Principi di Ingegneria Elettrica

Mattia Ruffini

Settembre 2022

Indice

Capitolo 1

Introduzione

L'elettrotecnica si basa sulle quattro leggi di Maxwell formulate nel 1873. Sono le seguenti:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L \tag{1.1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{1.2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = j_L + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{1.4}$$

Dove

- $\vec{D}$ è il vettore **induzione dielettrica**, e ρ_L è la densità di carica libera;
- $\vec{B}$ è il vettore **induzione magnetica**;
- $\vec{E}$ è il **campo elettrico**;
- $\vec{H}$ è il vettore **campo magnetico** mentre j_L è la densità di corrente;

I vettori di induzioni sono legati ai loro rispettivi campi:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

dove ϵ è la **permettività** mentre μ è la **permeabilità**. Queste equazioni sono alle derivate parziali nello spazio, di conseguenza la loro applicazione è molto difficile. Nell'elettrotecnica possono essere fatte delle semplificazioni in quando le onde elettromagnetiche hanno frequenze relativamente basse. Per onde elettromagnetiche con frequenza molto alta (come negli smartphone) devono essere applicate le leggi di Maxwell in modo rigoroso.

Nonostante la difficoltà nel comprendere queste leggi queste dicono alcune informazioni interessanti.

1. La divergenza di $\vec{D}$ indica come un punto si allontana da un altro. Se la divergenza è nulla, non si allontana, se la divergenza è positiva si allontana e se è negativa il punto si avvicina. Dunque è possibile definire le linee del campo elettrico, che escono dalle cariche positive ed entrano in quelle negative. Negli altri punti di passaggio la divergenza è di passaggio. In analisi quando la divergenza è nulla si ha o un massimo (cariche positive) o un minimo (cariche negative).

2. Analogamente a prima, la divergenza dell'induzione magnetica è nulla, dunque le linee di campo non hanno una sorgente e un "pozzo", ma sono chiuse. Esiste infatti un dipolo magnetico e non un monopolo.

3. Le ultime due leggi indicano che il campo elettrico è prodotto da una variazione del campo magnetico, e a sua volta il campo magnetico indotto è prodotto dalla variazione del campo elettrico. Inoltre è vera la relazione per cui
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{1.5}$$

1.1 Alcune leggi

Si definisce **corrente continua** una corrente costante nel tempo. E' una corrente alternata una corrente la cui intensità varia nel tempo. In Europa la frequenza della corrente alternata è di 50 Hz, con una tensione di 230 Volt.

La corrente elettrica è definta *come la quantità di carica positiva che passa attraverso una sezione nell'unità di tempo*

$$i = \frac{dq}{dt}\,[A] \tag{1.6}$$

La **tensione** è il lavoro per unità di carica

$$V = \frac{dW}{dq}\,[V] \tag{1.7}$$

La velocità di deriva degli elettroni è diversa dall'intensità di corrente e non è la velocità della luce.

Attraverso il lavoro elettrico è possibile fare diverse operazioni: produrre calore, produrre lavoro meccanico, produrre lavoro chimico o di altro tipo oppure immagazzinare energia.

1.2 Bipoli elettrici

I bipoli elettrici sono elementi che vengono utilizzati nella creazione di un circuito elettrico e hanno una specifica funzione.

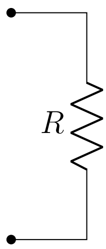
Normalmente per studiare un i bipoli si utilizza la **convenzione degli utilizzatori**, ovvero si misura la corrente in entrata di un polo, e quel polo sarà a potenziale maggiore. Esiste anche la **convenzione dei generatori** che per essere ottenuta bisogna invertire un parametro alla convenzione degli utilizzatori.

- **Resistori** La potenza elettrica viene convertita in calore. Il resistore è il terminale, e il suo parametro è la **resistenza**. Per la legge di Ohm

$$V = Ri \tag{1.8}$$

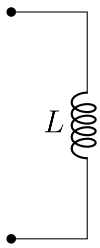
E inoltre

$$P = Vi = Ri^2 = \frac{V^2}{R} \tag{1.9}$$



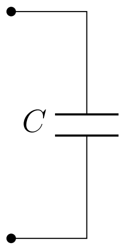
- **Induttori**, che hanno come parametro l'induttanza [Henry]. Un induttore è anche resistore ma prevale l'effetto induttivo.

$$V = L\frac{di}{dL} \tag{1.10}$$



Condensatori, che hanno come parametro la capacità [Farad]. Sono delle piastre cariche separate da un materiale isoelettrico. Immagazzina energia sotto forma di campo elettrico.

$$i = C\frac{dV}{dt} \tag{1.11}$$



Tensione o differenza di potenziale? Si parla di differenza di potenziale quando il campo vettoriale a cui è associato è conservativo. Il campo elettrico **non è conservativo** perchè valgono le leggi di Maxwell, tra cui

$$\nabla\vec{E} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Per questo motivo si utilizza il termine tensione e non differenza di potenziale.

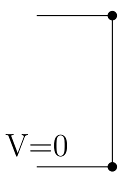
1.3 Cortocircuiti, circuiti aperti, generatori

Cortocircuito In caso di regime **stazionario, cioè con corrente costante** per gli induttori sappiamo che

$$v = L\frac{di}{dt} = 0$$

per qualsiasi corrente e si ha un cortocircuito. Il simbolo del cortocircuito è il seguente,...

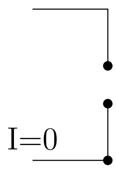
Un corto circuito è un elemento che può essere percorso da qualsiasi corrente ma non ha tensione ai suoi capi. Un altro esempio di cortocirciuto è quello con resistenza nulla ($R = 0$).



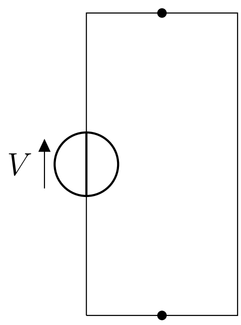
Circuito aperto Considerando un condensatore in regime stazionario in cui la tensione rimane costante, poichè

$$i = C\frac{dv}{dt} = 0$$

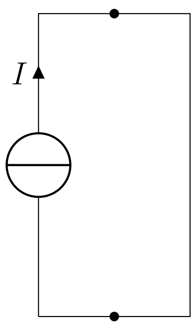
per qualsiasi tensione. Quindi il circuito è aperto e non vi è corrente. L'analogo per il resistore è quando la resistenza è idealmente infinita ($R = \infty$).



Generatore ideale di Tensione Il generatore ideale di tensione impone una tensione ai suoi capi, *qualunque sia la corrente che lo attraversa.* La connessione di due bipoli crea un circuito o rete elettrica.



Generatore ideale di corrente E' un dispositivo che impone una corrente per qualsiasi tensione. Il generatore ideale di corrente nella realtà non esiste, è una modellazione di un sottosistema nei sistemi complessi.



1.4 Leggi di Kirchhoff

1. **Legge delle tensioni**

   La sommatoria delle tensioni misurate in un percorso chiuso è uguale a zero.

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = 0 \tag{1.12}$$

2. **Legge delle correnti**

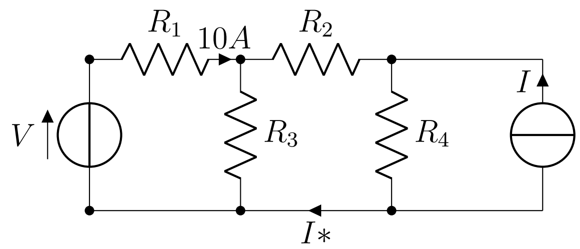
   Presa una superficie qualsiasi chiusa, la somma delle correnti entranti è uguale alla somma delle correnti uscenti, oppure, *la sommatoria delle correnti prese con il loro segno è nulla.*

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0 \tag{1.13}$$

Teorema 1 (Teorema fondamentale dell'elettrotecnica)**.** *Dato un circuito elettrico qualsiasi, le leggi di Kirchhoff delle correnti e delle tensioni, e le leggi di Ohm costituiscono un numero di equazioni sufficienti per risolvere la rete. La soluzione del circuito* ***esiste ed è unica****.*

Di conseguenza, per semplificare le reti, è possibile utilizzare mezzi che non infrangano queste leggi.

Un esempio di applicazione delle leggi di Kirchhoff è il seguente. Sia data la seguente rete.

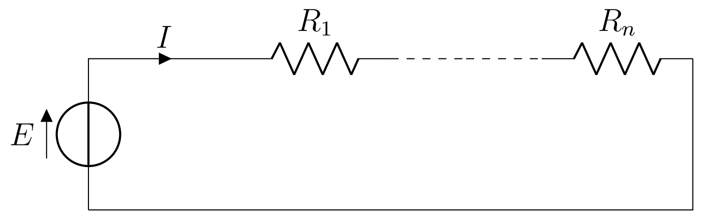


Che corrente si avrà in $I*$? Scegliendo la giusta superficie chiusa è ovvio che $I* = 10A$.

Capitolo 2

Connessioni in serie e parallelo

2.1 In serie



Per i resistori in serie la tensione ai capi del primo resistore e ai capi dell'ultimo sono uguali. Per la legge di Kirchhoff sulle tensioni e la legge di Ohm si ha che:

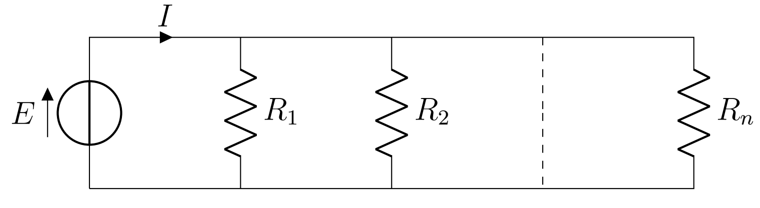
$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n \tag{2.1}$$

$$V = I(R_1 + R_2 + ... + R_n) \tag{2.2}$$

Tuttavia se il nostro obiettivo è semplificare la rete con una resistenza equivalente, cioè arrivare ad un'equazione del tipo $V = IR_eq$ si arriva alla conclusione per cui

$$R_eq = R_1 + R_2 + ... + R_n \tag{2.3}$$

2.2 In parallelo



Per i resistori in parallelo si introduce la **conduttanza** $G = \frac{1}{R}\,[S]$. L'unità di misura è il Siemens. Esiste anche l'**elastanza induttiva e capacitiva per induttori e condensatori**.

Nelle reti con resistenze in parallelo rimane costante la tensione, cambia la corrente che attraversa i nodi. Quindi si hanno le seguenti equazioni.

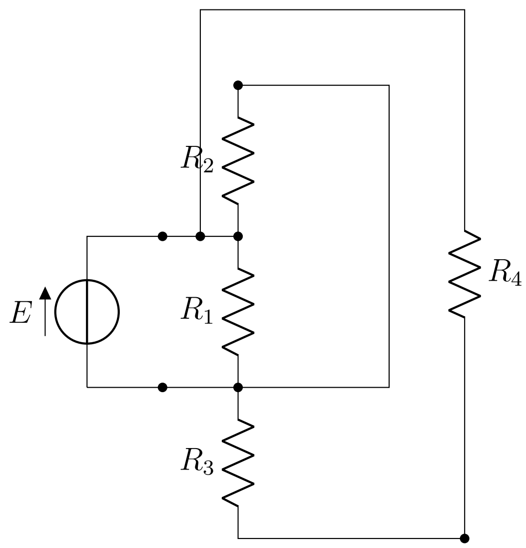
$$I = I_1 + I_2 + ... + I_n \tag{2.4}$$

$$I = G_1V + G_2V + ... + G_nV \tag{2.5}$$

Quindi si ha che

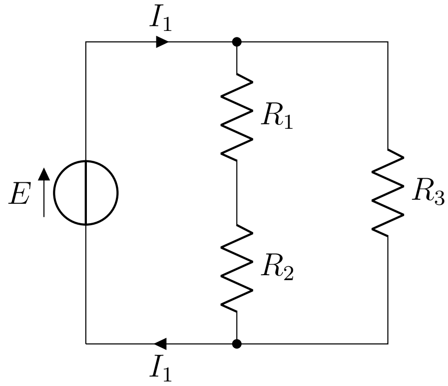
$$\frac{1}{R_eq} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n} \tag{2.6}$$

2.3 Semplificazione delle reti



Teorema 2. *Teorema fondamentale dell'elettrotecnica * Data una rete elettrica, l'insieme delle leggi di Kirchhoff delle correnti e delle tensioni e le leggi dei legami costitutivi (Ohm, Faraday per induzione e capacità) queste leggi costituiscono un numero di equazioni linearmente indipendenti per risolvere la rete.*

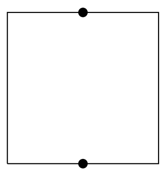
Dimostrazione Consideriamo una rete qualsiasi



In questa rete, se scriviamo la legge di Kirchhoff delle correnti per tutte le correnti, queste compariranno in un'equazione con verso positivo e in un'equazione con verso negativo, perchè la stessa legge di Kirchoff per cui data una linea chiusa le correnti che entrano devono uscire. Per trovare le equazioni lineari indipendenti devo far sì che le equazioni non siano l'opposto, quindi tolgo una delle due equazioni per una corrente, in particolare per n nodi avrò $n-1$ equazioni.

Lo stesso ragionamento si può fare per la legge dei legami costitutivi, in particolare per ogni bipolo avrò una specifica equazioni, quindi per l bipoli ho l equazioni linearmente indipendenti.

Si consideri ora la rete minima formata da due nodi e due bipoli. Una rete di questo tipo è chiamata **anello**.



Le equazioni agli anelli sono indipendenti, perchè i bipoli compaiono una sola volta. Si dimostra tramite il principio di induzione che le equazioni indipendenti per la legge di Kirchhoff delle tensioni è $l-n+1$. In totale si hanno $2l$ equazioni linearmente indipendenti.

Principio di sovrapposizione del campo degli effetti Il principio di sovrapposizione degli effetti è un metodo per la risoluzione delle reti. Il metodo consiste nel rimuovere volta per volta i generatori presenti nel circuito.

- I generatori di tensione diventano dei cortocircuiti;

- I generatori di corrente diventano circuiti aperti;

Una volta diviso i casi quanti sono i generatori nel circuito, per ogni utilizzatore si avrà tante tensioni o correnti quante lo sono i generatori. La somma delle tensioni o delle correnti porta alla tensione o corrente effettiva dell'utilizzatore.

Partitore di tensione Si applica solo quando sono presenti **resistenze in serie**. Per un circuito con due resistenze in serie si avrà:

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \tag{2.7}$$

Partitore di corrente Si applica solamente **per resistori in parallelo**. data una rete con due resistenze in parallelo si ha

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} A \tag{2.8}$$

$$I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \tag{2.9}$$

Resistenza e conduttanza sono termini **duali**, di conseguenza possono essere invertiti. Il principio di dualismo è anche presente nei teoremi di Thevenin e Norton.

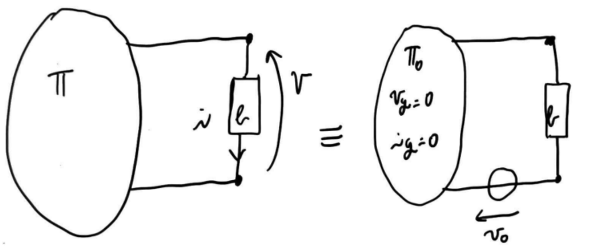
Si ricordi che un generatori di corrente ai suoi capi **ha sempre una tensione**. Quando nel circuito sono presenti almeno due generatori, allora non è detto che tutti forniscano potenza. E' possibile che alcuni generatori assorbano potenza (la loro tensione ai capi è negativa) e quindi stiano ricaricando.

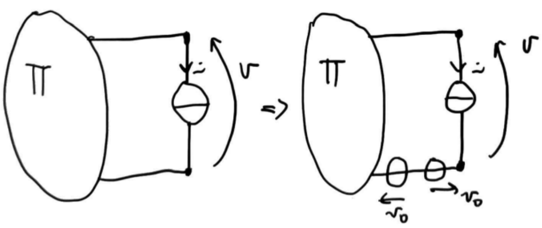
Teorema di sostituzione

Se ho un bipolo qualsiasi di cui conosco tensione e corrente, se sostituisco il bipolo con un generatore di tensione con la medesima tensione, o di corrente con la medesima corrente, il circuito non cambia.

Teorema di Thevenin

Teorema di Thevenin *
Data una rete lineare a cui è collegata un generico bipolo "*b*", agli effetti del calcolo della corrente e della tensione, posso sostituire la rete con una rete con tensione misurata a vuoto senza "*b*" e una resistenza equivalente misurata spegnendo i generatori.



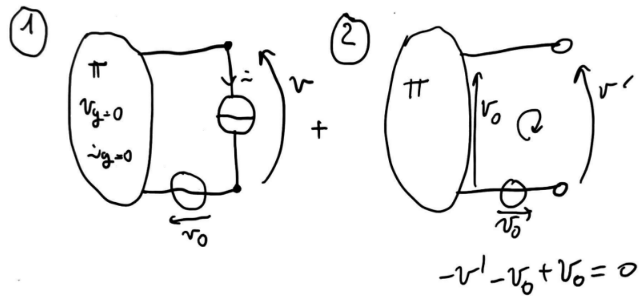


Dimostrazione Si applica come prima cosa il Teorema di sostituzione, sostituendo il bipolo "b" con un generatore di corrente che ha la stessa corrente misurata ai capi di "b".

Dopodichè si applica il principio di sovrapposizione delle causa e degli effetti, in particolare la rete che abbiamo viene divisa in due, e la somma di queste due reti equivale alla rete originaria.

1. La prima rete è composta dalla rete lineare con i generatori spenti, a cui è collegata in serie un generatore di tensione che applica una tensione v_0. La tensione v_0 è la stessa misurata a vuoto ai capi della rete Π. Infine in serie è collegato il generatore di corrente con una corrente i. Questa rete equivale all'equivalente di Thevenin.

2. La seconda rete è formata dalla rete Π con un circuito aperto. In serie però è presente un generatore di tensione v_0 che ha verso opposto a quello nella rete di Thevenin.



Sommando le due reti si ottiene la rete iniziale da risolvere. Tuttavia il nostro obiettivo è dimostrare l'equivalenza tra la rete di partenza e quella di Thevenin, quindi bisogna dimostrare che l'effetto della seconda rete è nullo. Poichè il circuito è aperto si osserva che la corrente è nulla. Mentre la tensione v' ai capi del circuito aperto si misura con le leggi di Kirchhoff:

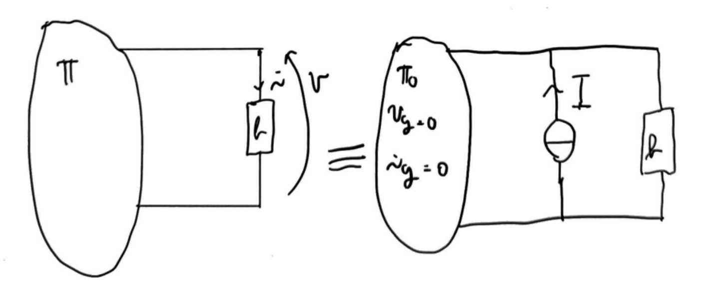
$$-v' - v_0 + v_0 = 0 \tag{2.10}$$

quindi anche la tensione è nulla, in quanto la tensione del generatore aggiunto è opposta ma di medesima intensità a quella della rete Π per ipotesi.

Teorema di Norton

Teorema di Norton * (duale di Thevenin)

Data una rete lineare Π con un bipolo "b", la rete diventa equivalente a un generatore di corrente in parallelo alla conduttanza equivalente, in cui il generatore ha la stessa corrente della rete chiusa, e la conduttanza è calcolata con i generatori di corrente e tensione della rete Π spenti.

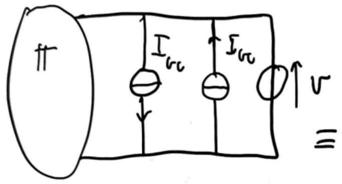


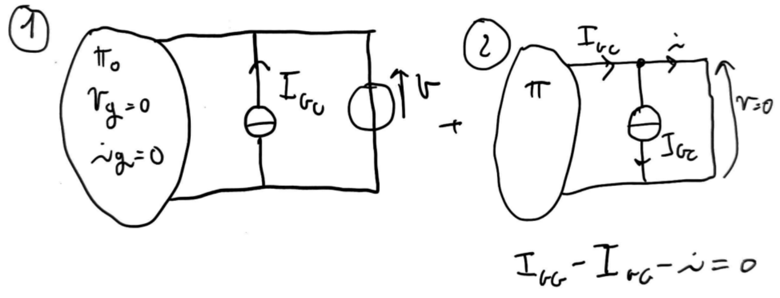
Poichè il Teorema di Norton è il duale di Thevenin, è possibile passare da uno all'altro sostituendo le parole duali, come serie e parallelo, resistenza e conduttanza, generatore di tensione e generatore di corrente.

Dimostrazione Analogamente alla dimostrazione del teorema di Thevenin, si parte dal Teorema di sostituzione e di conseguenza sostituendo il bipolo b con un generatore di tensione v. Alla rete inoltre si aggiungono due generatori di corrente in parallelo di intensità I_{gc} ma di verso opposto. Si divide la rete in due.

1. La rete equivalente di Norton è composta dalla rete Π con i generatori spenti, in parallelo il generatore di corrente I_{gc}. La corrente I_{gc} è la stessa misurata dalla rete Π con un cortocircuito. E inoltre in parallelo con il generatore di corrente è presente il generatore di tensione.

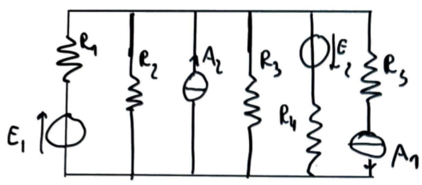
2. L'altra rete è composta dalla rete Π, dal generatore di corrente in parallelo con verso opposto a quello della rete di Norton. Per la legge di Kirchoff ai nodi si ha
$$I_{gc} - i + I_{gc} = 0 \tag{2.11}$$
quindi la corrente nel circuito è nulla, così come la tensione in quanto è presente un cortocircuito.



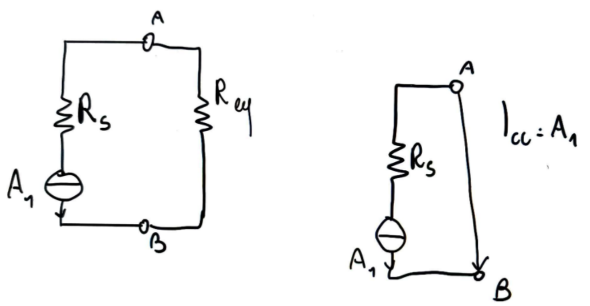


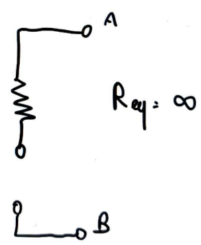
2.4 Formula di Millman

Reti binodali Dopo una semplificazione delle reti attraverso i teoremi di Thevenin e Norton spesso si arriva ad una rete con due nodi e i bipoli collegati in parallelo. Come in questo caso:

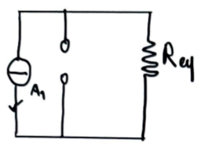


1. La rete composta da R_5 e il generatore di corrente A_1 può essere semplificata secondo il Teorema di Norton. Si misurano l'intensità di corrente a vuoto e la resistenza equivalente.

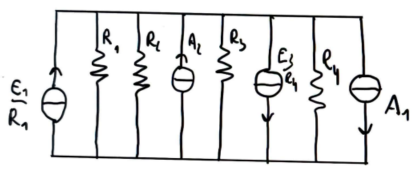




Si nota che ai fini del restante circuito collegato la resistenza R_5 può non essere considerata.



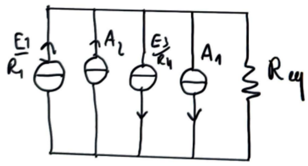
2. Per misurare la tensione della rete binodale si applicano nuovamente Thevenin e Norton.



3. Si misura la resistenza equivalente essendoci solamente resistenze in parallelo. La corrente totale sarà la somma delle correnti. Quindi banalmente la tensione ai capi del circuito sarà:

$$V = \frac{\frac{E_1}{R_1} + A_2 - \frac{E_2}{R_4} - A_2}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} \tag{2.12}$$

e corrisponde alla **formula di Millman**.



Capitolo 3

Corrente Alternata

Nei regimi di corrente alternata, le equazioni di Maxwell cambiano risultato rispetto alle reti DC. Di conseguenza non è possibile utilizzare le leggi di Ohm e Kirchhoff. Tuttavia per frequenze relativamente basse è possibile fare le giuste approssimazioni. In particolare quando

$$R < \lambda \tag{3.1}$$

E' possibile fare alcune approssimazioni. Poichè per le onde elettromagnetiche $\lambda = c/f$, per corrente alternata a 50 Hz il circuito deve essere minore di 6000 Km. Per frequenze molto alte (come quelle dei telefoni) queste approssimazioni non valgono più.

Tensione in corrente alternata Immaginiamo un circuito con un generatore di tensione a cui sono collegati in serie un resistore, un induttore e un condensatore.

$$\left|\begin{array}{c|c} R & v_R = Ri \\ L & v_L = L\frac{di}{dt} \\ C & v_C = \frac{1}{C}\int i\,dt \end{array}\right|$$

La tensione del generatore sarà dunque data dalla legge di Kirchhoff:

$$v = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt \tag{3.2}$$

la soluzione di questa equazione è estremamente complessa, se si pensa inoltre che la soluzione è sinusoidale la risoluzione sembra ancora più complessa.

3.1 Trasformata di Steinmetz

La trasformata di Steinmetz lega in una relazione biunivoca le sinusoidi con i numeri complessi

$$a + jb \Longleftrightarrow A\cos(\omega t + \phi) \tag{3.3}$$

Si ricorda la relazione di Eulero $e^{j\pi} + 1 = 0$ dove $j = \sqrt{-1}$. La relazione di Eulero lega i numeri complessi con le coordinate del piano.

Grazie alla relazione di Eulero e la trasformata di Steinbeck la soluzione all'equazione 3.2 diventerà

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = V_{max}\cos(\omega t + \phi) = \Re\left(V_{max}e^{j(\omega t+\phi)}\right) \tag{3.4}$$

Se la tensione è sinusoidale nella legge di Ohm non cambia la frequenza ma solo l'intensità (ampiezza) della corrente alternata. Lo stesso vale per induttori e condensatori. Quindi data la frequenza del generatore di tensione, questa sarà la stessa frequenza della corrente. Quindi valgono sia le leggi di Ohm che di Kirchhoff, in quanto le grandezze sono alla stessa frequenza.

$$\Re\left(V_{max}e^{j\phi}e^{j\omega t}\right) = \Re\left(\overline{V^*}e^{j\omega t}\right) \tag{3.5}$$

Poichè la frequenza è costante la parte trascurabile della trasformata di Steinmetz è $e^{j\omega t}$ in quanto sarà la stessa per un qualsiasi istante. Invece è **significativa** la grandezza $V_{max}e^{j\phi}$ chiamata anche **antitrasformata di Steinmetz**. La grandezza $\overline{V^*}$ è un numero reale, e la tensione effettiva nel circuito è data dalla parte reale. La corrente in modo analogo avrà una forma del tipo

$$i = \Re\left(\overline{I^*}e^{j\omega t}\right) \tag{3.6}$$

Le grandezze $\overline{I^*}$ e $\overline{V^*}$ sono chiamati **fasori**. Le leggi di Ohm e Kirchhoff valgono per i fasori, infatti

$$\begin{aligned} v &= R\Re\left(\overline{I^*}e^{j\omega t}\right) \\ &= \Re\left(R\cdot\overline{I^*}e^{j\omega t}\right) \\ &\to \overline{V^*} = R\cdot\overline{I^*} \end{aligned}$$

Essendo i fasori costanti posso utilizzarli nella legge di Ohm e nelle altre.

3.2 Induttori

Dato un circuito con un induttore L si ha che

$$
\begin{aligned}
v &= L\frac{d\Re\left(\overline{I^*}e^{j\omega t}\right)}{dt} \\
&= \Re\left(L\overline{I^*}\cdot j\omega\right) \\
&\to \overline{V^*} = j\omega L\overline{I^*}
\end{aligned}
$$

Viene chiamata **reattanza** la grandezza $X = \omega L\,[\Omega]$.

Impedenza Se in un circuito è presente una resistenza e un induttore, utilizzando la legge di Ohm sui fasori si ha che

$$\overline{V^*}_R = R\overline{I^*} \tag{3.7}$$
$$\overline{V^*}_L = j\omega L\overline{I^*} = jX_L\overline{I^*} \tag{3.8}$$
$$\to \overline{V^*} = \overline{I^*}\left(R + jX_L\right) \tag{3.9}$$

La grandezza $R + jX_L = \overline{Z}$ viene chiamata **impedenza**.

3.3 Condensatori

Si applica la legge di Ohm sui fasori.

$$\overline{I^*} = C\frac{\Re\left(\overline{V^*}e^{j\omega t}\right)}{dt} \tag{3.10}$$
$$\overline{I^*} = j\omega C\overline{V^*} \tag{3.11}$$
$$\to \frac{1}{j\omega C}\overline{I^*} \tag{3.12}$$
$$= -\frac{j}{\omega C}\overline{I^*} \tag{3.13}$$

Viene chiamata **reattanza del condensatore** la grandezza $X_C = \frac{1}{\omega C}$. Quindi si ha

$$\overline{V^*} = -jX_C\overline{I^*} \tag{3.14}$$

Quindi si l'impedenza di un circuito con resistenza, induttore e condensatore sarà: $\overline{Z} = R + j(X_L - X_C)$.

Valore efficace Il valore efficace, o fasore efficace è il fasore diviso la radice quadrata di due. Il valore efficace di una grandezza è quella che produce le stesse perdite. Per le nostre case il valore efficace della tensione è 230 V. La massima tensione che si raggiunge è di 325 V.