● 目录 ★

目录			i					
第六章	保形映	·射	1					
6.1	保形映射的概念							
	6.1.1	导数的几何意义	1					
	6.1.2	保形映射的定义	2					
	6.1.3	与 ∞ 有关的保形映射	3					
6.2	分式线	性映射	4					
	6.2.1	分式线性映射的性质	5					
	6.2.2	分式线性映射举例	9					
	6.2.3	分式线性映射的其它表现 (选读)	13					
6.3	初等函	i数对应的映射	15					
	6.3.1	指数函数	17					
	6.3.2	儒可夫斯基函数	20					
6.4	保形映	·射在标量场的应用	23					
本章	小结 .		25					
本章	作业 .		25					
参考文庫),		29					

第六章 保形映射

保形映射是指通过构造一个函数把边界不规则、不易研究的区域映射到边界规则、易研究的区域. 我们将从解析函数在导数非零处的几何意义出发, 得到共性映射的定义. 然后讨论分式线性映射、幂函数、指数函数和儒可夫斯基函数所对应的映射特点, 并利用它们得到一些情形下区域的保形映射. 最后介绍保形映射在带边界标量场的应用.

6.1 保形映射的概念

6.1.1 导数的几何意义

在例 ?? 中我们提到, 对于解析函数 f(z), 当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 大致来说, 这是 因为 $\mathrm{d} f = f'(z_0)\,\mathrm{d} z$, 从复数乘法的几何意义可知, 局部上 w = f(z) 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $|f'(z_0)|$ 倍并逆时针旋转 $\mathrm{arg}\, f'(z_0)$. 我们来严格表述这一性质.

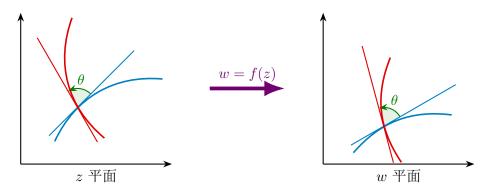


图 6.1 解析函数的保角性

设

$$C: z = z(t) = x(t) + iy(t), \ a \leqslant t \leqslant b$$

是区域 D 内过 z_0 的一条有向曲线, $z(t_0) = z_0$. 若 $z'(t_0) \neq 0$, 则 C 在 z_0 处的切向量为 $z'(t_0)$ 对应的向量, 即 $(x'(t_0), y'(t_0))$, 切线方程为

$$\ell: z = z(t_0) + z'(t_0)s, \ s \in \mathbb{R}.$$

设 w = f(z) 是区域 D 上的解析函数, 且 $f'(z_0) \neq 0, z_0 \in D$. 通过映射 w = f(z) 作用之后, C 的像 C' 的参数方程为

$$C': w = w(t) = f(z(t)), \ a \leqslant t \leqslant b,$$

它在 $w_0 = f(z_0)$ 处的切向量为 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = f'(z_0)z'(t_0)$, 切线方程为

$$\ell': z = w(t_0) + f'(z_0)z'(t_0)s, \ s \in \mathbb{R}.$$

由此可知, f(z) 将切线的角度逆时针旋转了 $\arg f'(z_0)$. 自然地, 若在 z 平面内有两条不同的经过 z_0 的曲线 C_1, C_2 , 它们的夹角与它们在 w 平面内的像 C_1, C_2' 的夹角是相同. 这种性质被称为**保角性**. 不仅如此, 由 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$ 可知 w = f(z) 还将 z_0 附近的点做了伸缩, 伸缩率为 $|f'(z_0)|$.

定理 6.1

设 w = f(z) 在 z_0 处解析且 $f'(z_0) \neq 0$, 那么 w = f(z) 在 z_0 处满足如下性质:

- (1) 保角性: 经过 z_0 的两条曲线的夹角和它们在 w = f(z) 下的像的夹角相同;
- (2) 伸缩率不变性: 连接 z_0 与其附近点的曲线, 经过映射后被伸缩了 $|f'(z_0)|$ 倍, 这个倍率与具体曲线无关. ①

注意, 这里的保角性不仅保持夹角不变, 也保持了夹角的方向.

反过来, 若 w = f(z) 在 z_0 附近有上述特点, 设它将经过 z_0 的水平曲线逆时针旋转 θ 并放缩 r 倍, 则对于充分小的 $|\Delta z|$, 有 $\Delta w \approx r e^{i\theta} \Delta z$. 令 $\Delta z \to 0$, 则我们得到 f(z) 在 z_0 处可微且 $f'(z_0) = r e^{i\theta} \neq 0$.

6.1.2 保形映射的定义

定义 6.2

- (1) 若 w = f(z) 在 z_0 处具有保角性和伸缩率不变性, 则称 w = f(z) 是 z_0 处的保角映射.
- (2) 若 w = f(z) 在区域 D 处处都是保角映射, 则称 w = f(z) 是 D 内的保角映射.

由上一小节讨论立即得知:

定理 6.3

若 f(z) 在区域 D 内解析且导数处处非零, 则它是区域 D 内的保角映射.

① "附近"并不是严格的数学概念, 这里实际上就是指 $|\Delta w| = |f'(z_0)| \cdot |\Delta z| + o(\Delta z)$.

很多时候, 我们需要把一个复杂区域上的问题通过保角映射化为简单区域上的问题, 例如单位圆域 $|z| \le 1$ 或上半平面 Im z > 0 等. 因此我们要求所使用的映射是一一对应.

定义 6.4

若 w = f(z) 是区域 D 内的一一保角映射, 则称 f(z) 是 D 内的保形映射. ①

显然保形映射的逆以及复合也是保形映射. 我们常常利用这一点, 使用多个简单的 保形映射将一个区域逐步简化.

若 w = f(z) 是区域 D 内的保形映射, 则它一定是 D 内的解析函数, 且导数处处非 零. 不过, 若我们不要求 w = f(z) 保持夹角的方向, 它可以不是解析函数. 例如 $w = \overline{z}$ 也保持夹角大小和伸缩率不变, 但是它改变了夹角的方向, 本书中考虑的保形映射都是 保持夹角方向的.

6.1.3 与 ∞ 有关的保形映射

我们来讨论与 ∞ 有关的保形映射. 为了方便, 本章中我们将 $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ 简记 为 $f(a) = \infty$, 将 $\lim_{z \to \infty} f(z) = A \in \mathbb{C}^*$ 简记为 $f(\infty) = A$, 且所有的复变函数都看作是 $D \subset \mathbb{C}^*$ 到 \mathbb{C}^* 的映射. 若曲线

$$C : z = z(t), \ a < t < b$$

满足 $\lim_{t\to a^+}z(t)=\infty$ 或 $\lim_{t\to b^-}z(t)=\infty$,则称 C 延伸至 ∞ . 此时我们把 ∞ 也看作是 C 上的一个点. 这里的 a,b 也可以为 $-\infty,+\infty$.

定义 6.5

- (1) 若 $f(z_0) = \infty$, 且 $\frac{1}{w} = \frac{1}{f(z)}$ 是 z_0 处的保角映射, 则称 w = f(z) 是 z_0 处的保角 映射.
- (2) 若 $f(\infty) = w_0$, 且 $w = f\left(\frac{1}{t}\right)$ 是 t = 0 处的保角映射, 则称 w = f(z) 是 ∞ 处的
- (3) 若 $f(\infty) = \infty$, 且 $\frac{1}{w} = \frac{1}{f(1/t)}$ 是 t = 0 处的保角映射, 则称 w = f(z) 是 ∞ 处的

对于复球面上的相交曲线, 也可以定义夹角和保形映射. 这些概念通过球极投影和 我们在通常复平面上定义的概念是一回事.

① 也叫保形变换或共形映射.

例 6.1 线性函数 $w = f(z) = az + b, a \neq 0$ 是整个复平面内的保形映射. 它实际上可以分解成旋转、相似和平移三个映射的复合. 由于 $f(\infty) = \infty$, 且

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{f(1/t)} = \frac{t}{a+bt}.$$

在 t=0 处解析, 因此 w=f(z) 是 ∞ 处的保角映射. 显然 w=f(z) 是一一的, 故 w=f(z) 是扩充复平面 \mathbb{C}^* 上的保形映射.

例 6.2 倒数映射 $w = f(z) = \frac{1}{z}$ 在任意非零点的导数 $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$ 非零,因此是这些点的保形映射。由于 $w(0) = \infty$,且 $\frac{1}{w} = z$ 在 z = 0 处是保角映射,因此 w = f(z) 是 0 处的保角映射。由于 $w(\infty) = 0$,且 $w = f\left(\frac{1}{t}\right) = t$ 在 t = 0 处是保角映射,因此 w = f(z) 是 ∞ 处的保角映射。显然 w = f(z) 是一一的,故 w = f(z) 是扩充复平面 \mathbb{C}^* 上的保形映射。

实际上,任意分式线性映射都是扩充复平面内的保形映射.

对于扩充复平面上的单连通区域, 我们有如下定理: ①

定理 6.6 (黎曼映射定理)

若 $D \neq \mathbb{C}^*$ 是扩充复平面中的非空单连通区域,且 D 不是扩充复平面去掉一个点,则存在 D 到单位圆域的保形映射 w = f(z). 对于任意常数 θ_0 和 D 中任意一点 z_0 ,若要求 $f(z_0) = 0$, $\arg f'(z_0) = \theta_0$,则存在唯一一个这样的 f.

由保形映射是一一对应, 且它的逆也是保形映射可得:

推论 6.7

若 $D_1 \neq \mathbb{C}^*$, $D_2 \neq \mathbb{C}^*$ 是扩充复平面中的非空单连通区域, 且它们不是扩充复平面去掉一个点, 则存在 D_1 到 D_2 的保形映射 w = f(z). 对于任意常数 θ_0 和 D 中任意一点 z_0 , 若要求 $f(z_0) = 0$, $\arg f'(z_0) = \theta_0$, 则存在唯一一个这样的 f.

不过, 黎曼映射定理只表明存在这样的映射, 具体映射的构造往往需要使用各种函数组合得到.

6.2 分式线性映射

形如

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0$$

① 扩充复平面内区域的定义和复平面内区域的定义类似, 只不过需要额外考虑 ∞ 的情形. 如果区域 D 内任意一条闭路的内部或外部 (包含 ∞) 都完全属于该区域, 则称该区域为**单连通区域**. 例如圆周外部 (包含 ∞) 是扩充复平面中的单连通区域. 从复球面的角度来看更明显.

的映射叫作**分式线性映射**^①, 它是保形映射中比较简单也比较容易研究的一种映射, 不难 看出, 若 ad - bc = 0, 则 w 是一常数, 这不是保形映射也不是我们感兴趣的.

分式线性映射的逆和复合仍然是分式线性映射. 设

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad g(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'},$$

则

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - c}{-bz + a}, \quad (f \circ g)(z) = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')}.$$

6.2.1 分式线性映射的性质

1. 保形性

我们将分式线性映射改写为如下形式:

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = -\frac{ad-bc}{c^2} \cdot \frac{1}{z+d/c} + \frac{a}{c}.$$

于是它可由三类比较简单的分式线性映射复合得到:

- (1) 平移映射 w = z + b:
- (2) 相似映射 w = az;
- (3) 倒数映射 $w = \frac{1}{2}$.

由例 6.1 和例 6.2, 我们立即得到:

定理 6.8

分式线性映射是扩充复平面内的保形映射.

2. 保圆性

由于保形映射具有保角性和伸缩率不变性,因此它在局部保持图形的形状不变.不 过这种不变只是在一定的程度下的近似. 而对于分式线性映射, 它总把直线和圆映成直 线或圆. 我们也可以将直线视为扩充复平面上经过 ∞ 的半径无限大的圆.

定理 6.9

分式线性映射把圆周或直线映成圆周或直线.

① 也叫莫比乌斯映射.

证明: 显然平移映射和相似映射把圆周映成圆周, 直线映成直线. 对于倒数映射 $w=\frac{1}{z}$, 注意到圆周和直线的方程都可以表示为

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0,$$

其中 $B^2 + C^2 - 4AD > 0$. 由

$$z = \frac{1}{w} = \frac{u}{u^2 + v^2} - i\frac{v}{u^2 + v^2}$$

得到

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0.$$

因此倒数映射把圆周或直线映成圆周或直线, 命题得证.

不难看出,分式线性映射 w=f(z) 将圆周或直线 C 映成直线,当且仅当 C 上的一点的像为 ∞ ,即 $-\frac{d}{c}\in C$. 它也总将直线映成经过点 $\frac{a}{c}$ 的圆周或直线.

3. 保对称点

如果 z_1, z_2 的垂直平分线是直线 ℓ , 或者它们重合且都在直线 ℓ 上, 则称 z_1, z_2 关于直线 ℓ **对称**. 对于圆周我们也可以定义对称点. 设 $C: |z-z_0| = R$ 是一圆周, 若 z_1, z_2 在从 z_0 出发的同一条射线上, 且 $|z_1-z_0|\cdot |z_2-z_0| = R^2$, 则称 z_1, z_2 关于圆周 C **对称**. 圆周上的点总和其自身对称, 除此之外, 关于圆周对称的点一定是一个在圆周内, 一个在圆周外. 我们还规定 z_0 和 ∞ 关于 C 对称.

引理 6.10

点 z_1, z_2 关于圆周 $C: |z-z_0| = R$ 对称, 当且仅当经过 z_1, z_2 的任一圆周和 C 正交,即在交点处切线垂直.

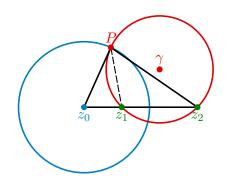


图 6.2 过对称点圆周与原圆周正交

证明: 若 z_1, z_2 关于圆周 C 对称, 则经过 z_1, z_2 的圆周 Γ 一定交 C 于另一点 P. 而 $|P-z_0|^2 = |z_1-z_0| \cdot |z_2-z_0|$, 因此 $\triangle Pz_0z_1$ 相似于 $\triangle z_2z_0P$, 从而 $\angle z_0Pz_1 = \angle z_0z_2P$, 这意味着 z_0P 是 Γ 的切线. 从而 Γ 和 C 正交.

反过来, 假设经过 z_1, z_2 的所有圆周 Γ 都与 C 正交. 不妨设 $z_1 = -1, z_2 = 1$, 则 Γ 的圆心为 $\gamma = \lambda i, \lambda \in \mathbb{R}$, 半径为 $r = \sqrt{1 + \lambda^2}$. 由 $\angle z_0 P \gamma = \frac{\pi}{2}$ 可知

$$|z_0 - \lambda i|^2 = R^2 + r^2 = R^2 + 1 + \lambda^2, \quad |z_0|^2 + \lambda(z_0 - \overline{z_0})i = R^2 + 1.$$

因此 $z_0 = \overline{z_0}, z_0 = \pm \sqrt{R^2 + 1}$ 为实数. 于是

$$|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = |z_0^2 - 1| = R^2$$

且 z_1, z_2 在 z_0 同侧, 即 z_1, z_2 关于 C 对称.

把上述命题的圆周换成圆周或直线也成立.

定理 6.11

分式线性映射具有保对称点性, 即若 z_1, z_2 关于圆周或直线 C 对称, 则 $f(z_1), f(z_2)$ 关 于 C 在 w = f(z) 下的像对称.

证明: 过 $w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2)$ 作圆周或直线 Γ' . 由保圆性可知 Γ' 的原像也是圆 周或直线 Γ . 由引理 6.10 可知 C 和 Γ 正交, 再由保角性可知 C 的像 C' 和 Γ' 正交. 最 后由引理 6.10 可知 $f(z_1), f(z_2)$ 关于 C' 对称.

4. 约束条件

尽管分式线性映射的表达式中有四个参数, 但把它们都换成非零常数倍之后对应的 是同一个分式线性映射, 所以应当只需要三个约束条件就可以确定分式线性映射. 下述 定理说明的确如此.

定理 6.12

设 z_1, z_2, z_3 是 z 平面三个不同的点, w_1, w_2, w_3 是 w 平面三个不同的点. 那么存在唯 一一个分式线性映射 w = f(z), 使得 $f(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3$, 它满足

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}.$$

证明: 显然该等式确定了一个满足题设的分式线性映射, 下证唯一性. 设 $w=\frac{az+b}{az+a}$ 是满足题设的一个分式线性映射,则

$$w - w_k = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_k+b}{cz_k+d} = (ad-bc)\frac{z-z_k}{(cz+d)(cz_k+d)}.$$

于是对于 k = 1, 2, 有

$$w_3 - w_k = (ad - bc) \frac{z_3 - z_k}{(cz_3 + d)(cz_k + d)}.$$

从而

$$\frac{w - w_k}{w_3 - w_k} = \frac{z - z_k}{z_3 - z_k} \cdot \frac{(cz_3 + d)(cz_k + d)}{(cz + d)(cz_k + d)}.$$

分别代入 k=1,2 并将两式相除即可得到定理中的等式.

实际上, 等式右侧的分式线性映射分别将 z_1, z_2, z_3 映成 $0, \infty, 1$, 再代入后左侧的 w 把 $0, \infty, 1$ 映成 w_1, w_2, w_3 .

推论 6.13

若分式线性映射 w = f(z) 将 z_1, z_2 映成 w_1, w_2 , 则存在常数 k 使得

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

特别地, 若
$$w(a)=0, w(b)=\infty,$$
 则 $w=k\frac{z-a}{z-b}.$

在 z 平面和 w 平面分别给定圆周 C,C'. 那么我们可以利用定理 6.12 构造出分式线性映射 w=f(z) 将 C 映成 C', 只需要分别在 C,C' 上任取三个不同的点即可. 由于 w=f(z) 是扩充复平面内的连续一一对应, 因此 C 内部的连续曲线在该映射下的像还是一条连续曲线, 且与 C' 没有交点. 这意味着该映射把 C 的内部映射为 C' 的内部或外部.

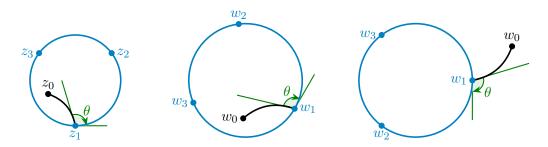


图 6.3 分式线性映射将圆周内部映成圆周内部或外部

若希望该映射把 C 的内部是映射为 C' 的内部, 我们只需要在 C 上逆时针依次选择 z_1, z_2, z_3 , 在 C' 上也逆时针依次选择 w_1, w_2, w_3 即可. 这是因为对于 C 内部任意一点 z_0 , 连接 z_0, z_1 的曲线 Γ 到逆时针圆弧 $\widehat{z_1z_2}$ 一定是顺时针旋转角度 $\theta < \pi$. 由于分式线性映射具有保角性且保持夹角的方向, 因此 Γ 的像到逆时针圆弧 $\widehat{w_1w_2}$ 也是顺时针旋转角度 θ , 从而 $f(z_0)$ 只能在 C' 内部. 若希望分式线性映射将 C 的内部映射为 C' 的外部, 只需顺时针依次选择 w_1, w_2, w_3 . 若 C 或 C' 是直线, 只需将圆周内部替换为三个点顺序所指方向的左侧即可.

6.2.2 分式线性映射举例

例 6.3 分式线性映射 $w=f(z)=\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ 将中心分别在 $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ 半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 的圆弧 围成的区域 D 映成什么区域 D'?

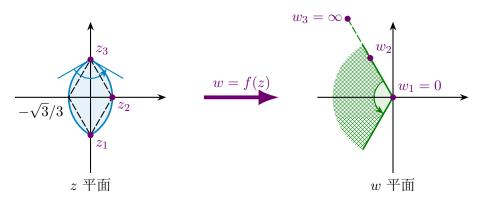


图 6.4 两圆弧围成的区域到角形区域的映射

解: 由于

$$f(i) = \infty$$
, $f(-i) = 0$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$,

因此它将两段圆弧映成两条经过 $0, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i, \infty$ 的射线, 即 $\arg w = \pm \frac{2\pi}{3}$. 由于 $-i, \frac{\sqrt{3}}{3}, i$ 在圆弧上逆时针排列, D' 在它们的像 $0, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \mathrm{i}, \infty$ 所指方向的左侧, 因此 D' 为射线 $\arg w = \pm \frac{2\pi}{3}$ 所夹成的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的角形区域.

若要求将特定区域映成另一区域的分式线性映射, 我们可分别在它们的边界上选择 三个点得到相应映射. 需要注意选择的点的次序.

例 6.4 求将右半平面 $\operatorname{Re} z > 0$ 映成单位圆域 |w| < 1 的分式线性映射.

解: 我们在 $\operatorname{Re} z = 0$ 上自上往下选择 $z_1 = i, z_2 = 0, z_3 = -i,$ 并在单位圆周 |z| = 1上逆时针选择 $w_1 = -i, w_2 = 1, w_3 = i$. 由定理 6.12 可得

$$\frac{w+\mathrm{i}}{w-1}\cdot\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+\mathrm{i}} = \frac{z-\mathrm{i}}{z-0}\cdot\frac{-\mathrm{i}-0}{-\mathrm{i}-\mathrm{i}}.$$

解得 $w = \frac{1-z}{1+z}$.

如果我们换一组点, 可能会得到不同的分式线性映射. 若 f_1, f_2 是两个这样的分式线 性映射,则 $f_2 \circ f_1^{-1}$ 是圆域到自身的分式线性映射.

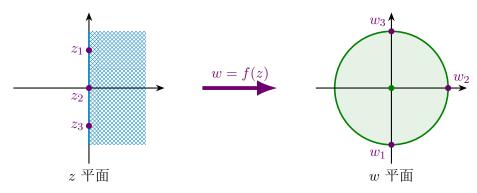


图 6.5 右半平面到圆域的映射

例 6.5 求单位圆域到自身的分式线性映射.

解: 设 $w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$. 注意到 $\alpha,\frac{1}{\overline{\alpha}}$ 以及 $0,\infty$ 关于单位圆周是两组对称点. 由于分式线性映射保对称点,因此若 $f^{-1}(0)=\alpha,$ 则 $f^{-1}(\infty)=\frac{1}{\overline{\alpha}}$. 这意味着

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - 1/\overline{\alpha}} = k' \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}.$$

由于 $f(1) = k' \frac{1-\alpha}{1-\overline{\alpha}}$ 的模为 1, 因此 |k'| = 1. 设 $k' = e^{i\theta}$, 则

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}, \quad |\alpha| < 1.$$

事实上,单位圆域到自身的保形映射一定是分式线性映射,见定理 6.6. 由此也不难 知道例 6.4 中所有可能的分式线性映射是

$$w = e^{i\theta} \frac{\beta - z}{\overline{\beta} + z}, \quad \text{Re } \beta > 0.$$

例 6.6 求将 $\text{Im}\,z>0$ 映成 |w-2|<2 的分式线性映射 w=f(z), 使得 f(0)=0, $f(\mathrm{i})=2.$

解法一: 通过 s = -iz 可以将上半平面映射为右半平面, 再根据例 6.4, 映射

$$t = e^{i\theta} \frac{\beta - s}{\overline{\beta} + s}, \quad \operatorname{Re} \beta > 0$$

将右半平面映射为单位圆域. 最后映射 w=2+2t 将单位圆域映成 |w-2|<2. 将三者复合得到

$$w = 2 + 2e^{i\theta} \frac{\beta + iz}{\overline{\beta} - iz}.$$

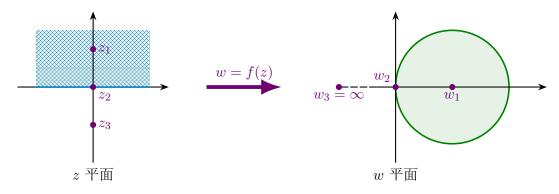


图 6.6 上半平面到圆域的映射

由
$$f(0) = 0$$
 可知 $e^{i\theta} = -\frac{\overline{\beta}}{\beta}$,于是
$$w = 2 - 2\frac{1 + \alpha iz}{1 - \overline{\alpha} iz} = \frac{2(\alpha + \overline{\alpha})iz}{\overline{\alpha}iz - 1}, \quad \alpha = \frac{1}{\beta}.$$

再由 f(i) = 2 可得 $\alpha = 1$. 故 $w = \frac{4z}{z+i}$.

解法二: 由于 i, -i 关于直线 ${\rm Im}\,z=0$ 对称, 因此 $w=f(-{\rm i})$ 为 2 关于 |w-2|=2 的对称点, 即 ∞ . 从而 $w=k\frac{z}{z+{\rm i}}$. 再由 $f({\rm i})=2$ 可得 $k=4, w=\frac{4z}{z+{\rm i}}$.

对于两个圆周或直线围成的区域,我们需要将交点映射为交点,然后再选择第三个点.

例 6.7 求将 $-\frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{\pi}{4}$ 映成单位右半圆盘 $|w|<1, \mathrm{Re}\,w>0$ 的分式线性映射.

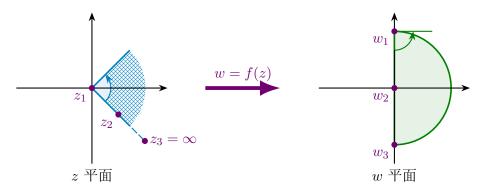


图 6.7 角形区域映成半圆盘

解: 该映射将圆周或直线的交点映成交点, 不妨设 $w(0) = i, w(\infty) = -i$. 于是可设

$$w = -\mathrm{i}\frac{z-k}{z+k}.$$

为了保证 w=f(z) 将 $\arg z=-\frac{\pi}{4}$ 所在直线的右上侧映成 $\mathrm{Re}\,w=0$ 的右侧,我们选择 $w(1-\mathrm{i})=0$. 于是

$$0 = w(1 - i) = -i\frac{1 - i - k}{1 - i + k}, \quad k = 1 - i,$$

故
$$w = -\mathrm{i}\frac{z-1+\mathrm{i}}{z+1-\mathrm{i}}.$$

例 6.8 求将偏心圆环域 $D: |z| > 1, |z-1| < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 映成圆环域 D': 1 < |w| < 2 的分式线性映射 w = f(z).

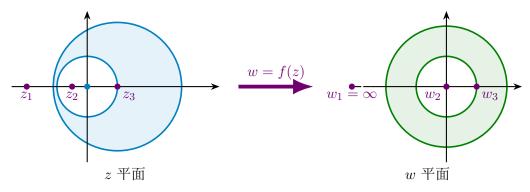


图 6.8 偏心圆环域到圆环域的映射

解: 我们首先求偏心圆环域 D 边界两个圆周的公共对称点 z_1, z_2 . 由于它们要和两圆圆心都共线,因此它们位于两圆圆心连线上,也就是说 z_1, z_2 是实数. 不仅如此,它们一定在两圆圆心的同一侧,从而

$$(z_1 - 0) \cdot (z_2 - 0) = 1, \quad (z_1 - 1) \cdot (z_2 - 1) = \frac{9}{2}.$$

整理得到 $z_1+z_2=-\frac{5}{2}$. 于是 z_1,z_2 是一元二次方程 $x^2+\frac{5}{2}x+1=0$ 的两个解,即 $-\frac{1}{2},-2$. 注意到圆环域 D' 边界两个同心圆的公共对称点只能是圆心 0 和无穷远点 ∞ . 因此 $-\frac{1}{2},-2$ 的像就是 $0,\infty$.

 \ddot{z} $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0,\ f(-2)=\infty,\ \mathbb{M}$ $w=k\frac{2z+1}{z+2}$. 由于 $-\frac{1}{2}$ 在 D 内圆内部,它的像 0 在 D' 内圆内部,因此 w=f(z) 将内圆内部映到内圆内部,从而将内圆映到内圆.设 $f(1)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则

$$w = e^{i\theta} \frac{2z+1}{z+2}.$$

同理, 若 $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $f(-2) = \infty$, 则

$$w = e^{i\theta} \frac{2z+4}{2z+1}.$$

分式线性映射的其它表现 (选读)

分式线性映射的复合和逆变换的形式和矩阵的乘法和逆的形式很相像. 事实上这并 非偶然. 每个分式线性映射 $w=f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ 可以与一个矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 相对应. 显然 A 和它的常数倍对应同一个分式线性映射. 对于 $z \in \mathbb{C}^*$, 定义复直约

$$V_z = \begin{cases} \{(zt, t)^{\mathrm{T}} \mid t \in \mathbb{C}\}, & z \in \mathbb{C}; \\ \{(t, 0)^{\mathrm{T}} \mid t \in \mathbb{C}\}, & z = \infty, \end{cases}$$

它是 \mathbb{C}^2 中的一维子线性空间. 由于

$$\boldsymbol{A}(zt,t)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} zt \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (az+b)t \\ (cz+d)t \end{pmatrix} \in V_{f(z)},$$
$$\boldsymbol{A}(t,0)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at \\ ct \end{pmatrix} \in V_{f(\infty)},$$

因此 \boldsymbol{A} 将 V_z 映成 $V_{f(z)}$. 若分式线性映射 f,g 分别对应矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 则 $f\circ g$ 就是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 所对应的分式线性映射, f^{-1} 就是 A^{-1} 所对应的分式线性映射.

例 6.9 设
$$f(z) = \frac{\mathrm{i}z + 1}{\mathrm{i}z - 1}$$
. 证明 $f \circ f \circ f$ 是恒等映射.

证明:
$$f$$
 对应的矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 1 \\ \mathbf{i} & -1 \end{pmatrix}$. 由于

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 + i & -1 + i \\ -1 - i & 1 + i \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -2 - 2i & \\ & -2 - 2i \end{pmatrix},$$

因此 $f \circ f \circ f$ 是恒等映射.

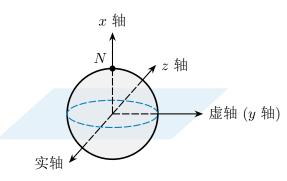


图 6.9 复球面所在空间的坐标系

由于分式线性映射是扩充复平面到扩充复平面的变换, 因此它也诱导了复球面上的 变换. 如果 A 满足 $A\overline{A}^{T} = E$. 我们称之为**酉矩阵**. 此时它具有形式

$$m{A} = egin{pmatrix} z_1 & -z_2 \ \overline{z_2} & \overline{z_1} \end{pmatrix},$$

其中 $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. 它所对应的分式线性映射 f 诱导了复球面上的旋转变换. 为了使 该分式线性映射与其对应的四元数 $q=z_1+z_2$ j 表示的旋转一致, 我们重新选择复球面所 在空间的 x, y, z 轴如图 6.9 所示. 那么球极投影 ?? 变为

$$\varphi: \mathbb{C} \longrightarrow S$$

$$x + y\mathbf{i} \longmapsto \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, -\frac{2x}{|z|^2 + 1}\right),$$

$$\frac{c - b\mathbf{i}}{a - 1} \longmapsto (a, b, c).$$

特别地,

$$\varphi(\infty) = (1,0,0), \quad \varphi(i) = (0,1,0), \quad \varphi(-1) = (0,0,1).$$

此时, 由公式 ?? 定义的 q 对应的 \mathbb{R}^3 上的旋转变换 $\Phi_q(\boldsymbol{a}) = q\boldsymbol{a}q^{-1}$ 就和 w = f(z) 诱导 的复球面上的旋转变换是相同的.

例 6.10 (i) 设 $q = \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}$. 那么 $z_1 = e^{\frac{i\theta}{2}}, z_2 = 0$, 它对应的分式线性映射 为

$$w = f(z) = e^{i\theta}z.$$

我们有

$$F(1,0,0) = \varphi(f(\infty)) = (1,0,0),$$

$$F(0,1,0) = \varphi(f(i)) = (0,\cos\theta,\sin\theta),$$

$$F(0,0,1) = \varphi(f(-1)) = (0,-\sin\theta,\cos\theta),$$

即 F 是绕 x 轴逆时针旋转 θ 的变换. (ii) 设 $q=\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{j}\sin\frac{\theta}{2}$. 那么 $z_1=\cos\frac{\theta}{2},z_2=\sin\frac{\theta}{2}$, 它对应的分式线性映射为

$$w = f(z) = \frac{\cos\frac{\theta}{2} \cdot z - \sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2} \cdot z + \cos\frac{\theta}{2}}.$$

我们有

$$F(1,0,0) = \varphi(f(\infty)) = (\cos \theta, 0, -\sin \theta),$$

$$F(0,1,0) = \varphi(f(i)) = (0,1,0),$$

$$F(0,0,1) = \varphi(f(-1)) = (\sin \theta, 0, \cos \theta),$$

即 F 是绕 y 轴逆时针旋转 θ 的变换.

(iii) 设
$$q = \cos \frac{\theta}{2} + k \sin \frac{\theta}{2}$$
. 那么 $z_1 = \cos \frac{\theta}{2}, z_2 = i \sin \frac{\theta}{2}$, 它对应的分式线性映射为
$$w = f(z) = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \cdot z - i \sin \frac{\theta}{2}}{-i \sin \frac{\theta}{2} \cdot z + \cos \frac{\theta}{2}}.$$

我们有

$$F(1,0,0) = \varphi(f(\infty)) = (\cos \theta, \sin \theta, 0),$$

$$F(0,1,0) = \varphi(f(i)) = (-\sin \theta, \cos \theta, 0),$$

$$F(0,0,1) = \varphi(f(-1)) = (0,0,1),$$

即 F 是绕 z 轴逆时针旋转 θ 的变换.

由于任一旋转均可分解为上述三类旋转的复合, 任一模为 1 的四元数也可以分解为 上述三类四元数的乘积, 因此所有酉矩阵对应的分式线性映射就对应复球面的所有旋转. 设 $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. 我们将上述讨论的对应总结成表 6.1.

表达形式	作用的集合	表现		
$w = f(z) = \frac{z_1 z - z_2}{\overline{z_2} z + \overline{z_1}}$	扩充复平面 $\mathbb{C}^* \ni z$	分式线性映射		
$w = f(z) = \frac{z_1 z - z_2}{\overline{z_2} z + \overline{z_1}}$	复球面 $S \ni (a,b,c)$	旋转		
西矩阵 $oldsymbol{A} = egin{pmatrix} z_1 & -z_2 \ \hline z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}$	\mathbb{C}^2 中所有过原点的直线 V_z	线性变换		
四元数 $q=z_1+z_2$ j 对应的 Φ_q	三维空间 $\mathbb{R}^3 \ni c\mathbf{i} + b\mathbf{j} - a\mathbf{k}$	旋转		

表 6.1 分式线性映射的不同表现

初等函数对应的映射 6.3

本节中我们将研究在保形映射中常用的初等函数对应的映射.

1. 幂函数

设 $w=f(z)=z^n, \ n\geqslant 2$ 为正整数. 这个函数是处处解析的, 导数为 $f'(z)=nz^{n-1}$. 因此在 $z\neq 0$ 处它是保形映射. 对于 z=0, 不难看出该映射将圆周 |z|=r 映成圆周 $|w|=r^n$, 将射线 $\mathrm{Arg}\,z=\theta$ 映成 $\mathrm{Arg}\,w=n\theta$. 因此它将角形区域 $\theta_1<\mathrm{Arg}\,z<\theta_2$ 映成角形区域 $n\theta_1<\mathrm{Arg}\,z< n\theta_2$, 且在这两个区域上是一一对应的, 其中 $0<\theta_2-\theta_1<\frac{2\pi}{n}$. 所以 $w=z^n$ 在 z=0 处没有保角性.

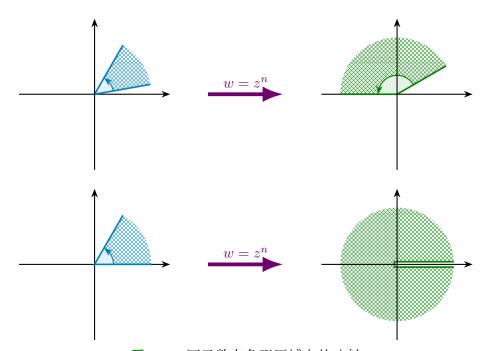


图 6.10 幂函数在角形区域上的映射

幂函数 $w=z^n$ 将角形区域 $0<\mathrm{Arg}\,z<\frac{2\pi}{n}$ 映成去掉正实轴和零的复平面 $0<\mathrm{Arg}\,z<2\pi$, 其中 $\mathrm{Arg}\,z=0$ 被映射为 w 平面正实轴的 "上沿岸", $\mathrm{Arg}\,z=\frac{2\pi}{n}$ 被映射为 w 平面正实轴的 "下沿岸". 该映射在这两个区域上是一一对应的.

对于正实数幂次情形的主值, 我们也有类似的结论.

解:由于D的边界是两条射线,不可能通过分式线性映射映成单位圆周,所以不可能单纯使用分式线性映射将D映成D'.我们考虑将D的边界映成一条直线,那么幂

① 这里 $\theta_1 < \operatorname{Arg} z < \theta_2$ 表示 z 有一个辐角 θ 满足 $\theta_1 < \theta < \theta_2$.

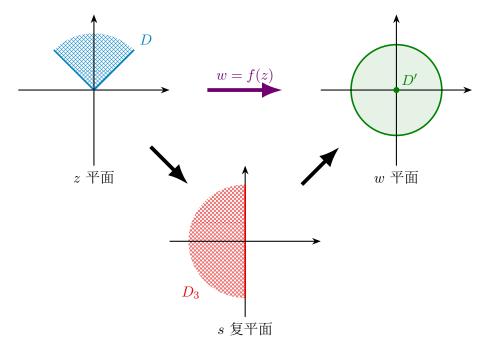


图 6.11 角状区域到单位圆域的映射

函数 $s=z^2$ 就可以做到这一点, 它将 D 映成左半平面 $D_3: \mathrm{Re}\, z < 0$. 由例 6.4 可知, $w = \frac{1+s}{1-s}$ 将 D_3 映成 D'. 所以

$$w = \frac{1 + z^2}{1 - z^2}$$

就是一个符合要求的映射.

例 6.12 求将带割痕的右半平面 $D: \text{Re } z > 0, z \notin [0,1]$ 映成右半平面 D': Re w > 0的映射 w = f(z).

解:去除割痕的核心想法是将割痕两侧与虚轴的夹角展平.首先 $s=z^2$ 将 D 映成 复平面去掉割痕 $z \leq 1$ 的区域 D_s . 然后 t = s - 1 将 D_s 映成复平面去掉割痕 $z \leq 0$ 的 区域 D_t . 最后 $w = \sqrt{t}$ (取主值) 将 D_t 映成右半平面. 所以

$$w = \sqrt{z^2 - 1}$$

就是一个符合要求的映射.

6.3.1 指数函数

设 $w = f(z) = e^z$ 为指数函数. 由于 $w' = e^z$ 处处非零, 因此它是整个复平面上的保 形映射. 指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映成圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映成射线

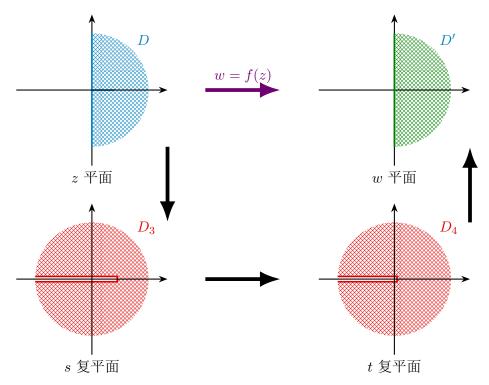


图 6.12 带割痕的右半平面到右半平面的映射

族 $\operatorname{Arg} w = c$. 所以它将水平带状区域 $\theta_1 < \operatorname{Im} z < \theta_2$ 映成角形区域 $\theta_1 < \operatorname{Arg} w < \theta_2$, 其中 $0 < \theta_2 - \theta_1 < 2\pi$. 特别地, 它将 $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$ 映成去掉正实轴和零的复平面.

若我们想求反过来的映射,则选取对数函数.

例 6.13 求将竖直带状区域 D: 1 < Re z < 2 映成单位圆域 D': |w| < 1 的映射 w = f(z).

解: 我们先将竖直带状区域映成宽度为 π 的水平带状区域,然后利用指数函数将其映成半平面,最后再映成圆域.由于 $s=\pi iz$ 将D映成

$$D_3: \pi < \operatorname{Im} s < 2\pi,$$

 $t = e^s$ 将 D_3 映成

$$D_4: \operatorname{Im} t < 0,$$

$$w=rac{1+s}{1-s}$$
 将 D_4 映成 D' , 因此

$$w = \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}z} + \mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}z} - \mathrm{i}}$$

将 D 映成 D'.

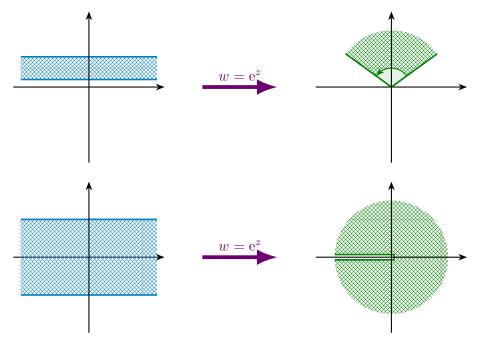


图 6.13 指数函数在带状区域上的映射

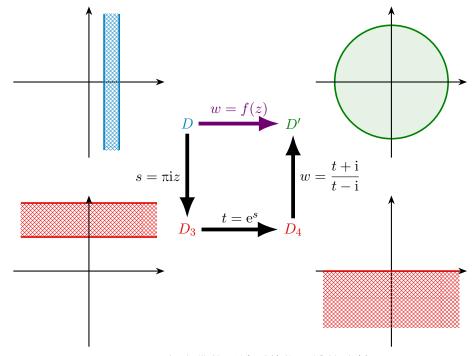


图 6.14 竖直带状区域到单位圆域的映射

例 6.14 求将带割痕的水平带状区域 $D:0<{\rm Re}\,z<2a,z-a{\rm i}\notin(-\infty,b]$ 映成水平 带状区域 $D:0<{\rm Re}\,z<2a$ 的映射 w=f(z).

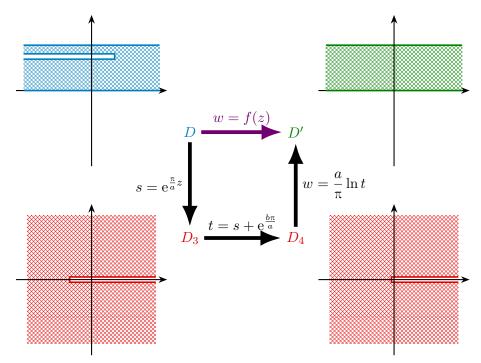


图 6.15 带割痕的水平带状区域到水平带状区域的映射

解: 我们先通过指数映射将带割痕的水平带状区域映成带割痕的复平面, 其中割痕的像落在实轴上. 然后将割痕移动为正实轴, 最后利用对数函数再映成水平带状区域. 由于 $s=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}z}$ 将 D 映成

$$D_3: s \notin [-e^{\frac{b\pi}{a}}, +\infty),$$

 $t=s+\mathrm{e}^{rac{b\pi}{a}}$ 将 D_3 映成

$$D_4:t\notin[0,+\infty),$$

 $w = \frac{a}{\pi} \ln t \, \mathcal{H} \, D_4$ 映成 D', 因此

$$w = \frac{a}{\pi} \ln \left(e^{\frac{\pi}{a}z} + e^{\frac{b\pi}{a}} \right)$$

将 D 映成 D'.

6.3.2 儒可夫斯基函数

称函数

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{a^2}{z} \right), \quad a > 0,$$

为**儒可夫斯基函数**. 它在 0 以外处处解析, 0 是它的一个一阶极点. 由于 $f'(z) = \frac{1}{2}(1 \frac{a^2}{z^2}$), 因此它在 $z \neq 0, \pm a$ 处是保形映射.

不难知道 $f(z) = f\left(\frac{a^2}{z}\right)$. 反过来, 若 $z_1 \neq z_2$, $f(z_1) = f(z_2)$, 则不难看出 $z_1 z_2 = a^2$. 所以它将圆域 |z| < a 一地映射到它的像, 且和 |z| > a 的像相同. 若 $z = a \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $w = a\cos\theta \in [-a,a]$. 所以它将圆周 |z| = a 映成直线段 [-a,a]. 反过来, 对于 $w = a\cos\theta \in [-a,a]$, 根据上述讨论, 它的原像只能是 $ae^{\pm i\theta}$. 因此 w = f(z) 将圆域 |z| < a 映成扩充复平面去掉割痕 [-a,a].

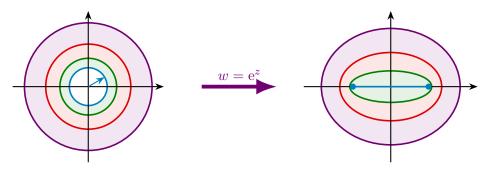


图 6.16 儒可夫斯基函数在圆环域上的映射

对于其它半径的圆 $|z|=r\neq a$, 我们来看它的像. 设 $s=\frac{a^2}{r},\,z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\,$ 则

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(re^{i\theta} + se^{-i\theta} \right) = \frac{r+s}{2} \cos \theta + \frac{r-s}{2} i \sin \theta.$$

这是椭圆的参数方程. 所以圆周 $|z|=r \neq a$ 和 $|z|=\frac{a^2}{r}$ 被映成一个椭圆. 当 r < a时, r < s, 从而 w 在下半平面. 因此圆周 |z| = r < a 上半部分被映成椭圆的下半部分, |z| < a 的上半部分被映成下半平面.

例 6.15 求上半圆域 D: |z| < 1, Im z > 0 映成单位圆域 D': |z| < 1 的映射 w = f(z).

解: 注意到参数为 1 的儒可夫斯基函数 $s=\frac{1}{2}\Big(z+\frac{1}{z}\Big)$ 将 D 映成下半平面 D_3 ,再通过分式线性映射可将其映成单位圆域 D'. 由例 6.4 知道我们可以取

$$w = \frac{1 - is}{1 + is} = \frac{i + s}{i - s} = -\frac{z^2 + 2iz + 1}{z^2 - 2iz + 1}.$$

例 6.16 求上半平面去掉半圆 $|z| \le 1$, Im z > 0 和射线 $x = 0, y \ge 2$ 的区域 D 映 成上半平面 D' 的映射 w = f(z).

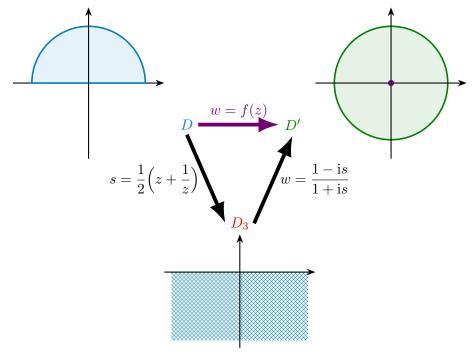


图 6.17 上半圆域到圆域的映射

解: (i) 儒可夫斯基映射

$$s = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

将上半单位圆周映成线段 [-1,1],将上半平面在单位圆外部的区域映成上半平面,所以 D 被映成上半平面去掉射线 $x=0,y\geqslant \frac{3}{4}$ 的区域 D_1 .

(ii) 映射

$$t-e^2$$

将 D_1 映成复平面去掉两条射线 $(-\infty,-\frac{9}{16}]\cup[0,+\infty)$ 的区域 D_2 . (iii) 由于两条射线交于 ∞ ,通过分式线性映射可以把它们映成一条射线. 设

$$z_1 = -\frac{9}{16},$$
 $z_2 = 0,$ $z_3 = \infty,$ $w_1 = 0,$ $w_2 = \infty,$ $w_3 = 1,$

则对应分式线性映射为

$$p = \frac{t + \frac{9}{16}}{t} = 1 + \frac{9}{16t},$$

它将 D_2 映成复平面去掉射线 $[0,+\infty)$ 的区域 D_3 .

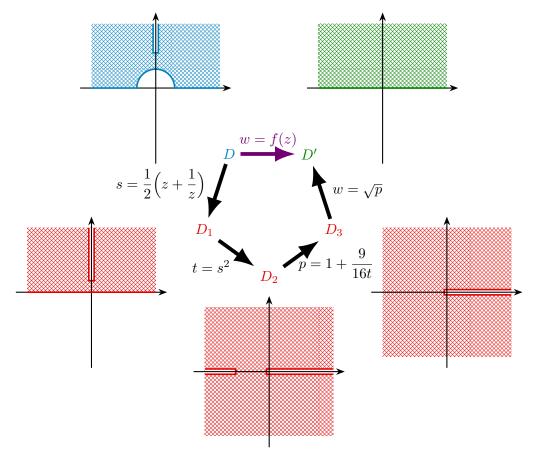


图 6.18 去掉半圆的带割痕上半平面到上半平面的映射

(iv) 最后,
$$w=\sqrt{p}$$
 将 D_3 映成上半平面 D' . 故
$$w=\sqrt{1+\frac{9}{4(z+1/z)^2}}=\frac{\sqrt{4z^4+17z^2+4}}{2(z^2+1)}.$$

6.4 保形映射在标量场的应用

用保形映射可以求出很多平面场的分布. 我们来看几个例子.

例 6.17 两块半无穷大的金属板连成一块无穷大的板, 连接处绝缘. 设两部分的电 势分别为 v_1 和 v_2 , 求金属板上的电势分布.

解:由于金属板是无限长的,所以在垂直于金属板和连接线的平面上,场的分布情况 完全相同, 因此这个静电场是一个平面场. 以金属板在平面的投影为实轴, 连接处为原点 建立坐标系. 设 v_1, v_2 分别为正半实轴和负半实轴的电势.

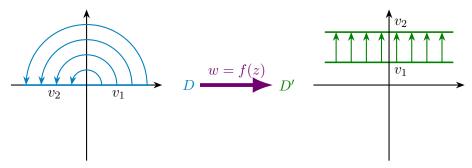


图 6.19 电流分布

若保形映射 w=f(z) 将上半平面 $D: {\rm Im}\, z>0$ 映射为水平带状区域 $D': v_1<{\rm Im}\, w< v_2$,且将正半实轴和负半实轴分别映成 ${\rm Im}\, w=v_1$ 和 ${\rm Im}\, w=v_2$,则从 D' 上的电势分布 $v={\rm Im}\, w$ 就可以得到 D 的电势分布. 映射 $s={\rm ln}\, z$ 将 D 映成水平带状区域 $0<{\rm Im}\, s<\pi$,然后映射 $w=\frac{v_2-v_1}{\pi}s+v_1$ 将其映成水平带状区域 $v_1<{\rm Im}\, w< v_2$. 所以

$$w = \frac{v_2 - v_1}{\pi} \ln z + \mathrm{i} v_1,$$

D 的电势分布为

$$v = \operatorname{Im}\left(\frac{v_2 - v_1}{\pi} \ln z + iv_1\right) = \frac{v_2 - v_1}{\pi} \arg z + v_1.$$

由对称性可知金属板外的电势分布为

$$v = \frac{v_2 - v_1}{\pi} |\arg z| + v_1.$$

例 6.18 有一个圆形薄金属板,上下用两个热绝缘材料完全包裹. 若金属板边界上两个半圆周上的温度分别为 T_1, T_2 , 求金属板上的温度分布.

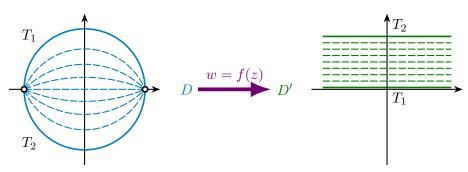


图 6.20 等温线

解:由于金属板上下热绝缘,因此热流被严格限制在金属板内,这个温度分布是一个平面场.设金属板的半径为 1,以金属板的圆心为原点建立直角坐标系,使得上下半圆周的温度分别为 T_1,T_2 .

若保形映射 w=f(z) 将单位圆域 D:|z|<1 映射为水平带状区域 $D':T_1<\mathrm{Im}\,w< T_2$,且将上下半圆周分别映成 $\mathrm{Im}\,w=T_1$ 和 $\mathrm{Im}\,w=T_2$,则从 D' 上的温度分布 $T=\mathrm{Im}\,w$ 就可以得到 D 的温度分布. 映射 $s=\mathrm{i}\frac{1-z}{1+z}$ 将 D 映成上半平面 $\mathrm{Im}\,s>0$,然后映射 $w=\frac{T_2-T_1}{\pi}\ln s+T_1$ 将其映成水平带状区域 $T_1<\mathrm{Im}\,w< T_2$. 所以

$$w = \frac{T_2 - T_1}{\pi} \ln \left(i \frac{1 - z}{1 + z} \right) + i T_1,$$

D 的温度分布为

$$T = \operatorname{Im}\left(\frac{T_2 - T_1}{\pi} \ln\left(i\frac{1 - z}{1 + z}\right) + iT_1\right) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\pi} \operatorname{arccot}\frac{2y}{1 - x^2 - y^2}.$$

→ ★ 本章小结 ★ →

本章所需掌握的知识点如下:

- (1) 理解保形映射的定义.
- (2) 掌握分式线性映射的保圆性和保对称性.
- (3) 掌握幂函数、指数函数和儒可夫斯基函数所对应的映射特点.
- (4) 会利用上述函数构造简单的单连通区域间的保形映射.

本章中不易理解的概念和难点包括:

- (1) 保角映射和保形映射的差异: 保形映射是一一的保角映射, 这是为了保证区域间的映射可逆.
- (2) 与 ∞ 相关的保形映射: 作变量替换 $t=\frac{1}{z}$ 或 $s=\frac{1}{w}$ 来将其转化为普通复数情形的保形映射.
- (3) 利用定理 6.12 构造分式线性映射时, 需要根据区域在圆周内部还是外部、直线的哪一侧来确定三点的顺序.
 - (4) 带割痕的区域的处理, 需要使用幂函数将割痕与边界合并.
 - (5) 儒可夫斯基函数在处理带半圆边界的半平面中的应用.

→ 今 本章作业 长

一、单选题.

1.	保形	映射总能保持	区域内	图形的().					
	(A)	面积	(B)	周长		(C)	夹角和方向	(D) \$\vec{x}\$	寸称性	Ė
2.	下列	命题正确的是	().							
	(A)	若 $w = f(z)$ 映射.	是区域	<i>D</i> 内的	解析函数	数,且	L导数处处非零	,则它是	Ŀ D .	上的保形
	(B)	若 $w = f(z)$ 对应.	是区域	<i>D</i> 内的	解析函数	数,且	L导数处处非零	,则它是	Ŀ D .	上的一一
	(C)	若 $w = f(z)$ 映射.	是区域	D 内的	解析函数	数,且	L导数处处非零	,则它是	<u> </u>	上的保角
	(D)	若 $w = f(z)$	在 z ₀ 友	心解析且	$f'(z_0)$ 7	$\neq 0,$	则它是 z_0 处的	保形映	射.	
3.	分式	线性映射总是	().							
	(A)	将圆和直线者	『映射》	习圆						
	` /	将圆和直线者								
	\ /	将圆映射为圆将关于直线对			坐 工 古 妇	医小形	京 的占			
4	,							fid-	亡 小夕 i	并停回师
4.	,),且分 <u>以</u> 多 半平面.	(注)代分:	J w = J(2) 付 2]	$1, z_2,$	z_3 映成 w_1, w_2	$,w_3,$ 火り	占付-	半世四昳
		$z_1 = 1, z_2 = i$	$z_{3} = -$	$-i, w_1 =$	$-1, w_2$	= 0.	$w_3 = \infty$			
	, ,	$z_1 = 1, z_2 = 1$								
	(C)	$z_1 = 1, z_2 = i$	$z_3 = -1$	$-1, w_1 =$	$1, w_2 =$	= 0, u	$v_3 = \infty$			
	(D)	$z_1 = 1, z_2 = -$	$-1, z_3 =$	$=-\mathrm{i},\ w_1$	$=1, w_2$	=0,	$w_3 = -1$			
5.	()可以将角形[区域映成	成角形区	域.					
	` /	分式线性映射	†			` /	幂函数			
	, ,	指数函数				()	儒可夫斯基函	数		
6.		夫斯基函数可					· · ·			
	(A)	直线段	(B)	圆周		(C)	椭圆	(D) I	重线 书	及或椭圆
三、	填空	题.								
1.	若分.	式线性映射 w	=f(z)	将上半-	平面映局	戈单 位	立圆域,且 $f(i)$	= 2, 则	f(-i	i) =
2.	若分:	式线性映射 w	=f(z)	将单位	圆域映成	戈右半	半平面,且 $f(0)$	= 1, 则	$f(\infty$	o) =

- 3. 若 w = f(z) 将角形区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{6}$ 共形映射到上半平面,则 f(z) 可以
- 4. 若 w = f(z) 将水平带状区域 $0 < \text{Im } z < \pi$ 共形映射到上半平面, 则 f(z) 可以

三、计算题.

1. 求以下区域在相应映射下的像.

(i)
$$\operatorname{Re} z < 0, w = (1 - i)z + i;$$
 (ii) $\operatorname{Im} z > 0, w = z - 1 - i$

(iii)
$$0 < \text{Re } z < 1, w = \frac{1}{z-1};$$
 (iv) $|z-1| < 1, w = \frac{z}{z+1};$

(v)
$$\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi, w = \sqrt{z}$$
 (主值); (vi) $1 < \text{Re } z < 2, w = e^z;$

(i)
$$\operatorname{Re} z < 0, w = (1-\mathrm{i})z + \mathrm{i};$$
 (ii) $\operatorname{Im} z > 0, w = z - 1 - \mathrm{i};$ (iii) $0 < \operatorname{Re} z < 1, w = \frac{1}{z-1};$ (iv) $|z-1| < 1, w = \frac{z}{z+1};$ (v) $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi, w = \sqrt{z}$ (主値); (vi) $1 < \operatorname{Re} z < 2, w = \mathrm{e}^z;$ (vii) $|z| > 1, \operatorname{Im} z > 0, w = z + \frac{2}{z}.$

2. 求将 $-1, \infty, i$ 分别映成下列各点的分式线性映射.

(i)
$$i, 1, 1+i;$$
 (ii) $1, i, \infty;$ (iii) $0, \infty, 1;$ (iv) $\infty, -1, i.$

3. 求扩充复平面上 |z| > 1 到 |w| < 1 且满足

$$w\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$
, $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$.

的保形映射 w = f(z).

4. 求 1 < |z| < 2 到 $|w| > 1, |w+1| < \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 的保形映射 w = f(z).

5. 求将 D 映成 D' 的分式线性映射.

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & D:|z|<1, D':|w-1|<1; & \text{(ii)} & D:|z+\mathrm{i}|>1, D':\mathrm{Im}\,z<1; \\ \text{(iii)} & D:\mathrm{Re}\,z>-1, D':|z+1|<2; & \text{(iv)} & D:\mathrm{Re}\,z+\mathrm{Im}\,z<2, D':|z|<1. \end{array}$$

(iii)
$$D: \operatorname{Re} z > -1, D': |z+1| < 2;$$
 (iv) $D: \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 2, D': |z| < 1.$

6. 求将 D 映成上半平面的保形映射.

(i)
$$D: \text{Im } z > 1, |z| < 2;$$

(ii)
$$D: |z| > 2, |z - \sqrt{2}| < \sqrt{2};$$

(iii)
$$D: |z| < 1, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2};$$

(iv)
$$D: |z| > 2, 0 < \text{Arg } z < \frac{3\pi}{2};$$

(v)
$$D$$
 为带有割痕 $x = 0, 0 \le y \le a$ 的上半平面;

(vi)
$$D$$
 为带有割痕 $x=0,y\leqslant -1$ 的单位圆周外部 $|z|>1$;

(vii)
$$D$$
 为带有割痕 $\arg z = \frac{\pi}{4}, |z| < 2$ 的角形区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{2};$

(viii)
$$D: |z| < 1, z \notin [0, 1];$$

- (ix) D: |z| < 2, |z-1| > 1;
- (x) D : Re z > 0, |z| < 1;
- (xi) $D: a < \operatorname{Re} z < b;$
- (xii) D : Re z > 0, 0 < Im z < 1.
- 7. 有一个半圆形薄金属板,上下用两个热绝缘材料完全包裹. 若在半圆周上的温度为 T_1 ,边界直径上的温度为 T_2 ,求金属板上的温度分布.
- 8. 一块无限大的 $\frac{1}{4}$ 圆形金属板, 圆心处由绝缘体隔开, 两条垂直的无限长半径上的电势分别为 v_1,v_2 , 求金属板上的电势分布.

参考文献 参考文献

- [1] 阿尔福斯. 复分析 [M]. 赵志勇, 薛运华, 杨旭, 译. 北京: 机械工业出版社, 2022.
- [2] 范莉莉, 何成奇. 复变函数论 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987.
- [3] 克莱因. 古今数学思想(第一册)[M]. 张理京, 张锦炎, 江泽涵. 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2013.
- [4] 克莱因. 古今数学思想(第二册)[M]. 张理京, 张锦炎, 江泽涵. 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2013.
- [5] 史济怀, 刘太顺. 复变函数 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998.
- [6] 西安交通大学高等数学教研室. 工程数学: 复变函数. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [7] 严镇军. 数学物理方法 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1999.
- [8] 庄圻泰, 张南岳. 复变函数 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1984.
- [9] BERG G O, JULIAN W, MINES R, RICHMAN F. The constructive Jordan curve theorem[J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1975, 5(2):225–236.
- [10] 袁志杰, 张神星. 复变函数在不同圆环域内洛朗展开的探究 [J/OL]. 南阳师范学院学报, 2024, 23(3). https://publish.cnki.net/journal/portal/nysf/client/paper/01eb42a7419d144c7a0459345f42f130.
- [11] 3Blue1Brown. 奥数级别的数数问题 [DB/OL]. (2022-06-26)[2024-12-08]. https://www.bilibili.com/video/BV1R34y1W7Xn/.
- [12] 3Blue1Brown. 研究人员觉得这里有个 bug... (Borwein 积分)[DB/OL]. (2022-12-07)[2024-12-08]. https://www.bilibili.com/video/BV18e4y1u7BH/.