

中国科学技术大学试卷 (A)

2010~2011 学年第 二 学期

复变函数 (001012)

本卷中 $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$, $B(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$.

一、(20 分) 以下陈述是否正确? 如果不正确请给出理由.

1. 存在 $B(0, 1) - \{0\}$ 上的无界全纯函数 f 使得 $\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = 0$.
2. 存在 $B(0, 1)$ 上的全纯函数 f 使得 $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n, n = 2, 3, \dots$.
3. 存在 \mathbb{C} 上的非零全纯函数 f 有无穷多零点.
4. 设 D 是 \mathbb{C} 中的域, $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$, 则 f 一定能在 D 的边界上取得最大模.
5. 设 $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ 满足 $f(ai) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$, 则 f 恒等于零.
6. 设 $D = B(\infty, R), f, g \in H(D) \cap C(\overline{D}), R > 0$ 满足 $f(z) = g(z), \forall z \in \mathbb{C}, |z| = R$, 则 f 恒等于 g .
7. ∞ 是 $\sin\left[\frac{1}{\cos(1/z)}\right]$ 的本性奇点.
8. $\frac{z}{e^z - 1}$ 在 \mathbb{C} 上亚纯.
9. $B(0, 1)$ 的全纯自同构必为分式线性变换.
10. 若整函数 f 将实轴和虚轴均映为实数, 则 $f'(0) = 0$.

二、(30 分) 计算题.

1. $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)^3(z-3)}.$
2. $\int_{|z|=2} \frac{z+1}{z^2(z^3+2)} dz.$
3. $\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{\sin z} dz.$
4. $\operatorname{Res}\left[\frac{z^{2n}}{(z+1)^n}, \infty\right].$
5. $e^{\frac{1-z}{z}}$ 在扩充复平面上有哪些奇点? 并求出在 $D = B(\infty, 1)$ 上的 Laurent 展开.

三、(10 分) 设 $f \in H(B(0, 1))$, $f(0) = 1$, 并且 $\operatorname{Re} f(z) \geq 0, \forall z \in B(0, 1)$. 证明

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq \operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \quad \forall z \in B(0, 1).$$

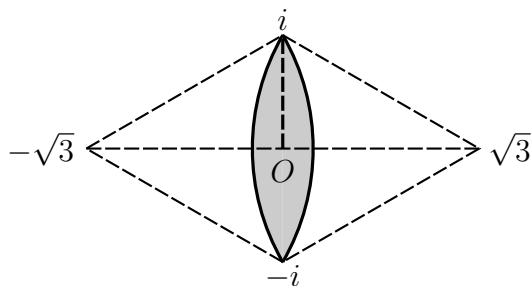
四、(10 分) 利用辐角原理或 Rouché 定理证明代数学基本定理.

五、(10 分) 设 γ 是圆周 $\partial B(a, R)$ 上的一段开圆弧. 证明: 若 f 在 $B(a, R)$ 上全纯, 在 $B(a, R) \cup \gamma$ 上连续, 并且在 γ 上恒为零, 则 f 在 $B(a, R)$ 上也恒为零.

六、(10 分) 求一单叶全纯映射, 把 D 映为上半平面, 其中

$$D = \Omega - [0, i], \quad \Omega = B(\sqrt{3}, 2) \cap B(-\sqrt{3}, 2),$$

这里 $[0, i]$ 表示连接 0 和 i 的线段。



七、(10 分) 设 γ 是可求长简单闭曲线, 其内部为域 G_1 , 外部为域 G_2 . 如果 $f \in H(G_2) \cap C(\overline{G_2})$, 而且 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$, 那么

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} -f(z) + A, & z \in G_2; \\ A, & z \in G_1, \end{cases}$$

这里 γ 关于 G_1 取正向.