线性代数

张神星 (合肥工业大学)
办公室：翡翠科教楼 *B1810* 东
Email：zhangshenxing@hfut.edu.cn
课件地址：https://zhangshenxing.gitee.io

第一章　行列式

线性代数起源于线性方程组的求解问题. 考虑方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 1. & (2) \end{cases}$$

2(2)+(1) 可得 $7x_1 = 14$. 从而 $x_1 = 2, x_2 = -3$.

我们考虑一般情形:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

分别作 $a_{22} \times (1), a_{12} \times (2)$ 得到

$$\begin{cases} a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_1a_{22}, & (1) \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2a_{12}. & (2) \end{cases}$$

然后 $-(2) + (1)$ 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

于是

$$b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

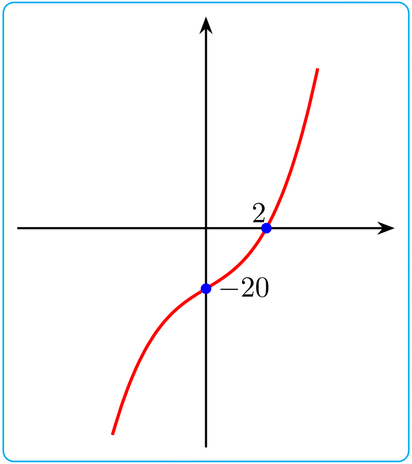
$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望 $u^3+v^3=20, uv=-2$, 则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$. 解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

所以 $u=1\pm\sqrt{3}, v=1\mp\sqrt{3}$, $x=u+v=2$.

那么这个方程是不是真的只有 $x=2$ 这一个解呢？由 $f'(x)=3x^2+6>0$ 可知其单调递增，因此确实只有一个解.



例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解

同样地我们有 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$. 然而这个方程没有实数解.

我们可以强行解得

$$u^3 = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}.$$

续解

$$u=\sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

$$v=\frac{3-2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9-\sqrt{-3}}{6},\frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x=u+v=2,-3,1.$$

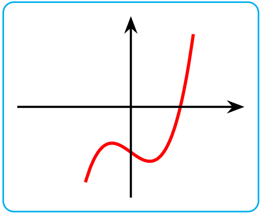
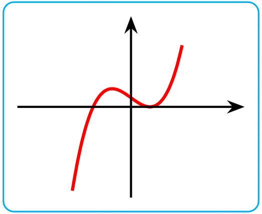
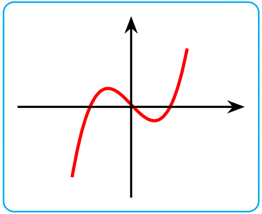
所以我们从一条“错误的路径”走到了正确的目的地?

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言，类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

由于 $p=0$ 情形较为简单，所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

(1) 当 $\Delta>0$ 时，有 1 个实根.
(2) 当 $\Delta=0$ 时，有 2 个实根 $x=-\sqrt[3]{4q},\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).
(3) 当 $\Delta<0$ 时，有 3 个实根.

所以我们想要使用求根公式的话，就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时，从求根公式一定能得到 3 个实根呢？在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了.

尽管在十六世纪，人们已经得到了三次方程的求根公式，然而对其中出现的虚数，却是难以接受.

> 圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚的 -1 的平方根。
>
> 莱布尼兹 (*Leibniz*)

我们将在下一节使用更为现代的语言来解释和运用复数.