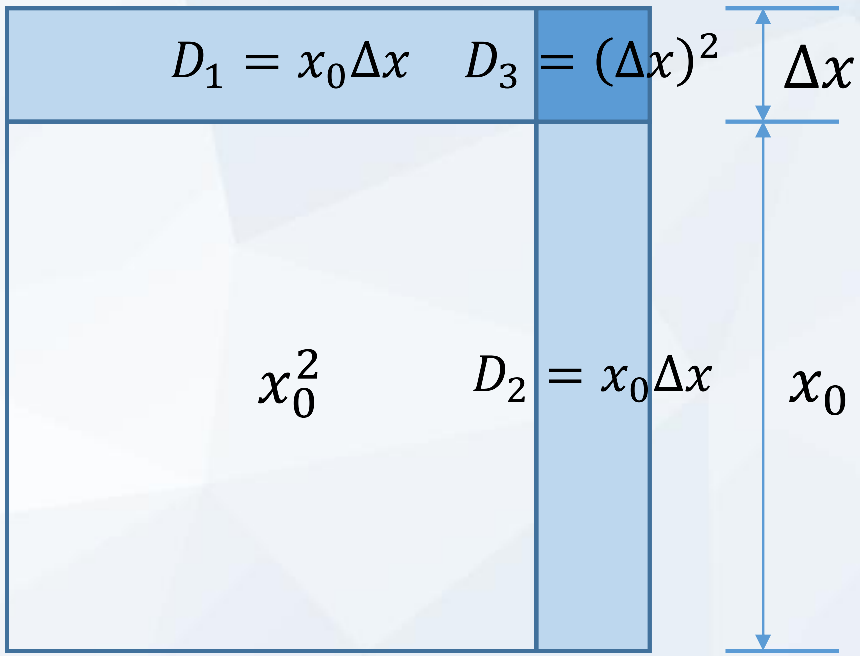
3.5 函数的微分

- 对于一个给定的函数 $y=f(x)$, 如果在某点 x_0 处给自变量 x 一个增量 Δx, 就可以得到相应的函数值的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.
- 一般而言, Δy 与 Δx 的关系非常复杂, 这给 Δy 的计算带来困难. 但如果允许有一定的误差, 我们是否能够寻求一种简便的方法, 来近似计算 Δy 呢? 这个问题就是本节将要介绍的微分问题.
- 例 一块正方形金属薄片受温度变化的影响, 其边长由 x_0 变成了 $x_0+\Delta x$, 问此薄片的面积 S 改变了多少?

- 解 $\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)$
- $= (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$
- 其中 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数, 称为 ΔS 的线性主部.
- 当 $\Delta x \to 0$ 时, $(\Delta x)^2$ 是 Δx 的高阶无穷小.
- 当 $|\Delta x|$ 充分小时, $(\Delta x)^2$ 相比于 $|\Delta x|$ 非常小, 可以忽略不计, 则增量 ΔS 可近似用 $2x_0\Delta x$ 代替, 即 $\Delta S \approx 2x_0\Delta x$.
- 这给 ΔS 的近似计算带来方便, 并且误差也很小.



- 在实际问题中，有许多函数具有这种特征，即函数的增量 $\Delta y = f(x_0 +$

- **定理** 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微当且仅当 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导. 此时 $A=f'(x_0)$.

- **证明** 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$, 即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)\right]=0.$$

- 因此 $\alpha=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)$ 满足 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$, 从而 $\alpha\Delta x=o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)$. 故

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x.$$

- 所以函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微且 $A=f'(x_0)$.

- 反过来，若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可微，存在 A 使得

$$\Delta y = A\Delta x + \beta, \beta = o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0).$$

- 于是

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + \beta}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\beta}{\Delta x} = A,$$

- 从而函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导且 $f(x_0) = A$.
- 由此可见, 可微和可导是等价的. 自然地, 我们可以定义在区间上可微函数的概念.

- 函数 $y = f(x)$ 的微分记作 $dy = df(x) = f'(x)\Delta x$.
- 当 $y = f(x) = x$ 时, $dx = \Delta x$, 因此我们直接记 dx 为 x 的微分. 从而 $dy = f'(x)dx$, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. 这就是为什么我们也将导数记为 $\frac{dy}{dx}$ 的原因. 因此我们也将导数称为微商.
- 我们可以将 dy 理解为 Δx 极小时的 Δy, 这样很自然地有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$

- 这样从微分角度重新得到了逆函数、复合函数、参数方程的求导法则.

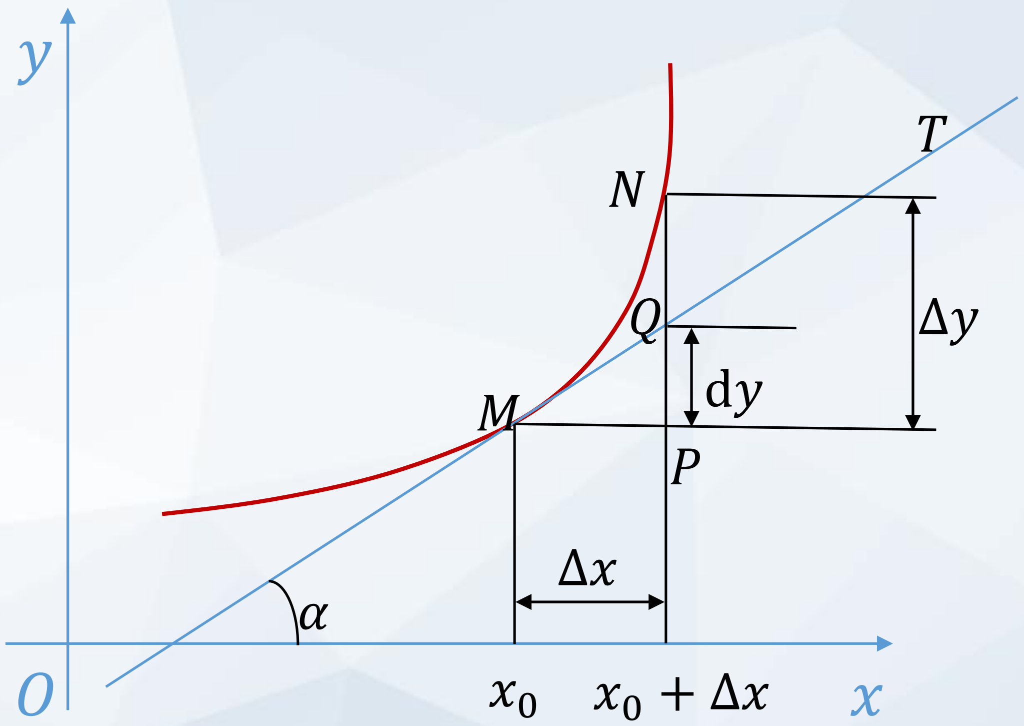
- 微分的几何意义

- 在曲线 $y=f(x)$ 上取一点 $M(x_0,y_0)$ 及其邻近点 $N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$. 过 M 作曲线 $y=f(x)$ 的切线 MT, 设其倾角为 α, 则切线 MT 的斜率为 $\tan\alpha = f'(x_0)$, 故

- $dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\mathrm{d}x = \tan\alpha\cdot\Delta x = PQ$ 是切线纵坐标的改变量;

- $\Delta y = PN$ 是曲线纵坐标的改变量;

- $\Delta y - \mathrm{d}y|_{x=x_0} = PN - PQ = QN = o(\Delta x)$.



- 由此可见，一般 $dy \neq \Delta y$. 如果 $dy = \Delta y$, 则

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y = dy = f'(x_0)\Delta x,$$

- 从而在 x_0 附近有 $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, 即 $f(x)$ 是一次函数.
- 微分的四则运算
- 从导数的四则运算可知

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \qquad d(Cu) = Cdu,$$

$$d(uv) = vdu + udv, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

- 证明 $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$, 其它情形类似.

- 微分形式的不变性
- 设函数 $y=f(u)$ 可微.
- 如果 u 是自变量, 则有 $dy=f'(u)du$.
- 如果 u 是另一变量 x 的可微函数 $u=\varphi(x)$, 则 $y=f[\varphi(x)]$ 是复合函数.

  因此 $dy=\big[f[\varphi(x)]\big]'dx=f'[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=f'(u)du$.
- 这表明不论 u 是自变量还是中间变量, 总有 $dy=f'(u)du$. 这一性质称为微分形式的不变性.

- 例 设 $y=e^x\sin x$, 求 $dy, dy|_{x=\frac{\pi}{4}}, dy|_{x=\frac{\pi}{4},\Delta x=-0.1}$.
- 解 根据微分公式我们只要求出函数的导数, 就可以求得函数的微分.
- 由于 $y'=e^x(\sin x+\cos x)$, 因此

$$dy=e^x(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x.$$

- 我们也可以直接由微分形式的四则运算得

$$\begin{aligned}dy&=\sin x\,d(e^x)+e^x d(\sin x)=e^x\sin x\,dx+e^x\cos x\,dx\\&=e^x(\sin x+\cos x)dx.\end{aligned}$$

- 于是

$$dy\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = e^{x}(\sin x + \cos x)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} dx = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}dx,$$

$$dy\Big|_{x=\frac{\pi}{4},\Delta x=-0.1} = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} \times (-0.1) = -0.1\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}.$$

- 例 设 $y=e^{\arctan(x^2)}$，利用微分运算求 dy 并求 y'.
- 解

$$dy=e^{\arctan(x^2)}d\left[\arctan(x^2)\right]$$
$$=e^{\arctan(x^2)}\cdot\frac{d(x^2)}{1+x^4}$$
$$=e^{\arctan(x^2)}\cdot\frac{2xdx}{1+x^4},$$

- 故 $y'=e^{\arctan(x^2)}\cdot\frac{2x}{1+x^4}$.
- 当函数较复杂时，这种利用微分反过来求导数的方法可以保持较高的计算准确率.

- 例 求 $\frac{d}{d(x^2)}\left(\ln x+\frac{2}{x^2}\right)$.
- 解

$$\frac{d}{d(x^2)}\left(\ln x+\frac{2}{x^2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{x}-2\cdot\frac{2}{x^3}\right)dx}{2x\,dx}=\frac{x^2-4}{2x^4}=\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x^4}.$$

- 也可以先做变量替换, 设 $t=x^2$, 则 $\ln t=2\ln x$, 从而

$$\frac{d}{d(x^2)}\left(\ln x+\frac{2}{x^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\ln t+\frac{2}{t}\right)=\frac{1}{2t}-\frac{2}{t^2}=\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x^4}.$$

- 显然, 第一种更直接.

- 微分的应用
- 微分可应用于近似计算.
- 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，所以 $\Delta y - dy|_{x=x_0} = o(\Delta x)$.
- 当 x 在 x_0 附近时，我们有

$$
\begin{aligned}
f(x) = f(x_0) + \Delta y &= f(x_0) + dy\Big|_{x=x_0} + o(\Delta x) \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(\Delta x).
\end{aligned}
$$

- 当 x 离 x_0 很近时，即 $|\Delta x|$ 很小时，我们有

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- 这被称为 $f(x)$ 的一阶近似.

- 例 在点 $x=0$ 附近, 求 $f(x)=e^x$ 的一阶近似.
- 解 由于 $f'(x)=e^x, f(0)=f'(0)=1$, 因此当 $|x|$ 较小时, $f(x)$ 的一阶近似为

$$f(x)=e^x\approx f(0)+f'(0)x=1+x.$$

- 同理, 当 $|x|$ 较小时

$$\sin x\approx x,\qquad \tan x\approx x,\qquad \arctan x\approx x,\qquad \arctan x\approx x,$$

$$e^x\approx 1+x,\qquad \ln(1+x)\approx x,\qquad (1+x)^\alpha\approx 1+\alpha x,\qquad \cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}.$$

- 例 求 $\sqrt[5]{270}$ 的近似值.
- 解 当 $|x|$ 较小时 $(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x$.
- 由于 $270=243+27=3^5\left(1+\frac{1}{9}\right)$, 因此

$$\sqrt[5]{270}=3\sqrt[5]{1+\frac{1}{9}} \approx 3\left(1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}\right)=\frac{46}{15} \approx 3.0667.$$

- **例** 求 $\sin 30^\circ 30'$ 的近似值.
- **解** $\sin 30^\circ 30' = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right)$.
- 取 $x_0 = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}, f(x) = \sin x$, 则 $f'(x) = \cos x$. 由于

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

因此

$$\sin 30^\circ 30' = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{360}\right) = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360} \approx 0.5076.$$

- 例 设有半径为 10cm 的金属球, 加热后半径增大了 0.001cm, 问球体积约增加多少?
- 解 半径为 r 的球体体积为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.
- 根据题意, 取 $r_0=10, \Delta r=0.001$, 则体积增量约为

$$\Delta V\approx dV=V'(r_0)\Delta r=4\pi r_0^2\Delta r\approx 4\times 3.14\times 10^2\times 0.001=1.256\ \mathrm{cm}^3.$$

- 从上面几个例子我们可以看到, 利用微分来作近似计算还是比较方便的.
- 但令人遗憾的是, 利用微分进行近似计算时, 其误差是多少, 我们并不清楚, 从而不能控制误差. 究其原因是我们对 $|\Delta y-dy|_{x=x_0}=|o(\Delta x)|$ 了解甚少.
- 在第四章中我们将有更精确的方法来解决这一问题.