合 肥 工 业 大 学 试 卷 参 考 答 案 （A）

2021～2022 学年第 二 学期　课程代码 034Y01　课程名称 数学（下）　命题教师 集体　系主任审批＿＿＿

教学班级＿＿＿　学生姓名＿＿＿　学号＿＿＿　考试日期 2022 年 6 月 18 日 8:00-10:00　成绩＿＿＿

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. e, **2.** $2x\cos(x^2+1)\,\mathrm{d}x$, **3.** $1/2$,

4. $y=x-1+2\ln 2$, **5.** 1, **6.** 0.

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里：

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	D	B	A	C	D

三、解答题（每小题 8 分，共 64 分）

1. （8 分）【解】

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} \quad \cdots\cdots (3\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{x+2} \quad \cdots\cdots (3\text{ 分})$$

$$=\frac{-2}{1}=-2. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

2. （8 分）【解】

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{\arcsin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \quad \cdots\cdots (3\text{ 分})$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x} \quad \cdots\cdots (3\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

3. （8 分）【解】

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=\frac{3t^2+1}{2t+1}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=\frac{6t(2t+1)-(3t^2+1)2}{(2t+1)^3}=\frac{6t^2+6t-2}{(2t+1)^3}. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

4. （8 分）【解】

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 因此

$$f(0)=f(0^+) \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$=b=\lim_{x\to0^-}x\arctan\frac{1}{x}=0\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 因此

$$f'_-(0)=f'_+(0), \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x\arctan\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$f'_+(0)=(2x+a)|_{x=0}=a, \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

因此 $a=-\dfrac{\pi}{2}$. $\cdots\cdots$ (1 分)

由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=+\infty, \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{1}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}x\arctan\frac{1}{x}=\lim_{t\to0^-}\frac{\arctan t}{t}=1,$$

因此曲线 $y=f(x)$ 的渐近线只有 $y=1$. $\cdots\cdots$ (1 分)

合 肥 工 业 大 学 试 卷 参 考 答 案 （A）

2021～2022 学年第 二 学期　课程代码 034Y01　课程名称 数学（下）　命题教师 集体　系主任审批＿＿＿＿

教学班级＿＿＿＿　学生姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　考试日期 2022 年 6 月 18 日 8:00-10:00　成绩＿＿＿＿

5.（8 分）【解】

由

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)=0 \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

可得驻点 $x=-\frac{1}{3},1.$ ⋯⋯ (2 分)

由于

$$f(-2)=-10,\quad f(2)=2,\quad f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27},\quad f(1)=-1, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此最大值为 2, 最小值为 -10. ⋯⋯ (2 分)

6.（8 分）【证明】

证法一: 设 $f(x)=\tan x-x$, 则 ⋯⋯ (2 分)

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}-1=\tan^2 x\geqslant 0. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 从而 ⋯⋯ (2 分)

$$f(x_2)\geqslant f(x_1),\quad \tan x_2-\tan x_1\geqslant x_2-x_1. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

证法二: 设 $f(x)=\tan x$, 则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续, (x_1,x_2) 内可导. ⋯⋯ (2 分)

由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi), \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

即

$$\frac{\tan x_2-\tan x_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{\cos^2\xi}\geqslant 1. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

所以 $\tan x_2-\tan x_1\geqslant x_2-x_1$. ⋯⋯ (2 分)

7.（8 分）【证明】

设 $F(x)=x^{2022}f(x)$, ⋯⋯ (2 分)

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 内可导, ⋯⋯ (1 分)

且 $F(0)=0, F(1)=f(1)=0$. ⋯⋯ (1 分)

由罗尔中值定理, 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$. ⋯⋯ (2 分)

由于 $F'(x)=x^{2022}f'(x)+2022x^{2021}f(x)$ 且 $\xi\neq 0$, ⋯⋯ (1 分)

所以 $\xi f'(\xi)+2022f(\xi)=1$. ⋯⋯ (1 分)

8.（8 分）【解】

(1)

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}=\frac{x^2-4}{x^3}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^3}. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

当 $0<x<2$ 时, $f'(x)<0$. 当 $x>2$ 时, $f'(x)>0$. ⋯⋯ (1 分)

因此 $(0,2]$ 是 $f(x)$ 的单减区间, $[2,+\infty)$ 是 $f(x)$ 的单增区间. ⋯⋯ (1 分, 写成开区间不扣分)

所以 $f(x)$ 只有唯一的极小值 $f(2)=\ln 2+\frac{1}{2}$. ⋯⋯ (1 分)

(2)

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{12}{x^4}=-\frac{x^2-12}{x^4}=-\frac{(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{x^4}. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

当 $0<x<2\sqrt{3}$ 时, $f''(x)>0$. 当 $x>2\sqrt{3}$ 时, $f''(x)<0$. ⋯⋯ (1 分)

因此 $(0,2\sqrt{3}]$ 是曲线 $y=f(x)$ 的凹区间,

$[2\sqrt{3},+\infty)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的凸区间, ⋯⋯ (1 分, 写成开区间不扣分)

拐点为 $\left(2\sqrt{3},\ln(2\sqrt{3})+\frac{1}{6}\right)$. ⋯⋯ (1 分)