3.4 隐函数与参数方程确定函数的求导方法

- 隐函数的求导方法
- 关于隐函数的导数，我们很自然地想到求出隐函数的显式表达，然后按显函数的求导方法来求.
- 例如二元方程 $x^2+y^2=1, y>0$ 确定的 y 是 x 的隐函数，我们可以得到 $y=\sqrt{1-x^2}$，则 $y'=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
- 然而并不是所有的隐函数都有显式表达，例如开普勒方程 $x-y+\varepsilon\sin y=0\ (0<\varepsilon<1)$. 此时我们该如何求其导数?

- 一般而言，在一定条件下，二元方程 $F(x,y)=0$ 确定了 y 是 x 的隐函数 $y=y(x)$，代入方程可以得到 $F[x,y(x)]=0$.
- 方法 如果隐函数 $y=y(x)$ 可导，我们可以在上式两边同时对 x 求导，则有

$$\frac{\mathrm{d}F[x,y(x)]}{\mathrm{d}x}=0, \qquad 即 \ \frac{\mathrm{d}F[x,y]}{\mathrm{d}x}=0.$$

- 然后从中解出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 即可.
- 注意 在求导过程中，应始终将 $y=y(x)$ 视为 x 的函数，因此 $F(x,y)$ 是 x 的复合函数.

- 例 设 $x^2 + 2y^2 = 1$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
- 解 在方程两边同时对 x 求导得 $2x + 4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$,
- 解得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{2y}\ (y \neq 0)$.
- 注意 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y^2) = 4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 而不是 $4y$, 实际上 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(2y^2) = 4y$.
- 例 设 $x - y + \varepsilon \sin y = 0$, 求 y'.
- 解 在方程两边同时对 x 求导得

$$1 - y' + \varepsilon \cos y \cdot y' = 0,$$

- 解得 $y' = \frac{1}{1-\varepsilon \cos y}\left(\cos y \neq \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

- 例 设 $xy = e^{x+y}$, 求 y'.
- 解 在方程两边同时对 x 求导得

$$y + xy' = e^{x+y}(1 + y'),$$

- 解得 $y' = \frac{e^{x+y} - y}{x - e^{x+y}}$ $(x \neq e^{x+y})$.
- 也可以写成 $y' = \frac{xy - y}{x - xy} = \frac{(x-1)y}{x(1-y)}$ $(x \neq 0, y \neq 1)$.
- 隐函数的导数表达方式不唯一, 但本质上是唯一的.
- 在这个例子中实际上, $x \neq 0, y \neq 1$ 恒成立.

- 例 求椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 处的切线方程.
- 解 在方程两边同时对 x 求导得

$$\frac{x}{2}+\frac{2yy'}{3}=0,$$

- 解得 $y'=-\frac{3x}{4y}\ (y\neq 0)$.
- 因此该椭圆在点 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 处的切线斜率为 $-\frac{3\times 1}{4\times\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}$, 切线方程为

$$y-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x-1),\qquad \text{即 } x+2y=4.$$

- **例** 设 $x^2 - xy + 1 = e^y$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0} =$______.
- **解** 在方程两边同时对 x 求导得

$$2x - y - xy' = e^y y',$$

- 解得 $y' = \frac{2x-y}{e^y+x}$. 所以 $y'(0) \cancel{=} -\frac{y}{e^y}$.
- 这并不正确, 我们还需要计算出 $x = 0$ 时 y 的值.
- 当 $x = 0$ 时, $-y + 1 = e^y, y = 0$, 故 $y'(0) = 0$.

- 例 设 $x+y+\sin y=0$, 求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

- 解 两边同时对 x 求导得 $1+y'+\cos y\cdot y'=0$, 解得 $y'=-\frac{1}{\cos y+1}$, 所以

$$y''=\frac{1}{(\cos y+1)^2}\cdot(-\sin y)\cdot y'=\frac{\sin y}{(\cos y+1)^3}.$$

- 也可以由上述等式再次求导得

$$y''-\sin y\cdot y'\cdot y'+\cos y\cdot y''=0,$$

- 所以 $y''=\frac{1}{\cos y+1}\cdot\sin y\cdot(y')^2=\frac{\sin y}{(\cos y+1)^3}$.

- 设 $y=f(x)$ 有反函数, 则它的反函数为 $x=f(y)$.
- 于是 $1=f'(y)y', y'=\frac{1}{f'(y)}$. 此即反函数求导法则.
- 对数求导法
- 当 $f(x)$ 较复杂, 而 $\ln f(x)$ 较简单时, 将 $y=f(x)$ 两边取对数得 $\ln y=\ln f(x)$, 再利用隐函数求导法求出 $f'(x)$.

- 例 设 $y=\sqrt{\frac{(x+5)(x-4)^2}{(x-2)^3\sqrt[3]{x+4}}}$, 求 y'.
- 解 $\ln y=\frac{1}{2}\left[\ln(x+5)+2\ln(x-4)-3\ln(x-2)-\frac{1}{3}\ln(x+4)\right]$,

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x+5}+\frac{2}{x-4}-\frac{3}{x-2}-\frac{1}{3(x+4)}\right],$$

- 因此 $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+5)(x-4)^2}{(x-2)^3\sqrt[3]{x+4}}}\left[\frac{1}{x+5}+\frac{2}{x-4}-\frac{3}{x-2}-\frac{1}{3(x+4)}\right]$.
- 注意, 由于 $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$, 故可不比讨论对数中真数的正负号. 虽然过程不严谨, 但此解法已经默认为常用方法.

- 例 设 $y = x^x$, 求 y'.

- 解 $\ln y = x\ln x, \dfrac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1, y' = x^x(\ln x + 1)$.

- 这种方法等价于对 $y = e^{\ln y}$ 利用复合函数求导法则.

$$y' = e^{\ln y} \cdot (\ln y)' = y(\ln y)'.$$

- 例如

$$(x^x)' = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

- 由参变量方程所确定的函数的求导法则

- 设函数满足参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ，t 为参数. 如果能从中消去参数, 化为显函数或隐函数, 则可利用前面介绍的方法求其导数.

- 例 设 $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$, 则 $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ $(x \neq 0)$.

- 例 设 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, 则 $x^2 + y^2 = 1$, $y' = -\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$.

- 如果不能从中消去参数, 我们该如何求其导数呢?

- 设 $\varphi(t), \psi(t)$ 均可导，且 $x=\varphi(t)$ 在 t 的某个区间内单调，则由反函数存在定理知，存在连续、可导的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，这样 $y=\psi(t)$ 与 $t=\varphi^{-1}(x)$ 就构成了复合函数 $y=\psi[\varphi^{-1}(x)]$. 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

- 直观理解就是，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta x\to 0$，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y/\Delta t}{\Delta x/\Delta t}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta y/\Delta t}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta x/\Delta t}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}.$$

- 如果 $\varphi(t), \psi(t)$ 具有二阶导数, 则

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)' \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

- 注意不是 $\frac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$ 也不是 $\frac{\psi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}$.

- 例 设 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$，求 y''.
- 解

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 + 3} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 1 - \frac{2}{t^2 + 1},$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{\frac{2}{(t^2 + 1)^2} \cdot 2t}{3t^2 + 3} = \frac{4t}{3(t^2 + 1)^3}.$$

- 例 设 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, 求 y''.
- 解

$$y' = \frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \frac{[\cos t\,(1-\cos t) - \sin t \cdot \sin t](1-\cos t)^{-2}}{a(1-\cos t)}$$

$$= \frac{\cos t - 1}{a(1-\cos t)^3} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$

- 例 曲线 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为______.

- 解 $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = t$, 因此 $y'|_{t=1} = 1$, 法线斜率为 $\frac{-1}{1} = -1$.

由于 $x|_{t=1} = \frac{\pi}{4}, y|_{t=1} = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$, 因此法线方程为

$$y - \frac{1}{2}\ln 2 = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \qquad \text{即 } x + y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

- 极坐标系中的问题可以转化为直角坐标中的参数方程问题

$$\text{极坐标中 } r=r(\theta) \Leftrightarrow \text{直角坐标系中} \begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases},\ \theta \text{ 为参数.}$$

- 例 求对数螺旋线 $r=e^{\theta}$ 在 $\left(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的极坐标方程.

- 解 由题意得 $\begin{cases} x=e^{\theta}\cos\theta \\ y=e^{\theta}\sin\theta \end{cases}$,

$$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}=\frac{e^{\theta}\sin\theta+e^{\theta}\cos\theta}{e^{\theta}\cos\theta-e^{\theta}\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta},\qquad y'\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1.$$

- 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=0, y=e^{\frac{\pi}{2}}$，相应的切线方程为 $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$.
- 化成极坐标为 $r\cos\theta+r\sin\theta=e^{\frac{\pi}{2}}$，即 $r=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\cos\theta+\sin\theta}$.
- 一般地，设曲线 $r=r(\theta)$，$y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta}=\dfrac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}$.
- 于是在 $[r(\theta_0),\theta_0]$ 处的切线极坐标方程为

$$[r'(\theta_0)\sin\theta_0+r(\theta_0)\cos\theta_0]\cdot[r\cos\theta-r(\theta_0)\cos\theta]$$
$$=[r'(\theta_0)\cos\theta_0-r(\theta_0)\sin\theta_0]\cdot[r\sin\theta-r(\theta_0)\sin\theta],$$

即 $$r=\frac{r(\theta_0)}{\cos(\theta-\theta_0)-r(\theta_0)^{-1}r'(\theta_0)\sin(\theta-\theta_0)}.$$