习题课

- 习题4-1

- (A)1.(1) 错误, 例如 $f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 在 $[-1,1]$ 上有间断点 $x=0$, 在 $(-1,1)$ 内有不可导点 $x=0$, 但 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}$.

- (2) 正确, 在 $[a,b]$ 上可导意味着在 $[a,b]$ 上连续, 由拉格朗日中值定理可得.

- (3) 错误, 例如 $f(x)=x$.

- (4) 正确.

- 2. 当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 时，$\sin x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$，因此 $f(x)$ 有定义.
- 由于它是初等函数，因此它在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上连续.
- 由于 $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 内可导.
- 因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\ln 2$，因此 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上满足罗尔中值定理的条件.
- 由 $f'(\xi) = \cot \xi = 0$ 得 $\xi = \frac{\pi}{2}$.

- 3. 因为 $f'(x) = 2px + q$, 所以由

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = p(b + a) + q$$

- 可得 $\xi = \frac{a+b}{2}$.
- 4. 显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且可导.
- 因为 $f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0$, 所以由罗尔中值定理, $\exists \xi_1 \in (0,1), \xi_2 \in (1,2), \xi_3 \in (2,3)$ 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$.
- 因为 $f(x)$ 是 4 次多项式, 所以 $f'(x)$ 是 3 次多项式. 因此 $f'(x) = 0$ 最多有 3 个根, 即 ξ_1, ξ_2, ξ_3 这三个根.

- 5. 设 $f(x) = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^n}{n+1}$, 则 $f(x)$ 连续且可导.
- 因为 $f(0) = f(1) = 0$, 所以由罗尔中值定理, $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $f'(\xi) = 0$, 即

$$a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \cdots + a_n \xi^n = 0.$$

- 6. 设 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$, 则 $f(x)$ 连续且可导.
- 如果存在 $x_1 < x_2 \in (0,1)$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 则由罗尔中值定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.
- 但是 $f'(x) = 3x^2 - 4x = 3x\left(x - \frac{4}{3}\right)$, 当 $x \in (0,1)$ 时, $f'(x) < 0$, 得出矛盾. 所以原命题成立.

- (B)1. (A)(C)(D)错误, 因为 $f(x)$ 未必在 $[a,b]$ 上连续.
- (B) 即 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 这是正确的.
- 3. 对 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 和 $[x_2,x_3]$ 上应用罗尔中值定理, $\exists\xi_1\in(x_1,x_2),\xi_2\in(x_2,x_3)$ 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.
- 由于 $f(x)$ 二阶可导, 因此 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔中值定理条件, $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$ 使得 $f''(\xi)=0$.
- 5. 对带 η 的项为 $e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=F'(\eta)$, 其中 $F(x)=e^{x}f(x)$. 我们对其应用拉格朗日插值定理.

- 设 $F(x)=e^x f(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导. 由拉格朗日中值定理, $\exists\eta\in(a,b)$ 使得

$$F'(\eta)=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=\frac{e^b-e^a}{b-a}.$$

- 对 $g(x)=e^x$ 在 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理, $\exists\xi\in(a,b)$ 使得

$$g'(\xi)=e^{\xi}=\frac{e^b-e^a}{b-a}.$$

- 因此 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

- 习题4-2
- (A)1.(1) 错误，不符合洛必达法则的使用条件.
- 例如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+2x}{1+x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{1}=2.$
- (2) 错误，如果相应函数不可导或者 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 极限不存在，不能用洛必达法则.
- (3) 错误.
- 2.(1) 该极限为 $\frac{0}{0}$ 型不定式，故

$$\text{原极限} \overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{-2x}}{\cos x}=3.$$

- (2) 该极限为 $\frac{0}{0}$ 型不定式，故

$$\text{原极限} \overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-3\tan 3x}{-\tan x} \overset{\text{等价无穷小代换}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-9x}{-x} = 9.$$

- (3) 该极限为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式，故

$$\text{原极限} \overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\tan 3x}\cdot\frac{3}{\cos^2 3x}}{\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{3\sin 2x}{2\tan 3x} \overset{\text{等价无穷小代换}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{6x}{6x} = 1.$$

- (4) 原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\overset{\text{等价无穷小代换}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}$.
- 该极限为 $\frac{0}{0}$ 型不定式，故

$$\text{原极限}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\text{等价无穷小代换}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

- (5) 原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2}.$
- 该极限为 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式，故

$$\text{原极限}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{2x}$$

$$\overset{\text{等价无穷小代换}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x}=0.$$

- (6) 该极限为 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 故

$$\text{原极限} \overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}}\left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$$

$$= e\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(x+1)} \quad \frac{0}{0}\text{型不定式}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=} e\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(1+x)}{3x^2+2x}$$

$$\overset{\text{等价无穷小代换}}{=} e\lim_{x\to 0}\frac{-x}{3x^2+2x} = -\frac{e}{2}.$$

- (7) 原极限 $= \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x^2}}{x^2} \overset{t=x^2}{=} \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}$ $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式

$\overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty.$

- (9) 原极限 $=\exp\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}-2}{2}\right)x\right)$ $0\cdot\infty$型不定式

$$=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{a^x+b^x-2}{2x}\right)$$ $\dfrac{0}{0}$型不定式

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=}\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{2}\right)$$

$$=\exp\left[\ln\left(\sqrt{ab}\right)\right]=\sqrt{ab}.$$

- 3. 由于 $x \to \infty$ 时，$\frac{1}{x}$ 是无穷小，而 $\cos x$ 是有界函数，所以 $\frac{\cos x}{x}$ 是无穷小，因此

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=1.$$

- 由于

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\cos x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}(1-\sin x)$$

- 不存在，因此不能用洛必达法则.

- (B)1.(1) 该极限为 1^{∞} 型不定式，故

$$\text{原极限} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{2x}\right) \overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=} \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) = \sqrt{2}.$$

- (2) 该极限为 $\frac{0}{0}$ 型不定式，故

$$\text{原极限} \overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$$\overset{\text{等价无穷小代换}}{=\!=\!=} \lim_{x\to 0}\frac{-1}{3(1+x^2)} + \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

- 2. (1) 原极限 $\overset{\text{等价无穷小代换}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x^3}$ $\dfrac{0}{0}$型不定式

$\overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{1}{\cos^2 x}}{3x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\tan^2 x}{3x^2}$

$\overset{\text{等价无穷小代换}}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^2}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}.$

- (3) 原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x-\sin x}{x\sin x}$

等价无穷小代换 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x-\sin x}{x^2}=1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2}$ $\dfrac{0}{0}$型不定式

洛必达法则 $1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x}$ 等价无穷小代换 $1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=1.$

- (6) 该极限为 $\frac{0}{0}$ 型不定式，故

$$\text{原极限} \xlongequal{\text{等价无穷小代换}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}(x-\ln(1+\tan x))}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{2x^2}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{4x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x+\sin x\cos x-1}{4x(1+\tan x)\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-\sin x)}{4x}$$

$$\xlongequal{\text{等价无穷小代换}} \lim_{x\to 0}\frac{x(1-0)}{4x}=\frac{1}{4}.$$

- 3. $f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)\dfrac{1}{x}\right)$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right) \quad \frac{0}{0}\text{型不定式}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=} \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2(1+x)}\right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}} = f(0^-) = f(0),$$

- 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

- 4.(1) 由于

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0),$$

- 因此 $a = f'(0)$.
- (2) 当 $x \neq 0$ 时，$g'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$.
- 当 $x = 0$ 时，

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x} = \frac{1}{2}f''(0).$$

- 故 $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0.\end{cases}$
- (3) 由于

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)+f'(x)-f'(x)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}f''(x)=\frac{1}{2}f''(0)=g'(0),$$

- 因此 $g'(x)$ 处处连续.

- 习题4-3
- (A)1.(1) 正确, 因为 $(x-x_0)^k$ 的系数必定是 $a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$.
- (2) 错误, 尽管余项是 $o((x-x_0)^n)$, 但却不一定能随着 $n\to\infty$ 而趋于 0.
- 例如 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\end{cases}$ 则 $f^{(k)}(0)=0$, 从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶泰勒多项式总是 0, 无论如何提高 n 也不能缩小误差.
- (3) 正确, 因为若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f^{(2k)}(x)$ 也是奇函数, 从而 $f^{(2k)}(0)=0$. 偶函数同理.

- 2. 设 $f(x)=2x^3+5x^2-4x+1$, 则 $f(1)=4$,

$$f'(x)=-4+10x+6x^2, f'(1)=12,$$
$$f''(x)=10+12x, f''(1)=22,$$
$$f'''(x)=12, f'''(1)=12,$$

- 因此

$$P(x)=4+12(x-1)+\frac{22}{2!}(x-1)^2+\frac{12}{3!}(x-1)^3$$
$$=4+12(x+1)+11(x+1)^2+2(x+1)^3.$$

- 3. 因为 $f(0)=0$,

$$f'(x)=\ln(1+x)+1,\quad f'(0)=1,$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1},\quad f''(0)=1,$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2},\quad f'''(0)=-1,\quad f^{(4)}(x)=\frac{2}{(x+1)^3},$$

- 所以 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的 3 阶麦克劳林公式为

$$f(x)=x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12(\xi+1)^3}x^4,\quad x\in(-1,+\infty),$$

- ξ 位于 0 和 x 之间.

- 4. 因为 $f(0)=0$,

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x},\quad f'(0)=1,$$

$$f''(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x},\quad f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{6\sin^2 x}{\cos^4 x},\quad f'''(0)=2,$$

- 所以 $f(x)=\tan x$ 的带皮亚诺余项的 3 阶麦克劳林公式为

$$f(x)=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3),\quad x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

- 5. 因为

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

- 所以 $f(x)=\cos x$ 在点 $x=\frac{\pi}{4}$ 处带皮亚诺余项的 3 阶泰勒公式为

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right).$$

- 5. 由于 $x \to 0$ 时,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

- 因此

$$\text{原极限} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \frac{13}{24}x^4}{x^4} = \infty.$$

- (B)1. 该极限为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式, 故

$$\text{原极限} = \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}} = -1+\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}} = -1.$$

- 2. 由

$$0 = \lim_{x\to0}\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\sin 6x - 6x}{x^3} + \lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$

- 得

$$\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2} = -\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x - 6x}{x^3} = 216\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^3} = \frac{216}{6} = 36.$$

- 3.(1) 由于 $x \to 0$ 时,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4),$$

- 因此

$$\text{原极限} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{12}.$$

- (2) 由于 $x \to 0$ 时,

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \frac{x^2}{2}(\ln a)^2 + o(x^2),$$

- 因此

$$\text{原极限} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x(\ln 3 - \ln 2) + \frac{x^2}{2}[(\ln 3)^2 - (\ln 2)^2]}{x^2} - \frac{\ln 3 - \ln 2}{x}\right]$$

$$= \frac{(\ln 3)^2 - (\ln 2)^2}{2}.$$

- 5. $\exists \eta_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \eta_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 使得

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) + \frac{f'(0)}{2} + \frac{f''(\eta_1)}{8} = \frac{f''(\eta_1)}{8},$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) + f'(1)\left(\frac{1}{2} - 1\right) + \frac{f''(\eta_2)}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 = 1 + \frac{f''(\eta_2)}{8},$$

- 两式相减, 得到 $f''(\eta_1) - f''(\eta_2) = 8.$
- 当 $|f''(\eta_1)| \geqslant |f''(\eta_2)|$ 时, 令 $\xi = \eta_1$; 当 $|f''(\eta_1)| < |f''(\eta_2)|$ 时, 令 $\xi = \eta_2$, 则

$$8 = |f''(\eta_2) - f''(\eta_1)| \leqslant |f''(\eta_1)| + |f''(\eta_2)| \leqslant 2|f''(\xi)|,$$

- 即 $|f''(\xi)| \geqslant 4.$

- 习题4-4
- (A)1.(1) 错误, $f'(x)$ 可以为零, 例如 $f(x) = -x^3$.
- (2) 错误, $f'(x)$ 可以小于零, 例如 $f(x) = x^2, x < 0$.
- (3) 错误, 可以为不可导点, 例如 $f(x) = |x|$.
- (4) 错误, 同上.
- (5) 错误, 极值只是局部性质.
- (6) 错误, 例如 $f(x) = x$.

- 2.(1) $y' = 3x^2 - 3 = 0$ 得驻点 $x = \pm 1$.
- 当 $x \in (1, +\infty)$ 或 $(-\infty, -1)$ 时 $y' > 0$; 当 $x \in (-1,1)$ 时 $y' < 0$.
- 因此单增区间为 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$.
- (2) $y' = 2x - \frac{1}{x} = 0$ 得驻点 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(x > 0)$.
- 当 $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 时 $y' > 0$; 当 $x \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时 $y' < 0$.
- 因此单减区间为 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

- (3) $y' = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = 0$ 得驻点 $x = \frac{3}{4}$.
- 由 $f(-1) = \sqrt{2} - 1, f(1) = 1, f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$ 可知 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上最大值为 $\frac{5}{4}$, 最小值为 $\sqrt{2} - 1$.
- 3.(1) $y' = \frac{1}{2} - \sin x = 0$ 得驻点 $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.
- 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ 或 $\left(\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right)$ 时 $y' > 0$; 当 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 时 $y' < 0$.
- 因此单增区间为 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ 和 $\left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]$, 单减区间为 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

- (2) $y' =- 4xe^{-x^2} + 2x =- 4x\left(e^{-x^2} - \frac{1}{2}\right) = 0$ 得驻点 $x = 0, \pm\sqrt{\ln 2}$.
- 当 $x \in (-\infty, -\sqrt{\ln 2})$ 或 $(0, \sqrt{\ln 2})$ 时 $y' < 0$; 当 $x \in (-\sqrt{\ln 2}, 0)$ 或 $(\sqrt{\ln 2}, +\infty)$ 时 $y' > 0$.
- 因此单增区间为 $[-\sqrt{\ln 2}, 0]$ 和 $[\sqrt{\ln 2}, +\infty)$, 单减区间为 $(-\infty, -\sqrt{\ln 2}]$ 和 $[0, \sqrt{\ln 2}]$.

- 4. 设 $f(x)=x^3-6x^2+9x-10$, 则由

$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

- 得驻点 $x=1,3.$
- 当 $x\in(-\infty,1)$ 或 $(3,+\infty)$ 时 $y'>0$; 当 $x\in(1,3)$ 时 $y'<0.$
- 因此 $f(x)$ 的单增区间为 $(-\infty,1]$ 和 $[3,+\infty)$, 单减区间为 $[1,3]$.
- 由于 $f(1)=-6<0, f(3)=-10<0$, 所以 $x\leqslant 3$ 时 $f(x)<0$, 且 $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上最多由一个根.
- 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, 所以 $f(x)$ 在 $(3,+\infty)$ 上有根. 故 $f(x)$ 只有一个实根.

- 5. 由

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1) = 0$$

- 得驻点 $x = 0, \pm 1$.
- 由于

$$y'' = 12x^2 - 4, \quad y''(0) = -4 < 0, \quad y''(\pm 1) = 8 > 0,$$

- 因此 $x = 0$ 是极大值点, 极大值为 $y(0) = 2$.
- $x = \pm 1$ 是极小值点, 极小值为 $y(\pm 1) = 1$.

- 6(1). 由 $y' = -\sin x - \sin 2x = -\sin x\,(1 + 2\cos x) = 0$ 得驻点 $x = \pi,\ \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$.
- 由于

$$y'' = -\cos x - 2\cos 2x,\quad y''(\pi) = -1 < 0,$$

$$y''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = y''\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} > 0,$$

- 因此 $x = \pi$ 是极大值点，极大值为 $y(\pi) = -\frac{1}{2}$.
- $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ 是极小值点，极小值为 $y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = y\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{3}{4}$.

- (2). 由

$$y' = e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x} + (x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{x(x+1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}}{1+x^2} = 0$$

- 得驻点 $x = 0, -1.$
- 当 $x \in (-\infty, -1)$ 或 $(0, +\infty)$ 时 $y'(x) > 0$; 当 $x \in (-1,0)$ 时 $y'(x) < 0.$
- 因此 $x = -1$ 是极大值点, 极大值为 $y(-1) = -2e^{\frac{\pi}{4}}.$
- $x = 0$ 是极小值点, 极小值为 $y(0) = -e^{\frac{\pi}{2}}.$

- 7. 我们有 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.
- 于是 $f(1) = 1 + a + b = -2, f'(1) = 3 + 2a + b = 0$.
- 解得 $a = 0, b = -3$.
- 由 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ 得驻点 $x = \pm 1$.
- 由 $f''(x) = 6x, f''(-1) = -6 < 0, f''(1) = 6 > 0$ 可知 $x = -1$ 是极大值点, 极大值为 $f(-1) = 2$; $x = 1$ 是极小值点, 极小值为 $f(1) = -2$.

- 8. 设该直线的斜率为 $-k<0$, 则直线方程为

$$y=-k(x-x_0)+y_0.$$

- 令 $x=0$ 得到 $y=kx_0+y_0$. 令 $y=0$ 得到 $x=x_0+\frac{y_0}{k}$.
- 于是三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}(kx_0+y_0)\left(x_0+\frac{y_0}{k}\right)=\frac{1}{2}\left(x_0^2k+2x_0y_0+\frac{y_0^2}{k}\right).$$

- 由 $\frac{dS}{dk}=\frac{1}{2}\left(x_0^2-\frac{y_0^2}{k^2}\right)=0$ 得驻点 $k=\frac{y_0}{x_0}$.
- 此时 S 取得最小值, 直线方程为 $y=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)+y_0$, 即 $\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}=2$.

- (B)1.(1) 错误, 例如 $f(x)=x^2,[a,b]=[-1,0]$.
- (2) 错误, $f(x)$ 可以不连续, 例如狄利克雷函数.
- 如果 $f(x)$ 连续且不单调, 则它一定有极值点.
- (3) 错误, 例如 $f(x)=x^2, g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2, & x\leqslant 0,\\ -2x^2, & x>0.\end{cases}$
- (4) 错误, 也可能在区间端点取得.
- (5) 正确, 由定义可得.

- 2.(1) $n+1$ 个，由端点和这些驻点划分得到.
- (2) $f'(x_0)=0, f''(x_0)\geqslant 0$.
- (3) $f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$.
- 由 $f^{(n+1)}(x)=0$ 得到 $f^{(n)}(x)$ 的驻点 $x=-n-1$.
- 由 $f^{(n+2)}(-n-1)=e^{-n-1}>0$ 可知它是极小值点，极小值为 $f^{(n)}(-n-1)=-e^{-n-1}$.

- 3.(1) 不妨设 $f'(x_0) > 0 > g'(x_0)$.
- 于是在 x_0 的一个邻域 $U(x_0, \delta)$ 内, $f'(x) > 0 > g'(x)$, $f(x)$ 单增而 $g(x)$ 单减.
- 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f(x) < 0, g(x) > 0, (fg)' = f'g + fg' > 0$.
- 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f(x) > 0, g(x) < 0, (fg)' = f'g + fg' < 0$.
- 显然 $(fg)'(x_0) = 0$, 因此 x_0 是 fg 的驻点且是极大值点, 选D.
- (2) $x \to 0$ 时, $f(x) \sim \frac{1}{2}x^2$. 因此 $f(0) = 0, f'(0) = 0$.
- 由极限的保号性, $x \to 0$ 时 $f(x) > 0$. 因此 0 是极小值, 选B.

- 4. 我们有

$$f'(x)=\left(1+x+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-x}-\left(1+x+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}=-\frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

- 由 $f'(x)=0$ 得驻点 $x=0$.
- 若 n 为偶数, $f'(x)\leqslant 0$, 此时无极值.
- 若 n 为奇数, $f'(x)$ 在 0 附近左正右负, 此时 $x=0$ 是极大值点, 极值为 $f(0)=1$.

- 5. 我们有 $y = |(x-1)(x-2)|$, 因此 $x = 1,2$ 是不可导点.
- 当 $x > 2$ 或 $x < 1$ 时, $y = x^2 - 3x + 2, y' = 2x - 3 = 0$ 无解.
- 当 $1 < x < 2$ 时, $y = -x^2 + 3x - 2, y' = -2x + 3 = 0$ 得到驻点 $x = \frac{3}{2}$.
- 由

$$f(-10) = 132,\quad f(10) = 72,\quad f(1) = f(2) = 0,\quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

- 可知最大值为 132, 最小值为 0.

- 7. 设 $M\left(x, \frac{1}{1+x^2}\right)$, 则过 M 点的切线的斜率为 $y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.
- 过 M 点的切线与 x 轴的夹角为 $\arctan|y'| = \arctan\frac{2|x|}{(1+x^2)^2}$.
- 设 $f(x) = \frac{2|x|}{(1+x^2)^2}$. 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, f'(x) = \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^2}$.
- 因此 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ 上单增, 在 $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ 上单减, 从而最小值点为 $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- 由于 $f(x)$ 是偶函数, 因此 $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ 也是最小值点. 故 $M = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$.

- 8. 设 $\varphi = 2\pi x$, 则该漏斗的底面圆周长为 $\varphi R = 2\pi R x$, 半径为 $\frac{\varphi R}{2\pi} = Rx$.
- 漏斗的高为 $\sqrt{R^2 - (Rx)^2} = R\sqrt{1 - x^2}$, 因此漏斗的容积为

$$V = \frac{1}{3}\pi (Rx)^2 R\sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{3}\pi R^3 x^2\sqrt{1 - x^2},$$

$$\frac{dV^2}{dx} = \frac{1}{3}\pi R^3 (x^4 - x^6)' = \frac{1}{3}\pi R^3 (4x^3 - 6x^5) = 0$$

- 得到驻点 $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
- 由实际意义可知该点为最大值点, 此时 $\varphi = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3}$.

- 习题4-5
- (A)1.(1) 错误, 例如 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geqslant 0,\\ x^2, & x<0\end{cases}$ 拐点和最小值点.
- (2) 错误, 同上.

- (2) $y'' = (x+2)e^x$. 当 $x < -2$ 时 $y'' < 0$, 因此在 $(-\infty, -2]$ 上是凸的, 拐点为 $(-2, -2e^{-2})$.
- (3) $y' = 2xe^{x^2}, y'' = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = (2+4x^2)e^{x^2} > 0$, 因此在 $(-\infty, +\infty)$ 上是凹的.
- 3.(1) $y'' = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{15}{4}\sqrt{x} > 0$.
- 因此凹区间为 $[0, +\infty)$, 无凸区间和拐点.

- (2) $y'' = \cos x$.
- 设 k 为整数. 当 $x \in \left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 时 $y'' > 0$, 因此在 $\left[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ 上是凹的.
- 当 $x \in \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$ 时 $y'' < 0$, 因此在 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}\right]$ 上是凸的.
- 拐点为 $\left(k\pi + \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, k 为整数.

- (3) $y'' = 6x + 6.$
- 当 $x > -1$ 时 $y'' > 0$, 因此在 $[-1, +\infty)$ 上是凹的.
- 当 $x < -1$ 时 $y'' < 0$, 因此在 $(-\infty, -1]$ 上是凸的.
- 拐点为 $(-1,7)$.

- 3. $y' = 3ax^2 + 2bx + c, y'' = 6ax + 2b.$
- 由题设可知

$$y(0) = d = 3,\quad y(1) = a + b + c + d = 1,\quad y''(1) = 6a + 2b = 0,$$

$$y'(2) = 12a + 4b + c = 0.$$

- 解得 $a = 1, b = -3, c = 0, d = 3.$

- (B)1.(1) 错误, 必须对任意不同的 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 均有相应的不等式成立方可.
- (2) 错误, 只能对 $\lambda \in (0,1)$ 满足.
- 2.(1) 是凹的, 所以是 $<$.
- (2) $f''(x) \equiv 0, f'(x) \equiv C, [f(x) - Cx]' \equiv 0, f(x) = Cx + C_1$, 直线..
- 3. 令 $x = 0$, 则 $f''(0) = 0$. 由方程可知 $f'''(x)$ 存在且

$$f'''(x) = \left[x - \left(f'(x)\right)^2\right]' = 1 - 2f'(x)f''(x).$$

- 于是 $f'''(0) = 1 > 0$. 因此 $f''(x)$ 在 0 附近单增, 从而在 0 附近两侧异号.
- 故 $(0, f(0))$ 是拐点, 选 C.

- 4.(1) $y' = \dfrac{3x^2(x^2+12)-2x^4}{(x^2+12)^2} = \dfrac{x^4+36x^2}{(x^2+12)^2}$,

$$y'' = \frac{(4x^3+72x)(x^2+12)-2(x^4+36x^2)2x}{(x^2+12)^3} = \frac{24(36-x^2)x}{(x^2+12)^3}.$$

- 当 $x>6$ 或 $-6<x<0$ 时 $y''<0$; 当 $x<-6$ 或 $0<x<6$ 时 $y''>0$.
- 因此凸区间为 $[-6,0]$ 和 $[6,+\infty)$, 凹区间为 $(-\infty,-6]$ 和 $[0,6]$, 拐点为 $\pm\left(6,\frac{9}{2}\right)$ 和 $(0,0)$.

- (2) $y' = 2x\ln x + x,\ y'' = 2 + 2\ln x + 1 = 3 + 2\ln x$.
- 当 $x > e^{-\frac{3}{2}}$ 时 $y'' > 0$; 当 $x < e^{-\frac{3}{2}}$ 时 $y'' < 0$.
- 因此凹区间为 $\left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$, 凸区间为 $\left(-\infty, e^{-\frac{3}{2}}\right]$, 拐点为 $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2}e^{-3}\right)$.

- 3. $y=k(x^4-6x^2+9), y'=k(4x^3-12x), y''=k(12x^2-12).$
- 当 $x>1$ 时 $y''>0$; 当 $x<1$ 时 $y''<0.$
- 因此拐点为 $(\pm 1, 4k).$
- 若拐点 $(1,4k)$ 处的法线经过原点, 则法线的斜率为

$$\frac{4k}{1}=-\frac{1}{y'(1)}=\frac{1}{8k}, \quad k=\pm\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

- 拐点 $(-1,4k)$ 处情形类似.

- 4. $2yy' = f'(x), 2y'^2 + 2yy'' = f''(x).$
- 若 $(\xi, y(\xi))$ 是拐点, 则 $y''(\xi) = 0$,

$$2y'(\xi)^2 = f''(\xi),\quad 2y(\xi)y'(\xi) = f'(\xi).$$

- 因此

$$[f'(\xi)]^2 = 4y(\xi)^2 y'(\xi)^2 = 2y(\xi)^2 f''(\xi) = 2f(\xi)f''(\xi).$$

- 习题4-6
- (A)1.(1) 正确.
- (2) 正确.
- 2.(1) $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}=\dfrac{1}{5}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\sin x+\frac{2}{5}\cos x}{5x-2\cos x}=\dfrac{1}{5}$.
- 水平渐近线为 $y=\frac{1}{5}$.

- (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)=1,$

  $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\arcsin\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\arcsin 2t}{t}=2.$
- 斜渐近线为 $y=x+2.$
- 3. 当 $x\to\pm\infty$ 时，只有 C 满足 $\lim(y-x)=0$. 选 C.

- 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x^2-x-2)}=1,$

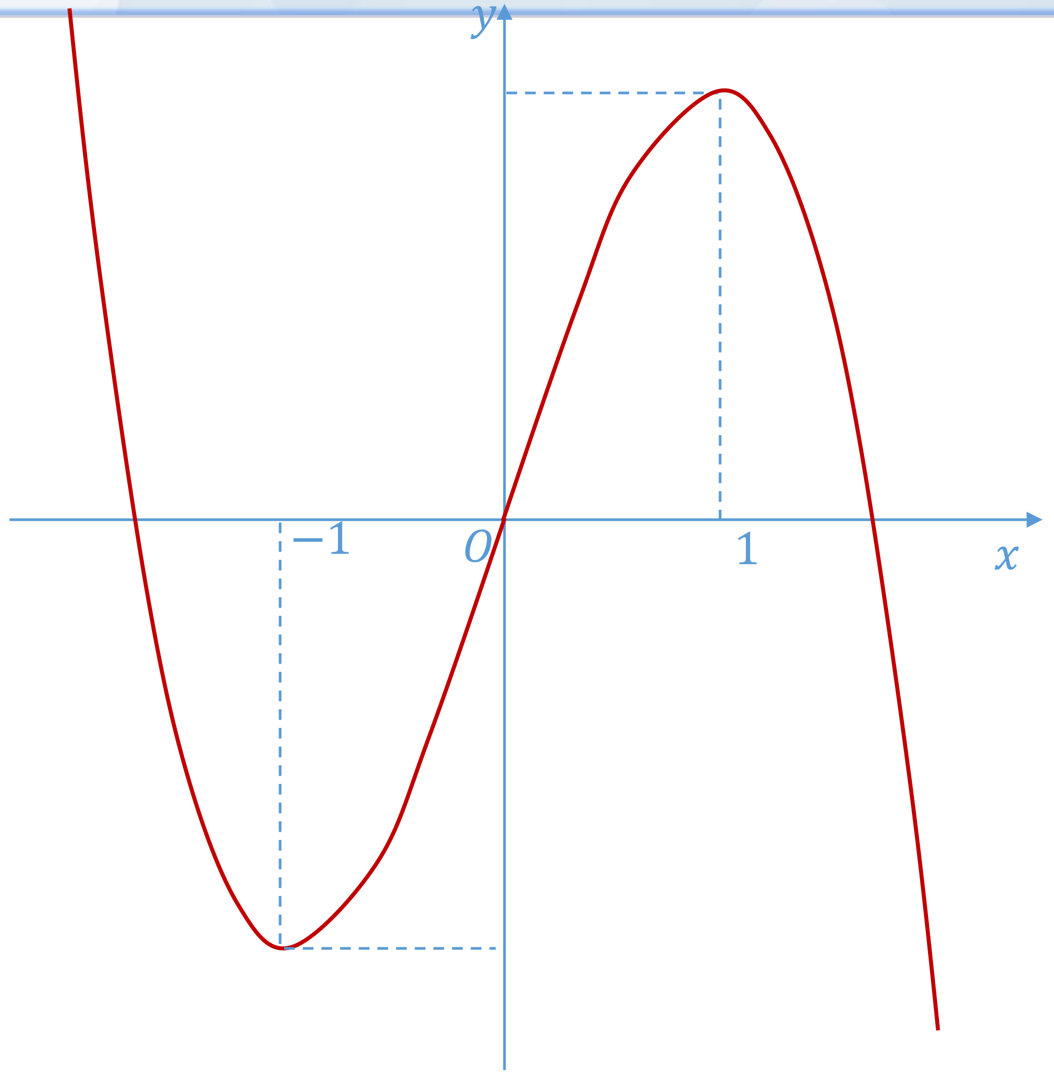
  $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2-x-2}=1,$

- 因此它没有水平渐近线, 斜渐近线为 $y=x+1$.
- $x=-1,2$ 是它的无穷间断点, 因此 $x=-1$ 和 $x=2$ 是它的垂直渐近线.

- 5.(1) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.
- $y'=3-3x^2$ 的零点为 $x=-1,1$, $y''=-6x$ 的零点为 $x=0$. 于是

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
曲线	↘	极小值点 $(-1,-2)$	↗	↗	↗	极大值点 $(1,2)$	↘

- y 是奇函数, $y(\pm\sqrt{3})=0$.


y
−1
O
1
x

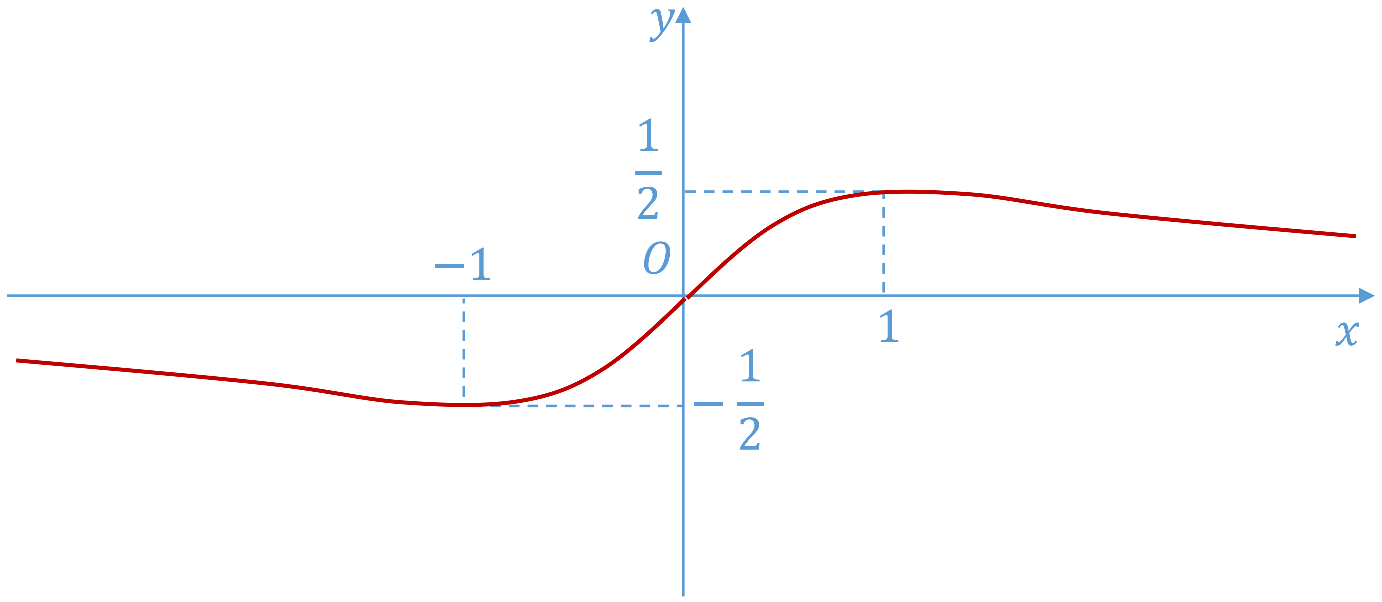
- (2) 函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

- $y'=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ 的零点为 $x=-1,1$, $y''=\dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$ 的零点为 $x=0,\pm\sqrt{3}$.

- 由于 y 是奇函数，我们只描述 $[0,+\infty)$ 部分.

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
曲线	拐点 $(0,0)$	$\nearrow$	极大值点 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

- 曲线有水平渐近线 $y=0$.


y
1
2
O
−1
1
x
−
1
2

- (B)1.(1) 错误, 有可能在 $x=a,b$ 处有.
- (2) 错误, 只有至少一侧极限是无穷的间断点才对应垂直渐近线.
- 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{\arctan(1+x^2)}{x}\right)=1,$

$$\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)\right)=\frac{\pi}{2}.$$

- 所以斜渐近线为 $y=x+\frac{\pi}{2}$.

- 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=1,$

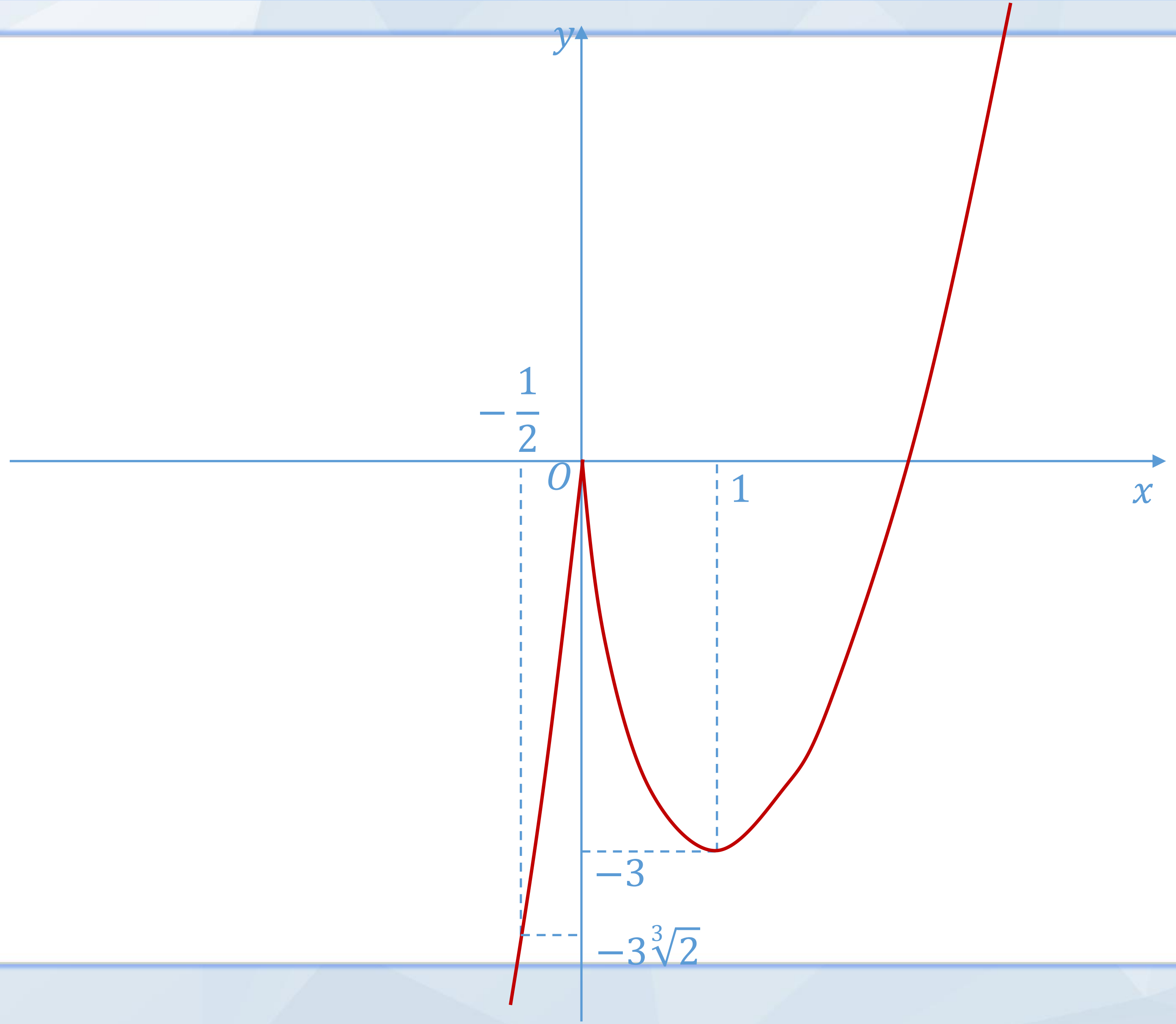
$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)=\ln 1=0.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}y=\ln 1=0.$$

- 所以有水平渐近线 $y=0$ 和斜渐近线为 $y=x$.
- $\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}+\ln 2=\infty$, 所以有垂直渐近线 $x=0$, 一共3条, 选D.

- 4. 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.
- $y' = \frac{10}{3}(x-1)x^{-\frac{1}{3}}$ 的零点为 $x=1$，$y'' = \frac{10}{9}(2x+1)x^{-\frac{4}{3}}$ 的零点为 $x=-\frac{1}{2}$.

x	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$+$	$+$	$+$	不存在	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
曲线	$\nearrow$	拐点 $\left(-\frac{1}{2},-3\sqrt[3]{2}\right)$	$\nearrow$	极大值点 $(0,0)$	$\searrow$	极小值点 $(1,-3)$	$\nearrow$


y
$-\frac{1}{2}$
O
1
x
-3
$-3\sqrt[3]{2}$

- 5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x(x^2-x-2)}=1,$

  $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x}{x^2-x-2}=1,$
- 因此它没有水平渐近线, 斜渐近线为 $y=x+1.$
- $x=-1,2$ 是它的无穷间断点, 因此 $x=-1$ 和 $x=2$ 是它的垂直渐近线.

- 习题4-7
- (A)1. 设 $y=\arctan x+\frac{1}{x}$, 则 $y'=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2(x^2+1)}<0.$
- 因此 y 单减.
- 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$, 因此 $y>\frac{\pi}{2}$.
- 2. 即 $a\ln(x+a)<(x+a)\ln a$. 设 $f(x)=(x+a)\ln a-a\ln(x+a)$, 则

$$f'(x)=\ln a-\frac{a}{x+a}>\ln e-1=0\quad(x>0).$$

- 因此 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单增. 当 $x>0$ 时, $f(x)>f(0)=0$.

- 3. 设 $f(x)=x^2$, 则 $f'(x)=2x$.
- 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 即

$$2\xi=\frac{b^2-a^2}{b-a}.$$

- 由于 $b-a>0, 2a<2\xi<2b$, 因此 $2a(b-a)<b^2-a^2<2b(b-a)$.

- 4. 设 $f(x)=\ln(1+x)$, 则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}$.
- 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(0,x)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, 即

$$\frac{1}{\xi+1}=\frac{\ln(1+x)}{x}.$$

- 由于 $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{\xi+1}<1$, 因此 $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$.

- 5. 设 $f(x)=e^x$, 则由泰勒中值定理, 存在 ξ 位于 0 和 x 之间, 使得

$$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{f^{(4)}(\xi)}{12}x^4.$$

- 由于 $f^{(4)}(\xi)=e^{\xi}>0, x^4>0$, 因此 $f(x)>1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$.

- 6. 设 $f(x)=\sin x$, 则 $f''(x)=-\sin x<0, x\in(0,\pi)$.
- 因此曲线 $y=f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上是凸的.
- 由于 $\frac{x}{2}=\frac{x}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\cdot 0$, 因此当 $x\in(0,\pi)$ 时,

$$\sin\frac{x}{2}=f\left(\frac{x}{2}\right)>\frac{x}{\pi}f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left(1-\frac{x}{\pi}\right)f(0)=\frac{x}{\pi}.$$

- (B)1. 设 $f(x)=1+x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$, 则

$$f'(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+x\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$$

- 当 $x>0$ 时, $f'(x)>f'(0)=0$.
- 由于 $f'(x)$ 是奇函数, 因此 $x<0$ 时, $f'(x)<0$.
- 所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$.

- 3. 设 $h(x)=f(x)-g(x)$. 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(0,x)$ 使得

$$h''(\xi)=\frac{h'(x)-h'(0)}{x-0}.$$

- 由于 $h''(\xi)=f''(\xi)-g''(\xi)>0$, 因此

$$h'(x)>h'(0)=f'(0)-g'(0)=0.$$

- 由拉格朗日中值定理, 存在 $\eta\in(0,x)$ 使得

$$h'(\eta)=\frac{h(x)-h(0)}{x-0}.$$

- 由于 $h'(\eta)>0$, 因此 $h(x)>h(0)=f(0)-g(0)=0$.

- 4. 设 $g(x) = [\varphi(x) - \varphi(x_0)] - [f(x) - f(x_0)]$, 则 $g(x_0) = 0$.
- 当 $x > x_0$ 时, 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (x_0, x)$ 使得

$$g'(\xi) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x)}{x - x_0}.$$

- 由于 $g'(\xi) = \varphi'(\xi) - f'(\xi) \geqslant 0$, 因此 $g(x) = (x - x_0)g'(\xi) \geqslant 0$, 即

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geqslant f(x) - f(x_0).$$

- 由于将 $f(x)$ 换成 $-f(x)$ 该结论的条件仍然成立, 因此

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geqslant -[f(x) - f(x_0)].$$

- 故 $\varphi(x) - \varphi(x_0) \geqslant |f(x) - f(x_0)|$.

- 5. 设 $f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x$, 则 $f'(x)=x^{p-1}-1$.
- 当 $x>1$ 时, $f'(x)>0$; 当 $x<1$ 时, $f'(x)<0$.
- 因此 $f(x)\geqslant f(0)=0$, 即 $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x$.

- 习题4-8

- 1. 设 $g(x)=f'(x)+3f''(x)+f'''(x)$, 其中 $f(x)=(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^k$, 则我们有

$$n(1+x)^{n-1}+3n(n-1)(1+x)^{n-2}+n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k[kx^{k-1}+3k(k-1)x^{k-2}+k(k-1)(k-2)x^{k-3}].$$

- 令 $x=1$, 得

$$\sum_{k=1}^{n}k^3\mathrm{C}_n^k=n\cdot 2^{n-1}+3n(n-1)2^{n-2}+n(n-1)(n-2)2^{n-3}$$

$$=n^2(n+3)2^{n-3}.$$

- 2. 设两船距离在时间 t (单位: h)为

$$f(t)=\sqrt{(30t)^2+(40t)^2}=50t,$$

- 因此距离增加的速度为 $f'(t)=50\ \mathrm{km/h}$.
- 3. 此设漏斗中液面高度为 h, 圆筒高度为 y, 则

$$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot6^2\cdot18-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2h=\pi\cdot5^2y,$$

- 于是 $y=\frac{1}{25\cdot27}(18^3-h^3)$.
- 由于 $h=12$ 时, $h'=-1$, 因此此时

$$y'|_{h=12}=\frac{1}{25\cdot27}(-3\cdot12^2)\cdot(-1)=\frac{16}{25}=0.64\ \mathrm{cm/min}.$$

- 总复习题

- 1.(1) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin kx^2}}=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin kx^2}\right)=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{kx^2}\right)$

$=e^{-\frac{1}{2k}}=e, k=-\dfrac{1}{2}.$

- (2) $y'=2^x+x\ln 2\cdot 2^x=2^x(1+x\ln 2).$

- 最小值点为 $x=-\dfrac{1}{\ln 2}.$

- (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)=1.$

- $\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{ex}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{ex}=\frac{1}{e}.$

- 因此斜渐近线为 $y=x+\frac{1}{e}.$

- (4) $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3t^2+3}{3t^2-3}=1+\dfrac{2}{t^2-1},$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{-\dfrac{4t}{(t^2-1)^2}}{3t^2-3}=-\frac{4t}{3(t^2-1)^3}<0$$

- 得 $t\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$, 因此凸的范围为 $[-1,0]$ 和 $[1,+\infty)$.

- (5) $y' = 2x + \frac{2}{x}, y'' = 2 - \frac{2}{x^2} = 0$ 得拐点 $x = 1, y = 1, y'(1) = 4.$
- 切线方程为 $y = 4x - 3.$
- 2. (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\dfrac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{kx^{k-3}(1+x^2)}.$
- 若该极限非零, 则 $k = 3, c = \frac{1}{3}$, 选 D.
- (2) 不一定, 因为 $(fg)''(a) = f''(a)g(a) + f(a)g''(a)$ 符号不清楚.
- 例如 $f(x) = \pm\, 1 - x^2, g(x) = \pm\, 1 - x^2.$

- (3) 由极限保号性，在 $x=0$ 附近 $f''(x)>0$，所以 $x=0$ 处不是拐点.
- 同时，$f'(x)$ 在 0 附近单增，因此 $f(x)$ 在 0 附近左减右增，是极小值，选B.
- (4) 由中值定理，$f(1)-f(0)=f'(\xi),\xi\in(0,1)$.
- 由于 $f'(x)$ 单增，$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$，选 B.
- (5) A 不一定，书上有例子. B 不一定，可能不可导.
- C 若 $f(a)$ 为最小值，$f(b)$ 为最大值，则 $f'_+(a)\geqslant 0, f'_-(b)\geqslant 0$.
- 若 $f(a)$ 为最大值，$f(b)$ 为最小值，则 $f'_+(a)\leqslant 0, f'_-(b)\leqslant 0$.
- D 例如函数图像类似字母M. 因此选 C.

- (6) AB 错误, $f(x) \geqslant f(a)$. 所以选 D.
- (7) $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1]$ 上单增, 在 $[x_1, x_3]$ 单减, 在 $[x_3, +\infty)$ 单增, 因此有两个极值点.
- $f'(x)$ 在 x_2, x_5 两侧左减右增, x_4 两侧左增右减, 共3个拐点, 选 B.
- 3. 设 $h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$, 则 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 内可导, 且

$$h(b) - h(a) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)] - [g(b) - g(a)] \cdot [f(b) - f(a)] = 0.$$

- 由罗尔中值定理, $h'(x)$ 在 (a, b) 内有零点.

- 4. (1) 由极限定义, 存在 $b > 0$ 使得 $|f(b) - 2| < 1$, $f(b) > 1$.
- 由介值定理, 存在 $a \in (0, b)$ 使得 $f(a) = 1$.
- (2) 由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (0, a)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{1}{a}.$$

- 5. 由于 $F(1)=F(2)=0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\eta\in(1,2)$ 使得 $F'(\eta)=0$.
- 由于 $F'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续, 在 $(1,2)$ 内可导, 且 $F'(1)=f(1)=0$, 由罗尔中值定理, 存在 $\xi\in(1,\eta)$ 使得 $F''(\xi)=0$.
- 6. 设 $|f'(x)|<M$. 由拉格朗日中值定理, 存在 ξ 位于 x_1 和 x_2 之间, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},$$

- 因此 $\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|=|f'(\xi)|\leqslant M, |f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|$.

- 7. 由介值定理，存在 $a \in (0,1)$ 使得 $f(a)=\frac{1}{2}$.
- 由拉格朗日中值定理，存在 $\xi \in (0,a), \eta \in (a,1)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{1}{2a},$$

$$f'(\eta)=\frac{f(1)-f(a)}{1-a}=\frac{1}{2(1-a)}.$$

- 于是 $\frac{1}{f'(\xi)}+\frac{1}{f'(\eta)}=2a+2(1-a)=2.$

- 8. 和习题4-7(B)4 类似.
- 9. 由泰勒中值定理, 存在 $\eta_1 \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right), \eta_2 \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ 使得

$$f(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta_1)}{2}\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$$f(b) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{f''(\eta_2)}{2}\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$

- 两式相加得到

$$f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)=\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}.$$

- 由介值定理，存在 $\xi\in[\eta_1,\eta_2]$ 使得 $f''(\xi)=\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}$，证毕.

- 10.(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}=\exp\left(\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{2}{\pi}\arctan x-1\right)\right)$

$$\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\exp\left(\lim_{t\to0^{+}}\frac{\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{t}-1}{t}\right)$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=}\exp\left(\lim_{t\to0^{+}}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+t^{-2}}\cdot\left(-\frac{1}{t^{2}}\right)\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{t\to0^{+}}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{-1}{1+t^{2}}\right)=\exp\left(-\frac{2}{\pi}\right)=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

或者令 $t=\frac{2}{\pi}\arctan x-1, x=\tan\frac{\pi(t+1)}{2}=-\cot\frac{\pi t}{2}$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}=\lim_{t\to 0^-}(1+t)^{-\cot\frac{\pi t}{2}}$$

$$=\exp\left(\lim_{t\to 0^-}\frac{t}{-\tan\frac{\pi t}{2}}\right)$$

等价无穷小代换 $\exp\left(\lim_{t\to 0^-}\frac{t}{-\frac{\pi t}{2}}\right)=\exp\left(-\frac{2}{\pi}\right)=e^{-\frac{2}{\pi}}.$

- (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^x(1+\ln x)}{-1+\dfrac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x^x(1+\ln x)}{1-x}$$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{-x^x(1+\ln x)^2-x^x\cdot\dfrac{1}{x}}{-1}=2.$$

- (3) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(1 - x\sin\frac{1}{x}\right) \overset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{t\to 0}\frac{1-\frac{\sin t}{t}}{t^2} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}$

$$\overset{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}$$

$$\overset{\text{等价无穷小代换}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}t^2}{3t^2} = \frac{1}{6}.$$

- (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin x^4}$

等价无穷小代换 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$

洛必达法则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos(\sin x)\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}$

等价无穷小代换 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}(\sin x)^2}{3x^2}$ 等价无穷小代换 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}.$

- (5) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\frac{1}{e^x-1}\right)$

等价无穷小代换 $\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\frac{1}{x}\right)=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right)$

洛必达法则 $\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}\right)=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)}\right)=e^{-\frac{1}{2}}.$

- 11. $1=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1+(ax-1)e^{x}}{x}$

洛必达法则 $\lim_{x\to 0}\left[ae^{x}+(ax-1)e^{x}\right]=a-1,$

- 所以 $a=2.$

- 12. $f'(x) = a\cos x + \cos 3x$.
- 由题设, $0 = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a}{2} - 1$, 所以 $a = 2$.
- 此时 $f''(x) = -2\sin x - 3\sin 3x$, $f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} < 0$, 因此是极大值 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

- 13. $3y^2y' + y^2 + 2xyy' + 2xy + x^2y' = 0,\ y' = -\frac{y^2+2xy}{3y^2+2xy+x^2}$.
- 因此 y 处处可导, 它的极值点一定是驻点.
- 显然 $y \neq 0$. 设 $y' = 0$, 则 $y + 2x = 0, y = -2x$.
- 代入 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 中得到 $x^3 = 1, x = 1$. 此时 $y(1) = -2$.
- 对 $(y^2 + 2xy) + (3y^2 + 2xy + x^2)y' = 0$ 两边求导并代入 $x = 1, y(1) = -2, y'(1) = 0$ 得到 $y''(1) = \frac{4}{9} > 0$.
- 因此 $y(1) = -2$ 是极小值.

- 14. $f_n{}'(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x]$.
- 令 $f_n{}'(x) = 0$ 得到驻点 $x = \frac{1}{n+1}$.
- 由 $f_n(0) = f_n(1) = 0, f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$ 可知

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f_n(x) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \exp\left[\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}-1\right)(n+1)\right] = \frac{1}{e}.$$

- 15. 设 $P(a\cos t, b\sin t), t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- 对方程两边求导得到 $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0, y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$.
- 因此 P 点处的切线斜率为 $y'|_P = -\frac{b^2 a\cos t}{a^2 b\sin t} = -\frac{b\cot t}{a}$方程为

$$y - b\sin t = -\frac{b\cot t}{a}(x - a\cos t).$$

- 分别令 x 和 y 为零，得到三角形面积为

$$S = \frac{1}{2}(b\cot t\cos t + b\sin t)\left(\frac{a\sin t}{\cot t} + a\cos t\right) = \frac{ab}{\sin 2t}.$$

- 当 $t = \frac{\pi}{4}, P = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 时，S 最小，为 $S_{\min} = ab$.

- 16.(1) 利润为

$$y = x(p-t) - C = -0.2x^2 + (4-t)x - 1.$$

- 由 $y' = -0.4x + 4 - t = 0$ 得到驻点 $x = \frac{4-t}{0.4} = 10 - \frac{5}{2}t$. 此时利润最大.
- (2) 政府税收为

$$s = xt = \frac{5}{2}t(4-t).$$

- 由 $s' = \frac{5}{2}(4-2t) = 0$ 得到驻点 $t = 2$. 此时政府税收最大.

- 17. 设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.
- 当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)>0$, 因此 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单增.
- 由于 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时, $0<\sin x<\cos x<1$, 所以

$$f(\sin x)=\frac{\ln\sin x}{\sin x}<f(\cos x)=\frac{\ln\cos x}{\cos x}.$$

- 化简可得 $(\sin x)^{\cos x}<(\cos x)^{\sin x}$.

- 18. 设 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x$, 则

$$f'(x)=x\cos x-\sin x+\pi,\quad f''(x)=-x\sin x.$$

- 当 $x\in[0,\pi]$ 时, $f''(x)\leqslant 0$, 因此 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单减,

$$f'(x)\geqslant f'(\pi)=0.$$

- 因此 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单减, 从而

$$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\sin a+\pi a.$$

- 19. 当 $0 < |x| < \pi$ 时, 我们有 $|f(x)| \leqslant |\sin x|$, 因此
- $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \leqslant \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant 1.$
- 由 $f'(0) = a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ 可知 $|f'(0)| \leqslant 1$, 即

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leqslant 1.$$

- 20. 我们只证明凹的情形, 凸的情形类似.
- 由题设可知 $f''(x) \geq 0$. 由泰勒中值定理, 存在 ξ 位于 x_0 和 x 之间使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2$$

$$\geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- 21. 由 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=1$ 可知

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=2,\quad f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=1.$$

- 设 $x>1$. 由泰勒中值定理, 存在 $\xi\in(1,x)$ 使得

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2$$

$$=x+1+\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2>x+1.$$