

第二章 解析函数

2.1 解析函数的概念

作业 1. 判断题: 如果 $f'(z_0)$ 存在, 那么 $f(z)$ 在 z_0 解析. (×)

解析. 解析要求在 z_0 的一个邻域内都可导才行. ■

作业 2. 判断题: 如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的奇点, 那么 z_0 也是 $f(z) + g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点. (×)

解析. 例如 0 是 $f(z) = -g(z) = \frac{1}{z}$ 的奇点却不是 $f(z) + g(z) = 0$ 的奇点.

例如 1 是 $f(z) = g(z) = \bar{z}$ 的奇点却不是 $f(z)/g(z) = 1$ 的奇点. ■

作业 3. 单选题: (2021 年 A 卷) 函数 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域内可导是 $f(z)$ 在该邻域内解析的 (C).

(A) 充分条件

(B) 必要条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件

解析. 邻域是个开集, 其中每个点都存在一个邻域被包含在其中. ■

作业 4. (2021 年 A 卷) 设 $f(z) = \frac{1}{5}z^5 - (1+i)z$, 解方程 $f'(z) = 0$.

解. 由于 $f'(z) = z^4 - (1+i) = 0$, 因此

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[4]{1+i} = \sqrt[4]{2} \exp\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}i\right), k = 0, 1, 2, 3 \\ &= \sqrt[4]{2} \exp\left(\frac{\pi i}{16}\right), \sqrt[4]{2} \exp\left(\frac{9\pi i}{16}\right), \sqrt[4]{2} \exp\left(\frac{17\pi i}{16}\right), \sqrt[4]{2} \exp\left(\frac{25\pi i}{16}\right). \end{aligned}$$
 ■

2.2 函数解析的充要条件

作业 5. 判断题: 如果 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 可导 (指偏导数存在), 那么 $f(z) = u + iv$ 亦可导. (×)

解析. 不仅要 u, v 可导, 还需要可微, 还需要满足 C-R 方程才行. ■

作业 6. 单选题: (2021 年 B 卷) 下列函数中, 为解析函数的是 (C).

- (A) $x^2 - y^2 - 2xyi$ (B) $x^2 + xyi$
(C) $2(x-1)y + i(y^2 - x^2 + 2x)$ (D) $x^3 + iy^3$

解析. 根据 C-R 方程可知只有 C 满足

$$u_x = v_y = 2y, \quad u_y = -v_x = -2x + 2.$$

实际上 $2(x-1)y + i(y^2 - x^2 + 2x) = -iz^2 + 2iz$. ■

作业 7. 填空题: 函数 $\frac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$ 的奇点为 $-1, \pm i$.

解析. 由于分子分母都是解析函数, 因此奇点是分母为 0 的点. ■

作业 8. 填空题: (2022 年 A 卷) 如果函数 $f(z) = x^2 - 2xy - y^2 + i(ax^2 + bxy + cy^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a + b + c =$ 2.

解析. 由 C-R 方程,

$$u_x = 2x - 2y = v_y = bx + 2cy, \quad u_y = -2x - 2y = -v_x = -(2ax + by).$$

因此 $a = 1, b = 2, c = -1, a + b + c = 2$. ■

作业 9. 下列函数何处可导? 何处解析?

- (1) $f(z) = 1/\bar{z}$; (2) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$;
(3) $f(z) = e^{x^2+y^2}$; (4) $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$.

解. (1) 由于 $f(z) = \frac{x+yi}{x^2+y^2}, u = \frac{x}{x^2+y^2}, v = \frac{y}{x^2+y^2}$,

$$u_x = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -v_y, \quad u_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = v_x,$$

因此 $f(z)$ 处处不可导, 处处不解析.

(2) 由于 $u = x^3 - 3xy^2, v = 3x^2y - y^3$,

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y = 3x^2 - 3y^2, \quad u_y = -6xy = -v_x = -6xy,$$

因此 $f(z)$ 在 处处可导, 处处解析. 事实上 $f(z) = z^3$.

(3) 由于 $u = e^{x^2+y^2}, v = 0$,

$$u_x = 2xe^{x^2+y^2} = v_y = 0, \quad u_y = 2ye^{x^2+y^2} = -v_x = 0,$$

因此 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处可导, 处处不解析.

(4) 由于 $u = \sin x \operatorname{ch} y, v = \cos x \operatorname{sh} y$,

$$u_x = \cos x \operatorname{ch} y = v_y = \cos x \operatorname{ch} y, \quad u_y = \sin x \operatorname{sh} y = -v_x = \sin x \operatorname{sh} y,$$

因此 $f(z)$ 处处可导, 处处解析. 事实上 $f(z) = \sin z$. ■

作业 10. 指出下列函数 $f(z)$ 的解析区域, 并求出其导数.

$$(1) z^3 + 2iz; \quad (2) \frac{1}{z^2 - 1}; \quad (3) \frac{az + b}{cz + d} \quad (c, d \text{ 不全为零}).$$

解. (1) 处处解析, $f'(z) = 3z^2 + 2i$.

(2) 在 $z \neq \pm 1$ 处解析, $f'(z) = -\frac{2z}{(z^2 - 1)^2}$.

(3) 若 $c = 0$, 则处处解析; 若 $c \neq 0$, 则在 $z \neq -\frac{d}{c}$ 处解析. $f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$. ■

作业 11. 设 $my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$ 为解析函数, 试确定实数 l, m, n 的值.

解. 由于 $u = my^3 + nx^2y, v = x^3 + lxy^2$.

$$u_x = 2nxy = v_y = 2lxy, \quad u_y = 3my^2 + nx^2 = -v_x = -3x^2 - ly^2.$$

因此 $n = l, 3m = -l, n = -3$, 故 $l = n = -3, m = 1$. ■

2.3 初等函数

作业 12. 选择题: (2021 年 A 卷) 下列式子一定正确的是 (BC).

$$\begin{array}{ll} (A) \operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z & (B) \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \\ (C) \operatorname{Ln} \sqrt{z} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} z & (D) \operatorname{Ln} z^2 = 2 \operatorname{Ln} z \end{array}$$

作业 13. 填空题: (2021 年 B 卷) 设复数 $z = 1^{\sqrt{3}}$, 则 $|z| = \underline{1}$.

解析. $z = e^{\sqrt{3} \operatorname{Ln} 1} = e^{2\sqrt{3}k\pi i}, k \in \mathbb{Z}$, 所以 $|z| = 1$. ■

作业 14. 填空题: (2022 年 A 卷) i^{-i} 的主值是 $\underline{e^{\pi/2}}$.

解析. 幂函数主值为 $i^{-i} = e^{-i \ln i} = e^{-i \cdot \frac{\pi i}{2}} = e^{\pi/2}$. ■

作业 15. (2021 年 A 卷) 求 $\sin(1+i)$ 的虚部.

解. 由于

$$\begin{aligned}\sin(1+i) &= \frac{e^{i(1+i)} - e^{-i(1+i)}}{2i} = \frac{e^{-1+i} - e^{1-i}}{2i} \\ &= \frac{e^{-1}(\cos 1 + i \sin 1) - e(\cos 1 - i \sin 1)}{2i} \\ &= \frac{(e^{-1} - e) \cos 1 + i(e^{-1} + e) \sin 1}{2i} \\ &= -\frac{(e^{-1} - e) \cos 1}{2}i + \frac{(e^{-1} + e) \sin 1}{2},\end{aligned}$$

因此 $\sin(1+i)$ 的虚部是 $\frac{(e - e^{-1}) \cos 1}{2}$. ■

作业 16. (2022 年 A 卷) 复变函数 $f(z) = \sin z$ 和实变量函数 $g(x) = \sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试说出 3 点.

解. 例如

- $f'(z) = \cos z, g'(x) = \cos x$.
 - 都是奇函数.
 - 周期都是 $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 - $\sin z$ 处处可导, $\sin x$ 处处可导.
 - $\sin z$ 无界, $\sin x$ 有界.
-

作业 17. 下列关系是否正确? 证明或给出反例.

$$(1) \overline{e^z} = e^{\bar{z}}; \quad (2) \overline{\sin z} = \sin \bar{z}.$$

解. (1) 正确.

$$\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos y + i \sin y)} = e^x(\cos y - i \sin y) = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}.$$

(2) 正确.

$$\overline{\sin z} = \frac{\overline{e^{iz} - e^{-iz}}}{2i} = \frac{e^{-i\bar{z}} - e^{i\bar{z}}}{-2i} = \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i} = \sin \bar{z}.$$
■

作业 18. 找出下列方程的全部解.

$$(1) 1 + e^z = 0; \quad (2) \sin z + \cos z = 0.$$

解. (1) $z = \operatorname{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

(2) 由于

$$\sin z + \cos z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0,$$

$$(1+i)e^{iz} = (1-i)e^{-iz}, \quad e^{2iz} = \frac{1-i}{1+i} = -i,$$

$$2iz = \operatorname{Ln}(-i) = (2k - \frac{1}{2})\pi i, \quad z = (k - \frac{1}{4})\pi, k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

作业 19. 求 $\operatorname{Ln}(-i), \operatorname{Ln}(-3+4i)$ 和它们的主值.

解.

$$\operatorname{Ln}(-i) = \ln|-i| + i \operatorname{Arg}(-i) = \left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

主值为 $\ln(-i) = -\frac{1}{2}\pi i$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(-3+4i) &= \ln 5 + i \operatorname{Arg}(-3+4i) \\ &= \ln 5 + \left(2k\pi + \pi - \arctan \frac{4}{3}\right)i, k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

主值为 $\ln(-3+4i) = \ln 5 + \left(\pi - \arctan \frac{4}{3}\right)i. \quad \blacksquare$

作业 20. 求 $\exp\left(1 - \frac{\pi i}{2}\right), 3^i$ 和 $(1+i)^i$ 的值.

解.

$$\exp\left(1 - \frac{\pi i}{2}\right) = -ei.$$

$$3^i = e^{i \operatorname{Ln} 3} = e^{i(\ln 3 + 2k\pi i)} = e^{-2k\pi}(\cos \ln 3 + i \sin \ln 3), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} (1+i)^i &= \exp[i \operatorname{Ln}(1+i)] \\ &= \exp\left[i\left[\ln 2 + \left(2k + \frac{1}{4}\right)\pi i\right]\right] \\ &= \exp\left[\left(-2k - \frac{1}{4}\right)\pi\right](\cos \ln 2 + i \sin \ln 2), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 21. 注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}$, $y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 我们定义 f 对 z 和 \bar{z} 的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

(1) 证明 C-R 方程等价于 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. 所以我们可以把 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 叫做 C-R 方程.

(2) 利用该结论求函数 $f(z) = \bar{z}$, $z \operatorname{Im} z$, $e^{z\bar{z}}$ 的可导点和解析点.

作业 22. 仿照复数的指数函数, 我们可以尝试在矩阵上定义指数函数. 设 $A \in M_m(\mathbb{C})$ 是一个 $m \times m$ 的复矩阵, 我们想说明极限

$$e^A := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} A \right)^n$$

存在.

(1) 当 $A = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 是一个对角矩阵时, 证明 e^A 存在且

$$e^A = \operatorname{diag}\{e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_m}\}.$$

(2) 当

$$A = J_m(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$$

是 Jordan 块时, 证明 e^A 存在.

(3) 根据每个方阵都可以相似于一些 Jordan 块证明 e^A 总存在.

(4) 当 $A = xE + yJ = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ 时, 证明 $e^A = \begin{pmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$.

(5) 证明 $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$.

(6) 证明 $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.