag{3.19}$$

Allo stesso modo con l'accelerazione:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{t} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi) \tag{3.20}$$

Altri risultati Supponiamo di conoscere la posizione e lo sfasamento iniziale del corpo che segue un moto armonico: $x(0) = x_0$, $\phi(0) = \phi_0$. Dunque:

$$x_0 = A\cos(\phi_0)$$
$$v_0 = -\omega A \sin(\phi_0)$$
$$\rightarrow -\frac{v_0}{x_0 \omega} = \tan(\phi_0)$$
$$\rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

invece se $x_0 = 0$ e $v_0 \neq 0$. Allora si avrà:

$$\tan(\phi) = -\frac{v_0}{x_0\omega} = \infty \rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$
$$\rightarrow A = \frac{v_0}{\omega}$$

3.11 Pendolo semplice

Anche il corpo attaccato ad un pendolo semplice esegue un moto di tipo ormonico, infatti oscilla attorno una posizione di equilibrio. Se consideriamo la traiettoria percorsa da un corpo $s(t) = \theta l$ e scomponendo le forze che agiscono sul corpo si avrà un'equazione differenziale:

$$ma = -mg\sin\theta$$
$$m\frac{d^2s(t)}{d(t)} = -mg\sin\theta$$
$$ml\frac{d^2\theta(t)}{dt} + mg\sin\theta = 0$$
$$\frac{d^2\theta(t)}{dt} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

Questa è un'equazione differenziale abbastanza complicata. Tuttavia **per piccole oscillazioni il seno dell'angolo si approssima al suo seno**, dunque si ha:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{3.21}$$

che è un'equazione differenziale simile a quella del moto di un corpo attaccato ad una molla:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \phi), \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{3.22}$$

si hanno due importanti osservazioni:

1. Il periodo non dipende dalla massa;

2. T non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione;

3.12 Alcuni parallelismi

Come abbiamo visto nella sezione 3.9 esistono due configurazioni in cui può essere messa una molla. In particolare è possibile trovare una situazione in quanto analoga anche nell'elettro magnetismo: **vediamo il caso delle resistenze e dei condensatori** in serie e in parallelo.

3.12.1 Resistenze

Legge di Ohm: $\Delta V = RI$

In parallelo Nel caso due resistenze siano in parallelo, rimane uguale per entrambe le resistenza la **differenza di potenziale**, dunque si può dimostrare che:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \tag{3.23}$$

In serie Nel caso in cui le resistenze siano in serie, allora la differenza di potenziale della seconda resistenza è diversa da quella della resistenza precedente, tuttavia rimane identica l'**intensità di corrente**. Si dimostra che:

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i \tag{3.24}$$

3.12.2 Condensatori

La capacità del condensatore C è data dalla legge: $Q = c\Delta V$.

In parallelo Se i condensatori sono in parallelo si ha la medesima ΔV, dunque si dimostra che:

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i \tag{3.25}$$

In serie Se i condensatori sono in serie allora questi hanno la medesima carica. Si dimostra che:

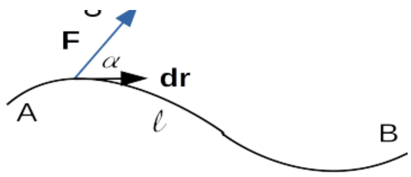
$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \tag{3.26}$$

Capitolo 4

Lavoro, Energia Cinetica, Energia Potenziale

Immaginiamo di avere un corpo su un piano inclinato privi di attrito. In un primo momento vogliamo far salire il corpo a velocità costante, dunque applichiamo una forza lungo l'asse x, e la somma delle risultanti sarà nulla. Se invece vogliamo far salire il corpo con una certa accelerazione allora si avrà la forza risultante uguale alla ben nota ma. In entrambi i casi il corpo si muove, ma dal punto di vista della dinamica **le situazioni sono radicalmente differenti**, dunque **è come se ci si perdesse dell'informazione per quanto riguarda il moto del corpo**. Dunque "aggiungiamo" alla seconda Legge della Dinamica lo spostamento.

4.1 Teorema delle Forze Vive



Consideriamo l'esempio in figura. Avremo quindi:

$$\vec{F}d\vec{r} = m\vec{a}d\vec{r}$$
$$\vec{F}d\vec{r} = m\vec{a}\vec{v}dt$$

Dall'ultima uguaglianza integriamo in due punti A e B entrambi i membri.

$$\int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a}\vec{v}dt \tag{4.1}$$

consideriamo ora il secondo termine, sapendo che $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

$$\int_A^B m\vec{a}\vec{v}dt = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt = \tag{4.2}$$

$$\int_{v_a}^{v_b} m\vec{v}d\vec{v} = \tag{4.3}$$

$$\int_{v_a}^{v_b} mv_x d_x + mv_y d_y + mv_z d_z = \tag{4.4}$$

$$\int_{v_{ax}}^{v_{bx}} mv_x d_x + \int_{v_{ay}}^{v_{by}} mv_y d_y + \int_{v_{az}}^{v_{bz}} mv_z d_z = \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{2}mv_{bx}^2 - v_{ax}^2 + \frac{1}{2}mv_{by}^2 - v_{ay}^2 + \frac{1}{2}mv_{bz}^2 - v_{az}^2 = \tag{4.6}$$

$$\frac{1}{2}m[(v_{bx}^2 + v_{by}^2 + v_{bz}^2) - ((v_{ax}^2 + v_{ay}^2 + v_{az}^2)] = \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{2}m(v_b^2 + v_a^2) \tag{4.8}$$

Ora unendo le uguaglianze 4.8 e 4.1 si arriva a:

$$\frac{1}{2}m(v_b^2 + v_a^2) = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} \tag{4.9}$$

questo risultato è importantissimo, e prende nome come **Teorema dell'Energia Cinetica**, **Teorema del Lavoro**, o in modo nostalgico **Teorema delle Forze Vive**. Questo perchè il primo termine definisce **l'energia cinetica**, mentre il secondo definisce il **lavoro**, che equivale **all'integrale di linea tra un punto iniziale A e un punto finale B del prodotto scalare tra $\vec{F}$ e $d\vec{r}$, con $d\vec{r}$ tratto infinitesimo della traiettoria compiuta dal corpo in movimento** .

Questo teorema è valido esclusivamente se $F = F_{tot}$, ovvero F equivale alla somma di tutte le forze che agiscono sul corpo in movimento. In modo sintetico si può scrivere:

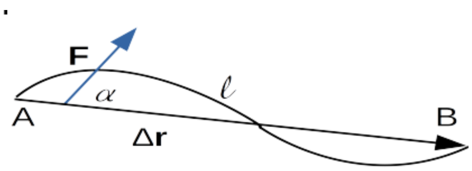
$$\Delta E_k = W_{AB} \tag{4.10}$$

L'integrale di linea non sempre è facilmente applicabile, infatti se la forza che agisce sul punto continua a variare in modulo, direzione e verso, varia anche l'angolo con $d\vec{r}$, dunque il lavoro andrebbe calcolato punto per punto. Tuttavia esistono dei casi particolari.

Forza costante Se la forza che agisce sul punto è costante allora si ha che:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

dove $\Delta\vec{r}$ è il vettore spostamento del corpo.



Inoltre per definizione di prodotto scalare se $\alpha < \pi/2$, ovvero il prodotto scalare è positivo il lavoro è detto **motore**, se $\alpha > \pi/2$ il lavoro è **resistente**, se $\alpha = \pi/2$ il lavoro è **nullo**.

4.2 Lavoro e Forza Peso

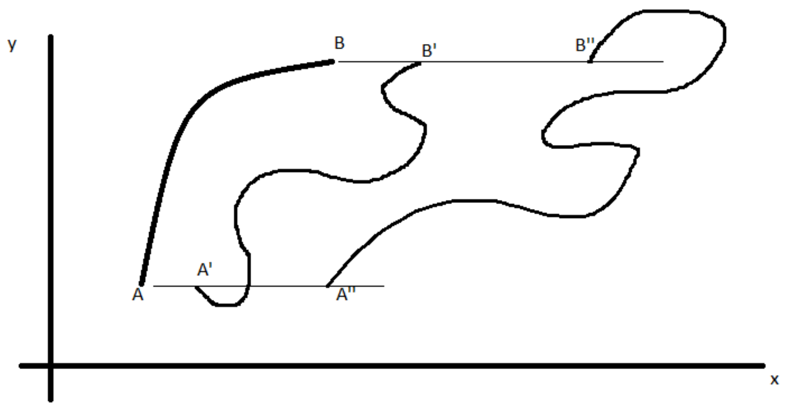
Consideriamo un corpo che si muove lungo una traiettoria qualsiasi, e l'unica forza che agisce su questo corpo è la forza peso. E' possibile calcolare il lavoro che la forza peso esercita sul corpo. Applichiamo la definizione:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_A^B \vec{F_p} d\vec{r} \\ \rightarrow d\vec{r} &= d_x\vec{i} + d_y\vec{j} \\ \rightarrow \vec{F_p} &= 0\vec{i} - mg\vec{j} \\ \rightarrow \vec{F_p} d\vec{r} &= d_z \cdot 0 - mgd_y \end{aligned}$$

dunque è facile notare che se scomponiamo i vettori nelle loro componenti i, j, k si nota come lungo x il lavoro esercitato dalla forza peso è nullo.

$$W_{AB} = \int_{y_A}^{y_B} -mgd_y = -mg(y_B - y_A) \tag{4.11}$$

Dunque il lavoro esercitato dalla forza peso **dipende solamente dalla posizione finale e la posizione iniziale lungo l'asse delle ordinate**. Si ha che $W_{AB} = W_{A'B'}$



Viene chiamata con U_p l'**energia potenziale associata ad un corpo**. Vale che $U_p = mgy$. Inoltre

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F}_p d\vec{r} = U_A - U_B = -\Delta U \tag{4.12}$$

Si noti come l'energia potenziale è definita da meno di una costante che esce dall'integrale, dunque possiamo scegliere noi il riferimento della y dove più ci è comodo.

4.3 Forze conservative

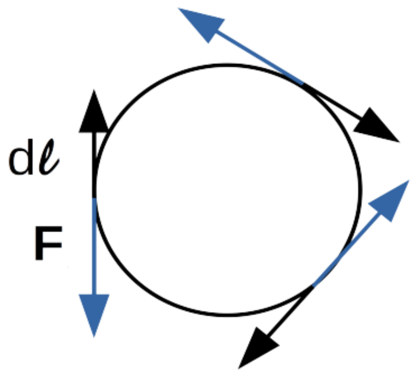
Vale una particolare proprietà: **le forze definite da una funzione di energia potenziale sono dette forze conservative**. Quindi per forze conservative:

- Possono essere definite da U;
- $W_{AB} = -DeltaU$

Quindi per forze conservative l'energia potenziale e il lavoro dipendono solamente dallo stato iniziale e dallo stato finale. Un modo per dire questo è calcolare il lavoro su un circuito chiuso, e si definisce **la circuitazione in un circuito chiuso equivale a**

$$\oint \vec{F}_p d\vec{r} \tag{4.13}$$

e la circuitazione è **nulla** se agiscono forze conservative.



Per esempio si dimostra che **forza d'attrito** non è una forza conservativa, in quanto la circuitazione in un percorso chiuso non è nulla.

In generale si dice che su un corpo la somma delle forze è data da una somma di forze conservative e non conservative:

$$F = F_c + FNC$$

Per il Teorema delle Forze Vive si ha:

$$\Delta E_k = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \tag{4.14}$$

$$\int_A^B \vec{F_C} d\vec{r} + \int_A^B \vec{F_{NC}} d\vec{r} \tag{4.15}$$

$$-\Delta U + W_{NC} \tag{4.16}$$

$$\rightarrow \Delta E + \Delta U = W_{NC} \tag{4.17}$$

Un risultato molto importante è il 4.17, e si definisce **l'energia meccanica**:

$$E_{mec} = E_k + U_p \tag{4.18}$$

Ecco le casistiche:

1. $W_{NC} = 0$ allora si conserva l'energia meccanica di un sistema;
2. $W_{NC} > 0$ (Lavoro Motore), l'energia meccanica aumenta;
3. $W_{NC} < 0$ (Lavoro resistente, tipo forza di attrito), l'energia meccanica diminuisce;

Parte II

Termodinamica

Parte III

Elettromagnetismo e Onde