中 国 科 学 技 术 大 学 试 卷 （A）

2010～2011 学年第 二 学期　　　　复变函数 (001012)

本卷中 $B(a,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z-a|<r\}, B(\infty,r)=\{z\in\mathbb{C}:|z|>r\}$.

一、(20 分) 以下陈述是否正确? 如果不正确请给出理由.

1. 存在 $B(0,1)-\{0\}$ 上的无界全纯函数 f 使得 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=0$.

2. 存在 $B(0,1)$ 上的全纯函数 f 使得 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=(-1)^n, n=2,3,\ldots$.

3. 存在 $\mathbb{C}$ 上的非零全纯函数 f 有无穷多零点.

4. 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域, $f\in H(D)\cap C(\overline{D})$, 则 f 一定能在 D 的边界上取得最大模.

5. 设 $D=\{z\in\mathbb{C}: 0<\operatorname{Re} z<1\}, f\in H(D)\cap C(\overline{D})$ 满足 $f(ai)=0, \forall a\in\mathbb{R}$, 则 f 恒等于零.

6. 设 $D=B(\infty,R), f,g\in H(D)\cap C(\overline{D}), R>0$ 满足 $f(z)=g(z), \forall z\in\mathbb{C}, |z|=R$, 则 f 恒等于 g.

7. ∞ 是 $\sin\left[\dfrac{1}{\cos(1/z)}\right]$ 的本性奇点.

8. $\dfrac{z}{e^z-1}$ 在 $\mathbb{C}$ 上亚纯.

9. $B(0,1)$ 的全纯自同构必为分式线性变换.

10. 若整函数 f 将实轴和虚轴均映为实数, 则 $f'(0)=0$.

二、(30 分) 计算题.

1. $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^3(z-3)}$.

2. $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z+1}{z^2(z^3+2)}\,\mathrm{d}z$.

3. $\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{ze^{iz}}{\sin z}\,\mathrm{d}z$.

4. $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z^{2n}}{(z+1)^n},\infty\right]$.

5. $e^{\frac{1-z}{z}}$ 在扩充复平面上有哪些奇点? 并求出在 $D=B(\infty,1)$ 上的 Laurent 展开.

三、(10 分) 设 $f \in H(B(0,1)), f(0)=1$, 并且 $\operatorname{Re} f(z) \geq 0, \forall z \in B(0,1)$. 证明

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}, \quad \forall z \in B(0,1).$$

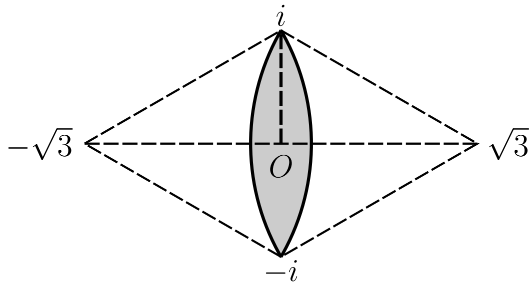
四、(10 分) 利用辐角原理或 Rouché 定理证明代数学基本定理.

五、(10 分) 设 γ 是圆周 $\partial B(a,R)$ 上的一段开圆弧. 证明: 若 f 在 $B(a,R)$ 上全纯, 在 $B(a,R) \cup \gamma$ 上连续, 并且在 γ 上恒为零, 则 f 在 $B(a,R)$ 上也恒为零.

六、(10 分) 求一单叶全纯映射, 把 D 映为上半平面, 其中

$$D = \Omega - [0,i], \qquad \Omega = B(\sqrt{3},2) \cap B(-\sqrt{3},2),$$

这里 $[0,i]$ 表示连接 0 和 i 的线段。



七、(10 分) 设 γ 是可求长简单闭曲线, 其内部为域 G_1, 外部为域 G_2. 如果 $f \in H(G_2) \cap C(\overline{G}_2)$, 而且 $\lim_{z\to\infty} f(z) = A$, 那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} -f(z)+A, & z \in G_2; \\ A, & z \in G_1, \end{cases}$$

这里 γ 关于 G_1 取正向.