3.3 高阶导数

- 沿直线运动的物体的速度 $v(t)$ 是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的变化率, 即 $v(t) = s'(t)$. 而加速度 $a(t)$ 是速度 $v(t)$ 对时间 t 的变化率, 即这种导数称为 $s(t)$ 对 t 的二阶导数.
- 例 一物体沿单位圆逆时针匀速运动, 其位置函数为 $(s_1, s_2) = (\cos t, \sin t)$, 则速度为 $(v_1, v_2) = (-\sin t, \cos t)$, 加速度为 $(a_1, a_2) = (-\cos t, -\sin t)$, 因此该物体受力 $F = ma = (-m\cos t, -m\sin t)$, 该力为指向圆心的大小固定的力, 被称为向心力.
- 对导函数再讨论其可导性或再求导数, 甚至可以对导函数的导函数继续讨论下去, 则就是本节所要介绍的高阶导数.

- **定义** 如果函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在点 x 处可导, 就称 $y=f(x)$ 在 x 处二阶可导. $f'(x)$ 在点 x 处的导数称为函数 $y=f(x)$ 在 x 点处的二阶导数, 记作 $f''(x), y'', \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, 即

$$f''(x)=[f'(x)]' \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

- 此处的分母表示 $(\mathrm{d}x)^2$, 即 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 y$.
- 极限形式为 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$.
- 类似地, 我们可以定义三阶导数 $f'''(x), y''', \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}$, 四阶导数 $f^{(4)}(x), y^{(4)}, \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4}$ 等等.

- 一般地，$y=f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数的导数称为 $f(x)$的 n 阶导数，记作 $f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$，即

$$f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]' \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

- 二阶及二阶以上的导数称为高阶导数，$f'(x)$ 称为一阶导数. 有时候为了方便也称 $f(x)$ 为零阶导数，即 $f^{0}(x)=f(x)$.
- 注意，低阶导数存在不能推出更高阶的导数存在.
- 例如 $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$ 在 $x=0$ 处可导，但导函数 $f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 处不可导，即 $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$ 在 $x=0$ 处不是二阶可导的. 实际上 $x^{n+\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 处 n 阶可导但不是 $(n+1)$ 阶可导.

- 一般函数的高阶导数难以求得，我们本节主要介绍三种情形的高阶导数.
- (1) 多项式/幂函数/对数函数
- 例 求 $y = 2x^3 - x^2 + 5x + 1$ 的各阶导数.
- 解 $y' = 6x^2 - 2x + 5, y'' = 12x - 2, y''' = 12.$
- 当 $n \geq 4$ 时，$y^{(n)} = 0.$
- 从这个例子中可以看出，多项式函数任意阶可导，且每次求导后仍然为多项式，次数降低一次直至为 0.
- 一般地，若 $y = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0\ (a_m \neq 0)$，则

$$y^{(n)} = \begin{cases} a_m m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} + \cdots + a_n n!, & n < m, \\ a_m m!, & n = m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$

- 例 求 $y = x^{\mu}$ (μ 为常数)的各阶导数.
- 解 $y' = \mu x^{\mu-1}$, $y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$, …
- 一般地, $y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}, n = 0,1,2,\dots$
- 如果 μ 是正整数则情形同多项式, 上式亦成立.
- 特别地, 我们有 $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, n = 0,1,2,\dots$
- 结论 $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$. 如果 $F'(x) = f(x)$, 则 $F^{(n)} = f^{(n-1)}$.
- $[f(x+C)]^{(n)} = f^{(n)}(x+C)$, $f(\lambda x)^{(n)} = \lambda^n f^{(n)}(\lambda x)$.

- 由此可知

$$\left[\frac{1}{(x+C)^2}\right]^{(n)} = -\left(\frac{1}{x+C}\right)^{(n+1)} = \frac{(-1)^n(n+1)!}{(x+C)^{n+2}},$$

$$[\ln|x+C|]^{(n)} = \left(\frac{1}{x+C}\right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+C)^n}.$$

- 这意味着特别地,

$$[\ln(C+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+C)^n}, \qquad [\ln(C-x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x-C)^n}.$$

- 求一个函数的 n 阶导数时，可以先求一阶导数、二阶导数、三阶导数，根据其中的规律，归纳得到函数的 n 阶导数. 这种求函数 n 阶导数的方法我们称为直接法.

- 利用直接法可以求一些简单函数的高阶导数. 对于复杂的函数，用直接法很难求出 n 阶导数. 下面介绍间接法，为此先介绍高阶导数的运算法则.

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}, \qquad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad \text{(莱布尼兹公式)}.$$

- 特别地，

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + 2uv'', \qquad (uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + v'''.$$

- 利用高阶导数运算法则，以及常用高阶导数公式，通过适当的函数变形求出函数 n 阶导数的方法称为间接法.
- 例 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$________.
- 解 由于 $y=\ln 2+\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)=\ln 2+\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|$，因此

$$y^{(n)}=\left[\ln\left|x-\frac{1}{2}\right|\right]^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n}},$$

$$y^{(n)}(0)=-2^{n}(n-1)!.$$

- 例 设 $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 则 $y^{(99)}(0)=$________.

- 解 由于 $y=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]=\frac{1}{2}[\ln|x-1|-\ln|x+1|]$, 因此

$$y^{(99)}=\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^{100}98!}{(x-1)^{99}}-\frac{(-1)^{100}98!}{(x+1)^{99}}\right]$$

$$=\frac{98!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{99}}-\frac{1}{(x+1)^{99}}\right],$$

$$y^{(99)}(0)=-98!.$$

- 例 求 $y=\frac{x}{1-x^2}$ 的各阶导数.

- 解 由于 $y=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$, 因此

$$y^{(n)}=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

- 例 求 $y=\frac{1}{x^2-1}$ 的各阶导数.

- 解 由于 $y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$, 因此

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

- 对于一般的有理函数，我们是不是可以类似地求得任意阶导数呢？
- 实际上是可以的，但一般的情形过于复杂，我们只考虑 $g(x)$ 可以分解为一些一次多项式的乘积的情形.
- 对于非零多项式 $f(x), g(x)$，存在多项式 $q(x), r(x)$ 使得

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \qquad \deg r < \deg g .$$

- 这被称为多项式的带余除法. 如此，有理函数 $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$，其中多项式 $q(x)$ 的各阶导数容易求得，而 $\frac{r(x)}{g(x)}$ 可以表为一些形如 $\frac{a}{(x+b)^k}$ 的有理函数之和，从而可以求得它的导数.

- 例 设 $y=\frac{x^5}{(x-1)^2(x+1)}$. 由于

$$y=x^2+x+2+\frac{2x^2-x-2}{(x-1)^2(x+1)}=x^2+x+2+\frac{1}{4(x+1)}+\frac{7}{4(x-1)}-\frac{1}{2(x-1)^2},$$

因此 $n\geq 3$ 时,

$$y^{(n)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}+\frac{7}{4}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n+1)}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}+\frac{7}{4}\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{4}\left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}}+\frac{7(x-1)-2(n+1)}{(x-1)^{n+2}}\right].$$

- 例 设 $y=\arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$, 其中 $n>1$.
- 解 由于 $y'=\frac{1}{1+x^2}$, 因此 $(1+x^2)y'=1$.
- 两边同时对 x 求 $(n-1)$ 阶导数, 则

$$(1+x^2)y^{(n)}+2(n-1)xy^{(n-1)}+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}=0.$$

- 令 $x=0$, 则 $y^{(n)}=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}$.
- 由于 $y(0)=0, y'(0)=1$, 因此

$$y^{(n)}=\begin{cases}(-1)^m(2m)!, & n=2m+1,\\ 0, & n=2m,\end{cases}\quad m=1,2,\dots$$

- 如果允许使用复数的话，$y' = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$，

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!\sin(n\operatorname{arccot} x)}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}.$$

- 类似地，

$$(e^x\cos x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right).$$

- (2) 指数函数
- 例 求 $y = e^{\lambda x}$ (λ 为常数)的各阶导数.
- 解 $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda f'(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$.
- 归纳可知 $y^{(n)} = \left(e^{\lambda x}\right)^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$. 特别地, $(e^x)^{(n)} = e^x$.
- 例 求 $y = xe^x$ 的各阶导数.
- 解 $y' = x' \cdot e^x + xe^x = (1+x)e^x$,
- $y'' = (1+x)' \cdot e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$.
- 归纳可知 $y^{(n)} = (x+n)e^x$.

- 例 求 $y=x^2e^{-x}$ 的 10 阶导数.
- 解 由莱布尼兹公式,

$$y^{(10)}=\left(x^2e^{-x}\right)^{(10)}=\sum_{k=0}^{10}\mathrm{C}_{10}^{k}\left(x^2\right)^{(k)}\left(e^{-x}\right)^{(n-k)}$$

$$=x^2\left(e^{-x}\right)^{(10)}+\mathrm{C}_{10}^{1}\cdot 2x\left(e^{-x}\right)^{(9)}+\mathrm{C}_{10}^{2}\cdot 2\left(e^{-x}\right)^{(8)}$$

$$=x^2e^{-x}-20xe^{-x}+90e^{-x}=\left(x^2-20x+90\right)e^{-x}.$$

- 一般地, 如果 $P(x)$ 是多项式, $P(x)e^{\lambda x}$ 的各阶导数仍然为 $Q(x)e^{\lambda x}$ 这种形式, 其中 $Q(x)$ 是与 $P(x)$ 同次数的多项式.
- 例如由莱布尼兹公式有

$$\left(xe^{\lambda x}\right)^{(n)} = x\lambda^n e^{\lambda x} + \mathrm{C}_n^1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} = \lambda^n \left(x + \frac{n}{\lambda}\right) e^{\lambda x},$$

$$\left(x^2 e^{\lambda x}\right)^{(n)} = x^2 \lambda^n e^{\lambda x} + \mathrm{C}_n^1 \cdot 2x \cdot \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \mathrm{C}_n^2 \cdot 2 \cdot \lambda^{n-2} e^{\lambda x}$$

$$= \lambda^n \left(x^2 + \frac{2n}{\lambda} + \frac{n(n-1)}{\lambda^2}\right) e^{\lambda x}.$$

- (3) 三角函数
- 例 求 $y = \sin \omega x$ (ω 为常数)的各阶导数.
- 解 $y' = \omega \cos \omega x = \omega \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right)$, (奇变偶不变,符号看象限)

$$y'' = \omega^2 \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right) = \omega^2 \sin\left(\omega x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = \omega^3 \cos\left(\omega x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \omega^3 \sin\left(\omega x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(n)} = \omega^n \sin\left(\omega x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

- 同理 $(\cos \omega x)^{(n)} = \omega^n \cos\left(\omega x + \frac{n\pi}{2}\right), n = 0,1,2,\ldots$

- 例 求 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ 的 10 阶导数.
- 解 由于

$$y=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{\cos 4x}{4},$$

- 因此 $y^{(10)}=\frac{1}{4}\cdot 4^{10}\cos\left(4x+10\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-4^9\cos 4x$.

- **另解** 由于 $$y' = 4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x$$ $$= 4\sin x\cos x\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)$$ $$= -2\sin 2x\cos 2x = -\sin 4x\,,$$

因此 $y^{(10)} = -(\sin 4x)^{(9)} = -4^9\sin\left(4x + 9\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -4^9\cos 4x\,.$

- **例** 求 $y = \sin x\sin 3x$ 的 20 阶导数.

- **解** 由于 $y = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$, 因此

$$y^{(20)} = \frac{1}{2}\cdot\left[2^{20}\cos\left(2x + 20\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 4^{20}\cos\left(4x + 20\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= 2^{19}\cos 2x - 2^{39}\cos 4x\,.$$

- 一般地，由 $\sin\omega x$ 和 $\cos\omega x$ 构成的多项式，总可以通过积化和差最终化为若干这种形式的三角函数的线性组合.
- 例 求 $y=\sin x\sin 2x\sin 3x$ 的各阶导数.
- 解 由于

$$y=\frac{1}{2}(\cos x-\cos 2x)\sin 3x=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 4x+\sin 2x}{2}-\frac{\sin 5x+\sin x}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{4}(-\sin x+\sin 2x+\sin 4x-\sin 5x),$$

- 因此

$$y^{(n)}=\frac{1}{4}\left[-\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+4^n\sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)-5^n\sin\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right)\right].$$

- 常用高阶导数公式

$$(x^{\mu})^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}, \qquad (x^{n})^{(n)} = n!.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \qquad [\ln|x|]^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{x^n}.$$

$$\left(e^{\lambda x}\right)^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

$$(\sin\omega x)^{(n)} = \omega^n \sin\left(\omega x + \frac{n\pi}{2}\right), \qquad (\cos\omega x)^{(n)} = \omega^n \cos\left(\omega x + \frac{n\pi}{2}\right).$$