

合肥工业大学考试专用答卷纸 (A)

2021~2022 学年第 二 学期 课程代码 034Y01 课程名称 数学(下) 命题教师 集体 系主任审批
教学班级 学生姓名 学号 考试日期 2022 年 6 月 18 日 8:00-10:00 成绩

考生注意事项:

- 1. 本试卷分试题与答卷两部分;
- 2. 所有试题的解答(包括选择、填空)必须写在专用答卷纸上,在试题上直接作答一律无效;
- 3. 考试结束后,必须将试题、答卷整理上交,不得将试题带离考场;
- 4. 考生务必认真填写班级、姓名、学号等信息。

一、填空题(每小题 3 分,共 18 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. e , 2. $2x \cos(x^2 + 1) dx$, 3. $1/2$,
4. $y = x - 1 + 2 \ln 2$, 5. 1 , 6. 0 .

二、选择题(每小题 3 分,共 18 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	D	B	A	C	D

三、解答题(每小题 8 分,共 64 分)

1. (8 分)【解】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 2)(x + 1)} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{x + 2} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &= \frac{-2}{1} = -2. \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

2. (8 分)【解】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\arcsin x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &\stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

3. (8 分)【解】

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= \frac{3t^2 + 1}{2t + 1}, \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dy'/dt}{dx/dt} \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= \frac{6t(2t + 1) - (3t^2 + 1)2}{(2t + 1)^3} = \frac{6t^2 + 6t - 2}{(2t + 1)^3}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

4. (8 分)【解】

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 因此

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0^+) \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ &= b = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \arctan \frac{1}{x} = 0 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 因此

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= f'_+(0), \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \arctan \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ f'_+(0) &= (2x + a)|_{x=0} = a, \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \end{aligned}$$

因此 $a = -\frac{\pi}{2}$.
由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = +\infty, \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan \frac{1}{x} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \arctan \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\arctan t}{t} = 1, \end{aligned}$$

因此曲线 $y = f(x)$ 的渐近线只有 $y = 1$.
..... (1 分)

合肥工业大学考试专用答卷纸 (A)

2021~2022 学年第 二 学期 课程代码 034Y01 课程名称 数学(下) 命题教师 集体 系主任审批
教学班级 学生姓名 学号 考试日期 2022 年 6 月 18 日 8:00-10:00 成绩

5. (8 分)【解】

由

f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1) = 0 (2 分)

可得驻点 x = -1/3, 1. (2 分)

由于

f(-2) = -10, f(2) = 2, f(-1/3) = 5/27, f(1) = -1, (2 分)

因此最大值为 2, 最小值为 -10. (2 分)

6. (8 分)【证明】

证法一: 设 f(x) = tan x - x, 则 (2 分)

f'(x) = 1/cos^2 x - 1 = tan^2 x ≥ 0. (2 分)

因此 f(x) 在 (-π/2, π/2) 上单调递增, 从而 (2 分)

f(x_2) ≥ f(x_1), tan x_2 - tan x_1 ≥ x_2 - x_1. (2 分)

证法二: 设 f(x) = tan x, 则 f(x) 在 [x_1, x_2] 上连续, (x_1, x_2) 内可导. (2 分)

由拉格朗日中值定理, 存在 ξ ∈ (x_1, x_2) 使得

(f(x_2) - f(x_1)) / (x_2 - x_1) = f'(ξ), (2 分)

即

(tan x_2 - tan x_1) / (x_2 - x_1) = 1/cos^2 ξ ≥ 1. (2 分)

所以 tan x_2 - tan x_1 ≥ x_2 - x_1. (2 分)

7. (8 分)【证明】

设 F(x) = x^{2022}f(x), (2 分)

则 F(x) 在 [0, 1] 上连续, (0, 1) 内可导, (1 分)

且 F(0) = 0, F(1) = f(1) = 0. (1 分)

由罗尔中值定理, 存在 ξ ∈ (0, 1) 使得 F'(ξ) = 0. (2 分)

由于 F'(x) = x^{2022}f'(x) + 2022x^{2021}f(x) 且 ξ ≠ 0, (1 分)

所以 ξf'(ξ) + 2022f(ξ) = 1. (1 分)

8. (8 分)【解】

(1)

f'(x) = 1/x - 4/x^3 = (x^2 - 4)/x^3 = (x + 2)(x - 2)/x^3. (1 分)

当 0 < x < 2 时, f'(x) < 0. 当 x > 2 时, f'(x) > 0. (1 分)

因此 (0, 2] 是 f(x) 的单减区间, [2, +∞) 是 f(x) 的单增区间. (1 分)

所以 f(x) 只有唯一的极小值 f(2) = ln 2 + 1/2. (1 分)

(2)

f''(x) = -1/x^2 + 12/x^4 = -(x^2 - 12)/x^4 = -(x - 2√3)(x + 2√3)/x^4. (1 分)

当 0 < x < 2√3 时, f''(x) > 0. 当 x > 2√3 时, f''(x) < 0. (1 分)

因此 (0, 2√3] 是曲线 y = f(x) 的凹区间, [2√3, +∞) 是曲线 y = f(x) 的凸区间,. (1 分)

拐点为 (2√3, ln(2√3) + 1/6). (1 分)