



合肥工业大学  
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## 复变函数与积分变换

---

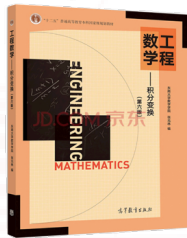
张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: [zhangshenxing@hfut.edu.cn](mailto:zhangshenxing@hfut.edu.cn)

课件地址: <https://zhangshenxing.github.io>

- 课时:
  - 10 周 40 课时;
  - 2024-09-09 ~ 2024-11-14
- 课程 QQ 群 (入群答案 1400261B)
  - 008 班 (生医、通信工程) **973042840**
  - 009 班 (车辆创新实验、集成) **973041550**
- 教材: 西交高数教研室《复变函数》, 张元林《积分变换》



## 作业 15 分

作业每次会提前发布, 每章交一次. **作业不允许迟交.** 没带的请当天联系助教补交, 迟一天交 -50% 当次作业分, 迟两天或以上 0 分. 请假需提前交给我请假条.

## 期末考试 50 分

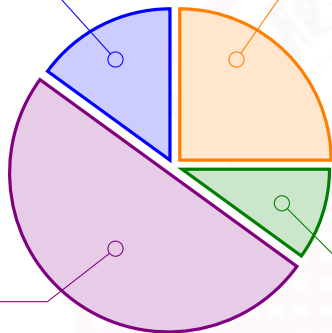
期末卷面需要达到 45 分才计算总评分数, 45 分以下直接不及格.

## 课堂测验 25 分

课堂测验共 3 次, 取最高的两次平均. 测验范围和时间会提前通知. **测验时在教室内作答, 否则按未考处理.**

## 期末报告 10 分

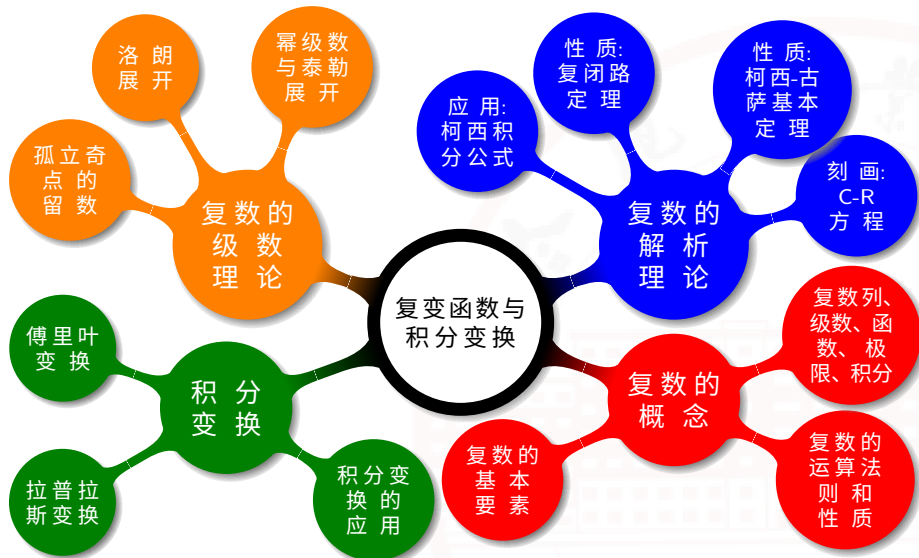
期末之前会告知主题. 请交手写纸质版, 并自行留存电子版本以免意外丢失.

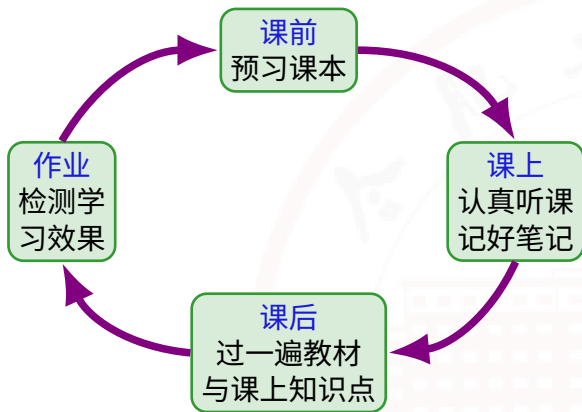


复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

可以说复变函数应用之广, 在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.





## 第一章 复数与复变函数

- ① 复数及其代数运算
- ② 复数的三角与指数形式
- ③ 复数的乘除、乘幂与方根
- ④ 曲线和区域
- ⑤ 复变函数
- ⑥ 极限和连续性

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程  $x^2 + bx + c = 0$ , 配方可得

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当  $\Delta > 0$  时, 有两个不同的实根;
- (2) 当  $\Delta = 0$  时, 有一个二重的实根;
- (3) 当  $\Delta < 0$  时, 无实根. 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根, 形式地计算可以发现它们满足原来的方程.



现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程  $x^3 + 6x - 20 = 0$ .

解

设  $x = u + v$ , 则

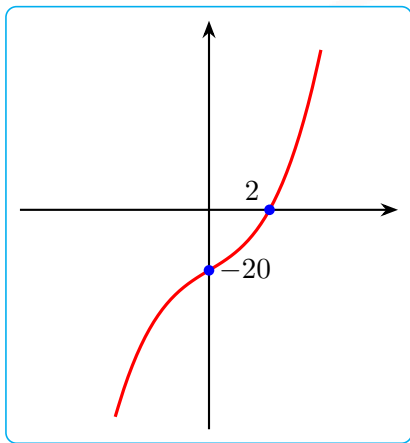
$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + 6(u + v) - 20 = 0.$$

我们希望  $u^3 + v^3 = 20, uv = -2$ , 则  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2 - 20X - 8 = 0$ . 解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$

所以  $u = 1 \pm \sqrt{3}, v = 1 \mp \sqrt{3}, x = u + v = 2$ .

那么这个方程是不是真的只有  $x = 2$  这一个解呢？由  $f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$  可知其单调递增，因此确实只有一个解。



例

解方程  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

解

同样地我们有  $x = u + v$ , 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$ . 然而这个方程没有实数解.

我们可以强行解得

$$u^3 = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}.$$

续解

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

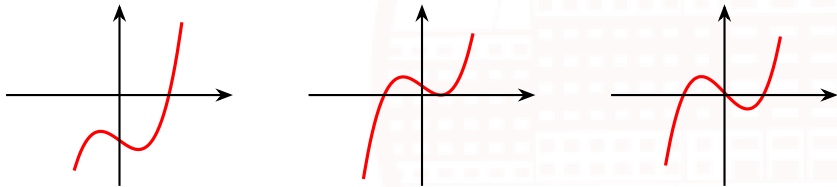
$$v = \frac{3 - 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 - \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 + 5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x = u + v = 2, -3, 1.$$

所以我们从一条“**错误的路径**”走到了正确的目的地？

$$x = u - \frac{p}{3u}, \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

- (1) 当  $\Delta > 0$  时, 有 1 个实根.
- (2) 当  $\Delta = 0$  时, 有 2 个实根  $x = -\sqrt[3]{4q}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$  (2 重).
- (3) 当  $\Delta < 0$  时, 有 3 个实根.



所以我们想要使用求根公式的话, 就**必须接受负数开方**. 那么为什么当  $\Delta < 0$  时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的  $-1$  的平方根。

莱布尼兹 (Leibniz)

我们将在下一节使用更为现代的语言来解释和运用复数.

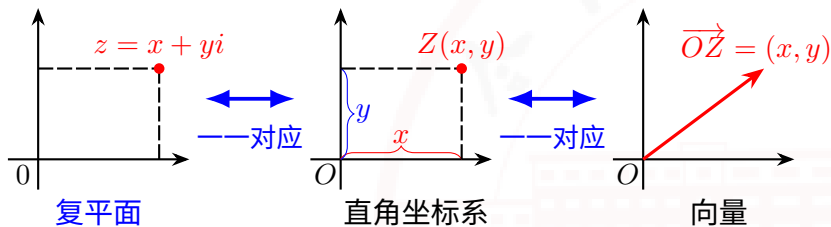
## 第一节 复数及其代数运算

- 复数的概念
- 复数的代数运算
- 共轭复数





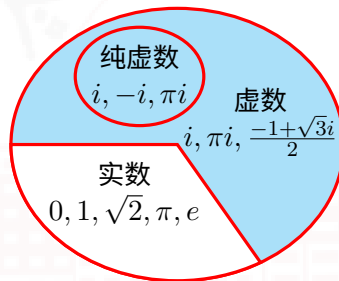
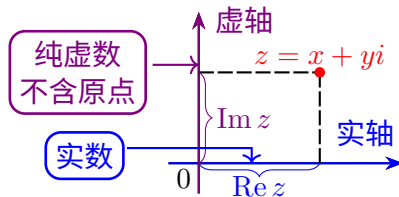
由于  $\mathbb{C}$  是一个二维实向量空间,  $1$  和  $i$  构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



## 实部和虚部, 虚数和纯虚数

当  $y = 0$  时,  $z = x$  就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的  $x$  轴上的点. 因此我们称  $x$  轴为**实轴**. 相应地, 称  $y$  轴为**虚轴**. 称  $z = x + yi$  在实轴和虚轴的投影为它的**实部**  $\operatorname{Re} z = x$  和**虚部**  $\operatorname{Im} z = y$ .

当  $\text{Im } z = 0$  时,  $z$  是实数. 不是实数的复数是虚数. 当  $\text{Re } z = 0$  且  $z \neq 0$  时, 称  $z$  是纯虚数.



# 全体复数

### 典型例题：判断实数和纯虚数

## 例

实数  $x$  取何值时,  $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$  是:

(1) 实数; (2) 纯虚数.

解

(1)  $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$ , 即  $x = -1$  或  $6$ .

(2)  $\operatorname{Re} z = x^2 - 3x - 4 = 0$ , 即  $x = -1$  或  $4$ . 但同时要求  $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 \neq 0$ , 因此  $x \neq -1, x = 4$ .

## 练习

若  $x^2(1+i) + x(5+4i) + 4+3i$  是纯虚数, 则实数  $x = -4$ .

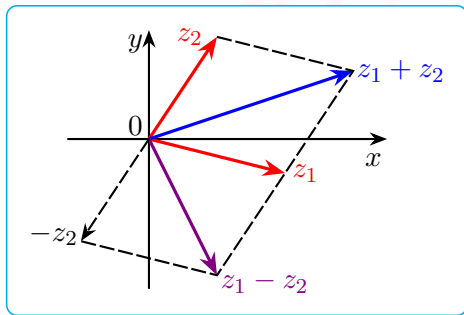
## 复数的加法与减法

设  $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$ . 由  $\mathbb{C}$  是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量  $\overrightarrow{OZ}$  的加减法是一致的.



规定  $i \cdot i = -1$ . 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

对于正整数  $n$ , 定义  $z$  的  $n$  次幂为  $n$  个  $z$  相乘. 当  $z \neq 0$  时, 还可以定义  $z^0 = 1, z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ .

## 例

(1)  $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ . 一般地, 对于整数  $n$ ,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(2) 令  $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ , 则  $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$ .

(3) 令  $z = 1 + i$ , 则

$$z^2 = 2i, \quad z^3 = -2 + 2i, \quad z^4 = -4, \quad z^8 = 16 = 2^4.$$

我们把满足  $z^n = 1$  的复数  $z$  称为  $n$  次单位根. 那么  $1, i, -1, -i$  是 4 次单位根,  $1, \omega, \omega^2$  是 3 次单位根.

### 典型例题：常见复数的幂次

## 例

化简  $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 =$  1 .

解

根据等比数列求和公式,

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \frac{i^5 - 1}{i - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1.$$

## 练习 (2020 年 A 卷)

化简  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020} = \underline{1}$ .

是指带有如下内容和性质的集合

交换/分配律;

它们是  $\mathbb{C}$  的子域. 与有理数域和实数域有着本

任何次数  $n \geq 1$  的复系数多项式

$$a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

说复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘

- 是指带有如下内容和性质的集合
- 交换/分配律;
- 它们是  $\mathbb{C}$  的子域. 与有理数域和实数域有着本
- 任何次数  $n \geq 1$  的复系数多项式
- $$a_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0,$$
- 说复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘

是指带有如下内容和性质的集合

交换/分配律;

它们是  $\mathbb{C}$  的子域. 与有理数域和实数域有着本

任何次数  $n \geq 1$  的复系数多项式

$$a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

说复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘

是指带有如下内容和性质的集合

交换/分配律;

它们是  $\mathbb{C}$  的子域. 与有理数域和实数域有着本

任何次数  $n \geq 1$  的复系数多项式

$$a_n z^n + \cdots + c_1 z + c_0,$$

说复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘

是指带有如下内容和性质的集合

交换/分配律;

它们是  $\mathbb{C}$  的子域. 与有理数域和实数域有着本

任何次数  $n \geq 1$  的复系数多项式

$$a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0,$$

说复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘



在  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的  $>$ :

- 若  $a \neq b$ , 则要么  $a > b$ , 要么  $b > a$ ;
- 若  $a > b$ , 则对于任意  $c$ ,  $a + c > b + c$ ;
- 若  $a > b, c > 0$ , 则  $ac > bc$ .

而  $\mathbb{C}$  却不是有序域. 如果  $i > 0$ , 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

于是  $0 > i$ , 矛盾! 同理  $i < 0$  也不可能.

## 定义

称  $z$  在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\bar{z}$ . 换言之,  $\bar{z} = x - yi$ .

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

- (1)  $z$  是  $\bar{z}$  的共轭复数.
  - (2)  $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$ .
  - (3)  $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ .
  - (4)  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ ,  $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$ .
- (4)表明了  $x, y$  可以用  $z, \bar{z}$  表出. (2)表明共轭复数和四则运算交换. 这意味着使用共轭复数进行计算和证明, 往往比直接使用  $x, y$  表达的形式更简单.

### 例题：共轭复数证明等式

## 练习

$z$  关于虚轴的对称点是  $-\bar{z}$  .

## 例

证明  $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$ .

我们可以设  $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$ , 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

## 证明

由于  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1} \cdot z_2$ , 因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$



### 例题：共轭复数判断实数

例

设  $z = x + yi$  且  $y \neq 0, \pm 1$ . 证明:  $x^2 + y^2 = 1$  当且仅当  $\frac{z}{1+z^2}$  是实数.

## 证明

$$\frac{z}{1+z^2}$$
 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

即

$$z(1 + \bar{z}^2) = \bar{z}(1 + z^2), \quad (z - \bar{z})(z\bar{z} - 1) = 0.$$

由  $y \neq 0$  可知  $z \neq \bar{z}$ . 故上述等式等价于  $z\bar{z} = 1$ , 即  $x^2 + y^2 = 1$ .



### 例：复数的代数计算

由于  $z\bar{z}$  是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

## 例

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}, \text{ 求 } \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \text{ 以及 } z\bar{z}.$$

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

因此

$$\operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad z\bar{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

### 例：复数的代数计算

例

设  $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$ , 求  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ .

解

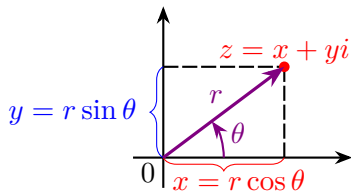
$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

因此  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$ .

## 第二节 复数的三角与指数形式

- 复数的模和辐角
- 复数的三角形式和指数形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \text{ 或 } \arctan \frac{y}{x} \pm \pi$$

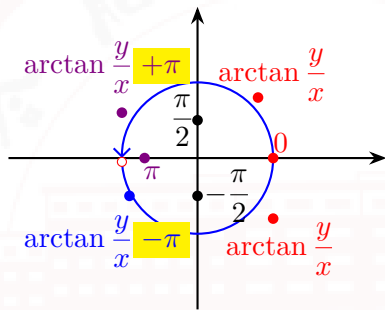
### 定义

- 称  $r$  为  $z$  的模, 记为  $|z| = r$ .
- 称  $\theta$  为  $z$  的辐角, 记为  $\text{Arg } z = \theta$ . 0 的辐角没有意义.



任意  $z \neq 0$  的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于  $(-\pi, \pi]$  的那个, 并称之为**主辐角**或**辐角主值**, 记作  $\arg z$ .

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

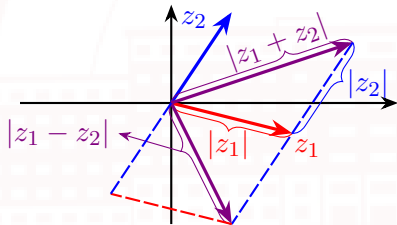
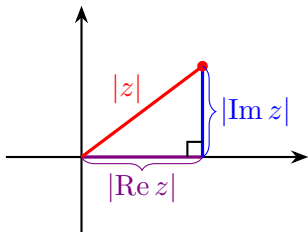


那么  $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

注意  $\arg \bar{z} = -\arg z$  **未必成立**, 例如  $z$  是负实数.

复数的模满足如下性质:

- $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$ ;
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ ;
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ;
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ .



## 例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1)  $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;

(2)  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$ .

证明

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ . 因此  $|z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

(2) 因为

$$\text{左边} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2,$$

$$\text{右边} = |z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2,$$

而  $\overline{z_1 \overline{z_2}} = \overline{z_1} z_2$ , 所以两侧相等.



由  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  可得复数的三角形式

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

定义  $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos \theta + i \sin \theta$  (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = r e^{i\theta} = r \exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

求复数的三角/指数形式的关键在于计算模和辐角.

### 典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将  $z = -\sqrt{12} - 2i$  化成三角形和指数形式.

解

$r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$ . 由于  $z$  在第三象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z = 4 \left[ \cos \left( -\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{6} \right) \right] = 4e^{-\frac{5\pi i}{6}}.$$

### 典型例题：求复数的三角/指数形式

## 例

将  $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$  化成三角形式和指数形式.

解

$$|z| = 1, \quad \arg z = \arctan \frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \arctan \cot \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}.$$

因此  $z = \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}$ .

### 另解

$$z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

### 典型例题：求复数的三角/指数形式

求复数的三角或指数形式时, 我们只需要任取一个辐角就可以了, 不要求必须是主辐角.

## 练习

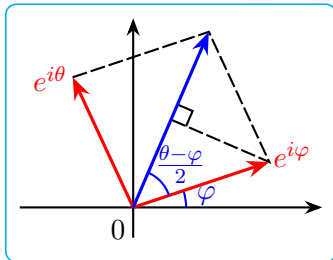
将  $z = \sqrt{3} - 3i$  化成三角形式和指数形式.

## 答案

$$z = 2\sqrt{3} \left( \cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) = 2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{3}}, \text{ 写成 } \frac{5\pi}{3} \text{ 也可以.}$$

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2 \cos \frac{\theta - \varphi}{2} e^{\frac{\theta + \varphi}{2} i}.$$



## 例

如果  $|z| = 1, \arg z = \theta$ , 则  $z + 1 = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i \frac{\theta}{2}}$ .



### 第三节 复数的乘除、乘幂与方根

- 复数的乘除与三角/指数表示
- 复数的乘幂
- 复数的方根

三角/指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

## 定理

设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2, \quad \text{Arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

关于多值函数的等式的含义是指：两边所能取到的值构成的集合相等。例如此处关于辐角的等式的含义是：

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \text{Arg } z_1, \theta_2 \in \text{Arg } z_2\}.$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \{\theta_1 - \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

注意上述等式中  $\text{Arg}$  不能换成  $\arg$ , 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

**不一定成立.** 这是因为  $\arg z_1 \pm \arg z_2$  有可能不落在区间  $(-\pi, \pi]$  上. 例如  $z_1 = z_2 = e^{0.99\pi i}$ ,  $z_1 z_2 = e^{1.98\pi i}$ ,

$$\arg z_1 + \arg z_2 = 0.99\pi + 0.99\pi = 1.98\pi,$$

$$\arg(z_1 z_2) = -0.02\pi.$$

## 证明

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

因此乘法情形得证.

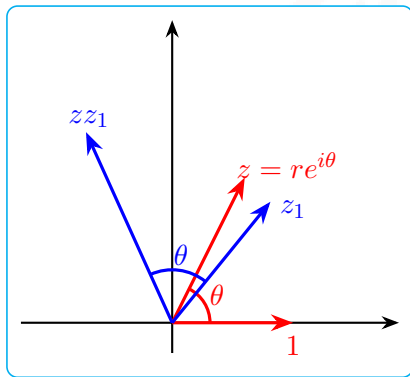
设  $\frac{z_1}{z_2} = re^{i\theta}$ , 则由乘法情形可知

$$rr_2 = r_1, \quad \theta + \text{Arg } z_2 = \text{Arg } z_1.$$

因此  $r = \frac{r_1}{r_2}, \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi$ , 其中  $k \in \mathbb{Z}$ .



从该定理可以看出, 乘以复数  $z = re^{i\theta}$  可以理解为模放大为  $r$  倍, 并沿逆时针旋转角度  $\theta$ .



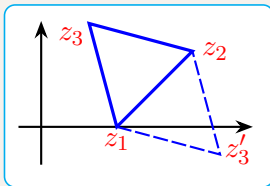
### 例：复数解决平面几何问题

## 例

已知正三角形的两个顶点为  $z_1 = 1$  和  $z_2 = 2 + i$ , 求它的另一个顶点.

解

由于  $\overrightarrow{Z_1 Z_3}$  为  $\overrightarrow{Z_1 Z_2}$  顺时针或逆时针旋转  $\frac{\pi}{3}$ ,



## 续解

因此

$$\begin{aligned} z_3 - z_1 &= (z_2 - z_1) \exp\left(\pm \frac{\pi i}{3}\right) = (1 + i) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i, \\ z_3 &= \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$



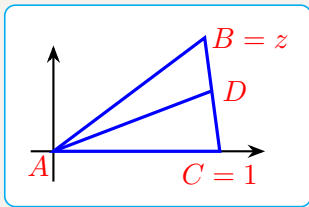
### 例：复数解决平面几何问题

## 例

设  $AD$  是  $\triangle ABC$  的角平分线, 证明  $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ .

## 证明

不妨设  $A = 0, B = z, C = 1$ . 则  $D = (1 - \lambda)z + \lambda$ , 其中  $\lambda = \frac{DB}{BC} \in (0, 1)$ .



## 续证

由于  $\angle BAD = \angle DAC$ , 因此  $\frac{z}{(1-\lambda)z+\lambda}$  是  $\frac{(1-\lambda)z+\lambda}{1}$  的正实数倍. 即

$$\frac{((1-\lambda)z + \lambda)^2}{z} = (1-\lambda)^2 z + \frac{\lambda^2}{z} + 2\lambda(1-\lambda) \in \mathbb{R}.$$

从而

$$(1-\lambda)^2 z + \frac{\lambda^2}{z} = (1-\lambda)^2 \bar{z} + \frac{\lambda^2}{\bar{z}}, \quad ((1-\lambda)^2 |z|^2 - \lambda^2)(z - \bar{z}) = 0.$$

显然  $z \neq \bar{z}$ . 又因为  $0 < \lambda < 1$ , 故

$$\frac{AB}{AC} = |z| = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{DB}{BC-DB} = \frac{DB}{DC}.$$

设  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \neq 0$ . 根据复数三角/指数形式的乘法和除法运算法则, 我们有

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地, 当  $r = 1$  时, 我们得到**棣莫弗公式**

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

$$\cos(5\theta) = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta.$$

多项式

$-2 + \dots$

重要作用.

$$g_n(T) = 2^{n-1}T^n - n2^{n-3}T^{n-2} + \dots$$

叫做切比雪夫多项式. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

### 典型例题：复数乘幂的计算

例

求  $(1 + i)^n + (1 - i)^n$ .

解

由于  $1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ ,  $1-i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ , 因此

$$\begin{aligned} & (1+i)^n + (1-i)^n \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}. \end{aligned}$$

## 练习

求  $(\sqrt{3} + i)^{2022} = -2^{2022}$ .

我们利用复数乘幂公式来计算复数  $z$  的  $n$  次方根  $\sqrt[n]{z}$ . 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

比较两边的模可知  $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$ .

为了避免记号冲突, 当  $r$  是正实数时,  $\sqrt[n]{r}$  默认表示  $r$  的唯一的  $n$  次正实根, 称之为**算术根**.

由于  $n\varphi$  和  $\theta$  的正弦和余弦均相等, 因此存在整数  $k$  使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

$$\begin{aligned} w = w_k &= \sqrt[n]{r} \exp \frac{(\theta + 2k\pi)i}{n} \\ &= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

这些根的模都相等, 且  $w_k$  和  $w_{k+1}$  辐角相差  $\frac{2\pi}{n}$ . 因此它们是以原点为中心,  $\sqrt[n]{r}$  为半径的圆的内接正  $n$  边形的顶点.

### 典型例题：复数方根的计算

## 例

求  $\sqrt[4]{1+i}$ .

解

由于  $1+i = \sqrt{2} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$ , 因此

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2} \exp \frac{(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)i}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

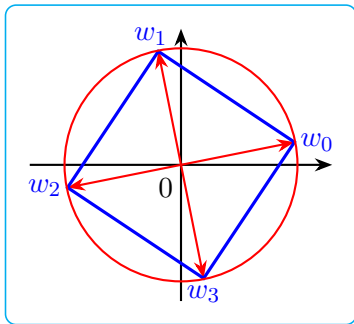
所以该方根所有值为

$$w_0 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi i}{16}}, \quad w_1 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{9\pi i}{16}}, \quad w_2 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{17\pi i}{16}}, \quad w_3 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{25\pi i}{16}}.$$



## 典型例题：复数方根的计算

显然  $w_{k+1} = iw_k$ , 所以  $w_0, w_1, w_2, w_3$  形成了一个正方形.



### 练习

求  $\sqrt[6]{-1} = \underline{\pm \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \pm i, \pm \frac{\sqrt{3} - i}{2}}$ .

注意当  $|n| \geq 2$  时,  $\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg } z$  不成立. 这是因为

$$\text{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \text{Arg } z = n \arg z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\text{Arg } \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Arg } z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

其中左边表示  $z$  的所有  $n$  次方根的所有辐角.

现在来看三次方程  $x^3 + px + q = 0$  的根,  $p \neq 0$ .

$$x = u + v, \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, \quad uv = -\frac{p}{3}.$$

(1) 如果  $\Delta > 0$ , 设实数  $\alpha$  满足  $\alpha^3 = -q/2 + \sqrt{\Delta}$ ,  $\omega = e^{2\pi i/3}$ . 那么

$$u = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \quad x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, \quad \alpha\omega - \frac{p}{3\alpha}\omega^2, \quad \alpha\omega^2 - \frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果  $\Delta < 0$ , 则  $p < 0$ ,  $|u|^2 = -p/3$ . 从而  $v = \bar{u}$ . 设  $\sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}} = u_1, u_2, u_3$ , 则我们得到 3 个实根

$$x = u_1 + \overline{u_1}, \quad u_2 + \overline{u_2}, \quad u_3 + \overline{u_3}.$$

## 第四节 曲线和区域

- 复数表平面曲线
- 区域的定义
- 区域的特性

## 典型例题：复数方程表平面图形

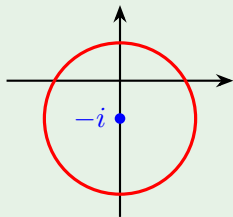
很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例

$$|z + i| = 2.$$

该方程表示与  $-i$  的距离为 2 的点全体, 即圆心为  $-i$  半径为 2 的圆.

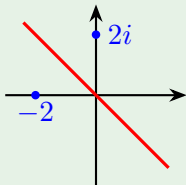
一般的圆方程为  $|z - z_0| = R$ , 其中  $z_0$  是圆心,  $R$  是半径.



例

$$|z - 2i| = |z + 2|.$$

该方程表示与  $2i$  和  $-2$  的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得  $x + y = 0$ .



例

$$\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 4.$$

设  $z = x + yi$ , 则  $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 1 - y = 4$ , 因此  $y = -3$ .

## 例

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$$

- 当  $2a > |z_1 - z_2|$  时, 该方程表示以  $z_1, z_2$  为焦点,  $a$  为长半轴的椭圆;
- 当  $2a = |z_1 - z_2|$  时, 该方程表示连接  $z_1, z_2$  的线段;
- 当  $2a < |z_1 - z_2|$  时, 该方程表示空集.

## 例

$$|z - z_1| - |z - z_2| = 2a.$$

- 当  $2a < |z_1 - z_2|$  时, 该方程表示以  $z_1, z_2$  为焦点,  $a$  为实半轴的双曲线的一支;
- 当  $2a = |z_1 - z_2|$  时, 该方程表示以  $z_2$  为起点, 与  $z_2, z_1$  连线反向的射线;
- 当  $2a > |z_1 - z_2|$  时, 该方程表示空集.

## 答案

双曲线  $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$  和双曲线  $xy = \frac{1}{4}$ .



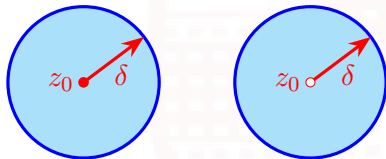
为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域. 类比于高等数学中的邻域和去心邻域, 我们在复变函数中, 称开圆盘

$$U(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

为  $z_0$  的一个  $\delta$ -邻域, 称去心开圆盘

$$\overset{\circ}{U}(z_0, \delta) = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

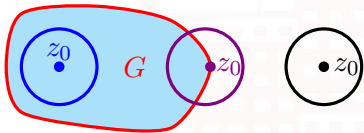
为  $z_0$  的一个去心  $\delta$ -邻域.



设  $G$  是复平面的一个子集,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . 它们的位置关系有三种可能:

- (1) 如果存在  $z_0$  的一个邻域  $U$  完全包含在  $G$  中, 则称  $z_0$  是  $G$  的一个内点.
- (2) 如果存在  $z_0$  的一个邻域  $U$  完全不包含在  $G$  中, 则称  $z_0$  是  $G$  的一个外点.
- (3) 如果  $z_0$  的任何一个邻域  $U$ , 都有属于和不属于  $G$  的点, 则称  $z_0$  是  $G$  的一个边界点.

显然内点都属于  $G$ , 外点都不属于  $G$ , 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.



如果  $G$  的所有点都是内点, 也就是说,  $G$  的边界点都不属于它, 称  $G$  是一个开集. 例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果  $G$  的所有边界点都属于  $G$ , 称  $G$  是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

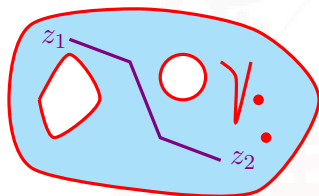
直观上看: 开集往往由  $>, <$  的不等式给出, 闭集往往由  $\geq, \leq$  的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的. 例如  $|z+1| + |z-1| \geq 1$  表示整个复平面.

如果  $D$  可以被包含在某个开圆盘  $U(0, R)$  中, 则称它是**有界的**. 否则称它是**无界的**.

## 定义

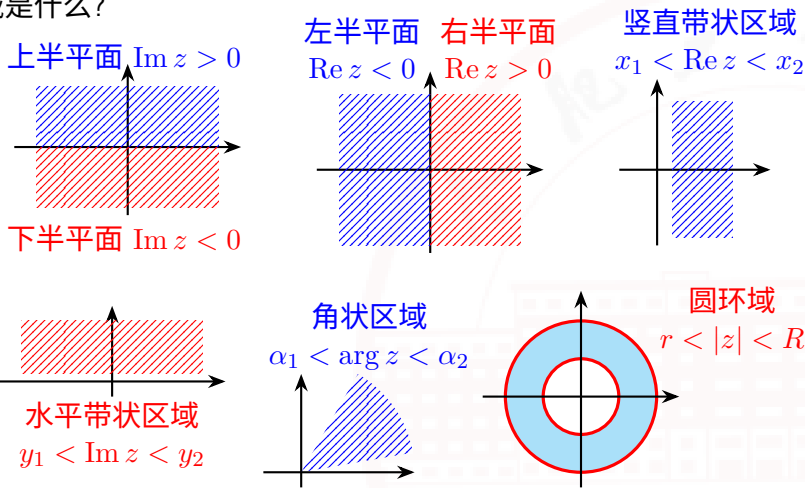
如果开集  $D$  的任意两个点之间都可以用一条完全包含在  $D$  中的折线连接起来, 则称  $D$  是一个 **区域**. 也就是说, 区域是连通的开集.

观察下侧的图案, 青色部分是一个区域 (不包含红色部分). 红色的线条和点是它的边界. 区域和它的边界一起构成了闭区域, 记作  $\bar{D}$ . 它是一个闭集.



数学中边界的概念与日常所说的边界是两码事. 例如区域  $|z| > 1$  的边界是  $|z| = 1$ , 其闭区域是  $|z| \geq 1$ .

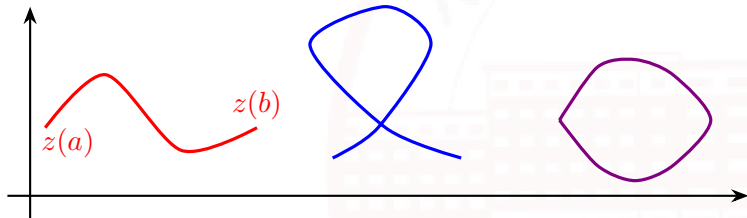
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定. 这些区域对应的闭区域是什么?



## 简单闭曲线 (闭路)

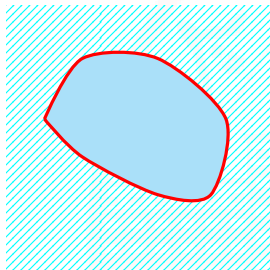
设  $x(t), y(t), t \in [a, b]$  是两个连续函数, 则参变量方程  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$  定义了一条连续曲线. 这也等价于  $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$ .

如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称  $C$  是简单曲线. 如果还满足两个端点重叠, 即  $z(a) = z(b)$ , 则称  $C$  是简单闭曲线, 也简称为闭路.



闭路  $C$  把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界. 分别称这两个区域是  $C$  的**内部**和**外部**.  $C$  是它们的公共边界.

这件事情的严格证明是十分困难的 (Veblen 1905).

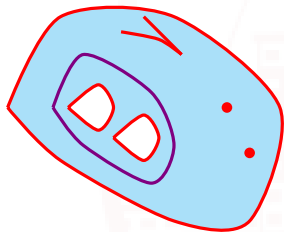


在前面所说的几个区域的例子中,我们在区域中画一条闭路.除了圆环域之外,闭路的内部仍然包含在这个区域内.

## 定义

如果区域  $D$  中的任一闭路的内部都包含在  $D$  中, 则称  $D$  是单连通域. 否则称之为多连通域.

单连通域内的任一闭路可以连续地变形为一个点. 这也等价于: 设  $\ell_1, \ell_2$  是从  $A$  到  $B$  的两条连续曲线, 则  $\ell_1$  可以连续地变形为  $\ell_2$  且保持端点不动.



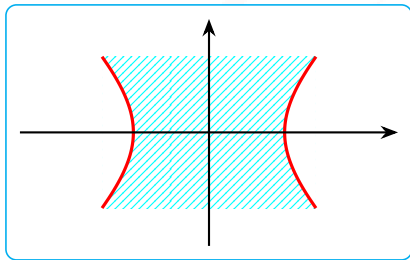


### 例：区域的特性

例

(1)  $\operatorname{Re}(z^2) < 1$ .

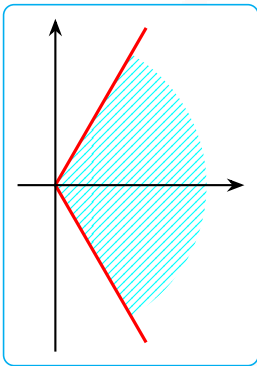
设  $z = x + yi$ , 则  $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$ . 这是无界的单连通域.



### 例：区域的特性

## 例 (续)

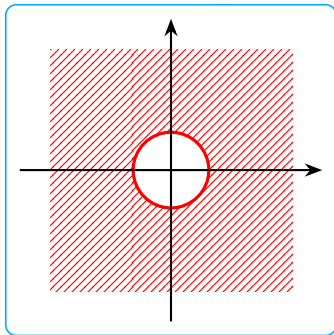
(2)  $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$  (不含原点). 即角状区域  $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ . 这是无界的单连通域.



### 例：区域的特性

## 例 (续)

(3)  $\left| \frac{1}{z} \right| \leq 3$ . 即  $|z| \geq \frac{1}{3}$ . 这是无界的多连通闭区域.

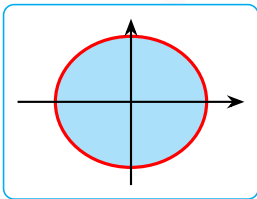


### 例：区域的特性

## 例 (续)

(4)  $|z + 1| + |z - 1| < 4$ .

表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.



## 思考

$|z+1| + |z-1| \geq 1$  表示什么集合? 整个复平面.

## 第五节 复变函数

- 复变函数的定义
- 映照

## 复变函数的定义

所谓的映射, 就是两个集合之间的一种对应  $f: A \rightarrow B$ , 使得对于每一个  $a \in A$ , 有一个唯一确定的  $b = f(a)$  与之对应.

- 当  $A$  和  $B$  都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当  $A$  和  $B$  都是复数集合的子集时, 它就是一个复变函数.

### 例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \frac{z+1}{z^2+1}$  都是复变函数.

### 定义

- 称  $A$  为函数  $f$  的定义域.
- 称  $\{w = f(z) : z \in A\}$  为它的值域.

上述函数的定义域和值域分别是什么?

在复变函数理论中, 我们常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个  $z \in G$  可能有多个  $w$  与之对应. 例如  $\operatorname{Arg} z$ ,  $\sqrt[n]{z}$  等. 为了方便研究, 我们常常需要对每一个  $z$ , 选取固定的一个  $f(z)$  的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$  是无穷多值函数  $\operatorname{Arg} z$  的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 如果  $f$  和  $f^{-1}$  都是单值的, 则称  $f$  是一一对应.

例

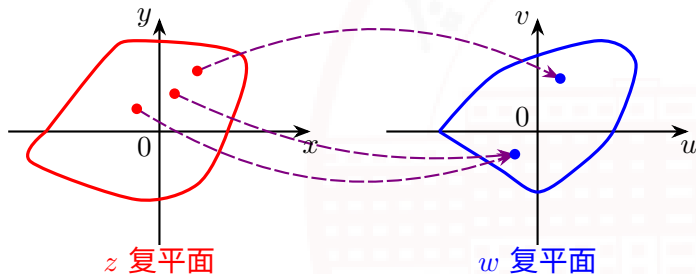
$f(z) = z^n$  的反函数就是  $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$ . 当  $n = \pm 1$  时,  $f$  是一一对应.

若无特别声明, 复变函数总是指单值的复变函数.

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 ( $z$  复平面和  $w$  复平面) 之间的映照来表示这种对应关系, 其中

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

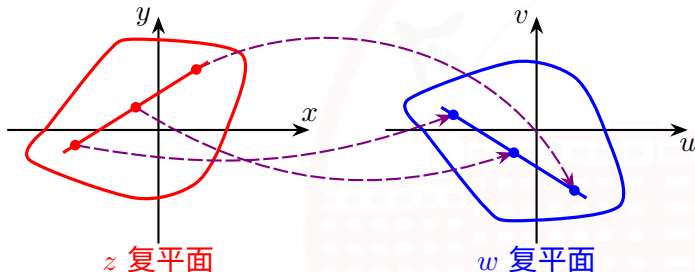
的实部和虚部是两个二元实变函数.





## 例

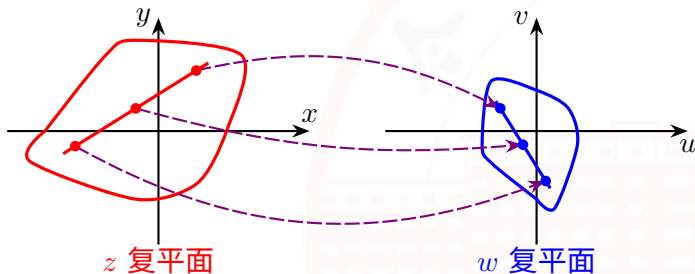
函数  $w = \bar{z}$ . 如果把  $z$  复平面和  $w$  复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于  $z$  轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域, 且  $u = x, v = -y$ .



## 例：映照

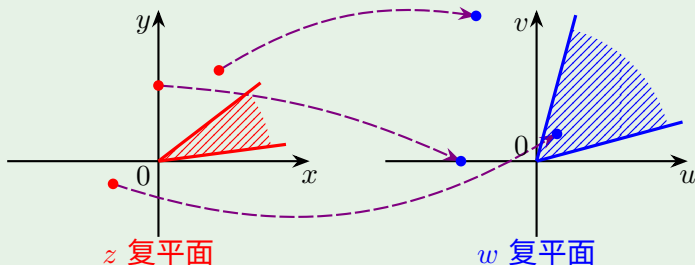
例

函数  $w = az$ . 设  $a = re^{i\theta}$ , 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转  $\theta$ ) 和一个相似映照 (放大为  $r$  倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.



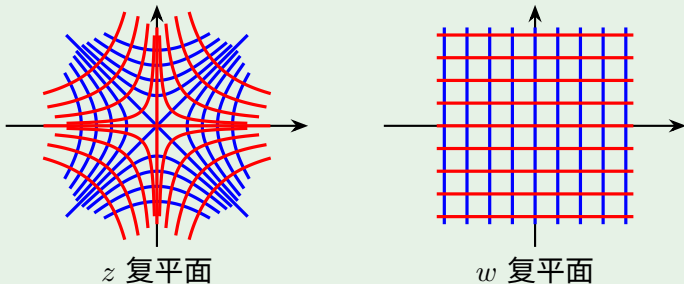
## 例

函数  $w = z^2$ . 这个映照把  $z$  的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



## 例 (续)

由于  $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ . 因此它把  $z$  复平面上两族分别以直线  $y = \pm x$  和坐标轴为渐近线的等轴双曲线  $x^2 - y^2 = c_1, 2xy = c_2$  分别映射为  $w$  复平面上的两族平行直线  $u = c_1, v = c_2$ .



## 例: 映照的像

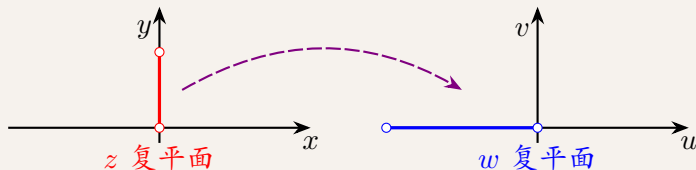
例

求下列集合在映照  $w = z^2$  下的像.

(1) 线段  $0 < |z| < 2, \arg z = \frac{\pi}{2}$ .

解

设  $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$ , 则  $w = z^2 = -r^2$ . 因此它的像还是一条线段  $0 < |w| < 4, \arg w = -\pi$ .



例

求下列集合在映照  $w = z^2$  下的像.

(2) 双曲线  $x^2 - y^2 = 4$ .

解

由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

因此  $u = x^2 - y^2 = 4, v = 2xy$ .

可以说明当  $u = 4$  时, 对任意  $v$ ,  $u + iv$  都是该双曲线上某一点的像. 所以这条双曲线的像是直线  $\operatorname{Re} w = 4$ .

### 例：映照的像

例

求下列集合在映照  $w = z^2$  下的像.

(3) 扇形区域  $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2$ .

解

设  $z = re^{i\theta}$ , 则  $w = r^2 e^{2i\theta}$ . 因此它的像是扇形区域  $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}, 0 < |w| < 4$ .

### 例：映照的像

## 例

求圆周  $|z| = 2$  在映照  $w = \frac{z+1}{z-1}$  下的像.

解

由于  $z = \frac{w+1}{w-1}$ ,  $\left| \frac{w+1}{w-1} \right| = 2$ , 因此

$$|w + 1| = 2|w - 1|, \quad w\bar{w} + w + \bar{w} + 1 = 4w\bar{w} - 4w - 4\bar{w} + 4,$$

$$w\bar{w} - \frac{5}{3}w - \frac{5}{3}\bar{w} + 1 = 0, \quad \left|w - \frac{5}{3}\right|^2 = \frac{16}{9},$$

即  $\left|w - \frac{5}{3}\right| = \frac{4}{3}$ , 是一个圆周.



## 第六节 极限和连续性

- 无穷远点
- 数列的极限
- 函数的极限
- 函数的连续性

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

## 定义

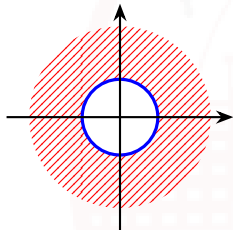
- 设  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  是一个复数列. 如果  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  使得当  $n \geq N$  时  $|z_n - z| < \varepsilon$ , 则称  $z$  是数列  $\{z_n\}$  的极限, 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ .
- 如果  $\forall X > 0, \exists N$  使得当  $n \geq N$  时  $|z_n| > X$ , 则称  $\infty$  是数列  $\{z_n\}$  的极限, 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ .

如果我们称

$$\overset{\circ}{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

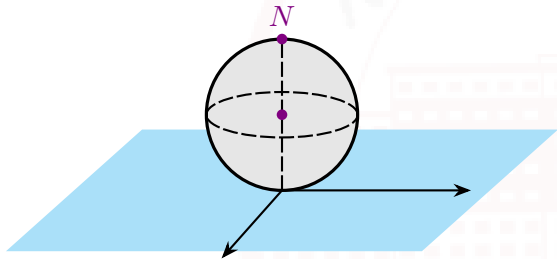
为  $\infty$  的 (去心) 邻域, 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  可统一表述为:

对  $z$  的任意邻域  $U$ ,  $\exists N$  使得当  $n \geq N$  时  $z_n \in U$ .



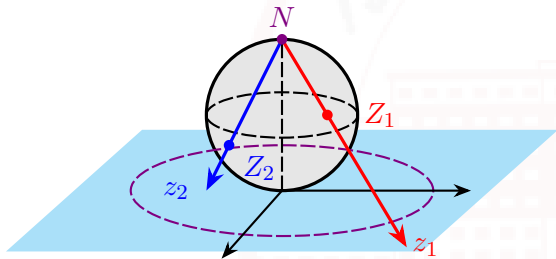
那么有没有一种看法使得  $\infty$  的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点  $\infty$ . 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

取一个与复平面相切于原点  $z = 0$  的球面. 过  $O$  做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于另一点  $N$ , 称之为北极.

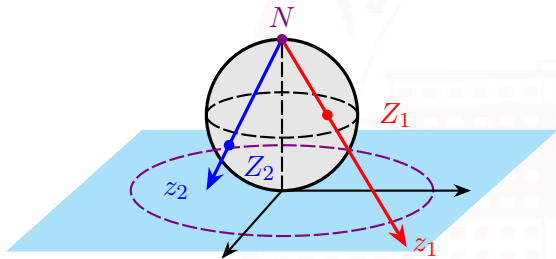


- 对于平面上的任意一点  $z$ , 连接北极  $N$  和  $z$  的直线一定与球面相交于除  $N$  以外的唯一一个点  $Z$ .
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点  $Z$ , 直线  $NZ$  一定与复平面相交于唯一一点.

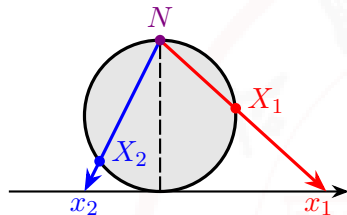
这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.



当  $|z|$  越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近  $N$ . 如果我们在复平面上添加一个额外的"点"——**无穷远点**, 记作  $\infty$ . 那么**扩充复数集合**  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  就正好和球面上的点一一对应. 称这样的球面为**复球面**, 称包含无穷远点的复平面为**扩充复平面**(**闭复平面**).



它和实数中  $\pm\infty$  有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数中的  $\pm\infty$  在复球面上就是  $\infty$ .



朴素地看, 复球面上任意一点可以定义邻域的概念. 特别地,  $\infty$  的开邻域通过前面所说的对应关系, 可以对应到扩充复平面上  $\infty$  的一个邻域. 所以在复球面上, 我们将普通复数和  $\infty$  的开邻域可以视为相同的概念.

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

## 定理

设  $z_n = x_n + y_n i, z = x + yi$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

## 证明

由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证.





### 例：数列的敛散性

## 例

设  $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{\pi i}{n}}$ . 数列  $\{z_n\}$  是否收敛?

解

由于

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \rightarrow 1, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow 0.$$

因此  $\{z_n\}$  收敛且  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ .

## 定义

设函数  $f(z)$  在点  $z_0$  的某个去心邻域内有定义.

如果存在复数  $A$  使得对  $A$  的任意邻域  $U(A, \varepsilon)$ ,  $\exists \delta > 0$  使得

$$z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(A, \varepsilon),$$

则称  $A$  为  $f(z)$  当  $z \rightarrow z_0$  时的极限, 记为  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$  或  $f(z) \rightarrow A (z \rightarrow z_0)$ .

此时我们称**极限存在**.

对于  $z_0 = \infty$  或  $A = \infty$  的情形, 也可以用上述定义统一描述.

不难看出, 变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的: 即  $z \rightarrow z_0$  沿任一曲线趋向于  $z_0$  的极限都是相同的.

## 定理

设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z_0 = x_0 + y_0i, A = u_0 + v_0i$ , 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

## 证明

由三角不等式

$$|u - u_0|, |v - v_0| \leq |f(z) - A| \leq |u - u_0| + |v - v_0|$$

易证.



由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

## 定理

设  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$ , 则

$$(1) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B;$$

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow z_0} (fg)(z) = AB;$$

(3) 当  $B \neq 0$  时,  $\lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{f}{g} \right) (z) = \frac{A}{B}$ .

在学习了复变函数的导数后, 我们也可以使用等价无穷小替换、洛必达法则等工具来计算极限.

## 例：判断函数极限是否存在

例

证明当  $z \rightarrow 0$  时, 函数  $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$  的极限不存在.

证明

令  $z = x + yi$ , 则  $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当  $z$  在实轴原点两侧分别趋向于 0 时,  $u(x, y) \rightarrow \pm 1$ . 因此  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y)$  不存在, 从而

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  不存在. □

## 定义

- 如果  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , 则称  $f(z)$  在  $z_0$  处连续.
- 如果  $f(z)$  在区域  $D$  内处处连续, 则称  $f(z)$  在  $D$  内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

## 定理

函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在  $z_0 = x_0 + iy_0$  处连续当且仅当  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续.

## 例

设  $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$ .  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  除原点外处处连续,  $v(x, y) = x^2 - y^2$  处处连续. 因此  $f(z)$  在  $z \neq 0$  处连续.

## 定理

- 在  $z_0$  处连续的两个函数  $f(z), g(z)$  之和、差、积、商 ( $g(z_0) \neq 0$ ) 在  $z_0$  处仍然连续.
- 如果函数  $g(z)$  在  $z_0$  处连续, 函数  $f(w)$  在  $g(z_0)$  处连续, 则  $f(g(z))$  在  $z_0$  处连续.

显然  $f(z) = z$  是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

也处处连续, 有理函数  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  在  $Q(z)$  的零点以外处处连续.

### 例：函数连续性的判定

## 例

证明: 如果  $f(z)$  在  $z_0$  连续, 则  $\overline{f(z)}$  在  $z_0$  也连续.

## 证明

设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ . 那么  $u(x, y), v(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  连续. 从而  $-v(x, y)$  也在  $(x_0, y_0)$  连续. 所以  $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  连续.

另一种看法是, 函数  $g(z) = \bar{z} = x - iy$  处处连续, 从而  $g(f(z)) = \overline{f(z)}$  在  $z_0$  处连续. □



可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于  $\mathbb{C}$  是一个域, 上面可以做除法.

这就导致了复变函数有**导数**, 而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.