2011年复变函数期末考试试卷

姓名：　　　　　　　学号：

本卷中$B(a,r)=\{z\in\mathbb{C}||z-a|<r\}, B(\infty,r)=\{z\in\mathbb{C}||z|>r\}$.

1 以下陈述是否正确?如果不正确请给出理由.$(20')$

(1) 存在$B(0,1)\backslash\{0\}$上的无界全纯函数f使得$\lim_{z\to 0} zf(z)=0$.

(2) 存在$B(0,1)$上的全纯函数f使得$f(\frac{1}{n})=(-1)^n, n=2,3,\ldots$.

(3) 存在$\mathbb{C}$上的非零全纯函数f有无穷多零点.

(4) 设D 是$\mathbb{C}$ 中的域, $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$,则$f$一定能在$D$的边界上取得最大模.

(5) 设$D=\{z\in\mathbb{C}|0<\operatorname{Re} z<1\}, f\in H(D)\cap C(\overline{D})$满足$f(ai)=0,\forall a\in\mathbb{R}$,则$f$恒等于零.

(6) 设$D=B(\infty,R), f,g\in H(D)\cap C(\overline{D}), R>0$满足$f(z)=g(z),\forall z\in\mathbb{C},|z|=R$,则$f$恒等于$g$.

(7) ∞是$\sin\left(\frac{1}{\cos\frac{1}{z}}\right)$的本性奇点.

(8) $\frac{z}{e^z-1}$在$\mathbb{C}$上亚纯.

(9) $B(0,1)$的全纯自同构必为分式线性变换.

(10) 若整函数f将实轴和虚轴均映为实数,则$f'(0)=0$.

2 计算题$(30')$

(1) $\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z-1)^3(z-3)}$.

(2) $\int_{|z|=2}\frac{z+1}{z^2(z^3+2)}dz$.

(3) $\int_{|z|=4}\frac{ze^{iz}}{\sin z}dz$.

(4) $\operatorname{Res}\left(\frac{z^{2n}}{(z+1)^n},\infty\right)$.

(5) $e^{\frac{1-z}{z}}$ 在扩充复平面上有哪些奇点?并求出在$D=B(\infty,1)$上的Laurent展开.

3 $(10')$设$f\in H(B(0,1)), f(0)=1$,并且$\operatorname{Re} f(z)\geq 0,\forall z\in B(0,1)$.证明

$$\frac{1-|z|}{1+|z|}\leq \operatorname{Re} f(z)\leq |f(z)|\leq\frac{1+|z|}{1-|z|},\forall z\in B(0,1).$$

4 $(10')$利用辐角原理或Rouché定理证明代数学基本定理.

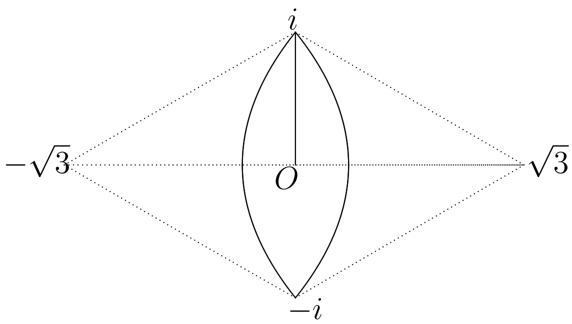
5 $(10')$设γ是圆周$\partial B(a,R)$上的一段开圆弧.证明:若f在$B(a,R)$上全纯,在$B(a,R)\cup\gamma$上连续,并且在γ上恒为零,则f在$B(a,R)$上也恒为零.

6 $(10')$求一单叶全纯映射,把D 映为上半平面,其中

$$D=\Omega\backslash[0,i],$$

$$\Omega=B(\sqrt{3},2)\cap B(-\sqrt{3},2),$$

这里$[0,i]$ 表示连接0和i的线段。



7 $(10')$设γ是可求长简单闭曲线,其内部为域G_1,外部为域G_2.如果$f\in H(G_2)\cap C(\overline{G}_2)$, 而且

$$\lim_{z\to\infty}f(z)=A,$$

那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}-f(z)+A, & z\in G_2;\\ A, & z\in G_1,\end{cases}$$

这里γ关于G_1取正向.