合 肥 工 业 大 学 试 卷 （A）

2022～2023 学年第一学期复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. i^{-i} 的主值是________________.

2. 设 $z=-i$, 则 $1+z+z^2+z^3+z^4=$________________.

3. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 则积分 $\oint_C \left(\frac{\overline{z}}{z}\right) \mathrm{d}z=$________________.

4. 设 a,b,c 为实数. 如果函数 $f(z)=x^2-2xy-y^2+i(ax^2+bxy+cy^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a+b+c=$________________.

5. 函数 $\sin t+j\cos t$ 的傅里叶变换为________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 方程 $\big||z+i|-|z-i|\big|=1$ 表示的曲线是 (　　).

A. 直线　　B. 不是圆的椭圆　　C. 双曲线　　D. 圆周

2. 不等式 $-1\leqslant \arg z\leqslant \pi-1$ 确定是的 (　　).

A. 有界多连通闭区域　　B. 有界单连通区域

C. 无界多连通区域　　D. 无界单连通闭区域

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(iz)^n$ 的收敛半径是 (　　).

A. i　　B. $-i$　　C. 1　　D. $+\infty$

4. 下面哪个函数在 $z=0$ 处不可导? (　　)

A. $2x+3yi$　　B. $2x^2+3y^2i$　　C. $e^x\cos y+ie^x\sin y$　　D. x^2-xyi

5. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, $g(z)$ 的一阶零点, 则 z_0 是 $f(z)^3g(z)^2$ 的 (　　).

A. 一阶极点　　B. 一阶零点　　C. 可去奇点　　D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z=\dfrac{3+i}{i}-\dfrac{10i}{3-i}$, 求 z 的模和辐角.

2. (6 分) 解方程 $\sin z=2\cos z$.

3. (6 分) 设 C 为从 i 到 $i-\pi$ 再到 $-\pi$ 的折线, 求 $\int_C \cos^2 z\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z-3|=4$, 求 $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $v(x,y)=x^3+y^3-axy(x+y)$ 是调和函数，求参数 a 以及解析函数 $f(z)$ 使得 $v(x,y)$ 是它的虚部.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\frac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<1$;　　(2) $1<|z|<+\infty$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 求 $f(z)=\frac{\cos z}{z^2(z^2-\pi^2)}$ 在有限复平面内的奇点和相应的留数.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+2y(t)=\sin t, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

9. (3 分) 复变函数 $f(z)=\sin z$ 和实变量函数 $g(x)=\sin x$ 的性质有什么相似和不同之处？试列举一二.

合肥工业大学考试参考答案（A）

2022～2023 学年第一学期复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad e^{\pi/2} \quad}$, **2.** $\underline{\quad 1 \quad}$, **3.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **4.** $\underline{\quad 2 \quad}$, **5.** $\underline{\;2\pi j\delta(\omega+1)\;}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	C	D	C	A	A

三、解答题

1. （6 分）【解】

由于 $z = -3i + 1 - i(3+i) = 2 - 6i$, ············(2 分)

因此 $|z| = 2\sqrt{10}$, ············(2 分)

$\operatorname{Arg} z = 2k\pi - \arctan 3, k \in \mathbb{Z}$. ············(2 分, 只有主值得 1 分)

2. （6 分）【解】

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i(e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$e^{2iz} = \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)^2}{5}, \quad \cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

$$2iz = \operatorname{Ln} \frac{(1+2i)^2}{5} = (2\arctan 2 + 2k\pi)i, \quad \cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

$$z = \arctan 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分, 只有主值得 1 分})$$

其它答案: $z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{4}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. （6 分）【解】

由于 $\cos^2 z$ 解析, 且 ············(1 分)

$$\int \cos^2 z \, \mathrm{d}z = \int \frac{1+\cos(2z)}{2} \, \mathrm{d}z \quad \cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{z}{2} + \frac{\sin(2z)}{4}, \quad \cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

因此

$$
\begin{aligned}
\int_C \cos^2 z \,\mathrm{d}z &= \left[\frac{z}{2}+\frac{\sin(2z)}{4}\right]\Bigg|_i^{-\pi} && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\\
&= -\frac{\pi}{2}-\left[\frac{i}{2}+\frac{\sin(2i)}{4}\right] && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\\
&= -\frac{\pi}{2}+\frac{(e^{-2}-4-e^{2})i}{8}. && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})
\end{aligned}
$$

4. （10 分）【解】

由于 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}$ 在 $|z-3|\leqslant 4$ 内的奇点为 $\pi, 2\pi$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$

因此

$$
\begin{aligned}
\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2} &= 2\pi i\big[\mathrm{Res}[f(z),\pi]+\mathrm{Res}[f(z),2\pi]\big] && \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\
&= 2\pi i\left[\frac{e^{iz}}{z-2\pi}\bigg|_{z=\pi}+\frac{e^{iz}}{z-\pi}\bigg|_{z=2\pi}\right] && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\
&= 2\pi i\left[\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right]=4i. && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})
\end{aligned}
$$

5. （10 分）【解】

由 $\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=6x-2ay+6y-2ax=0$ 可知 $a=3$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$

由

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= v_y+iv_x && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\
&= (3y^2-3x^2-6xy)+i(3x^2-6xy-3y^2) && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\
&= 3(i-1)(x+iy)^2=3(i-1)z^2 && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})
\end{aligned}
$$

可知 $f(z)=(i-1)z^3+C$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(2 分, 没有常数项得 1 分)

其它解法: 由 $u_x=v_y=3y^2-3x^2-6xy$ 得 $u=3xy^2-x^3-3x^2y+\psi(y)$. $\cdots\cdots\cdots$(2 分)

由 $u_y=-v_x=-(3x^2-6xy-3y^2)$ 得 $\psi'(y)=3y^2$,

$\psi(y)=y^3+C$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(3 分, 没有常数项得 2 分)

$$
\begin{aligned}
f(z) &= u+iv\\
&= 3xy^2-x^3-3x^2y+y^3+C+i(x^3+y^3-3xy^2-3x^2y)\\
&= (i-1)z^3+C. && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})
\end{aligned}
$$

6. （10 分）【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 1, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$
\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})
$$

因此

$$f(z)=\frac{z-1+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}=-\frac{1}{1-z}+2\left(\frac{1}{1-z}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n. \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}, \quad \cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-2\left(\frac{1}{z-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\left(\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-n)z^{-n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-n+1)z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)z^{-n}. \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

7. （10 分）【解】

由于 0 是分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots\cdots$(1 分)

由于 $\pm\pi$ 是分母的一阶零点, 因此它们是 $f(z)$ 的二阶极点. $\cdots\cdots\cdots$(1 分)

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\left.\left(\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\right)'\right|_{z=0} \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=\left.\frac{-\sin z\cdot(z^2-\pi^2)-\cos z\cdot 2z}{(z^2-\pi^2)^2}\right|_{z=0}=0, \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\mathrm{Res}[f(z),\pi]=\left.\frac{\cos z}{z^2(z+\pi)}\right|_{z=\pi}=-\frac{1}{2\pi^3}, \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\mathrm{Res}[f(z),-\pi]=\left.\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}\right|_{z=-\pi}=\frac{1}{2\pi^3}. \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

8. （9 分）【解】

设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-2, \quad \cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 2 + 2Y = \mathscr{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2+2} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+2)} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+2}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2}\right] = \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(\sqrt{2}t). \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

9. （3 分）【解】

例如 (每项 1 分)

- $f'(z) = \cos z, g'(x) = \cos x.$ ··(1 分)
- $\sin z$ 处处可导, $\sin x$ 处处可导. ··(1 分)
- 麦克劳林展开的系数相同. ··(1 分)
- $\sin z$ 无界, $\sin x$ 有界. ···(1 分)