



合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: <https://zhangshenxing.gitee.io>

第二章 解析函数

本章作业

- 2, 3, 4
- 6, 8, 11
- 12, 15, 18

- ① 解析函数的概念
- ② 函数解析的充要条件
- ③ 初等函数

复变函数的导数

由于 \mathbb{C} 是一个域, 我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义

设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 D , $z_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 称 $f(z)$ 在 D 内可导.

典型例题: 线性函数的不可导性

例

函数 $f(z) = x + 2yi$ 在哪些点处可导?

解

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}. \end{aligned}$$

当 $\Delta x = 0$ 时, 上述极限为 2; 当 $\Delta y = 0$ 时, 上述极限为 1. 因此该极限不存在, $f(z)$ 处处不可导.

若将 $f(z)$ 视为二元实变量的函数, 则该函数在不同方向的方向导数不同.

例题: 复变函数的导数

练习

函数 $f(z) = x - yi$ 在哪些点处可导?

答案

处处不可导.

例

求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z. \end{aligned}$$

和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

定理

- $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(cf)' = cf'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z)$;
- $f'(z) = \frac{1}{(f^{-1})'(w)}, w = f(z)$.

定理

若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

证明

该定理的证明和实变量情形完全相同. 设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z \\ &= f'(z_0) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

□

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

定义

如果存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $dw = A\Delta z$.

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $dw = f'(z_0)\Delta z$, $dz = \Delta z$. 故 $dw = f'(z_0)dz$, $f'(z_0) = \frac{dw}{dz}$.

定义

- 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数(也叫全纯函数或正则函数).
- 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

由于区域 D 是一个开集, 其中的任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 的邻域. 所以 $f(z)$ 在 D 内解析和在 D 内可导是等价的.

如果 $f(z)$ 在 z_0 解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集.

例

研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

解

由于

$$\begin{aligned}\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} \\ &= \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\Delta x - \Delta yi}{\Delta x + \Delta yi},\end{aligned}$$

若 $z = 0$, 则当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时该极限为 0.

若 $z \neq 0$, 则当 $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时该极限为 $\bar{z} + z$; 当 $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时该极限为 $\bar{z} - z$. 因此此时极限不存在.

故 $f(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导, 从而处处不解析.

- ① 解析函数的概念
- ② 函数解析的充要条件
- ③ 初等函数

从上一节的例子中观察到: 解析函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 x, y, \bar{z} 之类的内容. 这种直观印象实际上是有道理的.

我们知道, 给一个复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 等价于给两个二元实变函数. 我们将从 u, v 的偏导数来推导出 f 可导的充要条件.

可导的等价刻画: 形式推导

为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.
设 f 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

由于 $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$, 因此 u, v 可微且

$$du = a dx - b dy, \quad dv = b dx + a dy.$$

故 $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$.

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, u_y = -v_x$. 由全微分公式

$$du = u_x dx + u_y dy = u_x dx - v_x dy,$$

$$dv = v_x dx + v_y dy = v_x dx + u_x dy,$$

$$\begin{aligned} df &= d(u + iv) = (u_x + iv_x) dx + (-v_x + iu_x) dy \\ &= (u_x + iv_x) d(x + iy) \\ &= (u_x + iv_x) dz = (v_y - iu_y) dz. \end{aligned}$$

故 $f(z)$ 在 z 处可导, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

柯西-黎曼方程 (C-R 方程)

函数 $f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u, v 可微且满足
柯西-黎曼方程

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$



具体计算时, 我们先判断 $f(z)$ 的 u, v 的偏导数是否存在. 然后把偏导数按次序依次写出

$$u_x = \cdots, \quad u_y = \cdots$$

$$v_x = \cdots, \quad v_y = \cdots$$

列出 C-R 方程, 求出所有的可导点.

如果一个点的一个邻域内都可导, 那么这个点是解析点. 如果一个区域 D 内所有点都可导, 那么区域 D 是解析区域.

当然, 如果能用求导法则直接说明 $f(z)$ 在 D 内处处可导, 则也可以知道 $f(z)$ 是 D 内的解析函数.

柯西-黎曼方程的极坐标形式 *

设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 则

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta.$$

因此

$$u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \quad u_\theta = r(-u_x \sin \theta + u_y \cos \theta).$$

将 C-R 方程代入后, 我们可以得到 C-R 方程的极坐标形式:

$$ru_r = v_\theta, \quad rv_r = -u_\theta.$$

且

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{v_\theta - iu_\theta}{z}.$$

柯西-黎曼方程的极坐标形式 *

设 $w = f(z) = \rho e^{i\varphi}$, 则类似可得 C-R 方程

$$\rho_r = \frac{\rho\varphi_\theta}{r}, \quad \varphi_r = -\frac{\rho_\theta}{\rho r}.$$

此时

$$f'(z) = \frac{w}{z}(\varphi_\theta + ir\varphi_r) = \frac{w}{z\rho}(r\rho_r - i\rho_\theta).$$

柯西-黎曼方程的 z, \bar{z} 形式 *

如果把复变函数 f 写成

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right),$$

把 z, \bar{z} 看作独立变量, f 分别对 z 和 \bar{z} 的偏导数可定义为

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

那么 C-R 方程等价于

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (u_x - v_y) + i(v_x + u_y) = 0.$$

所以我們也可以把 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 叫做 C-R 方程.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

(1) 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u = x, v = -y$ 可知

$$u_x = 1,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = 0,$$

$$v_y = -1.$$

因为 $u_x = 1 \neq v_y = -1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

也可以从 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$ 看出.

不过这种方法由于课本上没有, 所以考试的时候最好只把它作为一种验算手段.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例 (续)

(2) 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$\begin{aligned}u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\v_x &= y, & v_y &= x.\end{aligned}$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0) = (u_x + iv_x)\Big|_{z=0} = 0.$$

也可从 $f(z) = \frac{z(z + \bar{z})}{2}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{2}$ 看出.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例 (续)

(3) 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$u_x = e^x \cos y,$$

$$u_y = -e^x \sin y,$$

$$v_x = e^x \sin y,$$

$$v_y = e^x \cos y.$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z).$$

实际上, 这个函数就是复变量的指数函数 e^z .

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

练习

求 $f(z) = 3x^2 + y^2 - 2xyi$ 的可导点和解析点.

答案

可导点为 $\operatorname{Re} z = 0$, 没有解析点.

例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

解

由于

$$u_x = 2x + ay,$$

$$u_y = ax + 2by,$$

$$v_x = 2cx + dy,$$

$$v_y = dx + 2y,$$

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$

$$a = d = 2, \quad b = c = -1,$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2y + i(-2x + 2y) = (2 - 2i)z.$$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明

由于
$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数. \square

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件等价:

- $f(z)$ 是一常数,
- $|f(z)|$ 是一常数,
- $\operatorname{Re} f(z)$ 是一常数,
- $v = u^2$,
- $f'(z) = 0$,
- $\arg f(z)$ 是一常数,
- $\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数,
- $u = v^2$.

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x, y) = c_1$ 和曲线族 $v(x, y) = c_2$ 互相正交.

证明

由于 $f'(z) = u_x - iu_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零. 对 $u(x, y) = c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x dx + u_y dy = 0,$$

从而 $(u_x, -u_y)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理 $(v_x, -v_y)$ 是 $v(x, y) = c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0,$$

因此二者正交. □

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为**保角性**.

这是因为 $df = f'(z_0) dz$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $|f'(z_0)|$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 上述例子是该结论关于 w 复平面上曲线族 $u = c_1, v = c_2$ 的一个特殊情形.

最后我们来看复数在求导中的一个应用.

例

求 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的各阶导数.

解

设 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, 则它在除 $z = \pm i$ 外处处解析. 当 $z = x$ 为实数时,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{i}{2} \left[\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right]^{(n)} \\ &= \frac{i}{2} \cdot (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right] \\ &= (-1)^{n+1} n! \operatorname{Im} \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n! \sin[(n+1) \operatorname{arccot} x]}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

- ① 解析函数的概念
- ② 函数解析的充要条件
- ③ 初等函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

- (1) $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$ (欧拉恒等式);
- (2) $\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);
- (3) $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ (级数定义);
- (4) $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z = x \in \mathbb{R}$ 时, $\exp z = e^x$ (e^x 的解析延拓).

有些人会从 $e^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

形式地代入得到欧拉恒等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们会在幂级数一节说明(1)和(3)等价.

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \text{ 型不定式}) \\ &= \exp \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.\end{aligned}$$

不妨设 $n > |z|$, 这样 $1 + \frac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \arg \left(1 + \frac{z}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \arctan \frac{y}{n+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ny}{n+x} = y.$$

故 $\exp z = e^x (\cos y + i \sin y)$.

定义指数函数

$$\exp z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

我们已经知道 $\exp z$ 是一个处处解析的函数, 且 $(\exp z)' = \exp z$.
不难看出

- $\exp z \neq 0$;
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$;
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$;
- $\exp z_1 = \exp z_2$ 当且仅当 $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$;
- $\lim_{z \rightarrow \infty} \exp z$ 不存在也不为 ∞ .

为了方便, 我们也记 $e^z = \exp z$.

指数函数的性质

指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.

例

求函数 $f(z) = \exp[(1+i)z]$ 的周期.

解

设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $\exp[(1+i)z_1] = \exp[(1+i)z_2]$. 因此存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$(1+i)z_1 = (1+i)z_2 + 2k\pi i,$$

从而 $z_1 - z_2 = k\pi(1+i)$. 所以 $f(z)$ 的周期是 $\pi(1+i)$.

一般地, $\exp(az+b)$ 的周期是 $\frac{2\pi i}{a}$ (或写成 $-\frac{2\pi i}{a}$), $a \neq 0$.

对数函数定义为指数函数的反函数. 设 $z \neq 0$, 满足方程 $\exp w = z$ 的 $w = f(z)$ 被称为对数函数, 记作 $w = \operatorname{Ln} z$.

为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\operatorname{Arg} z$ 和 $\arg z$.

设 $\exp w = z = r \exp(i\theta) = \exp(\ln r + i\theta)$, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

所以

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

我们取它的主值为

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

对于每一个 k , $\ln z + 2k\pi i$ 都给出了 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支. 特别地, 当 $z = x > 0$ 是正实数时, $\ln z$ 就是实变的对数函数.

典型例题: 对数函数的计算

例

求 $\text{Ln } 2$, $\text{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解

$\text{Ln } 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$, 主值就是 $\ln 2$.

$\text{Ln}(-1) = \ln 1 + i \text{Arg}(-1) = (2k + 1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$, 主值是 πi .

典型例题: 对数函数的计算

例

求 $\text{Ln}(-2 + 3i)$, $\text{Ln}(3 - \sqrt{3}i)$, $\text{Ln}(-3)$.

解

$$\begin{aligned}\text{Ln}(-2 + 3i) &= \ln |-2 + 3i| + i \text{Arg}(-2 + 3i) \\ &= \frac{1}{2} \ln 13 + \left(-\arctan \frac{3}{2} + \pi + 2k\pi \right) i, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ln}(3 - \sqrt{3}i) &= \ln |3 - \sqrt{3}i| + i \text{Arg}(3 - \sqrt{3}i) \\ &= \ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) i = \ln 2\sqrt{3} + \left(2k - \frac{1}{6} \right) \pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\text{Ln}(-3) = \ln(-3) + i \text{Arg}(-3) = \ln 3 + (2k + 1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

典型例题: 对数函数的计算

例

解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解

由于 $1 + \sqrt{3}i = 2 \exp \frac{\pi i}{3}$, 因此

$$z = \operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right) \pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习

求 $\ln(-1 - \sqrt{3}i)$.

答案

$$\ln 2 - \frac{2\pi i}{3}.$$

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及主辐角的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

而当 $|n| \geq 2$ 时, $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ **不成立**. 以上等式换成 $\ln z$ 均不一定成立.

设 $z_0 = x < 0$ 是负实数. 由于

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(x + yi) = \ln(-x) + \pi, \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \ln(x + yi) = \ln(-x) - \pi,$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续. 实际上, $\lim_{z \rightarrow 0} \ln z = \infty$.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数, 从而

$$(\ln z)' = \frac{1}{z},$$

$\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

对于其它分支 $\ln z + 2k\pi i$, 性质也是类似的.

设 $a \neq 0, z \neq 0$, 定义幂函数

$$\begin{aligned} w &= z^a = \exp(a \operatorname{Ln} z) \\ &= \exp[a \ln |z| + ia(\arg z + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

它的主值为

$$w = \exp(a \ln z) = \exp(a \ln |z| + ia \arg z).$$

如果 $\operatorname{Re} a > 0$, 则当 $z \rightarrow 0$ 时, 主值

$$|z^a| = |z|^a \cdot e^{-\operatorname{Im} a \cdot \arg z} \rightarrow 0.$$

因此此时我们定义 $0^a = 0$. 约定 $0^0 = 1$.

幂函数的性质: a 为整数时

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为 $\exp(2ak\pi i) = 1$, 所以 $w = z^a$ 是单值的.
此时

$$z^a = |z|^a \exp(ia \arg z)$$

就是我们之前定义的方幂.

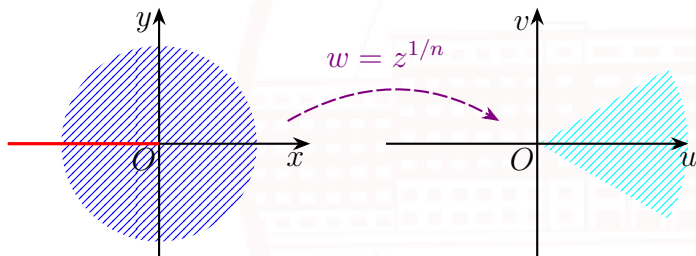
当 a 是非负整数时, z^a 在复平面上解析; 当 a 是负整数时, z^a 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上解析.

幂函数的性质: a 为分数时

当 $a = \frac{p}{q}$ 为分数, p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp \left[\frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q} \right], \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 是处处解析的. 当 $a = \frac{1}{n}$ 时, z^a 就是方根 $\sqrt[n]{z}$.



幂函数的性质: a 为其他情形

对于其它的 a , z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi ai$ 不可能是 $2\pi i$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 也是处处解析的.

a	z^a 的值	z^a 的解析区域
整数 n	单值	$n \geq 0$ 时处处解析 $n < 0$ 时除零点外解析
分数 p/q	q 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

典型例题: 幂函数的计算

例

求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解

$$\begin{aligned} 1^{\sqrt{2}} &= \exp(\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1) = \exp(\sqrt{2} \cdot 2k\pi i) \\ &= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^i &= \exp(i \operatorname{Ln} i) = \exp \left[i \cdot \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi i \right] \\ &= \exp \left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

练习

求 $(-1)^i$.

答案

$\exp(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = \exp(a \ln z) \cdot 1^a = \exp(a \ln z) \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值, 或者任意固定一个分支

$\text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i$, 我们总有

$$(z^a)' = [\exp(a \ln z)]' = \frac{a \exp(a \ln z)}{z} = \frac{az^a}{z}.$$

对于整数 n , 我们总有 $(z^a)^n = z^{an}$. 这里换成主值也成立. 而 $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 仅对主值总成立.

我们来看 $\operatorname{Ln} z^a = a \operatorname{Ln} z$ 何时成立. 由于

$$\operatorname{Ln} z^a = a \ln z + 2a\pi i \cdot \left(k + \frac{\ell}{a}\right) \pi i, \quad k, \ell \in \mathbb{Z},$$

$$a \operatorname{Ln} z = a \ln z + 2a\pi i \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

因此当且仅当 $a = \pm \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}_+$ 时, $\operatorname{Ln} z^a = a \operatorname{Ln} z$ 成立. 对于除此之外的 a , 该式子均不成立.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是**不同**的. 因为后者在 $a \notin \mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆, 以后我们总**默认** e^a **表示指数函数** $\exp a$.

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 y 成立, 我们将其推广到复数情形. 定义余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

那么欧拉恒等式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ 对任意复数 z 均成立.

三角函数的性质

不难得到

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

其中 $\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cos iy$, $\operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = -i \sin iy$.

当 $y \rightarrow \infty$ 时, $\sin iy = i \operatorname{sh} y$ 和 $\cos iy = \operatorname{ch} y$ 都 $\rightarrow \infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数. 于是我们可类似定义其它三角函数

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi, & \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}, z \neq k\pi, \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi, & \csc z &= \frac{1}{\sin z}, z \neq k\pi. \end{aligned}$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

$\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ 的周期是 $2\pi i$, $\operatorname{th} z$ 的周期是 πi .

反三角函数和反双曲函数

设 $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值)}.$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的.

同理, 我们有:

- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$
- 反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}.$

例题：解三角函数方程

例

解方程 $\sin z = 2$ 和 $\cos z = 2$.

解

由于 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$, 我们有 $e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$. 于是 $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

由于 $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$, 我们有 $e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$. 于是 $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$,

$$z = -i \operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) = 2k\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$