## 引言 涂

在当今科学与工程的广阔领域中,复变函数与积分变换作为数学工具的核心组成部分,扮演着举足轻重的角色.它们不仅是理论研究的基石,更是解决实际问题的利器.本书旨在为读者提供一本内容全面、结构清晰、易于理解的教材,旨在帮助读者系统地掌握这一领域的基本理论和实际应用,为未来的学术研究和职业生涯打下坚实的基础.

复变函数,将函数的变量范围从实数域扩展到了复数域.这种推广看似平凡,却因为复变函数的解析理论能揭示许多在实数域中难以发现的数学规律和性质,而显得丰富多彩而极具生命力.通过复变函数,我们可以更加深入地理解自然界的许多现象,如电磁场的分布、流体的流动、振动与波动等.本书首先介绍了复数的基本概念、运算规则和几何意义,然后逐步将实数情形的极限与微积分理论推广到复数情形,并揭示这二者本质的差异所在.我们将深入探讨复变函数的可导性和解析性,并由此得到其积分表达、级数展开、奇点行为与留数等核心理论.

积分变换,特别是傅里叶变换和拉普拉斯变换,是现代科学与工程中广泛应用的数学工具.它们在函数变换方面的诸多性质,解释了处理信息的一般手段.不仅如此,它们还能够将复杂的微分、积分方程转化为易于求解的代数方程,将复杂的卷积运算化为简单的乘积运算.本书将在复变函数相关理论的基础上,深入探讨这两类积分变换的动机、原理、性质及应用,以便读者掌握积分变换的基本方法和技巧.

在本书编写过程中,我们注重理论与实践的结合,兼顾趣味性和可读性,力求使内容既具有理论深度,又易于理解和应用.在本书中,我们力求每一个概念引入背景都有所交代,让读者能很容易地接受抽象的数学概念;每一个性质都有所应用,避免读者陷入为何而学的困惑中;每一个定理都可以用简短的语言来解释,并提供多视角的理解方式,让读者理解而不仅只是记住一个个的知识点.

本书提供了丰富的例题,而且在大多数例题后配有随堂练习,让读者可以学练互动.每一章的课后习题经过精心编排,可根据题号的奇偶性将其分割为两部分,根据不同的课程安排,选择其中部分或全部的习题.本书中的选读内容建议让感兴趣的学生自学,而不必讲授.若因课时不足而不能讲授全书,可依次去掉保形映射、积分变换在积分和级数的应用、留数在级数的应用、留数在定积分的应用而不讲授.

最后,我们要感谢所有为本书编写提供支持和帮助的同事、朋友和家人. 他们的无私奉献和辛勤付出,使得本书能够顺利与广大读者见面. 我们衷心希望本书能够成为读者

学习复变函数与积分变换的良师益友,陪伴读者在数学探索的道路上不断前行. 我们相信,通过本书的学习,读者不仅能够掌握复变函数与积分变换的基本理论和方法,还能够培养自己的数学思维和解决问题的能力. 让我们一起,以复变函数与积分变换为钥匙,打开科学与工程的神秘大门,探索未知的数学奥秘吧!

编者 2024年12月26日

# ● 目录

引言			i
目录			iii
第三章	复变函	a数的积分	1
3.1	复变函数积分的概念		
	3.1.1	复变函数积分的定义	. 1
	3.1.2	参变量法计算复变函数积分	. 3
	3.1.3	长大不等式和大小圆弧引理	. 6
3.2	柯西-古	古萨定理和复合闭路定理	. 8
	3.2.1	柯西-古萨定理	. 8
	3.2.2	复合闭路定理和连续变形定理	. 10
	3.2.3	原函数和不定积分	. 14
3.3	柯西积	9分公式	. 18
	3.3.1	柯西积分公式	. 18
	3.3.2	高阶导数的柯西积分公式	. 20
3.4	解析函	a数与调和函数的关系	. 23
	3.4.1	调和函数	. 23
	3.4.2	共轭调和函数	. 24
本章	小结 .		. 26
本章	作业 .		. 26
参考文献			

### 第三章 复变函数的积分

复变函数积分理论的核心是柯西积分公式. 它从定性刻画解析函数积分的柯西-古萨定理和复合闭路定理出发,得到一类具有特定形式的复变函数绕闭路的积分. 从柯西积分公式出发,可以得到解析函数是任意阶可导的,并由此得到复变函数的级数和留数理论.

由于复变函数积分也是一种线积分,因此可通过有向曲线的参数方程来将复变函数的积分化为实参变量的积分.对于单连通区域内解析函数,我们有类比高等数学中的牛顿-莱布尼兹定理,通过求其原函数来计算积分.最后,我们将介绍解析函数与调和函数的联系.

#### 3.1 复变函数积分的概念

#### 3.1.1 复变函数积分的定义

设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程

$$z = z(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

除去有限个点之外都有非零导数 z'(t) = x'(t) + iy'(t). 固定它的一个方向, 称为**正方向**, 则我们得到一条**有向曲线**. 和这条曲线方向相反的记作  $C^-$ , 它的方向被称为该曲线的**负**方向.

对于闭路, 规定它的正方向是指逆时针方向, 负方向是指顺时针方向. 以后我们不加说明的话默认是正方向.

所谓的复变函数积分,本质上仍然是第二类曲线积分.设复变函数

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

定义在区域 D 上, 有向曲线 C 包含在 D 中. 形式地展开

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy) = (u dx - v dy) + i(u dy + v dx).$$

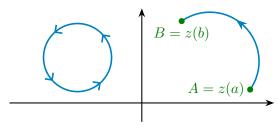


图 3.1 有向曲线

#### 定义 3.1

若下述右侧两个线积分均存在,则定义

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

为函数 f(z) 沿曲线 C 的积分.

我们也可以像线积分那样通过分割来定义. 在曲线 C 上依次选择分点

$$z_0 = A, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n = B,$$

在每一段弧上任取  $\zeta_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$  并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \, \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

称  $n \to \infty$ , 分割的最大弧长  $\to 0$  时  $S_n$  的极限为复变函数**函数** f(z) **沿曲线** C **的积分**. 这两种定义是等价的.

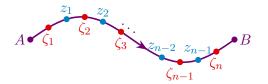


图 3.2 通过分割定义复积分

若 C 是闭合曲线, 则将该积分记为  $\oint_C f(z) dz$ . 该积分不依赖端点的选取. 若 C 是实轴上的区间 [a,b] 且 f(z)=u(x), 则

$$\int_C f(z) \, \mathrm{d}z = \int_a^b u(x) \, \mathrm{d}x$$

就是单变量实函数的黎曼积分.

根据线积分的存在性条件可知:

#### 定理 3.2

若 f(z) 在 D 内连续, C 是逐段光滑曲线, 则  $\int_{C} f(z) dz$  总存在.

以后我们只考虑逐段光滑曲线上连续函数的积分.

#### 3.1.2 参变量法计算复变函数积分

由于复变函数的积分是一种第二类曲线积分,仅仅是换成了复数作为函数值. 所以 线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C: z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则 dz = z'(t) dt.

### 定理 3.3 (复变函数积分计算方法 I: 参变量法)

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt.$$

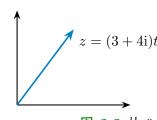
这里的 f(z(t))z'(t) 既有实部又有虚部, 所以该积分的值是指分别以被积函数实部和 虚部的积分作为实部和虚部的复数.

若 C 的正方向是从 z(b) 到 z(a), 则需要交换右侧积分的上下限.

若 C 是逐段光滑的,则相应的积分就是各段的积分之和.

**例 3.1** 计算 
$$\int_C z \, dz$$
, 其中  $C$  是

- (i) 从原点到点 3+4i 的直线段;
- (ii) 抛物线  $y = \frac{4}{9}x^2$  上从原点到点 3 + 4i 的曲线段.



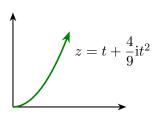


图 3.3 从 0 到 3 + 4i 的不同有向曲线

#### (i) 由于 *C* 的参数方程为 解

$$z = (3+4i)t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

因此 dz = (3+4i) dt,

$$\int_C z \, dz = \int_0^1 (3+4i)t \cdot (3+4i) \, dt$$
$$= (3+4i)^2 \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}(3+4i)^2 = -\frac{7}{2} + 12i.$$

(ii) 由于 C 的参数方程为

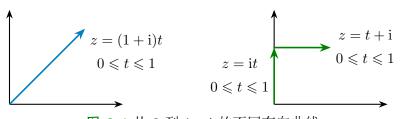
$$z = t + \frac{4}{9}it^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3,$$

因此  $\mathrm{d}z = \left(1 + \frac{8}{9}\mathrm{i}t\right)\mathrm{d}t,$ 

$$\int_C z \, dz = \int_0^3 \left( t + \frac{4}{9} i t^2 \right) \cdot \left( 1 + \frac{8}{9} i t \right) dt = \int_0^3 \left( t + \frac{4}{3} i t^2 - \frac{32}{81} t^3 \right) dt$$
$$= \left( \frac{1}{2} t^2 + \frac{4}{9} i t^3 - \frac{8}{81} t^4 \right) \Big|_0^3 = -\frac{7}{2} + 12i.$$

**例 3.2** 计算  $\int_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$ , 其中 C 是

- (i) 从原点到点 1+i 的直线段;
- (ii) 从原点到点 i 再到 1+i 的折线段.



**图 3.4** 从 0 到 1 + i 的不同有向曲线

#### $\mathbf{M}$ (i) 由于 C 的参数方程为

$$z = (1 + i)t$$
,  $0 \le t \le 1$ ,

因此 Re z = t, dz = (1 + i) dt,

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t \cdot (1+i) \, dt = (1+i) \int_0^1 t \, dt = \frac{1+i}{2}.$$

(ii) 第一段参数方程为

$$z = it$$
,  $0 \le t \le 1$ .

于是 Rez = 0, 积分为零. 第二段参数方程为

$$z = t + i, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

于是  $\operatorname{Re} z = t$ ,  $\mathrm{d} z = \mathrm{d} t$ . 因此

$$\int_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z = \int_0^1 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

可以看出,即便起点和终点相同,沿不同路径 f(z) = Re z 的积分也可能不同. 而 f(z) = z 的积分则只和起点和终点位置有关,与路径无关. 原因在于 f(z) = z 是处处解 析的, 我们会在下一节解释为何如此.

练习 3.1 计算  $\int_C \operatorname{Im} z \, \mathrm{d}z = \underline{\hspace{1cm}}$ , 其中 C 是从原点沿 y = x 到点  $1 + \mathrm{i}$  再 到 i 的折线段.

**例 3.3** 计算 
$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$$
, 其中  $n$  为整数.

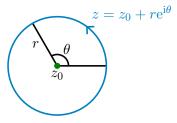


图 3.5 正向圆周

解 正向圆周  $C:|z-z_0|=r$  的参数方程为

$$z = z_0 + re^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

于是  $dz = ire^{i\theta} d\theta$ .

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{-n} \,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}r^{-n} \int_0^{2\pi} (\cos n\theta - \mathrm{i}\sin n\theta) \,\mathrm{d}\theta.$$

当 n=0 时, 该积分为  $2\pi i$ . 当  $n \neq 0$  时,

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{\mathrm{i}r^{-n}}{n} \left(\sin n\theta + \mathrm{i}\cos n\theta\right) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

于是我们得到幂函数沿圆周的积分:

#### 定理 3.4

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & \text{ $\vec{z}$ } n=0; \\ 0, & \text{ $\vec{z}$ } n \neq 0. \end{cases}$$

这个积分以后经常用到. 特别地, 该积分值与圆周的圆心和半径都无关. 与线积分一样, 复变函数积分有如下线性性质:

#### 定理 3.5

(1) 
$$\int_C f(z) dz = -\int_{C^-} f(z) dz$$
.

(2) 
$$\int_C kf(z) dz = k \int_C f(z) dz.$$

(3) 
$$\int_C (f(z) \pm g(z)) dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz.$$

#### 3.1.3 长大不等式和大小圆弧引理

通过放缩, 我们可以得到如下积分不等式:

#### 定理 3.6 (长大不等式)

设有向曲线 C 的长度为 L, f(z) 在 C 上满足  $|f(z)| \leq M$ , 则

$$\left| \int_C f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \int_C |f(z)| \, \mathrm{d}s \leqslant ML.$$

证明 如图 3.2 所示, 设 A,B 分别为有向曲线 C 的起点和终点, 在 C 上依次选择分点

$$z_0 = A, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n = B,$$

并在每一段弧上任取  $\zeta_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$ . 设  $\Delta s_k$  为弧  $\widehat{z_{k-1}z_k}$  的长度,  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ , 则  $\Delta s_k \geqslant |\Delta z_k|$ . 于是

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \, \Delta z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k) \, \Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)| \, \Delta s_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k.$$

设 ds = |dz| 为弧长微元. 令  $n \to +\infty$ , 分割的最大弧长  $\to 0$ , 我们得到

$$\left| \int_C f(z) \, dz \right| \leqslant \int_C |f(z)| \, ds \leqslant M \int_C ds = ML.$$

尽管长大不等式给出的是积分的一个估计, 但它实际上常常用于证明等式. 将待证 明等式两侧之差表达为一个复变函数积分的形式, 然后通过长大不等式估计其不超过任 意给定的  $\varepsilon > 0$ , 便可证明之.

注意到: 若被积函数 f(z) 在 C 上的点都连续, 则 |f(z)| 是 C 的参变量  $t \in [a,b]$  的 连续函数, 从而有界, 即存在 M 使得对 C 上的任意一点 z, 有  $|f(z)| \leq M$ .

例 3.4 设 f(z) 在  $z \neq a$  处连续, 且  $\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = k$ , 则

$$\lim_{r \to 0} \oint_{|z-a|=r} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}k.$$

证明 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $|z-a| < \delta$  时,  $|(z-a)f(z)-k| \leqslant \varepsilon$ . 根 据定理 3.4, 当  $0 < r < \delta$  时,

$$\begin{split} \left| \oint_{|z-a|=r} f(z) \, \mathrm{d}z - 2\pi \mathrm{i}k \right| &= \left| \oint_{|z-a|=r} \left( f(z) - \frac{k}{z-a} \right) \, \mathrm{d}z \right| \\ &= \left| \oint_{|z-a|=r} \frac{(z-a)f(z) - k}{z-a} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi \varepsilon. \end{split}$$

于是命题得证.

类似地, 若  $\lim_{z\to\infty} zf(z) = k$ , 则

$$\lim_{R \to +\infty} \oint_{|z|=R} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}k.$$

若将上述极限中的圆周换成圆弧,则可类似得到大小圆弧引理.

#### 定理 3.7 (大小圆弧引理)

(1) 设 f(z) 在 a 的一个去心邻域内有定义, 且  $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=k$ . 设

$$C_r: z = a + re^{i\theta}, \quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,$$

则

$$\lim_{r \to 0} \oint_{C_r} f(z) \, \mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2 - \theta_1).$$

(2) 设 f(z) 在  $\infty$  的一个去心邻域内有定义, 且  $\lim_{z\to\infty} zf(z)=k$ . 设

$$C_R: z = Re^{i\theta}, \quad \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2,$$

则

$$\lim_{R \to +\infty} \oint_{C_R} f(z) dz = ik(\theta_2 - \theta_1).$$

上述结论中实际上只需要 f(z) 在  $\theta_1 \leq \operatorname{Arg} z \leq \theta_2$  范围内的极限满足相应条件即可. 实际应用中遇到的常常是 k=0 的情形.

#### 3.2 柯西-古萨定理和复合闭路定理

#### 3.2.1 柯西-古萨定理

观察下方的两条曲线  $C_1, C_2$ . 设  $C = C_1^- + C_2$ . 可以看出

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \iff \oint_{C} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz = 0.$$

所以 f(z) 的积分只与起点终点有关  $\iff$  f(z) 绕任意闭路的积分为零.

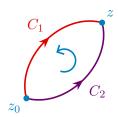


图 3.6 起点和终点相同的有向曲线

上一节中我们计算了  $f(z)=z, \operatorname{Re} z, \frac{1}{z-z_0}$  的积分. 其中

- f(z) = z 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$  有奇点  $z_0$ , 沿绕  $z_0$  闭路的积分非零;
- f(z) = Re z 处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分非零).

由此可见函数沿闭路积分为零,与函数在闭路内部是否解析有关.

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 f(z) 在闭区域  $\overline{D} = D \cup C$  上解析, 即存在区域  $B \supseteq \overline{D}$  使得 f(z) 在 B 上解析. 为了简便, 我们假设 f'(z) 连续, 则

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy).$$

由格林公式和 C-R 方程可得

$$\oint_C f(z) dz = -\iint_D (v_x + u_y) dx dy + i \iint_D (u_x - v_y) dx dy = 0.$$

实际上, 上述条件可以减弱并得到:\*

#### 定理 3.8 (柯西-古萨定理)

设 f(z) 在闭路 C 上连续, C 内部解析, 则

$$\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0.$$

柯西-古萨定理是我们得到的关于复积分的第一个定性结果, 我们将从它出发得到复 变函数的整个积分理论.

#### 推论 3.9

设 f(z) 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内一条闭合曲线, 则

$$\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0.$$

这里的闭合曲线可以不是闭路, 这是闭合曲线总可以拆分为一些闭路. 1

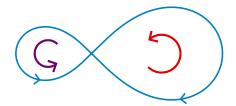


图 3.7 闭合曲线的分拆

**例 3.5** 计算 
$$\oint_{|z+1|=2} \frac{1}{2z-3} dz$$
.

解 由于  $\frac{1}{2z-3}$  在  $|z+1| \le 2$  上解析, 因此由柯西-古萨定理,

$$\oint_{|z+1|=2} \frac{1}{2z-3} \, \mathrm{d}z = 0.$$

例 3.6 计算 
$$\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{\overline{z}} \, \mathrm{d}z$$
.

解 注意到当 |z|=2 时,

$$\frac{\mathrm{e}^z}{\overline{z}} = \frac{1}{4}z\mathrm{e}^z.$$

<sup>\*</sup>古萨去掉了柯西证明该定理时要求 f'(z) 连续的条件. 实际上该定理对任意**可求长曲线** (即可通过黎曼积分 得到其长度的曲线) 均成立, 证明方式较多, 如 Pringsheim 证法、Beardon 证法、Artin 证法、Dixon 证法 等等, 感兴趣的可阅读 [1, 2, 5, 8].

<sup>†</sup>实际情况可能会更复杂,例如闭合曲线有重叠的曲线部分,或者需要拆分成无穷多个闭路. 不过在这些情形 下确实该结论都是成立的, 具体解释这里不作展开.

由于  $\frac{1}{4}ze^z$  在  $|z| \leq 2$  上解析, 因此由柯西-古萨定理,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{\overline{z}} \, \mathrm{d}z = \oint_{|z|=2} \frac{1}{4} z \mathrm{e}^z \, \mathrm{d}z = 0.$$

练习 3.2 (i) 
$$\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z^2+z} dz =$$
\_\_\_\_. (ii)  $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{|z|} dz =$ \_\_\_\_.   
例 3.7 计算  $\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz$ , 其中  $C: |z-\mathrm{i}| = \frac{1}{2}$ .

解 通过待定系数可以得到

$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right).$$

由于  $\frac{1}{z}$ ,  $\frac{1}{z+i}$  均在  $|z-i| \leq \frac{1}{2}$  上解析, 因此由柯西-古萨定理

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = \oint_C \frac{1}{z+i} dz = 0.$$

再由定理 3.4 得到

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz = -\frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{z-i} dz = -\pi i.$$

#### 3.2.2 复合闭路定理和连续变形定理

设  $C_0, C_1, \dots, C_n$  是 n+1 条简单闭曲线, 其中  $C_1, \dots, C_n$  是两两分离的\*, 而且它们都包含在  $C_0$  的内部. 这样它们围成了一个有界多连通区域 D, 即  $C_0$  的内部去掉其它闭路及内部. 它的边界称为一个**复合闭路** 

$$C = C_0 + C_1^- + \dots + C_n^-.$$

沿着 C 前进的点, D 总在它的左侧, 因此我们这样规定它的正方向.

#### 定理 3.10 (复合闭路定理)

设 D 是复合闭路  $C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-$  围成的区域. 设 f(z) 在 C 上连续, D 内解析, 则

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz.$$

<sup>\*</sup>也就是说每一条闭路都包含在其它闭路的外部.

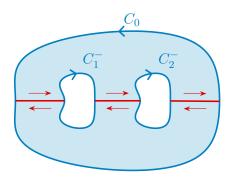


图 3.8 多条闭路围成的区域

证明 如图 3.8 所示, 添加曲线  $\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n$  把  $C_0, C_1, \cdots, C_n$  依次连接起来, 则 它们把 D 划分成了两个单连通区域  $D_1,D_2$ . 对 f(z) 在  $D_1,D_2$  的边界上应用柯西-古萨 定理并相加. 注意到  $\gamma_k$  对应部分的积分正好相互抵消, 于是得到

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_0} f(z) dz + \oint_{C_0^-} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n^-} f(z) dz = 0.$$

由此得到

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz.$$

这可看成是柯西-古萨定理在多连通情形的一个推广.

在实际应用中, 若 f(z) 在闭路 C 的内部有有限多个奇点  $z_1, \dots, z_n$ , 则我们可以在 C 内部构造分离的闭路  $C_1, \dots, C_n$ , 使得每个  $C_k$  内部只包含一个奇点  $z_k$ , 见图 3.9. 这 样,内部含多个奇点的情形就可以化成内部只含一个奇点的情形. 最后将这些闭路上的 积分相加即可得到 f(z) 在 C 上的积分.

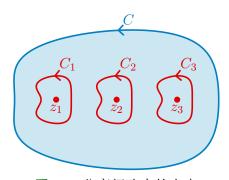


图 3.9 分离闭路内的奇点

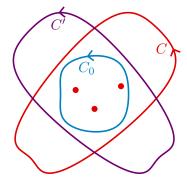


图 3.10 闭路连续变形不改变积分值

从复合闭路定理还可以看出, 在计算积分  $\oint_C f(z) dz$  时, C 的具体形状无关紧要, 只 要其内部奇点不变, C 可以任意连续变形, 如图 3.10 所示. 这是因为我们总可选择一个 包含这些奇点的闭路  $C_0$ , 使得  $C_0$  包含在 C 及其变形后的闭路 C' 内部. 这样它们的积分自然都和  $C_0$  上的积分相同.

#### 定理 3.11 (连续变形定理)

若函数 f(z) 在闭路  $C_1, C_2$  上连续, 且在  $C_1, C_2$  内部具有相同的奇点, 则

$$\oint_{C_1} f(z) \, \mathrm{d}z = \oint_{C_2} f(z) \, \mathrm{d}z.$$

**例 3.8** 证明: 对于闭路 C, 若  $a \notin C$ , n 为非零整数, 则  $\oint_C (z-a)^{n+1} dz = 0$ .

证明 若 a 在 C 的外部,则  $(z-a)^{n+1}$  在 C 及其内部解析. 由柯西-古萨定理.

$$\oint_C (z-a)^{n+1} \, \mathrm{d}z = 0.$$

若 a 在 C 的内部, 令  $C_1$  为以 a 为圆心的圆周. 由连续变形定理和定理 3.4,

$$\oint_C (z-a)^{n+1} dz = \oint_{C_1} (z-a)^{n+1} dz = 0.$$

同理, 由连续变形定理和定理 3.4 可知当 a 在 C 的内部且 n=0 时, 积分为  $2\pi i$ .

#### 定理 3.12

当a在闭路C的内部时,

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^{n+1}} = \begin{cases}
2\pi i, & \text{$\not\equiv$} n = 0; \\
0, & \text{$\not\equiv$} n \neq 0.
\end{cases}$$

**例 3.9** 求  $\int_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$ , 其中  $\Gamma$  是由  $2\pm i$ ,  $-2\pm i$  形成的矩形闭路.

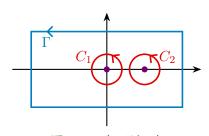


图 3.11 矩形闭路

解 函数  $\frac{2z-1}{z^2-z}$  在  $\Gamma$  内部有两个奇点 0,1. 如图 3.11 所示, 设  $C_1,C_2$  为内部分别包含 0,1 的分离闭路. 由复合闭路定理可知

$$\oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} \, \mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z} \, \mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z} \, \mathrm{d}z.$$

再由

$$\frac{2z-1}{z^2-z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1}$$

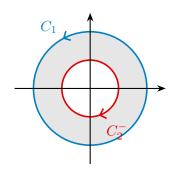
得到

$$\oint_{\Gamma} \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z - 1} dz.$$

最后由定理 3.12 得到

$$\oint_{\Gamma} \frac{2z - 1}{z^2 - z} \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} + 0 + 0 + 2\pi \mathrm{i} = 4\pi \mathrm{i}.$$

例 3.10 求  $\oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{e}^z}{z} \, \mathrm{d}z$ , 其中  $\Gamma = C_1 + C_2^-$ ,  $C_1: |z| = 2$ ,  $C_2: |z| = 1$ .



解 函数  $\frac{e^z}{r}$  在  $C_1, C_2$  围城的圆环域内解析. 由复合闭路定理可知

$$\oint_{\Gamma} \frac{\mathrm{e}^z}{z} \, \mathrm{d}z = 0.$$

最后我们来看有理函数绕闭路积分的一个结论.

例 3.11 设  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$  是一个有理函数, 其中 p,q 的次数分别是 m,n. 设 f(z) 的 所有奇点都在闭路 C 的内部. 证明:

$$\oint_C f(z) dz = \begin{cases} 0, & \text{ if } n - m \ge 2; \\ 2\pi i a/b, & \text{ if } n - m = 1, \end{cases}$$

其中 a,b 分别是 p(z),q(z) 的最高次项系数.

证明 设  $C_R: |z| = R$ . 注意到

$$\lim_{z \to \infty} z f(z) = \begin{cases} 0, & \not \equiv n - m \geqslant 2; \\ a/b, & \not \equiv n - m = 1, \end{cases}$$

于是由大圆弧引理可知

$$\lim_{R \to +\infty} \oint_{C_R} f(z) dz = \begin{cases} 0, & \not\equiv n - m \geqslant 2; \\ 2\pi i a/b, & \not\equiv n - m = 1. \end{cases}$$

由连续变形定理可知, 当 R 充分大使得 f(z) 的所有奇点都在  $C_R$  的内部时,

$$\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = \oint_{C_R} f(z) \, \mathrm{d}z$$

恒成立, 由此命题得证.

注意闭路 C 内部必须包含 f(z) 的所有奇点上述结论方可成立. 若  $m \ge n$ , 则我们可将 f(z) 写成一个多项式和上述形式有理函数之和.

#### 3.2.3 原函数和不定积分

设有向曲线  $C: z=z(t), a \le t \le b$  起于  $z_1=z(a)$  终于  $z_2=z(b)$ . 若存在 C 上的解析函数 F(z) 使得 F'(z)=f(z), 则

$$\int_{C} f(z) dz = \int_{a}^{b} f(z(t))z'(t) dt = F(z(t))\Big|_{a}^{b} = F(z_{2}) - F(z_{1}).$$
(3.1)

此即**牛顿-莱布尼兹公式**. 我们把 F(z) 称为 f(z) 的一个**原函数**. 特别地, 若 C 是闭路, 则  $\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0$ .

例如对于整数  $n \neq 0$ , 当 a 在闭路 C 的内部时,  $f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n+1}}$  在 C 上有原函数  $F(z) = -\frac{1}{n(z-a)^n}. \ \, \text{从而} \, \oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0. \ \, \text{于是我们再次证明了定理 3.12 on } n \neq 0 \ \, \text{情}$  形. 但需要注意  $\frac{1}{z-a}$  在 C 上并没有原函数, 因为  $\ln(z-a)$  在 C 上有奇点. 不过, 不同于单变量实函数的情形, 并不是所有的函数都有原函数. 设 f(z) 在单连

不过,不同于单变量实函数的情形,并不是所有的函数都有原函数. 设 f(z) 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内一条起于  $z_0$  终于 z 的有向曲线. 由柯西-古萨定理可知,积分  $\int_C f(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta$  与路径无关,只与  $z_0, z$  有关. 因此我们也将其记为  $\int_{z_0}^z f(\zeta) \, \mathrm{d}\zeta$ . 对于任意固定的  $z_0 \in D$ ,函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta$$

定义了一个单值函数.

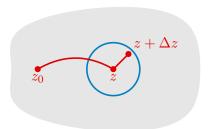


图 3.12 变上限积分函数的导数

#### 定理 3.13

F(z) 是 D 内的解析函数, 且 F'(z) = f(z).

以 z 为中心作一包含在 D 内半径为 r 的圆 K. 当  $|\Delta z| < r$  时,

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\zeta) \, d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta) \, d\zeta = \int_{z}^{z + \Delta z} f(\zeta) \, d\zeta.$$

容易知道

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z) d\zeta = f(z) \int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta = f(z) \Delta z.$$

我们需要比较上述两个积分, 其中 z 到  $z + \Delta z$  取直线段. 由 f(z) 解析可知它连续, 因此  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  使得  $\delta < r$  且当  $|\zeta - z| < \delta$  时,  $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ . 当  $|\Delta z| < \delta$  时, 由长大 不等式可知

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \int_{z}^{z + \Delta z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\Delta z} \, \mathrm{d}\zeta \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \cdot |\Delta z| = \varepsilon.$$

由于  $\varepsilon$  是任意的. 因此

$$f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = F'(z).$$

由此可知, 单连通区域上的解析函数总有原函数.

#### 定理 3.14 (原函数法)

设 f(z) 在单连通区域 D 上解析,  $z_1$  至  $z_2$  的积分路径落在 D 内, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) \, \mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_2),$$

其中 F'(z) = f(z).

在例??中我们知道导函数为0的函数只能是常值函数,因此

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) \, \mathrm{d}z + C.$$

我们称之为 f(z) 的不定积分, 记为  $\int f(z) dz$ .

复变量函数和实变量函数的牛顿-莱布尼兹定理的差异在哪呢? 复变量情形要求是单 连通区域上解析函数, 实变量情形要求是闭区间上连续函数. 究其原因, 都是为了保证原 函数的存在性.

**例 3.12** 计算 
$$\int_{z_0}^{z_1} z \, \mathrm{d}z$$
.

解 由于 f(z) = z 处处解析, 且

$$\int z \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2}z^2 + C,$$

因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2} (z_1^2 - z_0^2).$$

该结论解释了例 3.1 中为何 z 沿着 0 到 3 + 4i 的积分总等于

$$\int_0^{3+4i} z \, dz = -\frac{7}{2} + 12i.$$

**例 3.13** 计算 
$$\int_0^{\pi i} z \cos z^2 dz$$
.

解 由于  $f(z) = z \cos z^2$  处处解析, 且

$$\int z \cos z^2 dz = \frac{1}{2} \int \cos z^2 dz^2 = \frac{1}{2} \sin z^2 + C,$$

因此

$$\int_{0}^{\pi i} z \cos z^{2} dz = \frac{1}{2} \sin z^{2} \Big|_{0}^{\pi i} = -\frac{1}{2} \sin \pi^{2}.$$

这里我们使用了凑微分法求不定积分.

例 3.14 计算 
$$\int_0^1 z \cos z \, dz$$
.

解 由于  $f(z) = z \cos z$  处处解析, 且

$$\int z \cos z \, dz = \int z \, d(\sin z) = z \sin z - \int \sin z \, dz = z \sin z + \cos z + C,$$

因此

$$\int_0^i z \cos z \, dz = (z \sin z + \cos z) \Big|_0^i = i \sin i + \cos i - 1 = e^{-1} - 1.$$

这里我们使用了
$$\frac{\partial}{\partial z}$$
 和 $\frac{\partial}{\partial z}$  和 $\frac{\partial}{\partial z}$  不定积分. 例 3.15 计算  $\int_{1}^{1+i} z e^{z} dz$ .

解 由于 
$$f(z) = ze^z$$
 处处解析, 且

$$\int z e^z dz = \int z de^z = z e^z - \int e^z dz = (z - 1)e^z + c,$$

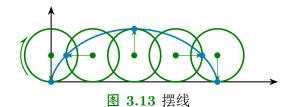
因此

$$\int_{1}^{1+i} z e^{z} dz = (z-1)e^{z} \Big|_{1}^{1+i} = ie^{1+i} = e(-\sin 1 + i\cos 1).$$

练习 3.4 
$$\int_{0}^{1} z \sin z \, dz = \underline{\qquad}.$$

**例 3.16** 计算 
$$\int_C (2z^2 + 8z + 1) dz$$
, 其中  $C$  是摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta), \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$



解 由于  $f(z) = 2z^2 + 8z + 1$  处处解析, 因此

$$\int_C (2z^2 + 8z + 1) \, dz = \int_0^{2\pi a} (2z^2 + 8z + 1) \, dz$$
$$= \left(\frac{2}{3}z^3 + 4z^2 + z\right)\Big|_0^{2\pi a} = \frac{16}{3}\pi^3 a^3 + 16\pi^2 a^2 + 2\pi a.$$

摆线是圆周在实轴上方滚动时, 圆周上固定一点的轨迹. 该积分与摆线方程其实并 无关系, 切勿被题干所误导.

**例 3.17** 设 
$$C$$
 为沿着  $|z|=1$  从 1 到 i 的逆时针圆弧, 求  $\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$ .

解 函数 
$$f(z) = \frac{\ln(z+1)}{z+1}$$
 在  $C$  上的不定积分为

$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \int \ln(z+1) d(\ln(z+1)) = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) + c.$$

因此

$$\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) \Big|_1^i = \frac{1}{2} \left( \ln^2(1+i) - \ln^2 2 \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left( \left( \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i \right)^2 - \ln^2 2 \right) = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8} \ln^2 2 + \frac{\pi \ln 2}{8} i.$$

**例 3.18** 计算  $\int_C (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz$ , 其中 C 是从原点到点 1 + 2i 的直线段.

该积分通常使用参变量法来计算.不过,尽管被积函数并没有原函数,但是我们可以通过 C 的方程来将被积函数变形为 z 的表达式,从而可以使用原函数法来计算.

解 由于在 C 上有 y=2x, 因此

$$z = x + yi = (1 + 2i)x$$
,  $x + y = 3x = \frac{3}{1 + 2i}z$ .

于是

$$\int_C (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) \, dz = \frac{3}{1+2i} \int_C z \, dz = \frac{3z^2}{2(1+2i)} \Big|_0^{1+2i} = \frac{3(1+2i)}{2} = \frac{3}{2} + 3i.$$

### 3.3 柯西积分公式

#### 3.3.1 柯西积分公式

柯西-古萨定理是解析函数理论的基础, 但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

#### 定理 3.15 (柯西积分公式)

设函数 f(z) 在闭路 C 及其内部 D 解析, 则对任意  $z_0 \in D$ ,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

若  $z_0$  在 D 的外部, 由柯西-古萨定理可知右侧积分是 0.

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设  $z=z_0+Re^{i\theta}$ , 则  $dz=iRe^{i\theta}d\theta$ .

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

证明 由连续性可知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  使得当  $|z - z_0| \leq \delta$  时,  $z \in D$  且  $|f(z) - f(z_0)| < \delta$  $\varepsilon$ . 设  $\Gamma: |z-z_0| = \delta$ , 则由复合闭路定理、定理 3.12和长大不等式可知

$$\left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right|$$

$$= \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \right| = \left| \oint_\Gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi \delta = 2\pi \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性可知  $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$ .

从柯西积分公式可以看出,被积函数分子解析而分母形如  $z - z_0$  时,绕闭路的积分 可以使用该公式计算.

例 3.19 计算 
$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz$$
.

由于函数  $\sin z$  处处解析, 取  $f(z) = \sin z, z_0 = 0$  并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} \, dz = 2\pi i \sin z |_{z=0} = 0.$$

**例 3.20** 计算 
$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2 e^z}{z-1} dz$$
.

解 由于函数  $z^2 e^z$  处处解析, 取  $f(z) = z^2 e^z$ ,  $z_0 = 1$  并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^2 e^z}{z-1} dz = 2\pi i z^2 e^z|_{z=1} = 2\pi ei.$$

练习 3.5 
$$\oint_{|z|=2\pi} \frac{\cos z}{z-\pi} \, \mathrm{d}z = \underline{\qquad}.$$

例 3.21

$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta,$$

求 f'(1+i).

解 当  $|z| < \sqrt{3}$  时, 由柯西积分公式得

$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \,d\zeta = 2\pi i (3\zeta^2 + 7\zeta + 1)|_{\zeta = z} = 2\pi i (3z^2 + 7z + 1).$$

因此

$$f'(z) = 2\pi i(6z + 7),$$
 
$$f'(1+i) = 2\pi i(13 + 6i) = -12\pi + 26\pi i.$$

注意当 
$$|z| > \sqrt{3}$$
 时,  $f(z) \equiv 0$ .  
**例 3.22** 计算  $\oint_{|z|=3} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z^2-1)} \, \mathrm{d}z$ .

解 被积函数的奇点为  $0,\pm 1$ . 设  $C_1,C_2,C_3$  分别为绕 0,1,-1 的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz = \oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz$$

$$=2\pi i \left(\frac{e^z}{z^2-1}\Big|_{z=0} + \frac{e^z}{z(z+1)}\Big|_{z=1} + \frac{e^z}{z(z-1)}\Big|_{z=-1}\right)$$

$$=2\pi i \left(-1 + \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2}\right) = \pi i (e + e^{-1} - 2).$$

#### 3.3.2 高阶导数的柯西积分公式

通过解析函数的积分表示形式, 我们可以说明解析函数是任意阶可导的.

#### 定理 3.16 (柯西积分公式)

设函数 f(z) 在闭路 C 及其内部 D 解析, 则对任意  $z_0 \in D$ ,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

事实上,上一节中柯西积分公式等式两边同时对  $z_0$  求 n 阶导数,即可得到该公式. 不过,这种做法并不正确,因为我们需要先说明 f(z) 确实存在任意阶导数,或者被积函数 求导后确实还可积.

证明 n=0 的情形就是柯西积分公式. 假设已经知道  $n-1\geqslant 0$  的情形, 我们来推出 n 的情形. 设  $\delta$  为  $z_0$  到 C 的最短距离. 当  $|h|<\delta$  时,  $z_0+h\in D$ . 由归纳假设,

$$f^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} \,\mathrm{d}z, \quad f^{(n-1)}(z_0+h) = \frac{(n-1)!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0-h)^n} \,\mathrm{d}z.$$
ig

$$\begin{split} I &:= \frac{f^{(n-1)}(z_0+h) - f^{(n-1)}(z_0)}{h} - \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{(t+h)^n - t^n}{h(t+h)^n t^n} f(z) \, \mathrm{d}z - \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{1}{(t+h)^{n+1}} f(z) \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{(t+h)^{n+1} - (n+1)ht^n - t^{n+1}}{h(t+h)^{n+1}t^n} f(z) \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(t+h)^{n+1}t^n} \sum_{k=1}^n C_{n+1}^{k+1} h^k t^{n-k} \, \mathrm{d}z, \end{split}$$

其中  $t=z-z_0-h$ . 我们只需要证明当  $h\to 0$  时, 该式极限为零即可.

由于 f(z) 在 C 上连续, 因此存在 M 使得在 C 上  $|f(z)| \leq M$ . 注意到  $z \in C$  时,

$$|t + h| = |z - z_0| \geqslant \delta$$
,  $|t| = |z - z_0 - h| \geqslant \delta - |h|$ .

由长大不等式.

$$|I| \leqslant \frac{(n-1)!ML}{2\pi\delta^{n+1}(\delta-|h|)^n} \sum_{k=1}^n C_{n+1}^{k+1} |h|^k (\delta-|h|)^{n-k},$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当  $h \to 0$  时, 该式的极限为 0, 因此 n 的情形得证. 由数学归 纳法可知该定理成立.

由高阶导数的柯西积分公式可知, 区域 D 上的解析函数 f(z) 一定任意阶可导, 各阶 导数仍然是解析的. 这一点与实变量函数有本质的区别.

利用高阶导数的柯西积分公式

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} \, \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!},$$

我们可以计算被积函数分子解析而分母为多项式情形下绕闭路的积分. 使用时需要注意 分母为  $(z-z_0)^n$  时需要对 f(z) 求 n-1 阶导数而不是 n 阶导数. 例 3.23 计算  $\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} \, \mathrm{d}z$ .

例 3.23 计算 
$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz$$
.

解 由于  $\cos(\pi z)$  处处解析, 因此由柯西积分公式,

$$\left. \oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{4!} \cos(\pi z)^{(4)} \Big|_{z=1} = \frac{2\pi i}{24} \cdot \pi^4 \cos \pi = -\frac{\pi^5 i}{12}.$$

例 3.24 计算 
$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$$
.

解 函数  $\frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}$  在 |z|<2 的奇点为  $z=\pm\mathrm{i}$ . 取  $C_1,C_2$  为以  $\mathrm{i},-\mathrm{i}$  为圆心的分离 圆周,则由复合闭路定理,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2} \, \mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2} \, \mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2} \, \mathrm{d}z.$$

由柯西积分公式.

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left( \frac{e^z}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = 2\pi i \left( \frac{e^z}{(z+i)^2} - \frac{2e^z}{(z+i)^3} \right) \Big|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i \pi}{2},$$

同理可得

$$\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{-(1+i)e^{-i\pi}}{2}.$$

故

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{(1-i)e^i\pi}{2} + \frac{-(1+i)e^{-i\pi}}{2} = \pi i(\sin 1 - \cos 1).$$

**例 3.25** 计算  $\oint_{|z|=1} z^n e^z dz$ , 其中 n 是整数.

解 当  $n \ge 0$  时,  $z^n e^z$  处处解析. 由柯西-古萨定理,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \, \mathrm{d}z = 0.$$

当  $n \leq -1$  时,  $e^z$  处处解析. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z dz = \oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^{-n}} dz = \frac{2\pi i}{(-n-1)!} (e^z)^{(-n-1)} \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(-n-1)!}.$$

**例 3.26** 计算 
$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$$
 和  $\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$ .

解 (i) 函数  $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$  在 |z-3| < 2 的奇点为 z=2. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi \mathrm{i}}{1!} \left(\frac{1}{z^3}\right)' \Big|_{z=2} = -\frac{3\pi \mathrm{i}}{8}.$$

(ii) 函数  $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$  在 |z-1| < 3 的奇点为 z=0,2. 取  $C_1,C_2$  分别为以 0 和 2 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式.

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$$

$$= \frac{2\pi i}{2!} \left( \frac{1}{(z-2)^2} \right)'' \Big|_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!} \left( \frac{1}{z^3} \right)' \Big|_{z=2} = 0.$$

练习 3.6 
$$\oint_{|z-2\mathbf{i}|=3} \frac{1}{z^2(z-\mathbf{i})} \, \mathrm{d}z = \underline{\qquad}.$$

最后我们来介绍柯西-古萨定理的逆定理.

例 3.27 (莫累拉定理) 设 f(z) 在单连通区域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有

$$\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0.$$

证明 f(z) 在 D 内解析.

证明 由题设可知 f(z) 的积分与路径无关. 固定  $z_0 \in D$ , 则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z) \, \mathrm{d}z$$

定义了 D 内的一个函数. 类似于定理 3.13 的证明可知 F'(z) = f(z). 故 f(z) 作为解析 函数 F(z) 的导数也是解析的.

由于解析函数总是任意阶可导的, 因此它的实部和虚部这样的二元实函数总有任意 阶偏导数. 这便引出了调和函数的概念.

#### 解析函数与调和函数的关系 3.4

#### 3.4.1 调和函数

调和函数是一类重要的二元实函数, 它和解析函数有着紧密的联系. 为了简便, 我们 用  $u_{xx}, u_{xy}, u_{yx}, u_{yy}$  来表示各种二阶偏导数.

#### 定义 3.17

若二元实函数 u(x,y) 在区域 D 内有二阶连续偏导数, 且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

则称 u(x,y) 是 D 内的调和函数.

#### 定理 3.18

区域 D 内解析函数 f(z) 的实部和虚部都是调和函数.

证明 设 f(z) = u(x,y) + iv(x,y), 则 u,v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y,$$

也就是说, u,v 的偏导数也是一个解析函数的实部或虚部. 归纳下去可知 u,v 存在任意 阶连续偏导数. 由 C-R 方程可知

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

因此

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$
  
 $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0.$ 

#### 3.4.2 共轭调和函数

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

若 u + iv 是区域 D 内的解析函数,则我们称 v 是 u 的共轭调和函数. 换言之  $u_x = v_y, u_y = -v_x$ . 显然 -u 是 v 的共轭调和函数.

**练习 3.7** 若  $v \in u$  的共轭调和函数, 求  $u^2 - v^2$  的共轭调和函数.

#### 定理 3.19

设 u(x,y) 是单连通区域 D 内的调和函数,则线积分

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y \, dx + u_x \, dy + C$$

是u的共轭调和函数.

由此可知, 区域 D 上的调和函数在  $z \in D$  的一个邻域内是一解析函数的实部, 从而在该邻域内具有任意阶连续偏导数. 而 z 是任取的, 因此调和函数总具有任意阶连续偏导数.

若 D 是多连通区域,则未必存在共轭调和函数. 例如  $\ln(x^2 + y^2)$  是复平面去掉原点上的调和函数,但它并不是某个解析函数的实部. 事实上,它是多值函数  $2 \ln z$  的实部.

在实际计算中, 我们一般不用线积分来计算共轭调和函数, 而是采用下述两种方法:

#### 共轭调和函数的计算方法

- (1) 偏积分法: 通过  $v_y=u_x$  解得  $v=\varphi(x,y)+\psi(x)$ , 其中  $\psi(x)$  待定. 再代入  $u_y=-v_x$  中解出  $\psi(x)$ .
  - (2) 不定积分法: 对  $f'(z) = u_x iu_y = v_y + iv_x$  求不定积分得到 f(z).

**例 3.28** 证明  $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$  是调和函数,并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解由

$$u_x = -6xy, \quad u_y = 3y^2 - 3x^2$$

可知  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$ , 故 u 是调和函数.

由 
$$v_y = u_x = -6xy$$
 得到

$$v = -3xy^2 + \psi(x).$$

由  $v_x = -u_y = 3x^2 - 3y^2$  得到

$$\psi'(x) = 3x^2$$
,  $\psi(x) = x^3 + C$ .

故  $v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C$ ,

$$f(z) = u + iv = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + C) = i(x + iy)^3 + iC = i(z^3 + C).$$

当解析函数 f(z) 是 x,y 的多项式形式时, f(z) 本身一定是 z 的多项式. 于是将仅 包含 x 的多项式部分中的 x 换成 z 就是 f(z).

在上例中, 若使用不定积分法则有

$$f'(z) = u_x - iu_y = -6xy - i(3y^2 - 3x^2) = 3iz^2,$$

因此  $f(z) = iz^3 + C$ . 由于 u 已给定, 因此 C 取 i 的任意实数倍.

例 3.29 求解析函数 f(z) 使得它的虚部为

$$v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y.$$

解 由

$$u_x = v_y = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1$$

得到

$$u = e^x(x\cos y - y\sin y) + x + \psi(y).$$

由

$$u_y = -v_x = -e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) - 1$$

得到

$$\psi'(y) = -1, \quad \psi(y) = -y + C.$$

故

$$f(z) = u + iv$$

$$= e^{x} (x \cos y - y \sin y) + x - y + C + i (e^{x} (y \cos y + x \sin y) + x + y)$$

$$= ze^{z} + (1 + i)z + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

若使用不定积分法则有

$$f'(z) = v_y + iv_x$$
=\(e^x (\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1 + i \(e^x (y \cos y + x \sin y + \sin y) + 1\)
=\((z + 1)e^z + 1 + i.\)

得到  $f(z) = ze^z + (1+i)z + C$ .

### → ★ 本章小结 ★ →

本章所需掌握的知识点如下:

- (1) 理解柯西-古萨定理和复合闭路定理的条件和结论, 并能熟练使用这两个定理.
- (2) 能熟练使用有向曲线的参数方程来计算适用情形的复积分.
- (3) 能熟练使用原函数法计算单连通区域上解析函数的积分.
- (4) 能熟练使用柯西积分公式计算适用情形的复积分.
- (5) 熟知解析函数和调和函数的相关性质.
- (6) 会求共轭调和函数.

本章中不易理解和易错的概念包括:

- (1) 容易在使用定理时,忽视单连通的要求;或在一些并不需要单连通的情形误以为要单连通.
  - (2) 复合闭路的含义, 以及复合闭路相应结论的使用方法.
  - (3) 使用柯西积分公式时记错求导次数,或记错系数.
- (4) 对可以使用牛顿-莱布尼兹定理的情形,使用曲线的参数方程来计算. 在少量情形下,这样做也有可能能计算出来,但往往计算量非常大.
  - (5) 误以为实部 u 也是虚部 v 的共轭调和函数.

### → 今 本章作业 长 →

一、单选题.

1. 函数  $f(z) = \frac{1}{z}$  在区域( )内有原函数.

(A) 
$$0 < |z| < 1$$

(B) 
$$\text{Re } z > 0$$

(C) 
$$|z-1| > 2$$

(D) 
$$|z+1|+|z-1|>4$$

2. 函数( )在区域 Re z > 0 内的积分与路径**有关**.

(A) 
$$x^2 - y^2 + 2xyi$$

(B) 
$$\frac{1}{z+1}$$

(C)  $\sin e^z$ 

(D) 
$$2x + 3yi$$

3. 设 
$$f(z) = \oint_{|\zeta|=2} \frac{\sin \zeta}{\zeta - z} d\zeta$$
, 则  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = ($  ).

(A) πi

(D)  $2\pi i$ 

4. 设 
$$f(z) = \oint_{|\zeta|=4} \frac{\sin \zeta - \cos \zeta}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta$$
, 则  $f'(\pi) = ($  ).

(A) 0

(C)  $-2\pi i$ 

(D) πi

5. 下列函数中( )不是调和函数.

(A) 3x - y (B)  $x^2 - y^2$  (C)  $\ln(x^2 + y^2)$  (D)  $\sin x \cos y$ 

6. 函数( )不能作为解析函数的虚部.

(A) 2x + 3y

(B)  $2x^2 + 3y^2$  (C)  $x^2 - xy - y^2$  (D)  $e^x \cos y$ 

7. 下列命题正确的是( ).

(A) 设  $v_1, v_2$  在区域 D 内均为 u 的共轭调和函数, 则必有  $v_1 = v_2$ 

(B) 解析函数的实部是虚部的共轭调和函数

(C) 以调和函数为实部与虚部的函数是解析函数

(D) 若 f(z) = u + iv 在区域 D 内解析, 则  $u_x$  为 D 内的调和函数

8. 设 f(z) 是区域 D 内的解析函数, 下述命题正确的是(

(A) 若  $C_1, C_2$  都是 D 中从  $z_1$  到  $z_2$  的曲线, 则  $\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$ 

(B) 若 C 是 D 中的闭合曲线, 则  $\oint_C f(z) dz = 0$ 

(C) 存在区域 D 内的解析函数 F(z), 使得 F'(z) = f(z)

(D) f(z) 的实部 u(x,y) 有任意阶连续偏导数

#### 二、填空题.

2. 设 
$$C$$
 为正向圆周  $|z| = 1$ , 则积分  $\oint_C \left(\frac{1+z+z^2}{z^3}\right) dz = _____.$ 

3. 设 
$$C$$
 为正向圆周  $|z|=1$ , 则  $\oint_C \overline{z} \, \mathrm{d}z = \underline{\hspace{1cm}}$ .

4. 设 
$$C$$
 为正向圆周  $|z|=2$ , 则  $\oint_C \frac{\overline{z}}{|z|} dz = _____.$ 

5. 设 
$$f(z)$$
 处处解析且不为零, 则  $\oint_C \frac{f''(z) + 2f'(z) + f(z)}{f(z)} dz = _____.$ 

6. 设 
$$f(z) = \frac{1}{(z+\mathrm{i})^{100}}$$
,则  $\oint_{|z|=2} f(z) \,\mathrm{d}z =$ \_\_\_\_\_.

#### 三、计算题.

1. 计算下列积分.

(i) 
$$\int_C |z| dz$$
, 其中  $C$  是从  $0$  到  $3 + i$  的直线段;

(ii) 
$$\int_C \overline{z} \, dz$$
, 其中  $C$  是从  $0$  到  $3$  再到  $3 + i$  的折线段;

(iii) 
$$\int_C \frac{3z-2}{z} dz$$
, 其中  $C$  是圆周  $|z|=2$  的上半部分, 方向从  $-2$  到 2;

(iv) 
$$\int_C \overline{z} dz$$
, 其中  $C$  是从 i 到  $2 + i$  的直线段.

2. 直接写出下列积分的值, 其中 C: |z| = 1.

(i) 
$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-2};$$
(ii) 
$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\cos z};$$
(iii) 
$$\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z-2i)^2} \, \mathrm{d}z;$$
(iv) 
$$\oint_C e^z \sin z \, \mathrm{d}z;$$
(v) 
$$\oint_C \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z;$$
(vi) 
$$\oint_C (|z| + e^z \cos z) \, \mathrm{d}z;$$

(vii) 
$$\oint_C \frac{\sin z}{|z|^2} dz;$$
 (viii) 
$$\oint_C \frac{dz}{(z^2 - 2)(z^3 - 2)}.$$

3. 计算下列积分.

(i) 
$$\int_C (z+1)^2 dz$$
, 其中  $C$  是从原点到  $1+i$  的直线段;

(ii) 
$$\int_C z^2 dz$$
, 其中  $C$  是从原点到 2 再到 2+i 的折线段;

(iii) 
$$\int_C \cos^2 z \, dz$$
, 其中  $C$  是从 i 到  $i - \pi$  再到  $-\pi$  的折线段;

(iv) 
$$\int_C (e^z + 3z^2 + 1) dz$$
, 其中  $C$  是圆周  $|z| = 2$  的右半部分, 方向从  $-2i$  到  $2i$ ;

(v) 
$$\int_C \cos^2 z \, dz$$
, 其中  $C$  是从 i 到  $i - \pi$  再到  $-\pi$  的折线段;

(vi) 
$$\int_C z e^z dz$$
, 其中  $C \not\equiv z(t) = \sin t + it$ ,  $t \not \downarrow 0$  到 π.

4. 计算下列积分.

(i) 
$$\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} dz;$$
 (ii) 
$$\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z dz;$$
 (iii) 
$$\int_{0}^{i} (z^2 + 1) dz;$$
 (iv) 
$$\int_{0}^{i} (z - i) e^{-z} dz;$$

(v) 
$$\int_{-\pi i}^{\pi i} (e^z + 1) dz;$$
 (vi)  $\int_{0}^{\pi} (z + \cos 2z) dz.$ 

5. 计算下列积分.

(i) 
$$\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2} dz;$$
 (ii) 
$$\oint_{|z+i|=2} \frac{\sin z}{z+2i} dz;$$

(iii) 
$$\oint_{|z|=4} \frac{z-6}{z^2+9} dz;$$
 (iv)  $\oint_{|z-1|=4} \frac{\sin z}{z^2+1} dz;$ 

(v) 
$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} dz;$$
 (vi)  $\oint_{|z-3|=4} \frac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2} dz;$ 

(vii) 
$$\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz;$$
 (viii) 
$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^{2023}} dz;$$

(ix) 
$$\oint_{|z|=2} \frac{\ln(z+3)}{(z-1)^3} dz;$$
 (x)  $\oint_{|z+1|=4} \frac{\sin z + 2z}{(z+\pi)^2} dz;$ 

(xi) 
$$\int_{|z|=3} \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2(z-5)};$$
 (xii)  $\int_{|z|=3} \frac{\mathrm{e}^z}{(z+1)^2(z-2)^3}.$ 

- 6. 设  $C_1$  是正向圆周 |z|=2,  $C_2^-$  是负向圆周 |z|=3,  $C=C_1+C_2^-$  是复合闭路, 计算  $\oint_C \frac{\cos z}{z^3} \, \mathrm{d}z$ .
- 7. 计算  $\oint_C \frac{1}{z-i} dz$ , 其中 C 是以  $\pm \frac{1}{2}$ ,  $\pm \frac{6}{5}i$  为顶点的菱形,
- 8. 设 C 是正向圆周  $|\zeta| = 2$ ,  $f(z) = \oint_C \frac{\zeta^3 + \zeta + 1}{(\zeta z)^2} d\zeta$ . 计算 f'(1 + i) 和 f'(4).
- 9. 设 C 是正向圆周  $|\zeta|=4, f(z)=\oint_C \frac{\sin\zeta}{z-\zeta}\,\mathrm{d}\zeta.$  计算  $f^{(n)}(\pi)$ .
- 10. 已知  $v(x,y) = x^3 + y^3 axy(x+y)$  是调和函数, 计算 a 以及解析函数 f(z) 使得 v(x,y) 是它的虚部.
- 11. 已知  $u(x,y) = x^2 + 4xy + ay^2$  是调和函数, 计算 a 以及解析函数 f(z) 使得 u(x,y) 是 f(z) 的实部.
- 12. 已知  $v(x,y) = ax^2y y^3 + x + y$  是调和函数, 计算 a 以及解析函数 f(z) 使得 v(x,y) 是它的虚部, 其中 f(0) = 1.
- 13. 已知 f(z) = u + iv 是解析函数, 其中  $u(x,y) = x^2 + axy y^2, v = 2x^2 2y^2 + 2xy$ , 求实数 a 以及 f'(z).
- 14. 已知  $u(x,y) = x^3 + ax^2y + bxy^2 3y^3$  是调和函数, 求 a,b 以及它的共轭调和函数 v(x,y) 使得 v(0,0) = 0.
- 15. 证明  $u(x,y) = x^3 6x^2y 3xy^2 + 2y^3$  是调和函数, 并求它的共轭调和函数.

- 16. 设  $v \in u$  的共轭调和函数,证明  $\sin u \cosh v$  也是调和函数,并求它的共轭调和函数.
- 17. 设 u 为区域 D 内的调和函数,  $f(z) = u_x iu_y$ . 那么 f(z) 是不是 D 内的解析函数? 为什么?

四、证明题.

1. 设  $C_1$  和  $C_2$  为两条分离的闭路, 证明

$$\oint_{C_1} \frac{z^2 dz}{z - z_0} + \oint_{C_2} \frac{\sin z dz}{z - z_0} = \begin{cases} 2\pi i z_0^2, & \exists z_0 \in C_1 \text{ 内部时,} \\ 2\pi i \sin z_0, & \exists z_0 \in C_2 \text{ 内部时.} \end{cases}$$

- 2. 设 f(z) 和 g(z) 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内任意一条闭路, 且 C 的内部完全包含在 D 中. 若 f(z) = g(z) 在 C 上所有的点处成立, 证明在 C 内部所有点处 f(z) = g(z) 也成立.
- 3. (刘维尔定理) 证明: 若 f(z) 在复平面内处处解析且有界, 则对任意  $a \in \mathbb{C}$ , 有

$$\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)^2} \, \mathrm{d}z = 0,$$

其中 R > |a|. 由此证明 f 是常数. 提示: 利用长大不等式.

4. 设 f 是域 |z|>r>0 上的解析函数. 证明: 若对于 |a|>R>r,  $\lim_{z\to\infty}f(z)=f(a),$ 则积分

$$\oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} \, \mathrm{d}z = 0.$$

提示: 利用长大不等式.

## 参考文献 参考文献

- [1] 阿尔福斯. 复分析 [M]. 赵志勇, 薛运华, 杨旭, 译. 北京: 机械工业出版社, 2022.
- [2] 范莉莉, 何成奇. 复变函数论 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987.
- [3] 克莱因. 古今数学思想(第一册)[M]. 张理京, 张锦炎, 江泽涵. 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2013.
- [4] 克莱因. 古今数学思想(第二册)[M]. 张理京, 张锦炎, 江泽涵. 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2013.
- [5] 史济怀, 刘太顺. 复变函数 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998.
- [6] 西安交通大学高等数学教研室. 工程数学: 复变函数. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [7] 严镇军. 数学物理方法 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1999.
- [8] 庄圻泰, 张南岳. 复变函数 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1984.
- [9] BERG G O, JULIAN W, MINES R, RICHMAN F. The constructive Jordan curve theorem[J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1975, 5(2):225–236.
- [10] 袁志杰, 张神星. 复变函数在不同圆环域内洛朗展开的探究 [J/OL]. 南阳师范学院学报, 2024, 23(3). https://publish.cnki.net/journal/portal/nysf/client/paper/01eb42a7419d144c7a0459345f42f130.
- [11] 3Blue1Brown. 奥数级别的数数问题 [DB/OL]. (2022-06-26)[2024-12-08]. https://www.bilibili.com/video/BV1R34y1W7Xn/.
- [12] 3Blue1Brown. 研究人员觉得这里有个 bug... (Borwein 积分)[DB/OL]. (2022-12-07)[2024-12-08]. https://www.bilibili.com/video/BV18e4y1u7BH/.