

姓名: 张三

学号: BA00000000

**习题 1.1.1.** 证明  $\mathbf{N}_{L/K}(\alpha\beta) = \mathbf{N}_{L/K}(\alpha)\mathbf{N}_{L/K}(\beta)$ ,  $\mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha+\beta) = \mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha) + \mathrm{Tr}_{L/K}(\beta)$ .

证明.

□

**习题 1.1.2.** 对于  $\alpha \in L, a \in K$ , 证明  $\mathbf{N}_{L/K}(a\alpha) = a^n \mathbf{N}_{L/K}(\alpha)$ ,  $\mathrm{Tr}_{L/K}(a\alpha) = a \mathrm{Tr}_{L/K}(\alpha)$ , 其中  $n = [L : K] = \dim_K L$ .

证明.

□

**习题 1.1.9.** 举一个不可分扩张的例子, 使得双线性型  $(x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{L/K}(xy)$  退化.

解答.

□

**习题 1.2.2.** 如果  $b \in B$  在  $A$  上代数, 即被一个  $A$  系数非零多项式零化, 则  $b$  在  $A$  上整当且仅当其首一极小多项式 ( $\in \mathrm{Frac} A[x]$ ) 是  $A$  系数的. 因此整闭包是整闭的.

证明.

□

**习题 1.2.5.** 设  $A \subseteq B \subseteq C$  是整环. 如果  $B$  是有限生成  $A$  模,  $C$  是有限生成  $B$  模, 则  $C$  是有限生成  $A$  模.

证明.

□

**习题 1.2.7.** 利用此法计算  $\sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$  的任一零化多项式.

解答.

□

**习题 1.2.8.** 证明整闭包构成一个环. 如果  $B$  在  $A$  上代数, 则  $B$  的分式域等于该整闭包的分式域.

证明.

□

**习题 1.2.9.**  $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}[i], \mathbb{F}_p[t]$  是整闭的.

证明.

□

**习题 1.2.17.** 设  $d \neq 0, 1$  是无平方因子整数. 当  $d \equiv 1 \pmod{4}$  时  $\Delta_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})} = d$ ; 当  $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$  时  $\Delta_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})} = 4d$ .

证明.

□

**习题 1.2.23.** 证明  $1, \theta, \frac{1}{2}(\theta + \theta^2)$  是数域  $\mathbb{Q}(\theta)$  的一组整基, 其中  $\theta^3 - \theta - 4 = 0$ .

证明.

□

**习题 1.2.24.** (选做) 证明  $\Delta_K \equiv 0, 1 \pmod{4}$  (搜索 Stickelberger's discriminant relation).

证明.

□