合　肥　工　业　大　学　试　卷（A）

2021～2022 学年第 二 学期　课程代码 034Y01　课程名称 数学（下）　学分 5　课程性质:必修☑、选修 □ 限修 □考试形式:开卷 □ 闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿＿　考试日期 2022 年 6 月 18 日 8:00-10:00　命题教师 集体　系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿＿＿

1. （10 分）求函数 $f(x)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\arctan\frac{1}{x}$ 的定义域.

解 由 $x^2-1>0, x\neq 0$ 可得 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

2. （5 分）求函数 $y=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<0,\\ 1, & x=0,\\ 1+e^{-x}, & x>0\end{cases}$ 的反函数.

解 当 $x<0$ 时，$y<0, x=\frac{1}{y}$.

当 $x=0$ 时，$y=1$.

当 $x>0$ 时，$0<e^{-x}<1, 1<y<2, x=-\ln(y-1)$.

因此 y 的值域为 $(-\infty,0)\cup[1,2)$，其反函数为

$$x=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & y<0,\\ 0, & y=1,\\ -\ln(y-1), & 1<y<2.\end{cases}$$

3. （10 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)\cdot\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^-}(-1)}=e^{-1}$.

4. （5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^3+8}$.

解
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^3+8}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{x^2-2x+4}=\left.\left(\frac{x-2}{x^2-2x+4}\right)\right|_{x=-2}=-\frac{1}{3}.$$

5. （5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(e^{-x}-1)}{\arctan(1-\cos\ )}$.

解 注意到这是 $\frac{0}{0}$ 型不定式. 由于 $x\to 0$ 时，

$\sin(e^{-x}-1)\sim e^{-x}-1\sim -x$, $\arctan(1-\cos x)\sim 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$,

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(e^{-x}-1)}{\arctan(1-\cos x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x}{\frac{1}{2}x^2}=-2\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$.

6. （5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x-x^2}-\sqrt{1-2x+x^2}}{x}$.

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x-x^2}-\sqrt{1-2x+x^2}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x-x^2)-(1-2x+x^2)}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}+\sqrt{1-2x+x^2}}$$
$$=\lim_{x\to 0}(4-2x)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}+\sqrt{1-2x+x^2}}=2.$$

7. （5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)-2\ln x}}$.

解
$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)-2\ln x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(1+x^{-2})}}=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}.$$

注意到这是 1^∞ 型不定式. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-1)\frac{1}{\ln(1+x^2)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}$,

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)-2\ln x}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

8. （5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{e^x-1}-\arctan\frac{x}{2}\right)$.

解
$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\pi}{e^x-1}-\arctan\frac{x}{2}\right)=-\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{\pi}{e^x-1}-\arctan\frac{x}{2}\right)=-\pi-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{e^x-1}-\arctan\frac{x}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$.

2021～2022 学年第 二 学期 课程代码 034Y01 课程名称 数学（下） 学分 5 课程性质:必修☑、选修 □ 限修 □考试形式:开卷 □ 闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿＿ 考试日期 2022 年 6 月 18 日 8:00-10:00 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿＿＿

9. （5 分）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}+\frac{2}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n}\right)$.

解 由于 $\frac{k}{n^2+2n}\le\frac{k}{n^2+2k}\le\frac{k}{n^2}$ $(1\le k\le n)$，因此

$$\frac{1}{n^2+2}+\frac{2}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n}\ge\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2n}=\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)},$$
$$\frac{1}{n^2+2}+\frac{2}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n}\le\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+2n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2},$$

由夹逼定理有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}+\frac{2}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+2n}\right)=\frac{1}{2}.$$

10. （5 分）设 $a_1=4,a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在并求之.

解 我们归纳证明 $a_n\ge3,a_{n+1}\le a_n$.

当 $n=1$ 时，$a_1=4>3,a_2=\sqrt{10}\le a_1=4$.

如果 $a_n\ge3,a_{n+1}\le a_n$，则 $a_{n+1}=\sqrt{a_n+6}\ge\sqrt{3+6}=3$,

$$a_{n+2}-a_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}+6}-\sqrt{a_n+6}=\frac{a_{n+1}-a_n}{\sqrt{a_{n+1}+6}+\sqrt{a_n+6}}\le0.$$

因此命题得证．由单调有界数列收敛准则，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

设 $A=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，则 $A=\sqrt{A+6},A=3$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$.

11. （10 分）证明 $e^x+x=4$ 在 $(0,+\infty)$ 内有零点.

解 设 $f(x)=e^x+x-4$，则 $f(0)=-3<0,f(4)=e^4>0$.

由于 $f(x)$ 是 $[0,4]$ 上的连续函数，由零点定理 $f(x)$ 在 $(0,4)$ 上有零点.

12. （5 分）设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，且 $f(-1)\le1\le f(1)$．证明存在 $\xi\in[-1,1]$，使得 $f(\xi)=\xi^2$.

解 设 $F(x)=f(x)-x^2$，则 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

若 $f(-1)=1$，取 $\xi=-1$ 即可.

若 $f(1)=1$，取 $\xi=1$ 即可.

若 $f(-1)<1<f(1)$，则

$$F(-1)=f(-1)-1<0,\qquad F(1)=f(1)-1>0.$$

由零点定理，存在 $\xi\in(-1,1)$ 使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi^2$.

13. （10 分）求 $y=e^{x+1}\sin x-e^2\sin1$ 的导数.

解 $y'=(e^{x+1})'\sin x+e^{x+1}(\sin x)'$

$=e^{x+1}\sin x+e^{x+1}\cos x=e^{x+1}(\sin x+\cos x)$.

14. （5 分）求 $y=\arctan e^x$ 的导数.

解 $y'=\dfrac{1}{1+(e^x)^2}\cdot(e^x)'=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$.

15. （5 分）求曲线 $y=\tan x$ 在点 $\left(-\frac{\pi}{4},-1\right)$ 处的切线方程和法线方程.

解 由于 $y'=\frac{1}{\cos^2x}$，因此 $y'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\cos^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=2$，切线方程为

$$y=2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1.$$

法线方程为

$$y=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1.$$

16. （5 分）设 $f(x)=\begin{cases}\frac{e^{3x}-1}{\arctan x}, & x<0,\\ 2x+a, & x\ge0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，求常数 a.

解 由于 $f(0)=f(0^+)=a,f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{e^{3x}-1}{\arctan x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{3x}{x}=3$，因此 $a=3$.