



合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: <https://zhangshenxing.gitee.io>

课程安排

本课程共 10 周 40 课时, 自 2022 年 9 月 30 日至 2022 年 11 月 3 日. **课程 QQ 群**: (入群答案 **1400261B**)

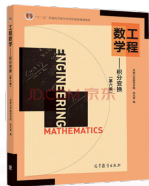
- 009 班 (电信工) **476993411**
- 010 班 (光信息和智感工) **672903188**

教材:

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》

成绩构成:

- **作业 15%**, 每章交一次
- **课堂测验 25%**, 一共 3 次, 取最高的两次
- **期末报告 10%**
- **期末考试 50%**, 至少 45 分才计算总评



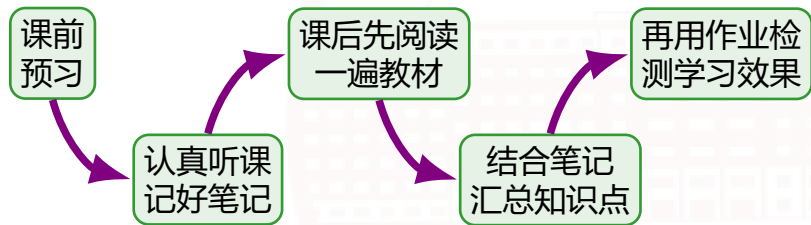
复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统.....
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学.....
- 信息学、电子学、电气工程.....

可以说复变函数应用之广, 在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.

本课程主要研究下述问题：

- 复数的由来, 以及复数的基本要素. (§ 1.1)
- 复数的运算法则和性质. (§§ 1.1-1.3)
- 复变量函数的定义, 以及与实变量函数的异同点. (§§ 1.4-1.6)
- 复变函数的解析性的刻画, 即复变函数的微分理论. (§§ 2.1-3.3)
- 复变函数的积分、级数和留数理论. (§§ 3.4-5.3)
- 积分变换及其应用. (§§ 6.1-6.3)



第一章 复数与复变函数

- ① 复数及其代数运算
- ② 复数的三角与指数形式
- ③ 复数的乘除、方幂与方根
- ④ 曲线和区域
- ⑤ 复变函数
- ⑥ 极限和连续性

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$, 配方可得

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 有两个不同的实根;
- (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 有一个二重的实根;
- (3) 当 $\Delta < 0$ 时, 无实根. 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根, 形式地计算可以发现它们满足原来的方程.

三次方程的根

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

解

设 $x = u + v$, 则

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + 6(u + v) - 20 = 0.$$

我们希望

$$u^3 + v^3 = 20, \quad uv = -2,$$

则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 - 20X - 8 = 0$. 解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$

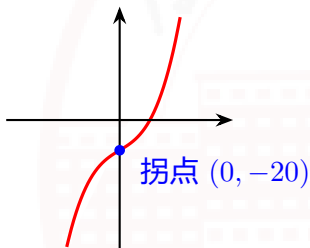
三次方程的根

续解

所以

$$u = 1 \pm \sqrt{3}, \quad v = 1 \mp \sqrt{3}, \quad x = u + v = 2.$$

那么这个方程是不是真的只有 $x = 2$ 这一个解呢? 这从它的函数图像可以看出.



三次方程的根

例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解

同样地我们有 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$. 然而这个方程没有实数解.

我们可以强行解得

$$u^3 = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}.$$

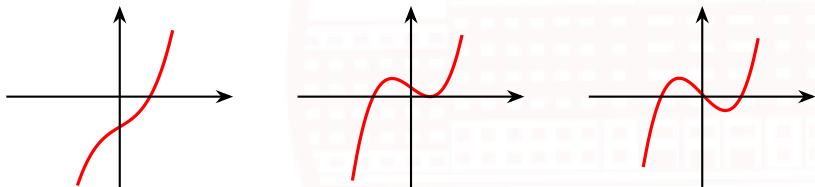
三次方程的根

对于一般的三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 而言, 使用上述方法可以得到求根公式:

$$x = u - \frac{p}{3u}, \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

由于 $p = 0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

- (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 有 1 个实根.
- (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 有 2 个实根 $x = -\sqrt[3]{4q}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).
- (3) 当 $\Delta < 0$ 时, 有 3 个实根.



三次方程的根

所以我们想要使用求根公式的话,就**必须接受负数开方**. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时,从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了.

尽管在十六世纪,人们已经得到了三次方程的求根公式,然而对其中出现的虚数,却是难以接受.

圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚的 -1 的平方根。

莱布尼兹 (Leibniz)

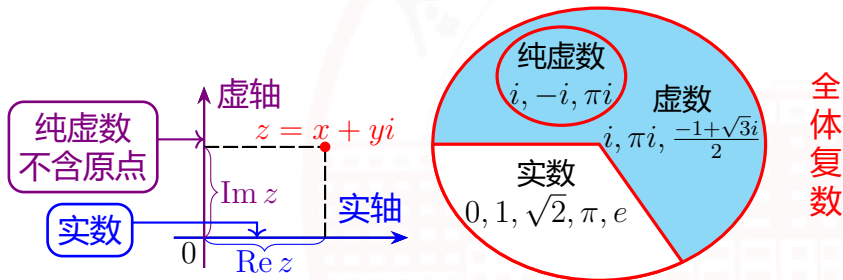
第一节 复数及其代数运算

- 复数的概念
- 复数的代数运算
- 共轭复数

实部和虚部, 虚数和纯虚数

当 $y = 0$ 时, $z = x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们将直线 $y = 0$ 称为**实轴**. 相应地, 直线 $x = 0$ 被称为**虚轴**. 我们称 $z = x + yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的**实部** $\operatorname{Re} z = x$ 和**虚部** $\operatorname{Im} z = y$.

当 $\text{Im } z = 0$ 时, z 是实数. 不是实数的复数是虚数. 当 $\text{Re } z = 0$ 且 $z \neq 0$ 时, 称 z 是纯虚数.



典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是: (1) 实数;
(2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .

(2) $\operatorname{Re} z = x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4 .

但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq -1$, $x = 4$.

练习

若 $x^2(1+i) + x(5+4i) + 4+3i$ 是纯虚数, 则实数 $x = \underline{-4}$.

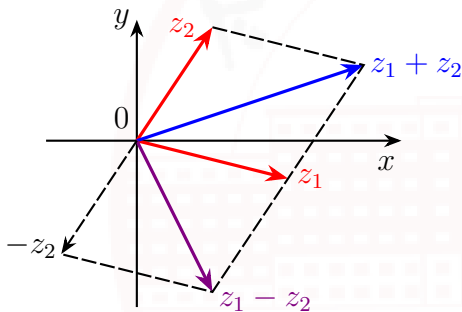
复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$. 由 \mathbb{C} 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量 \overrightarrow{OZ} 的加减法是一致的.



规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

对于正整数 n , 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘.

当 $z \neq 0$ 时, 还可以定义 $z^0 = 1, z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

例

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. 一般地, 对于整数 n ,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(2) 令 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$.

(3) 令 $z = 1 + i$, 则

$$z^2 = 2i, \quad z^3 = -2 + 2i, \quad z^4 = -4, \quad z^8 = 16 = 2^4.$$

我们把满足 $z^n = 1$ 的复数 z 称为 n 次单位根. 那么 $1, i, -1, -i$ 是 4 次单位根, $1, \omega, \omega^2$ 是 3 次单位根.

典型例题: 常见复数的幂次

例

化简 $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \underline{1}$.

解

根据等比数列求和公式,

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \frac{i^5 - 1}{i - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1.$$

练习 (2020 年 A 卷)

化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020} = \underline{1}$.

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a , $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 \mathbb{Q} , 实数全体 \mathbb{R} 也构成域, 它们是 \mathbb{C} 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域. 也就是说, 对于任何次数 $n \geq 1$ 的复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1z + c_0,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0) = 0$. 也就是说复系数多项式可以因式分解称一次多项式的乘积. 我们会在第五章证明该结论.

在 \mathbb{Q}, \mathbb{R} 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则 $a > b$ 或 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c , $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

而 \mathbb{C} 却不是有序域. 如果 $i > 0$, 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

于是 $0 > i$, 矛盾! 同理 $i < 0$ 也不可能.

复数也有其它的构造方式, 例如

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$$

其中 $E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$.

此时自然地有加法、乘法 (满足交换律)、取逆等运算, 从而这个集合构成一个域. 由于 $J^2 = -E$, 所以 J 实际上就相当于虚数单位, 这个域就是我们前面定义的复数域 \mathbb{C} .

例题：共轭复数判断实数

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

即

$$z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2), \quad (z-\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0.$$

由 $y \neq 0$ 可知 $z \neq \bar{z}$. 故上述等式等价于 $z\bar{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$. □

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它. 由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$, 因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$



例题: 复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}, \text{ 求 } \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \text{ 以及 } z\bar{z}.$$

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$\text{因此 } \operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad z\bar{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

例题: 复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

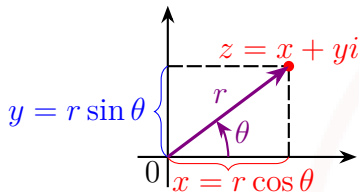
因此 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$.

第二节 复数的三角与指数形式

- 复数的模和辐角
- 复数的三角形式和指数形式

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



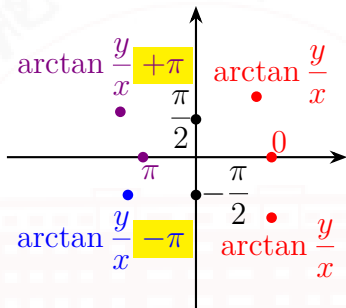
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \text{ 或 } \arctan \frac{y}{x} \pm \pi$$

定义

- 称 r 为 z 的模, 记为 $|z| = r$.
- 称 θ 为 z 的辐角, 记为 $\text{Arg } z = \theta$. 0 的辐角没有意义.

任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**或辐角主值, 记作 $\arg z$.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

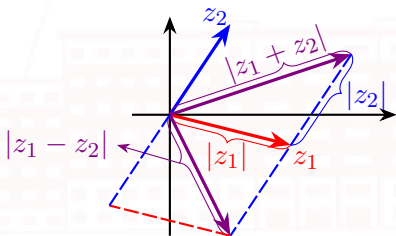
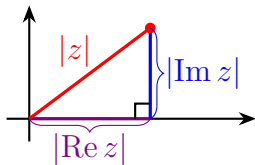


那么 $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

复数的模满足如下性质:

模的性质汇总

- $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$;
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.



例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|;$

$$(2) \quad |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}).$$

证明

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(2)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}). \end{aligned}$$



由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos \theta + i \sin \theta$ (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = r e^{i\theta} = r \exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

求复数的三角/指数形式的关键在于计算模和辐角.

典型例题: 求复数的三角/指数形式

例

将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.

解

$r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$. 由于 z 在第三象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z = 4 \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right] = 4e^{-\frac{5\pi i}{6}}.$$

典型例题: 求复数的三角/指数形式

例

将 $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解

$$\begin{aligned} z &= \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) \\ &= \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}. \end{aligned}$$

典型例题: 求复数的三角/指数形式

求复数的三角或指数形式时, 我们只需要任取一个辐角就可以了, 不要求必须是主辐角.

练习

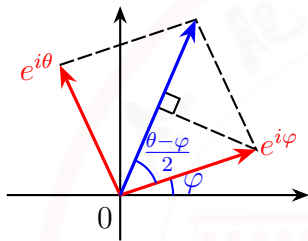
将 $z = \sqrt{3} - 3i$ 化成三角形式和指数形式.

答案

$$z = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2\sqrt{3} e^{\frac{5\pi i}{3}}.$$

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2 \cos \frac{\theta - \varphi}{2} e^{\frac{\theta + \varphi}{2} i}.$$



例

$$\begin{aligned} z &= 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha = e^0 + e^{(\pi - \alpha)i} \\ &= 2 \cos \frac{\pi - \alpha}{2} e^{\frac{\pi - \alpha}{2} i} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} e^{\frac{\pi - \alpha}{2} i}. \end{aligned}$$

第三节 复数的乘除、方幂与方根

- 复数的乘除与三角/指数表示
- 复数的乘幂
- 复数的方根

三角/指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

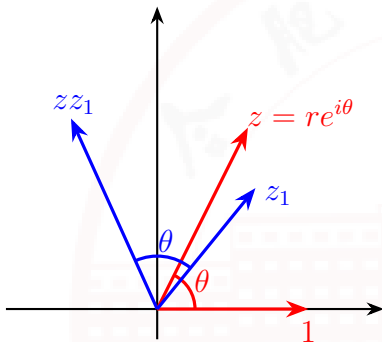
则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

乘积的几何意义

从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍, 并按逆时针旋转角度 θ .



例题: 复数解决平面几何问题

续解

因此

$$\begin{aligned} z_3 - z_1 &= (z_2 - z_1) \exp\left(\pm \frac{\pi i}{3}\right) = (1 + i) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i, \end{aligned}$$

$$z_3 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i.$$

设 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \neq 0$. 根据复数三角/指数形式的乘法和除法运算法则, 我们有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地, 当 $r = 1$ 时, 我们得到棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1,$$

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta,$$

$$\cos(4\theta) = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1,$$

$$\cos(5\theta) = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta.$$

一般地, 可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos \theta$ 的 n 次多项式, 这个多项式

$$g_n(T) = 2^{n-1}T^n - n2^{n-3}T^{n-2} + \dots$$

叫做切比雪夫多项式. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

典型例题: 复数乘幂的计算

例

求 $(1+i)^n + (1-i)^n$.

解

由于 $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, $1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, 因此

$$\begin{aligned} & (1+i)^n + (1-i)^n \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}. \end{aligned}$$

练习

求 $(\sqrt{3}+i)^{2022} = \underline{\quad -2^{2022} \quad}$.

我们利用复数方幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$.

为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为**算术根**.

由于 $n\varphi$ 和 θ 的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

故

$$\begin{aligned} w = w_k &= \sqrt[n]{r} \exp \frac{(\theta + 2k\pi)i}{n} \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 w_0, w_1, \dots, w_{n-1} 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \dots, n-1$. 故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值.

这些根的模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\frac{2\pi}{n}$. 因此它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的正接 n 边形的顶点.

典型例题：复数方根的计算

例

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解

由于 $1 + i = \sqrt{2} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$, 因此

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2} \exp \frac{(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)i}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

所以该方程所有值为

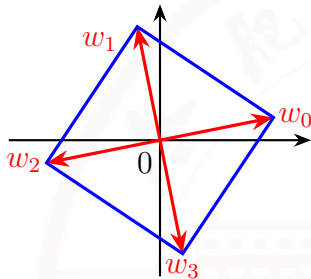
$$w_0 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi i}{16}}, \quad w_1 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{9\pi i}{16}}, \quad w_2 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{17\pi i}{16}}, \quad w_3 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{25\pi i}{16}}.$$

典型例题: 复数方根的计算

显然

$$w_1 = iw_0, \quad w_2 = -w_0, \quad w_3 = -iw_0.$$

所以 w_0, w_1, w_2, w_3 形成了一个正方形.



练习

求 $\sqrt[6]{-1} = \underline{\pm \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \pm i, \pm \frac{\sqrt{3} - i}{2}}.$

注意当 $|n| \geq 2$ 时, $\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg } z$ **不成立**. 这是因为

$$\text{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \text{Arg } z = n \arg z + 2nk\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\text{Arg } \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Arg } z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

其中左边表示 z 的所有 n 次方根的所有辐角.

三次方程的求根问题 *

现在来看三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的根, $p \neq 0$.

$$x = u + v, \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, \quad uv = -\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta > 0$, 设 $\alpha = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}}$ 是算术根, $\omega = e^{2\pi i/3}$. 则

$$u = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \quad x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, \quad \alpha\omega - \frac{p}{3\alpha}\omega^2, \quad \alpha\omega^2 - \frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果 $\Delta < 0$, 则 $p > 0$, u 是虚数且 $v = \bar{u}$. 设 u_1, u_2, u_3 是 $\sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}}$ 的所有值, 则我们得到 3 个实根

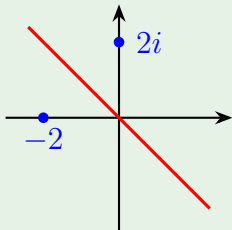
$$x = u_1 + \overline{u_1}, \quad u_2 + \overline{u_2}, \quad u_3 + \overline{u_3}.$$

第四节 曲线和区域

- 复数表平面曲线
- 区域的定义
- 区域的特性

例 (续)

(2) $|z - 2i| = |z + 2|$. 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 $x + y = 0$.



典型例题: 复数方程表平面图形

例 (续)

(3) $\text{Im}(i + \bar{z}) = 4$. 设 $z = x + yi$, 则 $\text{Im}(i + \bar{z}) = 1 - y = 4$, 因此 $y = -3$.

(4) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

(5) $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

练习

$z^2 + \bar{z}^2 = 1$ 和 $z^2 - \bar{z}^2 = i$ 分别表示什么图形?

答案

双曲线 $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ 和双曲线 $xy = \frac{1}{4}$.

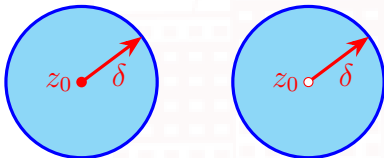
为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域. 类比于高等数学中的邻域和去心邻域, 我们在复变函数中, 称开圆盘

$$U(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

为 z_0 的一个 δ -邻域, 称去心开圆盘

$$\overset{\circ}{U}(z_0, \delta) = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

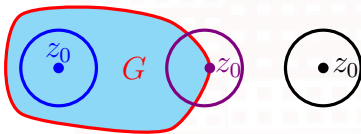
为 z_0 的一个去心 δ -邻域.



设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

- (1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
- (2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.
- (3) 如果 z_0 的任何一个邻域 U , 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

显然内点都属于 G , 外点都不属于 G , 而边界点则都有可能. 这类似于区间的端点和区间的关系.



如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个**开集**. 例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G , 称 G 是一个**闭集**. 这等价于它的补集是开集.

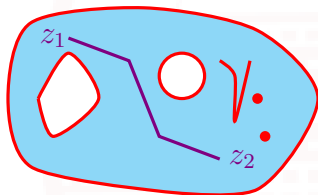
直观上看: 开集往往由 $>$, $<$ 的不等式给出, 闭集往往由 \geq , \leq 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0, R)$ 中, 则称它是**有界的**. 否则称它是**无界的**.

定义

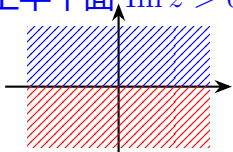
如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个**区域**. 也就是说, 区域是连通的开集.

观察下侧的图案, 青色部分是一个区域 (不包含红色部分). 红色的线条和点是它的边界. 区域和它的边界一起构成了**闭区域**, 记作 \bar{D} . 它是一个闭集.



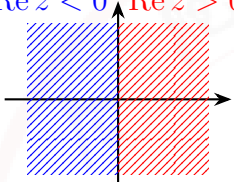
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定. 这些区域对应的闭区域是什么?

上半平面 $\text{Im } z > 0$



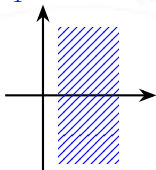
下半平面 $\text{Im } z < 0$

左半平面 $\text{Re } z < 0$ 右半平面 $\text{Re } z > 0$



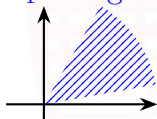
竖直带状区域

$x_1 < \text{Re } z < x_2$



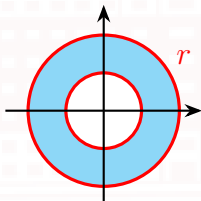
角状区域

$\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$



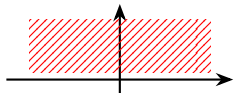
圆环域

$r < |z| < R$



水平带状区域

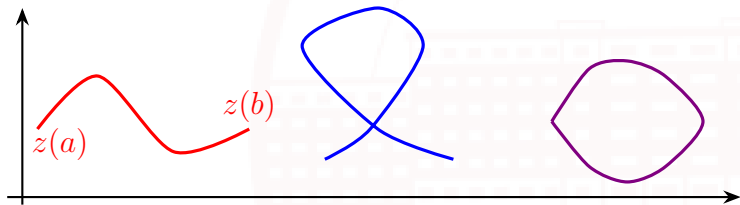
$y_1 < \text{Im } z < y_2$



设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b] \text{ 定义了一条连续曲线. 这也等价于}$$
$$\tilde{C} : z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b].$$

如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线. 如果还满足两个端点重叠, 即 $z(a) = z(b)$, 则称 C 是简单闭曲线, 也简称为闭路.

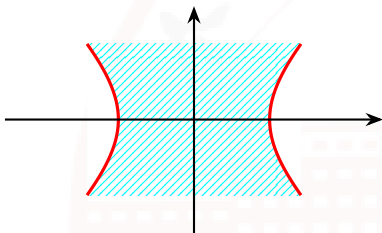


例题：区域的特性

例

(1) $\operatorname{Re}(z^2) < 1$.

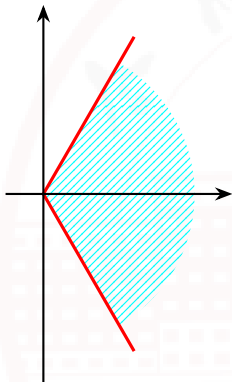
设 $z = x + yi$, 则 $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$. 这是无界的单连通域.



例题：区域的特性

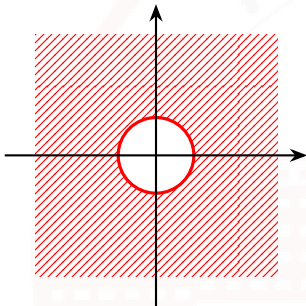
例 (续)

(2) $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$. 即角状区域 $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}$. 这是无界的单连通域.



例 (续)

(3) $\left|\frac{1}{z}\right| \leq 3$. 即 $|z| \geq \frac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.



第五节 复变函数

- 复变函数的定义
- 映照

复变函数的定义

所谓的映射, 就是两个集合之间的一种对应 $f: A \rightarrow B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \frac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

- 称 A 为函数 f 的定义域.
- 称 $\{w = f(z) : z \in A\}$ 为它的值域.

上述函数的定义域和值域分别是什么?

在复变函数理论中, 我们常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z , 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是一一对应.

例

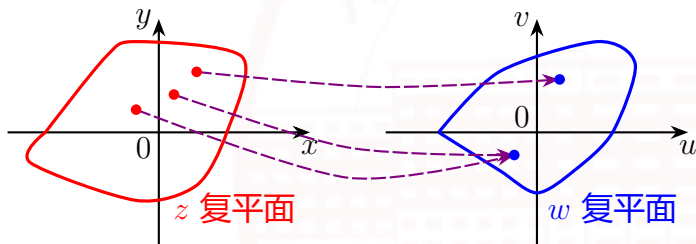
$f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时, f 是一一对应.

若无特别声明, 复变函数总是指单值的复变函数.

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系, 其中 $w = u + iv$ 的实部和虚部

$$u(x, y), \quad v(x, y)$$

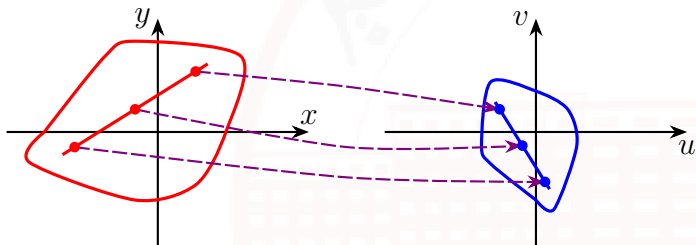
是两个二元实变函数.



例题：映照

例

函数 $w = az$. 设 $a = re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.



例题：映照的像

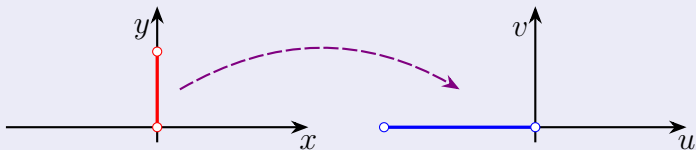
例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \frac{\pi}{2}$.

解

设 $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$, 则 $w = z^2 = -r^2$. 因此它的像还是一条线段 $0 < |w| < 4, \arg w = -\pi$.



例题: 映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

解

由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

因此 $u = x^2 - y^2 = 4, v = 2xy$.

可以说明当 $u = 4$ 时, 对任意 v , $u + iv$ 都是该双曲线上某一点的像. 所以这条双曲线的像是直线 $\operatorname{Re} w = 4$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(3) 扇形区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2$.

解

设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2 e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域 $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}, 0 < |w| < 4$.

例题：映照的像

例

求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = \frac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解

由于 $z = \frac{w+1}{w-1}$, $\left| \frac{w+1}{w-1} \right| = 2$, 因此

$$|w + 1| = 2|w - 1|, \quad w\bar{w} + w + \bar{w} + 1 = 4w\bar{w} - 4w - 4\bar{w} + 4,$$

$$w\bar{w} - \frac{5}{3}w - \frac{5}{3}\bar{w} + 1 = 0, \quad \left|w - \frac{5}{3}\right|^2 = \frac{16}{9},$$

即 $\left|w - \frac{5}{3}\right| = \frac{4}{3}$, 是一个圆周.

第六节 极限和连续性

- 无穷远点
- 数列的极限
- 函数的极限
- 函数的连续性

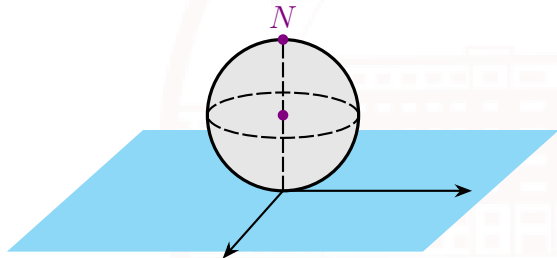
类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n \geq 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.
- 如果 $\forall X > 0, \exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $|z_n| > X$, 则称 ∞ 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$.

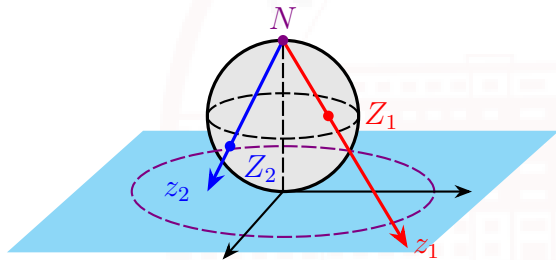
那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞ . 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

取一个与复平面相切于原点 $z = 0$ 的球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于另一点 N , 称之为北极.

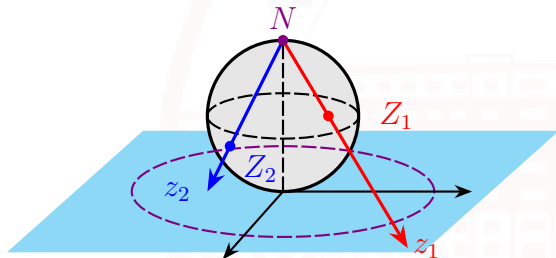


- 对于平面上的任意一点 z , 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z .
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z , 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.

这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.

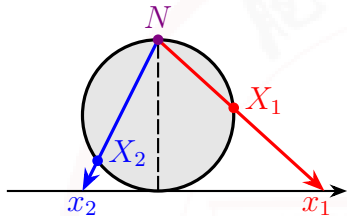


当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N . 如果我们在复平面上添加一个额外的"点"——**无穷远点**, 记作 ∞ . 那么**扩充复数集合** $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应. 称这样的球面为**复球面**, 称包含无穷远点的复平面为**扩充复平面**(**闭复平面**).



复球面：与实数无穷的联系

它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞ .



朴素地看, 复球面上任意一点可以定义邻域的概念. 特别地, ∞ 的开邻域通过前面所说的对应关系, 可以对应到扩充复平面上 ∞ 的一个邻域. 所以在复球面上, 我们将普通复数和 ∞ 的开邻域可以视为相同的概念.

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

定理

设 $z_n = x_n + y_n i, z = x + y i$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

证明

由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证.



例题: 数列的敛散性

例

设 $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解

由于

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \rightarrow 1, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow 0.$$

因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$.

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U(A, \varepsilon)$, $\exists \delta > 0$ 使得

$$z \in \mathring{U}(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(A, \varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \rightarrow A (z \rightarrow z_0)$.

此时我们称极限存在.

对于 $z_0 = \infty$ 或 $A = \infty$ 的情形, 也可以用上述定义统一描述.

不难看出, 变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的: 即 $z \rightarrow z_0$ 沿任一曲线趋向于 z_0 的极限都是相同的.

定理

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + y_0i$, $A = u_0 + v_0i$, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

证明

由三角不等式

$$|u - u_0|, |v - v_0| \leq |f(z) - A| \leq |u - u_0| + |v - v_0|$$

易证.



由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, 则

$$(1) \lim_{z \rightarrow z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow z_0} (fg)(z) = AB;$$

$$(3) \text{ 当 } B \neq 0 \text{ 时, } \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f}{g} \right) (z) = \frac{A}{B}.$$

类似地, 我们也可以使用等价无穷小替换、洛必达法则等.

例题: 判断函数极限是否存在

例

证明当 $z \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时, $u(x, y) \rightarrow \pm 1$. 因此 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y)$ 不存在, 从而 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在. □

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

也处处连续, 有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

有时候我们会遇到在曲线上连续的函数, 它指的是当 z 沿着该曲线趋向于 z_0 时, $f(z) \rightarrow f(z_0)$. 此时它具有类似一元实变量函数的性质.

例题: 函数连续性的判定

例

证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x, y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

另一种看法是, 函数 $g(z) = \bar{z} = x - iy$ 处处连续, 从而 $g(f(z)) = \overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续. □

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 \mathbb{C} 是一个域, 上面可以做除法.

这就导致了复变函数有**导数**, 而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.