合肥工業大學
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

线性代数

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第一章　行列式

1. 行列式的定义
2. 行列式的性质

线性代数起源于线性方程组的求解问题. 考虑方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 1. & (2) \end{cases}$$

2(2)+(1) 可得 $7x_1 = 14$. 从而 $x_1 = 2, x_2 = -3$.

我们考虑一般情形:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

分别作 $a_{22} \times (1), a_{12} \times (2)$ 得到

$$\begin{cases} a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = b_1 a_{22}, & (1) \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = b_2 a_{12}. & (2) \end{cases}$$

然后 $-(2) + (1)$ 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2.$$

于是

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

类似地, 从 $-a_{21}(1) + a_{12}(2)$ 得到

$$x_2 = \frac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

有没有问题? 当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ 时, 不能使用这种方式求解. 实际上此时总有无穷多个解.

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 总有唯一解. 所以这个数值就充当了方程 “判别式” 的作用.

第一节　行列式的定义

- 行列式的归纳定义
- 行列式的展开

对于 n 个未知数 n 的方程的线性方程组，我们能不能定义出类似的量来刻画它何时有唯一解呢?

首先引入矩阵的概念. 我们将 mn 个数按照每行 n 个元素，一共 m 行排列，得到的数表称为 m 行 n 列矩阵，或简称为 $m \times n$ 矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

其中 a_{ij} 表示 $\mathbf{A}$ 的第 i 行 j 列元素，并记 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$.

当 $m = n$ 时，称之为 n 阶方阵.

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{cases}$$

未知量 $x_1, \ldots, x_n$ 前面的系数就构成了一个 $m \times n$ 矩阵, 称之为系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

线性代数的主要任务之一, 就是利用矩阵理论回答该方程组解的情况.

为了定义出刻画 n 个方程 n 个变量的线性方程组是否有唯一解的“判别式”, 即矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式 $\det(\mathbf{A}) = |A|$, 首先约定单位矩阵

$$E_n := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

行列式为 1. 作此约定之后, 2 阶方阵的行列式就应当为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

而不是它的一个非零倍数了.

对于 3 阶方阵, 可通过计算发现其行列式为 (注意单位矩阵行列式应当为 1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

对于 n 阶方阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, 按照如下方式定义行列式

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

定义

- 当 $n = 1$ 时, $\det(\mathbf{A}) := a_{11}$;
- 对于一般的 n, 归纳定义

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n},$$

其中 M_{ij} 表示 $\mathbf{A}$ 去掉第 i 行和 j 列得到的 $n-1$ 阶方阵的行列式.

余子式和代数余子式

称 M_{ij} 为 a_{ij} 的余子式; 称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式. 那么

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n}.$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\times(-5)\times 4 + 3\times 1\times 2 + 2\times 3\times 1 - 1\times 1\times 1 - 3\times 3\times 4 - 2\times(-5)\times 2$$
$$= -20 + 6 + 6 - 1 - 36 + 20 = -25.$$

例

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3\times\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21 - 3\times 10 + 2\times 13 = -25.$$

练习

如果 $k>0$ 且 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ k & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$, 那么 $k=$ __2__.

(1) 行列式是一个数, 或者说 $\det: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是一个映射, 其中 $M_n(\mathbb{R})$ 表示所有实系数的 n 阶方阵.

(2) 1 阶行列式就是方阵里面唯一的那个元素, 尽管也记作 $|\cdot|$, 但注意和绝对值区分开.

(3) $2,3$ 阶行列式可以用对角线法直接得到展开式, 但是更高阶的没有这种表示方法.

(4) $$\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

练习

判断题: $\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix}$. ×

例

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

我们知道,

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots + a_{1n}A_{1n} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}.\end{aligned}$$

一直展开下去, $\det(\mathbf{A})$ 是由一些 $\pm a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ 相加得到, 其中 $k_1k_2\cdots k_n$ 是 $1, 2\ldots, n$ 的一个排列, 一共有 $n!$ 个这样的项. 问题是如何确定它的符号?

假设 n 阶矩阵 $\mathbf{P} = (a_{ij})$ 第 i 行除了 k_i 列都是零. 那么

$$\det(\mathbf{P}) = \pm a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}.$$

为了陈述方便, 记 $c_i \leftrightarrow c_j (r_i \leftrightarrow r_j)$ 为交换 i, j 列 (行). 如果 $c_{k_1-1} \leftrightarrow c_{k_1}$, 那么 $\det(\mathbf{P})$ 定义中的余子式不会变, 但是符号 $(-1)^{1+k_1}$ 和 $(-1)^{1+k_1-1}$ 会不同, 从而行列式相差 -1 倍. 再依次

$$c_{k_1-2} \leftrightarrow c_{k_1-1}, \quad c_{k_1-3} \leftrightarrow c_{k_1-2}, \quad \ldots, \quad c_1 \leftrightarrow c_2$$

则 a_{1k_1} 被移动到了第 1 列且余子式没有变, 行列式变为 $(-1)^{k_1-1}$ 倍.

后面的每行都类似操作, 最终 $\mathbf{P}$ 变成对角阵

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_{1k_1} & & & \\ & a_{2k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nk_n} \end{bmatrix},$$

所以

$$\det(\mathbf{P}) = (-1)^a \det(\mathbf{D}) = (-1)^a a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n},$$

其中 a 是需要交换 $\mathbf{P}$ 的相邻列使其变成对角阵的次数.

由于 $c_i \leftrightarrow c_j$ 可以通过

$$c_j \leftrightarrow c_{j-1}, \quad c_{j-1} \leftrightarrow c_{j-2}, \quad \dots, \quad , c_{i+1} \leftrightarrow c_i, \qquad c_{i+1} \leftrightarrow c_{i+2}, \quad \dots, \quad c_{j-1} \leftrightarrow c_j$$

实现, 一共 $2(j-i)+1$ 次. 因此 a 可以换成交换 $\mathbf{P}$ 的列使其变成对角阵的次数.

定理

如果排列 $k_1k_2\cdots k_n$ 经过 a 次互换变为 $12\cdots n$, 记 $\operatorname{sgn}(k_1k_2\cdots k_n) := (-1)^a$. 那么对于 n 阶方阵 $\mathbf{A}$,

$$\det(\mathbf{A}) = \sum \operatorname{sgn}(k_1k_2\cdots k_n)a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n},$$

其中求和取遍所有排列 $k_1k_2\cdots k_n$.

反对角阵的行列式

例

计算 $\det(\mathbf{A})$，其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} & & & a_1 \\ & & a_2 & \\ & \iddots & & \\ a_n & & & \end{bmatrix}$.

解

当 n 是偶数时，排列 $\{n, n-1, \cdots, 2, 1\}$ 经过对换 $(1n), (2, n-1), \ldots, (\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1)$ 变为 $(12\cdots n)$，因此 $\det(\mathbf{A}) = (-1)^{\frac{n}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$.

当 n 是奇数时，排列 $(n, n-1, \cdots, 2, 1)$ 经过对换 $(1n), (2, n-1), \ldots, (\frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2})$ 变为 $(12\cdots n)$，因此 $\det(\mathbf{A}) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$.

也可以统一表为

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n.$$

第二节　行列式的性质

- 行列式的变换性质
- 使用初等变换计算行列式

如果 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 称

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

为矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置, 它是 $n\times m$ 矩阵.

注意到对于 $\mathbf{P}$, $c_{k_i}\leftrightarrow c_{k_j}$ 和 $r_i\leftrightarrow r_j$ 是一样的, 即对 $\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ 进行 $c_i\leftrightarrow c_j$ 得到的方阵的转置. 因此 $\det(\mathbf{P}^{\mathrm{T}})=\det(\mathbf{P})$.

而 $\det(\mathbf{A})$ 是所有置换对应的型如 $\mathbf{P}$ 方阵行列式之和, 因此

转置不改变行列式: $\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=\det(\mathbf{A})$.

例

计算 $\det(\mathbf{A})$, 其中 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$ 是上三角阵.

解

由于

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

是下三角阵, 因此 $\det(\mathbf{A})=\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

注意到交换 $\mathbf{P}$ 的两列后得到的方阵 $\mathbf{P}'$ 对应的排列 sgn 发生了改变, 从而 $\det(\mathbf{P}') = -\det(\mathbf{P})$. 由此可知互换两行后, 方阵的行列式变为 -1 倍. 再根据转置不改变行列式可知:

互换两行 (列) 后, 方阵的行列式变为 -1 倍.

如果方阵有相同的两行, 那么交换这两行方阵不变但行列式变为 -1 倍. 于是行列式只能为 0.

具有相同的两行 (列) 的方阵的行列式为 0.

行乘常数的行列式

如果方阵某一行元素均乘 k, 那么行列式展开式的每一项都乘 k, 从而行列式乘 k.

方阵的某一行 (列) 乘 k 后, 方阵的行列式变为 k 倍.

练习

判断题: $$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$ ✗

- 行列式中某一行 (列) 的公因子可以提到行列式外面.
- 如果方阵有一行 (列) 全为零, 则行列式为零.
- 如果方阵有两行 (列) 成比例, 则行列式为零.

沿任一行 (列) 展开

方阵的行列式等于任一行 (列) 的元素与其对应的代数余子式乘积的和:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

将方阵的第 i 行移动到第一行的前面, 需要的对换数等于排列 $i, 1, 2, \cdots, i-1$ 变成 $1, 2, \ldots, i$ 的对换数, 即 $i-1$ 次. 移动后的矩阵的行列式展开式乘 $(-1)^{i-1}$ 就是上述等式右边.

由此也可以看出 $i \neq k$ 时,

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0,$$

因为它是第 i, k 行相同的方阵的行列式.

行列式的线性性

将方阵一行 (列) 每一个元素都写成两个数之和, 则行列式也可拆成两个行列式之和:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \vdots & \ddots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将方阵一行 (列) 乘常数 k 再加到另一行 (列), 行列式不变.

三种初等变换

计算行列式可以通过下列变换来进行化简:

初等变换

(1) 互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$, 行列式变号;

(2) 一行 (列) 乘常数 k: $r_i \times k, c_i \times k$, 行列式变为 k 倍;

(3) j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$.

例：计算行列式

例

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{r_1 \leftrightarrow r_4}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -4 & -5 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-2r_1]{r_2+4r_1, r_3+3r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -13 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3+r_1} -\begin{vmatrix} -13 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -40.$$

练习

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 501 & 200 & 299 \\ 500 & 200 & 300 \end{vmatrix} = \underline{-200}.$$

例

证明:
$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

例：计算行列式

证明

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2} \begin{vmatrix} a_1-c_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2-c_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3-c_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_3} \begin{vmatrix} 2a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ 2a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ 2a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-c_1} 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3} 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

□

练习

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+d_1 & d_1+a_1 \\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+d_2 & d_2+a_2 \\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+d_3 & d_3+a_3 \\ a_4+b_4 & b_4+c_4 & c_4+d_4 & d_4+a_4 \end{vmatrix} = \underline{\quad 0 \quad}.$$

例

计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$.

例：特殊形状行列式

解

$$\begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} \xlongequal[i\geqslant 2]{c_1+c_i} \begin{vmatrix} a+n-1 & 1 & \cdots & 1 \\ a+n-1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+n-1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i\geqslant 2]{r_i-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-1 \end{vmatrix} = (a+n-1)(a-1)^{n-1}.$$

例：特殊形状行列式

例

计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \xlongequal[i\geqslant 2]{r_1-\frac{1}{i}r_i} \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \left(1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}\right)n!.$$

例：特殊形状行列式

一般地，$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = (a_1 - \frac{1}{a_2} - \cdots - \frac{1}{a_n})a_2 \cdots a_n.$$