HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

线性代数

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第二章　等价和秩

1. 向量组
2. 秩与极大线性无关组
3. 矩阵的初等变换
4. 矩阵的秩
5. 标准正交基
6. 线性方程组

第一节　向量组

- 向量组的线性表示
- 线性相关与线性无关
- 线性相关和线性无关的性质

引例：齐次线性方程组的解

我们知道齐次线性方程组是指 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 令

$$V=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

表示该方程的所有解形成的集合. 显然 $\boldsymbol{0}\in V$. 若 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$. 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0},\quad\forall\lambda\in\mathbb{C}.$$

换言之, V 上的加法和数乘的结果还落在 V 中. 它是 $\mathbb{C}^n$ 的一个子空间.

如何用有限个向量来表示一个子空间中的所有向量呢？我们需要线性组合的概念.

一些具有相同维数的向量放在一起形成向量组(可以有重复的): 例如:

- $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$;
- $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} = (1, 1, -1), \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} = (2, 1, 2), \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} = (3, 2, 1)$;
- $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 行可以看成 m 个行向量, 它们构成一个向量组, 叫做 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组;
- 类似地, $\boldsymbol{A}$ 的列向量构成它的列向量组.
- 对于 n 维向量组

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)^{\mathrm{T}},$$

任意 n 维向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 可以表示为这个向量组中向量的数乘之和:

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{e}_n.$$

定义

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量. 若存在数 $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 线性表示, 或称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的线性组合.

例

(1) n 维零向量是任一 n 维向量组的线性组合.

(2) 任意 n 维向量是 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 的线性组合.

线性表示的等价刻画

向量 β 能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 即存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{\beta} = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}.$$

定理

向量 β 能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \beta$ 有解, 其中

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m) \in M_{n \times m}.$$

记 V 为向量组 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 能线性表示的向量全体. 容易知道

$$V = \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^n \mid \text{存在 } \boldsymbol{x} \text{ 使得 } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}\}$$

是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间, 称为 S 生成的空间. 它是包含 S 中所有向量的最小的线性空间.

定义

(1) 设有两个向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k\}$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k$ 均可以被 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 线性表示, 则称向量组 T 可以被向量组 S 线性表示.

(2) 若向量组 S 和 T 能相互线性表示, 则称 S,T 向量组等价.

设 S,T 分别生成空间 V,W. T 可以被 S 线性表示 $\iff$ $W\subseteq V$; S,T 向量组等价 $\iff$ $W=V$.

T 能被 S 线性表示, 当且仅当存在 $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_k$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{\beta}_1,\quad \dots,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\beta}_k,$$

其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m)$. 即存在矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k)$.

反过来, 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示.

定理

(1) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示 $\iff$ 存在矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

(2) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组作为向量组等价 $\iff$ 存在矩阵 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$.

命题

向量组的等价满足如下性质:

(1) 自反性: $S\sim S$;

(2) 对称性: $S\sim T \implies T\sim S$;

(3) 传递性: $S\sim T, T\sim R \implies S\sim R$.

定义

对于 n 维向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$, 若存在一组不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

则称该向量组线性相关. 否则称该向量组线性无关.

向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 线性无关当且仅当

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

即 $(\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解.

例

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 实际上包含零向量的向量组总是线性相关的.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,6)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,5)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 线性相关的向量组添加更多向量还是线性相关的.

(3) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(3,5,7)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 它们构成的 3 阶矩阵行列式为零. n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\iff|\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq 0$.

(4) $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关. 一般地, n 维单位向量组 $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关.

(5) $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关 $\iff\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$.

(6) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关 $\iff\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 对应分量成比例.

例

已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，证明向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 线性无关.

证明

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}| = 2$，$\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}.$$

若 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

□

练习

已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ 线性无关，请问向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1\}$ 是否线性无关？

答案

线性相关，因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2) + (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) - 2\boldsymbol{\alpha}_1 = \mathbf{0}$.

练习

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $k = \underline{\ -1\ }$.

定理

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\iff$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

证明

若该向量组线性相关, 则存在不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

设 $\lambda_i \neq 0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_i = -\dfrac{1}{\lambda_i}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由其它向量线性表示.

反之, 若 $\boldsymbol{\alpha}_i = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由其它向量线性表示. 则 $-\boldsymbol{\alpha}_i + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{0}$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. □

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 其中任一向量不可以由其它向量线性表示.

注意, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\not\Longrightarrow$ 其中任一向量可以由其它向量线性表示.

练习

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量, 则下列结论是否正确的有 ___1___ 个.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则其中任一向量均可由其余向量线性表示

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 且存在不全为零的 $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1} = \mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示

(4) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性相关

定理

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表达形式唯一.

证明

存在不全为零的数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m, k$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m + k\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

若 $k = 0$, 则 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ 不全为零且 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$. 这与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关矛盾. 因此 $k \neq 0$. 于是 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示.

若 $\boldsymbol{\beta}$ 有两种线性表达形式，二式相减得到不全为零的数 $\lambda_1, \dots, \lambda_m, k$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m + k\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

矛盾. □

定理

设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$.

(1) 若向量组 S 线性相关, 则 T 也线性相关.

(2) 若向量组 T 线性无关, 则 S 也线性无关.

即部分相关 $\Longrightarrow$ 整体相关, 整体无关 $\Longrightarrow$ 部分无关.

例

n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ (D)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量不能由其余向量线性表示

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任两个向量都线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中不含零向量

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一个向量都不能由其余向量线性表示

练习

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则（ C ）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 一定能由 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(B) $\boldsymbol{\beta}$ 一定不能由 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\delta}$ 一定能由 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

(D) $\boldsymbol{\delta}$ 一定不能由 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

例

设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，但不能由向量组 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}\}$ 线性表示. 记 $T = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{m-1}, \boldsymbol{\beta}\}$，则（ B ）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 S 线性表示，也不能由 T 线性表示

(B) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 S 线性表示，但能由 T 线性表示

(C) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由 S 线性表示，也能由 T 线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由 S 线性表示，但不能由 T 线性表示

例

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，证明

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_4$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

证明

(1) 由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关可知 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，从而它们不能相互表示. 于是 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表示，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 不能被 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性表示. 但是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，于是 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 也能由 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示. 这与 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关矛盾. □

定理

设 $\boldsymbol{\alpha}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}, a_{n+1,j})^{\mathrm{T}}$.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

(2) 若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

证明

设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m)$, 则存在 m 维向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解. 而

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = 0,$$

因此 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解, $\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关. □

即高维相关 $\Longrightarrow$ 低维相关, 低维无关 $\Longrightarrow$ 高维无关.

例

判断下列向量组的线性相关性：

(1) $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$;

(2) $(a,b,1,0,0)^{\mathrm{T}},(c,d,0,6,0)^{\mathrm{T}},(a,c,0,5,6)^{\mathrm{T}}$;

(3) $(a,1,0,b,0)^{\mathrm{T}},(c,0,6,d,0)^{\mathrm{T}},(a,0,5,c,6)^{\mathrm{T}}$.

解

相关；无关；无关.

练习

若 $(1,0,0,2)^{\mathrm{T}},(0,1,5,0)^{\mathrm{T}},(2,1,t+2,4)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 $t=$ __3__.

定理

设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 可由 $T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 线性表示. 若 $s>t$, 则 S 线性相关.

即多的由少的表示, 多的一定线性相关.

证明

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t)$. 则存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_{t\times s}$. 将 $\boldsymbol{P}$ 补充 $s-t$ 个零行得到 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}\\ \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$. 则 $|\boldsymbol{Q}|=0$, 存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, S 线性相关. □

推论

(1) 设向量组 $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示. 若 S 线性无关, 则 $s \leqslant t$.

(2) $m > n$ 个 n 维向量一定线性相关.

(3) 任意两个等价的线性无关向量组所含向量的个数相同.

(1) 向量组线性相关 $\iff$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

(2) 若 S 线性无关, $S \cup \{\beta\}$ 线性相关, 则 β 可以由 S 唯一线性表示.

(3) 部分相关 $\Longrightarrow$ 整体相关, 整体无关 $\Longrightarrow$ 部分无关.

(4) 高维相关 $\Longrightarrow$ 低维相关, 低维无关 $\Longrightarrow$ 高维无关.

(5) 多的由少的表示, 多的一定线性相关.

第二节　秩与极大线性无关组

- 秩
- 极大线性无关组

我们知道, $\mathbb{C}^n$ 中任一向量可以唯一表为 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 的线性组合. 由此引出基的概念:

定义

若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m \in V$ 满足: 对任意 $\boldsymbol{v} \in V$, 存在唯一的一组数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{v} = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 的一组基.

命题

$\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 的基向量组 $\iff$ 该向量组生成 V 且线性无关.

证明

显然基向量组生成 V. 由于零向量只有唯一的线性表示方式, 因此基总是线性无关的一组向量.

反过来, 假设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关且生成 V. 若 $\boldsymbol{v}\in V$ 有两种线性表达形式, 二式相减得到不全为零的数 $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

这与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关矛盾. 因此 $\forall\boldsymbol{v}\in V$ 只有唯一的一种线性表达形式. □

定义

设 $V \subseteq \mathbb{C}^n$ 是一个线性子空间. 若存在 (线性) 双射 $f : \mathbb{C}^r \to V$ 满足

(1) $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}), \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^r$;

(2) $f(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda f(\boldsymbol{v}), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^r$,

则称 V 的维数为 r, 记为 $r = \dim V$.

在逆矩阵一节我们已经知道 $m \neq n$ 时, $\mathbb{C}^m$ 和 $\mathbb{C}^n$ 之间没有线性双射. 因此子空间维数总是唯一的.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 的一组基. 定义

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{C}^m &\longrightarrow V \\
(a_1, \ldots, a_m) &\longrightarrow a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{\alpha}_m
\end{aligned}
$$

则该映射是线性双射. 因此子空间的维数等于基的大小.

定义

设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 生成空间 V. 称 V 的维数为该向量组的秩 (Rank), 记作 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

由于该向量组线性无关当且仅当它们构成一组基, 因此:

定理

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\iff m = R(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

(2) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\iff m > R(\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

设 $W \subseteq V$ 是两个子空间, $S = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$ 是 W 的一组基, $T = \{\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_t\}$ 是 V 的一组基. 则 S 可由 T 线性表示. 由于 S 线性无关, 因此 $s = \dim W \leqslant t = \dim V$. 于是:

定理

设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 则 $R(S) \leqslant R(T)$.

练习

若任一 3 维向量都可由向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(a,3,2)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,3)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,1)^{\mathrm{T}},$$

线性表示，则 $a\neq$ __5__.

练习

判断题：设 S 和 T 为两个 n 维向量组，且 $R(S)=R(T)$，则 S 和 T 等价. ✕

例

若 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$, $S_2=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$, $S_3=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$ 满足 $R(S_1)=R(S_2)=3, R(S_3)=4$. 证明向量组 $S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4\}$ 线性无关.

证明

由 $R(S_1)=3$ 可知 S_1 线性无关. 由 $R(S_2)=3$ 可知 S_2 线性相关. 从而 α_4 可由 S_1 线性表示. 于是 S_3 可由 S 线性表示. 显然 S 可由 S_3 线性表示, 因此二者等价, $R(S)=R(S_3)=4$. □

极大线性无关组的定义

定义

设 S 为一个向量组. 若 S 的部分组 $S_0=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 满足

(1) S_0 线性无关;

(2) S_0 添加 S 中的若干向量得到的向量组均线性相关.

则称 S_0 是 S 的一个极大线性无关组.

根据上一节相关结论可知, S 中所有向量均可由 S_0 线性表示. 换言之, S_0 和 S 等价, 它们生成相同的子空间 V, $m=R(S)$, S_0 是 V 的一组基.

极大线性无关组的定义

定理

S_0 是 S 的极大线性无关组当且仅当

(1) S_0 线性无关;

(2) S 中任意 $m+1$ 个向量线性相关.

证明

若 S_0 是 S 的极大线性无关组, 则 S 中任意 $m+1$ 个向量可由 S_0 线性表示. 从而线性相关.

反之, 若 S 中任意 $m+1$ 个向量线性相关, 则 S 中任意 $s>m$ 个向量线性相关. 于是 S_0 添加 S 中的若干向量得到的向量组均线性相关. □

极大线性无关组的性质

(1) 若 $R(S)=r$, 则 S 中任意 r 个线性无关的向量构成 S 的一个极大线性无关组.

(2) 只含有零向量的向量组没有极大线性无关组 (空集), 它的秩为 0 (空集生成 0 维空间 $\{\mathbf{0}\}$).

(3) 极大线性无关组一般不是唯一的. 例如

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1)^{\mathrm{T}}.$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是一个极大线性无关组, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是一个极大线性无关组.

(4) 向量组和它的一个极大线性无关组是等价的, 于是同一向量组的任意两个极大线性无关组等价.

例

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&1&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的行向量组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,1,3,1),\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,-1,4),\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(0,0,0,5),\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=(0,0,0,0).$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}$ 的第 $1,2,4$ 个分量形成可逆矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&4\\0&0&5\end{pmatrix}$，因此它们线性无关.

它们构成一个极大线性无关组，$\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩是 3. 类似可知，$\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩也是 3.

实际上，任意矩阵的行向量组的秩等于列向量组的秩. 为了说明这一点，我们需要先研究矩阵的变换.

第三节　矩阵的初等变换

- 初等矩阵
- 矩阵等价
- 初等变换解矩阵方程

我们在第一章中利用了如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换

(1) 互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$;
(2) 一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i;
(3) j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$.

实际上我们也可以对矩阵实施初等变换, 而且这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换. 以行变换为例:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆是 $r_i \leftrightarrow r_j$;

(2) kr_i 的逆是 $\dfrac{1}{k}r_i$;

(3) $r_i + kr_j$ 的逆是 $r_i - kr_j$.

我们使用矩阵来表示上述变换.

单位阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的方阵称为**初等矩阵**.

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 和 $c_i \leftrightarrow c_j$ 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & \cdots & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \cdots & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}$$

(2) kr_i, kc_i 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& {\color{red}k} &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$\uparrow$

第 i 列

第三类初等矩阵

(3) $r_i + kr_j, c_j + kc_i$ 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,j(k)) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&1&&k&& \\ &&&\ddots&&& \\ &&&&1&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{第 } i \text{ 列} & \text{第 } j \text{ 列} \end{array} \end{array}$$

我们来看

$$\boldsymbol{E}(1,3)\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i,j)$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 $r_i \leftrightarrow r_j$.

从分块矩阵乘法

$$\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}(i,j) \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

可以看出确实如此.

$$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4k&5k&6k\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 kr_i.

$$\boldsymbol{E}(3,1(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7+k&8+2k&9+3k\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i,j(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 r_i+kr_j. 即, 初等矩阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等行变换.

同理, 初等矩阵右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等同于对 $\boldsymbol{A}$ 实施对应的初等列变换.

定理

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$.

(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等行变换, 相当于在$\boldsymbol{A}$ 的左边乘对应的 m 阶初等矩阵.

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等列变换, 相当于在$\boldsymbol{A}$ 的右边乘对应的 n 阶初等矩阵.

且对应的初等矩阵就是对单位阵 $\boldsymbol{E}_n$ 实施相应的初等变换得到的矩阵.

即左行右列.

例：初等矩阵与初等变换

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}+2a_{11} & a_{33}+2a_{13} & a_{32}+2a_{12} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $\boldsymbol{B}=$(C).

(A) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$　(B) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3$　(C) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$　(D) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$

例

设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得到 $\boldsymbol{C}$．求满足 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{C}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$ 因此

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例：初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆, 因此初等矩阵也都是可逆的:

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j)=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))$;

(3) $\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{E}(i,j(-k))=\boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j(k))^{-1}=\boldsymbol{E}(i,j(-k))$.

例

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵, 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{AB}^{-1}=$ ____ $\boldsymbol{E}(i,j)$ ____.

练习

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{13} & -a_{11}+a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & -a_{21}+a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & -a_{31}+a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$(B).

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$　(B) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$　(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}^{-1}$　(D) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}$

练习

将可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$, 则对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 实施初等变换 (D) 可得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(A) r_2+2r_1　(B) r_2-2r_1　(C) c_1+2c_2　(D) c_1-2c_2

例

设 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 及逆.

解

$$\boldsymbol{P}_1 \underset{\sim}{\overset{c_1+ac_4}{}} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{kc_2}{}} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&k&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_1 \underset{\sim}{\overset{r_4-ar_1}{}} (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-a&1\end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{\frac{1}{k}r_2}{}} (\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1/k&0&0\\1&0&0&0\\0&0&-a&1\end{pmatrix}.$$

例：初等变换

练习

设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix},$$

$$P_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\qquad P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

若 A 可逆，则 $B^{-1}=$(C).

(A) $A^{-1}P_1P_2$ (B) $P_1A^{-1}P_2$ (C) $P_1P_2A^{-1}$ (D) $P_2A^{-1}P_1$

我们来看初等行变换能够将矩阵化简成何种形式.

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\3&6&-2&11\\2&1&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&-3&4&-1\\0&-5&5&-5\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{5}r_3}\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&-3&4&-1\\0&1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&1&-1&1\\0&-3&4&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+3r_2}\begin{pmatrix}1&3&-2&4\\0&1&-1&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

经过若干次初等行变换, 矩阵变为行阶梯形矩阵.

定义

满足下述条件的矩阵称为行阶梯形矩阵:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 若 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 存在正整数

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_\ell, \qquad \ell \leqslant m$$

使得 $a_{1,k_1}, \ldots, a_{\ell,k_\ell}$ 均非零; $j < k_i$ 或 $i > \ell$ 时 $a_{ij} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times$$

任何矩阵都可通过初等行变换化为行阶梯形.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{r_1-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

再经过若干次初等变换，增广矩阵变为行最简形矩阵.

定义

满足下述条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵：

(1) 每个非零行的第一个非零元是 1；

(2) 每个非零行的第一个非零元所在列其它元素均为 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任何矩阵都可通过初等行变换化为行最简形.

例：行最简形矩阵

例

用初等行变换将 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix}$ 化为行最简形矩阵.

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{r_3 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -9 & 12 \end{pmatrix} \underset{\sim}{r_3 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{r_1 - 3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

定义

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 行等价, 记作 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换变为 $\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 列等价, 记作 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 $\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 列等价, 记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

每个矩阵都可以通过初等行变换变为行最简形矩阵. 对于可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 由于初等矩阵都是可逆的, 因此它对应的行最简形矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 也是可逆的. 于是 $\boldsymbol{Q}$ 没有零行, 它只能是 $\boldsymbol{E}$. 换言之, 可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积. 所以 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$ 等价于存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$.

矩阵等价的刻画

定理

(1) $A \overset{r}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P 使得 $B = PA$.

(2) $A \overset{c}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 Q 使得 $B = AQ$.

(3) $A \sim B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P, Q 使得 $B = PAQ$.

由此可知

命题

矩阵的行等价、列等价、等价均满足

(1) 自反性: $A \sim A$;

(2) 对称性: $A \sim B \implies B \sim A$;

(3) 传递性: $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$.

若矩阵 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$ 列等价, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$, 于是二者的列向量组作为向量组等价. 但是反过来不成立. 这是因为列等价的矩阵一定是同型矩阵, 但等价的向量组并不要求向量数量相同.

不过, 等价的向量组它们各自的极大线性无关组构成的矩阵确实是列等价的. 设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_r)$ 的列向量组是等价的线性无关组. 存在矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q} \in M_r$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$. 从而 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$. 注意 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$ 的第 j 列就是 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 表达为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性组合的系数. 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 该表达形式唯一, 因此 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$ 第 j 列就是 $\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{E}_r$. 故 $\boldsymbol{P}$ 可逆, $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$.

矩阵的标准型

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后, 可通过初等列变换将其变为标准型 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

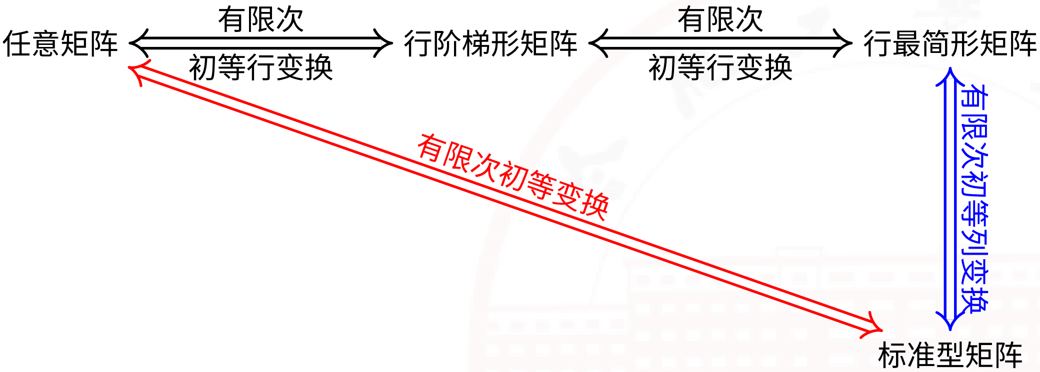
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{}{\overset{c_4+9c_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4-4c_2}{\overset{c_3+3c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的等价也叫做相抵, 上述标准型也叫作相抵标准型. 我们会看到不同的 r 对应的相抵标准型不等价. 所以相抵标准型相当于在每一个等价类中找到了一个具有代表性的矩阵.

命题

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当它的标准型为 $\boldsymbol{E}_n$.

矩阵的变换关系



任意矩阵
有限次
初等行变换
行阶梯形矩阵
有限次
初等行变换
行最简形矩阵
有限次初等变换
有限次初等列变换
标准型矩阵

例：初等变换

例

将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 表示成有限个初等阵的乘积.

解

$$\boldsymbol{A}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_3]{-r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因此 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

若 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{X})$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{X})$. 即 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 所以这种方法可用来解矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵.

特别地, $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}^{-1})$ 可用来帮助计算矩阵的逆. 类似地 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{X} \end{pmatrix}$ 可用来解 $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵.

练习

求 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆.

解

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\2&1&4&0&0&1\end{array}\right)\underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&-1&0&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&-1&0&-2&0&1\end{array}\right)\overset{r_3+r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)$$

$$\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&7&-2&-2\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right)\overset{r_1-r_2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5&-2&-1\\0&1&0&2&0&-1\\0&0&1&-3&1&1\end{array}\right).$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\2&0&-1\\-3&1&1\end{pmatrix}.$

例：初等变换解矩阵方程

练习

若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{X}$, 求 $\boldsymbol{X}$.

解

由题设知 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$.

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-4&3&-2&-3&3\end{array}\right)$$

例：初等变换解矩阵方程

续解

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{-r_3}{\overset{r_3+4r_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_2+r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right) \overset{r_1-2r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right).$$

故 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$

练习

(1) 设 A 是 3 阶方阵，存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$，则

$P^{-1}A^*P =$ __$\mathrm{diag}(6,3,2)$__.

(2) 设 A 是 3 阶方阵，存在可逆阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

若 $Q = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$，则 $Q^{-1}AQ =$ __$\mathrm{diag}(1,3,2)$__.

(3) 设 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = E$，则以下说法正确的有__4__个.

(I) A 等价于 E;　　(II) A 等价于 B;

(III) A 可经过有限次初等行变换化为 B;　　(IV) $AB = BA$.

第四节　矩阵的秩

- 矩阵秩的定义
- 矩阵秩与子式
- 矩阵秩的性质
- 极大线性无关组的计算方法

上一节中我们说每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准型 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记作 $R(\boldsymbol{A})$.

第一个问题是, 秩是唯一的吗? 若两个 $m \times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}, \quad (r > s)$$

则存在可逆的方阵 $\boldsymbol{P} \in M_m, \boldsymbol{Q} \in M_n$ 使得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_2 \\ \boldsymbol{P}_3 & \boldsymbol{P}_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{Q}_2 \\ \boldsymbol{Q}_3 & \boldsymbol{Q}_4 \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{P}_1 \in M_s, \boldsymbol{Q}_1 \in M_r$. 则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{Q}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{P}_3 & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

由于 $r > s$, 因此 $\boldsymbol{Q}_1$ 的最后 $r - s$ 列为零, $\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{O}$. 从而

$$|\boldsymbol{Q}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Q}_3 & \boldsymbol{Q}_4 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{Q}_1| \cdot |\boldsymbol{Q}_4| = 0.$$

矛盾! 因此不同的标准型之间不等价, 也就是说矩阵的秩是唯一的.

称 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为行秩, 列向量组的秩为列秩.

定理

$\boldsymbol{A}$ 的行秩和列秩均等于秩 $R(\boldsymbol{A})$.

对于行阶梯形矩阵, 再实施初等变换使其变为行最简形矩阵或标准型矩阵, 并不会改变它的非零行的个数. 换言之, 行阶梯形矩阵的秩就是非零行的个数.

设 $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换变为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则二者秩相等, 二者的行向量组等价, 从而行秩也相等. 对于 $\boldsymbol{B}$, 它的行秩就是非零行的个数, 也就是 $R(\boldsymbol{B})$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的行秩等于秩. 不难知道 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列秩 $=$ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行秩 $= R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = R(\boldsymbol{A})$.

例

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0&3&-2\\0&3&1&-2&5\\0&0&0&4&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}$ 的秩.

解

$\boldsymbol{A}$ 是行阶梯形矩阵，因此 $R(\boldsymbol{A})=3$.

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow[r_4-4r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-11\\0&-1&-11\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&11\\0&0&0\end{pmatrix}\implies R(\boldsymbol{B})=2.$$

例：计算矩阵的秩

例

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a \\ -1 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a+1\end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$\boldsymbol{A}\underset{r_4-r_1}{\overset{\substack{r_2+r_1\\ r_3-r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a \\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}\underset{-\frac{1}{2}r_3}{\overset{r_3-ar_4}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此 $a\neq 0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$; $a=0$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$.

例：计算矩阵的秩

练习

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\2&1&-6&4\\3&2&m&7\end{pmatrix}$ 的秩.

答案

$m\neq-8$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$; $m=-8$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$.

例：计算矩阵的秩

例

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$\boldsymbol{A}\ \underset{\substack{r_3-r_1\\ r_4-ar_1}}{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_4\\ r_2-r_1}}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix}\ \underset{r_4+r_3}{\overset{r_4+r_2}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -(a+3)(a-1) \end{pmatrix}$$

因此 $a\neq 1,-3$ 时，$R(\boldsymbol{A})=4$; $a=-3$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$; $a=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=1$.

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式. 例如 n 阶方阵的余子式是 $n-1$ 阶子式.

定理

设 $R(\boldsymbol{A})=r$, 则存在非零的 r 阶子式, 但所有的 $r+1$ 阶子式都是零.

根据行列式的拉普拉斯展开, 若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式均为零, 则 $k+1$ 阶子式也都是零. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $s>r$ 阶子式都是零.

推论

(1) $R(\boldsymbol{A})\geqslant r \iff \boldsymbol{A}$ 存在非零 r 阶子式.

(2) $R(\boldsymbol{A})\leqslant r \iff \boldsymbol{A}$ 所有 $r+1$ 阶子式均为零.

(3) $R(\boldsymbol{A})=r \implies \boldsymbol{A}$ 存在 $1,2,\ldots,r$ 阶非零子式.

证明

设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j)$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式, 最多相差 -1.

(2) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式或 a 倍.

(3) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式.

因此若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都是零, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式也都是零.

由于 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 也是初等矩阵, 因此反过来也成立. 对于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 情形同理. 因此, 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都是零 $\iff$ $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式都是零.

对于标准型矩阵, 该定理显然成立. 因此该定理对任意矩阵都成立. □

命题

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 则 $0 \leqslant R(\boldsymbol{A}) \leqslant \min(m,n)$.

定义

(1) 若 $R(\boldsymbol{A}) = m$, 称 $\boldsymbol{A}$ 行满秩;

(2) 若 $R(\boldsymbol{A}) = n$, 称 $\boldsymbol{A}$ 列满秩;

(3) 若 $R(\boldsymbol{A}) = m = n$, 称 $\boldsymbol{A}$ 满秩.

命题

(1) $R(\boldsymbol{A})=0 \iff \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff R(\boldsymbol{A})=n$;

(3) $R(k\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}), k\neq 0$;

(4) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B} \iff R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$;

(5) $R(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\big(R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\big)$;

(6) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times \ell}=\boldsymbol{O}$, 则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$;

(7) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$;

(8) $\max\big(R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\big)\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

矩阵秩的性质

命题

(5) $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min\big(R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\big)$.

证明

(5) $\boldsymbol{AB}$ 的列向量为 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的线性组合，从而 $\boldsymbol{AB}$ 的列秩 $\leqslant$ $\boldsymbol{A}$ 的列秩，即 $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant R(\boldsymbol{A})$. 于是

$$R(\boldsymbol{AB}) = R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \leqslant R(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) = R(\boldsymbol{B}).$$

□

若 $\boldsymbol{B}$ 行满秩, 则 $\boldsymbol{B}$ 有 $R(\boldsymbol{B})$ 阶子式非零, 它对应的方阵右乘 $\boldsymbol{A}$ 得到的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 列向量组等价, 从而 $R(\boldsymbol{AB}) = R(\boldsymbol{A})$; 若 $\boldsymbol{B}$ 列满秩, 则 $R(\boldsymbol{BA}) = R(\boldsymbol{A})$;

命题

(6) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times \ell}=\boldsymbol{O}$, 则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明

(6) 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}'\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}'$, 其中 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}',\boldsymbol{Q},\boldsymbol{Q}'$ 均可逆. 则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\implies\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\boldsymbol{QP}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}.$$

设 $\boldsymbol{QP}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{C}_4\end{pmatrix}$ 其中 $\boldsymbol{C}_1$ 为 $(n-s)\times s$. 由于 $\boldsymbol{QP}$ 的前 r 行 s 列均为零, 因此若 $r+s>n$, 则 $\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{C}_3$ 的第一行为零, $|\boldsymbol{QP}|=\pm|\boldsymbol{C}_2|\cdot|\boldsymbol{C}_3|=0$, 矛盾! □

命题

(7) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

证明

(7) 由于添加零行或零列不改变秩，因此不妨设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是方阵. 由于

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{E}\end{pmatrix},$$

因此 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$. □

命题

(8) $\max\big(R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})\big) \leqslant R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$.

证明

(8) 不妨设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是方阵，则

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

因此 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leqslant R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$. □

练习

(1) 设 $R(\boldsymbol{A})=2, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $R(\boldsymbol{AB})=$ __2__.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵且 $R(\boldsymbol{AB})<R(\boldsymbol{B})$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$ __0__.

(3) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & t \end{pmatrix}, \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 且 $R(\boldsymbol{X})=2$, 则 $t=$ __2__.

(4) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} t & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 且存在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $t=$ __4__.

例

证明：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

证明

由于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，因此 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n$. 由于 $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$，因此 $n=R(\boldsymbol{E})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$. 故 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$. □

例

证明: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & R(\boldsymbol{A})=n; \\ 1, & R(\boldsymbol{A})=n-1; \\ 0, & R(\boldsymbol{A})\leqslant n-2. \end{cases}$$

证明

(1) 若 $R(\boldsymbol{A})=n$, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, $R(\boldsymbol{A}^*)=n$.

(2) 若 $R(\boldsymbol{A})=n-1$, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 可知 $R(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$. 由于 $R(\boldsymbol{A})=n-1$, $\boldsymbol{A}$ 存在非零的 $n-1$ 子式, 从而 $\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$. 故 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$.

(3) 若 $R(\boldsymbol{A})\leqslant n-2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 子式均为零, 从而 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$. □

练习

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 0, -1, 2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (0, 1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$, 则 $R(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}) = \underline{\quad 1 \quad}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ 且 $R(\boldsymbol{A}^*) = 1$, 则 (B).

(A) $a \neq b, a + 2b \neq 0$ (B) $a \neq b, a + 2b = 0$
(C) $a = b, a \neq 0$ (D) $a = b = 0$

(3) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 则 (A).

(A) $R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{AB}) = R(\boldsymbol{A})$ (B) $R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{BA}) = R(\boldsymbol{A})$
(C) $R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{AB}) = \max(R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B}))$ (D) $R(\boldsymbol{AB}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

答案

存在 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{BA} \neq \boldsymbol{O}$, D 错误. 令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, C 错误. $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ 行满秩, 选 A.

例：矩阵秩性质的应用

练习

(4) 设 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵, $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{O}$, 则 (A).

(A) $t \neq 6$ 时, $R(\boldsymbol{P}) = 1$　　(B) $t \neq 6$ 时, $R(\boldsymbol{P}) = 2$

(C) $t = 6$ 时, $R(\boldsymbol{P}) = 1$　　(D) $t = 6$ 时, $R(\boldsymbol{P}) = 2$

(5) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶非零矩阵, 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 则 $R(\boldsymbol{A})$ 与 $R(\boldsymbol{B})$(B).

(A) 必有一个等于 0　　(B) 都小于 n

(C) 都等于 n　　(D) 一个小于 n, 一个等于 n

(6) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$, 则 (A).

(A) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　　(B) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　　(D) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

例：矩阵秩性质的应用

练习

(7) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{n\times m}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}, n < m$. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $R(\boldsymbol{B}) = \underline{\quad n \quad}$.

(8) 若 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{pmatrix}$ 等价, 则 (B).

(A) $a = -1$ (B) $a \neq -1$ (C) $a \neq 1$ (D) $a = 1$

(9) 设四阶方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_2 + 5\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{0}$, 则 $R(\boldsymbol{A}^*) = \underline{\quad 0 \quad}$.

命题

设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m) \in M_{n\times m}$.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\iff$ $R(\boldsymbol{A}) < m$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解 $\iff$ $R(\boldsymbol{A}) = m$.

推论

设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n) \in M_n$.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非零解 $\iff$ $R(\boldsymbol{A}) < m$ $\iff$ $|\boldsymbol{A}| = 0$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解 $\iff$ $R(\boldsymbol{A}) = m$ $\iff$ $|\boldsymbol{A}| \neq 0$.

命题

设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关,

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{C}.$$

则 $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关 $\iff |\boldsymbol{C}| \neq 0$.

证明

设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_m), \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_m)$. 则

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

于是命题得证. □

例

已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,3,t)^{\mathrm{T}}$$

线性相关，求 t.

解

由

$$|\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = t - 5 = 0$$

可知 $t = 5$.

练习

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且其行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$. 下列说法正确的是 (C).

(A) $\boldsymbol{A}$ 必有一列元素全为零
(B) $\boldsymbol{A}$ 必有两列元素对应成比例
(C) $\boldsymbol{A}$ 必有一个列向量可由其余列向量线性表示
(D) $\boldsymbol{A}$ 中任意列向量均可由其余列向量线性表示

练习

若

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,5,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,t+1,4)^{\mathrm{T}}$$

线性相关，则 $t=$ ___3___.

定理

若 A 经过初等行变换变为 B, 则

(1) A 的行向量组与 B 的行向量组等价;

(2) A 任意 k 列和 B 对应的 k 列具有相同的线性相关性.

即初等行变换保持行向量组的等价性, 列向量组的线性组合关系.

证明

(1)是显然的. 设 $B = PA$, 其中 P 是可逆矩阵. 若 $Bx = 0$, 则 $PAx = 0$, $Ax = 0$. 反之亦然, 即 $Ax = 0 \iff Bx = 0$. 所以 x 非零分量对应的那些 A, B 的列向量与 x 对应分量数乘之和同时为零或同时非零. □

由此得到极大线性无关组和秩的计算方法.

(1) 将向量组以列向量形式组成矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

(2) 通过初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 变为行阶梯形矩阵.
   - 行阶梯形矩阵非零行的行数就是秩 $R(\boldsymbol{A})$;
   - 行阶梯形矩阵每个非零行的首个非零元对应的 $\boldsymbol{A}$ 的列向量, 就是极大线性无关组.

(3) 继续化简为行最简形矩阵, 则可将其余向量表示为极大线性无关组的线性组合.

例

求下述向量组的秩和一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示：

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

解

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5) = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 & 5 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ -11 & 8 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

续解

$$\underset{\sim}{r_1 \leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ -7 & 1 & 3 & 5 & -4 \\ -11 & 8 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 36 & -4 & -44 & 3 \\ 0 & 63 & -7 & -77 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/9 & -8/9 & 0 \\ 0 & 1 & -1/9 & -11/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $R(\boldsymbol{A}) = 3, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_5$ 是一个极大线性无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = -\frac{4}{9}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{1}{9}\boldsymbol{\alpha}_2, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = -\frac{8}{9}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{11}{9}\boldsymbol{\alpha}_2.$$

练习

求下述矩阵列向量的一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

答案

设 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_4.$$

例

假设下述向量组线性相关

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1,1,2),\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,3,2,3),\ \boldsymbol{\alpha}_3 = (2,3,3,2,3),\ \boldsymbol{\alpha}_4 = (1,3,-1,1,a).$$

求 a, 并求它的秩和一个极大无关组, 并把其余向量用这个极大无关组线性表示.

解

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $a=4$, 秩为 3, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大线性无关组, 且 $\boldsymbol{\alpha}_3 = 5\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$.

例：线性相关与线性无关

练习

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$, 则二者的 (A).

(A) 行向量组等价, 列向量组同相关性
(B) 行向量组同相关性, 列向量组等价
(C) 行向量组未必等价, 列向量组同相关性
(D) 行向量组等价, 列向量组未必同相关性

(2) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times k}, \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$, 则 (A)

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关
(B) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关
(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关
(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关

练习

多选题：设 A^* 是 $n>1$ 阶方阵，以下说法正确的是（ ABCD ）

(A) 若 A 的列向量组线性相关，则 A^* 的列向量组线性相关
(B) 若 A 的列向量组线性无关，则 A^* 的列向量组线性无关
(C) 若 A 的某两列向量线性相关，则 A^* 的列向量组线性相关
(D) 若 A 的某两列向量线性无关，则 A^* 的列向量组线性无关

第五节　标准正交基

- 向量的内积
- 正交向量组与格拉姆-施密特正交化

引例：更好的基

本节考虑的向量都是实向量.

设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 的秩为 r, 则它们生成的线性空间 V 的维数就是 r. S 的极大无关组 S_0 的大小就是 r, 且 S_0 是 V 的一组基.

有时候我们想更进一步, 就像 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ 一样, 我们希望找到 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 使得

(1) $\boldsymbol{\alpha}_i$ 长度都是 1;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 两两垂直.

定义

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, 定义**内积**

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n \in \mathbb{R}.$$

内积是数量积的推广, 它满足

(1) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$;

(2) $[\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\beta}]=\lambda[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$;

(3) $[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$;

(4) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]\geqslant 0$. 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时, $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=0$.

这说明内积是一个对称正定双线性型.

定义

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义 $\boldsymbol{x}$ 的长度或模为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}.$$

当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时, 称 $\boldsymbol{x}$ 为单位向量. 对于非零向量 $\boldsymbol{x}$, $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的单位化向量.

我们有 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\iff\|\boldsymbol{x}\|=0\iff[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]=0.$

定义

若 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$, 称 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交(垂直).

设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. 那么 X 的二次多项式

$$\|X\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\|^2 = [X\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}, X\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}] = [\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}]X^2 + 2[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]X + [\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}] \geqslant 0$$

恒成立. 因此其判别式

$$\Delta = 4([\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]^2 - \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|^2) \leqslant 0,$$

于是我们得到柯西-施瓦兹不等式

$$\pm[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|.$$

显然 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ 时它也成立.

定义

设非零向量 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, \dots, a_n)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, \dots, b_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$, 定义 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 的夹角为

$$\theta = \arccos \frac{[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|} \in [0, \pi].$$

注意正交比夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$ 略微广泛点, 因为零向量与任意向量正交.

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 则

$$\|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2 + 2[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}] = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2,$$

此即勾股定理.

定义

(1) 若向量组 S 中的向量两两正交且非零，则称 S 为正交向量组.

(2) 若向量组 S 中的向量两两正交且均为单位向量，则称 S 为标准正交向量组.

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3$. 求向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组.

解

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交. 设 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 则

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]&=x_1+x_2+x_3=0,\\
[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]&=x_1-2x_2+x_3=0.
\end{aligned}
$$

解得 $(x_1,x_2,x_3)=(k,0,-k)$. 故可取 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

定理

正交向量组必线性无关.

证明

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是正交向量组, $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$. 对任意 $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$0 = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_i] = [\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_i] = \lambda_i[\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i].$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 非零, $[\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i] \neq 0, \lambda_i = 0$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. □

现在我们来看如何从空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 得到一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_k$ 已经是两两正交的单位向量, 设 $\boldsymbol{\beta}_{k+1} = \boldsymbol{\alpha}_{k+1} + \lambda_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{\beta}_k$ 与它们均正交, 则对于 $i = 1, \dots, k$,

$$[\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_{k+1}] = [\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\alpha}_{k+1}] + \lambda_i[\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i] = 0 \implies \lambda_i = -\frac{[\boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \boldsymbol{\beta}_i]}{[\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i]}.$$

由此得到格拉姆-施密特正交单位化方法：取

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\beta}_r &= \boldsymbol{\alpha}_r - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \cdots - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1}
\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}, \ldots, \boldsymbol{e}_r = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_r}{\|\boldsymbol{\beta}_r\|}$ 就是 V 的一组标准正交基.

例

将 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$ 正交单位化.

解

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}(1,1,0)^{\mathrm{T}}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,2)^{\mathrm{T}}-(1,1,0)^{\mathrm{T}}-\frac{2}{3/2}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

第六节　线性方程组

- 齐次线性方程组解的存在性
- 齐次线性方程组解的结构
- 非齐次线性方程组
- 向量组的线性表示

线性方程组是指

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

它的系数形成了一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 称为系数矩阵. 系数和常数项一起形成了一个 $m \times (n+1)$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 称为增广矩阵.

线性方程组等价于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

其中

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 为零向量时，称该线性方程组为齐次的；否则称为非齐次的．齐次线性方程组总有解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$．$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关 $\iff$ $R(\boldsymbol{A})<n$.

定理

(1) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有 (无穷多) 非零解 $\iff R(\boldsymbol{A})<n$;

(2) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\iff R(\boldsymbol{A})=n$.

推论

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵.

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有 (无穷多) 非零解 $\iff |\boldsymbol{A}|=0$;

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\iff |\boldsymbol{A}|\neq 0$.

推论

若方程个数小于未知元个数，则齐次线性方程组有非零解.

例：齐次线性方程组非零解的判定

例

假设

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，求 a.

解

此时系数矩阵行列式为零：

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & a & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7a + 21, \quad a = -3.$$

例：齐次线性方程组非零解的判定

例

若下述方程有非零解，求 a.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \\ -x_1 + (a-1)x_2 + (1-a)x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a+1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩小于 3，因此 $a = 0$.

定义

称空间 $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ 的一组基为该齐次线性方程组的基础解系.

定理

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, R(\boldsymbol{A}) = r$. 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系包含 $n-r$ 个向量.

证明

通过交换未知元的位置 (相当于交换 $\boldsymbol{A}$ 列的位置), 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 可化为行最简形

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

续证

方程化为 $(\boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = -\boldsymbol{B} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{C} := \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix}$ 的 $n-r$ 个列向量生成了整个解空间. 由于 $R(\boldsymbol{C}) \geqslant R(\boldsymbol{E}_{n-r}) = n-r$, $\boldsymbol{C}$ 列满秩, 因此它的列向量就是一组基础解系. □

推论

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 任意 $n-r$ 个线性无关的解都是一组基础解系.

解齐次线性方程组的步骤:

(1) 将系数矩阵通过初等行变换化为行最简形.

(2) 去掉零行, 并取负矩阵, 得到 $r \times n$ 矩阵.

(3) 添加 $n-r$ 行 e_j^{T}, 使得对角元全都变成 ± 1, 其中 1 对应的是原来的非零行的第一个 1, 得到 $n \times n$ 矩阵.

(4) 去掉对角元是 1 对应的列, 得到 $n \times (n-r)$ 矩阵.

(5) 这个矩阵的列向量就是一组基础解系.

典型例题：求基础解系

例

解方程 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \qquad = 0 \end{cases}$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

续解

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1/5 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3/10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ -3/10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{为任意常数}.$$

练习

解方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

答案

$$\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, R(\boldsymbol{A}) = n - 3$, ξ_1, ξ_2, ξ_3 为 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的三个线性无关的解. 则 (B) 是该方程的一组基础解系.

(A) $\xi_1, -\xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$

(B) $\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$

(C) ξ_1, ξ_2

(D) $\xi_1, \xi_1 - \xi_2 - \xi_3, \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$

例

设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是 $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ 的一组基础解系, 则 (D) 也是该方程的一组基础解系.

(A) 与 ξ_1, ξ_2, ξ_3 等价的一组向量

(B) 与 ξ_1, ξ_2, ξ_3 同秩的一组向量

(C) $\xi_1 - \xi_2, \xi_2 - \xi_3, \xi_3 - \xi_1$

(D) $\xi_1 + \xi_2, \xi_2 + \xi_3, \xi_3 + \xi_1$

例：基础解系的应用

例

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$R(\boldsymbol{A}) = n-1$ 且每行元素之和为 0. 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解为____$k(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}, k$ 为任意常数____.

例

设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s} = \boldsymbol{O}$，证明 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

证明

由于 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解，因此 $R(\boldsymbol{B})$ 不超过该方程解空间的维数，即 $n - R(\boldsymbol{A})$. □

例

设 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，证明 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A})$.

证明

若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，则

$$0 = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (y_1, \dots, y_n)^{\mathrm{T}}$，则右侧为 $y_1^2 + \cdots + y_n^2 = 0$，这迫使 $y_1 = \cdots = y_n = 0$，于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$. 所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 二者列数相同，因此二者秩相同. $\square$

注意，对于复矩阵这并不成立，例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = 0.$$

此时有 $R\left(\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right) = R(\boldsymbol{A})$，其中 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 表示所有元素取共轭.

例

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$. 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}, k_1,\dots,k_{n-1}$ 为任意常数.

例

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $R(\boldsymbol{A})=n-1$, 代数余子式 $A_{11}\neq 0$. 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $k(A_{11},\dots,A_{1n})^{\mathrm{T}}, k_1,\dots,k_{n-1}$ 为任意常数.

练习

若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 且存在 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 则 (A).

(A) $a=1, |\boldsymbol{B}|=0$ (B) $a=-2, |\boldsymbol{B}|=0$ (C) $a=1, |\boldsymbol{B}|\neq 0$ (D) $a=-2, |\boldsymbol{B}|\neq 0$

例：基础解系

练习

若 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $k_1(1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组是 (D).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ (C) $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$. 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 若方程有解, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的列向量组等价. 因此 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $V = W$, $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的极大无关组. 从而 $\boldsymbol{b}$ 是 S 的线性组合, 也是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合.

定理

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\iff R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

推论

若 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = m$ (即 $\boldsymbol{A}$ 行满秩), 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 总有解.

非齐次线性方程组解的结构

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

$k_1,\ldots,k_{n-r}$ 为任意常数.

定理

(1) 若 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解;

(2) 若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解;

(3) 若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

推论

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\iff |\boldsymbol{A}|\neq 0$.

若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解或有无穷多解.

解非齐次线性方程组的步骤:

(1) 写: 写出方程组对应的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$;

(2) 变: 通过初等行变换将其化为行最简形;

(3) 判: 通过行最简形判定方程程是否有解;

(4) 解: 若系数矩阵部分零行对应的常数项均为零, 则方程有解. 其中特解为每个非零行对应未知元取对应常数项值, 其余取零.

(5) 通解 $=$ 特解 $+$ 对应的齐次方程的基础解系的线性组合.

典型例题：解非齐次线性方程组

例

解方程 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

解

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & -1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

于是 $R(\boldsymbol{A}) = 2 < R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$，无解.

典型例题：解非齐次线性方程组

例

解方程 $\begin{cases} x_1 - x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + \ \ x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$

解

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

于是 $R(\boldsymbol{A}) = 2 = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$, 有解. 特解为 $(1/2, 0, 1/2, 0)^{\mathrm{T}}$.

续解

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{基础解系 } \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

通解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

k_1, k_2 为任意常数.

例

已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,4,0,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,7,1,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (3,10,b,4)^{\mathrm{T}}.$$

问 a,b 为何值时,

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示;

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不唯一线性表示.

解

即问 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解的情况，其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right)$$

于是可知 $R(\boldsymbol{A})$ 和 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，故

(1) $b\neq 2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) $a\neq 1, b=2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示;

(3) $a=1, b=2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不唯一线性表示.

例

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$，则（ D ）.

(A) 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 仅有零解，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解
(B) 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解
(C) 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解
(D) 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解

例

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, R(\boldsymbol{A}) = m < n$，则（ C ）.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量线性无关
(B) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于 0
(C) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 一定有无穷多个解
(D) $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换可化为 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{O})$ 的形式

例

a 为何值时，以下方程(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = a \end{cases}$$

注意处理带未知数的矩阵时，不宜实施 $\frac{1}{a+1}r_2, (a-2)r_3$ 等类似操作，因为其分母或系数可能为零.

解

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1+a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+a & a \end{array}\right) \stackrel{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+a & 1 & 3 \\ 0 & -a & a & a-3 \\ 0 & a & a^2+2a & a^2+a \end{array}\right)$$

典型例题：解非齐次线性方程组

续解

$$\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1+a & 1 & 3 \\ 0 & a & -a & 3-a \\ 0 & 0 & a^2+3a & a^2+2a-3 \end{array}\right).$$

(1) 若 $a \neq 0, -3$，则 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$，方程有唯一解.

(2) 若 $a = 0$，则 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $R(\boldsymbol{A}) = 1 < R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$，方程无解.

续解

(3) 若 $a=-3$，则 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$，$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$，方程有无穷多解．特解为 $\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}$，基础解系为 $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

k 为任意常数．

由于系数矩阵为 3 阶方阵，也可以先通过 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 得到唯一解情形．

练习

a, b 为何值时，以下方程(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 4x_4 = b+3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+8)x_4 = 5 \end{cases}$$

答案

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right).$$

(1) $a \neq -1$ 时有唯一解；

(2) $a = -1, b \neq 0$ 时无解；

(3) $a = -1, b = 0$ 时有无穷多解，通解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例

设四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}.$$

求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解

由于 $R(\boldsymbol{A})=3$，因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只包含一个向量. 根据解的性质，

$$2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，因此这是它的一个基础解系. 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1+k(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}+k(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}.$$

例

已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解

由题设可知 $R(\boldsymbol{A})=3$，因此 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只包含一个向量. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 可知 $(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，因此这是它的一个基础解系. 注意到 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，故通解为

$$\boldsymbol{x}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

例

已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 (B)，k_1,k_2 为任意常数.

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$　(B) $2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$　(D) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$

例

已知 $\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\eta}_2=(-3,2,2)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-1 \\ 3x_1+x_2+4x_3=1 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$ 的两个解向量，则该方程组的通解为 $\underline{\quad(0,1,0)^{\mathrm{T}}+k(-3,1,2)^{\mathrm{T}}\quad}$.

若 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示, 则 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 因此 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的极大无关组. 从而 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 S 的线性组合, 也是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合.

定理

(1) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示 $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ 有解 $\iff$ $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

(2) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价 $\iff$ $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=R(\boldsymbol{B})$.

例

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 等价，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

证明

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & - & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

因此 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = R(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = 2.$ □

在物理实验中，经常会出现实验数据与预期不符的情况．例如变量 y 应当为变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合，即存在 n 维向量 β 使得 $y = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\beta$．但从实验数据解方程却是无解．因此我们需要寻找参数 β 使得 $y = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\beta$ 尽可能接近实验数据．

比较常见的是最小二乘法：即寻找参数 β 使得

$$\sum_{i=1}^{k} |y_i - \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\beta|^2 = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\beta\|^2$$

尽可能小，其中 $(\boldsymbol{x}_i, y_i)$ 是实验数据，$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_k)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 是由行向量 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}$ 构成的 $k \times n$ 矩阵．注意所有向量 $\boldsymbol{A}\beta$ 形成一个向量空间 V，也就是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量生成的空间．$\boldsymbol{y}$ 距离这个空间的距离 $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\beta\|$ 达到最小时，$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\beta$ 应当和这个空间正交．于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\beta) = \boldsymbol{0}$，即 β 是方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\beta = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

的解．