复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

第一章　复数与复变函数

1. 复数及其代数运算
2. 复数的三角与指数形式
3. 复数的乘除、方幂与方根
4. 曲线和区域
5. 复变函数
6. 极限和连续性

复数的引入

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=b^2-4c.$$

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;

(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;

(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根. 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根, 形式地计算可以发现它们满足原来的方程.

三次方程的根

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望

$$u^3+v^3=20,\quad uv=-2,$$

则 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$. 解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

续解

所以

$$u = 1 \pm \sqrt{3}, \quad v = 1 \mp \sqrt{3}, \quad x = u + v = 2.$$

那么这个方程是不是真的只有 $x = 2$ 这一个解呢？设

$$f(x) = x^3 + 6x - 20, \quad f'(x) = 3x^2 + 6 > 0.$$

因此 $f(x)$ 单调递增，$f(x)$ 最多只有一个零点．由于

$$f(0) = -20 < 0, \quad f(3) = 25 > 0,$$

因此由零点定理可知 $f(x)$ 确实只有一个零点．

例

解方程 $x^3-7x+6=0$.

解

同样地我们有 $x=u+v$, 其中

$$u^3+v^3=-6,\quad uv=\frac{7}{3}.$$

于是 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+\frac{343}{27}=0$. 然而这个方程没有实数解.

我们可以强行解得

$$u^3=-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}.$$

续解

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

$$v = \frac{3 - 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 - \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 + 5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x = u + v = 2, -3, 1.$$

所以我们从一条"错误的路径"走到了正确的目的地?

三次方程的根

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言，使用上述方法可以得到求根公式：

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

由于 $p=0$ 情形较为简单，所以我们不考虑这种情形。通过分析函数的极值可以知道：

(1) 当 $\Delta>0$ 时，有 1 个实根.

(2) 当 $\Delta=0$ 时，有 2 个实根 $x=-\sqrt[3]{4q},\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).

(3) 当 $\Delta<0$ 时，有 3 个实根. 这可以通过分析函数单调性得到.

三次方程的根

所以我们想要使用求根公式的话，就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时，从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了.

尽管在十六世纪，人们已经得到了三次方程的求根公式，然而对其中出现的虚数，却是难以接受.

> 圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚的 -1 的平方根。
>
> 莱布尼兹 *(Leibniz)*

第一节　复数及其代数运算

- 复数的概念
- 复数的代数运算
- 共轭复数

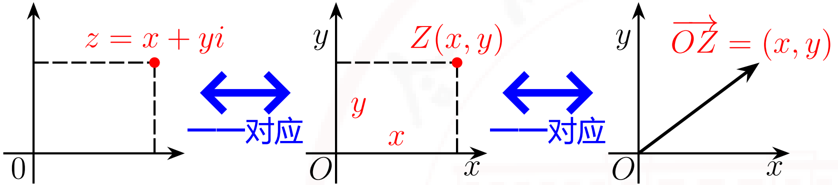
现在我们来正式介绍复数的概念. 由于我们无法区分方程 $x^2 = -1$ 的两个根 $\pm\sqrt{-1}$, 因此我们固定其中一个, 并引入一个记号 i 来表示它.

定义

固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

换言之, 每一个复数可以唯一地表达成 $x + yi$ 这样的形式. 也就是说, 复数全体构成一个二维实线性空间, 且 $\{1, i\}$ 是一组基. 我们将**全体复数记作** $\mathbb{C}$, 全体实数记作 $\mathbb{R}$, 则 $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.

由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.

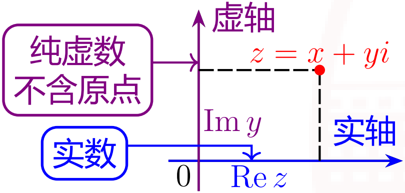


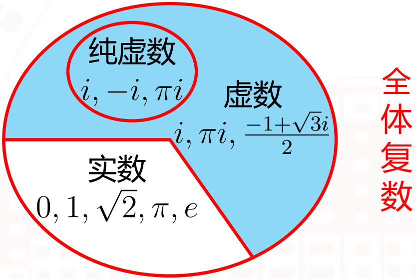
复平面 直角坐标系 向量

实部和虚部, 虚数和纯虚数

当 $y=0$ 时, $z=x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们将直线 $y=0$ 称为实轴. 相应地, 直线 $x=0$ 被称为虚轴. 我们称 $z=x+yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的实部 $\operatorname{Re} z=x$ 和虚部 $\operatorname{Im} z=y$.

当 $\operatorname{Im} z=0$ 时, z 是实数. 不是实数的复数是虚数. 当 $\operatorname{Re} z=0$ 且 $z\neq 0$ 时, 称 z 是纯虚数.





典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是: (1) 实数; (2) 纯虚数.

解

(1) $x^2-5x-6=0$, 即 $x=-1$ 或 6.
(2) $x^2-3x-4=0$, 即 $x=-1$ 或 4. 但同时要求 $x^2-5x-6\neq 0$, 因此 $x\neq -1$, $x=4$.

练习

若 $x^2(1+i)+x(5+4i)+4+3i$ 是纯虚数, 则实数 $x=$ __-4__.

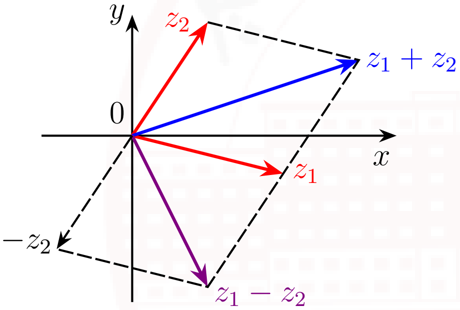
复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.



规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得复数的乘除法:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘. 当 $z \neq 0$ 时, 还可以定义 $z^0 = 1, z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

典型例题：常见复数的幂次

例

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+i$, 则

$$z^2=2i,\quad z^3=-2+2i,\quad z^4=-4,\quad z^8=16=2^4.$$

我们把满足 $z^n=1$ 的复数 z 称为 n 次单位根. 那么 $1, i, -1, -i$ 是 4 次单位根, $1, \omega, \omega^2$ 是 3 次单位根.

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1+i+i^2+i^3+i^4=\underline{\quad 1 \quad}$.

解

根据等比数列求和公式，

$$1+i+i^2+i^3+i^4=\frac{i^5-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1.$$

练习（2020 年 A 卷）

化简 $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2020}=\underline{\quad 1 \quad}$.

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域. 也就是说, 对于任何一个非常数的复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0, \quad n \geqslant 1,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0) = 0$. 我们会在第五章证明该结论.

在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则 $a > b$ 或 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c, $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

而 $\mathbb{C}$ 却不是有序域. 如果 $i > 0$, 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

于是 $0 > i$, 矛盾! 同理 $i < 0$ 也不可能.

复数也有其它的构造方式, 例如

$$\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$$

其中 $E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$.

此时自然地有加法、乘法 (满足交换律)、取逆等运算, 从而这个集合构成一个域. 由于 $J^2 = -E$, 所以 J 实际上就相当于虚数单位, 这个域就是我们前面定义的复数域 $\mathbb{C}$.

共轭复数

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

例题：共轭复数判断实数

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即

$$z(1+\overline{z}^2) = \overline{z}(1+z^2), \quad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1) = 0.$$

由 $y \neq 0$ 可知 $z \neq \overline{z}$. 故上述等式等价于 $z\overline{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$. $\square$

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$，然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到．但我们利用共轭复数可以更简单地证明它．

由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$，因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}). \qquad \square$$

例题: 复数的代数计算

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例

$z = -\dfrac{1}{i} - \dfrac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\overline{z}$.

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

因此 $\operatorname{Re} z = \dfrac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\dfrac{1}{2}, \quad z\overline{z} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{2}$.

例

设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

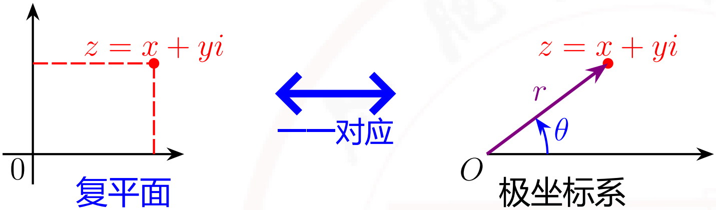
解

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2} \\ &= \frac{(-15-20)+(-20+15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

因此 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = -\dfrac{7}{5} + \dfrac{1}{5}i$.

第二节　复数的三角与指数形式

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



定义

- 称 r 为 z 的**模**，记为 $|z| = r$.
- 称 θ 为 z 的**辐角**，记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$. 0 的辐角没有意义.

由极坐标和直角坐标的对应可知

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, \quad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

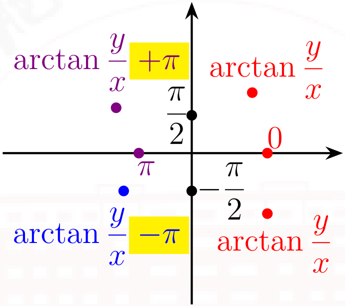
$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi, & x < 0; \\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y < 0; \\ \text{任意/无意义}, & z = 0, \end{cases}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$.

主辐角

任意 $z\neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi,\pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 $\arg z$.

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0;\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant 0;\\[2mm] \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0;\\[2mm] \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0;\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}$$



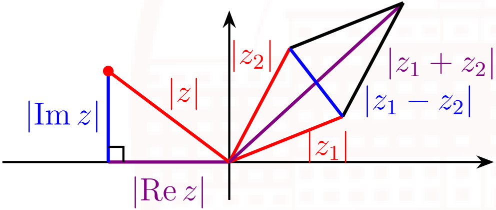
显然 $\mathrm{Arg}\, z=\arg z+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

复数的模满足如下性质:

模的性质汇总

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;
- $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$;
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.

这些不等式均可以用三角不等式证明, 也可以用代数方法证明.



例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(2)

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 \overline{z_2}} \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2}).
\end{aligned}$$

□

复数的三角形式和指数形式

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化成三角形式和指数形式.

解

$r=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第三象限，因此

$$\arg z=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=4\exp\left(-\frac{5\pi i}{6}\right).$$

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解

$$
\begin{aligned}
z&=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\\
&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\\
&=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}=\exp\left(\frac{3\pi i}{10}\right).
\end{aligned}
$$

典型例题：求复数的三角/指数形式

求复数的三角或指数形式时，我们只需要任取一个辐角就可以了，不要求必须是主辐角.

练习

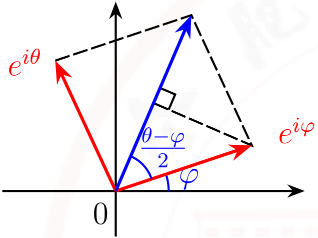
将 $z=\sqrt{3}-3i$ 化成三角形式和指数形式.

答案

$$z=2\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]=2\sqrt{3}\exp\left(\frac{5\pi i}{3}\right).$$

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$



例

$$z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{0}+e^{(\pi-\alpha)i}$$
$$=2\cos\frac{\pi-\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}.$$

第三节　复数的乘除、方幂与方根

三角形式和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_1} \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

换言之,

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

关于多值函数的等式的含义是指: 两边所能取到的值构成的集合相等. 例如此处关于辐角的等式的含义是:

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \{\theta_1+\theta_2 : \theta_1\in\operatorname{Arg} z_1, \theta_2\in\operatorname{Arg} z_2\}.$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \{\theta_1-\theta_2 : \theta_1\in\operatorname{Arg} z_1, \theta_2\in\operatorname{Arg} z_2\}.$$

注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 \pm \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上. 例如

$$(-1+i)(-1+i) = 2i,$$

$$\arg(-1+i) + \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2},$$

$$\arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}.$$

复数的乘除与三角/指数表示

证明

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\Big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \\ &\qquad\qquad + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\Big] \\ &= r_1 r_2\big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big] \end{aligned}$$

因此乘法情形得证.

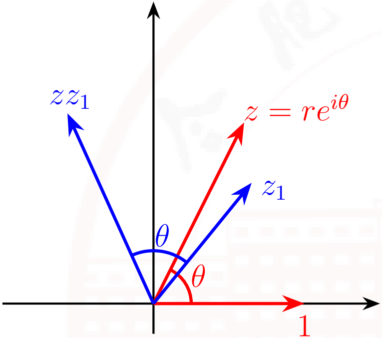
设 $\dfrac{z_1}{z_2} = re^{i\theta}$，则由乘法情形可知

$$rr_2 = r_1, \qquad \theta + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1.$$

因此 $r = \dfrac{r_1}{r_2}, \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi$，其中 $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

乘积的几何意义

从该定理可以看出，乘以复数 $z=re^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍，并按逆时针旋转角度 θ.



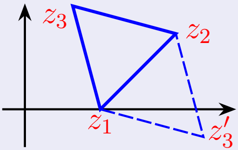
例题: 复数解决平面几何问题

例

已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

解

由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$,



例题：复数解决平面几何问题

续解

因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\exp\left(\pm\frac{\pi i}{3}\right) = (1+i)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i.$$

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \neq 0$. 根据复数三角形式的乘法和除法运算法则, 我们有

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地, 当 $r = 1$ 时, 我们得到棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$
\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1, \\
\cos(3\theta) &= 4\cos^2\theta - 3\cos\theta, \\
\cos(4\theta) &= 8\cos^2\theta - 8\cos^2\theta + 1, \\
\cos(5\theta) &= 16\cos^2\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}
$$

一般地, 可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式, 这个多项式

$$g_n(T) = \sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}} \mathrm{C}_n^{2k} T^{n-2k}(T^2-1)^k.$$

叫做切比雪夫多项式. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

典型例题: 复数乘幂的计算

例

求 $(1+i)^n + (1-i)^n$.

解

由于

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

因此

$$\begin{aligned}&(1+i)^n+(1-i)^n\\=\ &2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\=\ &2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.\end{aligned}$$

典型例题: 复数乘幂的计算

练习

求 $(\sqrt{3}+i)^{2022} = \underline{\quad -2^{2022} \quad}$.

复数的方根

我们利用复数方幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = r\exp(i\theta) \neq 0, \quad w = \rho\exp(i\varphi),$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$.

为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为算术根. 由于 $n\varphi$ 和 θ 的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

故

$$w = w_k = \sqrt[n]{r}\exp\frac{(\theta+2k\pi)i}{n}$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \dots, n-1$. 故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值.

这些根的模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\frac{2\pi}{n}$. 因此它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的正接 n 边形的顶点.

例

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

典型例题: 复数方根的计算

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$, 因此

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\exp\left[\frac{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)i}{4}\right],\qquad k=0,1,2,3.$$

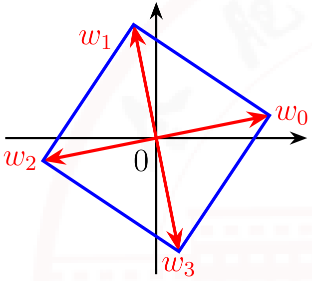
所以该方根所有值为

$$w_0=\sqrt[8]{2}\exp\frac{\pi i}{16},\qquad w_1=\sqrt[8]{2}\exp\frac{9\pi i}{16},$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\exp\frac{17\pi i}{16},\qquad w_3=\sqrt[8]{2}\exp\frac{25\pi i}{16}.$$

典型例题: 复数方根的计算

$w_0, w_1 = iw_0, w_2 = -w_0, w_3 = -iw_0$ 形成了一个正方形.



典型例题: 复数方根的计算

练习

求 $\sqrt[6]{-1} =$ $\underline{\pm\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}, \pm i, \pm\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}}$.

思考

$i = \sqrt{-1}$ 吗?

答案

$\sqrt{-1}$ 是多值的, 此时 $\sqrt{-1} = \pm i$. 除非给定单值分支

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\exp\left(\frac{i\arg z}{2}\right),$$

否则不能说 $\sqrt{-1} = i$.

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$ 不成立. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \operatorname{Arg} z = n \arg z + 2nk\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Arg} z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

三次方程的求根问题 *

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设 $\alpha=\sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}}$ 是算术根, $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. 则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha+\frac{p}{\alpha},\alpha\omega+\frac{p}{\alpha}\omega^2,\alpha\omega^2+\frac{p}{\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果 $\Delta<0$, 则 $p>0$, u 是虚数且 $v=\overline{u}$. 设 u_1,u_2,u_3 是 $\sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}}$ 的所有值, 则我们得到 3 个实根

$$x=u_1+\overline{u_1},u_2+\overline{u_2},u_3+\overline{u_3}.$$