合肥工業大學
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第二章　解析函数

第一节　解析函数的概念

- 可导的函数
- 可微的函数
- 解析的函数

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义

设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作

$$f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 称 $f(z)$ 在 D 内可导.

例

函数 $f(z)=x+2yi$ 在哪些点处可导?

解

$$
\begin{aligned}
f'(z)&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\
&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)i-(x+2yi)}{\Delta z}\\
&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}.
\end{aligned}
$$

当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时，上式 $\to 2$; 当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时，上式 $\to 1$. 因此该极限不存在，$f(z)$ 处处不可导.

例题：复变函数的导数

练习

函数 $f(z) = x - yi$ 在哪些点处可导？

答案

处处不可导.

例

求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

定理

- $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf'$;
- $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$;
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z)$;
- $g'(z) = \dfrac{1}{f'(w)}, g = f^{-1}, w = g(z)$.

可导蕴含连续

定理

若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

证明

该定理的证明和实变量情形完全相同. 设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = f'(z_0) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

□

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

定义

如果存在常数 A 使得函数 $w=f(z)$ 满足

$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\Delta z+o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}w=A\Delta z$.

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $\mathrm{d}w=f'(z_0)\Delta z$, $\mathrm{d}z=\Delta z$. 故 $\mathrm{d}w=f'(z_0)\,\mathrm{d}z, f'(z_0)=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$.

定义

- 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.
- 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

由于区域 D 是一个开集，其中的任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 的邻域. 所以 $f(z)$ 在 D 内解析和在 D 内可导是等价的.

如果 $f(z)$ 在 z_0 解析，则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导，从而在该邻域内解析. 因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集.

练习

单选题: (2021 年 B 卷) 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析是 $f(z)$ 在该点可导的 (A).

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

答案

解析要求在 z_0 的一个邻域内都可导才行.

例

研究函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解

由于

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi},$$

若 $z=0$, 则当 $\Delta z\to 0$ 时该极限为 0.

若 $z\neq 0$, 则当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}+z$; 当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}-z$. 因此此时极限不存在.

故 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处可导, 从而处处不解析.

第二节　函数解析的充要条件

- 柯西-黎曼方程
- 柯西-黎曼方程的应用

可导函数的特点

通过对一些简单函数的分析，我们会发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式，而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 等内容．这种现象并不是孤立的．我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系．

为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数．

设 f 在 z 处可导，$f'(z)=a+bi$，则

$$\Delta u+i\Delta v=\Delta f=(a+bi)(\Delta x+i\Delta y)+o(\Delta z).$$

展开可知

$$\begin{aligned}\Delta u&=a\Delta x-b\Delta y+o(\Delta z),\\ \Delta v&=b\Delta x+a\Delta y+o(\Delta z).\end{aligned}$$

由于 $o(\Delta z)=o(|\Delta z|)=o(\sqrt{x^2+y^2})$，因此

u,v 可微且 $u_x=v_y=a, v_x=-u_y=b.$

反过来，假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}v &= v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y = v_x\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}f &= \mathrm{d}(u+iv) = (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}x + (-v_x + iu_x)\,\mathrm{d}y\\
&= (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}(x+iy)\\
&= (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}z = (v_y - iu_y)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

故

$f(z)$ 在 z 处可导，且 $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$.

由此我们得到

CauchyRiemann
柯西-黎曼 方程 (C-R 方程)

$f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u, v 可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

注意到 $x=\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{2}\overline{z}, y=-\dfrac{i}{2}z+\dfrac{i}{2}\overline{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 我们定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y},\\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}.\end{cases}$$

如果把 $z,\overline{z}$ 看成独立变量, 那么当 f 在 z 处可导时, $\mathrm{d}f=f'\,\mathrm{d}z$. 当 f 关于 $z,\overline{z}$ 可微时 (即 u,v 可微),

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}\overline{z}.$$

所以 f 在 z 处可导当且仅当 u,v 可微且 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$.

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理

- 如果 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 z 可导.
- 如果 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 上处处连续, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 D 上可导 (从而解析).

例

(1) 函数 $f(z)=\overline{z}$ 在何处可导，在何处解析？

解

由 $u=x, v=-y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 1, & u_y &= 0, \\ v_x &= 0, & v_y &= -1. \end{aligned}$$

因为 $u_x=1\neq v_y=-1$，所以该函数处处不可导，处处不解析.

或由 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=1\neq 0$ 看出.

例 (续)

(2) 函数 $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $f(z)=x^2+ixy, u=x^2, v=xy$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\ v_x &= y, & v_y &= x. \end{aligned}$$

由 $2x=x, 0=-y$ 可知只有 $x=y=0, z=0$ 满足 *C-R* 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0)=u_x(0)+iv_x(0)=0.$$

或由 $f=\dfrac{1}{2}z(z+\overline{z}), \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{1}{2}z$ 看出.

例 (续)

(3) 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在何处可导，在何处解析？

解

由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y, & u_y &= -e^x \sin y, \\ v_x &= e^x \sin y, & v_y &= e^x \cos y. \end{aligned}$$

因此该函数处处可导，处处解析，且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z).$$

实际上，这个函数就是复变量的指数函数 e^z.

练习

单选题：(2022 年 A 卷) 下面哪个函数在 $z=0$ 处不可导？(A)

(A) $2x+3yi$　　(B) $2x^2+3y^2i$

(C) $e^x\cos y+ie^x\sin y$　　(D) x^2-xyi

答案

根据 *C-R* 方程可知对于 *A*, $u_x(0)=2\neq v_y(0)=3$. 对于 *BD*, 各个偏导数在 0 处取值都是 0. *C* 则是处处都可导.

例题：利用 C-R 方程判断可导和解析

例

设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析．求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

解

由于

$$u_x = 2x + ay, \qquad u_y = ax + 2by,$$
$$v_x = 2cx + dy, \qquad v_y = dx + 2y,$$

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$

$$a = d = 2, \quad b = c = -1,$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2y + i(-2x + 2y) = (2 - 2i)z.$$

例

如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明

由于 $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$, 因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数. $\square$

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件等价:

- $f(z)$ 是一常数,
- $|f(z)|$ 是一常数,
- $\operatorname{Re} f(z)$ 是一常数,
- $v = u^2$,
- $f'(z) = 0$,
- $\arg f(z)$ 是一常数,
- $\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数,
- $u = v^2$.

例

如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明

由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得 $u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0$, 从而 $(u_y,-u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理 $(v_y,-v_x)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_yv_y+u_xv_x=u_yu_x-u_xu_y=0,$$

因此二者正交. □

当 $f'(z_0)\neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1,C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1),f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性.

这是因为 $\mathrm{d}f=f'(z_0)\,\mathrm{d}z$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 上述例子是该结论关于 w 复平面上曲线族 $u=c_1,v=c_2$ 的一个特殊情形.

最后我们来看复数在求导中的一个应用.

例

设 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 则它在除 $z=\pm i$ 外处处解析. 当 $z=x$ 为实数时,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}&=f^{(n)}(x)=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x-i}\right]^{(n)}\\&=\frac{i}{2}\cdot(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x+i)^{n+1}}-\frac{1}{(x-i)^{n+1}}\right]\\&=(-1)^{n+1}n!\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{(x+i)^{n+1}}\\&=\frac{(-1)^n n!\sin[(n+1)\operatorname{arccot}x]}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}.\end{aligned}$$

第三节　初等函数

- 指数函数
- 对数函数
- 幂函数
- 三角函数和反三角函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

(1) $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$ (欧拉恒等式);

(2) $\exp z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);

(3) $\exp z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{z^k}{k!}$ (级数定义);

(4) $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z = x \in \mathbb{R}$ 时, $\exp z = e^x$ (e^x 的解析延拓).

有些人会从 $e^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots
\end{aligned}
$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们在学习了幂级数之后就可知(1)和(3)是等价的.

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\quad(1^\infty\ \text{型不定式})$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right]=e^x.$$

不妨设 $n>|z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n\to\infty}n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\arctan\frac{y}{n+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x}=y.$$

故 $\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)$.

指数函数

定义指数函数

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

我们已知 $\exp z$ 是一个处处解析的函数, 且 $(\exp z)' = \exp z$. 不难看出

- $\exp z \neq 0$;
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$;
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$;
- $\exp z_1 = \exp z_2$ 当且仅当 $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

为了方便, 我们也记 $e^z = \exp z$.

指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.

例

函数 $f(z) = e^{z/6}$ 的周期是 $\underline{12\pi i}$.

解

设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$. 因此存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

从而 $z_1 - z_2 = 12k\pi i$. 所以 $f(z)$ 的周期是 $12\pi i$.

一般地, $\exp(az+b)$ 的周期是 $\dfrac{2\pi i}{a}$ (或写成 $-\dfrac{2\pi i}{a}$), $a \neq 0$.

对数函数定义为指数函数的反函数. 设 $z \neq 0$, 满足方程 $e^w = z$ 的 $w = f(z)$ 被称为对数函数, 记作 $w = \operatorname{Ln} z$.

为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\operatorname{Arg} z$ 和 $\arg z$.

设 $e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对数函数

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

对于每一个 k, $\ln z + 2k\pi i$ 都给出了 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支. 特别地, 当 $z = x > 0$ 是正实数时, $\ln z$ 就是实变的对数函数.

典型例题：对数函数的计算

例

求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解

(1) $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$，主值就是 $\ln 2$.

(2) $\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$，主值是 πi.

例

求 $\mathrm{Ln}(-2+3i), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i)$.

解

(1) $$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(-2+3i) &= \ln|-2+3i| + i\,\mathrm{Arg}(-2+3i)\\ &= \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2}+\pi+2k\pi\right)i, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i) &= \ln\left|3+\sqrt{3}i\right| + i\,\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}i)\\ &= \ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)i = \ln 2\sqrt{3} + \left(2k-\frac{1}{6}\right)\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

例

解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解

由于 $1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$，因此

$$z = \mathrm{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习

求 $\ln(-1 - \sqrt{3}i) = \underline{\ln 2 - \frac{2\pi i}{3}}$.

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及主辐角的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

而当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ 不成立. 以上等式换成 $\ln z$ 均不一定成立.

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x)=\ln x+\pi i,\qquad \lim_{y\to 0^-}\ln(-x+yi)=\ln x-\pi i,$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方 $-\pi<\arg z<\pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi<\operatorname{Im} z<\pi$ 上的单值反函数, 从而 $(\ln z)'=\dfrac{1}{z}$, $\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

也可以通过 C-R 方程来得到 $\ln z$ 的解析性和导数: 当 $x>0$ 时,

$$\ln z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\arctan\frac{y}{x},$$

$$u_x=v_y=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad v_x=-u_y=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$(\ln z)'=(x-yi)/(x^2+y^2)=\frac{1}{z}.$$

其它情形可取虚部为 $\operatorname{arccot}\dfrac{x}{y}$ 或 $\operatorname{arccot}\dfrac{x}{y}-\pi$ 类似证明.

幂函数

(1) 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\,z} = \exp\big[a \ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)\big], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 它的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp\big(a \ln|z| + ia \arg z\big).$$

根据 a 的不同，这个函数有着不同的性质.

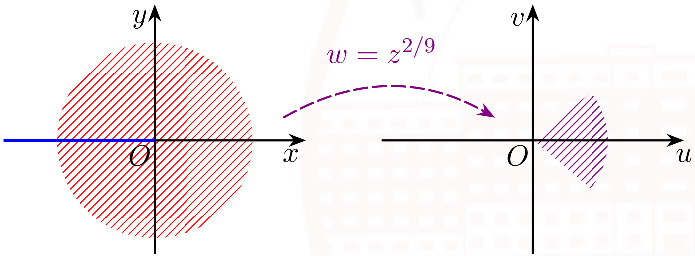
当 a 为整数时，因为 $e^{2ak\pi i} = 1$，所以 $w = z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂.

当 a 是非负整数时，z^a 在复平面上解析；当 a 是负整数时，z^a 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上解析.

当 $a=\dfrac{p}{q}$ 为分数，p,q 为互质的整数且 $q>1$ 时，

$$z^{\frac{p}{q}}=|z|^{\frac{p}{q}}\exp\left[\frac{ip(\arg z+2k\pi)}{q}\right],\quad k=0,1,\ldots,q-1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后，它的主值 $w=\exp(a\ln z)$ 是处处解析的. 事实上它就是 $\sqrt[q]{z^p}=(\sqrt[q]{z})^p$.



对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi ai$ 不可能是 $2\pi i$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 也是处处解析的.

a	z^a 的值	z^a 的解析区域
整数 n	单值	$n \geqslant 0$ 时处处解析 $n < 0$ 时除零点外解析
分数 p/q	q 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

例

求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i.

解

(1) $1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = e^{\sqrt{2}\cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$

(2) $i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = \exp\left[i \cdot \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i\right] = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$

练习

填空题：(2021 年 A 卷) 3^i 的主辐角是 $\underline{\ \ln 3\ }$.

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = \left(e^{a \ln z}\right)' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是不同的. 因为后者在 $a \notin \mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆, 以后我们总默认 e^a 表示指数函数 $\exp a$.

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 x 成立, 我们将其推广到复数情形.

余弦和正弦函数

定义余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

那么欧拉恒等式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ 对任意复数 z 均成立.

不难得到

$$\cos(iy)=\frac{e^y+e^{-y}}{2},\qquad \sin(iy)=i\frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$

当 $y\to\infty$ 时, $\cos(iy)$ 和 $\sin(iy)$ 都 $\to\infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数. 于是我们可类似定义其它三角函数

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\ z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\ z\neq k\pi,$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\ z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad \csc z=\frac{1}{\sin z},\ z\neq k\pi.$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$,
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

类似的，我们可以定义双曲函数：

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似，在定义域范围内是处处解析的.

$\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ 的周期是 $2\pi i$，$\operatorname{th} z$ 的周期是 πi.

设 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}\ (\text{双值}).$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$;
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z = -\dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + iz}{1 - iz}, z \neq \pm i$;
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$;
- 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$;
- 反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + z}{1 - z}, z \neq \pm 1$.

例

解方程 $\sin z = 2$.

解

由于 $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$，我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

于是 $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$，

$$z = -i\,\mathrm{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i\ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

另解

由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} = \pm\sqrt{3}i.$$

于是 $e^{iz} = \cos z + i\sin z = (2\pm\sqrt{3})i$,

$$z = -i\,\mathrm{Ln}[(2\pm\sqrt{3})i] = \left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3}), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

我们总有形式

$$\begin{aligned}\mathrm{Arcsin}\,z &= (2k+\frac{1}{2})\pi \pm \theta,\\ \mathrm{Arccos}\,z &= 2k\pi \pm \theta,\\ \mathrm{Arctan}\,z &= k\pi + \theta.\end{aligned}$$