



合肥工业大学  
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

# 复变函数与积分变换

---

张神星

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

[zhangshenxing@hfut.edu.cn](mailto:zhangshenxing@hfut.edu.cn)

# 课程安排

本课程共 10 周 40 课时, 自 2022 年 9 月 30 日至 2022 年 11 月 3 日. 课程 QQ 群为 (入群答案 1400261B)

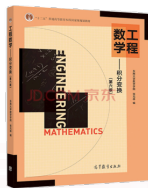
- 009 班 (电信工) **476993411**
- 010 班 (光信息和智感工) **672903188**

教材为

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》

成绩构成:

- 作业 15%, 每章交一次
- 课堂测验 25%, 一共 3 次, 取最高的两次
- 期末报告 10%
- 期末考试 50%, 至少 45 分才计算总评



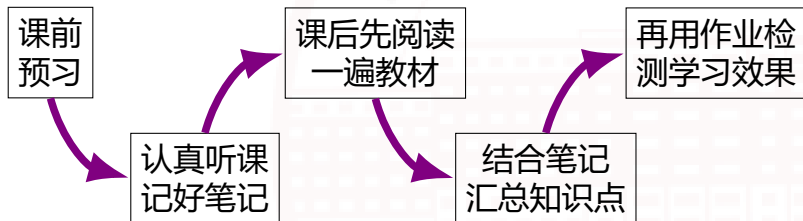
复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统.....
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学.....
- 信息学、电子学、电气工程.....

可以说复变函数应用之广, 在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.

本课程主要研究下述问题:

- 什么是复数? 为什么要引入复数?
- 复变量函数和实变量函数有什么差异?
- 我们应该研究哪一类复变量函数?
- 复变函数的微积分理论是怎样的? 这也包括级数和留数理论.
- 如何用傅里叶/拉普拉斯变换解微分方程?



# 第一章 复数与复变函数

# 本章作业

- **1, 5, 8(1)(3)**
- **12(3), 13, 14(1)(3)**
- **21(4)(7), 22(5)(10), 27(2)**

- 1 复数及其代数运算
- 2 复数的三角与指数形式
- 3 复数的乘除、方幂与方根
- 4 曲线和区域
- 5 复变函数
- 6 极限和连续性

复数起源于多项式方程的求根问题.

考虑二次方程  $x^2 + bx + c = 0$ , 由求根公式可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

- 1 当  $\Delta > 0$  时, 有两个不同的实根;
- 2 当  $\Delta = 0$  时, 有一个二重的实根;
- 3 当  $\Delta < 0$  时, 无实根. 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根, 形式地计算可以发现它们满足原来的方程.



# 三次方程的根

对于三次方程  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , 通过变量替换  $x \mapsto x - \frac{a}{3}$  可将其二次项系数化为零. 因此可不妨设其方程为

$$x^3 - 3px - 2q = 0.$$

当  $p = 0$  时它的可解性和解容易得到. 我们不妨设  $p \neq 0$ . 此时我们有求根公式

$$x = u + \frac{p}{u}, \quad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = q^2 - p^3.$$

- 1 当  $\Delta > 0$  时, 有一个实根.
- 2 当  $\Delta = 0$  时, 有两个实根  $x = 2\sqrt[3]{q}, -\sqrt[3]{q}$  (2 重).
- 3 当  $\Delta < 0$  时, 看上去没有根, 实际上有 3 个实根. 这可以通过分析函数单调性得到. 但我们[必须接受负数开方](#).

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的  $1$  的平方根。

——莱布尼兹 (*Leibniz*)

# 三次方程的根

例

解方程  $x^3 + 6x - 20 = 0$ .

解.

此时  $p = -2, q = 10, \Delta = 108 > 0$ , 因此

$$u = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = 1 + \sqrt{3},$$

$$x = u - \frac{2}{u} = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2.$$

# 三次方程的根

例

解方程  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

解.

此时  $p = \frac{7}{3}, q = -3, \Delta = -\frac{100}{27} < 0$ , 因此

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$
$$x = u + \frac{7}{3u} = 2, -3, 1.$$

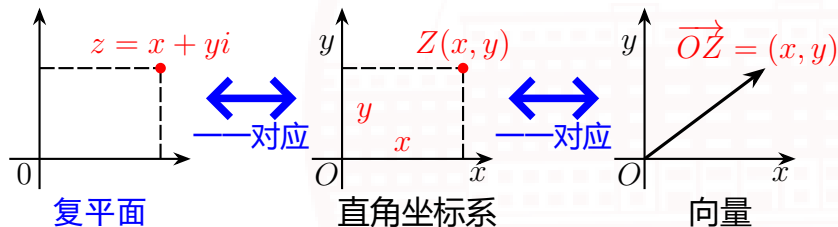
为什么  $\Delta < 0$  时从求根公式一定会得到三个实根? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答了.

## 定义

固定一个记号  $i$ , **复数**就是形如  $z = x + yi$  的元素, 其中  $x, y$  均是实数, 且不同的  $(x, y)$  对应不同的复数.

换言之, 复数全体构成一个二维实线性空间,  $\{1, i\}$  是一组基. 我们将**全体复数**记作  $\mathbb{C}$ , 全体实数记作  $\mathbb{R}$ , 则  $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$ .

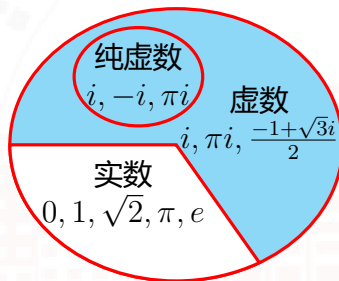
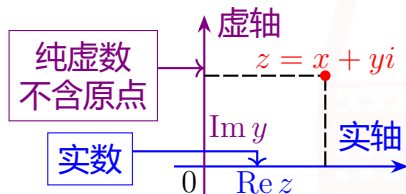
由于  $\mathbb{C}$  是一个二维实向量空间,  $1$  和  $i$  构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



## 实部和虚部, 虚数和纯虚数

当  $y = 0$  时,  $z = x$  就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的  $x$  轴上的点. 因此我们将直线  $y = 0$  称为**实轴**. 相应地, 直线  $x = 0$  被称为**虚轴**. 我们称  $z = x + yi$  在实轴和虚轴的投影为它的**实部**  $\operatorname{Re} z = x$  和**虚部**  $\operatorname{Im} z = y$ .

当  $\operatorname{Im} z = 0$  时,  $z$  是实数. 不是实数的复数是**虚数**. 当  $\operatorname{Re} z = 0$  且  $z \neq 0$  时, 称  $z$  是**纯虚数**.



全体复数

## 典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数  $x$  取何值时,  $(x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$  是: (1) 实数; (2) 纯虚数.

解.

(1)  $x^2 - 5x - 6 = 0$ , 即  $x = -1$  或  $6$ .

(2)  $x^2 - 3x - 4 = 0$ , 即  $x = -1$  或  $4$ . 但同时要求  $x^2 - 5x - 6 \neq 0$ , 因此  $x \neq -1$ ,  $x = 4$ .

练习

实数  $x$  取何值时,  $x^2(1 + i) + x(5 + 4i) + 4 + 3i$  是纯虚数.

答案.

$x = -4$ .

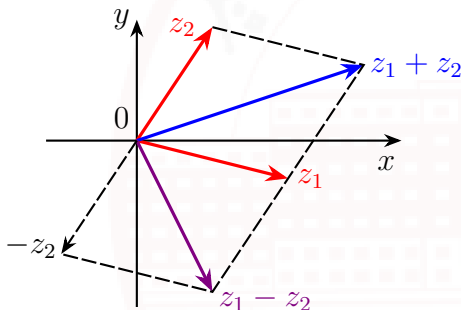
## 复数的加法与减法

设  $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$ . 由  $\mathbb{C}$  是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量  $\overrightarrow{OZ}$  的加减法是一致的.





**规定  $i \cdot i = -1$ .** 由线性空间的数乘和乘法分配律可得复数的乘除法:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

对于正整数  $n$ , 定义  $z$  的  $n$  次幂为  $n$  个  $z$  相乘. 当  $z \neq 0$  时, 还可以定义  $z^0 = 1, z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ .

## 例题: 常见复数的幂次

例

(1)  $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ . 一般地, 对于整数  $n$ ,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(2) 令  $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ , 则  $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$ .

我们把满足  $z^n = 1$  的复数  $z$  称为  $n$  次单位根. 那么  $1, i, -1, -i$  是 4 次单位根,  $1, \omega, \omega^2$  是 3 次单位根.

思考

$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$  是单位根吗? 如果是, 是几次单位根?

答案.

它是 8 次单位根.

## 例题: 解复数方程

例

解方程  $z^2 - 2(1 + i)z - 5 - 10i = 0$ .

解.

配方可得  $(z - 1 - i)^2 = 5 + 10i + (1 + i)^2 = 5 + 12i$ .

设  $(x + yi)^2 = 5 + 12i$ , 则

$$x^2 - y^2 = 5, \quad 2xy = 12, \quad y = \frac{6}{x},$$

$$x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5, \quad x^4 - 5x^2 - 36 = 0, \quad x^2 = 9,$$

故  $(x, y) = (3, 2)$  或  $(-3, -2)$ ,

$$z = 1 + i \pm (3 + 2i) = 4 + 3i \text{ 或 } -2 - i.$$

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含  $0, 1$ , 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意  $a$ ,  $a + 0 = a \times 1 = a$ .

有理数全体  $\mathbb{Q}$ , 实数全体  $\mathbb{R}$  也构成域, 它们是  $\mathbb{C}$  的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域. 也就是说, 对于任何一个非常数的复系数多项式

$$p(z) = z^n + \cdots + c_1 z + c_0, \quad n \geq 1,$$

都存在复数  $z_0$  使得  $p(z_0) = 0$ . 我们会在第五章证明该结论.

## 复数域不是有序域 \*

在  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的  $>$ :

- 若  $a \neq b$ , 则  $a > b$  或  $b > a$ ;
- 若  $a > b$ , 则对于任意  $c$ ,  $a + c > b + c$ ;
- 若  $a > b, c > 0$ , 则  $ac > bc$ .

而  $\mathbb{C}$  却不是有序域. 如果  $i > 0$ , 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

于是  $0 > i$ , 矛盾! 同理  $i < 0$  也不可能.

## 定义

称  $z$  在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\bar{z}$ . 换言之,  
 $\bar{z} = x - yi$ .

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

## 共轭复数性质汇总

- $z$  是  $\bar{z}$  的共轭复数.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ ,  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ ,  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ .
- $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ .
- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ ,  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$ .
- $z$  是实数当且仅当  $z = \bar{z}$ .
- $z$  是纯虚数当且仅当  $z = \bar{z}$  且  $z \neq 0$ .

## 例题：共轭复数判断实数

例


设  $z = x + yi$  且  $y \neq 0, \pm 1$ . 证明:  $x^2 + y^2 = 1$  当且仅当  $\frac{z}{1+z^2}$  是实数.

证明.

$\frac{z}{1+z^2}$  是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

即  $z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2), \quad (z-\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0.$

由于  $y \neq 0$ , 因此  $z \neq \bar{z}$ . 故上述等式等价于  $z\bar{z} = 1$ , 即  $x^2 + y^2 = 1$ . 

## 例题：共轭复数证明等式

例

证明  $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$ .

证明.

我们可以设  $z_1 = x_1 + y_1 i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2 i$ , 然后代入等式两边化简并比较得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

由于  $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$ , 因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$

由于  $z\overline{z}$  是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}$$

将其转化为乘法.



## 典型例题: 复数的代数计算

例

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}, \text{ 求 } \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \text{ 以及 } z\bar{z}.$$

解.

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad z\bar{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

## 典型例题: 复数的代数计算

例

设  $z_1 = 5 - 5i$ ,  $z_2 = -3 + 4i$ , 求  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ .

解.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

$$\text{因此 } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

## 典型例题: 复数的代数计算

练习

计算  $\operatorname{Re} \left( \frac{1 + 2i}{8 + i} \right)$ .

答案.

$$\frac{2}{13}.$$

复数也有其它的构造方式, 例如

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$$

其中  $E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ ,  $J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ .

此时自然地有加法、乘法 (满足交换律)、取逆等运算, 从而这个集合构成一个域. 由于  $J^2 = -E$ , 所以  $J$  实际上就相当于虚数单位, 这个域就是我们前面定义的复数域  $\mathbb{C}$ .

# 第一章 复数与复变函数

- 1 复数及其代数运算
- 2 复数的三角与指数形式
- 3 复数的乘除、方幂与方根
- 4 曲线和区域
- 5 复变函数
- 6 极限和连续性

# 复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以  $0$  为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



## 定义

- 称  $r$  为  $z$  的模, 记为  $|z| = r$ .
- 称  $\theta$  为  $z$  的辐角, 记为  $\text{Arg } z = \theta$ .  $0$  的辐角没有意义.

# 极坐标和直角坐标的对应

由极坐标和直角坐标的对应可知

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

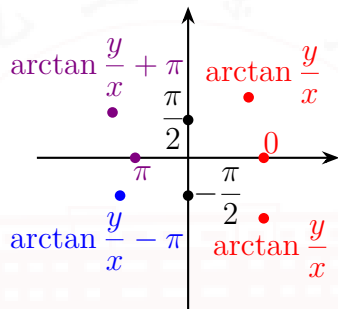
$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + (2k+1)\pi, & x < 0; \\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y < 0; \\ \text{任意/无意义}, & z = 0, \end{cases}$$

其中  $k \in \mathbb{Z}$ .

# 主辐角

任意  $z \neq 0$  的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于  $(-\pi, \pi]$  的那个, 并称之为**主辐角**, 记作  $\arg z$ .

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



$z$  是实数当且仅当  $\arg z = 0, \pi$  或  $z = 0$ .  $z$  是纯虚数当且仅当  $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$ .



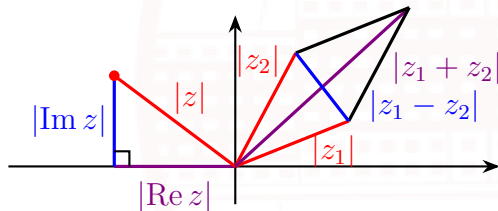
# 复数模的性质

复数的模满足如下性质:

## 模的性质汇总

- $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$ ;
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ ;
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ;
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ .

这些不等式均可以用三角不等式证明, 也可以用代数方法证明.



## 例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1)  $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;

(2)  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$ .

证明.

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ . 因此  $|z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

(2)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}). \end{aligned}$$

由  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  可得复数的三角形式

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

定义  $e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$  (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = r e^{i\theta} = r \exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

## 典型例题: 求复数的三角/指数形式

例

将  $z = -\sqrt{12} - 2i$  化成三角形式和指数形式.

解.

$r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$ . 由于  $z$  在第三象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z = 4 \left[ \cos \left( -\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{6} \right) \right] = 4 \exp \left( -\frac{5\pi i}{6} \right).$$

## 典型例题: 求复数的三角/指数形式

例

将  $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$  化成三角形式和指数形式.

解.

$$\begin{aligned} z &= \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} \\ &= \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) \\ &= \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = \exp \left( \frac{3\pi i}{10} \right). \end{aligned}$$

## 典型例题: 求复数的三角/指数形式

### 练习

将  $z = \sqrt{3} - 3i$  化成三角形式和指数形式.

### 答案.

$$z = 2\sqrt{3} \left[ \cos \left( \frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{3} \right) \right] = 2\sqrt{3} \exp \left( \frac{5\pi i}{3} \right).$$

求复数的三角或指数形式时, 我们只需要任取一个辐角就可以了, 不要求必须是主辐角.

### 例

将  $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$  化成三角形式和指数形式, 并求出它的主辐角, 其中  $0 < \alpha \leq \pi$ .

## 典型例题: 求复数的三角/指数形式

解.

$$|z|^2 = (1 - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 2 - 2 \cos \alpha = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

因此  $|z| = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ . 由于

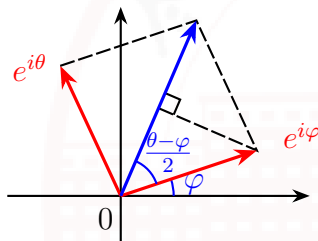
$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \cot \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\pi - \alpha}{2},$$

且  $\operatorname{Re} z = 1 - \cos \alpha > 0$ , 因此  $\arg z = \frac{\pi - \alpha}{2}$ ,

$$z = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\pi - \alpha}{2} + i \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} e^{\frac{(\pi - \alpha)i}{2}}.$$

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2 \cos \frac{\theta - \varphi}{2} \exp \left[ \frac{i(\theta + \varphi)}{2} \right].$$





# 第一章 复数与复变函数

- 1 复数及其代数运算
- 2 复数的三角与指数形式
- 3 复数的乘除、方幂与方根**
- 4 曲线和区域
- 5 复变函数
- 6 极限和连续性

三角形式和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

## 定理

设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

关于多值函数的等式的含义是指: 两边所能取到的值构成的集合相等. 例如此处关于辐角的等式的含义是:

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

$$\operatorname{Arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \{\theta_1 - \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

注意上述等式中  $\text{Arg}$  不能换成  $\arg$ , 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

**不一定成立.** 这是因为  $\arg z_1 \pm \arg z_2$  有可能不落在区间  $(-\pi, \pi]$  上. 例如

$$\begin{aligned} (-1 + i)(-1 + i) &= 2i, \\ \arg(-1 + i) + \arg(-1 + i) &= \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}, \\ \arg(-2i) &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

# 复数的乘除与三角/指数表示

证明.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \left[ (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \right. \\ &\quad \left. + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \right] \\ &= r_1 r_2 \left[ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \right] \end{aligned}$$

因此乘法情形得证.

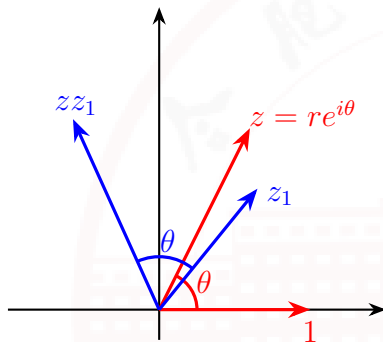
设  $\frac{z_1}{z_2} = r e^{i\theta}$ , 则由乘法情形可知

$$r r_2 = r_1, \quad \theta + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1.$$

因此  $r = \frac{r_1}{r_2}, \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi$ , 其中  $k \in \mathbb{Z}$ .

# 乘积的几何意义

从该定理可以看出, 乘以复数  $z = re^{i\theta}$  可以理解为模放大为  $r$  倍, 并按逆时针旋转角度  $\theta$ .



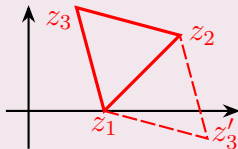
## 例题：复数解决平面几何问题

例

已知正三角形的两个顶点为  $z_1 = 1$  和  $z_2 = 2 + i$ , 求它的另一个顶点.

解.

由于  $\overrightarrow{z_1 z_3}$  为  $\overrightarrow{z_1 z_2}$  顺时针或逆时针旋转  $\frac{\pi}{3}$ ,



## 例题: 复数解决平面几何问题

续解.

因此

$$\begin{aligned} z_3 - z_1 &= (z_2 - z_1) \exp\left(\pm \frac{\pi i}{3}\right) = (1 + i) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i, \end{aligned}$$

$$z_3 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i.$$



设  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \neq 0$ . 根据复数三角形式的乘法和除法运算法则, 我们有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地, 当  $r = 1$  时, 我们得到棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \operatorname{Re} \left[ \sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k \cos^{n-k} \theta (i \sin \theta)^k \right] \\ &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} \cos^{n-2k} \theta (-\sin^2 \theta)^k \\ &= \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} C_n^{2k} \cos^{n-2k} \theta (\cos^2 \theta - 1)^k.\end{aligned}$$

因此  $\cos n\theta$  是  $\cos \theta$  的多项式. 这个多项式

$$g_n(T) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} C_n^{2k} T^{n-2k} (T^2 - 1)^k.$$

叫做切比雪夫多项式. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

## 典型例题: 复数乘幂的计算

例

求  $(1+i)^n + (1-i)^n$ .

解.

由于

$$1+i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad 1-i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

因此

$$\begin{aligned} & (1+i)^n + (1-i)^n \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}. \end{aligned}$$

## 典型例题: 复数乘幂的计算

练习

求  $(\sqrt{3} + i)^{2022}$ .

答案.

$-2^{2022}$ .

我们利用复数方幂公式来计算复数  $z$  的  $n$  次方根  $\sqrt[n]{z}$ . 设

$$w^n = z = r \exp(i\theta) \neq 0, \quad w = \rho \exp(i\varphi),$$

则

$$w^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r (\cos \theta + i \sin \theta).$$

比较两边的模可知  $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$ .

为了避免记号冲突, 当  $r$  是正实数时,  $\sqrt[n]{r}$  默认表示  $r$  的唯一的  $n$  次正实根, 称之为**算术根**. 由于  $n\varphi$  和  $\theta$  的正弦和余弦均相等, 因此存在整数  $k$  使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

故

$$\begin{aligned}w &= w_k = \sqrt[n]{r} \exp \frac{(\theta + 2k\pi)i}{n} \\&= \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right).\end{aligned}$$

不难看出,  $w_k = w_{k+n}$ , 而  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$  两两不同. 因此只需取  $k = 0, 1, \dots, n-1$ . 故任意一个非零复数的  $n$  次方根有  $n$  个值.

这些根的模都相等, 且  $w_k$  和  $w_{k+1}$  辐角相差  $\frac{2\pi}{n}$ . 因此它们是以原点为中心,  $\sqrt[n]{r}$  为半径的圆的正接  $n$  边形的顶点.

注意当  $|n| \geq 2$  时,  $\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg} z$  **不成立**. 这是因为

$$\text{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \text{Arg} z = n \arg z + 2nk\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

我们总有

$$\text{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Arg} z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## 典型例题: 复数方根的计算

例

求  $\sqrt[4]{1+i}$ .

解.

由于  $1+i = \sqrt{2} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$ , 因此

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2} \exp\left[\frac{\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i}{4}\right], \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

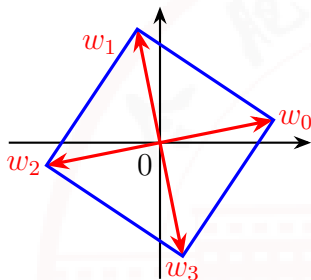
所以该方根所有值为

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[8]{2} \exp \frac{\pi i}{16}, & w_1 &= \sqrt[8]{2} \exp \frac{9\pi i}{16}, \\ w_2 &= \sqrt[8]{2} \exp \frac{17\pi i}{16}, & w_3 &= \sqrt[8]{2} \exp \frac{25\pi i}{16}. \end{aligned}$$



## 典型例题: 复数方根的计算

$w_0, w_1 = iw_0, w_2 = -w_0, w_3 = -iw_0$  形成了一个正方形.



## 典型例题: 复数方根的计算

练习

求  $\sqrt[6]{-1}$ .

答案.

$$\pm \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \pm i, \pm \frac{\sqrt{3} - i}{2}.$$

思考

$i = \sqrt{-1}$  吗?

答案.

$\sqrt{-1}$  是多值的, 此时  $\sqrt{-1} = \pm i$ . 除非给定单值分支  $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \exp\left(\frac{i \arg z}{2}\right)$ , 否则不能说  $\sqrt{-1} = i$ .

## 三次方程的求根问题 \*

现在我们来解三次方程  $x^3 - 3px - 2q = 0$  的根.

$$x = u + \frac{p}{u}, \quad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = q^2 - p^3.$$

**1** 如果  $\Delta > 0$ , 设  $\alpha = \sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}}$  是算术根. 则

$$x = \alpha + \frac{p}{\alpha}, \quad \alpha\omega + \frac{p}{\alpha}\omega^2, \quad \alpha\omega^2 + \frac{p}{\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

**2** 如果  $\Delta < 0$ , 则  $p > 0$ . 设  $\sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}} = u_1, u_2, u_3$ , 则  $u_i$  都是虚数, 且

$$|u_i|^6 = |q + \sqrt{\Delta}|^2 = p^3, \quad u_i \bar{u}_i = |u_i|^2 = p.$$

于是我们得到 3 个实根  $x = u_i + \bar{u}_i$ .

# 第一章 复数与复变函数

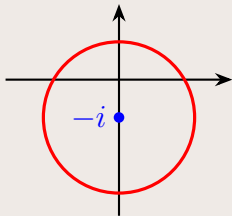
- 1 复数及其代数运算
- 2 复数的三角与指数形式
- 3 复数的乘除、方幂与方根
- 4 曲线和区域**
- 5 复变函数
- 6 极限和连续性

## 典型例题: 复数方程表平面图形

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解. 由于  $x = \frac{z + \bar{z}}{2i}$ ,  $y = \frac{z - \bar{z}}{2}$ , 因此很容易将  $x, y$  的方程和  $z$  的方程相互转化.

例

$|z + i| = 2$ . 该方程表示与  $-i$  的距离为 2 的点全体, 即圆心为  $-i$  半径为 2 的圆. 设  $z = x + yi$ , 则方程可以化为  $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ .

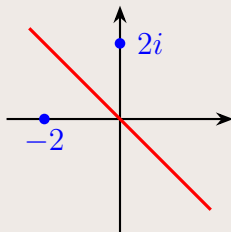


一般的圆方程为  $|z - z_0| = R$ , 其中  $z_0$  是圆心,  $R$  是半径.

## 典型例题: 复数方程表平面图形

### 例

$|z - 2i| = |z + 2|$ . 该方程表示与  $2i$  和  $-2$  的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得  $z + i\bar{z} = 0$  或  $x + y = 0$ .



## 典型例题: 复数方程表平面图形

### 例

- (3)  $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 4$ . 设  $z = x + yi$ , 则  $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 1 - y = 4$ , 因此  $y = -3$ .
- (4)  $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ . 该方程表示以  $z_1, z_2$  为焦点,  $a$  为长半轴的椭圆.
- (5)  $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$ . 该方程表示以  $z_1, z_2$  为焦点,  $a$  为实半轴的双曲线的一支.

### 练习

$z^2 + \bar{z}^2 = 1$  和  $z^2 - \bar{z}^2 = i$  表示什么图形?

答案.

双曲线  $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$  和双曲线  $xy = \frac{1}{4}$ .

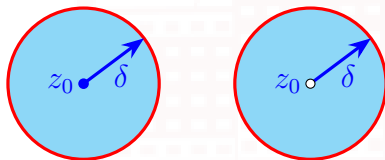
在高等数学中, 为了引入极限的概念, 需要考虑点的邻域. 类似地, 在复变函数中, 称开圆盘

$$U(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

为  $z_0$  的一个  $\delta$ -邻域, 称去心开圆盘

$$\overset{\circ}{U}(z_0, \delta) = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

为  $z_0$  的一个去心  $\delta$ -邻域.

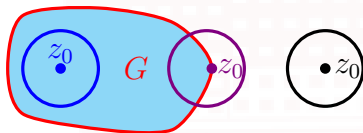




设  $G$  是复平面的一个子集,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . 它们的位置关系有三种可能:

- 1 如果存在  $z_0$  的一个邻域  $U$  完全包含在  $G$  中, 则称  $z_0$  是  $G$  的一个内点.
- 2 如果存在  $z_0$  的一个邻域  $U$  完全不包含在  $G$  中, 则称  $z_0$  是  $G$  的一个外点.
- 3 如果  $z_0$  的任何一个邻域  $U$ , 都有属于和不属于  $G$  的点, 则称  $z_0$  是  $G$  的一个边界点.

显然内点都属于  $G$ , 外点都不属于  $G$ , 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.



如果  $G$  的所有点都是内点, 也就是说,  $G$  的边界点都不属于它, 称  $G$  是一个**开集**. 例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果  $G$  的所有边界点都属于  $G$ , 称  $G$  是一个**闭集**. 这等价于它的补集是开集.

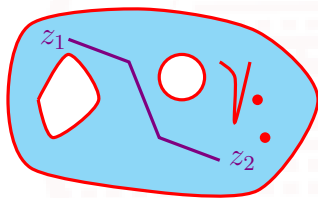
直观上看: 开集往往由  $>, <$  的不等式给出, 闭集往往由  $\geq, \leq$  的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果  $D$  可以被包含在某个开圆盘  $U(0, \delta)$  中, 则称它是**有**界的. 否则称它是**无**界的.

## 定义

如果开集  $D$  的任意两个点之间都可以用一条完全包含在  $D$  中的折线连接起来, 则称  $D$  是一个**区域**. 也就是说, 区域是连通的开集.

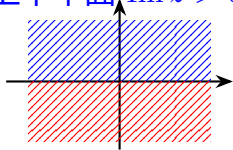
观察下侧的图案, 淡蓝色部分是一个区域. 红色的线条和点是它的边界. 区域和它的边界一起构成了**闭区域**, 记作  $\bar{D}$ . 它是一个闭集.



# 常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定. 这些区域对应的闭区域是什么?

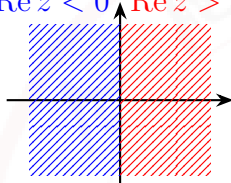
上半平面  $\text{Im } z > 0$



下半平面  $\text{Im } z < 0$

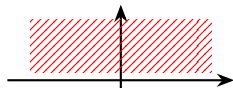
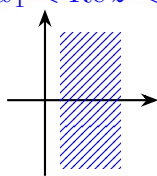
左半平面 右半平面

$\text{Re } z < 0$   $\text{Re } z > 0$



竖直带状区域

$x_1 < \text{Re } z < x_2$

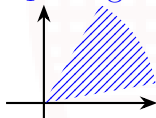


水平带状区域

$y_1 < \text{Im } z < y_2$

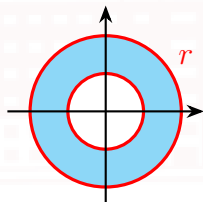
角状区域

$\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$



圆环域

$r < |z| < R$

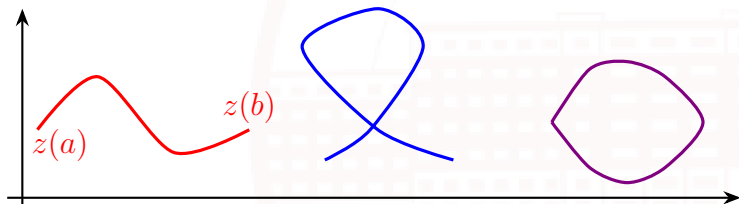


## 连续区间、简单曲线和闭路

设  $x(t), y(t), t \in [a, b]$  是两个连续函数, 则参变量方程

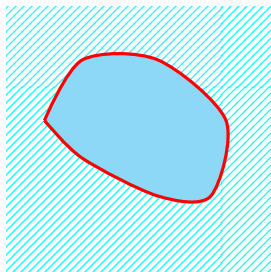
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b] \text{ 定义了一条连续曲线. 这也等价于}$$
$$C : z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b].$$

如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称  $C$  是简单曲线. 如果还满足两个端点重叠, 即  $z(a) = z(b)$ , 则称  $C$  是简单闭曲线, 也简称为闭路.



## 闭路的内部和外部

闭路  $C$  把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界. 分别称这两个区域是  $C$  的**内部**和**外部**.  $C$  是它们的公共边界.  
这件事情的严格证明是十分困难的.



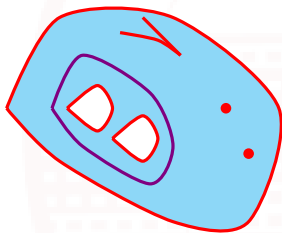
## 单连通域和多连通域

在前面所说的几个区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外, 闭路的内部仍然包含在这个区域内.

### 定义

如果区域  $D$  中的任一闭路的内部都包含在  $D$  中, 则称  $D$  是**单连通域**. 否则称之为**多连通域**.

单连通域内的任一闭路可以连续地变形成一个点.

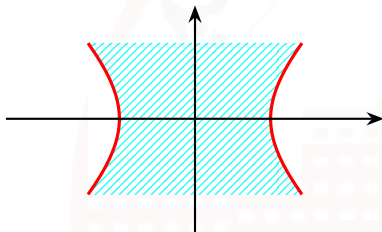


## 例题: 区域的特性

例

$$\operatorname{Re}(z^2) < 1.$$

设  $z = x + yi$ , 则  $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$ . 这是无界的单连通域.



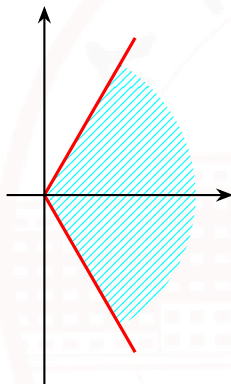


## 例题：区域的特性

例

$$|\arg z| < \frac{\pi}{3}.$$

即角状区域  $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}$ . 这是无界的单连通域.

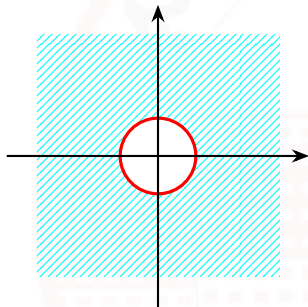


## 例题：区域的特性

例

$$\left| \frac{1}{z} \right| < 3.$$

即  $|z| > \frac{1}{3}$ . 这是无界的单连通域.

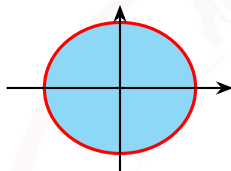


## 例题: 区域的特性

例

$$|z + 1| + |z - 1| < 4.$$

表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.



思考

$|z + 1| + |z - 1| \geq 1$  表示什么区域?

答案.

整个复平面.

# 第一章 复数与复变函数

- 1 复数及其代数运算
- 2 复数的三角与指数形式
- 3 复数的乘除、方幂与方根
- 4 曲线和区域
- 5 复变函数**
- 6 极限和连续性

**复变函数**就是复数集合  $G \subseteq \mathbb{C}$  上的一个映射  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ . 换言之, 对于每一个  $z \in G$ , 有一个唯一确定的复数  $w = f(z)$  与之对应. 例如  $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \arg z, |z|, z^n$  都是复变函数.

$f$  的**定义域**是指  $G$ , **值域**是指  $\{w = f(z) : z \in G\}$ .

如果  $z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2)$ , 则称  $f$  是**单射**.

不过在复变函数中, 我们常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个  $z \in G$  可能有多个  $w$  与之对应. 例如  $\operatorname{Arg} z$ ,  $\sqrt[n]{z}$  等. 如果对每一个定义域范围内的  $z$ , 选取固定的一个  $f(z)$  的值, 则我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数: 对于任意点  $w \in$ , 存在一个或多个  $z \in G$  使得  $w = f(z)$ . 这样  $w$  到  $z$  的就定义了  $f$  的反函数  $f^{-1}$ . 如果  $f$  和  $f^{-1}$  都是单值的, 则称  $f$  是——对应. 若无特别声明, 复变函数总是指单值的复变函数.

每一个复变函数  $w = f(z) = u + iv$  等价于给了两个二元实变函数

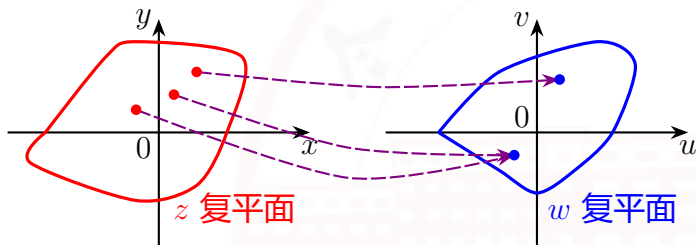
$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

例如

$$\begin{aligned} w = z^2 &= (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy, \\ u(x, y) &= x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy. \end{aligned}$$

其实我们也可以把  $f(z)$  看成一个二元实变量复值函数.

在实变函数中, 我们常常用函数图像直观来理解和研究函数. 在复变函数中, 我们可以用两个复平面 ( $z$  复平面和  $w$  复平面) 之间的映射 (称之为**映照**) 来表示这种对应关系.





## 例题：映照

### 例

函数  $w = \bar{z}$ . 如果把  $z$  复平面和  $w$  复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于  $z$  轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域.

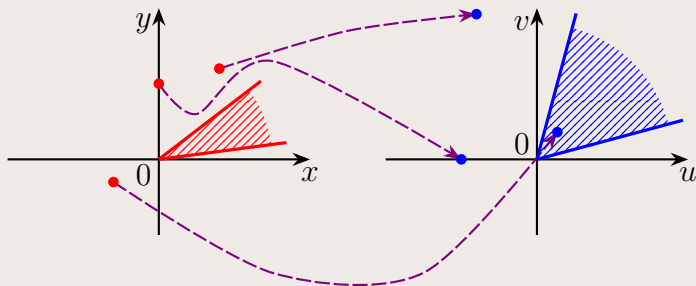
### 例

函数  $w = az$ . 设  $a = re^{i\theta}$ , 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转  $\theta$ ) 和一个相似映照 (放大为  $r$  倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.

## 例题：映照

例

函数  $w = z^2$ . 这个映照把  $z$  的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



这个映射对应两个实变函数  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ .

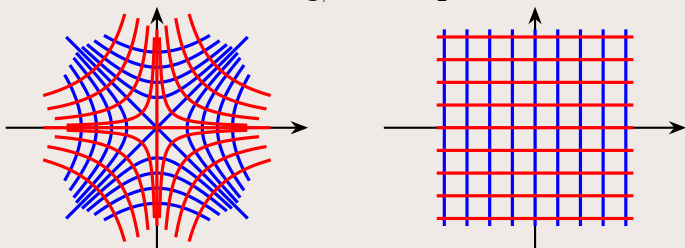
## 例 (续)

因此它把  $z$  平面上两族分别以直线  $y = \pm x$  和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2 - y^2 = c_1, \quad 2xy = c_2$$

分别映射为  $w$  平面上的两族平行直线

$$u = c_1, \quad v = c_2.$$



## 例题: 映照的像

例

求下列集合在映照  $w = z^2$  下的像.

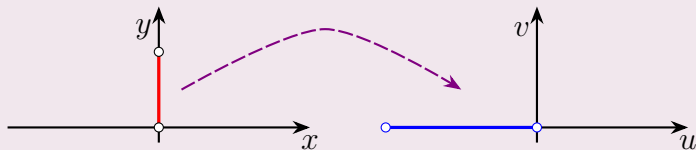
(1) 线段  $0 < |z| < 2, \arg z = \frac{\pi}{2}$ .

(2) 双曲线  $x^2 - y^2 = 4$ .

(3) 扇形区域  $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2$ .

解.

(1) 设  $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$ , 则  $w = z^2 = -r^2$ . 因此它的像还是一条线段  $0 < |w| < 4, \arg w = -\pi$ .



## 例题: 映照的像

续解.

(2) 由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

因此  $u = x^2 - y^2 = 4, v = 2xy$ .

对于任意  $v \in \mathbb{R}$ , 存在  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  使得  $z^2 = 4 + vi$ , 且  $x^2 - y^2 = 4$ . 因此这条双曲线的像是一条直线  $\operatorname{Re} w = 4$ .

(3) 设  $z = re^{i\theta}$ , 则  $w = r^2 e^{2i\theta}$ . 因此它的像是扇形区域  $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}, 0 < |w| < 4$ .

## 例题: 映照的像

例

求圆周  $|z| = 2$  在映照  $w = z + \frac{1}{z}$  下的像.

解.

设  $z = x + yi$ , 则

$$w = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{4} = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}yi = u + vi,$$

$$x = \frac{4}{5}u, \quad y = \frac{4}{3}v, \quad \left(\frac{4}{5}u\right)^2 + \left(\frac{4}{3}v\right)^2 = 4,$$

$$\left(\frac{2u}{5}\right)^2 + \left(\frac{2v}{3}\right)^2 = 1.$$

# 第一章 复数与复变函数

- 1 复数及其代数运算
- 2 复数的三角与指数形式
- 3 复数的乘除、方幂与方根
- 4 曲线和区域
- 5 复变函数
- 6 极限和连续性**

复变函数的极限和连续性的定义和实函数情形是类似的. 我们先来看数列极限的定义.

## 定义

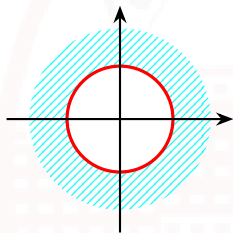
- 设  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  是一个复数列. 如果  $\forall \varepsilon > 0, \exists N$  使得当  $n \geq N$  时  $|z_n - z| < \varepsilon$ , 则称  $z$  是数列  $\{z_n\}$  的极限, 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ .
- 如果  $\forall X > 0, \exists N$  使得当  $n \geq N$  时  $|z_n| > X$ , 则称  $\infty$  是数列  $\{z_n\}$  的极限, 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ .



如果我们称

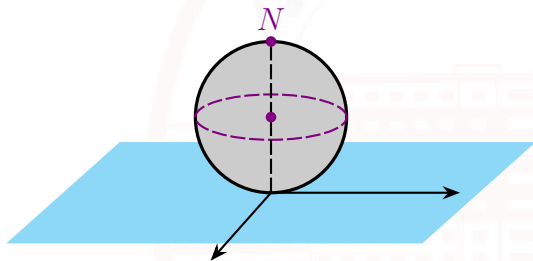
$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为  $\infty$  的 (去心) 邻域. 那么  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  可统一表述为:  
对  $z$  的任意邻域  $U$ ,  $\exists N$  使得当  $n \geq N$  时  $z_n \in U$ .

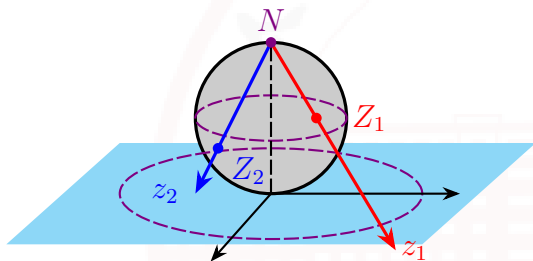


那么有没有一种看法使得  $\infty$  的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点  $\infty$ . 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

取一个与复平面相切于原点  $z = 0$  的球面. 过  $O$  做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于另一点  $N$ , 称之为**北极**.

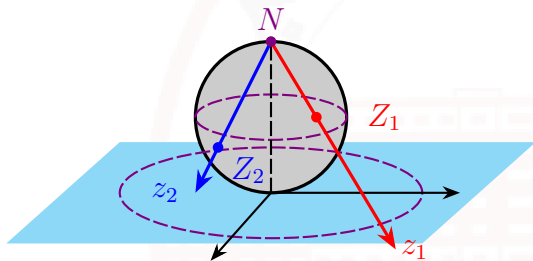


对于平面上的任意一点  $z$ , 连接北极  $N$  和  $z$  的直线一定与球面相交于除  $N$  以外的唯一一个点  $Z$ . 反之, 球面上除了北极外的任意一点  $Z$ , 直线  $NZ$  一定与复平面相交于唯一一点. 这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.



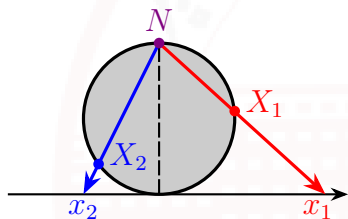
## 复球面: 无穷远点

当  $|z|$  越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近  $N$ . 如果我们在复平面上添加一个额外的"点"——**无穷远点**, 记作  $\infty$ . 那么**扩充复数集合**  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  就正好和球面上的点一一对应. 称这样的球面为**复球面**, 称包含无穷远点的复平面为**扩充复平面**(**闭复平面**).



## 复球面: 与实数无穷的联系

它和实数中  $\pm\infty$  有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 同样的, 当  $|x|$  越来越大时, 其对应圆周上点也越来越接近  $N$ . 所以实数中的  $\pm\infty$  在复球面上或闭复平面上就是  $\infty$ , 只是在实数时我们往往还关心它的符号, 所以区分正负.



## $\infty$ 的性质

$\infty$  的实部、虚部和辐角无意义, 规定  $|\infty| = +\infty$ . 约定

$$z \pm \infty = \infty \pm z = \infty \quad (z \neq \infty),$$

$$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty \quad (z \neq 0),$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \quad (z \neq \infty), \quad \frac{\infty}{z} = \infty \quad (z \neq 0), \quad \frac{z}{0} = \infty \quad (z \neq 0).$$

根据开集的定义可知, 包含  $z$  的任何一个开集均包含  $z$  的一个邻域. 由此可知, 将极限定义中的  $\varepsilon$ -邻域换成开邻域 (包含  $z$  的开集) 并不影响极限的定义. 在复球面上的任意一点, 可以自然地定义  $z \in \mathbb{C}^*$  的开邻域. 它在上述对应下的像便是  $z$  的一个开邻域.

# 数列收敛的等价刻画

## 定理

设  $z_n = x_n + y_n i, z = x + yi$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

证明.

由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证. 

## 例题: 数列的敛散性

例

设  $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \exp\left(\frac{\pi i}{n}\right)$ . 数列  $\{z_n\}$  是否收敛?

解.

由于

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \rightarrow 1, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow 0.$$

因此  $\{z_n\}$  收敛且  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$ .



## 定义

设函数  $f(z)$  在点  $z_0$  的某个去心邻域内有定义. 如果存在复数  $A$  使得对  $A$  的任意邻域  $U$ ,  $\exists \delta > 0$  使得当  $z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta)$  时, 有  $f(z) \in U$ , 则称  $A$  为  $f(z)$  当  $z \rightarrow z_0$  时的极限, 记为  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$  或  $f(z) \rightarrow A (z \rightarrow z_0)$ .

对于  $z_0 = \infty$  或  $A = \infty$  的情形, 也可以用上述定义统一描述. 通常我们说极限存在是不包括  $\lim f(z) = \infty$  的情形的.

## 与实函数极限之联系

通过与二元实函数的极限对比可知, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的.  $z \rightarrow z_0$  可以是沿着任意一条曲线趋向于  $z_0$ , 或者看成  $z$  是在一个开圆盘内任意的点逐渐地靠拢  $z_0$ .

### 定理

设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z_0 = x_0 + y_0i$ ,  $A = u_0 + v_0i$ , 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

### 证明.

由三角不等式

$$|u - u_0|, |v - v_0| \leq |z - z_0| \leq |u - u_0| + |v - v_0|$$

易证.

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

## 定理

设  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ ,  $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$ , 则

1  $\lim_{z \rightarrow z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B;$

2  $\lim_{z \rightarrow z_0} (fg)(z) = AB;$

3 当  $B \neq 0$  时,  $\lim_{z \rightarrow z_0} \left( \frac{f}{g} \right) (z) = \frac{A}{B}.$

## 例题: 判断函数极限是否存在


例

证明当  $z \rightarrow 0$  时, 函数  $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$  的极限不存在.

证明.

令  $z = x + yi$ , 则  $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当  $z$  沿着直线  $y = 0$  左右两侧趋向于 0 时, 则  $u(x, y) \rightarrow \pm 1$ . 因此  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y)$  不存在, 从而  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  不存在. 

## 定义

- 如果  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ , 则称  $f(z)$  在  $z_0$  处连续.
- 如果  $f(z)$  在区域  $D$  内处处连续, 则称  $f(z)$  在  $D$  内连续.

## 定理

函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在  $z_0 = x_0 + iy_0$  处连续当且仅当  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  处连续.

例如  $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$ .  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  除原点外处处连续,  $v(x, y) = x^2 - y^2$  处处连续. 因此  $f(z)$  在  $z \neq 0$  处连续.

## 定理

- 在  $z_0$  处连续的两个函数  $f(z), g(z)$  之和、差、积、商 ( $g(z_0) \neq 0$ ) 在  $z_0$  处仍然连续.
- 如果函数  $g(z)$  在  $z_0$  处连续, 函数  $f(w)$  在  $g(z_0)$  处连续, 则  $f(g(z))$  在  $z_0$  处连续.

显然  $f(z) = z$  是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

也处处连续, 有理函数  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  在  $Q(z)$  的零点以外处处连续.

有时候我们会遇到在曲线上连续的函数, 它指的是当  $z$  沿着该曲线趋向于  $z_0$  时,  $f(z) \rightarrow f(z_0)$ . 对于闭合曲线或包含端点的曲线段, 其之上的连续函数  $f(z)$  是有界的.

## 例题: 函数连续性的判定

例

证明: 如果  $f(z)$  在  $z_0$  连续, 则  $\overline{f(z)}$  在  $z_0$  也连续.

证明.

设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ . 那么  $u(x, y), v(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  连续. 从而  $-v(x, y)$  也在  $(x_0, y_0)$  连续. 所以  $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  连续.

另一种看法是, 函数  $g(z) = \bar{z} = x - iy$  处处连续, 从而  $g(f(z)) = \overline{f(z)}$  在  $z_0$  处连续. ■

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于  $\mathbb{C}$  是一个域, 上面可以做除法.

这就导致了复变函数有**导数**, 而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.