第一章　复数与复变函数

1.1　复数及其代数运算

作业 1. 判断题: z 是实数当且仅当 $z=\overline{z}$. (　).

作业 2. 判断题: z 是纯虚数当且仅当 $z=-\overline{z}$. (　).

作业 3. 填空题: (2022 年 A 卷) 设 $z=-i$, 则 $1+z+z^2+z^3+z^4=$__________.

作业 4. 填空题: (2021 年 A 卷) 化简 $\dfrac{(1+i)^{101}}{(1-i)^{99}}=$__________.

作业 5. 填空题: 如果 x,y 是实数且 $\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i}=1+i$, 那么 $x+y=$__________.

作业 6. $z_1=-z, z_2=\overline{z}, z_3=-\overline{z}$ 在复平面上对应的点分别与 z 在复平面上对应的点是什么关系?

作业 7. 已知点 z_1,z_2,z_3 不共线. 点 $\dfrac{1}{2}(z_1+z_2)$ 和 $\dfrac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$ 表示什么点?

1.2　复数的三角与指数形式

作业 8. 判断题: z 是实数当且仅当 $\arg z=0,\pi$. (　).

作业 9. 判断题: z 是纯虚数当且仅当 $\arg z=\pm\dfrac{\pi}{2}$. (　).

作业 10.　求下列复数 z 的实部与虚部, 共轭复数, 模和主辐角:

(1) $\dfrac{1}{3+2i}$;　　(2) $\dfrac{3i}{1-i}-\dfrac{1}{i}$;　　(3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$;

(4) $i^8-4i^{21}+i$;　　(5) $\dfrac{1+2i}{3-4i}-\dfrac{2-i}{5i}$;　　(6) $\dfrac{3+i}{i}-\dfrac{10i}{3-i}$.

作业 11. (2020 年 A 卷) 如果 $(1+2i)\overline{z}=4+3i$, 求 z 及其主辐角.

作业 12.　求下列复数 z 的三角和指数形式:

(1) i;　　(2) $1+i\sqrt{3}$;

(3) $3-\sqrt{3}i$;　　(4) $\dfrac{2i}{1-i}$.

作业 13. 证明当 $|z|=1>|w|$ 时, $\left|\dfrac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|=1$.

作业 14. 证明如果复数 $a+ib$ 是实系数方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$

的根, 则 $a-ib$ 也是它的根.

1.3 复数的乘除、方幂与方根

作业 15. 填空题: (2020 年 B 卷) 复数 $\left[\dfrac{(1+i)^2}{2}\right]^{2021}$ 的模是________.

作业 16. 将 $z=\dfrac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5}{(\cos\varphi-i\sin\varphi)^3}$ 写成三角形式和指数形式.

作业 17. 计算

(1) $(\sqrt{3}-i)^5$; (2) $(1+i)^6$; (3) $\sqrt[6]{-1}$;

(4) $\sqrt[4]{-2+2i}$; (5) $\sqrt[4]{-2}$; (6) $(1-i)^{1/3}$.

作业 18. (2021 年 A 卷) 解方程 $z^3+8=0$.

作业 19. 如果 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$. 证明 $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$ 并说明这些等式的几何意义.

作业 20. 如果 $z=e^{it}$, 证明:

(1) $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos nt$; (2) $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin nt$.

1.4 曲线和区域

作业 21. 单选题: (2020 年 A 卷) 方程 $|z|=\operatorname{Re}z+1$ 中 z 的轨迹为 ( ).

(A) 椭圆 (B) 抛物线 (C) 双曲线 (D) 直线

作业 22. 单选题: (2020 年 A 卷) 不等式 $z\overline{z}-(2+i)z-(2-i)\overline{z}\leqslant 4$ 确定的是 ( ).

(A) 有界单连通闭区域 (B) 无界多连通区域

(C) 无界单连通闭区域 (D) 有界多连通区域

作业 23. 单选题: (2022 年 A 卷) 方程 $\big||z+i|-|z-i|\big|=1$ 表示的是 ( ).

(A) 直线 (B) 不是圆的椭圆 (C) 双曲线 (D) 圆周

作业 24. 单选题: 不等式 $-1<\arg z<\pi-1$ 确定是的 ( ).

(A) 有界单连通闭区域 (B) 有界多连通区域

(C) 无界单连通区域 (D) 无界多连通闭区域

作业 25. 用复参数方程表示连接 $-1+i$ 与 $1-4i$ 的直线段.

作业 26. 求下列各题中 z 的轨迹或范围, 并作图.

(1) $\mathrm{Re}(i\overline{z})=3$; (2) $z\overline{z}-(2+i)z-(2-i)\overline{z}=4$.

作业 27. 描出下列不等式所确定的区域或闭区域, 并指出它是有界还是无界的, 单连通还是多连通.

(1) $\mathrm{Im}\, z \leqslant 0, \mathrm{Re}\, z \geqslant 0$; (2) $|z-1|<|z+3|$;

(3) $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|<2$; (4) $\arg z < \dfrac{3\pi}{4}$.

1.5 复变函数

作业 28. 填空题: 求区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ 在映射 $w=z^3$ 下的像 =____________________.

作业 29. 填空题: (2021 年 B 卷) 已知映射 $w=z^3$, 则 $z=\sqrt{3}+i$ 在 w 复平面上的像是__________.

1.6 极限和连续性

作业 30. 填空题: (2020 年 A 卷) 极限 $\lim\limits_{z\to 1+i}(1+z^2+2z^4)=$__________.

作业 31. (2020 年 A 卷) 讨论极限 $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}\right)$ 是否存在. 若存在请求出具体的值, 若不存在请证明.

作业 32. 下列数列 $\{z_n\}$ 是否收敛? 如果收敛, 求出它们的极限:

(1) $z_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}$; (2) $z_n=\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^n$;

(3) $z_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$; (4) $z_n=\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]e^{-\frac{n\pi i}{2}}$;

(5) $z_n=\dfrac{(3+2i)^n}{(3+4i)^n}$.

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 33. 我们知道, 对于任意两个集合 A, B, 我们可以定义 $A\to B$ 的映射. 在数学中, 很多对象是带有 “结构” 的集合, 例如实线性空间 V 是一个拥有如下结构:

$$\text{零元 } 0\in V;\qquad \text{加法 } v_1+v_2\in V;\qquad \text{数乘 } \lambda v,$$

且满足一些特定性质的集合. 如果 A, B 具有同一种结构, 映射 $f: A \to B$ "保持" 了这些结构, 则我们称 f 是同态. 例如实线性空间之间的同态就是指一个映射 $f: V \to W$, 使得

$$f(0)=0; \qquad f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2); \qquad f(\lambda v)=\lambda f(v).$$

再比如域是带有如下结构:

零元 0; 幺元 1; 加法; 减法; 乘法; 除法,

且满足特定性质的集合 (交换律分配律之类的). 所以域之间的同态就是指一个 $f: F \to K$, 使得

- $f(0)=0, \qquad f(1)=1;$
- $f(x+y)=f(x)+f(y), \qquad f(x-y)=f(x)-f(y);$
- $f(xy)=f(x)f(y), \qquad f(x/y)=f(x)/f(y).$

如果一个同态是双射 (一一对应), 则称之为同构.

(1) 设 $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ 是有理数域之间的同构, 证明 f 只能是恒等映射.

(2) 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是实数域之间的连续的同构, 证明 f 只能是恒等映射.

(3) 设 $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是复数域之间的连续的同构, 证明 f 只能是恒等映射或复共轭.

(4) 如果 $F = \mathbb{R} + \mathbb{R}t$ 是一个真包含 $\mathbb{R}$ 的域, 证明 F 同构于 $\mathbb{C}$.

(5) 设

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$$

其中 $E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$. 证明 F 是一个域且同构于 $\mathbb{C}$.

作业 34. 满足 $z^n = 1$ 的复数 z 被称为 n 次单位根. 不难看出 $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, k = 0, 1, \ldots, n-1$. 单位根在代数, 几何和组合中有着丰富的应用. 我们来看一个例子. 设集合 $A = \{1, 2, \ldots, 2023\}$.

(1) 集合 A 有多少个子集? 试着将 A 的每一个子集与

$$N(x) = \prod_{a=1}^{2023} (1 + x^a)$$

的展开式中的每一项建立一个一一对应.

(2) 设 $S \subseteq A$. 定义

$$f(S) = \prod_{a \in S} x^a = x^{\sum_{a \in S} a}.$$

证明所有的 S 对应的 $f(S)$ 之和就是 $N(x)$.

(3) 证明 $N(x)$ 的展开式合并同类项后 x^k 的系数就是 A 的那些满足元素之和是 k 的子集的个数.

(4) 现在我们想知道 A 有多少个子集满足元素之和是 5 的倍数. 令 x 是 5 次单位根, 则 $N(x)$ 可以表为

$$N(x) = N_0 + N_1x + N_2x^2 + N_3x^3 + N_4x^4,$$

那么 N_0 就是元素之和是 5 的倍数的集合个数.

(5) 当 $x = 1$ 时, 显然 $N(1) = 2^{2023}$. 当 $x \neq 1$ 是 5 次单位根时, $1, x, x^2, x^3, x^4$ 是方程 $X^5 - 1 = 0$ 的所有根, 所以 $2, 1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3, 1 + x^4$ 是方程 $(X - 1)^5 - 1 = 0$ 的所有根. 由韦达定理可知

$$(1 + x^0)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4) = 2.$$

由此证明

$$N(x) = 2^{404}(1 + x^0)(1 + x)(1 + x^2) = 2^{405}(1 + x + x^2 + x^3).$$

(6) 计算 $N(1)+N(e^{2\pi i/5})+N(e^{4\pi i/5})+N(e^{6\pi i/5})+N(e^{8\pi i/5})$. 由此得到 $N_0 = \dfrac{2^{2023} + 4 \cdot 2^{405}}{5}$.

(7) 想一想, N_1, N_2, N_3, N_4 分别是多少?

更多细节可见: https://www.bilibili.com/video/BV1R34y1W7Xn/