Bulanık Türev ve Bulanık İntegral

Kesin Fonksiyonun Bulanık Noktada Türevi:

Uzatma ilkesi ile, bulanık nokta veya A bulanık kümesindeki f bulanık olmayan fonksiyonunun $f'(A)$ türevi;

$$\mu_{f'(A)}(y) = \underset{f(x)=y}{\mathrm{EB}}\ \mu_A(x)$$

olarak elde edilir.

Örnek:

Bulanık A noktasında $f(x)=x^3$ fonksiyonunun türevi alındığında;

$$A=\{(-1,0.4),(0,1),(1,0.6)\}$$

$f'(x)= 3x^2$ den ;

$f'(A)=\{(3,0.4),\ (0,1),\ (3,0.6)\} =\{(0,1),(3,0.6)\}$ olarak elde edilir.

Bulanık Olmayan Noktalarda Bulandırma Fonksiyonunun Türevi:

D alanındaki tüm x elemanları için, $\tilde{f}$ bulandırma fonksiyonunun türevini tanımlayacağız. f in herhangi bir α kesim düzeyi herhangi bir $x \in D$ için türevlenebilir. Bu sırada gerçel x_0 noktasında $\tilde{f}$ ın türevi $(d\tilde{f}/dx)(x_0)$ tanımlanır;

$$\mu_{(d\tilde{f}'/dx)(x0)}(p) = \underset{f_\alpha : (df_\alpha/dx)(x_0) = p}{\text{EB}} \mu_{\tilde{f}}(f_\alpha)$$

Örnek:

$\tilde{f} = \{(f_1, 0.4), (f_2, 0.7), (f_3, 0.4)\}$ bir bulanık fonksiyon, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3 + 1$ olsun.

Öncelikle; $f'_1(x) = 1$, $f'_2(x) = 2x$, $f'_3(x) = 3x^2$ elde edilir.

$x_0 = 0.5$ de bu bulandırma fonksiyonunun türevi, şu şekilde elde edilir;

$\alpha=0.4$ olduğu zaman $f'_1(0.5)=1$

$\alpha=0.7$ olduğu zaman $f'_2(0.5)=1$

$\alpha=0.4$ olduğu zaman $f'_3(0.5)=0.75$

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} x_0 = \{(1,0.4),(1,0.7),(0.75,0.4)\}$$

$$\frac{d\tilde{f}}{dx} x_0 = \{(1,0.7),(0.75,0.4)\}$$

Kesin Aralıkta Bulandırma Fonksiyonunda İntegral:

$[a,b] \in R$ bulanık olmayan aralığında, $x \in [a,b]$ için $\tilde{f}$ bulanık değerine sahip bulandırma fonksiyonu olsun. $[a,b]$ de bulandırma fonksiyonunun integrali, $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere;

$$\tilde{I}\,(a,b) = \left(\int_a^b f^-_\alpha(x)\,dx + \int_a^b f^+_\alpha(x)\,dx \right)$$

şeklinde hesaplanır.

Burada, f^+_α ve f^-_α, $\tilde{f}$ (x) in α kesim fonksiyonlarıdır. (+) işaretinin toplama olmadığı ve bulanık kümede sayısallaştırmayı ifade ettiğine dikkat edin. Bundan dolayı toplam integral işlemi her α-kesim fonksiyonunun integrallerinin birleşimi ile elde edilir.

Eğer bulandırma fonksiyonuna α-kesim işlemi uygularsak, α-kesim fonksiyonları olarak f^+_α ve f^-_α elde edebiliriz. Her fonksiyonun integralini şu şekilde hesaplayabiliriz;

$$\tilde{I}^-_\alpha = \int_a^b f^-_\alpha(x)\,dx$$

$$\tilde{I}^+_\alpha = \int_a^b f^+_\alpha(x)\,dx$$

Şimdi toplam integral $\tilde{I}$ (a,b) 'in bir üyesi olarak $\tilde{I}^-_\alpha$ veya $\tilde{I}^+_\alpha$ olasılığının α olacağını söyleyebiliriz.

Örnek:

Aşağıdaki şekilde [1,2] aralığında E=[1,2], $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=x+1$ olmak üzere $\tilde{f}=\{(f_1,0.4),(f_2,0.7),(f_3,0.4)\}$ integralini almak istediğimiz bulanık fonksiyonlar grubumuz olsun.

i) $\alpha=0.7$ de integral;

$$f=f_2(x)=x^2$$

$$I_\alpha(1,2)=\int_1^2 x^2dx=(1/3)x^3\Big]_1^2=7/3$$

İntegral sonucu 0.7 olabilirlikle 7/3dür. Bundan dolayı;

$$\tilde{I}_{0.7}(1,2)=\{(7/3,0.7)\}$$

ii) $\alpha=0.4$, iki fonksiyon vardır;

$$f^{+}=f_1(x)=x$$

$$f^{-}=f_3(x)=x+1$$

$$I^{+}_{\alpha}(1,2)=\int_1^2 x\,dx= (1/2)x^2\Big]_1^2 =3/2$$

$$I^{-}_{\alpha}(1,2)=\int_1^2 (x+1)dx \quad (1/2)x^2+x\Big]_1^2 =5/2$$

İntegral sonucu 0.4 olabilirlikle 3/2, 0.4 olabilirlikle ise 5/2 dir. Bundan dolayı;

$$\tilde{I}_{0.4}(1,2)=\{(3/2,0.4),(5/2,0.4)\}$$

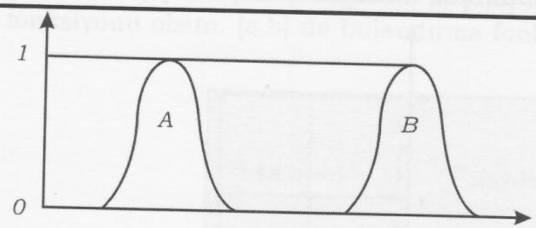
Sonuç olarak, toplam integral;

$$\tilde{I}\,(1,2)=\{(7/3,0.7),(3/2,0.4),(5/2,0.4)\}$$

olarak elde edilir.

Bulanık Aralıkta Kesin Fonksiyonun İntegrali:

Burada iki bulanık A ve B kümesi aracılığı ile belirlenen sınırların bulanık [A,B] aralığında integrali değerlendireceğiz.



Şekil 8.2. *Bulanık aralık*

Bulanık [A,B] aralığında bulanık olmayan f fonksiyonunun integrali I(A,B)

$$\mu_{I(a,b)}(z) = \underset{x,y}{\mathrm{EB}}\ \mathrm{EK}[\mu_A(x),\ \mu_B(x)]$$

$$z - \int_x^y f(u)\,du$$

Örnek:

Örnek olarak bulanık [A,B] aralığında $f(x)=2$ fonksiyonunun integrali;

$$A=\{(4,0.8),\ (5,1),\ (6,0.4)\},\ B=\{(6,0.7),(7,1),(8,0.2)\}$$

$$f(x)=2,\ x\in[4,8] \text{ için;}$$

$$\tilde{\mathrm{I}}\,(A,B)=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b 2dx$$

Tablodaki gibi integral değerlerini elde ederiz.

[a,b]	$\int_a^b 2dx$	$EK[\mu_A(A), \mu_B(B)]$
[4,6]	4	0.7
[4,7]	6	0.8
[4,8]	8	0.2
[5,6]	2	0.7
[5,7]	4	1.0
[5,8]	6	0.2
[6,6]	0	0.4
[6,7]	2	0.4
[6,8]	4	0.2

$\bar{I}(A,B) = \{(0,0.4),(2,0.7),(4,1),(6,0.8),(8,0.2)\}$

Örnek olarak [6,6] da integralde, integral değeri olarak 0 elde ederken, bu durumun olasılığı 0.4 dür. [5,6] aralığında ve [6,7] aralığında integral değeri sırası ile 0.7 ve 0.4 olasılıkları ile 2 dir. Bundan dolayı 2 integral değeri olasılığı EB[0.7,0.4] den 0.7 olacaktır.

Bulanık Çizge(Graph)

Bulanık Çizge:

Belirli A ve B kümeleri için (A=B durumu da dahil), $R \subseteq AxB$ klasik bağıntısını tanımlayalım. $x \in A$, $y \in B$ için eğer $(x,y) \in R$ ise x ile y arasında bir kenar vardır. Diğer bir deyişle;

$$\boxed{\forall (x,y) \in R \Leftrightarrow \mu_R(x,y) = \mu_G(x,y) = 1}$$

olacaktır.

Burada verilen R bağıntısı bulanık bir bağıntı olursa, üyelik derecesi $\mu_R(x,y)$, $\mu_G(x,y)$ değerinin 0 ile 1 arasında olmasını sağlar. Böyle çizgeler ***bulanık çizge*** olarak adlandırılırlar.

$\tilde{V}$ uç noktalar kümesi, $\tilde{E}$ uç noktalar arasındaki kenarlar olmak üzere bulanık çizge tanımlanabilir. V bulanık küme olarak düşünüldüğünde, bu çizgenin V bulanık düğümlerinde E bulanık bağıntısını gösterdiğini söyleyebiliriz.

Gösterim kolaylığı açısından bulanık çizgeler de G(V,E) gösterimi kullanılarak ifade edilecektir.

Bulanık Yollar:

Bulanık yol, bir çizgede v_a düğümünde sonlanan ve v_b düğümünden başlayan, kenar üyelik değeri $\mu(i)$ olan Tip II bulanık çizgedir.

Burada a ve b düğümleri arasındaki P bulanık yolunda, $P \in II_{ab}$ için üyelik derecesi;

$$\pi(P) = \underset{e_i \in P}{EK}\{\mu(i)\}$$

Normalleştirme koşulu $\mu(i)=1$ olan en az bir yolun olmasını sağlar. Çizge ağırlıklı ise yolun bulanık uzunluğu üyelik dereceli bulanık sayı olarak tanımlanır.

Aynı son düğüm ile aynı baş düğüm arasındaki kesin yolların bulanık kümesi olan $S=\{P_1,P_2,\ldots,P_n\}$ 'den, $P \in S$ olan her yol için, $\pi(P)$ uzaklık ise bir bulanık yol kurgulayabiliriz. Böyle bir bulanık bir yolun bulanık uzunluğu çeşitli P_i yollarının uzunlukları olan l_i=uzunluk (P_i) açısından şu şekilde yazılabilir;

$$l=(l_1,\pi(P_1)),\ (l_2,\pi(P_2)),\ldots,\ (l_n,\pi(P_n))$$

Bulanık Çizge Türleri:

Bir çizgenin nasıl bulanık olabileceğini belirleyen çeşitli yolar vardır. Çizgelerdeki belli başlı bulanıklık imkanlarını kesin çizgelerde bulanık kümeler (tip I), kesin düğüm kümesi ve bulanık kenar kümesi (tip II), bulanık tek parça kesin düğüm ve kenarlar (tip III), bulanık düğüm kümesi ve kesin kenar kümesi (tip IV), bulanık ağırlıklı kesin çizge (tip V) olarak sıralanabilir.

TİP I: KLASİK ÇİZGELERİN BULANIK KÜMELERİ

Basit bir bulanık çizge elde etmenin yolu klasik bir çizgenin bulandırılması ile elde edilir.

$$\boxed{G=(G_1,\mu_1)+(G_2,\mu_2)+\ldots+(G_n,\mu_n)}$$

Bu tip bulanıklık klasik çizgeler genelde birkaç düğüm ve kenara sahip olduğundan dolayı çok ilginç değildir. Hatta, temel klasik çizgeler ortak düğüm ve kenarlara sahipken, bu sahipliğin düzenli bir şekli yoksa analizi de zordur.

Tip I' olarak ifade edilen çizgelerde;

$$V=V_1=V_2=\ldots V_n$$

durumu bulunurken kenarlar bulanıktır. Başka Tip I çeşitleri de bulunmaktadır.

Bunların gündelik yaşantıda çeşitli örnekleri de bulunur. Tip I için evinizin elektrik sisteminde bir değişiklik yapmak istediğinizi ancak, bloktaki tüm evlerin kayıtlarının karıştığını kabul edin. Bundan dolayı siz bloğunuzda bulunan tüm evlerin kayıtlarını alacaksınız. Ancak hangi planın evinize uygun olduğunu ayırt etmenin bir yolu yoktur.

Tip I' için ise bir şehirden diğerine gidilen en kısa yolu gösteren iki haritanız olduğunu kabul edin. Bu haritalar farklı tarihlere ait olsun, haritada farklı yollar bulunsun ve bunlardan hangisinin daha yeni olduğunu belirleme şanısınız da bulunmasın.

TİP II: KLASİK DÜĞÜM KÜMESİ VE BULANIK KENAR KÜMESİ

Bu durum düğümlerin bilindiği fakat kenarların bilinmediği durumlar için geçerlidir. Düğüm kümesi klasik küme olarak tanımlanır, fakat kenar kümesi bulanık kümedir;

$$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$$

$$E=(e_1,\mu_1)+(e_2,\mu_2)+\ldots+(e_n,\mu_n)$$

Burada her kenarın sabit başı, sonu ve ağırlığı bulunur.

Bununla ilgili olarak da şu şekilde bir senaryo düşünülebilir. Bir şehirden diğerine en kısa otomobil yolunu planlayacaksınız. Yazık ki, pek çok yol tamir ediliyor ve bundan dolayı yolların bir kısmı kapalı. Ancak siz kesin olarak hangi yolun bu durumda olduğunu bilmiyorsunuz.

TİP III: KLASİK DÜĞÜMLER VE BULANIK BAĞLANTILI KENARLAR

Tip II 'den farklı olarak burada, çizgedeki düğüm ve kenarların varlığı kesin olarak bilinmektedir, ancak kenar tek parçalılığı bilinmemektedir. Burada hem kenar hem de düğüm kümeleri klasiktir. Fakat kenarların bulanık baş (h) ve sonu (t) bulunur.

Bir şehirden diğerine en kısa otomobil yolunu planlayın. Rotaların çoğunda bir gölü feribotla geçmeniz gereksin. Fakat feribotun zamanları, indirme ve bindirme noktaları kesin belli olmasın. İşte bu tip III çizge uygulanabilecek bir örnektir.

$$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$$

$$E=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$$

$$h_i=(h_{i,1},\sigma_{i,1})+(h_{i,2},\sigma_{i,2})+\ldots+(h_{i,n},\sigma_{i,n})\ (i=1,2,\ldots,n)$$

$$t_i=(t_{i,1},\sigma_{i,1})+(t_{i,2},\sigma_{i,2})+\ldots+(t_{i,n},\sigma_{i,n})\ (i=1,2,\ldots,n)$$

TİP IV: BULANIK DÜĞÜM KÜMESİ VE KLASİK KENAR KÜMESİ

Tip II bulanık çizgelere benzer şekilde, bir çizgenin bilinmeyen düğümleri fakat bilinen kenarları olsun. Bu durumda düğüm kümesi bulanık ve kenar kümesi de klasik olacaktır.

$$V=(v_1,\mu_1)+(v_2,\mu_2)+\dots+(v_n,\mu_n)$$
$$E=\{e_1, e_2,\dots,e_n\}$$

Son eşitlik dikkatli bir yorum gerektirir. Çünkü eğer ilk ve son düğümler yoksa kenarlar da olmaz. Bundan dolayı kenarların varlığı bulanık düğümlerin varlığına göre kesindir (ya var ya da yok).

Örnek olarak, art arda çeşitli konferanslar vereceğinizi ve bunlara katılabilmek için en etkin yol haritasını çıkarmak istediğinizi var sayalım. Bununla beraber konferans komitesi konferans verilecek yerleri bildirmemiş olsun. Bu durum tip IV bulanık çizge kullanılabilecek bir örnektir.

TİP V: BULANIK AĞIRLIKLI KESİN ÇİZGE

Beşinci tip çizge bulanıklığı çizgenin kenar ve düğümleri bilindiği ancak, kenarların ağırlığı (ya da kapasiteleri) bilinmeyen ağırlıklara sahip olduğu zaman ortaya çıkar. Bu durumda yalnızca ağırlıklar bulanıktır.

$$w_i=(w_{i,1},\mu_1)+(w_{i,2},\mu_2)+\dots$$

Bu duruma örnek olarak, bir şehirden diğerine en hızlı otomobille seyahat etme durumunu değerlendirdiğinizi düşünelim. Harita mesafeleri verse de seyahat süresini göstermez. Bundan dolayı yolun hangi kesimlerini ne kadar bir süre içinde alacağınız kesin olarak bilemezsiniz.

Çizge Bulanıklığı Türleri Arasındaki İlişkiler:

Bulanık bir çizge aynı zamanda birden fazla tip bulanıklığın çeşitlemesi şeklinde de karşımıza çıkabilir. Bu beş tip bulanıklığın hepsi birbiri ile ilişkilidir ve bazı durumlarda bir tipteki bulanıklık diğer tipteki bulanıklığa dönüşebilir. Örnek olarak Tip I′ bulanıklık farklı Tip I′ çizge elemanlarındaki kenarlar arasındaki benzerlikler h başlangıç, t de son düğümü göstermek üzere;

$$\lambda_i = \underset{j}{EB}\{\mu_j \mid G_j\ t^{II}_i \text{ den } h^{II}_i \text{ ye bir kenar içerir}\}$$

şeklinde tanımlanarak Tip II 'ye dönüştürülebilir.

$$E^{II} = (e^{II}_1, \lambda_1) + (e^{II}_2, \lambda_2) + \ldots + (e^{II}_n, \lambda_n)$$

Bu işlem daima normalleştirme koşulunu korur. Fakat bulanıklıktaki değişimi sağlayan tüm şemalarda normalleştirme koşulu korunmayabilir.

Bu işlemin tersi de mümkündür. Yani örnek olarak Tip II bulanıklık Tip I′ bulanıklığa genişletilebilir. Bu da bulanık çizge ile uyumlu olası kesin çizgelerin tümü sayılarak gerçekleştirilir.

Bu durum, basitçe bir üyelik derecesi atayarak gerçekleştirilebilir. η_i, Tip II bulanık çizgedeki i 'nci kenarın üyelik derecesi olmak üzere, olabilir kenar kümesinin güç kümesi olan $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$′ deki Tip I′ kenar kümesi olan her E_j için;

Bulanık Ağ:

Bulanık tekparçalı yönlü çizgeler yani ***bulanık ağ*** elde edilmesi için kenar ve/veya düğümlere bulanık değerler verilir.

BULANIK KENARLI YOL

V klasik bir düğüm kümesi ve R, V kümesinde tanımlanmış bir bağıntı olsun. C_i, v_{i1} düğümünden v_{ir} düğümüne bir yolu göstersin.

$$\forall (v_{ik}, v_{ik+1}), \mu_R(v_{ik}, v_{ik+1}) > 0,\ k=1,2,\ldots, r-1$$

$C_i=(v_{i1}, v_{i2,\ldots,} v_{ir})$, $v_{ik} \in V$, $k=1,2,\ldots, r$ olacaktır. C_i yolu için bulanık değer (l) ;

$$\mathbf{l(v_{i1}, v_{i2,\ldots,} v_{ir}) = \mu_R(v_{i1}, v_{i2}) \wedge \mu_R(v_{i2}, v_{i3}) \wedge \ldots \wedge \mu_R(v_{ir-1}, v_{ir}) \wedge \mu_R(v_{ir})}$$

ile tanımlanır.

Bu değer v_{i1} den v_{ir} ye en küçük bağlanma olabilirliğidir. v_{i1} den v_{ir} ye uzanan birkaç yol varsa, yolların olabilirlik kümesi ;

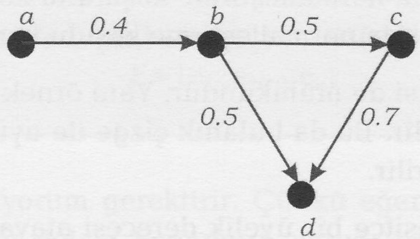
$$\mathbf{C(v_i, v_j) = \{c(v_i, v_j) \mid c(v_i, v_j) = (v_i = v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ir} = v_j)\}}$$

olarak hesaplanır.

Olabilir yollar içinde en büyük olabilirliğe sahip yol (l^*) değeri şu şekilde hesaplanır;

$$\mathbf{l^*(v_i, v_j) = \bigvee_{C(v_i, v_j)} l(v_i = v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ir} = v_j)}$$

Örnek:



Yukarıda sadece kenarları bulanık bir yönlü çizge örneği görülmektedir.

Bulanık Düğüm ve Bulanık Kenarlı Yol:

Düğümleri bulanık küme V ve kenarları R olarak kabul edersek, C_i yolu v_{i1} den v_{ir} ye olmak üzere;

$\forall (v_{ik}, v_{ik+1}), \mu_R(v_{ik}, v_{ik+1}) > 0$, k=1,2,..., r-1 ve

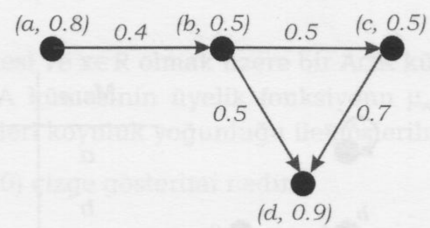
$\forall v_{ik}, \mu_V(v_{ik}) > 0$, k=1,2,..., r iken;

$C_i = (v_{i1}, v_{i2,...,} v_{ir})$, $v_{ik} \in V$, k=1,2,..., r olacaktır. C_i yolu için bulanık değer (l) ;

$$\boxed{\mathbf{l(v_{i1}, v_{i2,...,} v_{ir}) = \mu_R(v_{i1}, v_{i2}) \wedge \mu_R(v_{i2}, v_{i3}) \wedge ... \wedge \mu_R(v_{ir-1}, v_{ir}) \wedge \mu_R(v_{ir})}}$$

v_{i1} den v_{ir} ye birden fazla yol varsa, yol kümesini ve aynı şekilde en büyük yoğunluk yolunu alabiliriz.

Örnek:



Yukarıda bulanık düğüm ve kenardan oluşan yönlü çizge örneği görülmektedir.

Bulanık Çizgenin α Kesimi:

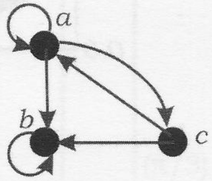
$R \subseteq AxA$ aşağıdaki biçimde tanımlanan bir bağıntının, belirlenmiş bir düzey kümesi için, α-kesim işlemini uygularsak ve α-kesiminden elde ettiğimiz çizgeyi G_α olarak kabul edersek, α ile G_α arasındaki bağıntı;

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \Rightarrow \mathbf{R}_{\alpha 1} \subseteq \mathbf{R}_{\alpha 2}$$
$$\mathbf{G}_{\alpha 1} \subseteq \mathbf{G}_{\alpha 2}$$

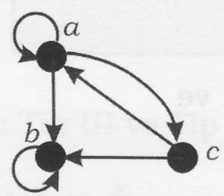
olarak belirlenir.

Örnek:

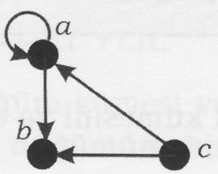
Örnek olarak, A={a,b,c}, $R \subseteq AxA$ aşağıdaki biçimde tanımlansın. {0,0.4,0.8,1} düzey kümesi için, α-kesim işlemini uygularsak;



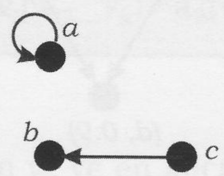
M_R	*a*	*b*	*c*
a	*1.0*	*0.8*	*0.4*
b	*0.0*	*0.4*	*0.0*
c	*0.8*	*1.0*	*0.0*



$M_{R0.4}$	a	b	c
a	1.0	1.0	1.0
b	0.0	1.0	0.0
c	1.0	1.0	0.0



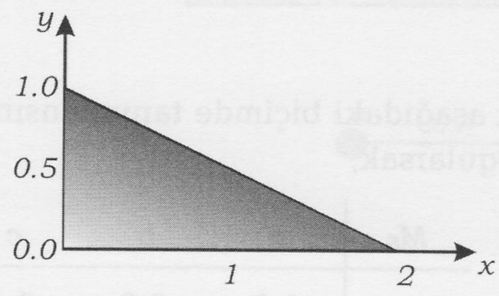
$M_{R0.8}$	a	b	c
a	1.0	1.0	0.0
b	0.0	0.0	0.0
c	1.0	1.0	0.0



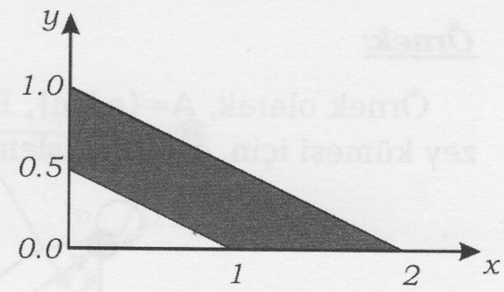
$M_{R1.0}$	a	b	c
a	1.0	0.0	0.0
b	0.0	0.0	0.0
c	0.0	1.0	0.0

Örnek:

Örnek olarak $\mu_R(x,y)=x/2+y\leq 1$ şeklinde bir bağıntımız olsun. R ve $\alpha=0.5$ için $R_{0.5}$ α-kesim bağıntısını gösterelim. Koyuluk yoğunluğu üyelik derecesini göstermek üzere;



R bağıntısı



$R_{0.5}$ bağıntısı