复变函数与积分变换

张神星

合肥工业大学

2022 年秋季学期

第四章　级数

本章作业

1, 3, 4, 6, 8, 11, 12, 15, 16, 19

1 复数项级数

2 幂级数

3 泰勒级数

4 洛朗级数

复数项级数

复数域上级数与实数域情形并无本质差别.

复数域上级数与实数域情形并无本质差别.

定义

复数项级数

复数域上级数与实数域情形并无本质差别.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列.

复数域上级数与实数域情形并无本质差别.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项无穷级数.

复数域上级数与实数域情形并无本质差别.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项无穷级数.
- 如果部分和数列

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

有极限, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 并记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

复数项级数

复数域上级数与实数域情形并无本质差别.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项无穷级数.
- 如果部分和数列

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

有极限, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 并记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$. 否则称之发散.

复数项级数敛散性的判定

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi$ 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = b$.

复数项级数敛散性的判定

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi$ 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = b$.

证明.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和为 $\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和为 $\tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$,

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi$ 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = b.$

证明.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和为 $\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和为 $\tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 的部分和为

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + i\tau_n.$$

复数项级数敛散性的判定

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi$ 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = b$.

证明.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和为 $\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和为 $\tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 的部分和为

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + i\tau_n.$$

由复数列的敛散性判定条件可知

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a + bi \iff \lim_{n\to\infty} \sigma_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} \tau_n = b.$$

复数项级数敛散性的判定

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi$ 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = b$.

证明.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和为 $\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和为 $\tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 的部分和为

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + i\tau_n.$$

由复数列的敛散性判定条件可知

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a + bi \iff \lim_{n\to\infty} \sigma_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} \tau_n = b.$$

由此命题得证. ■

复数项级数敛散性的判定

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛,

复数项级数敛散性的判定

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛, 从而 $x_n, y_n \to 0$,

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛, 从而 $x_n, y_n \to 0$, $z_n = x_n + iy_n \to 0$.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛, 从而 $x_n, y_n \to 0$, $z_n = x_n + iy_n \to 0$. 因此 $z_n \to 0$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件.

复数项级数敛散性的判定

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛, 从而 $x_n, y_n \to 0$, $z_n = x_n + iy_n \to 0$. 因此 $z_n \to 0$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件.

定理

如果实数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots$$

收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛, 且 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

复数项级数敛散性的判定

证明.

由于 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛.

复数项级数敛散性的判定

证明.

由于 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

证明.

由于 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛. 由三角不等式可知

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

证明.

由于 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛. 由三角不等式可知

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

两边同时取极限即得级数的不等式关系

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|.$$

■

绝对收敛和条件收敛

定义

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.

绝对收敛和条件收敛

定义

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛. 称非绝对收敛的收敛级数条件收敛.

绝对收敛和条件收敛

定义

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛. 称非绝对收敛的收敛级数条件收敛.

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

绝对收敛和条件收敛

定义

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛. 称非绝对收敛的收敛级数条件收敛.

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

证明.

由于 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$,

绝对收敛和条件收敛

定义

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 绝对收敛. 称非绝对收敛的收敛级数条件收敛.

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

证明.

由于 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$，因此若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty}|y_n|$ 也都收敛.

绝对收敛和条件收敛

定义

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛. 称非绝对收敛的收敛级数条件收敛.

定理

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

证明.

由于 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 因此若 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|, \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ 也都收敛. 反之, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|, \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$ 都收敛,

绝对收敛和条件收敛

定义

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 绝对收敛. 称非绝对收敛的收敛级数条件收敛.

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

证明.

由于 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 因此若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty}|y_n|$ 也都收敛. 反之, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|, \sum\limits_{n=1}^{\infty}|y_n|$ 都收敛, 则由 $|z_n| \leqslant |x_n| + |y_n|$ 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 也收敛. ∎

绝对收敛和条件收敛

	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 条件收敛	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性, 且不改变其和.

绝对收敛和条件收敛

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性，且不改变其和.

思考

什么时候 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$?

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性，且不改变其和.

思考

什么时候 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$?

答案.

当且仅当非零的 z_n 的辐角全都相同时成立.

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+i^{2n+1}}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i^{2n+1}}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解.

因为实部级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以该级数发散. ■

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解.

因为实部级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 所以该级数发散. ∎

例

级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

例

级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^{2n+1}}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解.

因为实部级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 所以该级数发散. ∎

例

级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解.

因为 $\displaystyle\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right|=\frac{8^n}{n!}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8^n}{n!}=e^8$ 收敛, 所以该级数绝对收敛. ∎

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

因为实部级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解.

因为实部级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛, 虚部级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 绝对收敛,

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{i}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

因为实部级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，虚部级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 绝对收敛，所以该级数条件收敛. ■

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解.

因为实部级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，虚部级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 绝对收敛，所以该级数条件收敛. ∎

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\exp\left(\frac{n\pi i}{2}\right)$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

例题：复数项级数敛散性

解.

因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

例题：复数项级数敛散性

解.

因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

均收敛，

例题：复数项级数敛散性

解.

因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

均收敛，所以原级数收敛.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n}\exp\left(\frac{n\pi i}{2}\right)\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，因此原级数条件收敛. ■

复变函数级数与实函数级数也是类似的.

复变函数级数与实函数级数也是类似的.

定义

复变函数级数与实函数级数也是类似的.

定义

- 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义.

复变函数级数与实函数级数也是类似的.

定义

- 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为复变函数项级数.

复变函数级数与实函数级数也是类似的.

定义

- 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为复变函数项级数.
- 对于 $z_0 \in D$, 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 处收敛, 相应级数的值称为它的和.

函数项级数

复变函数级数与实函数级数也是类似的.

定义

- 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为复变函数项级数.
- 对于 $z_0\in D$, 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 处收敛, 相应级数的值称为它的和.
- 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 上处处收敛, 则它的和是一个函数, 称为和函数.

幂级数及其敛散性

定义

称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

定义

称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

定义

称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数, 我们也有阿贝尔定理.

幂级数及其敛散性

定义

称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数，因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数，我们也有阿贝尔定理.

定理 (阿贝尔定理)

幂级数及其敛散性

定义

称形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数, 我们也有阿贝尔定理.

定理 (阿贝尔定理)

1. 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 那么对任意 $|z| < |z_0|$ 的 z, 该级数必绝对收敛.

定义

称形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

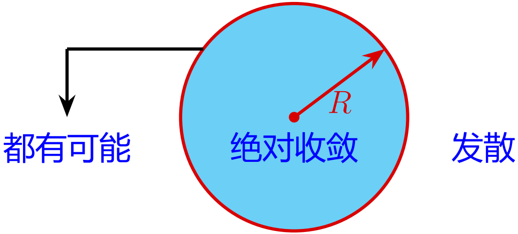
我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

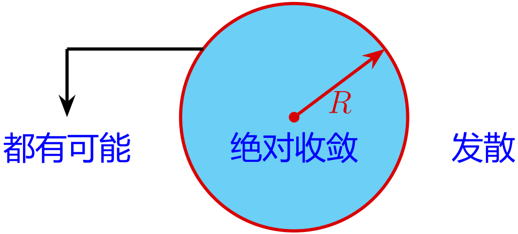
对于复变函数幂级数, 我们也有阿贝尔定理.

定理 (阿贝尔定理)

1. 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 那么对任意 $|z|<|z_0|$ 的 z, 该级数必绝对收敛.
2. 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处发散, 那么对任意 $|z|>|z_0|$ 的 z, 该级数必发散.

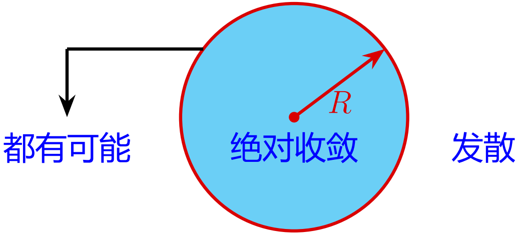
幂级数及其敛散性





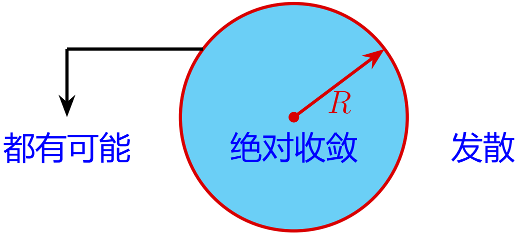
证明.

因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$.



证明.

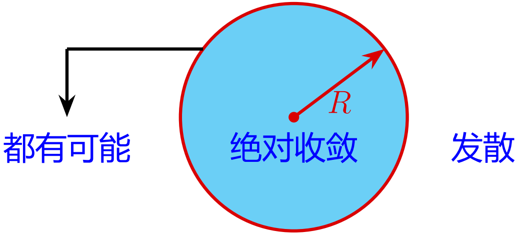
因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$.



证明.

因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 如果 $|z| < |z_0|$, 则

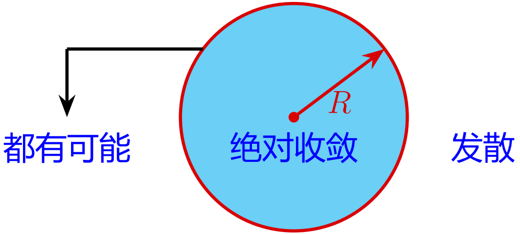
$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$



证明.

因为级数收敛, 所以 $\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 如果 $|z| < |z_0|$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{1 - \frac{z}{z_0}}.$$

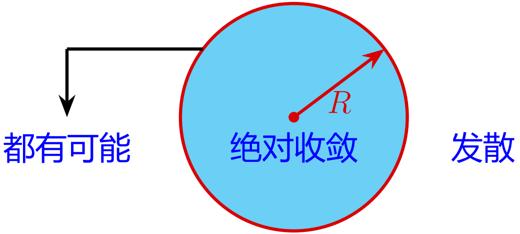


证明.

因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 如果 $|z| < |z_0|$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{1-\frac{z}{z_0}}.$$

所以级数在 z 处绝对收敛.



证明.

因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 如果 $|z| < |z_0|$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{1 - \frac{z}{z_0}}.$$

所以级数在 z 处绝对收敛.

第二个断言是第一条的逆否命题. ∎

收敛圆与收敛半径

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ 的收敛半径为 R,

收敛圆与收敛半径

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ 的收敛半径为 R, 也就是说, R 是满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ 在 $|z| < R$ 上收敛的最大的实数 (上确界).

收敛圆与收敛半径

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ 的收敛半径为 R, 也就是说, R 是满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ 在 $|z| < R$ 上收敛的最大的实数 (上确界). 这也等同于实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| x^n$ 的收敛半径.

收敛圆与收敛半径

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n z^n|$ 的收敛半径为 R, 也就是说, R 是满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n z^n|$ 在 $|z|<R$ 上收敛的最大的实数 (上确界). 这也等同于实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$ 的收敛半径. 我们有三种情况:

收敛圆与收敛半径

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_nz^n|$ 的收敛半径为 R, 也就是说, R 是满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_nz^n|$ 在 $|z|<R$ 上收敛的最大的实数 (上确界). 这也等同于实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$ 的收敛半径. 我们有三种情况:

1. $R=0$, 那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 对于任意 $z\neq 0$ 都发散.

收敛圆与收敛半径

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n z^n|$ 的收敛半径为 R, 也就是说, R 是满足 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n z^n|$ 在 $|z|<R$ 上收敛的最大的实数 (上确界). 这也等同于实幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$ 的收敛半径. 我们有三种情况:

1. $R=0$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 对于任意 $z\neq 0$ 都发散.
2. $R=+\infty$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$ 对于任意 z 都绝对收敛.

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_nz^n|$ 的收敛半径为 R, 也就是说, R 是满足 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_nz^n|$ 在 $|z|<R$ 上收敛的最大的实数 (上确界). 这也等同于实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|x^n$ 的收敛半径. 我们有三种情况:

1. $R=0$, 那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 对于任意 $z\neq 0$ 都发散.
2. $R=+\infty$, 那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 对于任意 z 都绝对收敛.
3. $R<+\infty$, 那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ 对于任意 $|z|<R$ 都绝对收敛, 对于任意 $|z|>R$ 都发散.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解.

如果幂级数收敛, 则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解.

如果幂级数收敛，则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$. 当 $|z| < 1$ 时，和函数为

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解.

如果幂级数收敛，则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$. 当 $|z| < 1$ 时，和函数为

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

因此收敛半径为 1. ■

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解.

如果幂级数收敛, 则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$. 当 $|z| < 1$ 时, 和函数为

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

因此收敛半径为 1. ■

该结论和实变情形一致.

收敛半径的计算

收敛半径可以由如下公式给出:

收敛半径可以由如下公式给出:

1. 达朗贝尔公式: 如果 $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ 存在, 则 $R = \dfrac{1}{r}$.

收敛半径的计算

收敛半径可以由如下公式给出:

1. 达朗贝尔公式: 如果 $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ 存在, 则 $R = \dfrac{1}{r}$.
2. 柯西公式: 如果 $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ 存在, 则 $R = \dfrac{1}{r}$.

收敛半径的计算

收敛半径可以由如下公式给出:

1. 达朗贝尔公式: 如果 $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ 存在, 则 $R = \dfrac{1}{r}$.
2. 柯西公式: 如果 $r = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ 存在, 则 $R = \dfrac{1}{r}$.
3. 一般地, 我们总有柯西-Hadamard 公式: $R = \dfrac{1}{r}$, 其中

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty}\sup\{\sqrt[n]{|c_n|}, \sqrt[n+1]{|c_{n+1}|}, \sqrt[n+2]{|c_{n+2}|}, \dots\}.$$

收敛半径可以由如下公式给出:

1. 达朗贝尔公式: 如果 $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ 存在, 则 $R = \frac{1}{r}$.
2. 柯西公式: 如果 $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ 存在, 则 $R = \frac{1}{r}$.
3. 一般地, 我们总有柯西-Hadamard 公式: $R = \frac{1}{r}$, 其中

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup\{ \sqrt[n]{|c_n|}, \sqrt[n+1]{|c_{n+1}|}, \sqrt[n+2]{|c_{n+2}|}, \dots \}.$$

如果 $r = 0$ 或 $+\infty$, 则 $R = +\infty$ 或 0.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z = 0, 2$ 的情形.

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ 可知收敛半径为 1.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解.

由 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ 可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解.

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ 可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

当 $z=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛. ■

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解.

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ 可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

当 $z=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛. ■

故对于收敛圆周上的点，幂级数的既可能收敛可能发散.

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径, 并讨论 $z = 0, 2$ 的情形.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ 可知收敛半径为 1.

当 $z = 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

当 $z = 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛. ∎

故对于收敛圆周上的点, 幂级数的既可能收敛可能发散. 注意, 幂级数在收敛圆周上的敛散性不同于其和函数在收敛圆周上的解析性.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ 可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

当 $z=0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛. ■

故对于收敛圆周上的点，幂级数的既可能收敛可能发散. 注意，幂级数在收敛圆周上的敛散性不同于其和函数在收敛圆周上的解析性. 和函数在收敛圆周上至少有一个奇点.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$ 的收敛半径.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$ 的收敛半径.

解.

我们有 $c_n = \cos(in) = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2}$.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos(in)z^n$ 的收敛半径.

解.

我们有 $c_n = \cos(in) = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2}$. 由

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1} + e^{-n-1}}{e^n + e^{-n}} = e$$

可知收敛半径为 $\dfrac{1}{e}$. ■

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径.

解.

由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |1+i| = \sqrt{2}$$

可知收敛半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ■

例题: 收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形, 其中 $p \in \mathbb{R}$.

例题：收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p \in \mathbb{R}$.

解.

由 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$ 可知收敛半径为 1.

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p\in\mathbb{R}$.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p=1$ 可知收敛半径为 1.

设 $|z|=1$.

例题：收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p \in \mathbb{R}$.

解.

由 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$ 可知收敛半径为 1.

设 $|z| = 1$.

- 如果 $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛,

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p\in\mathbb{R}$.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p=1$ 可知收敛半径为 1.

设 $|z|=1$.

- 如果 $p>1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{z^n}{n^p}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛，因此原级数在收敛圆周上处处 (绝对) 收敛.

例题：收敛半径的计算 *

续解.

例题：收敛半径的计算 *

续解.

- 如果 $p \leqslant 0$, $\left|\dfrac{z^n}{n^p}\right| = \dfrac{1}{n^p} \not\to 0$,

例题：收敛半径的计算 *

续解.

- 如果 $p \leqslant 0$, $\left|\dfrac{z^n}{n^p}\right| = \dfrac{1}{n^p} \not\to 0$, 因此原级数在收敛圆周上处处发散.

例题：收敛半径的计算 *

续解.

- 如果 $p \leqslant 0$, $\left|\dfrac{z^n}{n^p}\right| = \dfrac{1}{n^p} \not\to 0$, 因此原级数在收敛圆周上处处发散.
- 如果 $0 < p \leqslant 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散,

续解.

- 如果 $p \leqslant 0$, $\left|\dfrac{z^n}{n^p}\right| = \dfrac{1}{n^p} \not\to 0$, 因此原级数在收敛圆周上处处发散.
- 如果 $0 < p \leqslant 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, 而在其它点 $z = e^{i\theta}$ 处

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\theta}{n^p} + i \frac{\sin n\theta}{n^p} \right) \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

收敛,

例题：收敛半径的计算 *

续解.

- 如果 $p \leqslant 0$, $\left|\dfrac{z^n}{n^p}\right| = \dfrac{1}{n^p} \not\to 0$, 因此原级数在收敛圆周上处处发散.
- 如果 $0 < p \leqslant 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 发散, 而在其它点 $z = e^{i\theta}$ 处

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\theta}{n^p} + i \frac{\sin n\theta}{n^p} \right) \quad (0 < \theta < 2\pi)$$

收敛, 因此该级数在 $z = 1$ 发散, 在收敛圆周上其它点收敛. ■

幂级数的有理运算和代换运算

定理

设函数 $\varphi(z)$ 在 $|z| < r$ 上解析且 $|\varphi(z)| < R_1$, 幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R_1, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, |z| < R_2.$$

幂级数的有理运算和代换运算

定理

设函数 $\varphi(z)$ 在 $|z|<r$ 上解析且 $|\varphi(z)|<R_1$, 幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\ |z|<R_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\ |z|<R_2.$$

那么

定理

设函数 $\varphi(z)$ 在 $|z|<r$ 上解析且 $|\varphi(z)|<R_1$, 幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, |z|<R_1, \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n, |z|<R_2.$$

那么

1. 当 $|z|<R=\min\{R_1,R_2\}$ 时,

$$(f\pm g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n, \quad (fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)z^n,$$

幂级数的有理运算和代换运算

定理

设函数 $\varphi(z)$ 在 $|z|<r$ 上解析且 $|\varphi(z)|<R_1$, 幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, |z|<R_1, \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n, |z|<R_2.$$

那么

1. 当 $|z|<R=\min\{R_1,R_2\}$ 时,

$$(f\pm g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n, \quad (fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)z^n,$$

2. 当 $|z|<r$ 时, $f[\varphi(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[\varphi(z)]^n$.

幂级数的解析性质

定理

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

幂级数的解析性质

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

1. 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

幂级数的解析性质

定理

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

1. 它的和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,
2. $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,

幂级数的解析性质

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

1. 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,
2. $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,
3. $\displaystyle\int_a^z f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$.

幂级数的解析性质

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

1. 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,
2. $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,
3. $\displaystyle\int_a^z f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$.

也就是说, 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析, 且可以逐项求导, 逐项积分.

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

例题: 幂级数展开

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数, 其中 $a \neq b$.

解.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数, 其中 $a \neq b$.

解.

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-b} &= \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}} \\ &= \frac{1}{a-b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}},\end{aligned}$$

例题：幂级数展开

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

解.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$

$$= \frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}},$$

收敛半径为 $|b-a|$. ■

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$ 可知收敛半径为 1.

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$ 可知收敛半径为 1. 由于

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$ 可知收敛半径为 1. 由于

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1-\frac{1}{z-1},$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \left(-\frac{1}{z-1}\right)' = \frac{1}{(z-1)^2}, \quad |z|<1.$$

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = 2$ 可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$.

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = 2$ 可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$.

当 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 时, $|2z| < 1$.

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1}=2$ 可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$.

当 $|z|<\dfrac{1}{2}$ 时，$|2z|<1$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}$$

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = 2$ 可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$.

当 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 时, $|2z| < 1$. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1} \\ &= \frac{2}{1-2z} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-2z)(1-z)}.\end{aligned}$$

■

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) \mathrm{d}z.$

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right)\mathrm{d}z.$

解.

当 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 时，$\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ 收敛且

$$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{z^{-1}}{1-z} = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}.$$

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right)\mathrm{d}z.$

解.

当 $|z|<\dfrac{1}{2}$ 时，$\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ 收敛且

$$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n=\frac{z^{-1}}{1-z}=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}.$$

当 $|z|<\dfrac{1}{2}$ 时，$|2z|<1.$

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right)\mathrm{d}z.$

解.

当 $|z|<\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n$ 收敛且

$$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n=\frac{z^{-1}}{1-z}=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}.$$

当 $|z|<\dfrac{1}{2}$ 时，$|2z|<1$. 故

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right)\mathrm{d}z=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}\right)\mathrm{d}z=2\pi i.$$

∎

实泰勒级数

在实变函数中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数.

实泰勒级数

在实变函数中我们知道，一个函数即使在一点附近无限次可导，它的泰勒级数也未必收敛到原函数．例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

实泰勒级数

在实变函数中我们知道，一个函数即使在一点附近无限次可导，它的泰勒级数也未必收敛到原函数．例如

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x^{-2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

它处处可导，但是它在 0 处的泰勒级数是 0.

在实变函数中我们知道，一个函数即使在一点附近无限次可导，它的泰勒级数也未必收敛到原函数．例如

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

它处处可导，但是它在 0 处的泰勒级数是 0.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形，它的收敛半径也很难从函数本身读出．

在实变函数中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

它处处可导, 但是它在 0 处的泰勒级数是 0.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它的收敛半径也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots, \quad |x|<1.$$

在实变函数中我们知道，一个函数即使在一点附近无限次可导，它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x^{-2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

它处处可导，但是它在 0 处的泰勒级数是 0.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形，它的收敛半径也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots, \quad |x|<1.$$

这可以从 $x=1$ 是奇点看出.

在实变函数中我们知道，一个函数即使在一点附近无限次可导，它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

它处处可导，但是它在 0 处的泰勒级数是 0.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形，它的收敛半径也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots, \quad |x|<1.$$

这可以从 $x=1$ 是奇点看出. 而

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots, \quad |x|<1$$

却并没有奇点.

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数收敛半径也是 1?

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数收敛半径也是 1? 这个问题在本节可以得到回答.

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数收敛半径也是 1? 这个问题在本节可以得到回答.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数.

泰勒级数

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数收敛半径也是 1? 这个问题在本节可以得到回答.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数收敛半径也是 1? 这个问题在本节可以得到回答.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$.

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数收敛半径也是 1? 这个问题在本节可以得到回答.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$. 设 r 小于 z_0 到 D 边界的距离 $\operatorname{dist}(z_0, \partial D)$,

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数收敛半径也是 1? 这个问题在本节可以得到回答.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$. 设 r 小于 z_0 到 D 边界的距离 $\operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, 则圆周 $K: |z-z_0| = r$ 和它的内部包含在 D 中.

泰勒展开

设 $\zeta \in K$.

泰勒展开

设 $\zeta \in K$. 对于 $|z - z_0| < r$, 有 $q := \dfrac{|z - z_0|}{r} = \left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$.

设 $\zeta \in K$. 对于 $|z-z_0|<r$, 有 $q := \dfrac{|z-z_0|}{r} = \left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_K f(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

设 $\zeta \in K$. 对于 $|z-z_0|<r$, 有 $q := \dfrac{|z-z_0|}{r} = \left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_K f(\zeta)\frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_K f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

设 $\zeta \in K$. 对于 $|z-z_0|<r$, 有 $q := \dfrac{|z-z_0|}{r} = \left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$.

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_K f(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_K f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi i}\oint_K \left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right]\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}$$

泰勒展开

设 $\zeta \in K$. 对于 $|z-z_0|<r$, 有 $q := \dfrac{|z-z_0|}{r} = \left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_K f(\zeta)\frac{1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_K f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi i}\oint_K \left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right]\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n + R_N(z).
\end{aligned}
$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而连续, 从而有界.

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而连续, 从而有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$,

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而连续, 从而有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$|R_N(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \mathrm{d}s$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而连续, 从而有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$
\begin{aligned}
|R_N(z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_K \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(\zeta)| \cdot q^n}{r} \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而连续, 从而有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$\begin{aligned}|R_N(z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_K \left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right|\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_K \sum_{n=N}^{\infty}\frac{|f(\zeta)|\cdot q^n}{r}\,\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{Mq^n}{r}\cdot 2\pi r\end{aligned}$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而连续, 从而有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$
\begin{aligned}
|R_N(z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_K \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(\zeta)| \cdot q^n}{r} \mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{Mq^n}{r} \cdot 2\pi r \\
&= \frac{Mq^N}{1-q} \to 0 \quad (N \to \infty).
\end{aligned}
$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而连续, 从而有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$
\begin{aligned}
|R_N(z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \right| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_K \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(\zeta)| \cdot q^n}{r} \mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{Mq^n}{r} \cdot 2\pi r \\
&= \frac{Mq^N}{1-q} \to 0 \quad (N \to \infty).
\end{aligned}
$$

故

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < d,
$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而连续, 从而有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$\begin{aligned}
|R_N(z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \right| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi} \oint_K \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(\zeta)| \cdot q^n}{r} \mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{n=N}^{\infty} \frac{Mq^n}{r} \cdot 2\pi r \\
&= \frac{Mq^N}{1-q} \to 0 \quad (N \to \infty).
\end{aligned}$$

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < d,$$

其中 $d = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$.

泰勒展开的收敛半径

由此可见, 解析函数在 z_0 处泰勒展开的**收敛半径是 z_0 到最近奇点的距离**.

由此可见, 解析函数在 z_0 处泰勒展开的收敛半径是 z_0 到最近奇点的距离.

根据幂级数的逐项求导性质可知, $f(z)$ 在 z_0 处的幂级数系数只能是 $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, 所以解析函数的幂级数展开是唯一的.

泰勒展开的收敛半径

由此可见，解析函数在 z_0 处泰勒展开的收敛半径是 z_0 到最近奇点的距离.

根据幂级数的逐项求导性质可知，$f(z)$ 在 z_0 处的幂级数系数只能是 $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$，所以解析函数的幂级数展开是唯一的.

和实函数情形一样，在 0 处的泰勒级数被称为麦克劳林级数.

由此可见，解析函数在 z_0 处泰勒展开的收敛半径是 z_0 到最近奇点的距离.

根据幂级数的逐项求导性质可知，$f(z)$ 在 z_0 处的幂级数系数只能是 $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$，所以解析函数的幂级数展开是唯一的.

和实函数情形一样，在 0 处的泰勒级数被称为麦克劳林级数.

现在我们来看 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$.

由此可见，解析函数在 z_0 处泰勒展开的收敛半径是 z_0 到最近奇点的距离.

根据幂级数的逐项求导性质可知，$f(z)$ 在 z_0 处的幂级数系数只能是 $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$，所以解析函数的幂级数展开是唯一的.

和实函数情形一样，在 0 处的泰勒级数被称为麦克劳林级数.

现在我们来看 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$. 它的奇点为 $\pm i$，所以它的麦克劳林级数的收敛半径是 1.

由此可见, 解析函数在 z_0 处泰勒展开的收敛半径是 z_0 到最近奇点的距离.

根据幂级数的逐项求导性质可知, $f(z)$ 在 z_0 处的幂级数系数只能是 $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, 所以解析函数的幂级数展开是唯一的.

和实函数情形一样, 在 0 处的泰勒级数被称为麦克劳林级数.

现在我们来看 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. 它的奇点为 $\pm i$, 所以它的麦克劳林级数的收敛半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林级数收敛半径是 1.

例题：泰勒展开的计算

解析函数的泰勒展开既可以直接求出各阶导数得到，也可以利用幂级数的运算法则得到.

解析函数的泰勒展开既可以直接求出各阶导数得到, 也可以利用幂级数的运算法则得到.

例

由于 $(e^z)^{(n)}(0) = e^z|_{z=0} = 1,$

例题: 泰勒展开的计算

解析函数的泰勒展开既可以直接求出各阶导数得到, 也可以利用幂级数的运算法则得到.

例

由于 $(e^z)^{(n)}(0) = e^z|_{z=0} = 1$, 因此

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z.$$

例题：泰勒展开的计算

例

由于

$$(\cos z)^{(n)} = \cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right),$$

例

由于

$$(\cos z)^{(n)} = \cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$(\cos z)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \quad (\cos z)^{(2n+1)}(0) = 0,$$

例题：泰勒展开的计算

例

由于

$$(\cos z)^{(n)} = \cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$(\cos z)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \quad (\cos z)^{(2n+1)}(0) = 0,$$

因此

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z.$$

例题：泰勒展开的计算

例

由于

$$(\cos z)^{(n)} = \cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$(\cos z)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \quad (\cos z)^{(2n+1)}(0) = 0,$$

因此

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z.$$

也可以由 $\cos z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ 结合幂级数的代数运算性质得到.

例题：泰勒展开的计算

例

函数 $f(z) = (1+z)^\alpha$ 的主值为 $\exp\left[\alpha \ln(1+z)\right]$.

例题：泰勒展开的计算

例

函数 $f(z)=(1+z)^\alpha$ 的主值为 $\exp\left[\alpha\ln(1+z)\right]$. 它在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析.

例

函数 $f(z) = (1+z)^\alpha$ 的主值为 $\exp\left[\alpha\ln(1+z)\right]$. 它在去掉射线 $z = x \leqslant -1$ 的区域内解析. 由于

$$f^{(n)}(0) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(1+z)^{\alpha-n}\Big|_{z=0}$$

例

函数 $f(z)=(1+z)^\alpha$ 的主值为 $\exp\left[\alpha\ln(1+z)\right]$. 它在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析. 由于

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(1+z)^{\alpha-n}\Big|_{z=0} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \end{aligned}$$

例

函数 $f(z)=(1+z)^\alpha$ 的主值为 $\exp[\alpha\ln(1+z)]$. 它在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析. 由于

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(1+z)^{\alpha-n}\Big|_{z=0} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \end{aligned}$$

因此

$$(1+z)^\alpha = 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\cdots$$

其中 $|z|<1$.

其它常见函数的泰勒展开:

其它常见函数的泰勒展开:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z$$

其它常见函数的泰勒展开:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

其它常见函数的泰勒展开:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

典型例题：泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

典型例题：泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$，因此它的麦克劳林展开收敛半径为 1.

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它的麦克劳林展开收敛半径为 1. 由于

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

典型例题：泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它的麦克劳林展开收敛半径为 1. 由于

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

因此

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'$$

例

将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它的麦克劳林展开收敛半径为 1. 由于

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

因此

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n z^{n-1}$$

例

将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它的麦克劳林展开收敛半径为 1. 由于

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z)^2}&=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n z^{n-1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^n,\quad |z|<1.\end{aligned}$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

典型例题：泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z=\dfrac{2}{3}$, 因此它的幂级数展开收敛半径为 $\dfrac{2}{3}$.

典型例题：泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z=\dfrac{2}{3}$, 因此它的幂级数展开收敛半径为 $\dfrac{2}{3}$. 于是

$$\frac{1}{3z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}}$$

■

典型例题：泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z=\dfrac{2}{3}$，因此它的幂级数展开收敛半径为 $\dfrac{2}{3}$.
于是

$$\frac{1}{3z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3z}{2}\right)^n$$

例

将 $\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z=\dfrac{2}{3}$, 因此它的幂级数展开收敛半径为 $\dfrac{2}{3}$. 于是

$$\frac{1}{3z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{3z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3z}{2}\right)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}z^n, \quad |z|<\frac{2}{3}.$$

典型例题：泰勒展开的计算

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

典型例题：泰勒展开的计算

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析,

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z = x \leqslant -1$ 的区域内解析, 因此麦克劳林级数的收敛半径为 1.

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析, 因此麦克劳林级数的收敛半径为 1. 由

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad |z|<1$$

典型例题：泰勒展开的计算

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析，因此麦克劳林级数的收敛半径为 1. 由

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad |z|<1$$

逐项积分得到

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析, 因此麦克劳林级数的收敛半径为 1. 由

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad |z|<1$$

逐项积分得到

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta^n$$

典型例题：泰勒展开的计算

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z = x \leqslant -1$ 的区域内解析，因此麦克劳林级数的收敛半径为 1. 由

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

逐项积分得到

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}$$

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析, 因此麦克劳林级数的收敛半径为 1. 由

$$[\ln(1+z)]'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1$$

逐项积分得到

$$\begin{aligned}\ln(1+z)&=\int_0^z\frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n},\quad |z|<1.\end{aligned}$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 展开成 z 的幂级数.

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 的奇点为 -1, 因此它的幂级数展开收敛半径为 1.

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 的奇点为 -1, 因此它的幂级数展开收敛半径为 1. 由

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

例

将 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 的奇点为 -1, 因此它的幂级数展开收敛半径为 1. 由

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

得

$$\frac{e^z}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \right] z^n = 1 + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 + \cdots, \qquad |z| < 1. \blacksquare$$

练习

将 $\cos^2 z$ 展开成 z 的幂级数.

典型例题: 泰勒展开的计算

练习

将 $\cos^2 z$ 展开成 z 的幂级数.

答案.

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z) = \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^n, \quad \forall z.$$

练习

将 $\cos^2 z$ 展开成 z 的幂级数.

答案.

$$\begin{aligned}\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z) &= \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\right]\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^n, \quad \forall z.\end{aligned}$$

思考

奇函数和偶函数的麦克劳林展开有什么特点?

典型例题: 泰勒展开的计算

练习

将 $\cos^2 z$ 展开成 z 的幂级数.

答案.

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z) = \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\right]$$
$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^n, \quad \forall z.$$

思考

奇函数和偶函数的麦克劳林展开有什么特点?

答案.

奇函数的麦克劳林展开只有奇数次项, 偶函数的麦克劳林展开只有偶数次项.

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数.

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢?

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数,

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z - z_0$ 的幂级数, 然而它却可能可以展开为双边幂级数

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数, 然而它却可能可以展开为双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\substack{\text{负幂次部分}\\\text{主要部分}}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\substack{\text{非负幂次部分}\\\text{解析部分}}}.$$

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数, 然而它却可能可以展开为双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\substack{\text{负幂次部分}\\ \text{主要部分}}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\substack{\text{非负幂次部分}\\ \text{解析部分}}}.$$

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用, 我们对它的敛散性作如下定义:

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析，那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数，然而它却可能可以展开为双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\substack{\text{负幂次部分}\\ \text{主要部分}}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\substack{\text{非负幂次部分}\\ \text{解析部分}}}.$$

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用，我们对它的敛散性作如下定义:

定义

如果双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分作为函数项级数都收敛，则我们称这个双边幂级数收敛.

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数, 然而它却可能可以展开为双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\substack{\text{负幂次部分}\\ \text{主要部分}}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\substack{\text{非负幂次部分}\\ \text{解析部分}}}.$$

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用, 我们对它的敛散性作如下定义:

定义

如果双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分作为函数项级数都收敛, 则我们称这个双边幂级数收敛. 否则我们称之为发散.

双边幂级数的敛散性

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和

$$s_n(z)=\sum_{k=-n}^{n}c_k(z-z_0)^k,$$

形成的数列的极限来定义.

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和

$$s_n(z)=\sum_{k=-n}^{n} c_k(z-z_0)^k,$$

形成的数列的极限来定义. 例如双边幂级数

$$\cdots+z^{-2}+z^{-1}-1-z-z^2-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}-\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和

$$s_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(z-z_0)^k,$$

形成的数列的极限来定义. 例如双边幂级数

$$\cdots + z^{-2} + z^{-1} - 1 - z - z^2 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

当 $z=-1$ 时,

$$s_n(-1) = -1 + \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{-k} - (-1)^k\right] = -1$$

收敛,

双边幂级数的敛散性

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和

$$s_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(z-z_0)^k,$$

形成的数列的极限来定义. 例如双边幂级数

$$\cdots + z^{-2} + z^{-1} - 1 - z - z^2 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

当 $z=-1$ 时,

$$s_n(-1) = -1 + \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{-k} - (-1)^k\right] = -1$$

收敛, 但这个双边幂级数在 $z=-1$ 并不收敛.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 发散.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 收敛, 在 $|\zeta|>R$ 发散.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 收敛, 在 $|\zeta|>R$ 发散. 设 $R_1:=\dfrac{1}{R}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 发散.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 收敛, 在 $|\zeta|>R$ 发散. 设 $R_1:=\dfrac{1}{R}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 发散.

1. 如果 $R_1>R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 收敛, 在 $|\zeta|>R$ 发散. 设 $R_1:=\dfrac{1}{R}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 发散.

1. 如果 $R_1>R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.
2. 如果 $R_1=R_2$, 则该双边幂级数只在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 上可能有收敛的点.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 收敛, 在 $|\zeta|>R$ 发散. 设 $R_1:=\dfrac{1}{R}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 发散.

1. 如果 $R_1>R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.
2. 如果 $R_1=R_2$, 则该双边幂级数只在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 上可能有收敛的点. 此时没有收敛域.

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 收敛, 在 $|\zeta|>R$ 发散. 设 $R_1:=\dfrac{1}{R}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 发散.

1. 如果 $R_1>R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.
2. 如果 $R_1=R_2$, 则该双边幂级数只在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 上可能有收敛的点. 此时没有收敛域.
3. 如果 $R_1<R_2$, 则该双边幂级数在 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 或 $>R_2$ 发散, 在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 或 R_2 上既可能发散也可能收敛.

双边幂级数的收敛域

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的收敛域

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛,

双边幂级数的收敛域

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分.

双边幂级数的收敛域

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

双边幂级数的收敛域

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

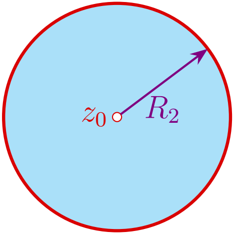
双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.

因此**双边幂级数的收敛域为圆环域** $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.



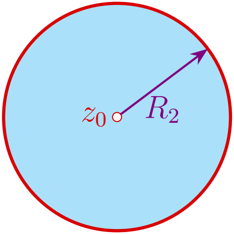
$0 < |z - z_0| < R_2$

双边幂级数的收敛域

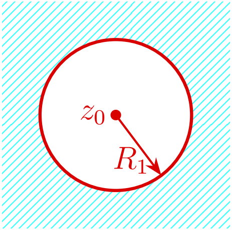
因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.



$0 < |z - z_0| < R_2$



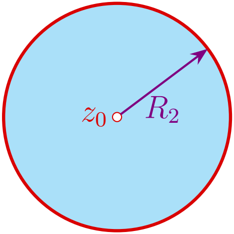
$R_1 < |z - z_0| < +\infty$

双边幂级数的收敛域

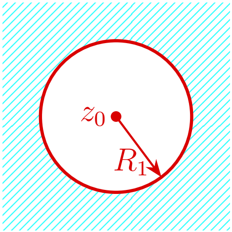
因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

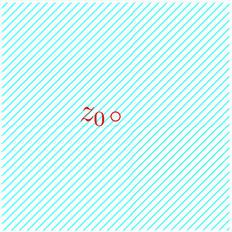
当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.



$0 < |z - z_0| < R_2$



$R_1 < |z - z_0| < +\infty$



$0 < |z - z_0| < +\infty$

例题：双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n}$ 的收敛域与和函数，其中 a,b 为非零复数.

例题：双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$ 的收敛域与和函数，其中 a, b 为非零复数.

解.

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$ 的收敛半径为 $|b|$，$\sum_{n=0}^{\infty} (az)^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{|a|}$，

例题：双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{b^n}$ 的收敛域与和函数，其中 a,b 为非零复数.

解.

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{b^n}$ 的收敛半径为 $|b|$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(az)^n$ 的收敛半径为 $\dfrac{1}{|a|}$，因此该双边幂级数的收敛域为 $|a|<|z|<|b|$.

例题：双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n}$ 的收敛域与和函数，其中 a,b 为非零复数.

解.

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n}$ 的收敛半径为 $|b|$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(az)^n$ 的收敛半径为 $\frac{1}{|a|}$，因此该双边幂级数的收敛域为 $|a|<|z|<|b|$.
当 $|b|<|a|$ 时，没有收敛域.

例题：双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{b^n}$ 的收敛域与和函数，其中 a,b 为非零复数.

解.

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{b^n}$ 的收敛半径为 $|b|$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(az)^n$ 的收敛半径为 $\dfrac{1}{|a|}$，因此该双边幂级数的收敛域为 $|a|<|z|<|b|$.
当 $|b|<|a|$ 时，没有收敛域.
当 $|a|<|z|<|b|$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n}=\frac{a/z}{1-a/z}+\frac{1}{1-z/b}=\frac{(a-b)z}{(z-a)(z-b)}.$$

■

洛朗级数

反过来，在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数，被称为洛朗级数.

反过来，在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数，被称为洛朗级数.

例如 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z=0,1$ 以外解析.

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为洛朗级数.

例如 $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z = 0, 1$ 以外解析. 在圆环域 $0 < |z| < 1$ 内,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为洛朗级数.

例如 $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z = 0, 1$ 以外解析. 在圆环域 $0 < |z| < 1$ 内,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

在圆环域 $0 < |z-1| < 1$ 内,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z-1} + 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \cdots$$

洛朗级数

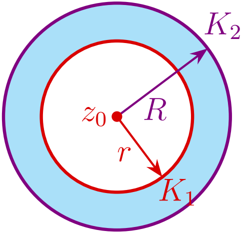
现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到它的展开式.

现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到它的展开式. 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内处处解析.

现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到它的展开式. 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内处处解析. 设

$$K_1 : |z - z_0| = r, \quad K_2 : |z - z_0| = R, \quad R_1 < r < R < R_2.$$

是该圆环域内的两个圆周.

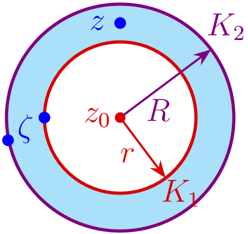


现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到它的展开式. 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内处处解析. 设

$$K_1 : |z-z_0| = r, \quad K_2 : |z-z_0| = R, \quad R_1 < r < R < R_2.$$

是该圆环域内的两个圆周. 对于 $r < |z-z_0| < R$, 由柯西积分公式,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$



和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式.

洛朗级数

和泰勒级数的推导类似，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right](z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta \in K_1$, 由于 $\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$,

和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right](z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta \in K_1$, 由于 $\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$, 因此

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}}$$

和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right](z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta \in K_1$, 由于 $\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$, 因此

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{z - z_0}\cdot\frac{1}{1 - \dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}}\\ &= \frac{1}{z - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n\end{aligned}$$

和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta\in K_1$, 由于 $\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1$, 因此

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\zeta-z}&=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}\\&=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}},\end{aligned}$$

和泰勒级数的推导类似，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta\in K_1$, 由于 $\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1$, 因此

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\zeta-z}&=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}\\&=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}},\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}f(\zeta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \, \mathrm{d}\zeta.$$

令

$$R_N(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1} f(\zeta)\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D\supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界.

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \, \mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K_1$,

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K_1$, 那么

$$\begin{aligned} |R_N(z)| &\leqslant \frac{M}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right| \mathrm{d}s \\ &= \frac{M}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \frac{1}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{N-1} \right| \mathrm{d}s \end{aligned}$$

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1} f(\zeta)\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K_1$, 那么

$$\begin{aligned}
|R_N(z)| &\leqslant \frac{M}{2\pi}\oint_{K_1}\left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\right|\mathrm{d}s \\
&= \frac{M}{2\pi}\oint_{K_1}\left|\frac{1}{\zeta-z}\cdot\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{N-1}\right|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{M}{2\pi}\cdot\frac{1}{|z-z_0|-r}\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|^{N-1}\cdot 2\pi r \to 0 \quad (N\to\infty).
\end{aligned}$$

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right] (z - z_0)^{-n},$$

其中 $r < |z - z_0| < R$.

故

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\right](z-z_0)^{-n},$$

其中 $r<|z-z_0|<R$. 由复合闭路定理, K_1, K_2 可以换成任意一条在圆环域内绕 z_0 的闭路 C.

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right] (z - z_0)^{-n},$$

其中 $r < |z - z_0| < R$. 由复合闭路定理, K_1, K_2 可以换成任意一条在圆环域内绕 z_0 的闭路 C. 从而我们得到 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心的圆环域的洛朗展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n,$$

其中 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

洛朗展开的性质

我们称 $f(z)$ 洛朗展开的正幂次部分为它的解析部分, 负幂次部分为它的主要部分.

洛朗展开的性质

我们称 $f(z)$ 洛朗展开的正幂次部分为它的解析部分, 负幂次部分为它的主要部分.

设在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

洛朗展开的性质

我们称 $f(z)$ 洛朗展开的正幂次部分为它的解析部分, 负幂次部分为它的主要部分.

设在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

则

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i c_n.$$

洛朗展开的性质

我们称 $f(z)$ 洛朗展开的正幂次部分为它的解析部分，负幂次部分为它的主要部分.

设在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

则

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i c_n.$$

因此 $f(z)$ 在圆环域内的双边幂级数展开是唯一的，它就是洛朗级数.

与泰勒级数的关系

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项.

与泰勒级数的关系

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数.

与泰勒级数的关系

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析,

与泰勒级数的关系

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数.

与泰勒级数的关系

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

与泰勒级数的关系

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知, $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当 $f(z)$ (或适当延拓) 在 $|z - z_0| \leqslant R_1$ 内有奇点 (未必是 z_0).

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z-z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z-z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知, $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当 $f(z)$ (或适当延拓) 在 $|z-z_0| \leqslant R_1$ 内有奇点 (未必是 z_0). 例如

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

与泰勒级数的关系

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知, $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当 $f(z)$ (或适当延拓) 在 $|z - z_0| \leqslant R_1$ 内有奇点 (未必是 z_0). 例如

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

与泰勒级数的关系

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z-z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z-z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知, $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当 $f(z)$ (或适当延拓) 在 $|z-z_0| \leqslant R_1$ 内有奇点 (未必是 z_0). 例如

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

可以看出, 右侧是一个幂级数, 所以它在 $z=0$ 处也解析.

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知, $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当 $f(z)$ (或适当延拓) 在 $|z - z_0| \leqslant R_1$ 内有奇点 (未必是 z_0). 例如

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

可以看出, 右侧是一个幂级数, 所以它在 $z = 0$ 处也解析. 如果我们补充定义 $f(0) = 1$, 则 $f(z)$ 处处解析.

典型例题: 求洛朗级数

例

将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

典型例题：求洛朗级数

例

将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 0, 因此洛朗级数的收敛域为 $0<|z|<+\infty$.

典型例题：求洛朗级数

例

将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 0, 因此洛朗级数的收敛域为 $0<|z|<+\infty$. 我们有

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

其中 C 为圆环域内的闭路.

典型例题：求洛朗级数

例

将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 0, 因此洛朗级数的收敛域为 $0<|z|<+\infty$. 我们有

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

其中 C 为圆环域内的闭路. 当 $n\leqslant -3$ 时, 被积函数处处解析, 因此由柯西-古萨基本定理, $c_n=0$.

典型例题：求洛朗级数

例

将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 0, 因此洛朗级数的收敛域为 $0<|z|<+\infty$. 我们有

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

其中 C 为圆环域内的闭路. 当 $n\leqslant-3$ 时, 被积函数处处解析, 因此由柯西-古萨基本定理, $c_n=0$. 当 $n\geqslant-2$ 时, 由柯西积分公式

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{(n+2)!}(e^z)^{(n+2)}\big|_{z=0}=\frac{1}{(n+2)!}.$$

典型例题：求洛朗级数

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

典型例题: 求洛朗级数

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^n,\quad 0<|z|<+\infty.$$

实际上, 由洛朗级数的唯一性, 我们可以直接从 e^z 的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数.

典型例题：求洛朗级数

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

实际上，由洛朗级数的唯一性，我们可以直接从 e^z 的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数．这种做法会简便得多．

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

实际上, 由洛朗级数的唯一性, 我们可以直接从 e^z 的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数. 这种做法会简便得多. 因此我们一般不用直接法, 而是用双边幂级数的代数、求导、求积分运算来得到洛朗级数.

典型例题：求洛朗级数

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

实际上，由洛朗级数的唯一性，我们可以直接从 e^z 的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数. 这种做法会简便得多. 因此我们一般不用直接法，而是用双边幂级数的代数、求导、求积分运算来得到洛朗级数.

另解.

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)$$

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

实际上，由洛朗级数的唯一性，我们可以直接从 e^z 的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数. 这种做法会简便得多. 因此我们一般不用直接法，而是用双边幂级数的代数、求导、求积分运算来得到洛朗级数.

另解.

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n. \quad \blacksquare$$

典型例题：求洛朗展开

例

在下列圆环域中把 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

典型例题：求洛朗展开

例

在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$, (2) $1<|z|<2$, (3) $2<|z|<+\infty$.

典型例题: 求洛朗展开

例

在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$, (2) $1<|z|<2$, (3) $2<|z|<+\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1,2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数.

例

在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.
(1) $0<|z|<1$, (2) $1<|z|<2$, (3) $2<|z|<+\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1,2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. (1) 由于 $|z|<1, |z/2|<1$,

典型例题：求洛朗展开

例

在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$, (2) $1<|z|<2$, (3) $2<|z|<+\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1,2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. (1) 由于 $|z|<1, |z/2|<1$, 因此

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

典型例题: 求洛朗展开

例

在下列圆环域中把 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0 < |z| < 1$, (2) $1 < |z| < 2$, (3) $2 < |z| < +\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z = 1, 2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. (1) 由于 $|z| < 1, |z/2| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2}$$

例

在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.
(1) $0<|z|<1$, (2) $1<|z|<2$, (3) $2<|z|<+\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1,2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. (1) 由于 $|z|<1, |z/2|<1$, 因此

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

典型例题：求洛朗展开

例

在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$, (2) $1<|z|<2$, (3) $2<|z|<+\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1,2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. (1) 由于 $|z|<1, |z/2|<1$, 因此

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

典型例题：求洛朗展开

例

在下列圆环域中把 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.
(1) $0 < |z| < 1$, (2) $1 < |z| < 2$, (3) $2 < |z| < +\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z = 1, 2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. (1) 由于 $|z| < 1, |z/2| < 1$, 因此

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} z + \frac{7}{8} z^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

典型例题：求洛朗展开

续解.

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1,$

典型例题：求洛朗展开

续解.

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

续解.

(2) 由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1, \left|\dfrac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}$$

续解.

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

续解.

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n$$

续解.

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2}$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n$$

$$= \cdots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \cdots$$

续解.

(3) 由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1, \left|\dfrac{2}{z}\right| < 1,$

续解.

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

■

续解.

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z}$$

典型例题：求洛朗展开

续解.

(3) 由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1, \left|\dfrac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z} \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n
\end{aligned}
$$

续解.

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} \\ &= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)z^{-n-1} \end{aligned}$$

■

续解.

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z} \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)z^{-n-1} \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots
\end{aligned}$$

典型例题: 求洛朗展开

续解.

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z}$$
$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)z^{-n-1}$$
$$= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots$$

同一个函数在不同的圆环域内有不同的洛朗展开, 这和洛朗展开的唯一性并不矛盾.

续解.

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} \\
&= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) z^{-n-1} \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots
\end{aligned}
$$

同一个函数在不同的圆环域内有不同的洛朗展开, 这和洛朗展开的唯一性并不矛盾. 因为洛朗展开的唯一性是指在固定的一个圆环域上.

典型例题：求洛朗展开

例

将 $\dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

例

将 $\dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点, 因此该洛朗级数收敛范围是 $0<|z-2|<2$.

例

将 $\dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点，因此该洛朗级数收敛范围是 $0<|z-2|<2$.

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2+z-2}$$

例

将 $\dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点，因此该洛朗级数收敛范围是 $0<|z-2|<2$.

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2+z-2}$$
$$=\frac{1}{2(z-2)}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/2}$$

例

将 $\dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点, 因此该洛朗级数收敛范围是 $0<|z-2|<2$.

$$
\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{z(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2+z-2}\\
&=\frac{1}{2(z-2)}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/2}=\frac{1}{2(z-2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{2}\right)^n
\end{aligned}
$$

典型例题：求洛朗展开

例

将 $\dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点，因此该洛朗级数收敛范围是 $0<|z-2|<2$.

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{z(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2+z-2}\\
&=\frac{1}{2(z-2)}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/2}=\frac{1}{2(z-2)}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z-2}{2}\Big)^n\\
&=\frac{1}{2(z-2)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(z-2)^n,\quad 0<|z-2|<2.
\end{aligned}$$

■

典型例题：求洛朗展开

练习

将 $z^3 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内展开成洛朗级数.

练习

将 $z^3 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内展开成洛朗级数.

答案.

$$
\begin{aligned}
z^3 \exp\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!z^n} + \frac{1}{6} + \frac{z}{2} + z^2 + z^3 \\
&= \cdots + \frac{1}{24z} + \frac{1}{6} + \frac{z}{2} + z^2 + z^3, \quad 0 < |z-2| < 2.
\end{aligned}
$$

例题：洛朗展开的应用

注意到当 $n=-1$ 时，洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

例题：洛朗展开的应用

注意到当 $n=-1$ 时，洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮主计算函数的积分，

注意到当 $n=-1$ 时, 洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮主计算函数的积分, 它就是所谓的留数.

例题：洛朗展开的应用

注意到当 $n=-1$ 时，洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮主计算函数的积分，它就是所谓的**留数**.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)^2}\,\mathrm{d}z$.

例题：洛朗展开的应用

注意到当 $n=-1$ 时，洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮主计算函数的积分，它就是所谓的留数.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)^2}\,\mathrm{d}z$.

解.

注意到闭路 $|z|=3$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内.

注意到当 $n=-1$ 时, 洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮主计算函数的积分, 它就是所谓的留数.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)^2}\,\mathrm{d}z$.

解.

注意到闭路 $|z|=3$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内. 我们在这个圆环域内求 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^2}$ 的洛朗展开.

例题：洛朗展开的应用

续解.

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]'$$

例题：洛朗展开的应用

续解.

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]' = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right]'$$

例题：洛朗展开的应用

续解.

$$f(z)=\frac{1}{z(z+1)^2}=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]'=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right]'$$

$$=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\right]'$$

例题：洛朗展开的应用

续解.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]' = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right]'
\end{aligned}
$$

例题：洛朗展开的应用

续解.

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]' = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right]'$$

$$= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\right]'$$

$$= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right]'$$

$$= -\frac{1}{z}\left[-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{3}{z^4}+\cdots\right]$$

例题：洛朗展开的应用

续解.

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]' = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right]'$$

$$= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\right]'$$

$$= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right]'$$

$$= -\frac{1}{z}\left[-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{3}{z^4}+\cdots\right] = \frac{1}{z^3}-\frac{2}{z^4}+\cdots$$

例题：洛朗展开的应用

续解.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]' = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{3}{z^4}+\cdots\right] = \frac{1}{z^3}-\frac{2}{z^4}+\cdots
\end{aligned}
$$

故

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1} = 0.$$

例题：洛朗展开的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\exp(1/z)}{1-z}\,\mathrm{d}z.$

例题：洛朗展开的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\exp(1/z)}{1-z}\,\mathrm{d}z.$

解.

注意到闭路 $|z|=2$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内.

例题：洛朗展开的应用

例

求 $\oint_{|z|=2} \frac{z\exp(1/z)}{1-z}\,\mathrm{d}z.$

解.

注意到闭路 $|z|=2$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内. 我们在这个圆环域内求被积函数 $f(z)$ 的洛朗展开.

$$f(z) = -\frac{\exp(1/z)}{1-1/z}$$

例题：洛朗展开的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\exp(1/z)}{1-z}\,\mathrm{d}z.$

解.

注意到闭路 $|z|=2$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内. 我们在这个圆环域内求被积函数 $f(z)$ 的洛朗展开.

$$f(z) = -\frac{\exp(1/z)}{1-1/z} = -\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots\right)$$

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\exp(1/z)}{1-z}\,\mathrm{d}z.$

解.

注意到闭路 $|z|=2$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内. 我们在这个圆环域内求被积函数 $f(z)$ 的洛朗展开.

$$f(z) = -\frac{\exp(1/z)}{1-1/z} = -\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots\right)$$
$$= -\left(1+\frac{2}{z}+\frac{5}{2z^2}+\cdots\right)$$

例题：洛朗展开的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\exp(1/z)}{1-z}\,\mathrm{d}z.$

解.

注意到闭路 $|z|=2$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内. 我们在这个圆环域内求被积函数 $f(z)$ 的洛朗展开.

$$f(z) = -\frac{\exp(1/z)}{1-1/z} = -\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots\right)$$

$$= -\left(1+\frac{2}{z}+\frac{5}{2z^2}+\cdots\right)$$

故

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1} = -4\pi i.$$