
Kloosterman 和的生成域

张神星

第八届全国数论会议 江苏金坛

2021 年 6 月 30 日

指数和

设 p 是一个素数, \mathbb{F}_q 是含有 $q = p^d$ 个元素的有限域. 对于 \mathbb{F}_q 上的一元多项式 $f(x)$, 定义**指数和**

$$S_1(f) := \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \zeta_p^{\text{Tr}(f(x))} \in \mathbb{Z}[\zeta_p],$$

其中 $\text{Tr} = \text{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$, $\zeta_p \in \mu_p$ 是一个选定的 p 次本原单位根.

我们要问:

- ① 作为一个复数, $|S_1(f)| = ?$
- ② 作为一个 p 进数, $|S_1(f)|_p = ?$
- ③ 作为一个代数 (整) 数, $\deg S_1(f) = ?$

L 函数

前两个问题已经有相当多的文献中研究过, 包括本次会议也有关于指数和的估计的报告. 我们简要回顾下指数和的基本性质.

定义 f 的 L 函数为

$$L(t, f) := \prod_{x \in \overline{\mathbb{F}_p}} \left(1 - \text{Tr}_{\mathbb{F}_q(x)/\mathbb{F}_p}(f(x)) t^{\deg x} \right)^{-1} = \exp \left(\sum_k S_k(f) \frac{t^k}{k} \right)$$

其中 $S_k(f) := \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^k}} \zeta_p^{\text{Tr}(f(x))} \in \mathbb{Z}[\zeta_p]$.

定理 (Dwork-Bombieri-Grothendick)

$L(t, f)$ 是有理函数.

ℓ 进层

记

$$L(t, f) = \frac{\prod_j (1 - \beta_j t)}{\prod_i (1 - \alpha_i t)}, \quad \alpha_i \neq \beta_j,$$

则

$$S_k(f) = \sum_i \alpha_i^k - \sum_j \beta_j^k.$$

我们称 α_i, β_j 为**特征根**. 为了估计特征根, 我们需要 ℓ 进方法.

一般地, 设 X 是一个概形, $X_{\text{ét}}$ 是 (小) étale site. 固定素数 $\ell \neq p$, 设 E 是 \mathbb{Q}_ℓ 的有限扩张. $X_{\text{ét}}$ 上系数为 E 的 ℓ **进层** 是这个 site 上的层 (实际上是 \mathcal{O}_E 有限商上的模层的逆向系, 态射扩充至 E), 使得在每个有限商上是可构造的. 若在每个有限商上是局部常值的, 则称之为 **lisse** 的.

Swan 导子

为了刻画 lisse 层的一些性质, 我们需要 Swan 导子的概念. 设 K 是完备离散赋值域, $I^{(x)}, x \geq 0$ 为其高阶分歧群. 对于分歧群 P 的 E 表示 M , 我们有满足如下性质的分解 $M = \bigoplus M(x)$,

$$M(0) = M^P, \quad M(x)^{I^{(x)}} = 0, \quad M(x)^{I^{(y)}} = M(x), \quad y > x > 0.$$

称 $M(x) \neq 0$ 的 x 为 M 的断点. 定义 M 的 Swan 导子为

$$\mathrm{Sw}(M) = \sum x \dim M(x).$$

它总是一个整数.

曲线

令 C 是特征 p 完全域 \mathbb{F} 上一射影光滑几何连通代数曲线, $K = \mathbb{F}(C)$ 为其函数域. 对于任意闭点 $x \in C(\mathbb{F})$, 我们有完备化 K_x .

对于非空开集 $U \subset C$, 我们有阿贝尔范畴等价

$$\begin{aligned} \{U \text{ 上的 lisse } E \text{ 层}\} &\longrightarrow \text{Rep}_E^c \pi_1(U, \bar{\eta}) \\ \mathcal{F} &\longmapsto \mathcal{F}_{\bar{\eta}}. \end{aligned}$$

由于基本群 $\pi_1(U, \bar{\eta})$ 是伽罗瓦群 $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ 的商, 因此分解群 D_x 作用在 $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$ 上. 于是我们可以定义 \mathcal{F} 在 x 处的 Swan 导子. 对于 $x \in U$, 由于惯性群 I_x 作用平凡, 因此 $\text{Sw}_x(\mathcal{F}) = 0$.

我们将会取 $C = \mathbb{P}^1$ and $U = \mathbb{G}_m$.

ℓ 进方法

假设 $\mu_p \subseteq E$. Deligne 在 $\mathbb{G}_{a, \overline{\mathbb{F}}_p}$ 上构造了一个局部自由秩 1 的 ℓ 进层 $\mathcal{F}_\ell(f)$, 它满足

$$L(t, f) = \prod_i \det(1 - t\text{Frob}, H_c^i)^{(-1)^{i+1}}$$

及由此

$$S_k(f) = \sum_i (-1)^i \text{Tr}(\text{Frob}^k, H_c^i).$$

这里 Frob 是几何 Frobenius, $H_c^i = H_c^i(\mathbb{G}_{a, \overline{\mathbb{F}}_p}, \mathcal{F}_\ell(f))$ 是紧支撑上同调.

ℓ 进方法之续

记 ω_{ij} 为 Frob 在 H_c^i 上的特征值, 则

$$S_k(f) = \sum_{ij} (-1)^i \omega_{ij}^k.$$

记 $B_i = \dim_E H_c^i$ 为 Betti 数.

定理 (Deligne)

ω_{ij} 是代数整数, 且存在整数 $0 \leq r_{ij} \leq i$ 使得它的所有 \mathbb{Q} 共轭的绝对值均为 $q^{r_{ij}/2}$.

由此

$$|S_k| \leq \sum_i B_i q^{ki/2}.$$

一般情形

更一般地, 设

- ① V 是 \mathbb{F}_q 上 \mathbb{A}^N 的闭子簇,
- ② ψ 是 \mathbb{F}_q 上非平凡加性特征, $\psi_k := \psi \circ \text{Tr}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_q}$,
- ③ f 是 V 上定义在 \mathbb{F}_q 上的正则函数,
- ④ χ 是 \mathbb{F}_q^\times 上乘性特征, $\chi_k := \chi \circ \text{N}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_q}$,
- ⑤ g 是 V 上定义在 \mathbb{F}_q 上的可逆正则函数.

定义指数和

$$S_k = \sum_{x \in V(\mathbb{F}_{q^k})} \psi_k(f(x)) \chi_k(g(x)),$$

则前面的方法仍然是有效的. 这时候, Bombieri 证明了特征根个数不超过

$$(4 \max \{ \deg V + 1, \deg f \} + 5)^{2N+1}.$$

Kloosterman 和

取

$$V = V(X_1 \cdots X_n - a), \quad f = X_1 + \cdots + X_n.$$

设 $\chi = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ 是无序的 n 个乘性特征 $\chi_i: \mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mu_{q-1}$. 定义
Kloosterman 和

$$\text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a) = \sum_{\substack{x_1 \cdots x_n = a \\ x_i \in \mathbb{F}_q}} \chi_1(x_1) \cdots \chi_n(x_n) \psi(\text{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(x_1 + \cdots + x_n)).$$

此时特征根个数为 n 个. 因此 $|\text{Kl}_n| \leq nq^{(n-1)/2}$.

伽罗瓦作用

但我们并不是想要对其大小进行估计, 而是想要知道第三个问题的答案, 即它生成的数域是哪个. 显然 $\text{Kl}_n \in \mathbb{Z}[\mu_{pc}]$, 其中 $c = \text{lcm}_i \{\text{ord}(\chi_i)\}$ 整除 $q-1$. 我们将伽罗瓦群表示为

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{pc})/\mathbb{Q}) = \{ \sigma_t \tau_w \mid t \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times, w \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times \},$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma_t(\zeta_p) &= \zeta_p^t, & \sigma_t(\zeta_c) &= \zeta_c, \\ \tau_w(\zeta_p) &= \zeta_p, & \tau_w(\zeta_c) &= \zeta_c^w. \end{aligned}$$

容易看出

$$\sigma_t \tau_w \text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a) = \prod \chi(t)^{-w} \text{Kl}_n(\psi, \chi^w, q, at^n).$$

因此我们需要研究两个 Kloosterman 和何时相差一个 $(q-1)$ 次单位根.

平凡特征

若 $\chi = 1 = \{1, \dots, 1\}$ 均为平凡特征, 则易知

$$a, b \text{ 共轭} \implies \text{Kl}_n(\psi, 1, q, a) = \text{Kl}_n(\psi, 1, q, b).$$

当 $p > (2n^{2d} + 1)^2$ (Fisher), 或 $p \geq (d-1)n + 2$ 且 p 不整除一个特定整数 (万大庆) 时, 反过来也是成立的. 一般猜测 $p \geq nd$ 就足够了. 在这些情形下,

$$\deg \text{Kl}_n(\psi, 1, q, a) = \frac{p-1}{(p-1, n)}.$$

Kloosterman 层

Deligne 和 Katz 在 $\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_q$ 上定义了一个 lisse 层

$$\mathcal{Kl} = \mathcal{Kl}_{n,q}(\psi, \chi),$$

它满足如下性质

- ① \mathcal{Kl} 秩为 n , 权为纯 $n-1$.
- ② 对任意 $a \in \mathbb{F}_q^\times$, $\text{Tr}(\text{Frob}_a, \mathcal{Kl}_{\bar{a}}) = (-1)^{n-1} \mathcal{Kl}_n(\psi, \chi, q, a)$.
- ③ \mathcal{Kl} 在 0 处温和 ($\text{Sw}_0 = 0$).
- ④ \mathcal{Kl} 在 ∞ 处完全野, $\text{Swan}_\infty = 1$. 于是它的 ∞ 断点均为 $1/n$.

Fisher 的下降

Fisher 给了 Kloosterman 层沿着有限域的扩张的下降. 对于 $a \in \mathbb{F}_q^\times$, 他定义了 $\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_p$ 上的一个 lisse 层 $\mathcal{F}_a(\chi)$, 使得

$$\mathcal{F}_a(\chi)|_{\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_q} = \bigotimes_{\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)} (t \mapsto \sigma(a)t^n)^* \text{Kl}_n(\psi \circ \sigma^{-1}, \chi \circ \sigma^{-1})$$

并满足

如下性质:

- ① $\mathcal{F}_a(\chi)$ 秩为 n^d , 权为纯 $d(n-1)$.
- ② 对任意 $t \in \mathbb{F}_p^\times$, $\text{Tr}(\text{Frob}_t, \mathcal{F}_a(\chi)_{\bar{t}}) = (-1)^{(n-1)d} \text{Kl}_n(\psi, \chi, q, at^n)$.
- ③ $\mathcal{F}_a(\chi)$ 在 0 处温和.
- ④ $\mathcal{F}_a(\chi)$ 的 ∞ 断点均不超过 1.

关键的估计

引理

设 $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ 是 $\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_p$ 上秩均为 r , 权均为纯 w 的 *lisse* 层. 假设存在单位根 λ 使得对任意 $t \in \mathbb{F}_p^\times$ 有

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_t, \mathcal{F}_{\bar{t}}) = \lambda \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_t, \mathcal{F}'_{\bar{t}}).$$

设 \mathcal{G} 是 $\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_p$ 上一几何不可约秩为 s , 权为纯 w 的层, 使得 $\mathcal{G} \mid \mathbb{G}_m \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ 在 $\mathcal{F} \mid \mathbb{G}_m \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ 中恰好出现一次, 则它在 $\mathcal{F}' \mid \mathbb{G}_m \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ 中至少出现一次, 其中我们要求 $p > [2rs(M_0 + M_\infty) + 1]^2$, M_η 是 $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$ 的最大 η 断点.

关键的估计之证明概述

反证法. 通过平移我们不妨设 $w = 0$. 我们将 Lefschetz 迹公式应用到 $\mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{F}'$ 上,

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \text{Tr}(\text{Frob}, H_c^i(\mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{F})) = \lambda \sum_{i=0}^2 (-1)^i \text{Tr}(\text{Frob}, H_c^i(\mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{F}')).$$

我们有

$$H_c^0 = 0 = H_c^2(\mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{F}')$$

$H_c^2(\mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{F})$ 为 1 维, 权为纯 2, H_c^1 的权不超过 1 (Weil II). 结合 Euler-Poincaré 公式

$$h_c^0(\mathcal{F}) - h_c^1(\mathcal{F}) + h_c^2(\mathcal{F}) = -\text{Sw}_0(\mathcal{F}) - \text{Sw}_\infty(\mathcal{F})$$

我们可以得到 p 的估计.

Kummer 诱导的

称 χ 是 Kummer 诱导的, 若存在非平凡特征 Λ 使得作为无序数组 $\chi = \chi\Lambda := \{\chi_1\Lambda, \dots, \chi_n\Lambda\}$. 此时, $\prod \chi = \prod(\chi\Lambda) = \Lambda^n \prod \chi$. 因此 $\Lambda^n = 1$.

假设 $p > 2n + 1$ 且 χ 不是 Kummer 诱导的, 则 $\mathcal{F}_a(\chi)$ 有一个重数为 1 的最高权. 考虑对应的李代数 $\mathfrak{g}(\mathcal{F}_a(\chi))$ 表示, 它对应一个子层 $\mathcal{G}_a(\chi)$. 而且这个子层是几何不可约的, 且在 $\mathcal{F}_a(\chi)|_{\mathbb{G}_m \otimes \overline{\mathbb{F}}_p}$ 中只出现一次.

推论

推论

设 $a, b \in \mathbb{F}_q^\times$, χ 和 ρ 为乘性特征 $\chi_i, \rho_j: \mathbb{F}_q^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ 构成的 n 元无序数组. 假设 $p > (2n^{2d} + 1)^2$, χ 不是 Kummer 诱导的, 且存在 $\lambda \in \mu_{q-1}$ 使得

$$\mathrm{Kl}_n(\psi, \chi, q, a) = \lambda \mathrm{Kl}_n(\psi, \rho, q, b).$$

则 $\mathcal{G}_a(\chi) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\chi}} | \mathbb{G}_m \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ 在 $\mathcal{F}_b(\rho) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\rho}} | \mathbb{G}_m \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$ 中出现.

这里 \mathcal{L}_χ 是 $\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_p$ 上由 Lang torsor 定义的秩 1 lisse 层, 使得对任意 $t \in \mathbb{F}_p^\times$,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_t, (\mathcal{L}_\chi)_{\bar{t}}) = \chi(t).$$

推论的证明

令

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_a(\chi) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\chi}}, \quad \mathcal{F}' = \mathcal{F}_b(\rho) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\rho}}, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_a(\chi) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\chi}}.$$

由于对任意 $t \in \mathbb{F}_p^\times$, $\sigma_t \lambda = \lambda$, 因此

$$\begin{aligned} (-1)^{(n-1)d} \text{Tr}(\text{Frob}_t, \mathcal{F}_{\bar{t}}) &= \prod \bar{\chi}(t) \cdot \text{Kl}_n(\psi, \chi, q, at^n) \\ &= \sigma_t(\text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a)) = \lambda \sigma_t(\text{Kl}_n(\psi, \rho, q, b)) \\ &= \lambda \prod \bar{\rho}(t) \cdot \text{Kl}_n(\psi, \rho, q, bt^n) = (-1)^{(n-1)d} \lambda \text{Tr}(\text{Frob}_t, \mathcal{F}'_{\bar{t}}). \end{aligned}$$

应用前述引理即可, 其中 $r = s = n^d$, $M_0 = 0$, $M_\infty \leq 1$.

Kloosterman 和的不同

现在

$$\mathcal{G}_a(\chi) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\chi}} \hookrightarrow \mathcal{F}_b(\rho) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\rho}}, \quad \mathcal{G}_b(\rho) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\rho}} \hookrightarrow \mathcal{F}_a(\chi) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\chi}}.$$

我们有最高权 $\lambda_a(\chi) = \lambda_b(\rho)$. 由此, 通过 Fisher 的论述可得:

定理

设 $a, b \in \mathbb{F}_q^\times$. 假设 χ, ρ 不是 Kummer 诱导的且它们都不是 $(\xi_1, \xi_1^{-1}, 1, \Lambda_2)\xi_2$ 型. 若 $p > (2n^{2d} + 1)^2$ 以及存在 $\lambda \in \mu_{q-1}$ 使得

$$\text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a) = \lambda \text{Kl}_n(\psi, \rho, q, b),$$

则存在 $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$ 和乘性特征 η , 使得 $\rho = \eta \cdot (\chi \circ \sigma^{-1})$ 以及 $b = \sigma(a)$. 更进一步, 要么两个 Kloosterman 和均为零, 要么 $\eta(b) = \lambda^{-1}$.

非零性

最后一步我们需要证明 Kloosterman 和非零.

定理

若 $p > (3n - 1)C_{\chi} - n$, 且对任意 i, j , $\chi_i = \chi_j$ 或它们不相差一个 n 次 (未必本原) 特征, 则 $\text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a)$ 非零. 其中

$$C_{\chi} = \max_{i,j} \text{lcm}(\text{ord}(\chi_i), \text{ord}(\chi_j)) \quad (1)$$

是任两个特征的阶的最小公倍数的最大值.

非零性的证明概述

通过 \mathbb{F}_q^\times 上的傅里叶变换, 我们可以将 Kl_n 表达为高斯和的组合

$$(q-1)\text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a) = \sum_{m=0}^{q-2} \omega^m(a) \prod_{i=1}^n g(m + s_i),$$

其中我们固定一个 Teichmüller 特征并记 $\chi_i = \omega^{s_i}$. 通过小心的估计, 我们可以证明存在唯一的 m 使得 $\prod_{i=1}^n g(m + s_i)$ 最小, 由此可知非零性.

对于平凡特征情形, $m = 0$.

生成域

定理

若 $p > \max \{ (2n^{2d} + 1)^2, (3n - 1)C_\chi - n \}$ 且对任意 i, j , $\chi_i = \chi_j$ 或它们不相差一个 n 次特征, 则 $\text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a)$ 生成 $\mathbb{Q}(\mu_{pc})^H$, 其中 H 包含的 $\sigma_t \tau_w$ 满足: 存在整数 β 和特征 η 使得

$$t = \lambda a_1^\beta, \lambda^{n_1} = 1, \chi^w = \eta \chi^{q_1^\beta}, \eta(a) = \prod \chi^w(t).$$

这里, $n_1 = (n, p - 1)$, $q_1 = \# \mathbb{F}_p(a^{(p-1)/n_1})$, $a_1 \in \mathbb{F}_p^\times$ 满足 $a_1^{n/n_1} = \mathbf{N}_{\mathbb{F}_{q_1}/\mathbb{F}_p}(a^{(1-p)/n_1}) = a^{(1-q_1)/n_1}$.

例子: $n = 2$ 情形

设 $\chi = \{1, \chi\}$, 其中乘性特征 χ 的阶为 $c \neq 2$. 若 $p > \max \{(2^{2d+1} + 1)^2, 5c - 2\}$, 则 $\text{Kl}(\psi, \chi, p^d, a)$ 生成 $\mathbb{Q}(\mu_{pc})^H$, 其中

$$H = \begin{cases} \langle \tau_{q_1} \sigma_{a_1}, \sigma_{-1}, \tau_{-1} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = 1, \chi(a) = 1; \\ \langle \tau_{-q_1} \sigma_{a_1}, \sigma_{-1} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = 1, \chi(a) = \chi(a_1) = -1; \\ \langle \tau_{q_1^\alpha} \sigma_{a_1^\alpha}, \sigma_{-1} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = 1, \chi(a)^\alpha \neq 1; \\ \langle \tau_{q_1} \sigma_{-a_1}, \tau_{-1} \sigma_{-1} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = -1, \chi(a) = \chi(a_1) = -1; \\ \langle \tau_{q_1} \sigma_{a_1}, \tau_{-1} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = -1, \chi(a) = 1; \\ \langle \tau_{q_1} \sigma_{a_1}, \tau_{-1} \sigma_{-1} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = -1, \chi(a) = -1, \chi(a_1) = 1; \\ \langle \tau_{q_1^{\alpha/2}} \sigma_{-a_1^{\alpha/2}} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = -1, 2 \mid \alpha, \chi(a) \neq \pm 1; \\ \langle \tau_{q_1^\alpha} \sigma_{a_1^\alpha} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = -1, 2 \nmid \alpha, \chi(a) \neq \pm 1. \end{cases}$$

$q_1 = \#\mathbb{F}_p(a^{(1-p)/2})$, $a_1 = a^{(1-q_1)/2}$, α 是 $\chi(a_1) \in \mu_{p-1}$ 的阶.

注记

考虑 Kloosterman 和

$$S_k = \text{Kl}(\psi, \chi \circ \mathbf{N}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_q}, q^k, a).$$

若 $p > \max \{ (2n^{2dk} + 1)^2, (3n - 1)C_\chi - n \}$, 则 $\mathbb{Q}(S_k) = \mathbb{Q}(\mu_{pc})^H$, 其中 H 包含的 $\sigma_t \tau_w$ 满足: 存在整数 β 和 \mathbb{F}_q^\times 上的特征 η 满足

$$t = \lambda a_1^\beta, \lambda^{n_1} = 1, \quad \chi^w = \eta \chi^{q_1^\beta}, \quad \eta(a) = \gamma \cdot \prod \chi^w(t), \gamma^k = 1.$$

于是 $\mathbb{Q}(S_k) = \mathbb{Q}(S_{k-c})$, 因为 $\gamma^c = 1$.

注记之续

由于 L 函数

$$L(T) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k}{k} S_k \right)$$

是一个有理函数, 序列 $\{S_k\}_k$ 是一个线性递推序列. 万大庆和尹航证明了存在 N 使得序列 $\{\mathbb{Q}(S_k)\}_{k \geq N}$ 是周期的. 设 r 为其周期, 则

$p > \max \left\{ (2n^{2d(N+r)} + 1)^2, (3n - 1)C_{\chi} - n \right\}$ 时, $\mathbb{Q}(S_k)$ 由前文所描述.

因此我们需要将下界 $(2n^{2d} + 1)^2$ 缩小, 并需要对 r 和 N 进行尽可能小的估计. 我们 (大胆) 猜测下 $p > 3ndc$ 时成立.

感谢各位的倾听!