

Appunti di Algebra Lineare e Analisi Matematica 2

Mattia Ruffini

Febbraio 2022

Indice

I	Algebra Lineare	5
1	Spazi vettoriali e vettori	7
1.1	Somma di vettori geometrici	7
1.2	Prodotto di un vettore per uno scalare	7
1.3	Spazio Vettoriale	8
1.3.1	\mathbb{R}^n	9
1.4	Spazi vettoriali astratti	9
1.5	Combinazione lineare di vettori	10
1.6	Sottospazio Vettoriale	10
1.7	Sottospazio generato da k vettori	11
1.8	Dipendenza e Indipendenza Lineare	12
2	Basi e dimensioni	15
2.1	Dimensioni	16
2.2	Coordinate di un vettore	17
3	Proprietà di \mathbb{R}^n	18
3.1	Generalizzazione del Teorema di Pitagora	19
3.2	Basi di \mathbb{R}^n	19
3.3	Sottospazio ortogonale	20
4	Matrici	21
4.1	Proprietà delle matrici	22
4.2	Prodotto righe per colonne di due matrici	22
4.3	Prodotto matrice per vettore	24
5	Determinante di una matrice	26
5.1	Teoremi di Laplace	27
5.2	Proprietà del determinante	27
5.3	Matrice Inversa di una matrice quadrata	29
5.3.1	Matrice dei complementi algebrici e matrice inversa	29

5.4	Rango di una matrice	30
5.4.1	Calcolo del rango	31
6	Applicazioni lineari	32
6.1	Nucleo e Immagine di un'applicazione lineare	33
6.2	Relazione tra dimensioni di V , $\ker L$, $\operatorname{im} L$	35
6.3	Esempio di funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$	35
6.4	Teorema di Rappresentazione	35
6.5	Basi e coordinate	39
6.5.1	Teorema di Rappresentazione, caso generale	40
6.6	Autovettori e Autovalori	42
6.7	Sistemi lineari	44
6.7.1	Sistema lineare non omogeneo	45
6.8	Autovettori e sistemi lineari	46
6.9	Proprietà di matrici diagonalizzabili	48
6.10	Applicazioni lineari e matrici ortogonalmente diagonalizzabili	49
7	Forme Quadratiche	52
7.1	Proprietà delle forme quadratiche	52
7.2	Segno delle forme quadratiche in due variabili	53
II	Equazioni Differenziali	55
8	Introduzione fisica	56
9	Problema di Cauchy	58
9.1	Integrale generale	59
9.2	Forzante non nullo	60
9.3	$\Delta > 0$	61
9.4	$\Delta < 0$	62
9.5	$\Delta = 0$	63
9.6	Integrale Generale e problema di Cauchy per l'Equazione Omogenea	64
10	Soluzioni delle equazioni differenziali	65
10.1	Metodo di somiglianza	65
10.2	Termine noto esponenziale	66
10.3	Forzante polinomiale	67
10.4	Forzante trigonometrico	68
10.5	Variazione delle costanti	68
10.6	Forzante esponenziale-trigonometrico	70

10.7	Esponenziale complesso nel metodo di somiglianza	71
10.8	Forzante come funzione composta	71
11	Altri esempi fisici	72
11.1	Oscillazioni libere non smorzate	74
11.2	Oscillazioni smorzate	76
11.3	Oscillazioni forzate e risonanza	76
11.4	Oscillazioni smorzate e forzate	76
11.5	Circuiti RLC in corrente alternata	76
III	Analisi 2	77
12	Funzioni reali di più variabili reali	78
12.1	Grafico	79
12.2	Insieme di livello	80
12.2.1	Cono e paraboloide	81
12.3	Topologia di \mathbb{R}^n	83
12.3.1	Punto interno di un sottoinsieme di \mathbb{R}^n	83
12.3.2	Punto di frontiera di un sottoinsieme di \mathbb{R}^n	83
12.4	Limiti di funzioni in n variabili	84
12.5	Calcolo dei limiti	84
12.5.1	Coordinate polari	85
12.6	Continuità di funzioni in più variabili	85
12.7	Teorema degli zeri	85
13	Calcolo differenziale a più variabili	87
13.1	Derivate parziali	87
13.2	Derivate direzionale	88
13.3	Derivabilità e continuità	89
13.4	Formula del gradiente	90
13.5	Verificare la differenziabilità	92
13.6	Condizione sufficiente di differenziabilità	92
13.7	Proprietà del gradiente	93
13.7.1	Direzione di massima crescita	93
13.7.2	Derivazione delle funzioni composte	93
13.7.3	Proprietà con le curve di livello	94
14	Ottimizzazione	96
14.1	Derivate parziali del secondo ordine	96
14.2	Formula di Taylor al secondo Ordine	96

14.3	Matrice Hessiana	97
14.4	Massimi e minimi	98
14.4.1	Fermat per due variabili	98
14.5	Condizione sufficiente per i punti stazionari	98
14.5.1	Corollario della matrice Hessiana	100
14.6	Ottimizzazione libera e vincolata	100
14.6.1	Ottimizzazione vincolata per vincoli di uguaglianza	101
15	Integrali doppi e tripli	104
15.0.1	Rispetto qualunque insieme	105
15.1	Insiemi x-semplci e y-semplci	105
15.2	Proprietà dell'integrale	107
15.3	Formule di riduzione	108
15.4	Cambio di variabili per gli integrali doppi	109
15.5	Integrali tripli	111
16	Campi vettoriali	114
17	Campi vettoriali	116
17.1	Proprietà dei campi conservativi	118
17.2	Teorema di Green	119

Parte I

Algebra Lineare

L'algebra Lineare studia gli **spazi vettoriali** e le **funzioni lineari tra spazi vettoriali**.

Capitolo 1

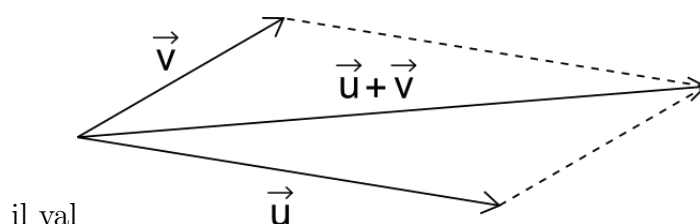
Spazi vettoriali e vettori

Chiamiamo con E l'insieme dei vettori geometrici nello spazio. I vettori nascono in fisica per descrivere grandezze che oltre un numero necessitano **una direzione e un verso**. Dato un segmento orientato, un'unità di misura, due segmenti orientati sono **equivalenti** se hanno **la stessa lunghezza, stessa direzione e stesso verso**. Si chiama **vettore** la famiglia formata da tutti i segmenti orientati tra di loro equivalenti.

Un vettore particolare è il vettore nullo $\underline{v} = \underline{0}$ ed è chiamato **vettore nullo**. E' l'unico vettore ad avere modulo 0.

1.1 Somma di vettori geometrici

Dati due vettori \underline{v} e \underline{u} allora la loro somma è il vettore seguente:



Per trovare la somma di due vettori si può utilizzare o la regola del parallelogramma, o la regola punto-coda.

1.2 Prodotto di un vettore per uno scalare

Consideriamo $t \in \mathbb{R}$ e $\vec{v} \in E$. Allora sappiamo che se $t = 0$ oppure se $\vec{v} = \vec{0}$, allora l'operazione

$$t \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad (1.1)$$

altrimenti vale che

$$t \cdot \vec{v} = \vec{p} \quad (1.2)$$

con $|\vec{p}| = t \cdot |\vec{v}|$, ovvero \vec{p} è un vettore con direzione identica a \vec{v} e verso identico a \vec{v} se $t > 0$, altrimenti l'opposto.

I vettori \vec{v} e $t\vec{v}$ sono paralleli. In generale: "due vettori di cui uno non sia il vettore nullo sono paralleli se e solo se $\exists t \in \mathbb{R} : \vec{u} = t\vec{v}$ ". Inoltre $t = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$. Il segno di t dipende se i vettori sono discordi.

1.3 Spazio Vettoriale

Definizione "Un insieme V si dice che è uno spazio vettoriale se sono definite in V due operazioni: somma e prodotto per uno scalare. La somma di due elementi di V corrisponde a un terzo elemento di V , il prodotto per uno scalare $t \in \mathbb{R}$ e \vec{v} con $t \cdot \vec{v} \in V$ soddisfa le seguenti proprietà:"

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. $\forall \vec{u} \in V, \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$
5. $\forall \vec{u} \in V, t \in \mathbb{R}, t(\vec{u} + \vec{v}) = t\vec{u} + t\vec{v}$
6. $(t + s)\vec{u} = t\vec{u} + s\vec{u}$
7. $ts\vec{u} = t(s\vec{u})$
8. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Se valgono queste proprietà, allora V è uno spazio vettoriale.

1.3.1 \mathbb{R}^n

L'insieme \mathbb{R}^n è l'insieme formato dalle n-uple coordinate di numeri reali.

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Dati due elementi \vec{x} e \vec{y} di \mathbb{R}^n si vuole definire l'operazione somma:

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

mentre il prodotto con $t \in \mathbb{R}$:

$$t\vec{x} = (tx_1, tx_2, \dots, tx_n)$$

Dunque \mathbb{R}^n è **uno spazio vettoriale perchè valgono le 8 proprietà che definiscono uno spazio vettoriale**. Nei casi particolari in cui $n = 1, n = 2, n = 3$ è presente un'interpretazione geometrica dello spazio vettoriale. In particolare si afferma che **lo spazio vettoriale dei vettori nel piano si identifica in \mathbb{R}^2** . Analogamente lo spazio con \mathbb{R}^3 .

1.4 Spazi vettoriali astratti

Esistono degli spazi vettoriali che non hanno un'interpretazione geometria, tuttavia esistono. Chiamiamo con F l'insieme delle funzioni reali di variabile reale, cioè le funzioni del tipo $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. La somma di due elementi di F è definita come:

$$f, g \in F, f + g \in F, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

mentre il prodotto con uno scalare è definito come:

$$c \cdot f \in F, c(f)(x) = cf(x)$$

Di conseguenza **F è uno spazio vettoriale rispetto queste operazioni e i suoi elementi sono vettori**. Dunque con il termine vettore si intende un elemento di uno spazio vettoriale.

Un altro esempio di spazio vettoriale astratto è l'insieme $\mathbb{R}[x]$ come insieme dei polinomi di variabile x a coefficienti reali è uno spazio vettoriale rispetto alla somma e al prodotto con uno scalare.

1.5 Combinazione lineare di vettori

Dato uno spazio vettoriale V fissati i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ e fissati $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ scalari, allora si chiama **combinazione lineare di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ con coefficienti c_1, c_2, \dots, c_k il vettore**

$$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_k \vec{v}_k \quad (1.3)$$

Generalizzazione in \mathbb{R}^n Ogni vettore di \mathbb{R}^n si può scrivere come combinazione lineare dei vettori fondamentali con coefficienti:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i \quad (1.4)$$

dove i vettori fondamentali sono:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$$

...

$$\vec{e}_n = (0, 0, 0, 0, \dots, 1)$$

Inoltre il vettore nullo è sempre combinazione lineare di una qualunque combinazione di vettori.

1.6 Sottospazio Vettoriale

Definisco W come spazio vettoriale, e $W \subseteq V, W \neq \emptyset$. W è uno spazio vettoriale di V se:

- $\forall \vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W, \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$ ovvero W è chiuso rispetto la somma;
- $\forall t \in \mathbb{R}, \forall \vec{w} \in W, t \cdot \vec{w} \in W$, ovvero W è chiuso rispetto il prodotto per uno scalare.

W è un sottospazio vettoriale di V se è uno spazio vettoriale.

La condizione necessaria affinché W sia un sottospazio vettoriale di V è che $\vec{0} \in W$.

Consideriamo $\vec{w} \in W, t = 0$. Se $t\vec{w} \in W$, allora per la proprietà ***** $\vec{0} \in W$.

Dimostrazione $0 \cdot w = 0$

$$\begin{aligned}w + 0w &= w \\w - w + 0w &= w - w \\0 + 0w &= 0 \\0w &= 0\end{aligned}$$

Se V è uno spazio vettoriale, allora il più piccolo sottospazio vettoriale è quello il cui elemento è esclusivamente il vettore nullo. Mentre il sottospazio vettoriale più grande è quello che coincide con V . Questi sottospazi sono chiamati **banali**.

Esempi I sottospazi di \mathbb{R}^3 sono: \mathbb{R}^3 , $(0, 0, 0)$, i piani per l'origine, le rette per l'origine. I sottospazi di \mathbb{R}^2 sono \mathbb{R}^2 , $(0, 0)$ e le rette passanti per l'origine.

Se consideriamo lo spazio vettoriale dei polinomi $\mathbb{R}[x]$, lo spazio vettoriale dei polinomi con grado minore o uguale a n è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$. Un polinomio di quinto grado sommato ad un altro polinomio di quinto grado, è sempre di quinto grado. Un polinomio di quinto grado moltiplicato per un numero è un polinomio di quinto grado.

Anche il sottoinsieme delle funzioni reali di variabile reale che appartengono a C^1 è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle funzioni reali di variabile reale:

$$\begin{aligned}f, g \in C^1(\mathbb{R}), f + g &\in C^1 \\c \in \mathbb{R}, f \in C^1(\mathbb{R}), cf &\in C^1\end{aligned}$$

ovvero C^1 è chiuso rispetto le operazioni di somma e prodotto con uno scalare.

1.7 Sottospazio generato da k vettori

Dato uno spazio vettoriale V e k vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ qual è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene i vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$?

Per semplicità consideriamo $V = \mathbb{R}^3$ con e i vettori

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (1, 0, 0) \\ \vec{v}_2 &= (0, 1, 0) \\ \vec{v}_3 &= (1, 1, 0)\end{aligned}$$

Il sottospazio vettoriale di V in questo caso è il piano xy . Osserviamo che il sottospazio vettoriale di V deve essere uno spazio vettoriale, questo deve essere **chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto**. Quindi dati k vettori di V deve essere contenuto nel suo sottospazio vettoriale:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k \quad (1.5)$$

ovvero il sottospazio vettoriale di V deve contenere **tutte le combinazioni lineari dei vettori** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.

Definizione 1.7.1 (Sottospazio vettoriale). Dato uno spazio vettoriale V e i suoi k elementi, il suo sottospazio vettoriale si chiama W ed è l'insieme di tutte le combinazioni lineari dei k elementi di V . Ed è il più piccolo sottospazio di V .

Dimostrazione chiuso rispetto la somma Sia W sottospazio vettoriale di V . Presi due elementi di W , \vec{w}_1, \vec{w}_2 combinazioni lineari dei k elementi di V , definiti nel seguente modo:

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 &= c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k \\ \vec{w}_2 &= d_1\vec{v}_1 + \dots + d_k\vec{v}_k\end{aligned}$$

poichè valgono la proprietà commutativa e distributiva si ha:

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (c_1 + d_1)\vec{v}_1 + \dots + (c_k + d_k)\vec{v}_k$$

allora W è chiuso rispetto la somma. Prende il nome di **Span**($\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$) il sottospazio generato dai vettori $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.

$$Span(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) = \{\vec{v} \in V : \vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_k\vec{v}_k\}$$

Esiste un numero minimo di vettori necessario affinché siano generatori di uno spazio vettoriale.

1.8 Dipendenza e Indipendenza Lineare

Sia V uno spazio vettoriale con $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$.

Teorema 1. La famiglia di vettori $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ è **linearmente indipendente** se uno dei vettori della famiglia è combinazione lineare degli altri. Nel caso opposto si dice che la famiglia di vettori è **linearmente indipendente**.

Esempio con \mathbb{R}^3 Consideriamo $V = \mathbb{R}^3$, con

$$\vec{w}_1 = (1, 0, -1) \quad (1.6)$$

$$\vec{w}_2 = (0, 1, -1) \quad (1.7)$$

$$\vec{w}_3 = (1, 1, -2) \quad (1.8)$$

Allora la famiglia di vettore $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ è linearmente indipendente, in quanto \vec{w}_3 è combinazione lineare degli altri due.

$$\begin{aligned} \vec{w}_3 = (1, 1, -2) &= c_1(1, 0, -1) + c_2(0, 1, -1) \\ &= (c_1, c_2, -c_1 - c_2) \\ c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1 \\ \vec{w}_3 &= 1 \cdot \vec{w}_1 + 1 \cdot \vec{w}_2 \end{aligned}$$

Esempio con i vettori unitari e_n Consideriamo i vettori $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ e verifichiamo che siano **linearmente indipendenti**. Si vede subito come per esempio non esista $c \in \mathbb{R}$ per cui \vec{e}_1 sia combinazione lineare degli altri vettori, in particolare per cui $c \cdot 0 = 1$. Vale per tutte le n-uple di \mathbb{R}^n .

Quando una famiglia di vettori è dipendente indipendente

- Se una famiglia di vettori contiene $\vec{0}$ allora è linearmente dipendente;
- Se una famiglia di vettori linearmente dipendenti aggiunge un qualunque vettore è ancora linearmente dipendente;
- Se ad una famiglia di vettori linearmente indipendente tolgo un vettore ottengo ancora una famiglia linearmente indipendente;

L'ultimo punto perchè consideriamo $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ linearmente indipendente allora anche $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{k-1}$ è indipendente, oppure andrebbe contro il secondo principio se fosse dipendente.

Definizione Equivalente La definizione di dipendenza lineare funziona solamente quando si hanno almeno due vettori. Ovvero dati \vec{v}_1, \vec{v}_2 . Questi sono linearmente dipendenti se

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= c\vec{v}_2 \\ \vec{v}_2 &= d\vec{v}_1 \end{aligned}$$

Per esempio se fossimo in \mathbb{R}^3 si parla di vettori paralleli. Tuttavia è **impossibile applicare la definizione se la famiglia è costituita da un solo vettore**. Dunque ecco una definizione equivalente: " $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ sono linearmente dipendenti se \exists una loro combinazione lineare uguale al vettore nullo con i coefficienti non tutti nulli".

Per esempio se consideriamo la famiglia di vettori $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ definiti nell'equazione 1.6 questi sono linearmente dipendenti perchè

$$\vec{w}_1 + \vec{w}_2 - \vec{w}_3 = \vec{0}$$

e questa è una combinazione lineare il cui risultato è il vettore nullo. L'esempio classico è con $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ in quanto non esiste una loro combinazione lineare uguale al vettore nullo con almeno un coefficiente diverso da zero.

Casi particolari Se esiste un solo vettore $\vec{v} \in V, \exists c \neq 0 :$

$$c \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

allora si ha che $\vec{v} = \vec{0}$ e V è **linearmente dipendente**. Altrimenti se $\vec{v} \neq 0$ sarebbe linearmente indipendente.

Capitolo 2

Basi e dimensioni

Definizione 2.0.1 (Base di uno spazio vettoriale). Sia V uno spazio vettoriale qualsiasi con $a = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ dove a è una famiglia di vettori di V . Allora a è una base di V se

1. $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) = V$ cioè la famiglia a costituisce i generatori di V , oppure ogni vettore di V è combinazione lineare di $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$;
2. la famiglia a è linearmente indipendente;

Per esempio la base di \mathbb{R}^n è $a = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$. Se invece consideriamo \mathbb{R}^3 oltre alla base canonica un'altra base può essere data da vettori **non necessariamente perpendicolari tra loro**. L'importante è che $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \mathbb{R}^3$ e che i tre vettori **siano linearmente indipendenti**, come vuole la definizione. Nel caso di \mathbb{R}^3 i tre vettori non devono essere tutti e tre appartenenti allo stesso piano.

Esempio $V = \mathbb{R}_n[x]$ Consideriamo la famiglia di vettori

$$a = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

in cui a è la base canonica di V . Nel caso di questo spazio vettoriale si avrà:

$$\forall p(x) \in V, p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

dunque ogni elemento di V può essere riscritto come combinazione lineare di a :

$$\begin{aligned} p(x) &= 1a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \\ \rightarrow \text{span}(1, x, x^2, \dots, x^n) &= \mathbb{R}_n[x] \end{aligned}$$

La prima richiesta affinché a sia una base di V è verificata. Ora bisogna verificare che i vettori di a siano **linearmente indipendenti**.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n &= 0 \\ a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n &= 0 + 0x + \dots + 0x^n \end{aligned}$$

Affinchè esista una combinazione lineare uguale al vettore nullo tutti i coefficienti devono essere uguale a zero : **a è una famiglia di vettori linearmente indipendenti.**

Esempio $V = \mathbb{R}[x]$ In questo caso V **non ha una base**, in quanto **non esiste una combinazione lineare di k vettori finiti che è uguale a tutti i polinomi con grado k .**

In generale se

$$\begin{aligned} \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) &= V \\ \max[\text{grp}_1, \text{grp}_2, \dots, \text{grp}_k] &= N \end{aligned}$$

se $p \in V$ ha un grado maggiore di N , p **non è combinazione lineare di** $(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n)$.

Teorema 2 (Numero di vettori di una base). Se uno spazio vettoriale V è **finitamente generato** (cioè è lo *span* di un numero finito di vettori) allora ammette una base, e ogni base di V è formato dallo stesso numero di vettori.

Esempi La base di \mathbb{R}^n è formata da n vettori, perchè la base canonica è formata da n vettori. Mentre lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_n[x]$ la base canonica è formata da $n + 1$ vettori, quindi ogni base dovrà avere $n + 1$ vettori.

2.1 Dimensioni

Il numero di vettori di una base si chiama **dimensione** di uno spazio vettoriale.

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{R}^n &= n \\ \dim \mathbb{R}_n[x] &= n + 1 \end{aligned}$$

Nel caso in cui $V = 0$ la sua dimensione è 0 per convenienza, in quanto non esiste una base. Se W è un sottospazio vettoriale di V , $\dim V = n$, allora:

$$0 \leq \dim W \leq \dim V = n$$

Teorema 3 (Massimo numero di vettori linearmente indipendenti). Se $\dim V = n$, n è il massimo numero di vettori di V **linearmente indipendenti**.

Preso $m > n$ e $a = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ dove a è una famiglia di vettori di V , $\dim V = n$ allora a è **linearmente dipendente**. Inoltre n è il numero minimo di vettori che generano V :

$$m < n, \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_m) \neq V$$

Infine, presi n vettori di V **linearmente indipendenti**, essi formano una **base di V** , con $\dim V = n$.

Per esempio se consideriamo $V = \mathbb{R}^3$ e prendiamo 4 vettori, questi **saranno linearmente dipendenti**. Presi invece 2 vettori qualsiasi allora di sicuro **non sono generatori di V** , perchè anche se fossero linearmente indipendenti sono generatori di un piano, se fossero linearmente dipendenti invece generano una retta. Infine, presi tre vettori linearmente indipendenti questi formano una base di \mathbb{R}^3 .

2.2 Coordinate di un vettore

Solitamente nel piano noi scegliamo di utilizzare la base canonica di \mathbb{R}^2 , quindi dato un punto P di coordinate (x, y) , il vettore P avrà coordinate

$$P = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

tuttavia è possibile stabilire basi non canoniche in qualunque spazio vettoriale.

Sia V uno spazio vettoriale e a una famiglia di vettori $a = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ che sia base di V . Preso un qualunque vettori di V dunque si ha:

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n \quad (2.1)$$

cioè è combinazione lineare della base di V . Inoltre i coefficienti di \vec{v} (a_1, a_2, \dots, a_n) sono chiamati **coordinate di \vec{v} rispetto la base a** . Vale che: **se i generatori sono linearmente indipendenti le coordinate di un vettore sono uniche**. semplicemente perchè

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n = d_1\vec{v}_1 + d_2\vec{v}_2 + \dots + d_n\vec{v}_n$$

e affinchè sia valida questa uguaglianza allora i coefficienti devono essere gli stessi, cioè a **ciascun vettore è associata una n-upla di coordinate**.

Capitolo 3

Proprietà di \mathbb{R}^n

E' possibile definire in \mathbb{R}^n il **prodotto scalare**. Dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, il prodotto scalare tra i due vettori è definito come:

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \quad (3.1)$$

Valgono la proprietà commutativa, distributiva e altre:

1. $(x, y) = (y, x)$;
2. $(tx, y) = t(x, y, t \in \mathbb{R})$;
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
4. $(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

E' definito modulo di x come:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (3.2)$$

dato che $(x, x) = x^2$.

Inoltre il prodotto scalare tra vettori in fisica è definito come

$$(x, y) = |x||y| \cos \theta$$

tuttavia **questa definizione non è valida in \mathbb{R}^n perchè l'angolo fuori dalla terza dimensione perde di significato geometrico**. Se i vettori sono ortogonali il prodotto scalare è nullo.

3.1 Generalizzazione del Teorema di Pitagora

Se due vettori sono ortogonali, allora la norma

$$|x^2 + y^2| = |x|^2 + |y|^2 \quad (3.3)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x + y) + (y, x + y) \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \\ &= |x|^2 + 0 + 0 + |y|^2 \end{aligned}$$

Proprietà della Norma

1. $|x| \geq 0$. $|x| = 0$ se e solo se $\vec{x} = \vec{0}$;
2. $|tx| = |t||x|, t \in \mathbb{R}$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (disuguaglianza triangolare);

3.2 Basi di \mathbb{R}^n

Si definisce base **ortogonale** di \mathbb{R}^n una base **in cui i vettori sono due a due ortogonali**.

Una base si definisce **ortonormale** una base ortogonale in cui tutti i vettori hanno norma 1 (sono dei versori). La base canonica di \mathbb{R}^n è **ortonormale**.

Le basi ortonormali sono comode perchè si possono calcolare le coordinate di un vettore attraverso il prodotto scalare.

Sia $b = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base ortonormale di \mathbb{R}^n , allora un vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, allora

$$\begin{aligned} (\vec{v}, \vec{v}_1) &= (c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n, \vec{v}_1) \\ &= c_1(\vec{v}_1, \vec{v}_1) + \dots + c_n(\vec{v}_n, \vec{v}_1) \\ &= c_1(\vec{v}, \vec{v}_1) = c_1|\vec{v}_1|^2 \\ &\rightarrow c_1 = \frac{(\vec{v}, \vec{v}_1)}{|\vec{v}_1|^2} \end{aligned}$$

Se la base fosse ortonormale: $c_i = (\vec{v}, \vec{v}_i)$.

Proiezione di un vettore La proiezione di un vettore \vec{v} lungo una retta r definita dal versore \vec{u}_r è definita come:

$$P_u(\vec{v}) = |\vec{v}| \cos \alpha \quad (3.4)$$

e ha direzione di \vec{u}_r e verso

$$\frac{(\vec{u}_r, \vec{u}_r)}{|\vec{v}|^2}$$

inoltre il vettore $\vec{v} - P_u(\vec{v})$ è **perpendicolare alla retta r** .

Trovare una base ortonormale Denotiamo

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$$

Il primo metodo consiste nello scegliere tre vettori di W in modo che non siano paralleli, che abbiano norma unitaria, e che il loro prodotto scalare sia nullo.

Il secondo metodo consiste nel prendere un vettore $\vec{v}_1 = (1, 1, 3)$ e un generico vettore $\vec{v} = (x, y, x + 2y)$. Il loro prodotto scalare **deve essere nullo affinché la base sia ortonormale**:

$$(\vec{v}, \vec{v}_1) = 4x + 7y = 0$$

Scelgo tra gli infiniti x e y una coppia, per esempio $x = -7, y = 4$. Si ha dunque:

$$\vec{v} = (-7, 4, 1)$$

Infine devo solo normalizzare.

3.3 Sottospazio ortogonale

In \mathbb{R}^n consideriamo un sottospazio W . Il sottospazio vettoriale formato dagli elementi \mathbb{R}^n che sono ortogonali a tutti gli elementi di W è definito come

$$W : \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n : (\vec{v}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{w} \in W\} \quad (3.5)$$

Se $W = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}$, $W_p = r = \text{span}(1, 2, -1)$.

Esercizio In \mathbb{R}^n consideriamo $W = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$. Se \vec{v}_k è combinazione lineare degli altri, cioè i generatori non sono linearmente indipendenti allora è vero che:

$$W = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{k-1})$$

Capitolo 4

Matrici

Una matrice è una tabella formata da m righe e n colonne.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

cioè ogni riga è una n -upla di numeri, e ogni riga è un elemento di \mathbb{R}^n . L'insieme delle matrici $m \times n$ è uno spazio vettoriale rispetto a somma tra due matrici e prodotto per uno scalare.

- Somma tra due matrici:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \dots & & \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Prodotto per uno scalare:

$$\begin{aligned} & t \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ta_{11} & \dots & ta_{1n} \\ \dots & & \\ ta_{m1} & \dots & ta_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Base canonica di $M(m, n)$ La base canonica di M è l'insieme delle matrici

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ E_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 \\ \dots & & \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ &\dots \\ E_n &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e la dimensione di $\dim M(m, n) = m \cdot n$.

4.1 Proprietà delle matrici

Una matrice $A_{m \times m}$ si dice quadrata di ordine m .

Una matrice quadrata di ordine m è detta **triangolare superiore** se gli elementi $a_{ij} = 0, i > j$.

Una matrice quadrata di ordine m è detta **matrice diagonale** se tutti gli elementi $a_{ij} = 0, i \neq j$.

Sia A una matrice di m righe e n colonne. La matrice trasposta A^t di n righe e m colonne se a_{ij} di A^t è l'elemento a_{ji} di A . Nel caso in cui $A = A^t$ allora:

1. A deve essere quadrata;
2. deve essere **simmetrica** rispetto la diagonale principale;
3. $a_{ij} = a_{ji}$;

4.2 Prodotto righe per colonne di due matrici

Siano $A_{m \times n}$ e $B_{n \times k}$ allora la matrice AB è una matrice $m \times k$. L'elemento in posizione ij di AB è il prodotto scalare tra la riga i di A e la colonna j di B .

$$\begin{aligned} a_i &= \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\} \\ b_i &= \{b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}\} \\ \rightarrow a_i b_j &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \end{aligned}$$

Proprietà del prodotto tra due matrici

1. $(AB) \cdot C = A \cdot (bC)$ **associativa**
2. $A(tB) = t(AB)$ **omogeneità**
3. $A(B + C) = AB + AC$ **distributiva verso destra**
4. $(A + B)C = AC + BC$ **distributiva verso sinistra**
5. $(AB)^t = B^t \cdot A^t$
6. **non è commutativo**

Prodotto tra due vettori di \mathbb{R}^n Dati due vettori definiti come:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= n \times 1 \\ \vec{y} &= 1 \times n \end{aligned}$$

è possibile scriverli come vettori riga o colonna, nella loro forma matriciale:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \\ \vec{y} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e il prodotto **righe per colonne** è definito come:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & \dots & & \\ \dots & & & \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

e il prodotto **scalare** è definito come:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (4.3)$$

Ovviamente per passare dal vettore colonna al vettore riga bisogna fare la trasposta.

4.3 Prodotto matrice per vettore

Siano dati una matrice $A_{m \times n}$ e $\vec{x}_{n \times 1}$. Allora il prodotto $A\vec{x}$ è un vettore $m \times 1$ come definito dal prodotto righe per colonne:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A \cdot \vec{x} = A(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n) = \quad (4.4)$$

$$A(x_1\vec{e}_1) + A(x_2\vec{e}_2) + \dots A(x_n\vec{e}_n) = \quad (4.5)$$

$$x_1A\vec{e}_1 + x_2A\vec{e}_2 + \dots + x_nA\vec{e}_n \quad (4.6)$$

possiamo definire il prodotto tra la matrice A e i vettori canonici:

$$A\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \quad (4.7)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = \vec{a}^1 \quad (4.8)$$

dove \vec{a}^1 è la prima colonna della matrice A . Di conseguenza

$$A \cdot \vec{x} = x_1\vec{a}^1 + x_2\vec{a}^2 + \dots + x_n\vec{a}^n \quad (4.9)$$

ovvero $A\vec{x}$ è la combinazione lineare dei vettori colonna della matrice A con coefficienti le componenti del vettore \vec{x} .

Elemento neutro del prodotto L'elemento neutro del prodotto è definito esclusivamente per matrici quadrate

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

ovvero una matrice con la diagonale principale uguale a 1 e il resto pari a zero. Sia A una matrice qualsiasi, allora

$$I \cdot A = A \cdot I$$

Una matrice è invertibile se esiste una matrice $B_{n \times m}$ tale che $AB = BA = I$, e B è l'inversa di A . La matrice nulla non è invertibile, e non tutte le matrici sono invertibili.

Capitolo 5

Determinante di una matrice

Sia A una matrice $n \times n$, con $n = 1$: $A = [a]$. Allora:

$$\det A = \det[a] = a \quad (5.1)$$

Per definire il determinante di una matrice si procede in maniera ricorsiva. Supponendo di conoscere il determinante di una matrice di un elemento allora lo possiamo definire per una matrice di ordine n .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Cancellando alcune righe e/o colonne di A si ottiene una **sotto-matrice** di A . Se cancello lo stesso numero di righe e colonne la sotto-matrice è quadrata. Cancellando la prima riga e colonna di A si ottiene la sotto-matrice M_{11} :

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \\ a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Si chiama **complemento algebrico dell'elemento che compare in posizione i,j della matrice A , chiamato A_{ij}**

$$A = (-1)^{i+j} \det M_{ij} \quad (5.3)$$

per esempio:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^2 \det M_{11} \\ A_{12} &= (-1)^3 \det M_{12} \end{aligned}$$

allora si definisce il determinante di A :

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} \quad (5.4)$$

cioè la somma dei prodotti tra gli elementi della prima riga per i loro complementi algebrici.

5.1 Teoremi di Laplace

Teorema 4 (I Teorema di Laplace). La somma dei prodotti degli elementi di una qualunque riga/ colonna di A per i coefficienti algebrici **è sempre uguale al determinante di A** .

Teorema 5 (II Teorema di Laplace). La somma dei prodotti degli elementi di una riga/colonna di A per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga/colonna **è uguale a 0**.

5.2 Proprietà del determinante

Sia A $n \times n$ una matrice quadrata qualsiasi. Allora valgono le seguenti proprietà:

1. $\det A = \det(A^t)$;
2. Se una riga/colonna di A è nulla, allora $\det A = 0$;
3. Se si **scambiano due righe o due colonne** di A il determinante **cambia di segno**;
4. Se 2 righe o colonne di A sono uguali, allora il determinante di A è **nullo**;
5. Se si moltiplica una colonna o una riga di A per uno scalare, allora

$$\det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ t\vec{a}_2 \\ \dots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} = t \cdot \det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \dots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

Se moltiplico tutta la matrice per uno scalare allora:

$$\det(tA) = t^n \det A$$

6. Se due righe di A sono **proporzionali** allora il determinante è **nullo**;
 7. Se una riga o colonna è somma di due vettori allora

$$\det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{b} + \vec{c} \\ \dots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{b} \\ \dots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{c} \\ \dots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix}$$

8. Se una riga/colonna è combinazione lineare delle altre righe/colonne, allora il determinante di A è **nullo**

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \dots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} \\ \vec{a}_1 = c_2 \vec{a}_2 + \dots + c_n \vec{a}_n \\ \rightarrow \det A = 0$$

9.

Teorema 6 (Teorema di Binet). Siano A e B due matrici quadrate entrambe $n \times n$. Allora:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B \quad (5.5)$$

10. **Il determinante della matrice identità è uguale a 1 ;**

11. Sia D una matrice del tipo

$$D = \begin{bmatrix} t_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & t_n \end{bmatrix}$$

$$\text{allora } \det D = t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_n$$

Torniamo in particolare alla proprietà numero 8 . Questa proprietà vale per n vettori in \mathbb{R}^n . I vettori $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ sono **linearmente indipendenti** se

$$\det \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \\ \dots \\ \vec{x}_n \end{bmatrix} = \det [\vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \quad \dots \quad \vec{x}_n] = 0 \quad (5.6)$$

5.3 Matrice Inversa di una matrice quadrata

Data una matrice quadrata $An \times n$. Per definizione A è invertibile se esiste B per cui $AB = I$. Si dimostra che A è **invertibile se e solo se** $\det A \neq 0$. Per la dimostrazione utilizziamo il Teorema di Binet, ovvero

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = \det I = 1$$

di conseguenza $\det A$ **non può essere nullo**. E' una **condizione necessaria e sufficiente**.

5.3.1 Matrice dei complementi algebrici e matrice inversa

Sia A una matrice quadrata del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Allora la matrice dei complementi algebrici sarà

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Si chiama invece **matrice aggiunta di A** la matrice trasposta di A^* :

$$(A^*)^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Allora si definisce dunque la matrice inversa di A come:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^t \quad (5.7)$$

Teorema 7 (Unicità della matrice inversa). Se A è invertibile, cioè $\det A \neq 0$, allora la sua inversa è **unica**.

La dimostrazione è molto semplice. Siano B e C due inverse di A **distinte**.

$$C(AB) = CI$$

$$(CA)B = C$$

$$IB = C$$

$$B = C, \text{ } \nexists$$



Teorema 8 (Invertibilità del prodotto). Siano A e B due matrici $n \times n$, allora il prodotto $A \cdot B$ è invertibile se e solo se A e B sono invertibili e

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1} \quad (5.8)$$

Infine si definisce una matrice A **singolare** se il suo determinante è nullo, altrimenti è detta **non singolare**.

5.4 Rango di una matrice

Sia data la famiglia di vettori $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$ e sia $W = \text{span}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$. W è sottospazio di \mathbb{R}^n . Allora $W = c_1\vec{x}_1, c_2\vec{x}_2, \dots, c_n\vec{x}_n$ e la dimensione di W è definita come $\dim W$ ed è **il massimo numero di vettori linearmente indipendenti di W** . Questo risultato è importante e deve essere tenuto ben a mente in questa sezione.

Sia A una matrice $m \times n$ e lo spazio riga della matrice è chiamato $\text{Row}(A)$, definito come:

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \dots \\ \vec{a}_m \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$\text{Row}(A) = \text{span}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m) \quad (5.10)$$

e inoltre $\text{Row}(A)$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n . Si definisce rango di A $r(A)$ come

$$r(A) = \dim[\text{Row}(A)] \quad (5.11)$$

analogamente si può definire il sottospazio $\text{Col}(A)$ analogo a $\text{Row}(A)$ ma per le colonne di A .

$$\text{Col}(A) = \text{span}(\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^n) \quad (5.12)$$

5.4.1 Calcolo del rango

Primo Metodo Data una matrice A qualsiasi allora $r(A) = r$ se esiste una sotto-matrice quadrata di A di ordine r **non singolare** e se tutte le sotto-matrici quadrate di A di ordine $r + 1$ sono singolari.

Riduzione a scala Data una matrice A qualsiasi, questa la riduciamo a scala e chiamiamo S la sua matrice ridotta. Allora

$$r(A) = \dim[\text{Row}(A)] = \dim[\text{Row}(S)] \quad (5.13)$$

Ovvero $r(A)$ equivale al numero di righe di S non nulle, cioè al numero di pivot. Vale la seguente proprietà:

$$\dim[\text{Row}(A)] = \dim[\text{Col}(A)] \quad (5.14)$$

Teorema 9. Sia A una matrice $m \times n$. Allora il **massimo numero di righe linearmente indipendenti coincide con il massimo numero di colonne linearmente indipendenti**.

Un'osservazione molto importante è che data una matrice, e la sua riduzione a scala, **lo spazio riga rimane inalterato**, ma **lo spazio colonna viene alterato, anche se viene mantenuta la dimensione**.

Un'altra osservazione è che **una matrice quadrata ha rango n se $\det \neq 0$** .

Capitolo 6

Applicazioni lineari

Un'applicazione lineare è una delle funzioni più semplici (dopo quelle costanti) tra spazi vettoriali. Siano V e W due spazi vettoriali. Allora

$$L : V \rightarrow W$$

è lineare se è additiva ed è omogenea:

- (Additività) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$, allora $L(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = L(\vec{v}_1) + L(\vec{v}_2)$, ovvero conserva la somma;
- (Omogeneità) $\forall \vec{v} \in V, \forall t \in \mathbb{R}$, allora $L(t\vec{v}) = tL(\vec{v})$, ovvero conserva il prodotto;

Inoltre se L è lineare allora $L(0) = 0$:

$$\begin{aligned} L(0\vec{v}) &= 0L(\vec{v}) \\ L(0) &= 0 \end{aligned}$$



Questa è **una condizione necessaria** ma **non** sufficiente. Infatti prendiamo per esempio $L : x \rightarrow x^2, \sin x$. Il quadrato della somma non conserva la somma dei quadrati, quindi L non è lineare.

Una qualunque applicazione $L(x) = a \cdot x$ è lineare, infatti:

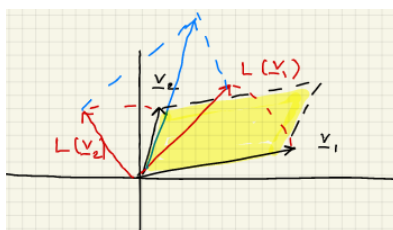
- $L(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = a(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = a\vec{x}_1 + a\vec{x}_2 = L(\vec{x}_1) + L(\vec{x}_2)$
- $L(t\vec{x}) = a(t\vec{x}) = ta(\vec{x}) = tL(\vec{x})$

Un altro esempio è $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (traslazione di un vettore $\vec{u} = (a, b)$).

$$L(x, y) = L(x + a, y + b)$$

In questo caso però $\vec{0}$ **non è contenuto**, dunque **la traslazione non è un'applicazione lineare**. Questo a meno che la traslazione non sia **l'applicazione identica**, cioè $a = 0, b = 0$. L'applicazione identica trasforma uno spazio lineare in un altro. Anche **l'applicazione nulla** è lineare: $L(\vec{x}) = 0$.

Sia $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione che ruota attorno all'origine di un angolo θ in senso antiorario. Anche in questo caso, attraverso un controllo grafico, si verifica che L è lineare omogenea ed additiva.



6.1 Nucleo e Immagine di un'applicazione lineare

Sia $L : V \rightarrow W$ un'applicazione lineare. Si chiama **nucleo** di L

$$\ker L = \{\vec{v} \in V : L(\vec{v}) = 0\} \quad (6.1)$$

e inoltre $\ker L \neq \emptyset$ perchè l'elemento nullo appartiene sempre a $L(\vec{v})$. Inoltre si definisce immagine di L con $\text{im} L = L(V)$, ovvero l'insieme di vettori del codominio che sono immagine di uno o più vettori del dominio.

Teorema 10. Il $\ker L$ è **sottospazio vettoriale di V** mentre $\text{im} L$ è **sottospazio vettoriale di W** .

Ecco la dimostrazione. Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \ker L$. Allora $\ker L$ è chiuso rispetto la somma:

$$\begin{aligned} L(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) &= \\ L(\vec{v}_1) + L(\vec{v}_2) &= \\ 0 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

ed è chiuso rispetto il prodotto per uno scalare:

$$L(t\vec{v}) = t \cdot L(\vec{v})$$

$$t \cdot 0 = 0$$

■

Dimostrazione di imL come sottospazio vettoriale: siano

$$L(\vec{v}_1) = \vec{w}_1$$

$$L(\vec{v}_2) = \vec{w}_2$$

Additività:

$$L(\vec{v}_1) + L(\vec{v}_2) = L(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \in imL$$

Omogeneità:

$$t \cdot L(\vec{v}) = L(t \cdot \vec{v}) \in imL$$

■

Per esempio identifichiamo l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, che associa ad un punto nello spazio la sua proiezione in \mathbb{R}^2 . Il suo $kerL$ sarà l'asse z , mentre imL sarà tutto \mathbb{R}^2 . Questa applicazione **non è iniettiva, ma è suriettiva**. In particolare data una qualsiasi applicazione lineare **se e solo se**

$$kerL = \{\vec{0}\} \quad (6.2)$$

cioè $kerL$ è un sottospazio banale di V . Segue la dimostrazione, dati due vettori \vec{v} e \vec{u} tali che $L(\vec{v}) = L(\vec{u})$. Allora

$$L(\vec{v}) = L(\vec{u})$$

$$L(\vec{v}) - L(\vec{u}) = 0$$

$$\rightarrow L(\vec{v} - \vec{u}) = 0$$

$$\rightarrow \vec{v} - \vec{u} = 0$$

$$\vec{v} = \vec{u}$$

■

Sia $L : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare che ad ogni elemento di V associa una n-upla di coordinate reali, ovvero $L(\vec{v}) = [\vec{v}]_a$. Si avrà:

$$kerL = \{[\vec{v}]_a = 0\}$$

$$\rightarrow \vec{v} = 0\vec{v}_1 + \dots + 0\vec{v}_n$$

cioè il $kerL$ è costituito dall'elemento che scritto come combinazione lineare degli altri elementi, e affinché sia nullo tutti i coefficienti devono essere nulli, quindi l'applicazione **è iniettiva**. Inoltre **è suriettiva** perchè $imL = \mathbb{R}^n$. In questo caso L è **biunivoca** o **isomorfismo**.

6.2 Relazione tra dimensioni di V , $\ker L$, $\operatorname{im} L$

Osserviamo inoltre che L è iniettiva se e solo se $\ker L = 0$, ovvero

$$\dim(\ker L) = 0 = \dim \ker L$$

Allo stesso modo è suriettiva **se e solo se**

$$\dim(\operatorname{im} L) = m = \dim W$$

Teorema 11 (di Nullità più Rango). Se $L : V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare, con $\dim V = n$, allora

$$\dim(\ker L) + \dim(\operatorname{im} L) = \dim(V) = n \quad (6.3)$$

dove $\dim(\ker L)$ è la **nullità** e $\dim(\operatorname{im} L)$ è il **rango**.

6.3 Esempio di funzione lineare $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Nel caso in cui $n = m = 1$, allora $L(x) = a \cdot x$. Invece sia $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, allora $L(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$. Allora si avrà che:

$$\begin{aligned} a &\rightarrow A, m \times n \\ x &\rightarrow \vec{x}, n \times 1 \\ &\rightarrow L(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} = m \times 1 \end{aligned}$$

Questa è un'applicazione lineare perchè gode di additività e omogeneità. Un esempio è il seguente: $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Allora A è una matrice 2×3 .

$$\begin{aligned} L(x, y, z) &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6.4 Teorema di Rappresentazione

Data una matrice $A \in M(m, n)$, allora ad A è associata una funzione $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$L(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} \quad (6.4)$$

Allora L è **una applicazione lineare**. Valgono le seguenti proprietà:

•

$$\ker L = \{\vec{x} \in \mathbb{R} : A\vec{x} = \vec{0}\} = \ker A \quad (6.5)$$

•

$$\operatorname{im} L = L(\mathbb{R}^n) = \{L(\vec{x}) : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} \quad (6.6)$$

$$= \{a\vec{x} : \vec{x} \in \mathbb{R}^n\} \quad (6.7)$$

$$= \{x_1 \vec{a}^1 + x_2 \vec{a}^2 + \dots + x_n \vec{a}^n : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \quad (6.8)$$

dove x_n sono **gli ennesimi elementi di riga** \vec{x} , mentre \vec{a}^n sono le ennesime colonne della matrice A .

•

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{Col} A = \operatorname{span}(\vec{a}^1, \vec{a}^2, \dots, \vec{a}^n) \quad (6.9)$$

$$\rightarrow \dim \operatorname{Im} L = \dim \operatorname{Col} A = r(A) \quad (6.10)$$

Inoltre $\vec{a}^1 = A\vec{e}_1$, ovvero $\vec{a}^1 = L(\vec{e}_1)$. In generale:

$$\vec{a}^1 = A\vec{e}_n \rightarrow L(\vec{e}_n) = A\vec{e}_n \quad (6.11)$$

dunque vale l'ultima proprietà (la precedente ma ritoccata),

•

$$\operatorname{Im} L = \operatorname{span}(L(\vec{e}_1), L(\vec{e}_2), \dots, L(\vec{e}_n)) \quad (6.12)$$

Teorema 12 (Teorema di Rappresentazione , "caso particolare"). Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una qualsiasi funzione. L è **lineare se e solo se** $\exists A \in M(m, n)$ tale che

$$L(\vec{x}) = A\vec{x}, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

inoltre A è **unica e si chiama matrice rappresentativa di L** .

Dimostrazione Se $L(\vec{x}) = A\vec{x}$ è lineare allora:

$$L(x_1 + x_2) = A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$$

e inoltre se L è lineare per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ allora:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \\ \rightarrow L(\vec{x}) &= L(x_1 \vec{e}_1) + L(x_2 \vec{e}_2) + \dots + L(x_n \vec{e}_n) \\ &= x_1 L(\vec{e}_1) + x_2 L(\vec{e}_2) + \dots + x_n L(\vec{e}_n) \end{aligned}$$

dove $L(\vec{e}_1)$ e $L(\vec{e}_n)$ sono m-uple di numeri reali. Sia A la matrice che appartiene a $M(m, n)$ che ha come colonne: $L(\vec{e}_1), \dots, L(\vec{e}_n)$. Allora si ha che, riprendendo l'equazione ?? :

$$L(\vec{x}) = x_1 \vec{a}^1, x_2 \vec{a}^2, \dots, x_n \vec{a}^n \quad (6.13)$$

quindi si arriva alla tesi, cioè esiste una matrice A per cui $L(\vec{x}) = A\vec{x}$, ed è unica per ogni applicazione lineare. Infatti se ci fosse una seconda matrice B tale che $L(\vec{x}) = B\vec{x}$ allora:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= B\vec{x} \\ A\vec{e}_1 &= B\vec{e}_1 \rightarrow \vec{a}^1 = \vec{b}^1 \\ &\rightarrow \vec{a}^n = \vec{b}^n \end{aligned}$$

Dunque A è unica. ■

Osservazione Data una qualsiasi applicazione lineare L , allora $L(\vec{x}) = \vec{y}$. Cioè possiamo riscrivere L come:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

$$= \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{cases} \quad (6.15)$$

L'ultima uguaglianza è chiamata **espressione in coordinate di L** . Si noti che l'espressione in coordinate di L contiene **solamente polinomi di primo grado omogenei**.

Esempio Sia $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con $L(x, y) = (x + y, x - y, xy)$. Allora l'espressione in coordinate di L sarà:

$$\begin{cases} s_1 = x + y \\ s_2 = x - y \\ s_3 = xy \end{cases}$$

L'applicazione dunque **non è lineare** in quanto è presente un termine di grado due.

Esempio Sia $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $L(x, y) = (x + y, x - y, 3y)$. Allora l'espressione in coordinate di L sarà:

$$\begin{cases} s_1 = x + y \\ s_2 = x - y \\ s_3 = 3y \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Esempio Sia $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rotazione attorno all'origine di θ di un vettore. L è lineare e la sua matrice rappresentativa sarà $A \in M(2, 2)$, con $\vec{a}^1 = L(\vec{e}_1)$ e $\vec{a}^2 = L(\vec{e}_2)$. Dunque:

$$L(\vec{e}_1) = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$L(\vec{e}_2) = (\cos(\pi/2 + \theta), \sin(\pi/2 + \theta))$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Ora proviamo ad applicare il Teorema di Nullità più Rango alle applicazioni lineari $L\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Allora per il teorema si ha:

$$\dim \text{Ker} L + \dim \text{Im} L = n$$

tuttavia $\dim \text{Im} L = r(A)$. Dunque L è **suriettiva se e solo se** $r(A) = m$. L è **iniettiva** se e solo se $\dim \text{Ker} L = 0$. Dunque L è **biunivoca se e solo se**

$$\dim \text{Im} L = \dim \mathbb{R}^n \quad (6.16)$$

$$m = n \quad (6.17)$$

Dunque A deve **essere una matrice quadrata con tutte le righe/colonne linearmente indipendenti**, cioè $\det A \neq 0$.

Combinazione Lineare Siano A, B due matrice rappresentative tali che

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{L_A} \mathbb{R}^m$$

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{L_B} \mathbb{R}^k$$

Quindi esiste una matrice C per cui

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{L_C} \mathbb{R}^k$$

$$C \in M(k, n) = B \cdot A$$

6.5 Basi e coordinate

Sia $L : V \rightarrow W$ con $\dim V = n, \dim W = m$. Allora definiamo una base di V e una di W :

$$\begin{aligned} a &= \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \\ b &= \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\} \end{aligned}$$

se un generico vettore $\vec{v} \in V$, allora

$$\vec{v} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n$$

e le coordinate di \vec{v} si indicano come:

$$\vec{x} = [\vec{v}]_a = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.18)$$

mentre per $L(\vec{v})$:

$$\vec{y} = [L(\vec{v})]_b = (y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (6.19)$$

Che relazione c'è tra \vec{x} e \vec{y} ?

Esempio Siano $L : V \rightarrow W, \dim V = 2, \dim W = 3$.

$$\begin{aligned} a &= \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \\ b &= \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\} \\ \rightarrow L(\vec{v}_1) &= 2\vec{w}_1 + \vec{w}_2 - 3\vec{w}_3 \\ L(\vec{v}_2) &= +\vec{w}_2 - \frac{1}{2}\vec{w}_3 \end{aligned}$$

Calcolare $L(\vec{v}) \forall V$ e scrivere le equazioni in coordinate di \mathbb{R} . Allora è vero che:

$$\begin{aligned} L(\vec{v}) &= x_1 L(\vec{v}_1) + x_2 L(\vec{v}_2) \\ &= x_1(2\vec{w}_1 + \vec{w}_2 - 3\vec{w}_3) + x_2(+\vec{w}_2 - \frac{1}{2}\vec{w}_3) \\ &= \vec{w}_1(2x_1) + \vec{w}_2(x_1 + x_2) + \vec{w}_3(-3x_1 - \frac{1}{2}x_2) \\ \rightarrow [L(\vec{v})]_b &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} y_1 = 2x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ y_3 = -3x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases} \\ &\rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6.5.1 Teorema di Rappresentazione, caso generale

Teorema 13 (Teorema di Rappresentazione, caso generale). Siano V e W spazi vettoriali con le rispettive basi a e b .

$$a = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}, \dim V = n$$

$$b = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}, \dim W = m$$

allora L è lineare se e solo se $A \in M(m, n)$, tale che se $\vec{x} = [\vec{v}]_a, \vec{v} \in V$ e $\vec{y} = [L(\vec{v})]_b, L(\vec{v}) \in W$, si ha che:

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

A si chiama matrice rappresentativa di L rispetto la base a di V e rispetto la base b di W . **La matrice A ha come colonne le coordinate dei vettori $L(\vec{v}_1), L(\vec{v}_2), \dots, L(\vec{v}_n)$ rispetto la base b .**

Cambio di Base in \mathbb{R}^n Siano date le due basi a e b :

$$a = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$$

$$b = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$$

Poichè $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ avrà coordinate (x_1, x_2, \dots, x_n) . Inoltre

$$[\vec{v}]_a = \vec{x}, [\vec{v}]_b = \vec{x}'$$

Allora \vec{v} in base b può essere scritto come:

$$\vec{v} = x'_1 \vec{v}_1 + x'_2 \vec{v}_2 + \dots + x'_m \vec{v}_m$$

$$P = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \dots \quad \vec{v}_n]$$

$$\rightarrow \vec{x} = P\vec{x}'$$

con P matrice le cui colonne sono i vettori della base V . Poichè le colonne di P sono linearmente indipendenti allora P è invertibile.

$$\vec{x}' = P^{-1} \cdot \vec{x} \tag{6.20}$$

Teorema 14. Sia $L : V \rightarrow W$ lineare e $a = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ base di V . Fissiamo $b = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ base di W . A è la matrice rappresentativa di L rispetto a e b . Allora: $\text{Im}L = \text{span}(L(\vec{v}_1), \dots, L(\vec{v}_n))$, $\dim \text{Im}L = r(A)$.

Dimostrazione:

$$ImL = \{L(\vec{v}) : \vec{v} \in V\} = \{L(x_1\vec{v}_1 + \dots + x_n\vec{v}_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \quad (6.21)$$

$$= \{x_1L(\vec{v}_1) + \dots + x_nL(\vec{v}_n), x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\} \quad (6.22)$$

$$= span(L(\vec{v}_1), \dots, L(\vec{v}_n)) \quad (6.23)$$

La dimensione dell'immagine equivale al massimo numero di vettori linearmente indipendenti tra $L(\vec{v}_1), \dots, L(\vec{v}_n)$.

Cambi di base in \mathbb{R}^n Sia $V = W = \mathbb{R}^n$. Consideriamo V rispetto la base canonica ϵ e β la base di W . Allora

$$[L(\vec{v})]_\beta = A \cdot [\vec{v}]_\epsilon \quad (6.24)$$

Sia P la matrice di passaggio formata dai vettori colonna della base β . Allora

$$\vec{x} = P\vec{x}' \quad (6.25)$$

$$\vec{x}' = P^{-1}\vec{x} \quad (6.26)$$

Se A è la matrice rappresentativa di una funzione lineare tale che $\vec{y} = A\vec{x}$, e $\vec{y} = P^{-1}\vec{y}'$ e $\vec{x} = P\vec{x}'$. Allora è possibile passare da \vec{x}' a \vec{y}' tramite una matrice B .

$$\vec{x}' = P^{-1}AP\vec{x} \quad (6.27)$$

Teorema 15 (Teorema del cambiamento di base). Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione lineare. Sia ϵ la base canonica di \mathbb{R}^n e sia β un'altra base di \mathbb{R}^n . Sia A la matrice rappresentativa rispetto ad ϵ mentre sia B la matrice rappresentativa di L rispetto a β . Allora:

$$B = P^{-1}AP \quad (6.28)$$

con P matrice di passaggio. Siano $\vec{x}' = [\vec{x}]_\beta$ e $\vec{y}' = [\vec{y}]_\beta$, allora

$$\vec{y}' = B\vec{x}' \quad (6.29)$$

Dimostrazione:

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

$$P\vec{y}' = A(P\vec{x}')$$

$$\vec{y}' = P^{-1}AP\vec{x}'$$

$$\rightarrow B = P^{-1}AP$$



Definizione Due matrici quadrate A e $B \in M(n, n)$ sono **simili** se $\exists P \in M(n, n)$, con P invertibile tale che

$$B = P^{-1}AP \quad (6.30)$$

Se $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare, A matrice rappresentativa di L rispetto la base canonica ε . Si dice che L è **diagonalizzabile** se esiste una base

$$\beta = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$$

rispetto cui la matrice rappresentativa di L è diagonale, cioè sia D la matrice rappresentativa del tipo:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \dots & & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

6.6 Autovettori e Autovalori

Definizione Sia $L : V \rightarrow V$ un'applicazione lineare. Allora preso $\vec{v} \in V$ questo è un **autovettore** di L se $\vec{v} \neq 0$ e se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$L(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad (6.32)$$

e λ si chiama **autovalore dell'autovettore** \vec{v} .

Autovettore di una matrice Sia $A \in M(n, n)$ allora preso $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq \vec{0}$ tale che $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, cioè \vec{x} è un autovettore dell'applicazione lineare:

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, L(\vec{x}) = A\vec{x}$$

Se \vec{v} è un autovettore di una funzione lineare L relativa a un autovalore λ , allora sia $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ uno scalare comunque allora il vettore $t\vec{v}$ è un autovettore di L relativo a λ . Questo perchè

$$\begin{aligned} L(t\vec{v}) &= t \cdot L(\vec{v}) \\ &= t\lambda\vec{v} = \lambda(t\vec{v}) \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$ è un autovalore se $\exists \vec{v} \neq \vec{0}$ tale che

$$L(\vec{v}) = 0\vec{v} = \vec{0}$$

dunque in questo caso $\text{Ker} L \neq \{0\}$, cioè L **non deve essere iniettiva**.

Se λ è un autovalore, si chiama **autospazio** relativo a λ

$$V_\lambda = \{\vec{v} \in V : L(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\} \quad (6.33)$$

e in questo autospazio sono presenti tutti gli autovettori relativi a λ e **anche** $\vec{v} = \vec{0}$ **che non è un autovettore**. V_λ è un sottospazio vettoriale di V , infatti è chiuso rispetto la somma e il prodotto.

Prendiamo come esempio $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $L(x, y, z) = (x, y, 0)$. I vettori $(x, y, 0)$ sono autovettori relativi a $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned} V_{\lambda=1} &= xy \\ \dim V_{\lambda=1} &= 2 \end{aligned}$$

e inoltre $\text{Ker} L = \{(0, 0, t)\}$

Diagonalizzare una funzione lineare Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con A matrice rappresentativa rispetto la base canonica ε . L è diagonalizzabile se esiste una matrice di \mathbb{R}^n tale che

$$\beta = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \dots & & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

L è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale, cioè $D = P^{-1}AP$ con P matrice di passaggio. **Se si costruisce una base di autovettori allora L è diagonalizzabile.**

Primo criterio di diagonalizzabilità Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con L diagonalizzabile se e solo se \exists una base di \mathbb{R}^n formata da autovettori di L .

Dato un vettore di una base β \vec{v}_1 allora deve valere che:

$$L(\vec{v}_1) = \lambda_1 \vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n \quad (6.34)$$

6.7 Sistemi lineari

Un sistema lineare formato da m equazioni e n incognite è così costituito:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (6.35)$$

e la matrice $A = (a_{ij})$ è detta **matrice dei coefficienti**. Il vettore \vec{x} è il vettore delle incognite e \vec{b} è il vettore dei termini noti.

Teorema 16 (Teorema di Rouchè-Capelli). Il teorema di Rouchè-Capelli afferma che il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ è possibile **se e solo se** $r(A) = r(A|\vec{b})$.

Dimostrazione Sia \vec{c} la soluzione del sistema lineare, tale che $A\vec{c} = \vec{b}$. Allora è vero che:

$$A\vec{c} = c_1\vec{a}^1 + c_2\vec{a}^2 + \dots + c_n\vec{a}^n \quad (6.36)$$

ovvero esiste \vec{b} definito in questo modo:

$$\vec{b} = c_1\vec{a}^1 + c_2\vec{a}^2 + \dots + c_n\vec{a}^n \quad (6.37)$$

cioè \vec{b} è combinazione lineare delle colonne della matrice A , cioè $r(A) = r(A|\vec{b})$ perchè \vec{b} è linearmente dipendente dalle colonne di A ■ .

Struttura dell'insieme delle soluzioni Un sistema lineare **omogeneo** è un sistema della forma:

$$A\vec{x} = \vec{0} \quad (6.38)$$

e l'insieme delle soluzioni del sistema è chiamato come $Sol(A|\vec{0})$. Un sistema lineare omogeneo è **sempre possibile**, in quanto per il Teorema di Rouchè-Capelli deve valere la relazione

$$r(A|\vec{0}) = r(A)$$

che è sempre verificata. Un altro modo per cui possiamo vedere l'insieme delle soluzioni del sistema è in questo modo:

$$Sol(A|\vec{0}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R} : A\vec{x} = 0\} \quad (6.39)$$

$$= KerL \quad (6.40)$$

ricordando che $KerL$ è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n in quanto è chiuso rispetto alla somma e al prodotto.

Immaginiamo di avere due soluzioni del sistema omogeneo chiamate \vec{c}, \vec{d} . Allora $\vec{c}, \vec{d} \in \text{Sol}(A|\vec{0})$. Poichè l'insieme delle soluzioni è chiuso rispetto alla somma anche $\vec{c} + \vec{d} \in \text{Sol}(A|\vec{0})$.

6.7.1 Sistema lineare non omogeneo

Un sistema lineare non omogeneo, ovvero **completo** è del tipo:

$$A\vec{x} = \vec{b}, \vec{b} \neq \vec{0} \quad (6.41)$$

Si a \vec{c} una soluzione del sistema completo. Allora è vero che:

$$\text{Sol}(A|\vec{b}) = \vec{c} + \text{Sol}(A|\vec{0}) \quad (6.42)$$

Dimostrazione Consideriamo due soluzioni del sistema completo \vec{c} e \vec{d} . Allora

$$A(\vec{d} - \vec{c}) = A\vec{d} - A\vec{c} = \vec{b} - \vec{b} \quad (6.43)$$

$$\rightarrow (\vec{d} - \vec{c}) \in \text{Sol}(A|\vec{0}) \quad (6.44)$$

$$\rightarrow (\vec{d}) \in \vec{c} + \text{Sol}(A|\vec{0}) \quad (6.45)$$

di conseguenza si ha

$$\text{Sol}(A|\vec{b}) = \vec{c} + \text{Sol}(A|\vec{0}) \quad (6.46)$$

Viceversa invece $\vec{c} + \text{Sol}(A|\vec{0}) \subseteq \text{Sol}(A|\vec{b})$. Infatti sia $\vec{z} \in \text{Sol}(A|\vec{0})$, allora

$$A(\vec{c} + \vec{z}) = A\vec{c} + A\vec{z} = \vec{b} + \vec{0} \quad (6.47)$$

$$\rightarrow \vec{c} + \vec{z} \in \text{Sol}(A|\vec{b}) \quad (6.48)$$

$$\rightarrow \vec{c} + \text{Sol}(A|\vec{0}) \subseteq \text{Sol}(A|\vec{b}) \quad (6.49)$$

$$\blacksquare \quad (6.50)$$

Graficamente si osserva facilmente che $\text{Sol}(A|\vec{b})$ ha tante soluzioni quante $\text{Sol}(A|\vec{0})$, e il sottospazio vettoriale $\text{Sol}(A|\vec{b})$ è una **traslazione** di $\text{Sol}(A|\vec{0})$.

Teorema 17 (Teorema di Cramer). Dato un sistema di n equazioni e n incognite, cioè del tipo $A \in M(n, n)$. Se $\det A \neq 0$ allora $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}$ il sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ ha una sola soluzione \vec{x} .

Dimostrazione De $\det A \neq 0$ allora A è invertibile. Dunque $A\vec{x} = \vec{b}$ è equivalente a $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ con \vec{x} **unica soluzione del sistema** \blacksquare .



6.8 Autovettori e sistemi lineari

Tornando ad autovettori e autovalori è possibile determinarli analiticamente.

Teorema 18. (Come determinare autovettori e autovalori) Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare, con $L(\vec{x}) = A\vec{x}$. $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di L (di A) se e solo se

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (6.51)$$

Dimostrazione λ è un autovalore se $\exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n : L(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. Quindi poichè $L(\vec{x}) = A\vec{x}$ possiamo sommare la matrice $\lambda I\vec{x}$:

$$A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = \vec{0} \quad (6.52)$$

$$(A - \lambda I)(\vec{x}) = \vec{0} \quad (6.53)$$

dunque $(A - \lambda I)(\vec{x})$ è un sistema omogeneo. Affinchè il sistema abbia una soluzione non banale diversa dal vettore nullo

$$\dim \text{Sol}(A|\vec{0}) = n - r(A - \lambda I)$$

dunque **deve essere che** $r(A - \lambda I) < n$, ovvero le n colonne/righe della matrice $A - \lambda I$ **non devono essere tutte linearmente indipendenti** dunque il determinante della matrice deve essere nullo:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (6.54)$$

$$\blacksquare \quad (6.55)$$

Relazione tra molteplicità geometrica ed algebrica Sia λ un autovalore con molteplicità algebrica m e molteplicità geometrica d allora deve essere che

$$1 \leq d \leq m \quad (6.56)$$

Esempio Sia data A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \det(A - \lambda I) = -\lambda(2 - \lambda)^2$$

si ha un polinomio $P(\lambda)$ detto **polinomio caratteristico** a cui è associata un'equazione caratteristica $P(\lambda) = 0$.

$$P(\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$$

dove λ_1 ha molteplicità algebrica 1 e λ_2 ha molteplicità algebrica 2. Gli autovettori relativi a λ_1 saranno $(A - \lambda_1 I)\vec{x} = A\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ 2y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow (x, 0, x), x \neq 0$$

$$V_{\lambda_1} = \{(x, 0, x), x \in \mathbb{R}\}$$

gli autovettori di λ_2 invece:

$$\begin{cases} -x - z = 0 \\ 0 = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow V_{\lambda_2} = \{(x, y, -x), x, y \in \mathbb{R}\}$$

prendiamo dunque un vettore per λ_1 e due per λ_2 :

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 1)$$

$$\vec{v}_2 = (1, 0, -1)$$

$$\vec{v}_3 = (\vec{0}, 1, 0)$$

$$P = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3]$$

$$\rightarrow B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e B è la matrice diagonale di L .

Secondo criterio di diagonalizzabilità Una matrice è diagonalizzabile se la molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori è la stessa, ovvero l'autovalore **deve essere regolare**.

6.9 Proprietà di matrici diagonalizzabili

Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare, con $L(\vec{x}) = A\vec{x}$, allora gli autovalori di L si trovano dall'equazione caratteristica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Teorema 19. Siano A e B simili, cioè hanno lo stesso polinomio caratteristico, quindi **gli stessi autovalori**.

Dimostrazione Se A e B sono simili, allora $B = P^{-1}AP$. Allora è vero che:

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(P^{-1}AP - \lambda I) \\ &= \det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}IP) \\ &= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ &= \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P \\ &= \det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

■

Traccia di una matrice Sia $A \in M(n, n)$, si chiama traccia di A la somma degli elementi della diagonale principale

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \quad (6.57)$$

e vale la proprietà $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(B \cdot A)$. Le due matrici sono **simili hanno la stessa traccia**.

$$\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A) = \text{tr}(B)$$

in particolare A è **diagonalizzabile**, cioè simile ad una matrice diagonale, allora

$$\text{tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \quad (6.58)$$

cioè la somma degli autovalori. Questa proprietà in realtà vale anche per matrici non diagonalizzabili, ovvero matrici i cui autovalori non appartengono a \mathbb{R} , ma al campo dei numeri complessi. cioè autovalori complessi e

coniugati la cui somma è un numero reale. La traccia è utile come controllo per verificare la correttezza degli autovalori.

Se due matrici sono simili allora hanno lo stesso determinante

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A) = \det(B)$$

Se A è **diagonalizzabile** allora

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

cioè equivale al prodotto degli autovalori.

6.10 Applicazioni lineari e matrici ortogonalmente diagonalizzabili

Si definisce una **matrice ortogonale** una matrice quadrata $A \in M(n, n)$ se

$$A^t \cdot A = A \cdot A^t = I \quad (6.59)$$

ovvero

$$A^t = A^{-1} \quad (6.60)$$

Se A è ortogonale allora

$$\begin{aligned} \det(A \cdot A^t) &= \det(A^t \cdot A) \\ &= \det(A^t) \cdot \det(A) \\ &= \det(A)^2 = \det I = 1 \\ &\rightarrow \det(A) = \pm 1 \end{aligned}$$

Inoltre A è ortogonale **se e solo se le sue righe e le sue colonne formano una base ortonormale di \mathbb{R}** . Infatti se A è ortogonale allora per definizione $A \cdot A^t = I$:

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \dots \\ \vec{a}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix} = I$$

il prodotto scalare prima riga e prima colonna sarà:

$$(\vec{a}_1, \vec{a}_1) = 1$$

perchè \vec{a}_1 normalizzato. Invece il prodotto prima riga seconda colonna sarà pari a 0, in quanto vettori ortogonali. Quindi sappiamo che:

1. Le righe di A sono tutte dei **versori**;
2. Le righe sono due a due ortogonali;
3. Sono linearmente indipendenti?

Abbiamo dimostrato precedentemente che se A è ortogonale allora il suo determinante è pari sempre a ± 1 , cioè sempre diverso da zero, dunque tutte le sue righe o colonne sono linearmente indipendenti.

Un esempio di matrice ortonormale è la matrice che rappresenta la rotazione di un angolo θ un qualsiasi vettori in \mathbb{R}^2 . Sia P la matrice rappresentativa, allora:

$$P = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

P può essere scritta in entrambi i modi. Il determinante della prima è uno, della seconda meno uno. Dunque P è una matrice **ortogonalmente diagonalizzabile**.

Sia $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare, con $L(\vec{x}) = A\vec{x}$. Allora A è ortogonalmente diagonalizzabile se esiste una base $\beta = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ rispetto la quale la matrice rappresentativa di L è D , con D matrice diagonale. A e D sono simili, in quanto

$$D = P^{-1}AP$$

con la matrice di passaggio P definita come

$$P = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \dots \quad \vec{v}_n]$$

Vale la seguente proprietà: **se $A \in M(n, n)$ è simmetrica, allora è ortogonalmente diagonalizzabile, in particolare ha n autovalori e sono regolari**, ovvero la loro molteplicità algebrica e geometrica è la stessa. Vale anche l'inversa, se A è ortogonalmente diagonalizzabile allora A è simmetrica.

Dimostrazione Se A è ortogonalmente diagonalizzabile allora:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= D, P^{-1} = P^t \\ P^tAP &= D \\ \rightarrow A &= PDP^{-1} = PDP^t \\ \rightarrow A^t &= (PDP^t)^t = (P^t)^t D^t P^t \\ &= PDP^t = A \\ A^t &= A \end{aligned}$$

■

Nel caso in cui $A^t = A$ allora A è simmetrica. Prende il nome di Teorema Spettrale.

Teorema 20 (Teorema Spettrale). Se $A \in M(n, n)$ è simmetrica, allora è ortogonalmente diagonalizzabile.

E gli autovettori di autovalori distinti sono ortonormali.

Capitolo 7

Forme Quadratiche

Una forma quadratica in \mathbb{R}^2 è un polinomio omogeneo di secondo grado nelle variabili h, k , e si scrive come $Q(h, k)$ (per chiarezza si pensi a h, k come una coppia di coordinate del piano cartesiano).

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2 \quad (7.1)$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

dove A è la matrice associata alla forma quadratica, infatti:

$$\begin{bmatrix} h & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} = ah^2 + 2bhk + ck^2 \quad (7.3)$$

Cioè una forma quadratica in n variabili è **sempre un polinomio omogeneo di secondo grado in variabili h_1, h_2, \dots, h_n , e può essere identificato con la sua matrice associata.**

$$A(\vec{h}) = \vec{h}^t A \vec{h} \quad (7.4)$$

ed A è una matrice di ordine n simmetrica (con \vec{h} ad n variabili).

7.1 Proprietà delle forme quadratiche

1. Tutte le forme quadratiche in corrispondenza del vettore nullo restituiscono il vettore nullo:

$$Q(\vec{0}) = 0 \quad (7.5)$$

2. Se moltiplico \vec{h} per uno scalare, allora

$$Q(t\vec{h}) = t^2 Q(\vec{h}), \forall t \in \mathbb{R} \quad (7.6)$$

3. Se $Q(\vec{h}_1) > 0$ allora tutti i polinomio $Q(t\vec{h}_1) = t^2Q(\vec{h}_1) > 0$ ovviamente per $t \neq 0$.

In modo analogo se $Q(\vec{h}_2) < 0$ allora tutti i polinomi $Q(t\vec{h}_2) = t^2Q(\vec{h}_2) < 0$ con $t \neq 0$.

4. Se $Q(\vec{h}_3) = 0$ allora $\forall t \in \mathbb{R}$ si avrà che $Q(t\vec{h}_3) = t^2Q(\vec{h}_3) = 0$.

7.2 Segno delle forme quadratiche in due variabili

Forma quadratica positiva Si dice che una forma quadratica è positiva se:

- $Q(\vec{h}) \geq 0, \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^2$;
- $Q(\vec{h}) = 0$ se e solo se $\vec{h} = \vec{0}$;

Esempio:

$$Q(h, k) = 3h^2 + 5k^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Forma quadratica negativa Si dice che una forma quadratica è negativa se:

- $Q(\vec{h}) \leq 0, \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^2$;
- $Q(\vec{h}) = 0$ se e solo se $\vec{h} = \vec{0}$;

Forma quadratica semidefinita positiva/negativa Si dice che una forma quadratica è semidefinita positiva se:

- $Q(\vec{h}) \geq 0, \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^2$;
- $\exists \vec{h}_1 \neq \vec{0}$ per cui $Q(\vec{h}_1) = 0$;

Esempio:

$$Q(h, k) = 3h^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Invece è semidefinita negativa se

- $Q(\vec{h}) \leq 0, \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^2$;
- $\exists \vec{h}_1 \neq \vec{0}$ per cui $Q(\vec{h}_1) = 0$;

Forma quadratica indefinita Si dice che una forma quadratica indefinita se esiste un un vettore per cui è positiva e un altro vettore per cui è negativa. Esempio:

$$Q(h, k) = 3h^2 - 5k^2$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Presa una qualsiasi forma quadratica può essere riscritta nella forma:

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2 \quad (7.7)$$

$$= \lambda_1 h^2 + \lambda_2 k^2 \quad (7.8)$$

dove λ_1, λ_2 sono autovalori della matrice associata del polinomio omogeneo.

Teorema 21 (Segno della forma quadratica). • $Q(\vec{h})$ è definita positiva (o negativa) se e solo se tutti gli autovalori di A sono positivi (o negativi);

- $Q(\vec{h})$ è definita semipositiva (o seminegativa) se e solo se tutti gli autovalori di A sono maggiori o uguali a zero (minori o uguali a zero);
- $Q(\vec{h})$ è indefinita se e solo se gli autovalori sono uno positivo e uno negativo;

Parte II

Equazioni Differenziali

Capitolo 8

Introduzione fisica

Dinamica La seconda legge della dinamica afferma che la risultante di un corpo soggetto ad una forza equivale a $F = ma$ ma poichè l'accelerazione è la derivata seconda dello spostamento $F = my''(t)$. Se consideriamo un corpo in movimento attaccato ad una molla possiamo riscrivere le risultanti sul corpo come:

$$my''(t) = -ky$$

E ancora considerando l'attrito prodotto con l'aria o con qualsiasi altro materiale, cioè lo smorzamento ecco che l'equazione diventa:

$$my''(t) = -ky - my' + f(t)$$

$$my''(t) = F(t, y, y')$$

$$F(t, y, y', y'')$$

che è un'equazione **differenziale ordinaria del secondo ordine**. Un'equazione differenziale è un'equazione in cui l'incognita compare come variabile $y(t)$, che compare anche mediante le sue derivate.

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) \quad (8.1)$$

dove a, b, c, f sono costanti e $a \neq 0$ e dove f è detto **forzante**.

Circuiti RLC Le equazioni differenziali sono presenti anche nei circuiti RLC. Scriviamo il potenziale di un circuito RLC come:

$$\begin{aligned} E(t) &= Li'(t) + Ri(t) + \frac{q(t)}{C} \\ E(t) &= Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} \\ \rightarrow \frac{d}{dt}[E(t)] &= \frac{d}{dt}[Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{q(t)}{C}] \\ E'(t) &= Li''(t) + Ri'(t) + \frac{i(t)}{C} \end{aligned}$$

quindi l'equazione del circuito può essere scritta come equazioni differenziali lineari del secondo ordine sia in funzione di $q(t)$ e $i(t)$.

Moto del pendolo In un moto del pendolo lo spostamento del corpo appeso al filo equivale a $s(t) = l\theta(t)$. La velocità e accelerazione sono rispettivamente $l\theta'(t)$ e $l\theta''(t)$. La seconda legge della dinamica può essere riscritta come

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta(t)$$

che è un'equazione differenziale non lineare, in quanto compare la funzione seno. Tuttavia per le piccole oscillazioni $\sin \theta \approx \theta$, dunque:

$$\theta'' = -\frac{g}{l} \theta(t)$$

Capitolo 9

Problema di Cauchy

data un'equazione differenziale del tipo

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

con a, b, c, f costanti in I e $a \neq 0$, allora sarà soluzione dell'equazione differenziale nell'intervallo I una funzione $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ **derivabile due volte** che sostituita nell'equazione iniziale dà un'identità su I , cioè la soddisfa.

Esempio

$$\begin{aligned} y'' - y' - 2y &= 0 \\ a(t) = 1, b(t) = -1, c(t) = -2, f(t) &= 0 \end{aligned}$$

Prendiamo la funzione esponenziale $y = e^{2t}$. Verifichiamo che sia soluzione.

$$\begin{aligned} y'(t) &= 2e^{2t} \\ y''(t) &= 4e^{2t} \\ \rightarrow 4e^{2t} - 2e^{2t} - 2(e^{2t}) &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione è verificata **per ogni** $t \in \mathbb{R}$. Se non fosse così ma solo per alcuni valori, allora non sarebbe soluzione.

Quante soluzioni può avere un'equazione differenziale del secondo ordine Se $y''(t) = 0$ allora $y(t) = c_1 t + c_2$. **Un'equazione differenziale ha infinite soluzioni, se è del secondo ordine allora ha infinite soluzioni che dipendono da due parametri.**

Definizione 9.0.1 (Integrale Generale). Si chiama **Integrale Generale** la totalità delle soluzioni in dipendenza da due parametri.

Una volta che si conoscono i due parametri iniziali e l'equazione differenziale allora si ha il **Problema di Cauchy**.

Teorema 22 (Teorema di Cauchy). data un'equazione differenziale del tipo

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

con a, b, c, f costanti in I e $a \neq 0$ allora il problema di Cauchy con condizioni iniziali assegnate

$$\begin{cases} a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (9.1)$$

ha una e una sola soluzione in tutto l'intervallo I .

Il significato fisico è determinare la legge oraria di un corpo sapendo che sono note posizione e velocità. Per risolvere il problema di Cauchy:

1. Determinare l'integrale generale ;
2. Imporre le condizioni iniziali;
3. Sostituire i valori;

9.1 Integrale generale

Come è formato l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale? Innanzitutto chiamiamo

$$L = a \frac{d}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + c$$

$$Ly = a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t)$$

L gode della proprietà di linearità. Dati $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$c_1y_1 + c_2y_2 = c_1Ly_1 + c_2Ly_2$$

cioè il prodotto di L per una combinazione lineare è esso stesso la combinazione lineare di y_1 e y_2 con coefficienti Lc_1 e Lc_2 .

Poichè L gode della linearità, le equazioni differenziali del tipo

$$Ly = f \quad (9.2)$$

sono lineari. Godono del principio di sovrapposizione:

$$c_1 Ly_1 + c_2 Ly_2 = c_1 f_1 + c_2 f_2 \quad (9.3)$$

questo è molto importante perchè se chiamiamo $y = c_1 Ly_1 + c_2 Ly_2$ allora

$$L(y) = c_1 f_1 + c_2 f_2 \quad (9.4)$$

dove y soddisfa l'equazione differenziale con forzante $c_1 f_1 + c_2 f_2$.

Teorema 23 (Principio di Sovrapposizione). Se y_1 è soluzione di $ay'' + by' + cy = f_1$ e y_2 è soluzione di $a''_y + b'_y + c = f_2$, allora la funzione $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ è **soluzione di**

$$ay'' + by' + cy = c_1 f_1 + c_2 f_2 \quad (9.5)$$

Consideriamo un'equazione omogenea, con termine noto nullo. Se $Ly_1 = 0, Ly_2 = 0$, cioè y_1, y_2 sono soluzioni dell'equazione omogenea per il principio di sovrapposizione:

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = c_1 Ly_1 + c_2 Ly_2 = 0 \quad (9.6)$$

ogni combinazione lineare della soluzione dell'equazione omogenea è anch'essa soluzione. Cioè l'insieme S delle soluzioni forma uno **spazio vettoriale**. Si dimostra che se l'equazione è di ordine 2, anche la dimensione dello spazio vettoriale è di ordine 2.

Teorema 24 (di struttura). L'integrale generale di

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = 0$$

con a, b, c costanti in I e $a \neq 0$ è dato da tutte le combinazioni lineari

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (9.7)$$

con $y_1(t), y_2(t)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione stessa.

9.2 Forzante non nullo

Quando il forzante non è nullo, l'equazione differenziale è detta **completa**. Si può ricavare dall'equazione completa la sua **omogenea associata**:

$$\begin{aligned} Ly &= f \\ \rightarrow Ly &= 0 \end{aligned}$$

la seconda equazione è l'omogenea associata. Chiamiamo $Ly_0 = 0, Ly_p = f$. Per il **principio di sovrapposizione**:

$$L(y_0 + y_p) = Ly_0 + Ly_p = 0 + f = f \quad (9.8)$$

oppure se $Ly_1 = f, Ly_2 = f$ allora:

$$L(y_1 - y_2) = Ly_1 - Ly_2 = f - f = 0 \quad (9.9)$$

Data una qualunque soluzione y_p allora, allora le altre soluzioni sono :

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) \quad (9.10)$$

con y_0 soluzione di $Ly = 0$.

Teorema 25 (di Struttura per Equazioni Complete). L'integrale generale di

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

con a, b, c, f costanti in I e $a \neq 0$ è dato da **tutte e sole** funzioni

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (9.11)$$

con y_1, y_2 soluzioni di $Ly = 0$ mentre y_p è una soluzione particolare dell'equazione completa

$$a(t)y''(t) + b(t)y'(t) + c(t)y(t) = f(t)$$

9.3 $\Delta > 0$

Consideriamo una qualsiasi equazione differenziale omogenea. Per il teorema di struttura è sufficiente trovare due soluzioni linearmente indipendenti, ovvero il cui rapporto **non sia costante, o una non sia multiplo dell'altra**.

Esempio

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

Soluzioni proporzionali alle loro derivate. Quindi equazioni del tipo $e^{\lambda t}$:

$$y = e^{\lambda t}$$

$$y' = \lambda e^{\lambda t}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + 4\lambda e^{\lambda t} + 3e^{\lambda t} = 0$$

$$(\lambda^2 + 4\lambda + 3) = 0, e^{\lambda t} \neq 0 \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi si arriva ad un'equazione algebrica di secondo grado, in cui $\lambda = -1, \lambda = -3$. Le due soluzioni sono:

$$e^{-t}, e^{-3t}$$

sono linearmente indipendenti, il loro rapporto è e^{2t} che non è costante. Il polinomio

$$P(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c \quad (9.12)$$

è detto **polinomio caratteristico** associato all'equazione differenziale. Se $\Delta > 0$ corrispondono due soluzioni y_1, y_2 dell'equazione differenziale linearmente indipendenti. Per il teorema di struttura 24 si scrive l'integrale generale:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

9.4 $\Delta < 0$

Esempio

$$y'' + 2y' + 10y = 0, y(t) = e^{\lambda t}$$

si trova l'equazione caratteristica e le soluzioni

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda + 10 &= 0, \Delta < 0 \\ &\rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm 3i \end{aligned}$$

se sostituiamo i valori si trovano

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{(-1+3i)t} \\ y_2(t) &= e^{(-1-3i)t} \end{aligned}$$

per la formula di Eulero si ricavano i numeri complessi associati:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{-t}(\cos(3t) + i \sin(3t)) \\ y_2(t) &= e^{-t}(\cos(3t) - i \sin(3t)) \end{aligned}$$

Da queste soluzioni complesse e coniugate si possono trovare due funzioni reali in questo (perchè ogni combinazione lineare è soluzione):

$$u_1(t) = \frac{y_1(t) + y_2(t)}{2} = e^{-t} \cos(3t) \quad (9.13)$$

$$u_2(t) = \frac{y_1(t) - y_2(t)}{2i} = e^{-t} \sin(3t) \quad (9.14)$$

e sono due soluzioni reali linearmente indipendenti. L'integrale generale sarà dunque:

$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(3t) + c_2 e^{-t} \sin(3t)$$

Generalizzazione

$$\begin{aligned} a\lambda^2 + b\lambda + c &= 0, \Delta < 0 \\ \lambda_{1,2} &= \alpha \pm i\beta \\ \rightarrow u_1(t) &= e^{\alpha t} \cos(\beta t) \\ \rightarrow u_2(t) &= e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ \Rightarrow y(t) &= c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

9.5 $\Delta = 0$

Esempio

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 9y &= 0 \\ \rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 &= 0 \\ \Delta &= 0 \end{aligned}$$

Due radici reali e coincidenti $\lambda_{1,2} = 3$. Troviamo **una sola** soluzione dell'equazione differenziale: $y_1(t) = e^{3t}$ e tutte le sue funzioni multiple $c \cdot e^{3t}, \forall c \in \mathbb{R}$. Dobbiamo dunque trovare un'altra soluzione che sia linearmente indipendente da quella trovata. In particolare si cerca la funzione $c(t)$ tale che

$$y_2(t) = C(t)e^{3t}$$

con $y_2(t)$ soluzione dell'equazione differenziale. Per farlo si calcolano le derivate di y_2 e si sostituiscono nell'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} y_2' &= e^{3t}[C'(t) + 3C(t)] \\ y_2'' &= e^{3t}[C''(t) + 6C'(t) + 9C(t)] \\ \rightarrow e^{3t}[C''(t) + 6C'(t) + 9C(t) - 6C'(t) + -18C(t) + 9C(t)] &= 0 \\ C''(t) &= 0, \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Integrando due volte si trova $C(t) = c_1 t + c_2, \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. In particolare per questo esempio $C(t) = t$. Dunque si ha:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{3t} \\ y_2(t) &= te^{3t} \end{aligned}$$

e sono linearmente indipendenti. Per il Teorema di Struttura 25

$$y(t) = e^{3t}(c_1 t + c_2), \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Altro metodo Se le soluzioni dell'equazione caratteristica sono reali e distinte l'integrale generale equivale a :

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

Poichè l'equazione è lineare ed omogenea, ogni combinazione lineare è ancora soluzione dell'equazione differenziale.

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ c_2 &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \phi(t) &= -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

Studiamo il comportamento di $\phi(t)$ quando $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$. Dunque poniamo $\lambda_2 = \lambda_1 + \epsilon$ e tendiamo $\epsilon \rightarrow 0$.

$$\phi(t) = \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (9.15)$$

$$= \frac{e^{(\lambda_1 + \epsilon)t} - e^{\lambda_1 t}}{\epsilon} \quad (9.16)$$

$$\rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^{(\lambda_1 + \epsilon)t} - e^{\lambda_1 t}}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e^{\lambda_1 t} t \quad (9.17)$$

Dunque la funzione limite risolve l'equazione differenziale limite che corrisponde al polinomio caratteristico che ha due radici coincidenti uguali a λ_1 .

9.6 Integrale Generale e problema di Cauchy per l'Equazione Omogenea

Data un'equazione lineare omogenea si scrive l'equazione caratteristica associata, e se ne ricavano le soluzioni, in modo che siano linearmente indipendenti. Per ottenere un'unica soluzione dall'integrale generale bisogna porre delle condizioni iniziali del tipo

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Risolvere il problema di Cauchy per un'equazione differenziale omogenea significa **trovare la legge che descrive come cambia una certa quantità $y(t)$ nel tempo** (per esempio la posizione del punto materiale, conoscendo la posizione iniziale e la velocità iniziale).

Capitolo 10

Soluzioni delle equazioni differenziali

10.1 Metodo di somiglianza

Abbiamo già visto che un'equazione differenziale è della forma:

$$ay'' + by' + c = f(t)$$

è completa, cioè $f(t)$ è non nullo. Per risolvere questo tipo di equazioni differenziali bisogna conoscere l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e una soluzione particolare. Si pensa ora di scrivere il membro di sinistra come Ly , che data una qualsiasi funzione, la associa alla sua equazione differenziale completa del tipo $ay'' + by' + c$. L è un operatore lineare. Esistono delle casistiche semplici:

- Funzione esponenziale all'ingresso

$$\begin{aligned}y(t) &= Ce^{\alpha t} \\Ly &= LCe^{\alpha t} = \\&= (a\alpha^2 + b\alpha + c)Ce^{\alpha t}\end{aligned}$$

cioè ritorna una costante che moltiplica la $e^{\alpha t}$

- Una funzione polinomiale ritorna una funzione polinomiale con grado minore o uguale.

$$\begin{aligned}y(t) &= t^2 + t \\Ly &= L(t^2 + t) = 2a + b(2t + 1) + c(t^2 + t) = \\&= 2a + 1 + t(2b + c) + ct^2\end{aligned}$$

- Se in ingresso posiziono funzioni trigonometriche in uscita avrò altre funzioni trigonometriche.

Quando **il termine noto** ha una forma esponenziale, polinomiale o trigonometrica si può cercare una soluzione **simile al termine noto stesso**.

10.2 Termine noto esponenziale

$$\begin{aligned}y'' + 2y' - 3y &= e^{2t} \\ \rightarrow y_p(t) &= Ce^{2t} \\ \rightarrow y'_p(t) &= 2Ce^{2t} \\ y''_p(t) &= 4e^{2t}\end{aligned}$$

Sostituiamo le derivate dentro l'equazione differenziale:

$$\begin{aligned}4Ce^{2t} + 2[2e^{2t}] - 3e^{2t} &= e^{2t} \\ e^{2t}[4C + 4C - 3C] &= e^{2t} \\ e^{2t} \cdot 5C &= e^{2t} \\ \rightarrow C &= \frac{1}{5} \\ \rightarrow y_p(t) &= \frac{1}{5}e^{2t}\end{aligned}$$

Potrebbe non funzionare. Esempio:

$$\begin{aligned}y'' + 2y' - 3y &= e^{-3t} \\ \rightarrow (9C - 6C - 3C) &= e^{-3t}\end{aligned}$$

non ha soluzioni l'ultima equazione. Questo perchè la forzante è soluzione dell'equazione omogenea associata, dunque le equazioni del tipo Ce^{-3t} non potranno essere soluzioni dell'equazione differenziale completa. Per risolvere questo problema si cerca di trovare un'equazione simile ma con forma diversa, moltiplicando e^{-3t} per t . Si trova che $C = -\frac{1}{4}$. quindi una soluzione particolare è $y_p(t) = t\frac{1}{4}e^{-3t}$. In questi casi si dice che **la forzante appartiene al nucleo dell'operatore L**. Dunque per risolvere un'equazione differenziale completa prima si deve risolvere l'equazione omogenea associata.

10.3 Forzante polinomiale

Se il forzante ha grado n , anche la soluzione sarà un polinomio di grado n .

$$\begin{aligned}
 y'' + 2y' - 3y &= t^2 - 2 \\
 \rightarrow y_p(t) &= At^2 + Bt + C \\
 y'_p(t) &= 2At + B \\
 y''_p(t) &= 2A \\
 \rightarrow \begin{cases} -3A = 1 \\ 4A - 3B = 0 \\ 2A + 2B - 3C = -2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Si ha: $A = -1/3, B = -4/9, C = 4/27$. Li si mette nella soluzione particolare.

Eccezione: si cerchi la soluzione dell'equazione:

$$\begin{aligned}
 y'' + 2y' &= 3t \\
 \rightarrow 3t - 2A &= 0
 \end{aligned}$$

Nella equazione differenziale manca il termine che ha come coefficiente C . **Per avere in uscita un polinomio di grado uno dobbiamo mettere un polinomio di grado due**, cioè nella forma più generale

$$\begin{aligned}
 y_p(t) &= At^2 + B + C \\
 \rightarrow (4A - 3)t + 2A + 2B &= 0
 \end{aligned}$$

dunque le soluzioni sono $A = 3/4, B = -3/4$.

si cerca soluzione:	se l'equazione differenziale è:
$y_p(t) = p_n(t)$	$ay'' + by' + cy = f(t)$ con $a, c \neq 0$
$y_p(t) = t \cdot p_n(t)$	$ay'' + by' = f(t)$ con $a, b \neq 0$
$y_p(t) = t^2 \cdot p_n(t)$	$ay'' = f(t)$ con $a \neq 0$

10.4 Forzante trigonometrico

Abbiamo l'equazione:

$$\begin{aligned}
 y'' + 2y' - 3y &= \cos 2t - 3 \sin 2t \\
 y_p(t) &= c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t \\
 \rightarrow y'_p(t) &= -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t \\
 y''_p(t) &= -4c_1 \cos 2t - 4c_2 \sin 2t \\
 \rightarrow (-7c_1 + 4c_2) \cos 2t + (-7c_2 - 4c_1) \sin 2t &= \cos 2t - 3 \sin 2t \\
 c_1 &= 1/13, c_2 = 5/13 \\
 y_p(t) &= 1/13 \cos 2t + 5/13 \sin 2t
 \end{aligned}$$

L'eccezione alla regola è con equazioni del tipo:

$$\begin{aligned}
 y'' + 9y &= 2 \sin 3t \\
 y_p(t) &= c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t
 \end{aligned}$$

Se risolviamo l'equazione omogenea associata tuttavia le radici sono **complesse e coniugate**: $\lambda = \pm 3i$. Quindi non siamo in grado di generare una soluzione particolare per l'equazione completa, perchè $y = 2 \sin 3t$ è già una soluzione particolare. E' chiamato in fisica **risonanza**. Come abbiamo fatto per l'esponenziale in questo caso pensiamo a una soluzione particolare come:

$$\begin{aligned}
 y_p(t) &= t \cdot (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) \\
 \rightarrow c_1 &= -1/3, c_2 = 0
 \end{aligned}$$

Questo è valido per equazioni in cui il coefficiente b è nullo, e $a \cdot c > 0$, altrimenti la soluzione ha radici reali. Poniamo $\omega^2 = \frac{c}{a}$ allora:

$$\begin{aligned}
 y'' + \omega^2 y &= \alpha \cos(\nu t) + \beta \sin(\nu t) \\
 \rightarrow \nu &= \omega
 \end{aligned}$$

La frequenza della forzante è uguale alla frequenza propria. Quindi in tutte le equazioni di questo tipo si ha:

10.5 Variazione delle costanti

Il metodo di variazione delle costanti è utile per trovare soluzioni a equazioni differenziali il cui forzante non rientra nei casi semplici. Come primo caso si ha quando il forzante è somma di due forzanti semplici, dunque si procede

$$y'' + \nu^2 y = \alpha \cos(\nu t) + \beta \sin(\nu t)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

$$y_p(t) = t(C_1 \cos(\nu t) + C_2 \sin(\nu t))$$

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

$$f(t) = \alpha \cos(\nu t) + \beta \sin(\nu t)$$

$$b \neq 0$$

$$y_p(t) = C_1 \cos(\nu t) + C_2 \sin(\nu t)$$

$$b = 0 \quad \nu = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

$$y_p(t) = t(C_1 \cos(\nu t) + C_2 \sin(\nu t))$$

come sempre cercando prima una soluzione per il primo forzante, e poi per il secondo. Dunque si ha che

$$Ly_1 + Ly_2 = L(y_1 + y_2)$$

cioè la somma delle soluzioni è soluzione all'equazione differenziale iniziale.

Se invece il forzante è generale e non possiamo ricondurlo a nessun caso semplice, allora si ha che una soluzione qualsiasi sarà:

$$ay'' + by' + cy = f$$

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

Si cercano due funzioni $c_1(t)$ e $c_2(t)$ in modo che $y(t)$ sia soluzione all'equazione iniziale.

$$y'' + y = \frac{1}{\sin(t)} \quad I = (0, \pi)$$

$$y'' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda = \pm i$$

$$y_1(t) = \cos(t)$$

$$y_2(t) = \sin(t)$$

$$y_p(t) = C_1(t) \cos(t) + C_2(t) \sin(t)$$

Il calcolo della derivata prima e seconda è abbastanza complicato.

$$y_p(t) = c'_1(t) \cos(t) + c'_2(t) \sin(t) - c_1(t) \sin(t) + c_2(t) \cos(t)$$

$$c'_1(t) \cos(t) + c'_2(t) \sin(t) = 0$$

Si annulla quel termine perchè possiamo far variare le costanti.

$$y_p''(t) = -c'_1(t) \sin(t) + c'_2(t) \cos(t) - c_1(t) \cos(t) - c_2(t) \sin(t)$$

$$y_p'' + y_p = -c'_1(t) \sin(t) + c'_2(t) \cos(t)$$

$$-c'_1(t) \sin(t) + c'_2(t) \cos(t) = \frac{1}{\sin t}$$

$$\begin{cases} c'_1(t) \cos(t) + c'_2(t) \sin(t) = 0 \\ -c'_1(t) \sin(t) + c'_2(t) \cos(t) = \frac{1}{\sin t} \end{cases}$$

$$\det = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

$$\rightarrow c'_1(t) = -1, c'_2(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$$

$$c_1(t) = -t + c, c_2(t) = \ln(\sin t) + c$$

Allora una soluzione particolare all'equazione differenziale è :

$$y_p(t) = -t \cos t + \ln(\sin t) \sin t$$

$a \neq 0$

$ay'' + by' + cy = f(t) \quad t \in I$

$y_1(t), y_2(t)$
soluzioni dell'equazione omogenea

$\begin{cases} C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0 \\ a(C_1 y_1' + C_2 y_2') = f \end{cases}$

$w(t) = a(y_2' y_1 - y_1' y_2)$

$y_1(t), y_2(t)$	$b^2 - 4ac$	> 0
		$= 0$
		< 0

Esiste anche un altro metodo: **la trasformata di Laplace**, molto efficace.

10.6 Forzante esponenziale-trigonometrico

Un caso importante in cui è possibile cercare una soluzione particolare di un'equazione differenziale lineare del second'ordine a coefficienti costanti non

$$\begin{aligned}
 t_0 \in I \\
 y_p(t) &= -y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{f(s)y_2(s)}{w(s)} ds + y_2(t) \int_{t_0}^t \frac{f(s)y_1(s)}{w(s)} ds \\
 &= \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)}{w(s)} f(s) ds = \\
 &= \int_{t_0}^t G(t,s)f(s) ds
 \end{aligned}$$

omogenea tramite il metodo di somiglianza è quello in cui il termine noto è di tipo esponenziale-trigonometrico, cioè:

$$f(t) = e^{\alpha t}(A \cos(\nu t) + B \sin(\nu t)) \quad (10.1)$$

Cerchiamo una soluzione particolare dell'equazione:

$$\begin{aligned}
 y'' - 2y' - y &= 4e^{-t} \cos(2t) \\
 y_p(t) &= e^{-t}(A \cos(2t) + B \sin(2t))
 \end{aligned}$$

dobbiamo determinare A e B affinché $4e^{-t} \cos(2t)$ sia combinazione lineare di $\cos(2t)$ e $\sin(2t)$.

10.7 Esponenziale complesso nel metodo si somiglianza

10.8 Forzante come funzione composta

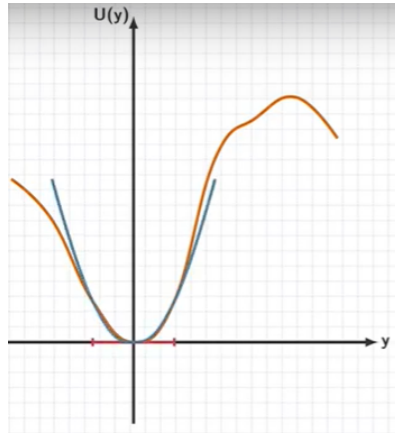
Capitolo 11

Altri esempi fisici

Consideriamo un punto materiale di massa m , soggetto sia ad una forza elastica di richiamo che ad una forza viscosa che si oppone al movimento, esercitata ad esempio dalla resistenza dell'aria o da un fluido in cui l'oscillatore si trova immerso: trascuriamo qui la forza peso. Scegliendo una coordinata $y(t)$ in modo tale che sia $y = 0$ la posizione di equilibrio, cioè quando la molla è a riposo, l'equazione del moto del punto è $my'' = -ky - hy'$ dove le due costanti positive k e h sono la costante elastica della molla e il coefficiente di attrito viscoso. Dividendo per m possiamo scrivere questa equazione in questo modo. Questa equazione viene detta equazione delle oscillazioni smorzate, o anche equazione dell'oscillatore armonico smorzato. Nel caso particolare in cui non c'è attrito viscoso, cioè $\delta = 0$, l'equazione diventa $y'' + \omega^2 y = 0$ ed è detta equazione delle oscillazioni libere, o anche equazione dell'oscillatore armonico semplice. L'equazione dell'oscillatore armonico entra in gioco nella descrizione di molti altri fenomeni di tipo meccanico, ad esempio le piccole oscillazioni di un pendolo ma anche, più in generale, tutti i sistemi monodimensionali che ammettono un punto di equilibrio. Consideriamo infatti un punto materiale di massa m in moto su una retta, con legge oraria $y(t)$, soggetto a una forza conservativa di energia potenziale $U(y)$. Poiché la forza in un sistema conservativo è meno la derivata dell'energia potenziale rispetto allo spostamento, l'equazione fondamentale della dinamica si può scrivere nella forma

$$my'' = -U'(y) \quad (11.1)$$

Supponiamo ora che il sistema abbia in $y = 0$ un punto di equilibrio stabile, come nel caso del pendolo o della molla. Ciò significa che l'energia potenziale $U(y)$ ha un punto di minimo relativo in $y = 0$, quindi, se supponiamo $U(0) = 0$, cosa che possiamo sempre fare perché l'energia potenziale è definita a meno di costante additiva, la funzione $U(y)$ ha un grafico di questo tipo.



Questo grafico può sempre essere approssimato, vicino all'origine, con una parabola, utilizzando la formula di Taylor al secondo ordine per $U(y)$. In questa approssimazione abbiamo

$$my'' = -U''(0)y \quad (11.2)$$

Ponendo adesso $k = U''(0)$ abbiamo che il moto di un punto materiale soggetto ad una generica forza conservativa, vicino al punto di equilibrio stabile $y = 0$, è sempre descritto in prima approssimazione dall'equazione dell'oscillatore armonico.

$$y'' = -\frac{k}{m}y \quad (11.3)$$

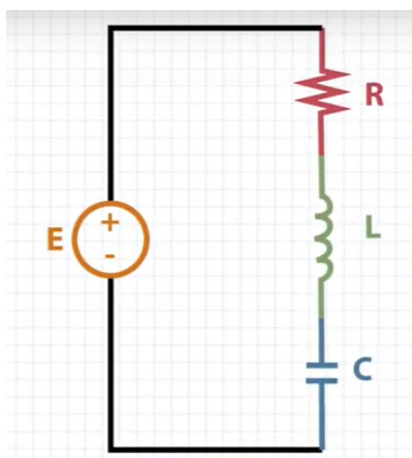
$$y'' - \omega^2 y = 0 \quad (11.4)$$

$$\rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \quad (11.5)$$

Tornando ora all'equazione più generale delle oscillazioni smorzate, osserviamo che questa compare anche in ambiti diversi dalla meccanica. Consideriamo ad esempio un circuito elettrico RLC in regime di corrente continua. Questo significa che una resistenza R , un'induttanza L e un condensatore di capacità C sono posti in serie in un circuito a cui è applicata una forza elettromotrice costante.

Se indichiamo con $i(t)$ la corrente che circola nel circuito, abbiamo questa equazione differenziale. Dunque, esiste una completa analogia elettromeccanica: in un circuito elettrico, l'induttanza L **gioca il ruolo della massa**, la resistenza R quello della **costante di attrito viscoso**, e l'inverso della capacità **corrisponde alla costante elastica**.

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = 0 \quad (11.6)$$



Possiamo in definitiva scrivere l'equazione del circuito RLC nella forma

$$i'' + 2\delta i' + \omega^2 i = 0 \quad (11.7)$$

In particolare, se la resistenza del circuito è trascurabile, si ha $\delta = 0$ e quindi l'equazione di un circuito LC in serie in corrente continua coincide con quella dell'oscillatore armonico semplice.

11.1 Oscillazioni libere non smorzate

Studiamo le soluzioni dell'equazione del moto di un punto che si muove su una guida rettilinea soggetto soltanto all'azione di una forza elastica di richiamo, cioè studiamo le soluzioni dell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico semplice. L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad (11.8)$$

le cui radici sono complesse coniugate. Quindi tutte le soluzioni si possono scrivere in questa forma. Si tratta di una combinazione lineare di funzioni periodiche con lo stesso periodo: questa caratteristica permette di riscrivere l'integrale generale in una forma molto più utile per le applicazioni. Per vederlo è necessario qualche passaggio che utilizza la trigonometria. Moltiplichiamo e dividiamo l'integrale generale per la quantità A . Osserviamo ora che questi due numeri hanno la proprietà che la somma dei loro quadrati fa 1. Perciò questi numeri si possono rileggere come seno e coseno di un certo angolo ϕ . Possiamo quindi riscrivere y in questo modo. Ricordando infine la formula trigonometrica per il seno della somma di due angoli, la soluzione generale si può riscrivere come

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (11.9)$$

Dove le due costanti A e ϕ prendono il nome rispettivamente di ampiezza e fase. Ampiezza e fase possono essere determinate assegnando posizione e velocità iniziali del punto, oppure a partire da $C1$ e $C2$. L'integrale generale scritto in termini di A e ϕ mostra esplicitamente che le soluzioni dell'oscillatore armonico semplice sono funzioni periodiche del tempo con periodo T e frequenza f . Il parametro ω , che caratterizza l'oscillatore, si chiama pulsazione. Il punto compie infinite oscillazioni di uguale ampiezza intorno alla posizione di equilibrio. Abbiamo visto che l'integrale generale del moto armonico semplice è

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (11.10)$$

Vediamo com'è fatta questa funzione. La funzione dipende da tre costanti A, ω, ϕ ma hanno diversa natura. In particolare A e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali del problema, mentre ω dipende dal problema fisico stesso. Scegliamo tre valori di queste costanti ad esempio $A = 1$, $\phi = 0$, e $\omega = 1$: quello che otteniamo è $\sin(t)$, questa funzione, che rappresenta per esempio la legge oraria di un punto materiale che si muove sotto richiamo di una molla in assenza d'attrito. Osserviamo infatti che il punto materiale oscilla attorno alla posizione di equilibrio $y = 0$. Qui la costante A rappresenta l'ampiezza massima dell'oscillazione del punto materiale, ϕ dipende dalla sua posizione di partenza mentre ω dipende Equazioni differenziali lineari del secondo ordine dalla massa del punto e dalla costante elastica della molla. Cosa succede se aumentiamo il valore di A , dell'ampiezza? Quello che succede è che l'ampiezza della funzione aumenta, cioè la distanza tra i massimi e minimi aumenta. Allo stesso modo se diminuiamo, l'ampiezza della funzione diminuisce cioè la distanza tra i massimi e i minimi diminuisce fino a 0. Riportiamola a 1. Che cosa succede invece se modifichiamo i valori di ϕ ? Se prendiamo valori di ϕ positivi il grafico della funzione traslerà indietro; se invece prendiamo valori negativi di ϕ il grafico della funzione traslerà in avanti. Cosa succede se invece modifichiamo ω , cioè la pulsazione? Ad esempio se raddoppiamo ω quello che succede è che la frequenza raddoppia cioè il numero delle oscillazioni raddoppia nello stesso intervallo di tempo.

11.2 Oscillazioni smorzate

11.3 Oscillazioni forzate e risonanza

11.4 Oscillazioni smorzate e forzate

11.5 Circuiti RLC in corrente alternata

Parte III

Analisi 2

Capitolo 12

Funzioni reali di più variabili reali

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che associa una n-upla di coordinate ad un valore reale z , ovvero $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow z$.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = z \quad (12.1)$$

Della funzione f denotiamo con \mathbb{R}^n il dominio, ed \mathbb{R} il codominio. x_1, x_2, \dots, x_n sono le variabili indipendenti, mentre z è la variabile dipendente.

Esempio 1 Sia $z = \sqrt{x(y - x^2)}$. Il dominio della funzione sarà $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ovvero un'area per cui valgono:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq x^2 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq x^2 \end{cases}$$

Esempio 2 Sia $z = \sqrt{|x|(x^2 + y^2 - 4)}$, allora A è l'area di \mathbb{R}^2 delimitata dai punti esterni alla circonferenza centrata nell'origine di raggio 2 (compresa la circonferenza) e inclusi i valori per cui $|x| = 0$, cioè tutto l'asse y .

Esempio 3 Sia $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Allora il dominio è un sottoinsieme di \mathbb{R}^3 tali per cui $x^2 + y^2 + z^2 > 0$, ovvero

$$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$$

12.1 Grafico

Per una funzione a una variabile $y = f(x)$, $f(x) : A \rightarrow \mathbb{R}$ il grafico della funzione è definito come un insieme di punti.

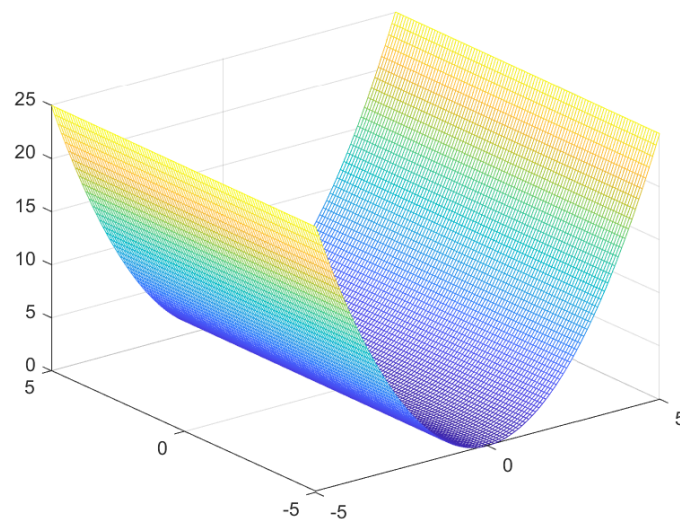
$$grf = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (12.2)$$

Allo stesso modo per una funzione a due variabili $f(x, y) = z$, $f(x, y) : A \rightarrow \mathbb{R}$ si ha

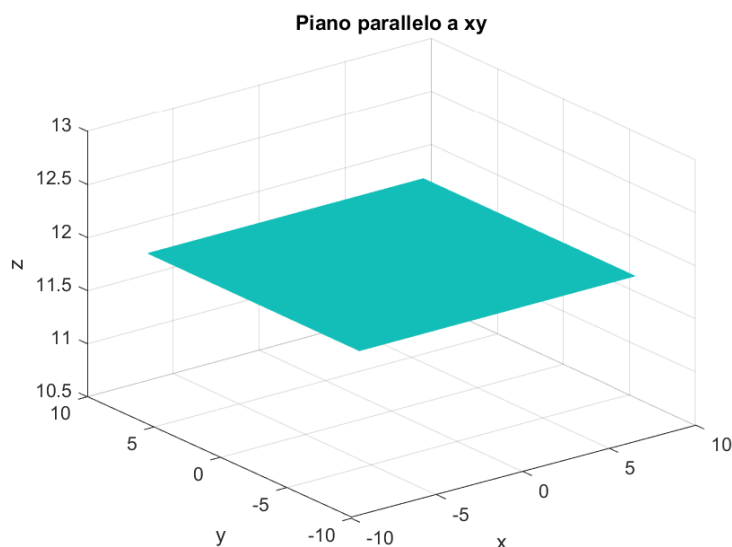
$$grf = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\} \subseteq \mathbb{R}^3 \quad (12.3)$$

ovvero il grafico di una funzione a due variabili è la superficie, la cui proiezione sul piano xy restituisce il dominio A .

Esempio 1 (Cilindro Parabolico) Sia $f(x, y) = x^2$, con $A = \mathbb{R}^2$



Esempio 2 (Piano parallelo a xy) Si ha un piano parallelo al piano xy per funzioni del tipo $f(x, y) = K$ con $K \in \mathbb{R}$.



Esempio 3 Sia $f = \{(x, y, z, f(x, y, z)) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$. Il grafico di f non ha un'interpretazione geometrica, in quanto appartiene a \mathbb{R}^4 .

Esempio 4 (Piano inclinato) Sia $f(x, y) = ax + by + c$. Dunque il grafico di f sarà:

$$\text{gr } f = \{(x, y, ax + by + c) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

ovvero è un piano inclinato il cui vettore normale è $\vec{n} = (a, b, -1)$, infatti l'equazione del piano è $z = ax + by + c$. Funzioni di questo tipo individuano tutti i piani eccetto quelli verticali.

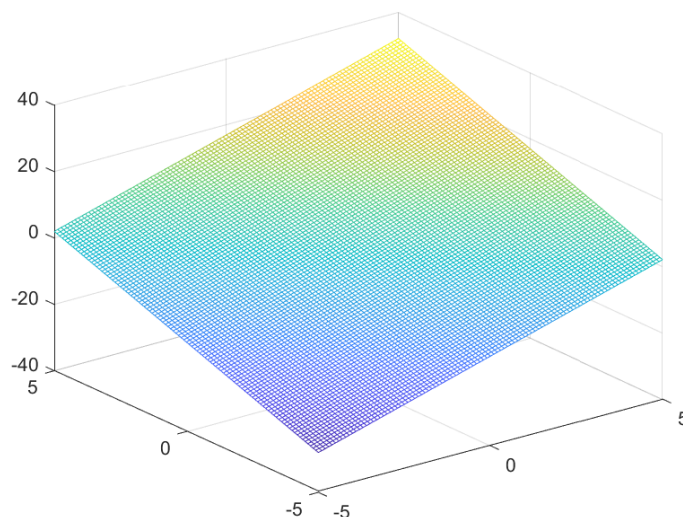
Esempio 5 Il grafico di una sfera non è identificato da una funzione, in quanto un punto su xy identifica due punti sulla superficie. Metà sfera è identificata da funzioni del tipo

$$f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

12.2 Insieme di livello

Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si definisce insieme di livello c di f , con $c \in \mathbb{R}$, un sottoinsieme di A in cui

$$\{\vec{x} \in A : f(\vec{x}) = c\}$$



Esempio 1 Per una funzione a due variabili l'insieme di livello equivale a "tagliare la superficie" per $z = c$, ovvero un piano parallelo a xy di che interseca l'asse z in c . L'insieme dei punti che esce dall'intersezione, va proiettato sul piano xy . La proiezione di quei punti è dunque l'insieme di livello. Gli insiemi di livello hanno molte applicazioni: curve isoterme, isobare, e cartine altimetriche.

Esempio 2 L'insieme di livello di una funzione a tre variabili del tipo

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

è dato quando $c = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ovvero è una superficie (si pensi alle superfici equipotenziali dei campi gravitazionali o elettrici in fisica).

12.2.1 Cono e paraboloide

Funzioni come

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \tag{12.4}$$

sono difficili da rappresentare graficamente. Si pensi però alla sua curva di livello. Per un qualsiasi c si identifica una circonferenza di raggio $r = \sqrt{c}$. Ovviamente per $c < 0$ gli insiemi di livello sono vuoti, e per $C = 0$ l'insieme di livello è costituito dal punto $(0, 0)$.

Questo fenomeno è simile anche per funzioni come

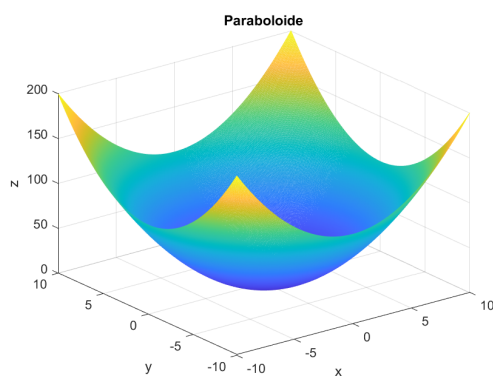
$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (12.5)$$

le cui curve di livello sono identiche a quelle della precedente funzione, solo che $r = c$. Attraverso lo studio delle sezioni con il piano xz si osserva che la prima funzione identifica una parabola, la seconda il modulo di x

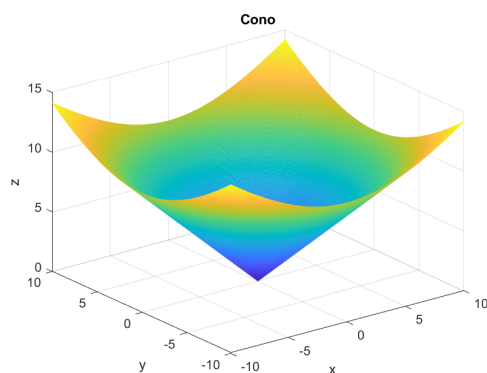
$$\begin{cases} z = x^2 \\ y = 0 \end{cases} \quad (12.6)$$

$$\begin{cases} z = |x| \\ y = 0 \end{cases} \quad (12.7)$$

dunque si definisce il **paraboloide** e il **cono** rispettivamente per la prima e seconda funzione.



(a)



(b)

12.3 Topologia di \mathbb{R}^n

Sia \vec{x} un vettore di \mathbb{R}^n . Si definiscono:

- $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ norma di \vec{x} e $d(\vec{x}, \vec{0})$;
- $\|\vec{x} - \vec{y}\| = d(\vec{x}, \vec{y})$;
- Si definisce intorno di un generico vettore \vec{a} l'insieme dei punti per cui

$$I_r(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| \leq r\}$$

L'intorno sulla retta equivale a una distanza, l'intorno su piano equivale ad un'area del cerchio di raggio r , mentre in \mathbb{R}^3 è la sfera di raggio r .

12.3.1 Punto interno di un sottoinsieme di \mathbb{R}^n

Dato un sottoinsieme di \mathbb{R}^n allora sia $\vec{a} \in A$, \vec{a} è un punto interno di A se esiste un suo intorno tutto contenuto in A .

12.3.2 Punto di frontiera di un sottoinsieme di \mathbb{R}^n

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (non necessariamente un punto di A), si dice che \vec{x} è un punto di frontiera dell'insieme A se **ogni** suo intorno contiene punti di A e di A^c (il complementare di A).

Insieme chiuso Si dice che A è chiuso se contiene tutti i suoi punti di frontiera, ovvero $\partial A \subseteq A$. Gli unici insiemi aperti e chiusi contemporaneamente sono $A = \{\emptyset\}$, $A = \mathbb{R}^n$.

Insieme limitato Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A è limitato se esiste un intorno di $\vec{0}$ tale che $A \subseteq I(\vec{0})$.

Insieme connesso $A \subseteq \mathbb{R}^n$ A è connesso se $\forall \vec{x}, \vec{y} \in A \exists$ un arco di curva continuo che ha per estremi i due punti ed è contenuto nell'insieme A .

Punto di accumulazione $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (con \vec{x} non necessariamente appartenente ad A) allora \vec{x} è un punto di accumulazione di A se ogni intorno di \vec{x} contiene almeno un punto di A distinto da \vec{x} .

12.4 Limiti di funzioni in n variabili

Consideriamo le definizioni per funzioni a due variabili.

Si definisce il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l, l \in \mathbb{R} \quad (12.8)$$

con (x_0, y_0) punto di accumulazione di A , ed è verificato se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in A$ tale che $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ si ha che $|f(x, y) - l| < \epsilon$.

Una definizione equivalente è la seguente: $\forall v(l) \exists u(x_0, y_0) \forall (c, y) \in u(x_0, y_0) \cap A$ con $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ si ha che $f(x, y) \in v(l)$.

12.5 Calcolo dei limiti

Valgono i teoremi delle funzioni a una variabile anche per le funzioni a più variabili. Prendiamo per esempio il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad (12.9)$$

sappiamo che il punto $(0, 0)$ è un punto di accumulazione. Vale il seguente risultato:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad (12.10)$$

allora **il limite non esiste**. Per le funzioni a due variabili il dominio è contenuto in \mathbb{R}^2 , dunque esistono infiniti modi che ha la funzione per avvicinarsi al punto $(0, 0)$. Dunque per **dimostrare la non esistenza** basta dimostrare che presa una curva di "avvicinamento" i due limiti sono diversi. Il limite preso per esempio è una forma indeterminata:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{0}{0} \quad (12.11)$$

Per dimostrare la sua non esistenza scegliamo due curve:

- $c_1 : y = 0$, allora

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 1$$

- $c_2 : x = 0$, allora

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0$$

dunque il limite non esiste.

12.5.1 Coordinate polari

Dato un punto di accumulazione (x_0, y_0) , allora le coordinate polari di un generico punto (x, y) sarà:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \rho \cos \theta \\ y &= y_0 + \rho \sin \theta \end{aligned}$$

Dunque possiamo lasciare θ libero, quindi consideriamo ogni punto dell'intorno di (x_0, y_0) e il limite è per $\rho \rightarrow 0$. Nelle funzioni con seno e coseno bisogna mettere delle condizioni di esistenza per θ in modo che il limite esista.

12.6 Continuità di funzioni in più variabili

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{a} \in A$ con \vec{a} punto di accumulazione di A . f è continua in \vec{a} se $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$.

Se una funzione in due variabili dipende solo da una variabile, se la funzione a una variabile è continua è continua anche quella a due variabili. La somma di funzioni continue è continua, e la composizione di funzioni continue è continua.

12.7 Teorema degli zeri

Teorema 26. Se f è continua in un intervallo I e se $\exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in I$ con $f(\vec{x}_1)f(\vec{x}_2) < 0$ allora esiste \vec{x}_3 per cui $f(\vec{x}_3) = 0$.

Dimostrazione Consideriamo una funzione a due variabili $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A connesso. f è continua in A . Se A è connesso allora esiste una curva che connette i due punti \vec{x}_1 e \vec{x}_2 . La curva può essere riscritta in modo parametrico: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ con $a \leq t \leq b$ e $r(a) = \vec{x}_1, r(b) = \vec{x}_2$. Allora la curva può essere riscritta in modo che sia a una variabile:

$$f(r(t)) = h \tag{12.12}$$

$$h(a) = f(\vec{x}_1) > 0$$

$$h(b) = f(\vec{x}_2) < 0$$

Per il Teorema degli zeri per le funzioni a una variabile allora $\exists t : h(t) = 0$.

Capitolo 13

Calcolo differenziale a più variabili

13.1 Derivate parziali

Derivata a una variabile Per una variabile si definisce derivata di $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in (a, b)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

se il limite \exists finito.

Derivata a due variabili Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_0, y_0) \in A, A$ aperto.

- Incremento x_0 lungo la retta $y = y_0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (13.1)$$

e se esiste finito il limite la funzione è derivabile rispetto alla variabile x .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (13.2)$$

$$= f_x(x_0, y_0) \quad (13.3)$$

- Applichiamo lo stesso ragionamento incrementando y_0 lungo la retta $x = x_0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (13.4)$$

$$= f_y(x_0, y_0) \quad (13.5)$$

quindi f è derivabile in (x_0, y_0) rispetto a x e a y e si chiama **gradiente** di f in (x_0, y_0) il vettore che ha per coordinate le derivate parziali

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \quad (13.6)$$

Significato geometrico Il grafico di f è una superficie in \mathbb{R}^3 .

- Fisso y_0 cioè interseco il piano $y = y_0$ con la superficie. Ottengo una curva che dipende solo da una variabile: $f(x; y_0) = g(x)$: la derivata parziale rispetto a x è il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in x_0 ;
- In modo analogo per y ;

n variabili Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $\vec{a} \in A$. Allora le derivate parziali di f sono definite come:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(\vec{a})}{h} \quad (13.7)$$

13.2 Derivate direzionale

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $\vec{a} \in A$. Nel dominio scegliamo una qualsiasi retta r passante per (x_0, y_0) . Denotiamo con $v^\wedge = (a, b)$ il versore della retta r , ovvero $a^2 + b^2 = 1$. L'equazione parametrica di r sarà:

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (13.8)$$

L'incremento di $f(x_0, y_0)$ sarà:

$$f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0) \quad (13.9)$$

la lunghezza dell'incremento sarà invece

$$l = \sqrt{(x_0 + at - x_0)^2 + (y_0 + bt - y_0)^2} \quad (13.10)$$

$$= t \quad (13.11)$$

dunque il limite del rapporto incrementale sarà:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t} \quad (13.12)$$

e se il limite esiste finito allora la funzione è derivabile in (x_0, y_0) lungo la direzione del versore v^\wedge . La sua derivata si indica con $D_{v^\wedge} f(x_0, y_0)$.

13.3 Derivabilità e continuità

Per le funzioni a più variabili non è detto che la derivabilità significhi che la funzione è continua. Un controesempio è

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases} \quad (13.13)$$

In un intorno di $\vec{0}$ il limite non esiste. La funzione non è continua, ma le sue derivate parziali esistono e valgono 0 in $\vec{0}$. Questo perchè la derivabilità studia la continuità in un intorno unidimensionale, mentre la continuità è bidimensionale.

Due concetti fondamentali:

- **Derivabilità** : una funzione è derivabile se esiste finito il limite del rapporto incrementale;
- **Differenziabilità**: la funzione è derivabile e continua in un punto;

A una variabile

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m \quad (13.14)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (13.15)$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \quad (13.16)$$

$$f(x) - f(x_0) - m(x - x_0) = o(x - x_0) \quad (13.17)$$

A due variabili Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $(x_0, y_0) \in A$. f è differenziabile nel punto (x_0, y_0) se esistono m_1, m_2 tali per cui

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) \quad (13.18)$$

$$x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0 \quad (13.19)$$

e l'equazione 13.18 è l'equazione del piano tangente alla superficie in (x_0, y_0) .

n variabili Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $(\vec{a}) \in A$. Allora f è differenziabile se esistono m_i valori finiti per cui

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(\vec{a}) + m_1(x - x_1) + \dots + m_n(x - x_n) + o(Nx - \vec{a}_n) \quad (13.20)$$

$$\vec{x} \rightarrow \vec{a} \quad (13.21)$$

Teorema 27 (Continuità delle funzioni differenziabili). Se f è differenziabile in \vec{a} allora è **continua** in \vec{a} .

Dimostrazione Se è vero che

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(\vec{a}) + m_1(x - x_1) + \dots + m_n(x - x_n) + o(Nx - \vec{a}_n)$$

per $\vec{x} \rightarrow \vec{a}$ allora

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + m_1 \cdot 0 + \dots + m_n \cdot 0 + o(Nx - \vec{a}_n) \quad (13.22)$$

$$= f(\vec{a}) + 0 = f(\vec{a}) \quad (13.23)$$

ovvero la funzione è continua.

13.4 Formula del gradiente

Se f è differenziabile in (x_0, y_0) allora è derivabile ed ha come derivate parziali m_1 lungo x e m_2 lungo y . Se f è differenziabile in (x_0, y_0) allora è anche derivabile in (x_0, y_0) lungo qualunque direzione.

Teorema 28 (Formula del gradiente). Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $(x_0, y_0) \in A$. Se f è differenziabile nel punto (x_0, y_0) allora f è derivabile lungo ogni direzione in $(x_0, y_0) \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ e inoltre:

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} \quad (13.24)$$

Dimostrazione Consideriamo $\vec{v} = (a, b)$, con $a^2 + b^2 = 1$. Se f è differenziabile allora:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}), (x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \quad (13.25)$$

Ora isoliamo una qualunque retta in xy passante per il punto (x_0, y_0) . Allora

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (13.26)$$

dunque la relazione 13.25 diventa:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + m_1(x_0 + at - x_0) + m_2(y_0 + bt - y_0) + o(\sqrt{(at)^2 + (bt)^2}) \quad (13.27)$$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + m_1at + m_2bt + o(t) \quad (13.28)$$

La derivata direzionale lungo il versore \vec{v} sarà il limite del rapporto incrementale:

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t} \quad (13.29)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m_1at + m_2bt + o(t)}{t} \quad (13.30)$$

$$= m_1a + m_2b + \frac{o(t)}{t} \quad (13.31)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} m_1a + m_2b \quad (13.32)$$

Quindi se la funzione è **differenziabile le sue derivate direzionali esistono per qualunque direzione e sono pari a:**

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = m_1a + m_2b \quad (13.33)$$

Quindi possiamo calcolare le derivate parziali.

- $\vec{v} = (1, 0)$ allora

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = m_1 \quad (13.34)$$

- $\vec{v} = (0, 1)$ allora

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = m_2 \quad (13.35)$$

Dunque si arriva alla tesi:

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot b \quad (13.36)$$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} \quad (13.37)$$

$$\blacksquare \quad (13.38)$$

ricordando che il gradiente è un vettore, allora la derivata direzionale è un prodotto scalare tra vettori.

Nuova definizione di differenziabilità

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) \quad (13.39)$$

E questa è anche l'equazione del piano tangente in (x_0, y_0) .

13.5 Verificare la differenziabilità

1. **Continuità non implica la derivabilità.** $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ è continua ma non derivabile, perchè non esistono le derivate parziali.
2. **Derivabilità non implica differenziabilità.** In \mathbb{R}^2 funzioni come

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & xy = 0 \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases} \quad (13.40)$$

sono **non continue** ma derivabili.

3. **Continuità assieme alla derivabilità non implicano differenziabilità.** Un esempio è studiare la seguente funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (13.41)$$

dove la funzione è continua, esistono le derivate parziali ma non esiste il limite dell'o-piccolo.

13.6 Condizione sufficiente di differenziabilità

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $(x_0, y_0) \in A$. Supponiamo che f sia derivabile in (x_0, y_0) e che le derivate parziali esistano finite in un intorno di (x_0, y_0) e sono funzioni continue nel punto (x_0, y_0) . Allora posso garantire che f sia differenziabile in (x_0, y_0) .

In particolare se $f \in \mathcal{C}^1$, cioè f è derivabile in tutti i punti di A e le derivate parziali sono funzioni continue in tutti i punti di A , allora la condizione sufficiente è verificata in tutti i punti di A .

n variabili Se f è differenziabile allora

$$m_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, m_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})$$

e inoltre

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})(x_n - a_n) + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|), \vec{x} \rightarrow \vec{a} \quad (13.42)$$

cioè la funzione può essere riscritta come polinomio di primo grado in n variabili e il termine

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a})(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})(x_n - a_n) + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|) \quad (13.43)$$

si chiama **differenziale primo** di una funzione f in \vec{a} .

13.7 Proprietà del gradiente

13.7.1 Direzione di massima crescita

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto e f differenziabile in A . Dato un punto $(x_0, y_0) \in A$, se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ allora **il gradiente rappresenta la massima direzione di crescita della funzione f nel punto (x_0, y_0) .**

In altre parole, $D_{\vec{v}}f(x_0, y_0)$ è massima in corrispondenza **del vettore che ha la stessa direzione del gradiente, ovvero dal vettore**

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|} \quad (13.44)$$

Dimostrazione Se la funzione è differenziabile allora vale la formula del gradiente

$$D_{\vec{v}}f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{v} \quad (13.45)$$

$$= |\nabla f(x_0, y_0)| |\vec{v}| \cos \alpha \quad (13.46)$$

Dunque la derivata è massima se $\cos \alpha = 1$, ovvero $\alpha = 0$. Di conseguenza dal prodotto scalare ricaviamo il vettore \vec{v} :

$$\vec{v} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}$$

■

13.7.2 Derivazione delle funzioni composte

Siano $x(t)$ e $y(t)$ due funzioni di una variabile definite in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Allora la funzione $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ è una curva parametrica nel piano xy .

Sia invece $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto e sia la curva definita da $\vec{r}(t) : \gamma$ inclusa in A . Allora la funzione $f(x(t), y(t)) = f(\vec{r}(t)) = h(t)$ è una funzione

ad una variabile.

Ammesso che f sia differenziabile in A , e $x(t), y(t)$ sono derivabili in I la loro derivata sarà:

$$h'(t) = f_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \quad (13.47)$$

$$= \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) \quad (13.48)$$

Ovvero la derivata di f è uguale al prodotto scalare tra il gradiente e il vettore delle derivate.

Cenni della dimostrazione Si parte dall'ipotesi per cui f è differenziabile in tutto A , scegliamo un punto (x_0, y_0) . Per definizione di differenziabilità allora:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}) \quad (13.49)$$

dunque:

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &\approx f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\approx \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \end{aligned}$$

Poichè la funzione può essere riscritta come funzione a una variabile dalle ultime relazioni trovate è vero che

$$\begin{aligned} h(t + \Delta t) - h(t) &= f(\vec{r}(t + \Delta t)) - f(\vec{r}(t)) \\ &\approx \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot [\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)] \\ t \rightarrow 0 \quad \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t} &\approx \nabla h(t) \cdot \frac{[\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)]}{\Delta t} \end{aligned}$$

poichè quello che abbiamo scritto equivale al limite del rapporto incrementale allora

$$h'(t) = \nabla h(t) \cdot \vec{r}'(t) \quad (13.50)$$

$$h'(t) = \nabla h(t) \cdot (x'(t), y'(t)) \blacksquare \quad (13.51)$$

13.7.3 Proprietà con le curve di livello

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto e f differenziabile in tutto A e preso un punto $(x_0, y_0) \in A$ in cui $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ allora $\nabla f(x_0, y_0)$ è **perpendicolare** in (x_0, y_0) alla curva di livello di f per (x_0, y_0) .

Dimostrazione Sia $\gamma : z = f(x_0, y_0)$ la curva di livello per (x_0, y_0) . Sia $\vec{r} = \vec{r}(t), t \in I$ l'equazione parametrica della curva di livello γ . E' vero dire che

$$f(\vec{r}(t)) - h(t) = cost \quad (13.52)$$

si conseguenza in $t = t_0$ la derivata di $h(t) = f(x(t), y(t))$ sarò:

$$h'(t_0) = \nabla f(\vec{r}(t_0)) \cdot \vec{r}'(t) = 0 \quad (13.53)$$

ovvero il gradiente è perpendicolare al vettore tangente (derivata in (x_0, y_0)) alla curva di livello ■.

Capitolo 14

Ottimizzazione

14.1 Derivate parziali del secondo ordine

Consideriamo come esempio la seguente funzione: $f(x, y) = (x + y)e^y$. Le derivate parziali sono definite come:

$$\begin{aligned}f_x &= e^y \\f_y &= e^y + (x + y)e^y\end{aligned}$$

Le derivate seconde invece sono definite come

$$\begin{aligned}f_{xx} &= 0 \\f_{xy} &= e^y \\f_{yx} &= e^y \\f_{yy} &= e^y(x + y + 1)\end{aligned}$$

Le derivate seconde f_{xy} e f_{yx} sono uguali per il Teorema di Schwarz.

Teorema 29 (Teorema di Schwarz). Data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, con A aperto e $f \in \mathcal{C}^2$ ovvero derivabile due volte con derivata continua. Allora è vero che:

$$f_{xy} = f_{yx} \quad (14.1)$$

14.2 Formula di Taylor al secondo Ordine

Taylor per una variabile Sia f una funzione derivabile due volte, allora la sua formula di Taylor al secondo ordine è definita come:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + o(x - x_0^2) \quad (14.2)$$

Taylor per due variabili Sia $f(x, y)$ una funzione di classe \mathcal{C}^2 in A (vale il Teorema di Schwarz). La formula di Taylor per tale funzione sarà:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \\ & + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}[f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + \\ & + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] + o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \end{aligned} \quad (14.3)$$

Nella formula di Taylor è presente il differenziale primo della funzione:

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \quad (14.4)$$

cioè è una funzione lineare di $h = (x - x_0)$ e $k = (y - y_0)$. Il differenziale secondo invece è:

$$d^2 f(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk + f_{yy}(x_0, y_0)k^2 \quad (14.5)$$

ed è una **forma quadratica**.

14.3 Matrice Hessiana

Si definisce matrice Hessiana di una funzione di classe \mathcal{C}^2 la matrice così formata:

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \quad (14.6)$$

Essendo il differenziale secondo una forma quadratica questo può essere:

- **Positivo (Negativo)**: autovalori entrambi positivi (negativi);
- **Semi positiva (negativa)**: autovalore uno nullo e uno positivo (negativo);
- **Indefinita**: autovalori discordi;

Si ricorda che trovato un punto per cui la forma quadratica assume un certo segno allora il segno è mantenuto anche sulla retta passante per quel punto e per l'origine.

14.4 Massimi e minimi

Sia data una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in A$ allora il punto (x_0, y_0) è un massimo (minimo) relativo se per tutti i punti appartenenti ad un suo intorno vale la seguente disequazione:

$$f(x_0, y_0) \geq (\leq) f(x, y), (x, y) \in U(x_0, y_0) \cap A \quad (14.7)$$

Il punto (x_0, y_0) è un massimo (minimo) assoluto se la disequazione vale per tutti i punti di A e non solo l'intorno di (x_0, y_0) .

14.4.1 Fermat per due variabili

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con $(x_0, y_0) \in A$ se f è derivabile in (x_0, y_0) allora se il punto è di massimo o minimo allora $f_x = f_y = 0$.

Dimostrazione Supponiamo che (x_0, y_0) sia un punto di massimo relativo di f in A . Allora $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$ in un intorno del punto.

Studio l'intorno del punto in modo di spostarmi lungo la retta $r_y = y_0$. La funzione a due variabili diventa a una variabile, e si ha:

$$\begin{aligned} f(x, y_0) &= g(x) \\ \rightarrow g(x_0) &\geq g(x) \forall x \in y = y_0 \end{aligned}$$

Se in (x_0, y_0) c'è un massimo allora è vero dire che $g'(x) = 0$ per il Teorema di Fermat per le funzioni a una variabile. Quindi si ha che:

$$g'(x) = f_x(x_0, y_0) = 0 \quad (14.8)$$

Analogamente si fa lo stesso ragionamento per le y , quindi infine si ha:

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0 \quad (14.9)$$

14.5 Condizione sufficiente per i punti stazionari

Teorema 30 (Teorema della matrice Hessiana). Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto e $f \in \mathcal{C}^2(A)$, cioè la matrice Hessiana è simmetrica. Dato un punto stazionario (x_0, y_0) per cui $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$. Allora si ha che:

1. Se $Hf(x_0, y_0)$ ha due autovalori positivi (2 negativi) allora che (x_0, y_0) è un punto di minimo (massimo);
2. Se $Hf(x_0, y_0)$ ha due autovalori discordi allora (x_0, y_0) è un punto di sella;
3. Se $Hf(x_0, y_0)$ ha un autovalore nullo allora non è possibile stabilire la natura del punto con questo criterio;

Dimostrazione La formula di Taylor al secondo ordine in $(x_0, y_0) = P_0$ è definito come

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(P_0) + f_x(P_0)(x - x_0) \\ & + f_y(P_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}[f_{xx}(P_0)(x - x_0)^2 \\ & + 2f_{xy}(P_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(P_0)(y - y_0)^2] + o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) \end{aligned} \quad (14.10)$$

cambiamo variabili e denotiamo come $h = x - x_0$ e $k = y - y_0$. Poichè per ipotesi P_0 è un punto stazionario il differenziale primo può essere ignorato in quanto nullo. Quindi si ha che

$$\begin{aligned} \Delta f(P_0) = & f(x_0 + h, y_0 + k) - f(P_0) = \\ & \frac{1}{2}[f_{xx}(P_0)h^2 + 2f_{xy}(P_0)hk + f_{yy}(P_0)k^2] \end{aligned} \quad (14.11)$$

Dunque per stabilire il punto stazionario bisogna studiare il segno della funzione in un intorno nell'origine del punto, ovvero dell'incremento nel punto P_0 , cioè bisogna studiare **il segno del differenziale secondo**, e l'o-piccolo può essere trascurato.

Se $d^2f \neq 0$ nell'intorno del punto il segno del differenziale secondo è dato dalla matrice Hessiana, in quanto il differenziale secondo è una forma quadratica.

1. Se $Hf(P_0)$ ha due autovalori positivi (negativi) allora P_0 è un punto di minimo (massimo) relativo perchè il segno del differenziale secondo, cioè l'incremento è positivo (negativo);
2. Se $Hf(P_0)$ ha due autovalori discordi, il d^2f è una forma quadratica indefinita, in ogni punto dell'origine il differenziale secondo, cioè l'incremento cambia in ogni punto dell'intorno del punto, quindi P_0 è una sella;

3. Se un autovalore della matrice Hessiana è nullo, esistono infiniti punti nell'intorno del punto per cui il differenziale secondo è nullo: in quei punti il segno dell'incremento è dato dall'o-piccolo, quindi andrebbe approssimata la funzione al terzo ordine per conoscere la natura del punto;

■

14.5.1 Corollario della matrice Hessiana

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto e $f \in \mathcal{C}^2(A)$. Denotiamo con $P_0 = (X_0, y_0) \in A$ un punto stazionario di f . Allora è vero che se:

1.

$$\det Hf(P_0) > 0, \begin{cases} f_{xx} > 0 \rightarrow \min \\ f_{xx} < 0 \rightarrow \max \end{cases} \quad (14.12)$$

2.

$$\det Hf(P_0) < 0 \rightarrow \text{sella} \quad (14.13)$$

3.

$$\det Hf(P_0) = 0 \rightarrow ? \quad (14.14)$$

Matrice Hessiana per funzione a tre variabili Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{C}^2(A)$, allora

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{yx} & f_{zx} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{zy} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{bmatrix} \quad (14.15)$$

in quanto la funzione è di classe \mathcal{C}^2 la matrice è simmetrica. Per tutti gli autovalori positivi (negativi) si ha un minimo (massimo) relativo. Se gli autovalori sono discordi si ha una sella.

14.6 Ottimizzazione libera e vincolata

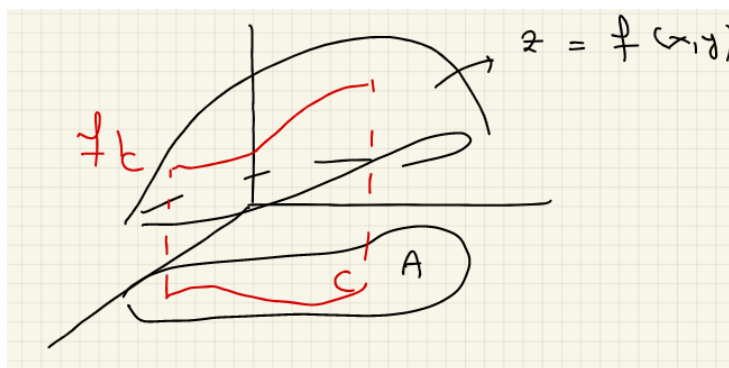
Nell'**ottimizzazione libera** si cercano i punti estremanti di una funzione in un insieme aperto. Nell'ottimizzazione **vincolata** si cercano gli estremi di una funzione in un insieme aperto. Se A non è aperto è chiamato **vincolo**. Esistono i vincoli di uguaglianza e di disuguaglianza.

14.6.1 Ottimizzazione vincolata per vincoli di uguaglianza

Siano f e g due funzioni definite da $A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto. Dobbiamo cercare gli estremi di f contenuti in \mathbb{R}^2 vincolati alla C che l'insieme dei punti di A per cui la funzione si annulla.

Per risolvere questo problema si devono studiare i massimi e i minimi di $f(C)$, ovvero si studia la funzione per un vincolo imposto.

Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dove f è la funzione in cui bisogna trovare i massimi e i minimi assoluti rispetto il vincolo $C : \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$. Bisogna studiare la funzione f quando $f(x, y) = C$.



Esempio Un esempio è l'ottimizzazione di $f(x, y) = x^2 - y^2$. In \mathbb{R}^2 non ci sono ne massimi ne minimi. Se pongo le restrizioni prima con $y = 0$ e poi con $x = 0$ osservo che si hanno funzioni in una sola variabile:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 \\ h(y) &= -y^2 \end{aligned}$$

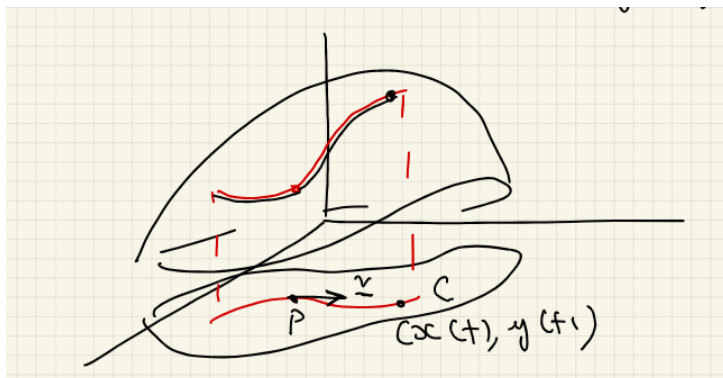
Quindi si nota con facilità che in un intorno di $(0, 0)$ per $g(x)$ è presente un minimo assoluto, per $h(y)$ un massimo, dunque siamo in presenza di un punto di sella.

Osservazione Sia $P = (x_0, y_0)$ un punto di massimo/minimo per una qualsiasi funzione $f(x, y)$. Allora la derivata direzionale in P per un qualsiasi vettore $\vec{v} = (a, b)$ sarà:

$$D_{\vec{v}}f(P) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \quad (14.16)$$

In corrispondenza di un massimo/minimo tutte le derivate direzionali sono nulle.

Sia $P = (x_0, y_0)$ un punto di massimo o minimo di f vincolato a $C : \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$. Allora la derivata in P è nulla quando la direzione del vettore \vec{v} corrisponde alla direzione della retta tangente alla curva C .



Teorema 31 (Teorema di Fermat per gli estremi vincolati). Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$. Sia $P = (x_0, y_0)$. E' un punto di massimo/minimo di f vincolato a $C : \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$. Se $\nabla g(P_0) \neq (0, 0)$ allora la $D_{\vec{v}}f(P) = 0$, con \vec{v} vettore della retta tangente al vincolo C in P .

Dimostrazione Parametizziamo la curva C :

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow f|_C = f(x(t), y(t)) = h(t)$$

Per il nostro punto $P = (x_0, y_0)$ esiste un valore t_0 . La derivata di h in t_0 sarà:

$$h'(t_0) = f_x(P)x'(t_0) + f_y(P)y'(t_0) \quad (14.17)$$

Poichè per ipotesi P è un punto stazionario allora:

$$h'(t_0) = 0 = f_x(P)x'(t_0) + f_y(P)y'(t_0) \quad (14.18)$$

$$= \nabla f(P) \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} \quad (14.19)$$

dove il vettore $\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$ è il vettore tangente alla curva C in P . Inoltre è anche vero che $\nabla g(P) \perp C$ in P . Quindi il gradiente di g è perpendicolare al vettore della retta tangente. Quindi $\nabla f(P) \parallel \nabla g(P)$:

$$\exists \lambda : \nabla f(P) = \lambda \cdot \nabla g(P)$$

Valgono le seguenti relazioni:

1. $g(x_0, y_0) = 0$
2. $f_x(x_0, y_0) = \lambda_0 g_x(x_0, y_0)$
3. $f_y(x_0, y_0) = \lambda_0 g_y(x_0, y_0)$

Funzione Lagrangiana E' chiamata **funzione lagrangiana** la funzione in tre variabili

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y) \quad (14.20)$$

Teorema 32 (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange). $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto, $f, g \in \mathcal{C}^1(A)$. Sia $P = (x_0, y_0)$ un punto di massimo/minimo vincolato a $C : \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$. Se $\nabla g(P) \neq (0, 0)$ allora *exists* λ :

$$(x_0, y_0, \lambda) \quad (14.21)$$

è un punto stazionario di $\mathcal{L}(x, y, \lambda)$

Capitolo 15

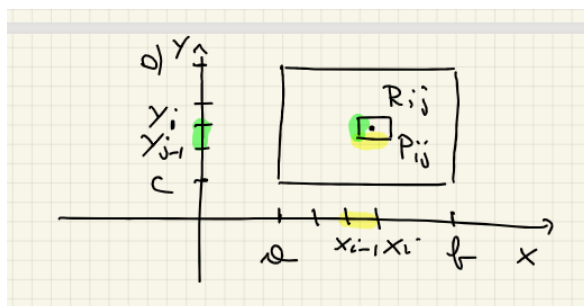
Integrali doppi e tripli

Definizione per funzioni a una variabile Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con $[a, b]$ limitato. Allora l'integrale tra a e b di f è definito come:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x \quad (15.1)$$

con $a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ e $\Delta x = b/a$.

Due variabili Sia $f(x, y)$ limitata in $R = [a, b] \times [c, d]$ con R un rettangolo. Sia $a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ e $c < y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$. Il rettangolo R è dunque composto da n^2 rettangoli R_{ij} . dato il punto P_{ij} questo sarà racchiuso in un rettangolo R_{ij} .



La somma di Riemann per la funzione $f(x, y)$ è definita come:

$$s_m = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \cdot \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{n} \quad (15.2)$$

se poniamo $n \rightarrow \infty$ se s_m **esiste finito e non dipende dalla scelta dei punti** P_{ij} allora f è **integrabile in R**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_m = \iint_R f(x, y) dx dy \quad (15.3)$$

Il significato geometrico dell'integrale doppio su un rettangolo R è il volume delimitato dalla proiezione del grafico di $f(x, y)$ e il piano xy , dunque il volume sotteso (se $f(x, y)$ sempre positiva). Se il segno della funzione è qualsiasi allora l'integrale doppio corrisponde alla somma algebrica di volumi (positivi per la funzione positiva e negativi per la funzione negativa).

15.0.1 Rispetto qualunque insieme

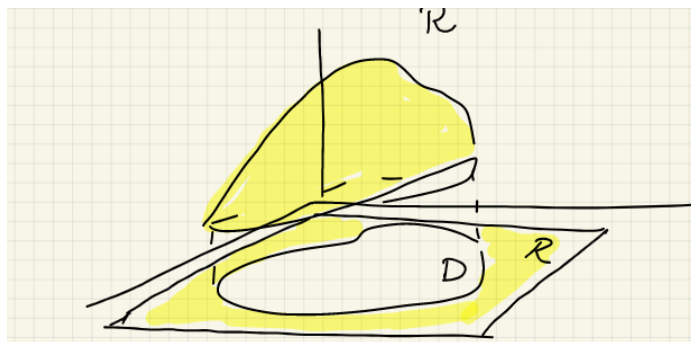
Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato, e $f(x, y)$ una funzione a due variabili limitata in D . Come si calcola

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad (15.4)$$

Prima consideriamo un rettangolo R qualsiasi che contenga D . Allora l'integrale doppio scritto in precedenza equivale a calcolare l'integrale doppio della funzione a tratti:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R \setminus D \end{cases} \quad (15.5)$$

Se f è integrabile in D , allora \tilde{f} sarà integrabile in R .

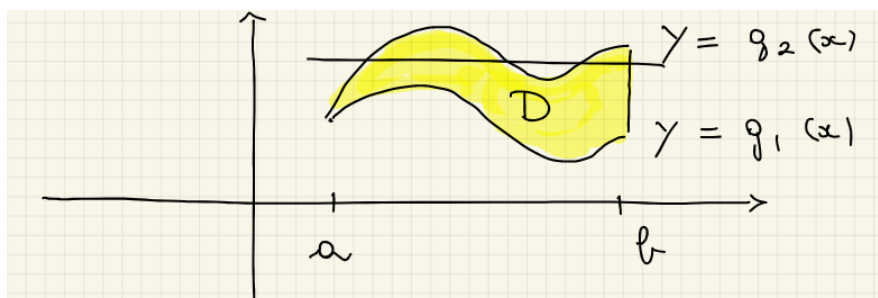


15.1 Insiemi x-semplfici e y-semplfici

Se una funzione è continua in D , allora è anche integrabile in D ? Non per forza.

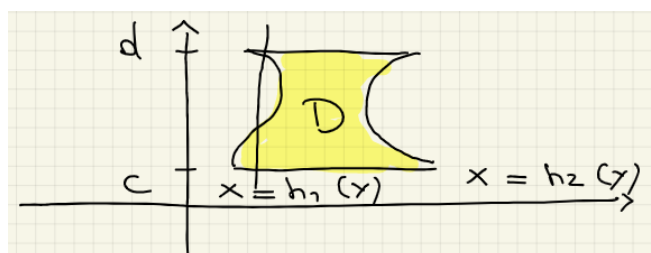
Y-semplfici Si definisce un insieme y-semplce come un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) < y < g_2(x)\} \quad (15.6)$$



X-semplfici Si definisce un insieme x-semplce come un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) < x < h_2(y)\} \quad (15.7)$$



Si dice che D è un insieme regolare se è costituito da un numero finito di insiemi x -semplci e y -semplci.

Esempio Sia $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$. D è un insieme y-semplce e x-semplce.

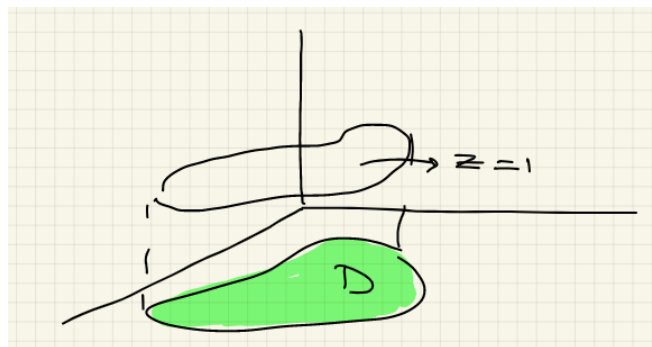
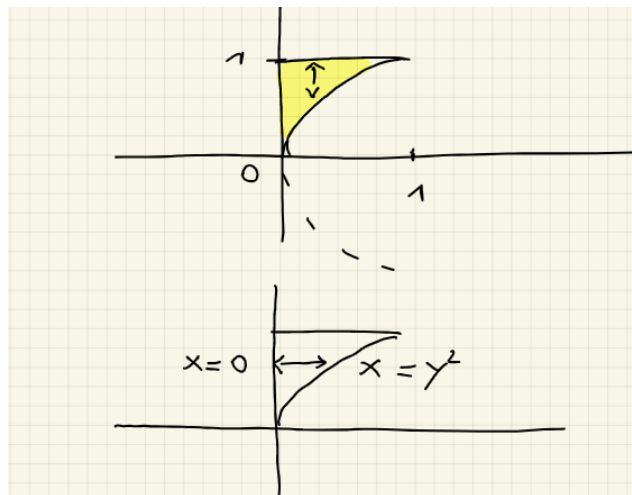
Teorema 33. Se una funzione è continua in un insieme D regolare, allora è integrabile in D .

Misura di D Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$, D è misurabile se $f(x, y) = 1$ è integrabile in D . Si chiama **misura di D** l'integrale della funzione uno.

$$|D| = \iint_D dx dy \quad (15.8)$$

Se D è regolare allora è anche misurabile.

La misura di D rappresenta il volume sotteso quando $f(x, y) = 1$.



15.2 Proprietà dell'integrale

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$, D regolare, f e g integrabili.

1.

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy \quad (15.9)$$

2.

$$\iint_D c \cdot f(x, y) dx dy = c \cdot \iint_D f(x, y) dx dy \quad (15.10)$$

3. Se $D = D_1 \cap D_2$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy \quad (15.11)$$

4. Se $|D| = 0$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0 \quad (15.12)$$

15.3 Formule di riduzione

Se $D \subseteq \mathbb{R}^2$, con $f(x, y)$ continua in D . Se D è y-sempllice,

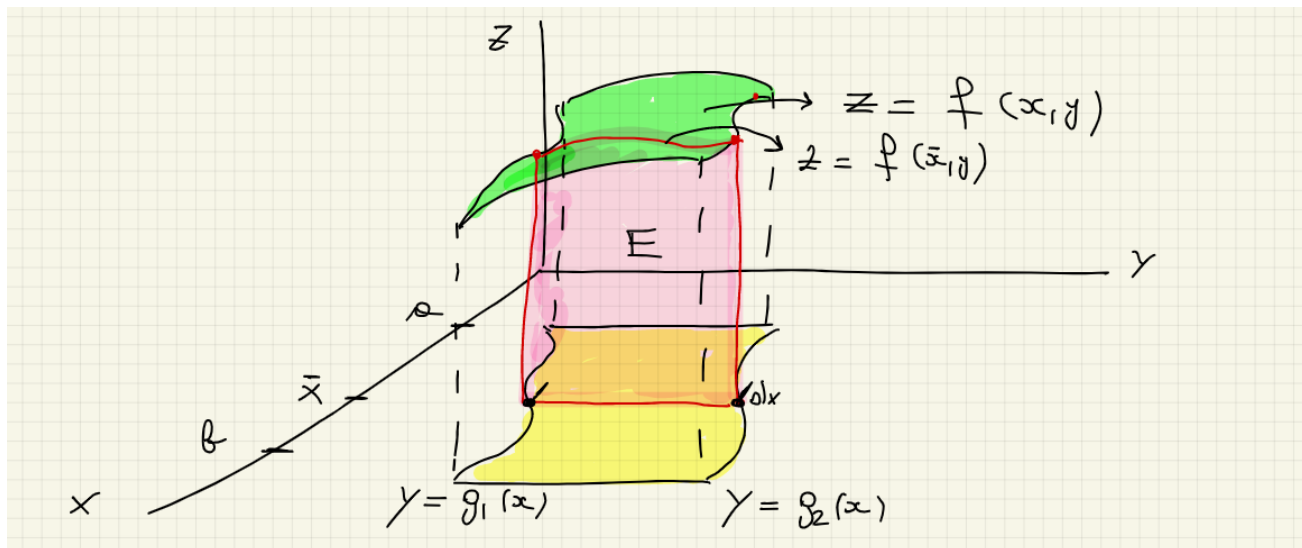
$$D = \{(x, y) : \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) < y < g_2(x)\} \quad (15.13)$$

con g_1 e g_2 continue in $[a, b]$, allora:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad (15.14)$$

Se invece D è x-sempllice si ha che:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \quad (15.15)$$



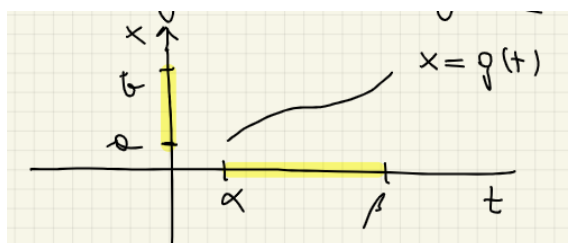
Dimostrazione geometrica Geometricamente si integra la sezione E (l'area tra la superficie e il piano xy) tra a e b .

15.4 Cambio di variabili per gli integrali doppi

Integrale singolo Per gli integrali "singoli" il cambio di variabili era così definito:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t) dt \quad (15.16)$$

Quindi da un intervallo di integrazione $I = [a, b]$ era corrisposto un intervallo $J = [\alpha, \beta]$.



Qualora la funzione $x = g(t)$ dovesse essere decrescente allora metto il valore assoluto.

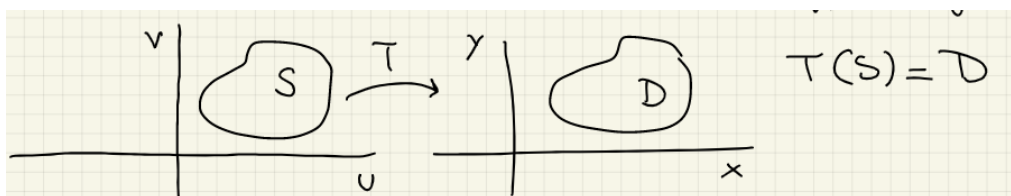
Integrale doppio Negli integrali doppi possiamo effettuare il cambio di variabile del tipo:

$$f(x, y) = f(g(u, v), h(u, v)) \quad (15.17)$$

in altre parole poniamo le seguenti uguaglianze:

$$T : \begin{cases} x = g(u, v) \\ y = h(u, v) \end{cases} \quad (15.18)$$

Inoltre effettuando questo cambio di variabili dobbiamo stare attenti al dominio di integrazione, che non sarà più D ma sarà S con $D = T(S)$.



Dunque definiamo una funzione $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che $T(u, v) \rightarrow (x, y) = (g(u, v), h(u, v))$.

Infine il cambio di infinitesimo è definito come:

$$dxdy = \left| \det \begin{bmatrix} g_u(u, v) & g_v(u, v) \\ h_u(u, v) & h_v(u, v) \end{bmatrix} \right| dudv \quad (15.19)$$

Si nota che la seguente definizione è applicabile anche per l'integrale singolo, infatti si avrà che

$$dx = |g'(t)|dt \quad (15.20)$$

La matrice

$$JT(u, v) = \begin{bmatrix} g_u(u, v) & g_v(u, v) \\ h_u(u, v) & h_v(u, v) \end{bmatrix}$$

è definita come **Matrice Jacobiana**

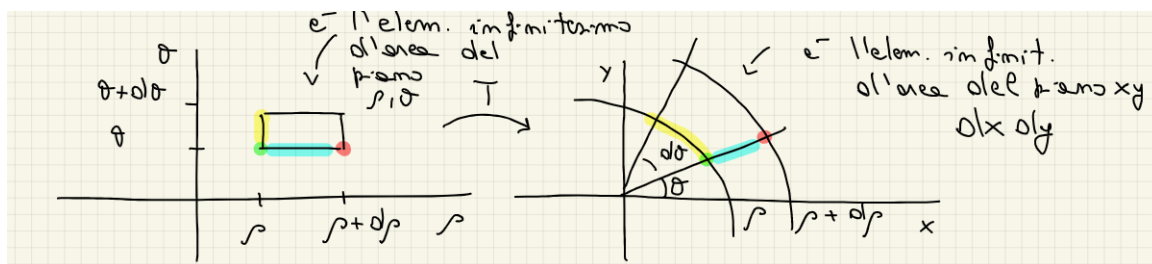
Teorema 34 (Teorema del cambio di variabili negli integrali doppi). Sia $f(x, y)$ una funzione in un insieme D regolare e consideriamo una funzione $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u, v) = (x, y)$, dove $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$. Sia inoltre $T(S) = D$. T è **biunivoca** tra S e D , e $T \in \mathcal{C}^1(S)$ e $T^{-1} \in \mathcal{C}^1(D)$. Allora

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_S f(g(u, v), h(u, v)) |det JT(u, v)| dudv \quad (15.21)$$

Esempio con le coordinate polari Attraverso le coordinate polari sostituiamo x e y con le seguenti funzioni:

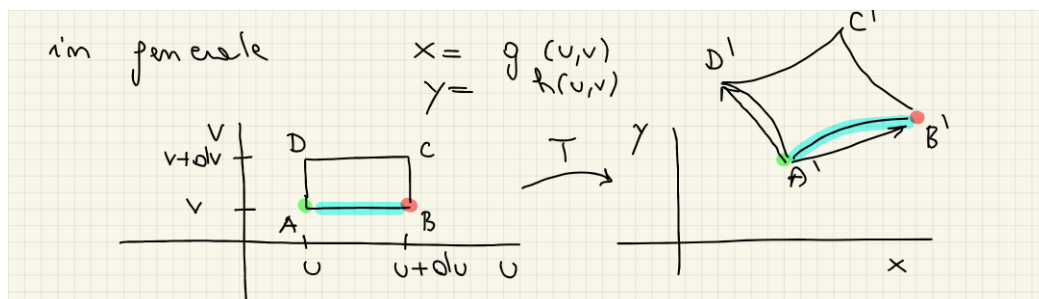
$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta = g(\rho, \theta) \\ y = \rho \sin \theta = h(\rho, \theta) \end{cases} \quad (15.22)$$

Quindi esiste una funzione $T(\rho, \theta) \rightarrow (x, y)$. Consideriamo ora l'insieme S nel piano $\rho\theta$ rettangolare:



Il rettangolo infinitesimo S dunque corrisponde al settore di corona circolare infinitesimo D . In questo caso applicando il Teorema di Cambio delle Variabili si avrà che:

$$dxdy = \rho d\rho d\theta \quad (15.23)$$



In generale preso qualsiasi cambio di variabili $x = g(y, v)$ e $y = h(u, v)$ si ha che:

$$\begin{aligned} A' &= (g(u, v), h(u, v)) \\ B' &= (g(u + du, v), h(u + du, v)) \\ A'B' &= (g(u + du, v) - g(u, v), h(u + du, v) - h(u, v)) \end{aligned}$$

poichè stiamo ragionando su porzioni di piano infinitesime possiamo riscrivere il segmento $A'B'$:

$$\begin{aligned} A'B' &\approx (g_u(u, v)du, h_u(u, v)du) \\ A'D' &\approx (g_v(u, v)dv, h_v(u, v)dv) \end{aligned}$$

Dunque l'area del parallelogramma $A'B'C'D'$ sarà data dalla seguente formula:

$$Area(A'B'C'D') \approx \left| \det \begin{bmatrix} g_u(u, v)du & h_u(u, v)du \\ g_v(u, v)dv & h_v(u, v)dv \end{bmatrix} \right| \quad (15.24)$$

$$\approx \left| \det \begin{bmatrix} g_u(u, v) & g_v(u, v) \\ h_u(u, v) & h_v(u, v) \end{bmatrix} \right| dudv \quad (15.25)$$

$$(15.26)$$

Gaussiana Dimostrare che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{2\pi}$

Integrale doppio in \mathbb{R}^2

15.5 Integrali tripli

L'integrale triplo è u integrale definito in $D \subseteq \mathbb{R}^3$ di una funzione $f(x, y, z)$.

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz \quad (15.27)$$

dove l'elemento $dx dy dz$ corrisponde al volume infinitesimo di integrazione. Se l'integrale è calcolato in D come una superficie, allora la sua misura è nulla, e si ha che

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz = 0 \quad (15.28)$$

Se D è un solido allora l'integrale triplo (in generale) non è nullo. Sebbene manchi l'interpretazione geometrica si possono trovare diverse applicazioni, come il calcolo della massa di un corpo conoscendo il volume e la funzione che indica la densità: $\rho(x, y, z)$. Se la densità è costante la massa è data dalla densità per la misura di D .

Integrazione per fili Nel caso in cui D sia z -semplice, allora questo può essere riscritto come

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\} \quad (15.29)$$

con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e g_1, g_2 funzioni continue in A . Quindi se D è z -semplice posso integrare per fili:

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \quad (15.30)$$

$$= \iint_A \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy \quad (15.31)$$

Il metodo è chiamato per fili perchè scelgo un punto (x, y) generico in A , lo integro variando z tra le due superfici $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$.

Integrazione per strati Consideriamo il dominio di integrazione D , e lo dividiamo in "strati" generici chiamati D_z . Allora:

$$D = \{(x, y, z) : (x, y) \in D_z, a \leq z \leq b\} \quad (15.32)$$

dove a e b sono rispettivamente l'altezza minima e massima che il dominio raggiunge sull'asse z .

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz \quad (15.33)$$

$$= \int_a^b \left(\iint_{D_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz \quad (15.34)$$

Cambio di variabili Analogamente agli integrali doppi si ha che:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz \quad (15.35)$$

$$= \iiint_S f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) \cdot \left| \det(JT(u, v, w)) \right| \, du dv dw \quad (15.36)$$

Quindi applichiamo il cambio di coordinate:

$$T : \begin{cases} x = g(u, v, w) \\ y = h(u, v, w) \\ z = k(u, v, w) \end{cases} \quad (15.37)$$

ovvero $T(S) = D$. La matrice Jacobiana equivale a:

$$JT(u, v, w) = \begin{bmatrix} \nabla g(u, v, w) \\ \nabla h(u, v, w) \\ \nabla k(u, v, w) \end{bmatrix} \quad (15.38)$$

Coordinate cilindriche Applichiamo il seguente cambio di variabili:

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

quindi la matrice Jacobiana sarà:

$$JT(\rho, \theta, z) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi avremo che $\det(JT) = \rho$

Coordinate sferiche Si applica il seguente cambio:

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

e $\det(JT) = \rho^2 \sin \phi$.

Capitolo 16

Campi vettoriali

Utilizziamo come esempio di partenza il campo gravitazionale:

$$\vec{G} = -k \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (16.1)$$

$$= -k \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (16.2)$$

di conseguenza il campo gravitazionale può essere riscritto in coordinate:

$$\vec{G} = \left(-k \frac{(x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -k \frac{(y)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -k \frac{(z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (16.3)$$

ovvero \vec{G} è una funzione che a ogni punto dello spazio associa un vettore, $\vec{G} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Un campo vettoriale nello spazio è una funzione del tipo

$$\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (16.4)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z) \right) \quad (16.5)$$

$$= F_1(x, y, z)\hat{i} + F_2(x, y, z)\hat{j} + F_3(x, y, z)\hat{k} \quad (16.6)$$

Dove la funzione $F_i : B \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ (sono funzioni scalari).

Sia $U(x, y, z) : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Il suo gradiente sarà:

$$\nabla U(x, y, z) = \left(U_x, U_y, U_z \right) \quad (16.7)$$

Ovvero ad ogni punto in \mathbb{R}^3 è associato un vettore, quindi per definizione **è un campo vettoriale, chiamato campo del gradiente**. Un esempio importante è il fatto che il campo della forza gravitazionale è gradiente dell'energia potenziale.

Capitolo 17

Campi vettoriali

Campo vettoriale conservativo Un campo vettoriale è definito come $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con A chiuso e connesso. \vec{F} è conservativo se esiste $U : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $U \in \mathcal{C}^2(A)$ tale per cui

$$\nabla U = \vec{F} \quad (17.1)$$

in ogni punto di A .

Rotore di un campo Si definisce **rotore** di un campo vettoriale $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(A)$ come

$$\text{rot}\vec{F}(x, y, z) = \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} \quad (17.2)$$

ovvero

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (17.3)$$

Il rotore di un campo è a sua volta un campo vettoriale. **Stabilisce la condizione necessaria affinché un campo sia conservativo.**

Teorema 35. Un campo \vec{F} definito in A aperto e connesso se è conservativo, allora il suo rotore sarà nullo, ovvero si dice che \vec{F} è **irrotazionale** in A .

Dimostrazione Se \vec{F} è conservativo allora è vero che $\nabla U(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z)$. Inoltre U deve essere di classe $\mathcal{C}^2(A)$. Per questo motivo il rotore sarà formato dalle derivate seconde di U , ma poichè U è di classe $\mathcal{C}^2(A)$ le derivate seconde saranno tutte uguali e il rotore sarà nullo.

Divergenza Dato un campo vettoriale $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con A chiuso e connesso e $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(A)$ si definisce divergenza del campo come

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \quad (17.4)$$

Lavoro lungo una curva Definito un campo vettoriale \vec{F} e una curva C parametrizzata $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ con C regolare a tratti (ovvero esiste il vettore tangente) sappiamo che $\vec{r}'(t)$ sarà il vettore tangente. La componente tangente del campo lungo la curva sarà $\vec{F}(\vec{r}(t)) \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$. Il lavoro quindi sarà l'integrale di linea

$$L(\vec{F}, C) = \int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} ds \quad (17.5)$$

sapendo che $ds = |\vec{r}'(t)| dt$ si ha che

$$L(\vec{F}, C) = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \quad (17.6)$$

e vale la seguente proprietà $L(\vec{F}, -C) = -L(\vec{F}, C)$.

Teorema 36 (Teorema fondamentale degli integrali di linea). Sia definito un campo vettoriale $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, A aperto e connesso, \vec{F} continuo in A , e definito U il potenziale di \vec{F} , allora se C è una curva di equazione $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ con $a \leq t \leq b$ allora si ha che

$$L(\vec{F}, C) = U(r(b)) - U(r(a)) \quad (17.7)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} L(\vec{F}, C) &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b \nabla U(r(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_a^b U_x(x(t))x'(t) + U_y(y(t))y'(t) + U_z(z(t))z'(t) dt \\ &= \int_a^b h'(t) dt = h(b) - h(a) \end{aligned}$$

con $h(t) = U(x(t), y(t), z(t))$

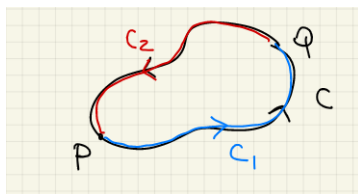
17.1 Proprietà dei campi conservativi

Sia $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, A aperto e connesso, $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(A)$. Valgono le seguenti proprietà.

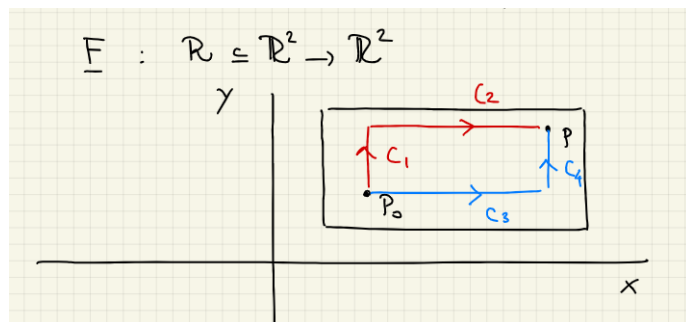
1. \vec{F} è conservativo in A ;
2. Se due curve C_1 e C_2 in A hanno gli stessi estremi allora $L(\vec{F}, C_1) = L(\vec{F}, C_2)$;
3. Se C è una curva chiusa contenuta in A allora $L(\vec{F}, C) = 0$;

La proprietà 1 implica la 2 a causa del Teorema fondamentale degli integrali di linea per il lavoro. La 2 implica la 3 perchè se consideriamo una curva chiusa divisa in due è vero che:

$$\begin{aligned} L(\vec{F}, C) &= L(\vec{F}, C_1) + L(\vec{F}, C_2) \\ &= L(\vec{F}, C_1) - L(\vec{F}, -C_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$



La 3 implica la 2 perchè $L(\vec{F}, C) = L(\vec{F}, C_1) - L(\vec{F}, -C_2) = 0$. Per dimostrare che la 3 implica la 2 si dimostra in un caso semplice.

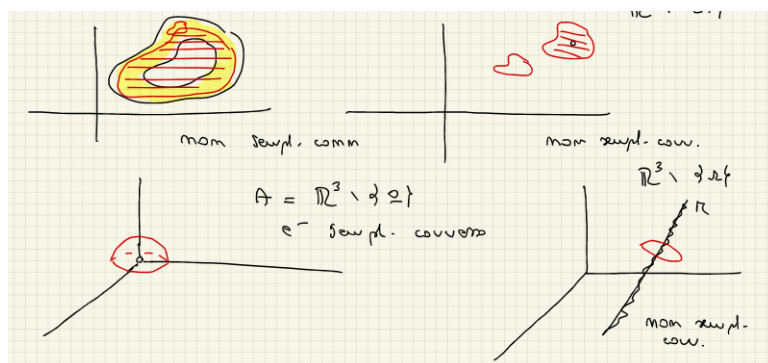


Consideriamo il rettangolo in figura. Calcoliamo il lavoro per portare P_0 in P . Sia $C = C_1 \cap C_2$.

$$\begin{aligned} L(\vec{F}, C) &= L(\vec{F}, C_1) + L(\vec{F}, C_2) \\ &= \int_{y_0}^y \vec{F}(x_0, t) \hat{j} dt + \int_{x_0}^x \vec{F}(t, y) \hat{i} dt \\ &= \int_{y_0}^y F_2(x_0, t) dt + \int_{x_0}^x F_1(t, y) dt \\ &\rightarrow U(x, y) = \int_{y_0}^y F_2(x_0, t) dt + \int_{x_0}^x F_1(t, y) dt \end{aligned}$$

Quindi abbiamo che $U_x = F_1$ e $U_y = F_2$.

Insieme connesso Sia A un insieme aperto e connesso. Un insieme è connesso quando **ogni curva chiusa e semplice ottenuta in A è frontiera di un insieme limitato interamente contenuto in A .**



Teorema 37. Sia $\vec{F} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, A semplicemente connesso, e $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(A)$. Se \vec{F} è irrotazionale in A allora \vec{F} è conservativo in A .

17.2 Teorema di Green

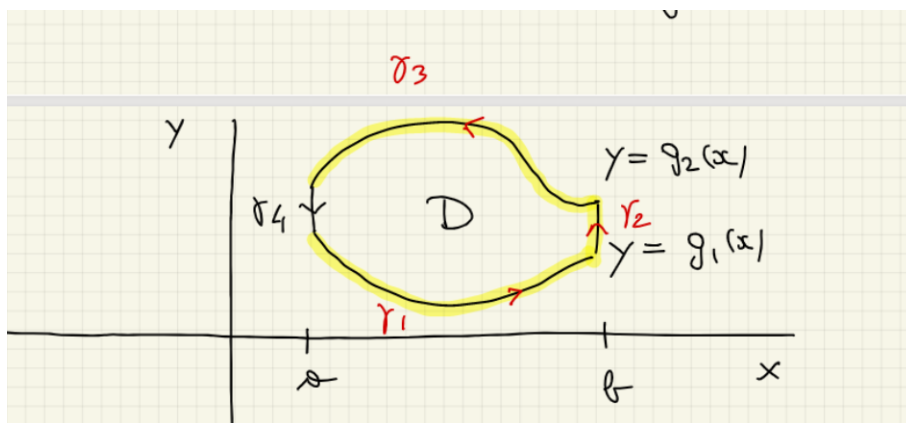
Teorema 38 (Teorema di Green). Sia $\vec{F}(x, y) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i}$. Se $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(D)$ cioè $P(x, y) \in \mathcal{C}^1$. Sia D y-sempllice e sia continuo l'insieme dei punti di frontiera di $\gamma = \partial D$. Allora è vero che

$$L(\vec{F}, \partial D) = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy \quad (17.8)$$

Dimostrazione Abbiamo detto che D è y -semplice, quindi:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \quad (17.9)$$

con g_1 e g_2 continue.



Suddividiamo l'insieme ∂D in quattro curve percorse in senso antiorario. Per simmetria il lavoro svolto lungo γ_2 è lo stesso ma di segno opposto a quello svolto lungo γ_4 . Le curve γ_1 e γ_3 devono essere parametrizzate.

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = g_1(t) \end{cases} \\ \begin{cases} x' = 1 \\ y' = g_1'(t) \end{cases} \\ \rightarrow L(\vec{F}, \gamma_1) = \int_a^b P(t, g_1(t)) dt \end{aligned}$$

Analogamente per $-\gamma_3$ si ha:

$$\begin{aligned} -\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = g_2(t) \end{cases} \\ \begin{cases} x' = 1 \\ y' = g_2'(t) \end{cases} \\ \rightarrow L(\vec{F}, -\gamma_3) = \int_a^b P(t, g_2(t)) dt \end{aligned}$$

Poichè il lavoro totale sarà la somma dei lavori lungo la prima e la terza curva sappiamo che:

$$L(F, \vec{\partial}D) = \int_a^b [P(t, g_1(t)) - P(t, g_2(t))] dt \quad (17.10)$$

Tuttavia riscrivendo questo integrale doppio si ha:

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \quad (17.11)$$

$$= \int_a^b [P(t, g_1(t)) - P(t, g_2(t))] dt \quad (17.12)$$

Analogamente se D è x-sempllice e $\vec{F}(x, y) = Q(x, y)\vec{j}$ e dunque si ha

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx dy \quad (17.13)$$

Se D è sia x-sempllice che y-sempllice e $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$. Allora il lavoro sarà

$$l(\vec{F}, \partial D) = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy \quad (17.14)$$

che prende il nome di **Formula di Green**. Il teorema di Green vale in domini **unione disgiunta di un numero finito di insiemi x e y semplici**.

Calcolo di Aree Attraverso il Teorema di Green è possibile calcolare le aree di figure piane. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato. L'area di D è uguale a

$$A(D) = \iint_D dx dy = L(\vec{F}, \partial D) \quad (17.15)$$

ovvero consideriamo il lavoro svolto da un campo vettoriale $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ in cui il rotore è pari a uno.

Conservazione energia meccanica per campi conservativi Per campi conservativi si ha che $\nabla U = \vec{F}$. Consideriamo una traiettoria curvilinea dal punto A al punto B $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ con $a \leq t \leq b$.

Il lavoro sarà la differenza di energia potenziale tra i punti B ed A. Quindi abbiamo che

$$L(\vec{F}, \gamma) = \int_a^b \vec{F}(r(t)) r'(t) dt \quad (17.16)$$

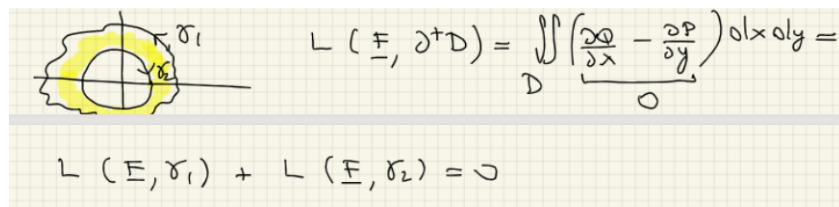
$$\int_a^b m r''(t) r'(t) dt \quad (17.17)$$

$$\frac{1}{2} m \int_a^b \frac{d}{dt} |r'(t)|^2 dt = \frac{1}{2} m (r'(b)^2 - r'(a)^2) \quad (17.18)$$

$$= \frac{1}{2} m v^2(B) - \frac{1}{2} m v^2(A) \quad (17.19)$$

$$\rightarrow U(B) - U(A) = K(B) - K(A) \quad (17.20)$$

Invarianza della circuitazione per deformazione delle traiettorie di campo irrotazionali.



$$L(F, \gamma) = \oint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy =$$

$$L(F, \gamma_1) + L(F, \gamma_2) = 0$$