问题与征解

问题

问题 19(供题者：复旦大学 张奇) 甲与乙下棋获胜的概率是 40%，但甲想不停地与乙下棋直到净胜乙五局就结束，他有可能做到这一点吗？如果有可能，请给出做到这一点的概率是多少；如果不可能，请说明原因.

问题 20(供题者：吉林大学 周鸣君) 设 B 是 $\mathbb{R}^n(n\geqslant 1)$ 中的单位开球，非负函数 u 在 B 内二阶连续可导，$u(0)=0$ 且 u 在 B 内不恒为 0. 试证明：对于任意的 $\alpha>0$，都存在 $\xi\in B$，使得 $\Delta u(\xi)>\alpha\, u(\xi)$，其中 $\Delta=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

解答

问题 10(供题者：湖南交通工程学院高科技研究院 冯良贵) 设 $R=\{1,0,-1\}$，$R^{n\times n}$ 为 R 上 n 阶方阵全体，证明：集合 $S=\{\det\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}\}$ 必包含开区间 $(-2^{n-1},2^{n-1})$ 内的一切整数. 进一步，提出如下开放问题：S 是否就由闭区间 $[-2^{n-1},2^{n-1}]$ 内的一切整数所构成？

解 以下解答由陈树人(武汉理工大学本科生，E-mail：1340511818@qq.com)和张神星(合肥工业大学副研究员，E-mail：zhangshenxing@hfut.edu.cn)独立给出. 两份解答方法基本一致. 前半部分选取了陈树人的解答，后半部分选取了张神星的解答.

构造矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式如下

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & -1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}\end{vmatrix}_{n\times n},$$

第 i 行乘以 -1 加到第 $i+1$ 行(i 依次从 $n-2$ 到 1)，可得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & -1 & & & & \\ 0 & 2 & -1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & \cdots & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}2 & -1 & & & & \\ 0 & 2 & -1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \vdots & \cdots & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 2 & -1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1}\end{vmatrix},$$

注：读者在提供问题解答时，请先提供印刷体的版本，并注明单位、姓名和身份(教师、本科生或研究生等). 解答被选用后需提供 word 版本.

再将第 j 列乘 2 加到第 $j-1$ 列(j 依次从 $n-1$ 到 2),可得

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 0 & -1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\ \sum_{k=1}^{n-1}2^{n-1-k}a_{n-k} & \sum_{k=1}^{n-2}2^{n-2-k}a_{n-k} & \cdots & \sum_{k=1}^{2}2^{2-k}a_{n-k} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n-1}\sum_{k=1}^{n-1}2^{n-1-k}a_{n-k}\begin{vmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2n-2}\sum_{k=1}^{n-1}2^{n-1-k}a_{n-k}.$$

显然$(-2^{n-1},2^{n-1})$中的整数可以用二进制展开表示为 $a_1+2a_2+...+2^{n-2}a_{n-1}$,其中 $a_1,...,a_{n-1}$ 取值为$\{-1,0,1\}$,所以集合 S 必包含开区间$(-2^{n-1},2^{n-1})$.

一般地,S 未必包含在$[-2^{n-1},2^{n-1}]$. 为此,首先回顾一下 Hadamard 定理. 所谓 Hadamard 定理是指:设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,$-1\leqslant a_{ij}\leqslant 1$,则必有$|\det\boldsymbol{A}|\leqslant\sqrt{n}^{n}$,且等式成立当且仅当 $a_{ij}=\pm1$ 且 $\boldsymbol{A}$ 的各行之间两两正交. 该定理中能够达到上界$\sqrt{n}^{n}$的矩阵被称为 Hadamard 矩阵. Hadamard 猜想当 n 是 4 的倍数时,总存在 n 阶 Hadamard 矩阵. 这个猜想已知对 $n<428$ 均成立. 特别地,$n=8$ 时,

$$H(8)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

的行列式为 $\det H(8)=\sqrt{8}^{8}=2^{12}>2^{7}$.

供题者点评 作者利用整数的二进制表示,结合行列式的基本性质成功地回答了此问题的第一部分. 对此问题的第二部分,作者通过举例给出了否定的答案,并与著名的 Hadamard 猜想相联系,回答简洁有趣,恰好反映了问题提供者初衷. 综上,解答人给出了该问题的一个完美回答.