1.6 极限和连续性

数列极限

- 复变函数的极限和连续性的定义和实函数情形是类似的.

数列极限

- 复变函数的极限和连续性的定义和实函数情形是类似的.
- 我们先来看数列极限的定义.

- 复变函数的极限和连续性的定义和实函数情形是类似的.
- 我们先来看数列极限的定义.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall\varepsilon>0, \exists N$ 使得当 $n\geqslant N$ 时 $|z_n-z|<\varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作
$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

- 复变函数的极限和连续性的定义和实函数情形是类似的.
- 我们先来看数列极限的定义.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall\varepsilon>0,\exists N$ 使得当 $n\geqslant N$ 时 $|z_n-z|<\varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$.
- 如果 $\forall X>0,\exists N$ 使得当 $n\geqslant N$ 时 $|z_n|>X$, 则称 ∞ 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$.

数列极限

- 在闭复平面上, ∞ 的邻域是指

$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > X\} \cup \{\infty\},$$

- 在闭复平面上, ∞ 的邻域是指

$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\} \cup \{\infty\},$$

去心邻域是指

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}.$$

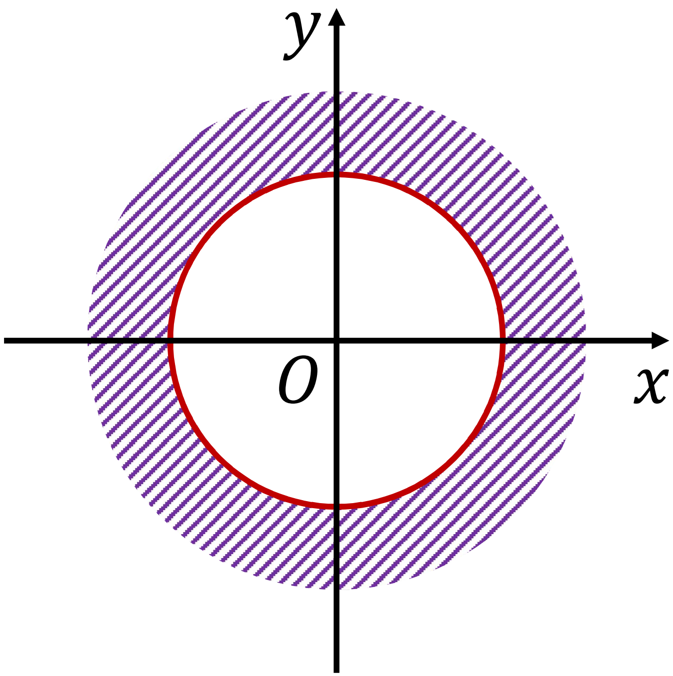
数列极限

- 在闭复平面上, ∞ 的邻域是指

$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > X\} \cup \{\infty\},$$

去心邻域是指

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > X\}.$$

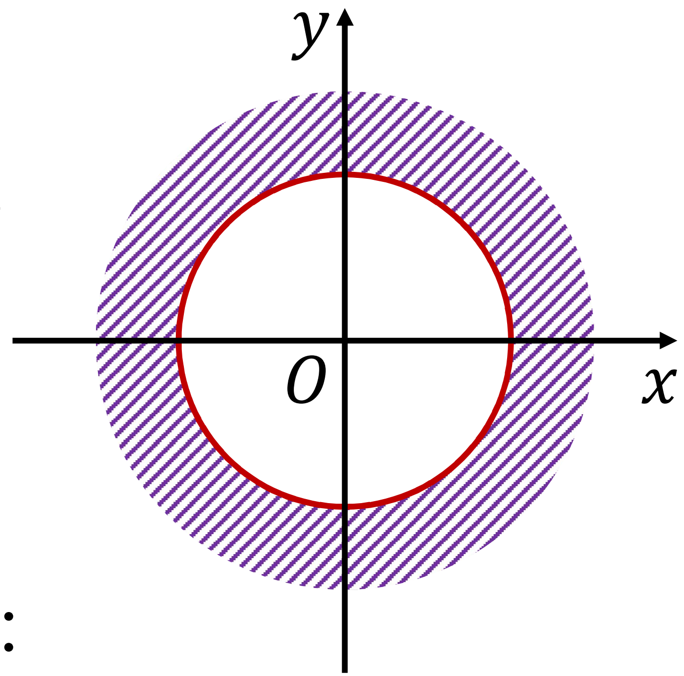


- 在闭复平面上, ∞ 的邻域是指

$$U(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > X\} \cup \{\infty\},$$

去心邻域是指

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > X\}.$$



- 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}^*$ 可统一表述为:
对 z 的任意邻域 $U, \exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $z_n \in U$.

定理

设 $z_n = x_n + iy_n, z = x + iy$.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

数列极限的等价刻画

定理

设 $z_n = x_n + iy_n, z = x + iy$.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

- **证明** 由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leqslant |z_n - z| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证.

- 例 判断下列数列是否收敛, 如果收敛求出其极限.
- (1) $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{i\pi}{n}}$, (2) $z_n = n\cos(ni)$.

- 例 判断下列数列是否收敛, 如果收敛求出其极限.
- (1) $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{i\pi}{n}}$, (2) $z_n = n\cos(ni)$.
- 解 (1) 由于

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0,$$

例题: 判断数列敛散性

- 例 判断下列数列是否收敛, 如果收敛求出其极限.
- (1) $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{i\pi}{n}}$, (2) $z_n = n\cos(ni)$.
- 解 (1) 由于

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0,$$

- 因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

- 例 判断下列数列是否收敛, 如果收敛求出其极限.
- (1) $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{i\pi}{n}}$, (2) $z_n = n\cos(ni)$.
- 解 (1) 由于

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0,$$

- 因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1.$
- (2) 由于 $x_n = \frac{n(e^n+e^{-n})}{2} \to \infty, y_n = 0,$

- 例 判断下列数列是否收敛, 如果收敛求出其极限.
- (1) $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{i\pi}{n}}$, (2) $z_n = n\cos(ni)$.
- 解 (1) 由于

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0,$$

- 因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.
- (2) 由于 $x_n = \frac{n(e^n+e^{-n})}{2} \to \infty, y_n = 0$,
- 因此 $\{z_n\}$ 发散.

- 例 判断下列数列是否收敛, 如果收敛求出其极限.
- (1) $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{i\pi}{n}}$, (2) $z_n = n\cos(ni)$.
- 解 (1) 由于

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0,$$

- 因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.
- (2) 由于 $x_n = \dfrac{n(e^n+e^{-n})}{2} \to \infty, y_n = 0,$
- 因此 $\{z_n\}$ 发散. 实际上此时 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

定义

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

定义

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U, \exists \delta > 0$ 使得当 $z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta)$ 时, 有 $f(z) \in U$,

定义

设函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U, \exists\delta>0$ 使得当 $z\in \mathring{U}(z_0,\delta)$ 时, 有 $f(z)\in U$, 则称 A 为 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 或 $f(z)\to A\ (z\to z_0)$.

定义

设函数 $w=f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U, \exists \delta>0$ 使得当 $z\in \mathring{U}(z_0,\delta)$ 时, 有 $f(z)\in U$, 则称 A 为 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 或 $f(z)\to A\ (z\to z_0)$.

- 对于 $z_0=\infty$ 或 $A=\infty$ 的情形, 也可以用上述定义统一描述.

定义

设函数 $w = f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U, \exists\delta > 0$ 使得当 $z \in \mathring{U}(z_0, \delta)$ 时, 有 $f(z) \in U$, 则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A\ (z \to z_0)$.

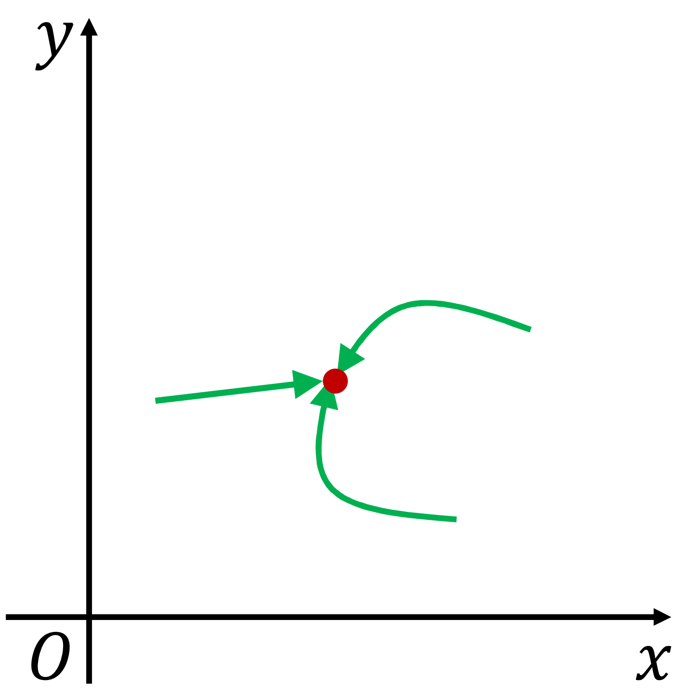
- 对于 $z_0 = \infty$ 或 $A = \infty$ 的情形, 也可以用上述定义统一描述.
- 不过通常说极限存在是不包括 $\lim f(z) = \infty$ 的情形的.

与实函数极限之联系

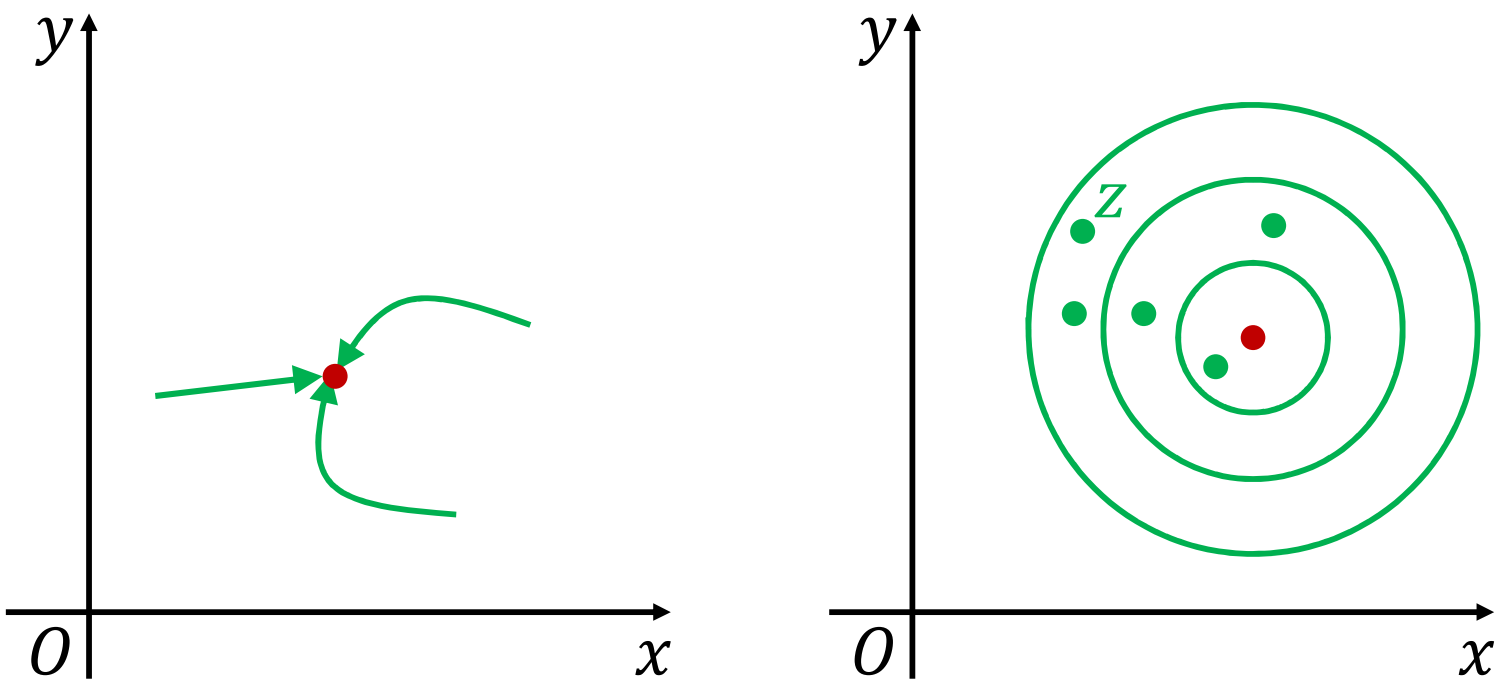
- 通过与二元实函数的极限对比可知, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的.

与实函数极限之联系

- 通过与二元实函数的极限对比可知, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的.
- $z \to z_0$ 可以是沿着任意一条曲线趋向于 z_0,



- 通过与二元实函数的极限对比可知, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的.
- $z \to z_0$ 可以是沿着任意一条曲线趋向于 z_0, 或者看成 z 是在一个开圆盘内任意的点逐渐地靠拢 z_0.



与实函数极限之联系

定义

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z_0=x_0+iy_0, A=u_0+iv_0,$

与实函数极限之联系

定义

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0, A = u_0 + iv_0$,

则 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ 当且仅当

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0, \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

与实函数极限之联系

定义

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z_0=x_0+iy_0, A=u_0+iv_0$,

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 当且仅当

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

- 证明 由三角不等式

$$|u-u_0|, |v-v_0| \leqslant |z-z_0| \leqslant |u-u_0|+|v-v_0|$$

易证.

定义

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0, A = u_0 + iv_0$,

则 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ 当且仅当

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0, \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

- **证明** 由三角不等式

$$|u - u_0|, |v - v_0| \leqslant |z - z_0| \leqslant |u - u_0| + |v - v_0|$$

易证.

- 当 $z_0 = \infty$ 或 $A = \infty$ 时上述结论也正确.

极限的四则运算

- 由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

- 由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A, \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}(f\pm g)(z)=A\pm B$.

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}(fg)(z)=AB$.

(3) 当 $B\neq 0$ 时, $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\frac{f}{g}\right)(z)=\frac{A}{B}$.

例题: 判断函数极限是否存在

- 例 证明当 $z \to 0$ 时, 函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

例题: 判断函数极限是否存在

- **例** 证明当 $z \to 0$ 时, 函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.
- **证明** 令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

例题: 判断函数极限是否存在

- **例** 证明当 $z \to 0$ 时, 函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.
- **证明** 令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad v(x, y) = 0.$$

例题: 判断函数极限是否存在

- **例** 证明当 $z \to 0$ 时, 函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.
- **证明** 令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad v(x, y) = 0.$$

- 当 z 沿着直线 $y = kx$ 趋向于 0 时, 则 $u(x, y) \to \pm \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$.

例题: 判断函数极限是否存在

- 例 证明当 $z \to 0$ 时, 函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

- 证明 令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad v(x, y) = 0.$$

- 当 z 沿着直线 $y = kx$ 趋向于 0 时, 则 $u(x, y) \to \pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$.

- 显然这个数依赖于 k 的选择, 因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x, y)$ 不存在.

例题: 判断函数极限是否存在

- **例** 证明当 $z \to 0$ 时, 函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.
- **证明** 令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad v(x,y) = 0.$$

- 当 z 沿着直线 $y = kx$ 趋向于 0 时, 则 $u(x,y) \to \pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$.
- 显然这个数依赖于 k 的选择, 因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ 不存在.
- 从而 $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ 不存在.

定义

如果 $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

函数的连续性

定义

如果 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

定义

如果 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

- 由前面的定理可知:

定义

如果 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

- 由前面的定理可知:

定理

函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

连续函数的四则运算和复合

- 例如 $f(z) = \ln\left(x^2 + y^2\right) + i\left(x^2 - y^2\right)$.

连续函数的四则运算和复合

- 例如 $f(z) = \ln\left(x^2 + y^2\right) + i\left(x^2 - y^2\right)$.
- $u(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ 除原点外处处连续, $v(x,y) = x^2 - y^2$ 处处连续.

连续函数的四则运算和复合

- 例如 $f(z) = \ln\left(x^2 + y^2\right) + i\left(x^2 - y^2\right)$.
- $u(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$ 除原点外处处连续, $v(x,y) = x^2 - y^2$ 处处连续.
- 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

- 例如 $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$.
- $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x,y) = x^2 - y^2$ 处处连续.
- 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.

连续函数的四则运算和复合

- 例如 $f(z)=\ln\left(x^2+y^2\right)+i\left(x^2-y^2\right)$.
- $u(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$ 除原点外处处连续, $v(x,y)=x^2-y^2$ 处处连续.
- 因此 $f(z)$ 在 $z\neq 0$ 处连续.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z),g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0)\neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f\big(g(z)\big)$ 在 z_0 处连续.

连续函数的注记

- 显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续,

连续函数的注记

- 显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续, 有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

连续函数的注记

- 显然 $f(z)=z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

  也处处连续, 有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.
- 有时候我们会遇到在曲线上连续的函数, 它指的是当 z 沿着该曲线趋向于 z_0 时, $f(z)\to f(z_0)$.

连续函数的注记

- 显然 $f(z)=z$ 是处处连续的，故多项式函数

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

也处处连续，有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

- 有时候我们会遇到在曲线上连续的函数，它指的是当 z 沿着该曲线趋向于 z_0 时，$f(z)\to f(z_0)$.
- 对于闭曲线或包含端点的曲线段，其之上的连续函数 $f(z)$ 是有界的.

例题:函数连续性的判定

- 例 证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

例题:函数连续性的判定

- **例** 证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.
- **证明** 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z_0=x_0+iy_0$.

例题:函数连续性的判定

- 例 证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.
- 证明 设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$.
- 那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

例题:函数连续性的判定

- 例 证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.
- 证明 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z_0 = x_0 + iy_0$.
- 那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.
- 从而 $-v(x, y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续.

例题:函数连续性的判定

- 例 证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.
- 证明 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z_0 = x_0 + iy_0$.
- 那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.
- 从而 $-v(x, y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续.
- 所以 $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

例题:函数连续性的判定

- 例 证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.
- 证明 设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$.
- 那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.
- 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续.
- 所以 $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.
- 另一种看法是, 函数 $g(z) = \bar{z} = x - iy$ 处处连续, 从而 $g\big(f(z)\big)$ 在 z_0 处连续.

注记

- 可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别.

注记

- 可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别.
- 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法.

注记

- 可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别.
- 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法.
- 这就导致了复变函数有导数, 而不是像多变量实函数只有偏导数.

注记

- 可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别.
- 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法.
- 这就导致了复变函数有导数, 而不是像多变量实函数只有偏导数.
- 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.