

1.6 极限和连续性

1.6 极限和连续性

- 复变函数的极限和连续性的定义和实函数情形是类似的.

1.6 极限和连续性

- 复变函数的极限和连续性的定义和实函数情形是类似的.
- 我们先来看数列极限的定义.

1.6 极限和连续性

- 复变函数的极限和连续性的定义和实函数情形是类似的.
- 我们先来看数列极限的定义.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n \geq 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

1.6 极限和连续性

- 复变函数的极限和连续性的定义和实函数情形是类似的.
- 我们先来看数列极限的定义.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n \geq 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

- 如果 $\forall X > 0, \exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $|z_n| > X$, 则称 ∞ 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$.

- 在闭复平面上, ∞ 的邻域是指

$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > X\} \cup \{\infty\},$$

- 在闭复平面上, ∞ 的邻域是指

$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > X\} \cup \{\infty\},$$

去心邻域是指

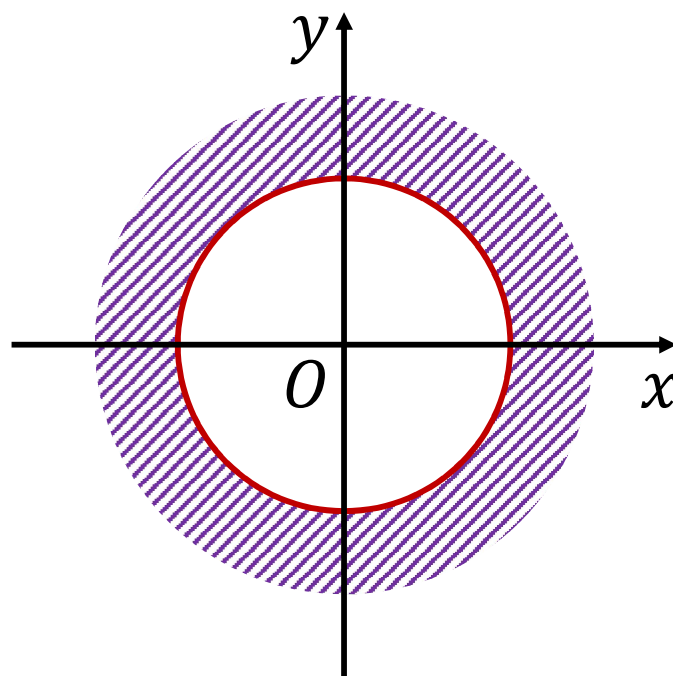
$$\overset{\circ}{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > X\}.$$

- 在闭复平面上, ∞ 的邻域是指

$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > X\} \cup \{\infty\},$$

去心邻域是指

$$\overset{\circ}{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > X\}.$$

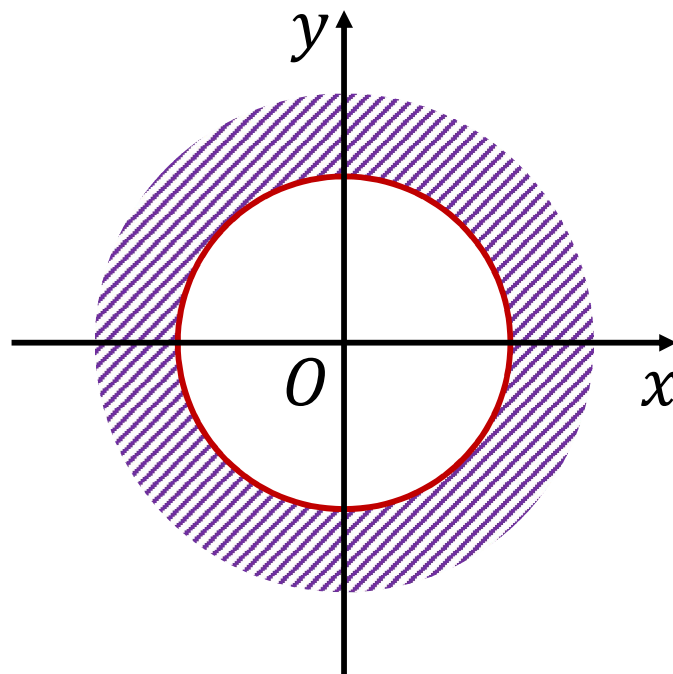


- 在闭复平面上, ∞ 的邻域是指

$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > X\} \cup \{\infty\},$$

去心邻域是指

$$\overset{\circ}{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > X\}.$$



- 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \mathbb{C}^*$ 可统一表述为: 对 z 的任意邻域 U , $\exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $z_n \in U$.

定理

设 $z_n = x_n + iy_n, z = x + iy$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \operatorname{Im} y.$$

定理

设 $z_n = x_n + iy_n, z = x + iy$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \operatorname{Im} y.$$

- **证明** 由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证.

例题: 判断数列敛散性

- 例 判断下列数列是否收敛, 如果收敛求出其极限.

- (1) $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{i\pi}{n}}$, (2) $z_n = n \cos(ni)$.

例题: 判断数列敛散性

- 例 判断下列数列是否收敛, 如果收敛求出其极限.
- (1) $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{i\pi}{n}}$, (2) $z_n = n \cos(ni)$.
- 解 (1) 由于 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \rightarrow 1$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow 0$,

例题: 判断数列敛散性

- **例** 判断下列数列是否收敛, 如果收敛求出其极限.
- (1) $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{i\pi}{n}}$, (2) $z_n = n \cos(ni)$.
- **解** (1) 由于 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \rightarrow 1$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow 0$, 因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$.

例题: 判断数列敛散性

- **例** 判断下列数列是否收敛, 如果收敛求出其极限.

- (1) $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{i\pi}{n}}$, (2) $z_n = n \cos(ni)$.

- **解** (1) 由于 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \rightarrow 1$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow 0$, 因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$.

- (2) 由于 $x_n = \frac{n(e^n + e^{-n})}{2} \rightarrow \infty$, $y_n = 0$, 因此 $\{z_n\}$ 发散.

例题: 判断数列敛散性

- **例** 判断下列数列是否收敛, 如果收敛求出其极限.

- (1) $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{i\pi}{n}}$, (2) $z_n = n \cos(ni)$.

- **解** (1) 由于 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \rightarrow 1$, $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow 0$, 因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$.

- (2) 由于 $x_n = \frac{n(e^n + e^{-n})}{2} \rightarrow \infty$, $y_n = 0$, 因此 $\{z_n\}$ 发散.

- 实际上此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$.

定义

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

定义

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 U , $\exists \delta > 0$ 使得当 $z \in \dot{U}(z_0, \delta)$ 时, 有 $f(z) \in U$,

定义

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 U , $\exists \delta > 0$ 使得当 $z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta)$ 时, 有 $f(z) \in U$, 则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \rightarrow A (z \rightarrow z_0)$.

定义

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 U , $\exists \delta > 0$ 使得当 $z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta)$ 时, 有 $f(z) \in U$, 则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \rightarrow A (z \rightarrow z_0)$.

- 对于 $z_0 = \infty$ 或 $A = \infty$ 的情形, 也可以用上述定义统一描述.

定义

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

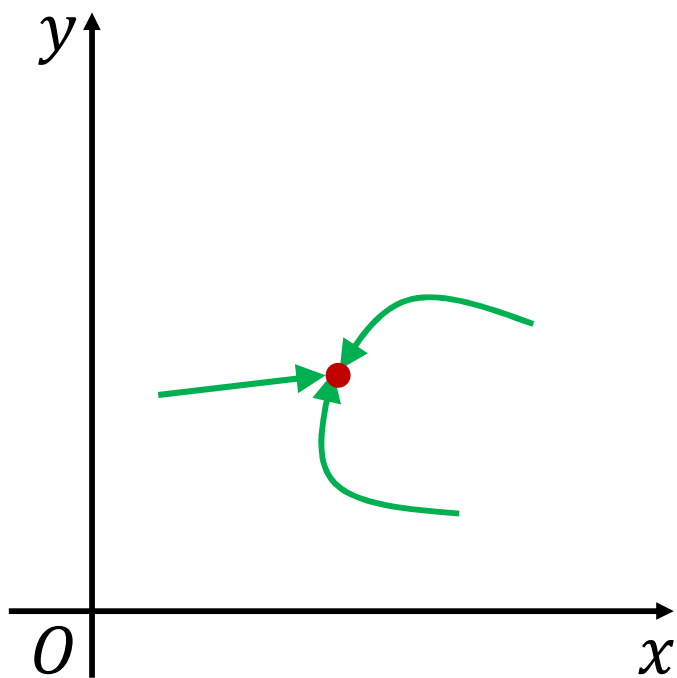
如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 U , $\exists \delta > 0$ 使得当 $z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta)$ 时, 有 $f(z) \in U$, 则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \rightarrow A (z \rightarrow z_0)$.

- 对于 $z_0 = \infty$ 或 $A = \infty$ 的情形, 也可以用上述定义统一描述.
- 不过通常说极限存在是不包括 $\lim f(z) = \infty$ 的情形的.

- 通过与二元实函数的极限对比可知, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的.

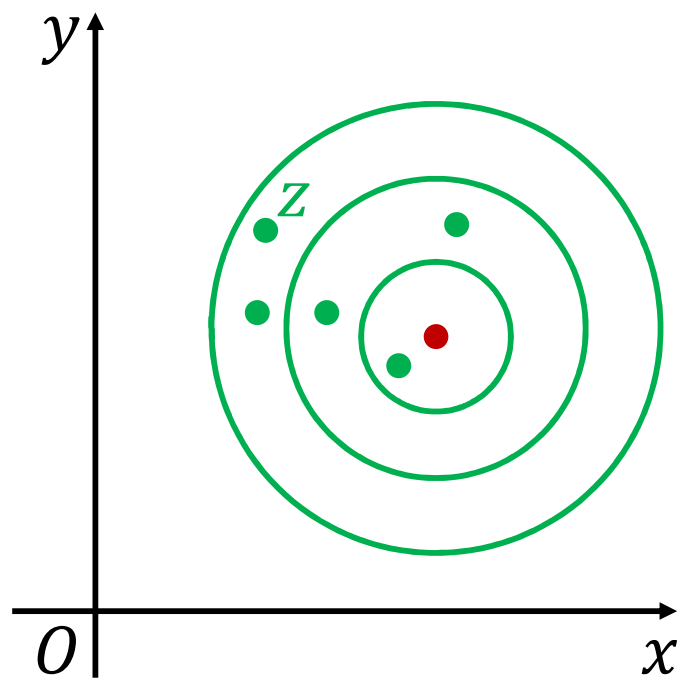
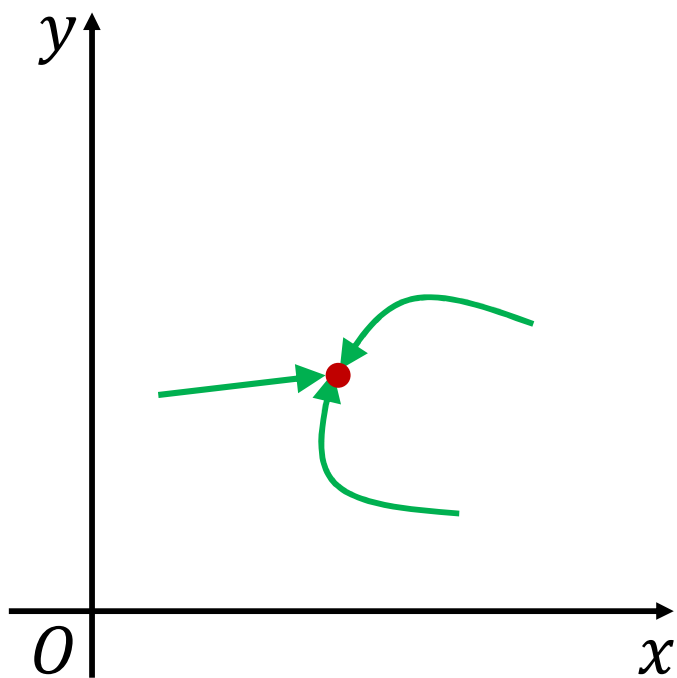
与实函数极限之联系

- 通过与二元实函数的极限对比可知, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的.
- $z \rightarrow z_0$ 可以是沿着任意一条曲线趋向于 z_0 ,



与实函数极限之联系

- 通过与二元实函数的极限对比可知, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的.
- $z \rightarrow z_0$ 可以是沿着任意一条曲线趋向于 z_0 , 或者看成 z 是在一个开圆盘内任意的点逐渐地靠拢 z_0 .



定义

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $A = u_0 + iv_0$,

定义

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $A = u_0 + iv_0$,

则 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 当且仅当

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

定义

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $A = u_0 + iv_0$,

则 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 当且仅当

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

• 证明 由三角不等式

$$|u - u_0|, |v - v_0| \leq |z - z_0| \leq |u - u_0| + |v - v_0|$$

易证.

定义

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $A = u_0 + iv_0$,

则 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 当且仅当

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

- **证明** 由三角不等式

$$|u - u_0|, |v - v_0| \leq |z - z_0| \leq |u - u_0| + |v - v_0|$$

易证.

- 当 $z_0 = \infty$ 或 $A = \infty$ 时上述结论也正确.

- 由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

- 由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, 则

$$(1) \lim_{z \rightarrow z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B.$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow z_0} (fg)(z) = AB.$$

$$(3) \text{ 当 } B \neq 0 \text{ 时, } \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f}{g} \right)(z) = \frac{A}{B}.$$

例题: 判断函数极限是否存在

- 例 证明当 $z \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

例题: 判断函数极限是否存在

- 例 证明当 $z \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.
- 证明 令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

例题: 判断函数极限是否存在

- 例 证明当 $z \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.
- 证明 令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0$$

例题: 判断函数极限是否存在

- 例 证明当 $z \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

- 证明 令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0$$

- 当 z 沿着直线 $y = kx$ 趋向于 0 时, 则 $u(x, y) \rightarrow \pm \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$.

例题: 判断函数极限是否存在

- **例** 证明当 $z \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

- **证明** 令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0$$

- 当 z 沿着直线 $y = kx$ 趋向于 0 时, 则 $u(x, y) \rightarrow \pm \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$.
- 显然这个数依赖于 k 的选择, 因此 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y)$ 不存在.
- 从而 $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ 不存在.

定义

如果 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

定义

如果 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

- 由前面的定理可知:

定理

函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

- 例如 $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$.

连续函数的四则运算和复合

- 例如 $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$.
- $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x, y) = x^2 - y^2$ 处处连续.

连续函数的四则运算和复合

- 例如 $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$.
- $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x, y) = x^2 - y^2$ 处处连续.
- 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

连续函数的四则运算和复合

- 例如 $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$.
- $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x, y) = x^2 - y^2$ 处处连续.
- 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 在 z_0 处仍然连续.

连续函数的四则运算和复合

- 例如 $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$.
- $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x, y) = x^2 - y^2$ 处处连续.
- 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

- 显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

也处处连续,

- 显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

也处处连续, 有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

- 显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

也处处连续, 有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

- 有时候我们会遇到在曲线上连续的函数, 它指的是当 z 沿着该曲线趋向于 z_0 时, $f(z) \rightarrow f(z_0)$.

- 显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

也处处连续, 有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

- 有时候我们会遇到在曲线上连续的函数, 它指的是当 z 沿着该曲线趋向于 z_0 时, $f(z) \rightarrow f(z_0)$.
- 对于闭曲线或包含端点的曲线段, 其之上的连续函数 $f(z)$ 是有界的.

例题:函数连续性的判定

- 例 证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

例题:函数连续性的判定

- **例** 证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.
- **证明** 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$.
- 那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

例题:函数连续性的判定

- **例** 证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.
- **证明** 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$.
- 那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.
- 从而 $-v(x, y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续.
- 所以 $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

例题:函数连续性的判定

- **例** 证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.
- **证明** 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$.
- 那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.
- 从而 $-v(x, y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续.
- 所以 $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.
- 另一种看法是, 函数 $g(z) = \bar{z} = x - iy$ 处处连续, 从而 $g(f(z))$ 在 z_0 处连续.

- 可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别.

- 可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别.
- 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 \mathbb{C} 是一个域, 上面可以做除法.

- 可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别.
- 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 \mathbb{C} 是一个域, 上面可以做除法.
- 这就导致了复变函数有**导数**, 而不是像多变量实函数只有偏导数.

- 可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别.
- 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 \mathbb{C} 是一个域, 上面可以做除法.
- 这就导致了复变函数有**导数**, 而不是像多变量实函数只有偏导数.
- 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.