第一章 复数与复变函数

第一章 复数与复变函数

- 复数、实部、虚部、模、辐角、共轭复数
- 复平面、复球面、∞
- 复数的四则运算、乘幂、方根
- 区域、复变函数
- 复变函数的极限和连续性

本章作业

- **1**，**5**，**7**(2)(4)(6)，**8**(1)(3)
- **11**，**12**(3)，**13**，**14**(1)(3)，**19**
- **21**(4)(7)，**22**(5) (10)，**27**(2)

- 复数起源于多项式方程的求根问题.

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$，由求根公式可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad 其中\ \Delta = b^2 - 4c.$$

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$，由求根公式可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \text{其中 } \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当 $\Delta \geqslant 0$ 时，有两个实根(计算重数);

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$，由求根公式可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \text{其中 } \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当 $\Delta \geqslant 0$ 时，有两个实根(计算重数);
- (2) 当 $\Delta < 0$，无实根.

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$，由求根公式可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \text{其中 } \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当 $\Delta \geqslant 0$ 时，有两个实根(计算重数);
- (2) 当 $\Delta < 0$，无实根.
- 然而，如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根, 形式地计算可以发现它们满足原来的方程.

*三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$，我们也有求根公式

$$x = u + \frac{p}{u}, \qquad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \qquad \Delta = q^2 - p^3.$$

*三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3-3px-2q=0$，我们也有求根公式

$$x=u+\frac{p}{u},\qquad u^3=q+\sqrt{\Delta},\qquad \Delta=q^2-p^3.$$

- (1) 当 $\Delta>0$，有一个实根.

*三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3-3px-2q=0$，我们也有求根公式

$$x=u+\frac{p}{u},\qquad u^3=q+\sqrt{\Delta},\qquad \Delta=q^2-p^3.$$

- (1) 当 $\Delta>0$，有一个实根.
- (2) 当 $\Delta=0, x=2\sqrt[3]{q},-\sqrt[3]{q}(2\text{重})$.

- 对于三次方程 $x^3-3px-2q=0$，我们也有求根公式

$$x=u+\frac{p}{u},\qquad u^3=q+\sqrt{\Delta},\qquad \Delta=q^2-p^3.$$

- (1) 当 $\Delta>0$，有一个实根.
- (2) 当 $\Delta=0, x=2\sqrt[3]{q},-\sqrt[3]{q}(2重)$.
- (3) 当 $\Delta<0$，看上去没有根，实际上有3个实根. 这可以通过分析函数单调性得到.

- 对于三次方程 $x^3-3px-2q=0$，我们也有求根公式

$$x=u+\frac{p}{u},\qquad u^3=q+\sqrt{\Delta},\qquad \Delta=q^2-p^3.$$

- (1) 当 $\Delta>0$，有一个实根.
- (2) 当 $\Delta=0, x=2\sqrt[3]{q},-\sqrt[3]{q}(2\text{重})$.
- (3) 当 $\Delta<0$，看上去没有根，实际上有3个实根. 这可以通过分析函数单调性得到.
- 但我们必须接受负数开方.

*三次方程的根(续)

- 尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受。

*三次方程的根(续)

- 尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受。

“圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根。”

——Leibniz

*三次方程的根(续)

- 例 $x^3+6x-20=0, p=-2, q=10, \Delta=108>0,$

*三次方程的根(续)

- 例 $x^3+6x-20=0, p=-2, q=10, \Delta=108>0,$

$$u=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}=1+\sqrt{3}, x=u-\frac{2}{u}=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2.$$

*三次方程的根(续)

- 例 $x^3+6x-20=0, p=-2, q=10, \Delta=108>0$,

$$u=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}=1+\sqrt{3}, x=u-\frac{2}{u}=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2.$$

- 例 $x^3-7x+6=0, p=\frac{7}{3}, q=-3, \Delta=-\frac{100}{27}<0$,

*三次方程的根(续)

- 例 $x^3+6x-20=0, p=-2, q=10, \Delta=108>0,$

$$u=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}=1+\sqrt{3}, x=u-\frac{2}{u}=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2.$$

- 例 $x^3-7x+6=0, p=\frac{7}{3}, q=-3, \Delta=-\frac{100}{27}<0,$

$$u=\sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9+\sqrt{-3}}{6}, \frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

*三次方程的根(续)

- 例 $x^3+6x-20=0, p=-2, q=10, \Delta=108>0$,

$$u=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}=1+\sqrt{3}, x=u-\frac{2}{u}=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2.$$

- 例 $x^3-7x+6=0, p=\frac{7}{3}, q=-3, \Delta=-\frac{100}{27}<0$,

$$u=\sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x=u+\frac{7}{3u}=2,-3,1.$$

*三次方程的根(续)

- 例 $x^3+6x-20=0, p=-2, q=10, \Delta=108>0,$

$$u=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}=1+\sqrt{3}, x=u-\frac{2}{u}=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2.$$

- 例 $x^3-7x+6=0, p=\frac{7}{3}, q=-3, \Delta=-\frac{100}{27}<0,$

$$u=\sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x=u+\frac{7}{3u}=2,-3,1.$$

- 为什么这样做一定会得到三个实根? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答了.

复数的定义

定义

固定一个记号 i，**复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素，其中 x, y 均是实数.

定义

固定一个记号 i，**复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素，其中 x, y 均是实数，且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

复数的定义

定义

固定一个记号 i，**复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素，其中 x, y 均是实数，且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

- 换言之，复数全体构成一个二维实线性空间，$\{1, i\}$ 是一组基.

复数的定义

定义

固定一个记号 i，**复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素，其中 x, y 均是实数，且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

- 换言之，复数全体构成一个二维实线性空间，$\{1, i\}$ 是一组基.
- 将**全体复数集合记作** $\mathbb{C}$，全体实数集合记作 $\mathbb{R}$，则 $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.

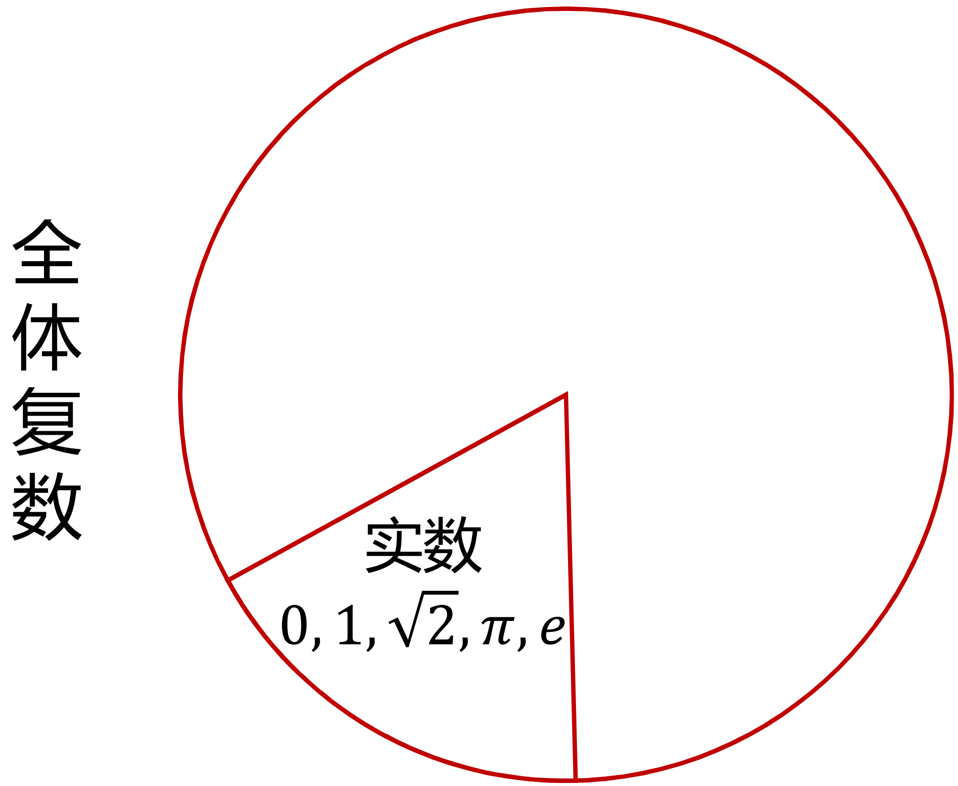
定义

称复数 $z = x + yi$ 的**实部**为 $\mathrm{Re}\, z = x$，**虚部**为 $\mathrm{Im}\, z = y$.

定义

称复数 $z = x + yi$ 的**实部**为 $\mathrm{Re}\, z = x$，**虚部**为 $\mathrm{Im}\, z = y$.

- 当 $\mathrm{Im}\, z = 0$ 时，z 是实数.

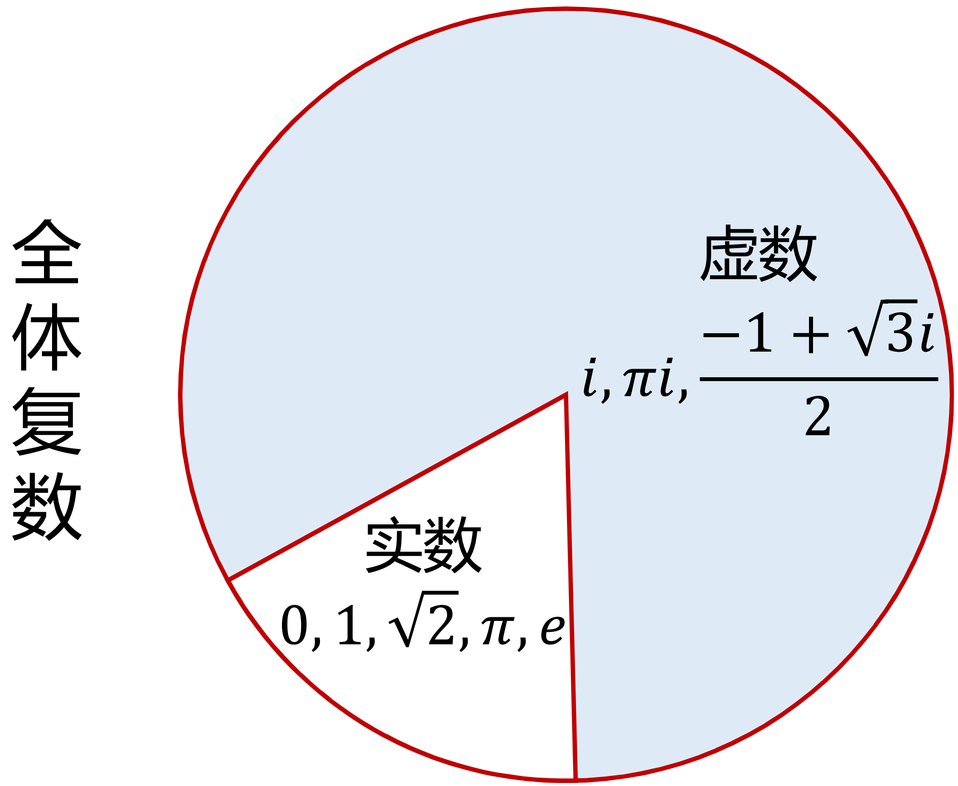


复数的实部和虚部，虚数和纯虚数

定义

称复数 $z = x + yi$ 的**实部**为 $\mathrm{Re}\, z = x$，**虚部**为 $\mathrm{Im}\, z = y$.

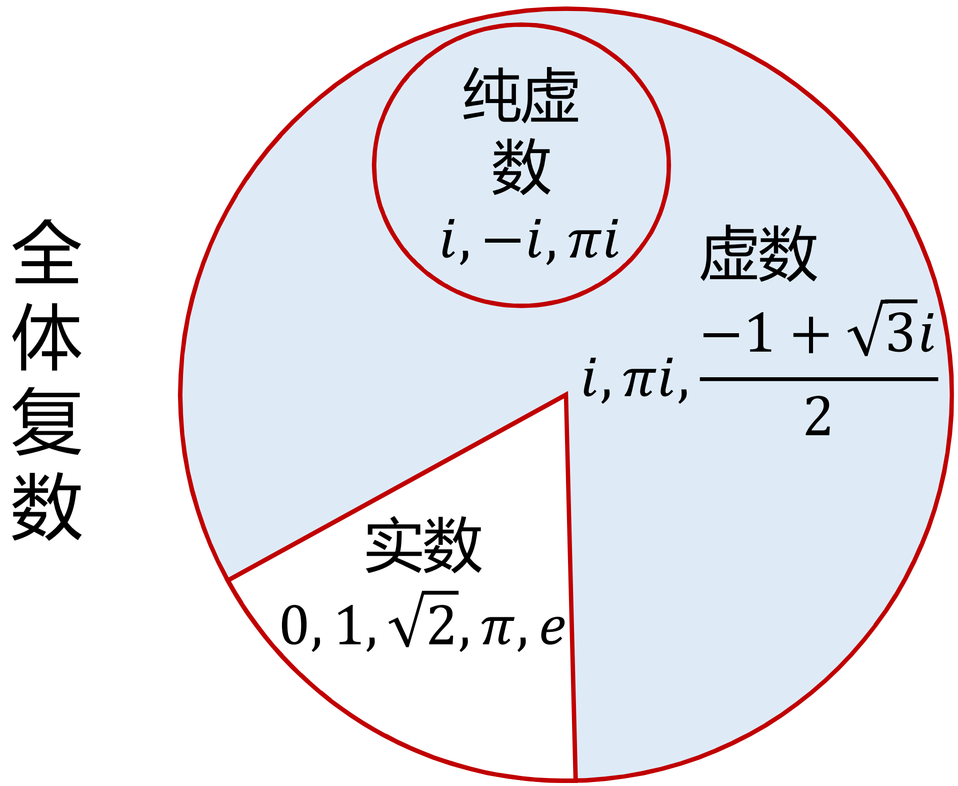
- 当 $\mathrm{Im}\, z = 0$ 时，z 是实数. 不是实数的复数是虚数.



定义

称复数 $z=x+yi$ 的**实部**为 $\operatorname{Re} z=x$，**虚部**为 $\operatorname{Im} z=y$.

- 当 $\operatorname{Im} z=0$ 时，z 是实数. 不是实数的复数是虚数.
- 当 $\operatorname{Re} z=0$ 且 $z\neq 0$ 时，称 z 是纯虚数.



典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时，$\left(x^2-3x-4\right)+\left(x^2-5x-6\right)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.

典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时，$(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- 解 (1) $x^2-5x-6=0$，即 $x=-1$ 或 6.

- 例 实数 x 取何值时，$(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- 解 (1) $x^2-5x-6=0$，即 $x=-1$ 或 6.
- (2) $x^2-3x-4=0$，即 $x=-1$ 或 4.

典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时，$(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- 解 (1) $x^2-5x-6=0$，即 $x=-1$ 或 6.
- (2) $x^2-3x-4=0$，即 $x=-1$ 或 4.
- 但同时要求 $x^2-5x-6\neq 0$，因此 $x\neq -1, x=4$.

典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时，$\left(x^2-3x-4\right)+\left(x^2-5x-6\right)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- 解 (1) $x^2-5x-6=0$，即 $x=-1$ 或 $6.$
- (2) $x^2-3x-4=0$，即 $x=-1$ 或 $4.$
- 但同时要求 $x^2-5x-6\neq 0$，因此 $x\neq -1, x=4.$
- 练习 实数 x 取何值时，$x^2(1+i)+x(5+4i)+4+3i$ 是纯虚数.

典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时，$\left(x^2-3x-4\right)+\left(x^2-5x-6\right)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- 解 (1) $x^2-5x-6=0$，即 $x=-1$ 或 6.
- (2) $x^2-3x-4=0$，即 $x=-1$ 或 4.
- 但同时要求 $x^2-5x-6\neq 0$，因此 $x\neq -1, x=4$.
- 练习 实数 x 取何值时，$x^2(1+i)+x(5+4i)+4+3i$ 是纯虚数.
- 答案 $x=-4$.

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i.$

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i.$
- 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i.$
- 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

- 规定 $i \bullet i = -1.$

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.
- 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

- 规定 $i \bullet i = -1$. 由乘法分配律和数乘可得复数的乘除法

$$z_1 \bullet z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.
- 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

- 规定 $i \bullet i = -1$. 由乘法分配律和数乘可得复数的乘除法

$$z_1 \bullet z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

- 定义 z^n 为 n 个 z 相乘，也就是 z 的 n 次幂.

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.
- 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

- 规定 $i \bullet i = -1$. 由乘法分配律和数乘可得复数的乘除法

$$z_1 \bullet z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

- 定义 z^n 为 n 个 z 相乘，也就是 z 的 n 次幂.
- 当 $z \neq 0$ 时定义 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1.$
- 一般地 $i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i.$

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1.$
- 一般地 $i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i.$
- (2) $(1+i)^2=2i,\ (1+i)^3=-2+2i,\ (1+i)^4=-4.$

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1.$
- 一般地 $i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i.$
- (2) $(1+i)^2=2i,\ (1+i)^3=-2+2i,\ (1+i)^4=-4.$
- (3) 令 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1.$

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$
- 一般地 $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i.$
- (2) $(1+i)^2 = 2i,\ (1+i)^3 = -2+2i,\ (1+i)^4 = -4.$
- (3) 令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1.$
- (4) 令 $\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, 则

$$\zeta^2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \omega, \qquad \zeta^3 = -1, \qquad \zeta^6 = 1.$$

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1.$

$1, i, i^2, i^3$ 是四次单位根

- 一般地 $i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i.$
- (2) $(1+i)^2=2i,\ (1+i)^3=-2+2i,\ (1+i)^4=-4.$
- (3) 令 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1.$

$1, \omega, \omega^2$ 是三次单位根

- (4) 令 $\zeta=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, 则

$$\zeta^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega, \qquad \zeta^3=-1, \qquad \zeta^6=1.$$

$1, \zeta, \zeta^2, \ldots$ 是六次单位根

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1.$

$1, i, i^2, i^3$ 是四次单位根

- 一般地 $i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i.$
- (2) $(1+i)^2=2i,\ (1+i)^3=-2+2i,\ (1+i)^4=-4.$
- (3) 令 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1.$

$1, \omega, \omega^2$ 是三次单位根

- (4) 令 $\zeta=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, 则

$$\zeta^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega, \qquad \zeta^3=-1, \qquad \zeta^6=1.$$

$1, \zeta, \zeta^2, \dots$ 是六次单位根

$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 是单位根吗?

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 (1) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$; (2) $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$.

- 例 化简 (1) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$; (2) $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$.
- 解 (1) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{2}=-\dfrac{2i}{2}=-i,$

- 例 化简 (1) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$; (2) $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$.
- 解 (1) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{2}=-\dfrac{2i}{2}=-i,$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7=(-i)^7=i.$$

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 (1) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$; (2) $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$.
- 解 (1) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{2}=-\dfrac{2i}{2}=-i,$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7=(-i)^7=i.$$

- (2) $\dfrac{i}{1-i}=\dfrac{i(1+i)}{2}=\dfrac{-1+i}{2},$

- 例 化简 (1) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$; (2) $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$.
- 解 (1) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{2}=-\dfrac{2i}{2}=-i,$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7=(-i)^7=i.$$

- (2) $\dfrac{i}{1-i}=\dfrac{i(1+i)}{2}=\dfrac{-1+i}{2},\qquad \dfrac{1-i}{i}=-i-1,$

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 (1) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$; (2) $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$.
- 解 (1) $\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)(1-i)}{2}=-\dfrac{2i}{2}=-i,$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7=(-i)^7=i.$$

- (2) $\dfrac{i}{1-i}=\dfrac{i(1+i)}{2}=\dfrac{-1+i}{2},\qquad \dfrac{1-i}{i}=-i-1,$
- 因此 $\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}=\dfrac{-1+i}{2}-i-1=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{i}{2}.$

- 例 解方程 $z^2 - 2(1+i)z - 5 - 10i = 0.$

例题: 解复数方程

- **例** 解方程 $z^2 - 2(1+i)z - 5 - 10i = 0.$
- **解** 配方可得 $(z-1-i)^2 = 5 + 10i + (1+i)^2 = 5 + 12i.$

例题: 解复数方程

- 例 解方程 $z^2 - 2(1+i)z - 5 - 10i = 0$.
- 解 配方可得 $(z-1-i)^2 = 5 + 10i + (1+i)^2 = 5 + 12i$.
- 设 $z - 1 - i = x + yi$, 则 $(x+yi)^2 = 5 + 12i$,

例题: 解复数方程

- **例** 解方程 $z^2 - 2(1+i)z - 5 - 10i = 0.$
- **解** 配方可得 $(z-1-i)^2 = 5 + 10i + (1+i)^2 = 5 + 12i.$
- 设 $z - 1 - i = x + yi$, 则 $(x+yi)^2 = 5 + 12i$,

$$x^2 - y^2 = 5, \qquad 2xy = 12.$$

例题: 解复数方程

- 例 解方程 $z^2 - 2(1+i)z - 5 - 10i = 0.$
- 解 配方可得 $(z-1-i)^2 = 5 + 10i + (1+i)^2 = 5 + 12i.$
- 设 $z - 1 - i = x + yi$, 则 $(x+yi)^2 = 5 + 12i$,

$$x^2 - y^2 = 5, \qquad 2xy = 12.$$

- 将 $y = \frac{6}{x}$ 代入可解得 $(x, y) = \pm(3,2)$,

例题: 解复数方程

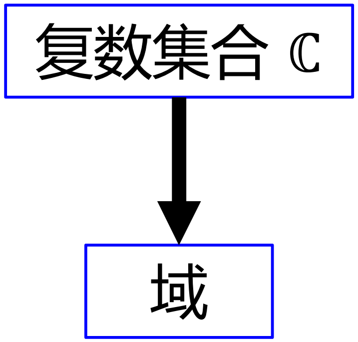
- 例 解方程 $z^2 - 2(1+i)z - 5 - 10i = 0.$
- 解 配方可得 $(z-1-i)^2 = 5 + 10i + (1+i)^2 = 5 + 12i.$
- 设 $z - 1 - i = x + yi$, 则 $(x+yi)^2 = 5 + 12i$,

$$x^2 - y^2 = 5, \qquad 2xy = 12.$$

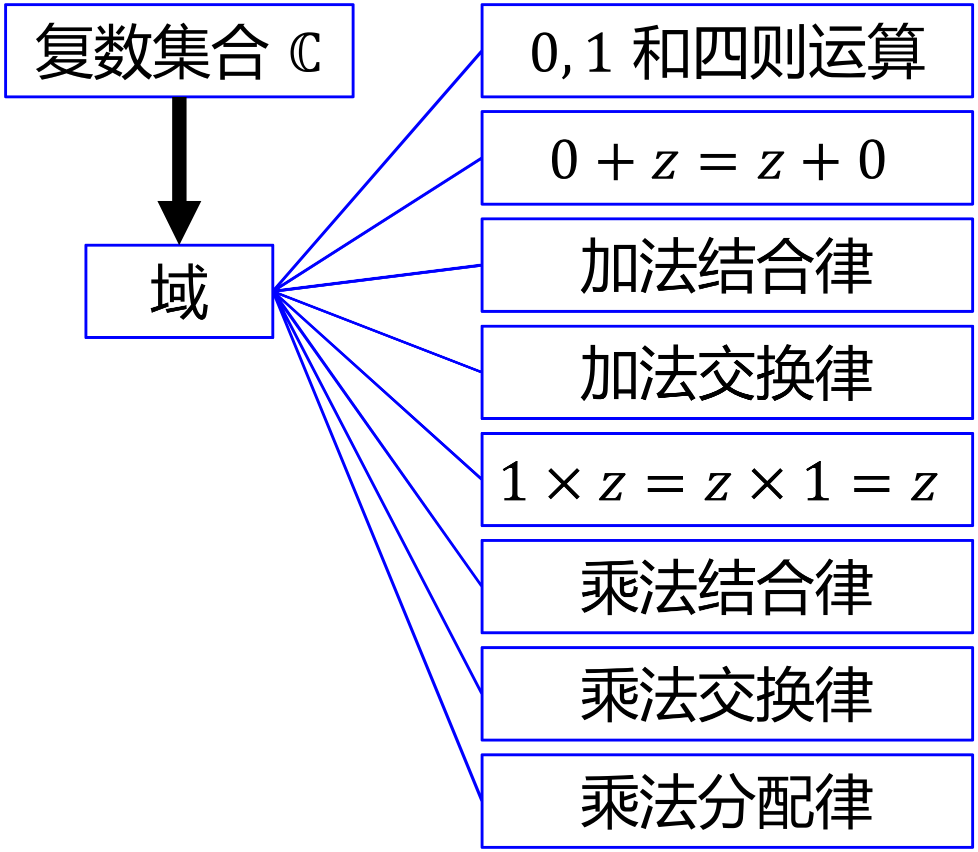
- 将 $y = \frac{6}{x}$ 代入可解得 $(x, y) = \pm(3,2)$, 故

$$z - 1 - i = \pm(3 + 2i), \qquad z = 4 + 3i \text{ 或 } -2 - i.$$

*复数域

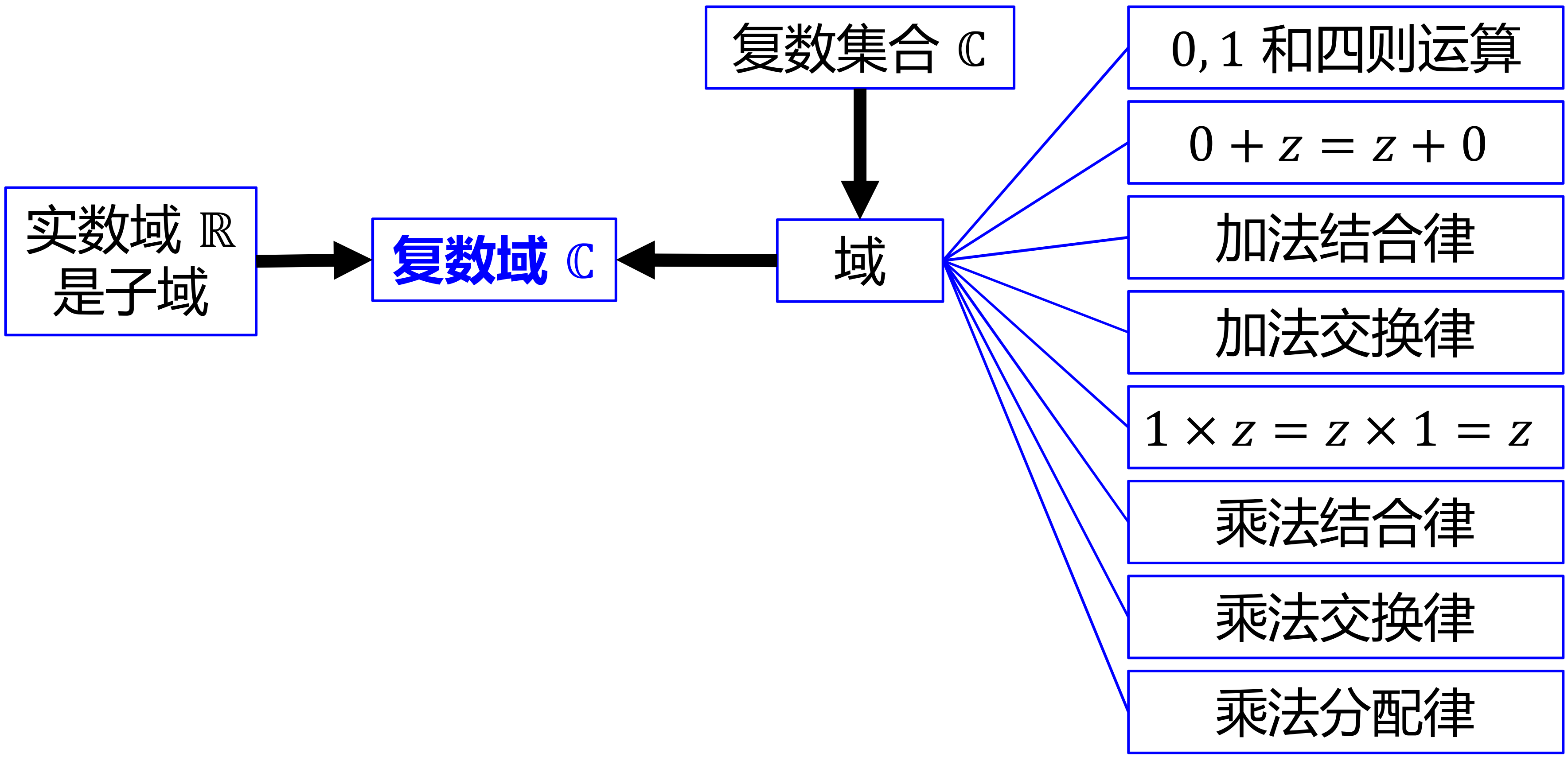


*复数域

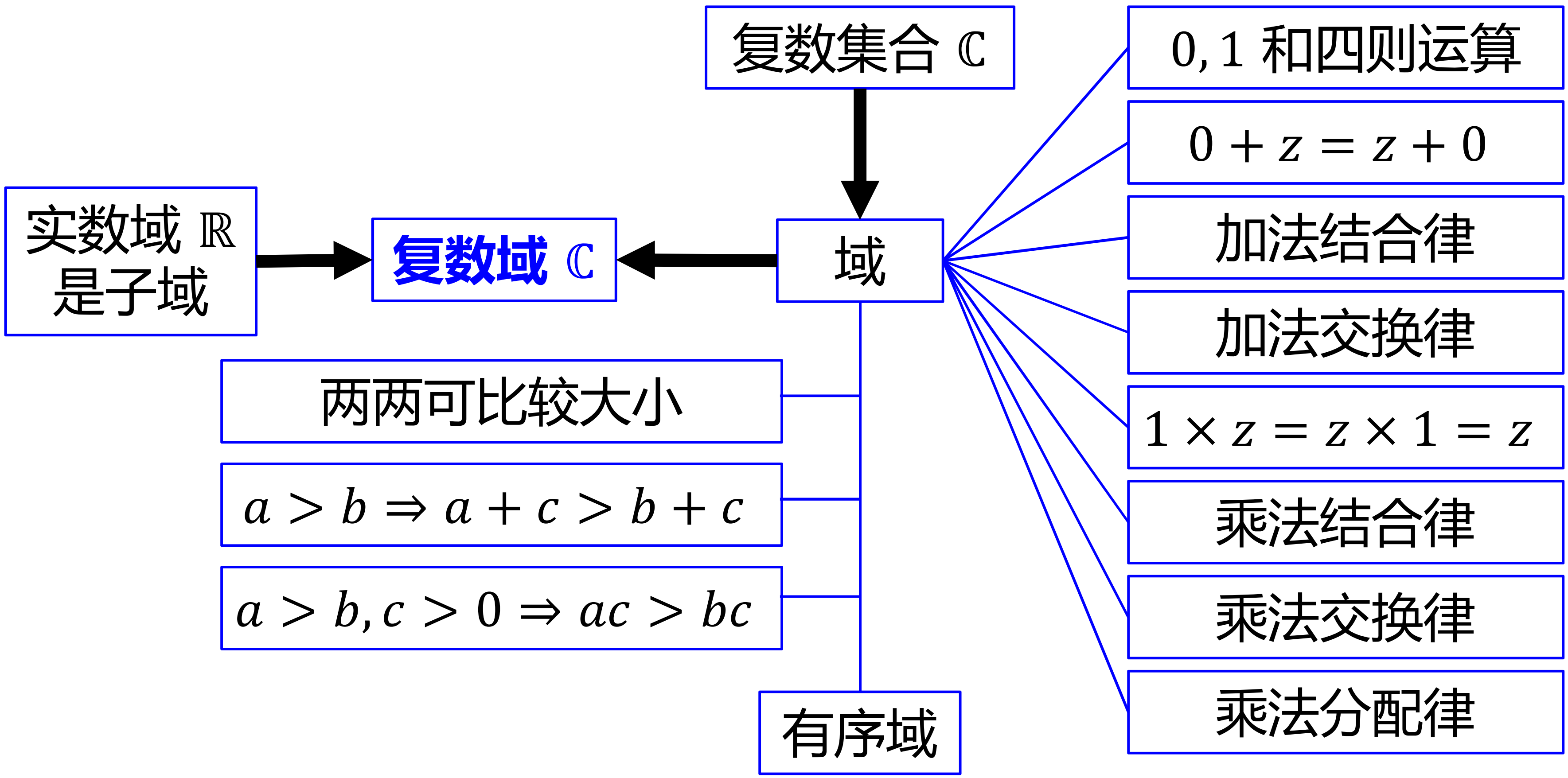


复数集合 $\mathbb{C}$
域
0, 1 和四则运算
$0 + z = z + 0$
加法结合律
加法交换律
$1 \times z = z \times 1 = z$
乘法结合律
乘法交换律
乘法分配律

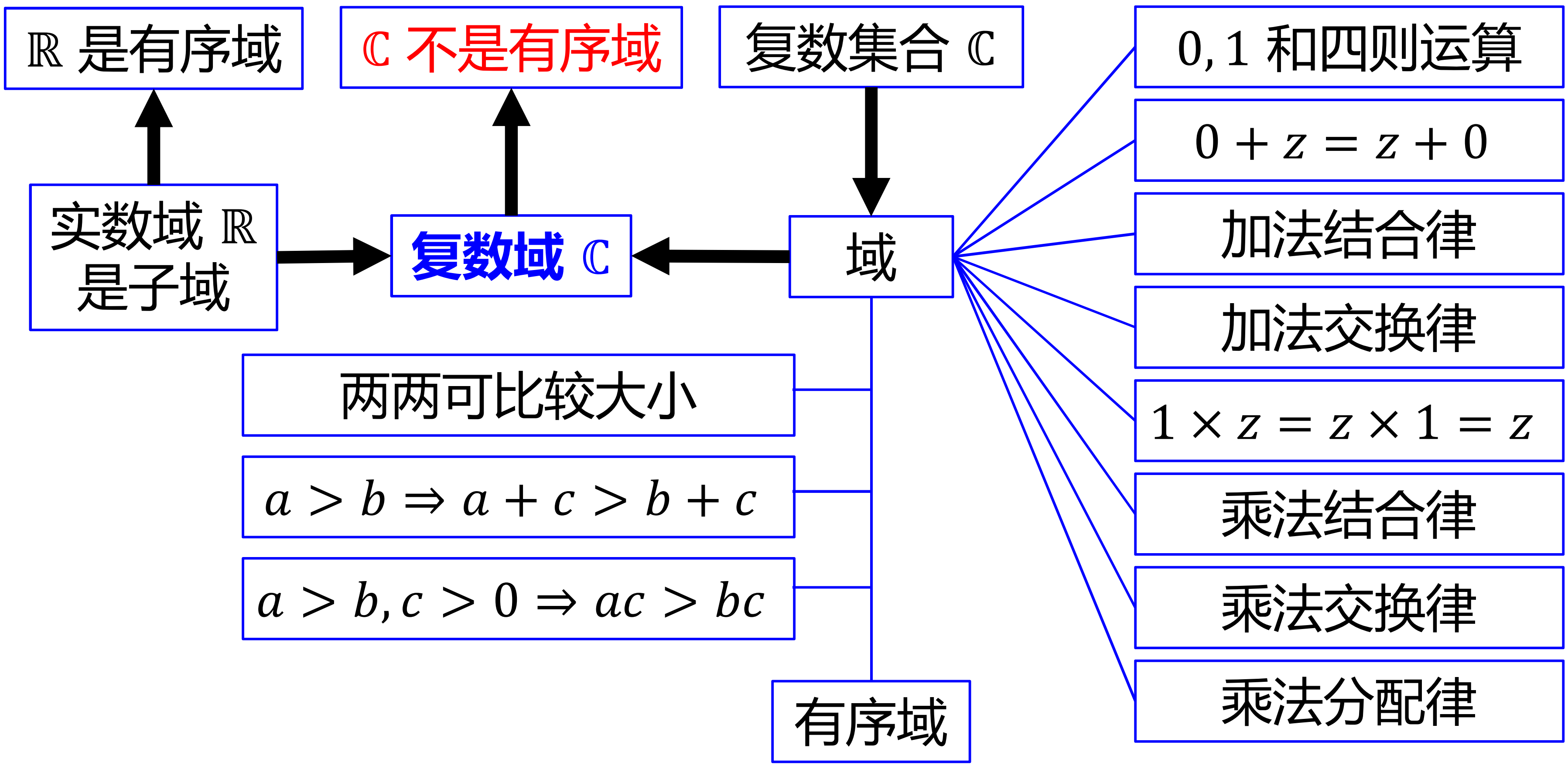
*复数域


复数集合 $\mathbb{C}$
实数域 $\mathbb{R}$ 是子域
复数域 $\mathbb{C}$
域
0, 1 和四则运算
$0+z=z+0$
加法结合律
加法交换律
$1\times z=z\times 1=z$
乘法结合律
乘法交换律
乘法分配律

*复数域

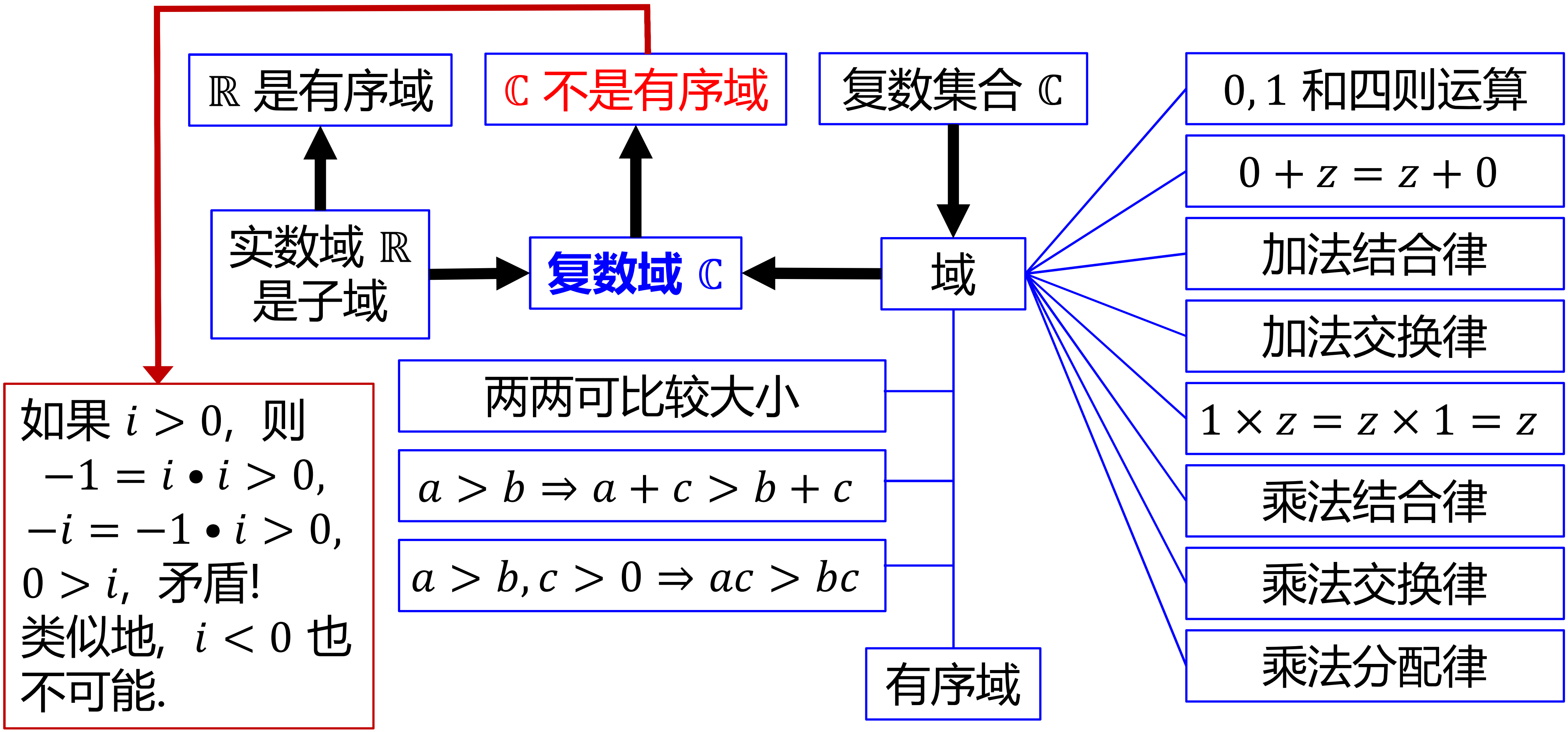

复数集合 $\mathbb{C}$
实数域 $\mathbb{R}$ 是子域
复数域 $\mathbb{C}$
域
0, 1 和四则运算
$0+z=z+0$
加法结合律
加法交换律
$1\times z=z\times 1=z$
乘法结合律
乘法交换律
乘法分配律
两两可比较大小
$a>b\Rightarrow a+c>b+c$
$a>b, c>0\Rightarrow ac>bc$
有序域

*复数域



ℝ 是有序域
ℂ 不是有序域
复数集合 ℂ
实数域 ℝ 是子域
复数域 ℂ
域
0, 1 和四则运算
$0 + z = z + 0$
加法结合律
加法交换律
$1 \times z = z \times 1 = z$
乘法结合律
乘法交换律
乘法分配律
两两可比较大小
$a > b \Rightarrow a + c > b + c$
$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$
有序域

*复数域



$\mathbb{R}$ 是有序域
$\mathbb{C}$ 不是有序域
复数集合 $\mathbb{C}$
实数域 $\mathbb{R}$ 是子域
复数域 $\mathbb{C}$
域
$0, 1$ 和四则运算
$0 + z = z + 0$
加法结合律
加法交换律
$1 \times z = z \times 1 = z$
乘法结合律
乘法交换律
乘法分配律
两两可比较大小
$a > b \Rightarrow a + c > b + c$
$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$
有序域
如果 $i > 0$，则 $-1 = i \cdot i > 0$，$-i = -1 \cdot i > 0$，$0 > i$，矛盾!
类似地，$i < 0$ 也不可能.

共轭复数

定义

称 $\overline{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

共轭复数

定义

称 $\overline{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

性质

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \bullet z_2} = \overline{z_1} \bullet \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

共轭复数

定义

称 $\bar{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

性质

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \bullet z_2} = \overline{z_1} \bullet \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- z 是 $\bar{z}$ 的共轭复数.

定义

称 $\overline{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

性质

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \bullet z_2} = \overline{z_1} \bullet \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
- $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$.

共轭复数

定义

称 $\overline{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

性质

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \bullet z_2} = \overline{z_1} \bullet \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
- $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$.
- z 是实数当且仅当 $z = \overline{z}$.
- z 是纯虚数当且仅当 $z = -\overline{z}$ 且 $z \neq 0$.

例题: 复数的实部和虚部

- 由于 $z\overline{z}$ 是一个实数,

例题: 复数的实部和虚部

- 由于 $z\overline{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$$

将其转化为乘法.

例题: 复数的实部和虚部

- 由于 $z\overline{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$$

将其转化为乘法.

- 例 设 $z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 以及 $z \bullet \overline{z}$.

例题: 复数的实部和虚部

- 由于 $z\bar{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$$

将其转化为乘法.

- **例** 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 以及 $z\bullet\bar{z}$.
- **解** $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-\frac{i}{i\bullet i}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$

例题: 复数的实部和虚部

- 由于 $z\overline{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$$

将其转化为乘法.

- **例** 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 以及 $z\bullet\overline{z}$.

- **解** $z=-\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}=-\dfrac{i}{i\bullet i}-\dfrac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$,

- 因此 $\operatorname{Re} z=\frac{3}{2}$, $\operatorname{Im} z=-\frac{1}{2}$, $z\bullet\overline{z}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$.

例题: 复数的共轭复数

- 例 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$，求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

- 例 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.
- 解 $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2}$$

- 例 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$，求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

- 解 $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2}$$
$$= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,$$

例题: 复数的共轭复数

- 例 设 $z_1 = 5-5i, z_2 = -3+4i$，求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

- 解 $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2}$$
$$= \frac{(-15-20)+(-20+15)i}{25} = -\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i,$$

- 因此

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5}+\frac{1}{5}i.$$

典型例题：利用共轭复数证明等式

- 例 证明 $z_1 \bullet \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \bullet z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bullet \overline{z}_2)$.

典型例题：利用共轭复数证明等式

- 例 证明 $z_1 \bullet \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \bullet z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bullet \overline{z}_2)$.
- 解 由 $\overline{z_1 \bullet \overline{z}_2} = \overline{z}_1 \bullet z_2$ 得

$$z_1 \bullet \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \bullet z_2 = z_1 \bullet \overline{z}_2 + \overline{z_1 \bullet \overline{z}_2} = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bullet \overline{z}_2).$$

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- 例 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- 例 设 $z=x+yi$ 且 $y\neq 0,\pm 1$. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.
- 解 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}$$

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- 例 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

- 解 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

- 即 $z\left(1+\bar{z}^2\right) = \bar{z}(1+z^2)$, $(z-\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0$.

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- 例 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.
- 解 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

- 即 $z\left(1+\bar{z}^2\right) = \bar{z}(1+z^2)$, $(z-\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0$.
- 由于 $y \neq 0$, 因此 $z \neq \bar{z}$.

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- **例** 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.
- **解** $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

- 即 $z\left(1+\bar{z}^2\right) = \bar{z}(1+z^2)$，$(z-\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0$.
- 由于 $y \neq 0$，因此 $z \neq \bar{z}$.
- 故 $z\bar{z} = 1$，即 $x^2 + y^2 = 1$.

*复数的其它构造

- 复数也有其它的构造方式,

*复数的其它构造

- 复数也有其它的构造方式, 例如

$$\mathbb{C}=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}: x, y \in \mathbb{R}\right\}=\{xE+yJ: x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

其中 $E=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$.

*复数的其它构造

- 复数也有其它的构造方式, 例如
$$\mathbb{C}=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}: x, y \in \mathbb{R}\right\}=\{xE+yJ: x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$$
其中 $E=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$.
- 此时自然地有加法、乘法、取逆等运算, 它和我们前面的定义没有本质差别.