目录

第一章 复变函数的积分

§1.1 复变函数积分的概念

§1.1.1 复变函数积分的定义

设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z=z(t), a\leqslant t\leqslant b$ 除去有限个点之外都有非零导数. 固定它的一个方向, 称为正方向, 则我们得到一条有向曲线. 和这条曲线方向相反的记作 C^-, 它的方向被称为该曲线负方向.

对于闭路, 规定它的**正方向是指逆时针方向**, 负方向是指顺时针方向. 以后我们不加说明的话**默认是正方向**.

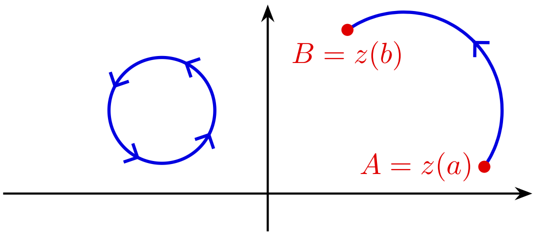


图 1.1: 有向曲线

所谓的复变函数积分, 本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

定义在区域 D 内, 有向曲线 C 包含在 D 中. 形式地展开

$$f(z)\,\mathrm{d}z=(u+iv)(\,\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y)=(u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y)+i(u\,\mathrm{d}y+v\,\mathrm{d}x).$$

定义 1.1

如果下述右侧两个线积分均存在, 则定义

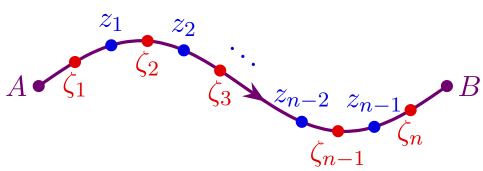
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_C(u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y)+i\int_C(v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y)$$

为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分.

我们也可以像线积分那样通过分割来定义. 在曲线 C 上依次选择分点 $z_0=A, z_1,\ldots,z_n=B$, 在每一段弧上任取 $\zeta_k\in\overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 并作和式

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\zeta_k)\Delta z_k,\quad \Delta z_k=z_k-z_{k-1}.$$

称 $n\to\infty$, 分割的最大弧长 $\to 0$ 时 S_n 的极限为复变函数积分. 这二者是等价的.



如果 C 是闭曲线, 则该积分记为 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$. 此时该积分不依赖端点的选取.

如果 C 是实轴上的区间 $[a,b]$ 且 $f(z)=u(x)$, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$$

就是黎曼积分.

根据线积分的存在性条件可知:

定理 1.2

如果 $f(z)$ 在 D 内连续, C 是光滑曲线, 则 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 总存在.

§1.1.2 复变函数积分的计算法

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C: z(t)=x(t)+iy(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则 $\mathrm{d}z=z'(t)\,\mathrm{d}t$.

定理 1.3 (复变函数积分计算方法 I)

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b f(z)z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

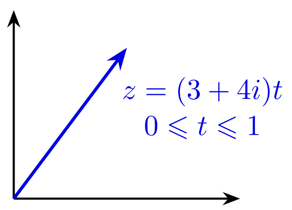
如果 C 的正方向是从 $z(b)$ 到 $z(a)$, 则需要交换右侧积分的上下限.

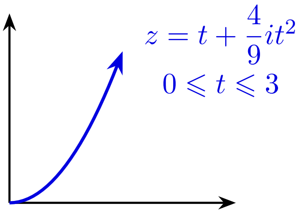
如果 C 是逐段光滑的, 则相应的积分就是各段的积分之和. 以后我们只考虑逐段光滑曲线上的连续函数的积分.

例 1.1 求 $\int_C z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是

(1) 从原点到点 $3+4i$ 的直线段;

(2) 抛物线 $y=\dfrac{4}{9}x^2$ 上从原点到点 $3+4i$ 的曲线段.





解:

(1) 由于 $z=(3+4i)t, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 因此

$$\int_C z\,\mathrm{d}z=\int_0^1 (3+4i)t\cdot(3+4i)\,\mathrm{d}t=(3+4i)^2\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(3+4i)^2=-\frac{7}{2}+12i.$$

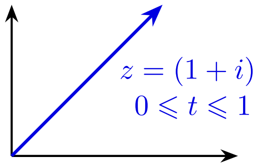
(2) 由于 $z=t+\dfrac{4}{9}it^2, 0 \leqslant t \leqslant 3$, 因此

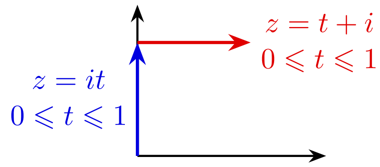
$$\begin{aligned}\int_C z\,\mathrm{d}z&=\int_0^3\left(t+\frac{4}{9}it^2\right)\cdot\left(1+\frac{8}{9}it\right)\mathrm{d}t=\int_0^3\left(t+\frac{4}{3}it^2-\frac{32}{81}t^3\right)\mathrm{d}t\\&=\left(\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{9}it^3-\frac{8}{81}t^4\right)\Big|_0^3=-\frac{7}{2}+12i.\end{aligned}$$

例 1.2 求 $\int_C \operatorname{Re} z \, dz$, 其中 C 是

(1) 从原点到点 $1+i$ 的直线段;

(2) 从原点到点 i 再到 $1+i$ 的折线段.





解:

(1) 由于 $z=(1+i)t, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 因此 $\operatorname{Re} z = t$,

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t \cdot (1+i) \, dt = (1+i) \int_0^1 t \, dt = \frac{1+i}{2}.$$

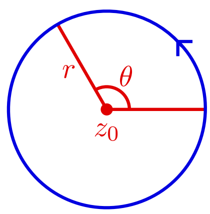
(2) 第一段 $z=it, 0 \leqslant t \leqslant 1, \operatorname{Re} z = 0$, 第二段 $z=t+i, 0 \leqslant t \leqslant 1, \operatorname{Re} z = t$. 因此

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}.$$

可以看出, 即便起点和终点相同, 沿不同路径 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 的积分也可能不同. 而 $f(z) = z$ 的积分则只和起点和终点位置有关, 与路径无关. 原因在于 $f(z) = z$ 是处处解析的, 我们以后会详加解释.

✍ **练习 1.1.1** 求 $\int_C \operatorname{Im} z \, dz =$______________, 其中 C 是从原点沿 $y=x$ 到点 $1+i$ 再到 i 的折线段.

例 1.3 求 $\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, 其中 n 为整数.



解: $C: |z-z_0| = r$ 的参数方程为 $z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 于是 $dz = ire^{i\theta} \, d\theta$.

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} i(re^{i\theta})^{-n} \, d\theta = ir^{-n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \, d\theta.$$

- 当 $n=0$ 时, 该积分值为 $2\pi i$.
- 当 $n \neq 0$ 时, 该积分值 $= \frac{ir^{-n}}{-in} e^{-in\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0$.

所以

定理 1.4 (幂函数沿圆周的积分)

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

这个积分以后经常用到, 它的特点是积分值与圆周的圆心和半径都无关.

定理 1.5 (积分的线性性质)

(1) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z.$

(2) $\displaystyle\int_C kf(z)\,\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$

(3) $\displaystyle\int_C [f(z)\pm g(z)]\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\,\mathrm{d}z.$

定理 1.6 (长大不等式)

设 C 的长度为 L, $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)|\leqslant M$, 则

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \leqslant ML.$$

证明: 由

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)\Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta s_k \leqslant M\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k$$

可知

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \leqslant ML.$$

□

长大不等式常常用于证明等式: 估算一个积分和一个具体的数值之差不超过任意给定的 ε, 从而得到二者相等.

注意到: 如果被积函数 $f(z)$ 在 C 上的点都连续, 那么 $|f(z)|$ 是 C 的参变量 $t\in[a,b]$ 的连续函数, 从而有界, 即存在 M 使得 $|f(z)|\leqslant M, \forall z\in C$.

例 1.4 设 $f(z)$ 在 $z\neq a$ 处连续, 且 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$, 则

$$\lim_{r\to 0}\oint_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i k.$$

证明: $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 使得当 $|z-a|<\delta$ 时, $|(z-a)f(z)-k|\leqslant\varepsilon$. 当 $0<r<\delta$ 时,

$$\begin{aligned}\left|\oint_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}z - 2\pi i k\right| &= \left|\oint_{|z-a|=r}\left[f(z)-\frac{k}{z-a}\right]\mathrm{d}z\right| \\ &= \left|\oint_{|z-a|=r}\frac{(z-a)f(z)-k}{z-a}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r = 2\pi\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 ε 是任意的, 因此命题得证. □

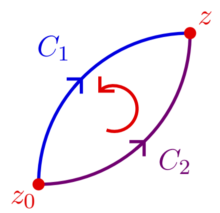
§1.2 柯西-古萨基本定理和复合闭路定理

§1.2.1 柯西-古萨基本定理

观察下方的两条曲线 C_1, C_2. 设 $C=C_1^-+C_2$. 可以看出

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \iff \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

所以 $f(z)$ 的积分只与起点终点有关 $\iff$ $f(z)$ 绕任意闭路的积分为零.



上一节中我们计算了 $f(z) = z, \operatorname{Re} z, \dfrac{1}{z-z_0}$ 的积分. 其中

- $f(z) = z$ 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \dfrac{1}{z-z_0}$ 有奇点 z_0, 沿绕 z_0 闭路的积分非零;
- $f(z) = \operatorname{Re} z$ 处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分非零).

由此可见函数沿闭路积分为零, 与函数在闭路内部是否解析有关.

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D} = D \cup C$ 上解析, 即存在区域 $B \supseteq \overline{D}$ 使得 $f(z)$ 在 B 上解析. 为了简便假设 $f'(z)$ 连续, 则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\oint_C (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y).$$

由格林公式和 C-R 方程可知

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\iint_D (v_x + u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\iint_D (u_x - v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

也可以从

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z} = 2i\iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$ [1]

看出.

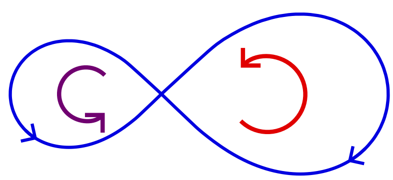
定理 1.7 (柯西-古萨基本定理)

设 $f(z)$ 在闭路 C 上连续, C 内部解析, 则 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

推论 1.8

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条闭合曲线 (可以不是闭路), 则 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

这是因为即使不是简单曲线也可以拆分为一些简单曲线.



例 1.5 求 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3}\,\mathrm{d}z$.

[1]这是因为

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial x} & \dfrac{\partial \overline{z}}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix} = -2i.$$

解: 由于 $\dfrac{1}{2z-3}$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{1}{2z-3}\,\mathrm{d}z=0.$

练习 1.2.1

(1) $\displaystyle\oint_{|z-2|=1}\frac{1}{z^2+z}\,\mathrm{d}z=$______.

(2) 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{|z|}\,\mathrm{d}z=$______.

例 1.6 求 $\displaystyle\oint_C\frac{1}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$, 其中 $C:|z-i|=\frac{1}{2}$.

解: 注意到

$$\frac{1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i}+\frac{1}{z-i}\right).$$

由于 $\dfrac{1}{z},\dfrac{1}{z+i}$ 在 $|z-i|\leqslant\dfrac{1}{2}$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理

$$\oint_C\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=\oint_C\frac{1}{z+i}\,\mathrm{d}z=0,$$

$$\oint_C\frac{1}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}\oint_C\frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z=-\pi i.$$

§1.2.2 复合闭路定理

设 $C_0,C_1,\ldots,C_n$ 是 $n+1$ 条简单闭曲线, $C_1,\ldots,C_n$ 每一条都包含在其它闭路的外部, 而且它们都包含在 C_0 的内部. 这样它们围成了一个多连通区域 D, 它的边界称为一个复合闭路

$$C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-.$$

沿着 C 前进的点, D 总在它的左侧, 因此我们这样规定它的正方向.

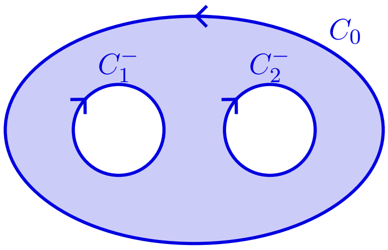


图 1.2: 复合闭路围成的区域

定理 1.9 (复合闭路定理)

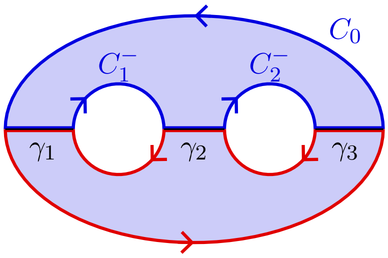
设 $f(z)$ 在复合闭路 $C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-$ 及其所围成的多连通区域内解析, 则

$$\oint_{C_0}f(z)\,\mathrm{d}z=\oint_{C_1}f(z)\,\mathrm{d}z+\cdots+\oint_{C_n}f(z)\,\mathrm{d}z.$$

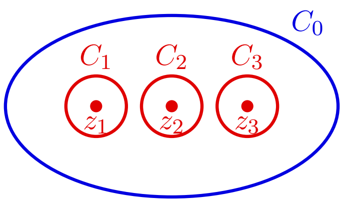
证明: 以曲线 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n+1}$ 把 $C_0,C_1,\ldots,C_n$ 连接起来, 则它们把区域 D 分成了两个单连通域 D_1,D_2. 对 D_1 和 D_2 的边界应用柯西积分定理并相加, 则 γ_i 对应的部分正好相互抵消, 因此

$$\oint_{C_0}f(z)\,\mathrm{d}z-\oint_{C_1}f(z)\,\mathrm{d}z-\cdots-\oint_{C_n}f(z)\,\mathrm{d}z=0.$$

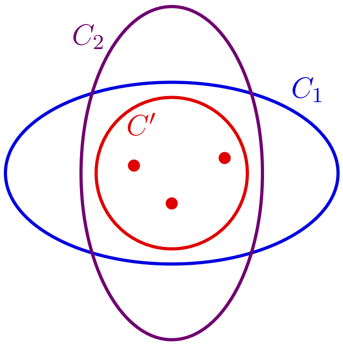
于是定理得证. □



在实际应用中, 如果被积函数 $f(z)$ 在闭路 C 的内部有有限多个奇点 $z_1,\dots,z_k$. 那么我们可以在 C 内部构造闭路 $C_1,\dots,C_k$, 使得每个 C_j 内部只包含一个奇点 z_j. 这样, 内部含多个奇点的情形就可以化成内部只含一个奇点的情形. 最后将这些闭路上的积分相加即可.



此外, 从复合闭路定理还可以看出, 在计算积分 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 时, C 的具体形状无关紧要, 只要其内部奇点不变, C 可以任意变形. 因为我们总可以选择一个包含这些奇点的闭路 C', 使得 C' 包含在 C 及其变形后的闭路内部. 这样它们的积分自然都和 C' 上的积分相同.



例 1.7 证明对于任意闭路 C, $\int_C (z-a)^n\,\mathrm{d}z = 0$, $n \neq -1$ 为整数.

证明: 如果 a 不在 C 的内部, 则 $(z-a)^n$ 在 C 及其内部解析. 由柯西积分定理, $\int_C (z-a)^n\,\mathrm{d}z = 0$.

如果 a 在 C 的内部, 则在 C 的内部取一个以 a 为圆心的圆周 C_1. 由复合闭路定理以及上一节的结论

$$\int_C (z-a)^n\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} (z-a)^n\,\mathrm{d}z = 0.$$ □

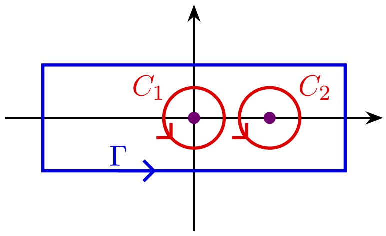
同理, 由复合闭路定理和上一节的结论可知当 a 在 C 的内部且 $n=-1$ 时积分为 $2\pi i$.

定理 1.10 (幂函数沿闭路的积分)

当 a 在 C 的内部时,

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0; \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}$$

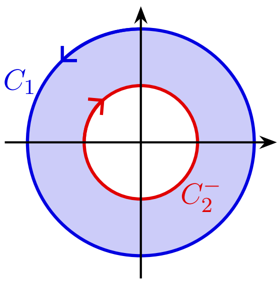
例 1.8 求 $\int_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$, 其中 Γ 是由 $2\pm i, -2\pm i$ 形成的矩形闭路.



解: 函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在 Γ 内有两个奇点 $z=0,1$. 设 C_1, C_2 如图所示, 由复合闭路定理

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z &= \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z \\ &= \oint_{C_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i + 0 + 0 + 2\pi i = 4\pi i.\end{aligned}$$

例 1.9 求 $\int_\Gamma \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Gamma = C_1 + C_2^-, C_1 : |z| = 2, C_2 : |z| = 1$.



解: 函数 $\frac{e^z}{z}$ 在 C_1, C_2 围城的圆环域内解析. 由复合闭路定理可知 $\int_\Gamma \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z = 0$.

§1.3 原函数和不定积分

§1.3.1 原函数

设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析, C 是 D 内一条起于 z_0 终于 z 的曲线. 由柯西-古萨基本定理可知, 积分 $\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 与路径无关, 只与 z_0, z 有关. 因此我们也将其记为 $\int_{z_0}^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$. 对于任意固定的 $z_0 \in D$, 函数

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

定义了一个单值函数.

定理 1.11 (原函数的存在性)

$F(z)$ 是 D 内的解析函数, 且 $F'(z) = f(z)$.

证明: 以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K, 取 $|\Delta z|$ 小于 K 的半径. 那么

$$F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

容易知道

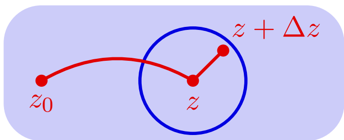
$$\int_z^{z+\Delta z} f(z)\,\mathrm{d}\zeta = f(z)\int_z^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta = f(z)\Delta z.$$

我们需要比较上述两个积分, 其中 z 到 $z+\Delta z$ 取直线. 由于 $f(z)$ 解析, 因此连续. $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ 使得当 $|\zeta-z|<\delta$ 时, z 落在 K 中且 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. 当 $|\Delta z|<\delta$ 时, 由长大不等式

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| &= \left|\int_z^{z+\Delta z}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\Delta z}\,\mathrm{d}\zeta\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\cdot|\Delta z| = \varepsilon.\end{aligned}$$

由于 ε 是任意的, 因此

$$f(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = F'(z). \qquad \square$$



§1.3.2 牛顿-莱布尼兹定理

定理 1.12 (牛顿-莱布尼兹定理)

设 $f(z)$ 在单连通区域 D 上解析, z_1 至 z_2 的积分路径落在 D 内, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_1)-F(z_2), \quad 其中 \quad F'(z)=f(z). \tag{1.1}$$

如果 D 上的解析函数 $G(z)$ 满足 $G'(z)=f(z)$, 则称 $G(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数. 由于导函数为 0 的解析函数只能是常值函数, 因此 $G(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z + C$. 我们称之为 $f(z)$ 的不定积分, 记为 $\int f(z)\,\mathrm{d}z$.

复变函数和实变函数的牛顿-莱布尼兹定理的差异在哪呢? 复变情形要求是单连通区域上解析函数, 实变情形要求是闭区间上连续函数.

例 1.10 求 $\int_{z_0}^{z_1} z\,\mathrm{d}z$.

解: 由于 $f(z)=z$ 处处解析, 且 $\int z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}z^2 + C$, 因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

因此之前的例子中 $\int_0^{3+4i} z\,\mathrm{d}z = -\frac{7}{2}+12i$, 无论从 0 到 $3+4i$ 的路径如何.

例 1.11 求 $\int_0^{\pi i} z\cos z^2\,\mathrm{d}z$.

解: 由于 $f(z)=z\cos z^2$ 处处解析, 且

$$\int z\cos z^2\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int \cos z^2\,\mathrm{d}z^2 = \frac{1}{2}\sin z^2 + C,$$

因此

$$\int_0^{\pi i} z\cos z^2\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\sin z^2\Big|_0^{\pi i} = -\frac{1}{2}\sin \pi^2.$$

这里我们使用了凑微分法.

例 1.12 求 $\int_0^i z\cos z\,\mathrm{d}z$.

解: 由于 $f(z)=z\cos z$ 处处解析, 且

$$\int z\cos z\,\mathrm{d}z=\int z\,\mathrm{d}(\sin z)=z\sin z-\int \sin z\,\mathrm{d}z=z\sin z+\cos z+C,$$

因此

$$\int_0^i z\cos z\,\mathrm{d}z=(z\sin z+\cos z)|_0^i=i\sin i+\cos i-1=e^{-1}-1.$$

这里我们使用了分部积分法.

例 1.13 求 $\int_1^{1+i} ze^z\,\mathrm{d}z$.

解: 由于 $f(z)=ze^z$ 处处解析, 且

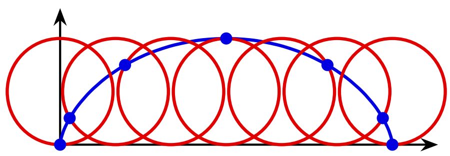
$$\int ze^z\,\mathrm{d}z=\int z\,\mathrm{d}e^z=ze^z-\int e^z\,\mathrm{d}z=(z-1)e^z+c,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_1^{1+i} ze^z\,\mathrm{d}z&=(z-1)e^z|_1^{1+i}\\&=ie^{1+i}=e(-\sin 1+i\cos 1).\end{aligned}$$

✍ **练习 1.3.1** 求 $\int_0^1 z\sin z\,\mathrm{d}z=$ ____ $\sin 1-\cos 1$ ____.

例 1.14 求 $\int_C(2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是摆线 $\begin{cases}x=a(\theta-\sin\theta),\\ y=a(1-\cos\theta),\end{cases}\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$



解: 由于 $f(z)=2z^2+8z+1$ 处处解析, 因此

$$\begin{aligned}\int_C(2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z&=\int_0^{2\pi a}(2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z\\&=\left(\frac{2}{3}z^3+4z^2+z\right)\Big|_0^{2\pi a}=\frac{16}{3}\pi^3a^3+16\pi^2a^2+2\pi a.\end{aligned}$$

例 1.15 设 C 为沿着 $|z|=1$ 从 1 到 i 的逆时针圆弧, 求 $\int_C\frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z$.

解: 函数 $f(z)=\dfrac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在 $\mathrm{Re}\,z\leqslant-1$ 外的单连通区域解析.

$$\int\frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z=\int\ln(z+1)\,\mathrm{d}[\ln(z+1)]=\frac{1}{2}\ln^2(z+1)+c.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C\frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z&=\frac{1}{2}\ln^2(z+1)|_1^i=\frac{1}{2}\left[\ln^2(1+i)-\ln^2 2\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i\right)^2-\ln^2 2\right]=-\frac{\pi^2}{32}-\frac{3}{8}\ln^2 2+\frac{\pi\ln 2}{8}i.\end{aligned}$$

§1.4 柯西积分公式

§1.4.1 柯西积分公式

柯西积分定理是解析函数理论的基础, 但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

定理 1.13 (柯西积分公式)

设

- 函数 $f(z)$ 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析,
- $z_0 \in D$,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z.$$

如果 $z_0 \notin D$, 由柯西-古萨基本定理, 右侧的积分是 0.

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设 $z = z_0 + Re^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z = iRe^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta.$$

证明: 由连续性可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z-z_0| \leqslant \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$. 设 $\Gamma : |z-z_0| = \delta$, 则

$$\begin{aligned}
&\left| \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0) \right| \xlongequal{\text{复合闭路定理}} \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0) \right| \\
=& \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z - \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z \right| = \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z \right| \\
\leqslant& \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon.
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} \, \mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$. □

从柯西积分公式可以看出, 被积函数分子解析而分母形如 $z - z_0$ 时, 绕闭路的积分可以使用该公式计算.

例 1.16 求 $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} \, \mathrm{d}z$.

解: 函数 $\sin z$ 处处解析. 取 $f(z) = \sin z, z_0 = 0$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} \, \mathrm{d}z = 2\pi i \sin z|_{z=0} = 0.$$

例 1.17 求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \, \mathrm{d}z$.

解: 由于函数 e^z 处处解析, 取 $f(z) = e^z, z_0 = 1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \, \mathrm{d}z = 2\pi i e^z|_{z=1} = 2\pi e i.$$

✍ **练习 1.4.1** 求 $\oint_{|z|=2\pi} \frac{\cos z}{z-\pi}\,\mathrm{d}z = \underline{-2\pi i}$.

例 1.18 设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$, 求 $f'(1+i)$.

解: 当 $|z| < \sqrt{3}$ 时, 由柯西积分公式得

$$f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i(3\zeta^2+7\zeta+1)|_{\zeta=z} = 2\pi i(3z^2+7z+1).$$

因此 $f'(z) = 2\pi i(6z+7)$,

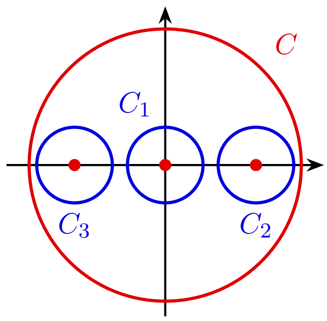
$$f'(1+i) = 2\pi i(13+6i) = -12\pi + 26\pi i.$$

注意当 $|z| > \sqrt{3}$ 时, $f(z) \equiv 0$.

例 1.19 求 $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z$.

解: 被积函数的奇点为 $0, \pm 1$. 设 C_1, C_2, C_3 分别为绕 $0, 1, -1$ 的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\begin{aligned}
&\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z \\
=&2\pi i \left[\frac{e^z}{z^2-1}\bigg|_{z=0} + \frac{e^z}{z(z+1)}\bigg|_{z=1} + \frac{e^z}{z(z-1)}\bigg|_{z=-1} \right] \\
=&2\pi i \left(-1 + \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = \pi i(e + e^{-1} - 2).
\end{aligned}$$



§1.4.2 高阶导数的柯西积分公式

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明**解析函数是任意阶可导的**.

定理 1.14 (柯西积分公式)

设函数 $f(z)$ 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析, 则对任意 $z_0 \in D$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

假如 $f(z)$ 有泰勒展开

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots$$

那么由 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$ 的性质可知上述公式右侧应当为 $f^{(n)}(z_0)$.

证明: 先证明 $n=1$ 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离. 当 $|h| < \delta$ 时, $z_0 + h \in D$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z, \quad f(z_0+h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-h}\,\mathrm{d}z.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z.$$

当 $h\to 0$ 时, 左边的极限是 $f'(z_0)$. 因此我们只需要证明右边的极限等于 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z$. 二者之差 $=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)|\leqslant M$. 注意到 $z\in C$, $|z-z_0|\geqslant\delta$, $|z-z_0-h|\geqslant\delta-|h|$. 由长大不等式,

$$\left|\oint_C\frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)}\cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h\to 0$ 时, 它的极限为 0, 因此 $n=1$ 情形得证.

对于一般的 n, 我们通过归纳法将 $f^{(n)}(z_0)$ 和 $f^{(n)}(z_0+h)$ 表达为积分形式. 比较 $\frac{f^{(n)}(z_0+h)-f^{(n)}(z_0)}{h}$ 与积分公式右侧之差, 并利用长大不等式证明 $h\to 0$ 时, 差趋于零. 具体过程省略. □

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的, 而是用高阶导数来计算积分的.

例 1.20 求 $\oint_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z$.

解: 由于 $\cos(\pi z)$ 处处解析, 因此由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{4!}[\cos(\pi z)]^{(4)}\Big|_{z=1}=\frac{2\pi i}{24}\cdot\pi^4\cos\pi=-\frac{\pi^5 i}{12}.$$

例 1.21 求 $\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$.

解: $\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 $|z|<2$ 的奇点为 $z=\pm i$. 取 C_1,C_2 为以 $i,-i$ 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理,

$$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z.$$

由柯西积分公式,

$$\begin{aligned}\oint_{C_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z&=\frac{2\pi i}{1}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Big|_{z=i}\\&=2\pi i\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}-\frac{2e^z}{(z+i)^3}\right]\Big|_{z=i}=\frac{(1-i)e^i\pi}{2}.\end{aligned}$$

类似地, $\oint_{C_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{-(1+i)e^{-i}\pi}{2}$. 故

$$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{(1-i)e^i\pi}{2}+\frac{-(1+i)e^{-i}\pi}{2}=\pi i(\sin 1-\cos 1).$$

例 1.22 求 $\oint_{|z|=1}z^ne^z\,\mathrm{d}z$, 其中 n 是整数.

解: 当 $n\geqslant 0$ 时, z^ne^z 处处解析. 由柯西-古萨基本定理,

$$\oint_{|z|=1}z^ne^z\,\mathrm{d}z=0.$$

当 $n\leqslant -1$ 时, e^z 处处解析. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=1}z^ne^z\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{(-n-1)!}(e^z)^{(-n-1)}\Big|_{z=0}=\frac{2\pi i}{(-n-1)!}.$$

例 1.23 求 $\oint_{|z-3|=2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z$ 和 $\oint_{|z-1|=2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z$.

解: (1) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-3|<2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z^3}\right)'\Big|_{z=2}=-\frac{3\pi i}{8}.$$

(2) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-1|<3$ 的奇点为 $z=0,2$. 取 C_1,C_2 分别为以 0 和 2 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式,

$$\begin{aligned}\oint_{|z-1|=3}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z&=\oint_{C_1}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z\\&=\frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right]''\Big|_{z=0}+\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z^3}\right)'\Big|_{z=2}=0.\end{aligned}$$

✍ **练习 1.4.2** $\displaystyle\oint_{|z-2i|=3}\frac{1}{z^2(z-i)}\,\mathrm{d}z=$ __0__.

例 1.24 莫累拉定理 设 $f(z)$ 在单连通域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

该定理可视作柯西-古萨基本定理的逆定理.

证明: 由题设可知 $f(z)$ 的积分与路径无关. 固定 $z_0\in D$, 则

$$F(z)=\int_{z_0}^{z}f(z)\,\mathrm{d}z$$

定义了 D 内的一个函数. 类似于原函数的证明可知 $F'(z)=f(z)$. 故 $f(z)$ 作为解析函数 $F(z)$ 的导数也是解析的. □

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数 $f(z)$ 只要在区域 D 中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在 D 中解析. **这一点与实变量函数有本质的区别.**

同时我们也可以看出, 如果一个二元实函数 $u(x,y)$ 是一个解析函数的实部或虚部, 则 u 也是具有任意阶偏导数. 这便引出了调和函数的概念.

§1.5 解析函数与调和函数的关系

§1.5.1 调和函数

调和函数是一类重要的二元实变函数, 它和解析函数有着紧密的联系. 为了简便, 我们用 u_{xx},u_{yy} 来表示二阶偏导数.

定义 1.15

如果二元实变函数 $u(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数, 且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u:=u_{xx}+u_{yy}=0,$$

则称 $u(x,y)$ 是 D 内的调和函数.

定理 1.16

区域 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数.

证明: 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, 则 u,v 存在偏导数且

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y.$$

由于 $f(z)$ 任意阶可导, 因此 u,v 存在任意阶偏导数. 由 C-R 方程 $u_x=v_y, u_y=-v_x$ 可知

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=v_{yx}-v_{xy}=0,$$

$$\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=-u_{yx}+u_{xy}=0.$$

□

§1.5.2 共轭调和函数

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

如果 $u+iv$ 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的共轭调和函数. 换言之 $u_x=v_y, u_y=-v_x$. 显然 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

定理 1.17

设 $u(x,y)$ 是单连通域 D 内的调和函数, 则线积分

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u_y\,\mathrm{d}x+u_x\,\mathrm{d}y+C$$

是 u 的共轭调和函数.

由此可知, 区域 D 上的调和函数在 $z\in D$ 的一个邻域内是一解析函数的实部, 从而在该邻域内具有任意阶连续偏导数. 而 z 的任取的, 因此调和函数总具有任意阶连续偏导数.

如果 D 是多连通区域, 则未必存在共轭调和函数. 例如 $\ln(x^2+y^2)$ 是复平面去掉原点上的调和函数, 但它并不是某个解析函数的实部. 事实上, 它是 $2\,\mathrm{Ln}\,z$ 的实部.

在实际计算中, 我们一般不用线积分来得到共轭调和函数, 而是采用下述两种办法:

定理 1.18 (偏积分法)

通过 $v_y=u_x$ 解得 $v=\varphi(x,y)+\psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y=-v_x$ 中解出 $\psi(x)$.

定理 1.19 (不定积分法)

对 $f'(z)=u_x-iu_y=v_y+iv_x$ 求不定积分得到 $f(z)$.

例 1.25 证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解: 由 $u_x=-6xy, u_y=3y^2-3x^2$ 可知 $u_{xx}+u_{yy}=-6y+6y=0$, 故 u 是调和函数.

由 $v_y=u_x=-6xy$ 得 $v=-3xy^2+\psi(x)$.

由 $v_x=-u_y=3x^2-3y^2$ 得 $\psi'(x)=3x^2$,$\psi(x)=x^3+C$.

故 $v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$,

$$f(z)=u+iv=y^3-3x^2y+i(-3xy^2+x^3+C)=i(x+iy)^3+iC=i(z^3+C).$$

当解析函数 $f(z)$ 为 x,y 的多项式形式时, 将 m 次齐次的项放一起, 则 x^m 的系数就是 $f(z)$ 中 z^m 的系数.

在上例中我们也可由另一种方法计算得到:

$$f'(z)=u_x-iu_y=-6xy-i(3y^2-3x^2)=3iz^2.$$

因此 $f(z)=iz^3+C$.

例 1.26 求解析函数 $f(z)$ 使得它的虚部为

$$v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y.$$

解: 由 $u_x=v_y=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1$ 得

$$u=e^x(x\cos y-y\sin y)+x+\psi(y).$$

由 $u_y=-v_x=-e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)-1$ 得

$$\psi'(y)=-1,\quad \psi(y)=-y+C.$$

故

$$\begin{aligned}f(z)&=u+iv\\&=e^x(x\cos y-y\sin y)+x-y+C+i\big[e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y\big]\\&=ze^z+(1+i)z+C,\quad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

这里, 我们只需看 $e^x\cos y$ 的系数 $x+iy=z$, 即 $f(z)$ 中 e^z 的系数.

也可由

$$\begin{aligned}f'(z)&=v_y+iv_x\\&=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1+i\big[e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)+1\big]\\&=(z+1)e^z+1+i.\end{aligned}$$

得 $f(z)=ze^z+(1+i)z+C$.

✍ **练习 1.5.1** 证明 $u(x,y)=x^3-6x^2y-3xy^2+2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

作业

一、选择题.

1. 设 C 为正向圆周 $|\zeta|=2$, $f(z)=\oint_C \frac{\sin\zeta}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=(\quad)$.

   (A) πi　　(B) $-\pi i$　　(C) 0　　(D) $2\pi i$

2. 下列命题中, 正确的是 (　).

   (A) 设 v_1, v_2 在区域 D 内均为 u 的共轭调和函数, 则必有 $v_1=v_2$

   (B) 解析函数的实部是虚部的共轭调和函数

   (C) 以调和函数为实部与虚部的函数是解析函数

   (D) 若 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则 u_x 为 D 内的调和函数

二、填空题.

1. 设 $f(z)$ 在单连通区域 D 内处处解析且不为零, 则 $\oint_C \frac{f''(z)+2f'(z)+f(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=$_____, 其中 C 为 D 内一条闭路.
2. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 则 $\oint_C \overline{z}\,\mathrm{d}z=$_____.
3. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 则 $\oint_C \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\mathrm{d}z=$_____.
4. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 则 $\oint_C \frac{\overline{z}}{|z|}\,\mathrm{d}z=$_____.

三、计算题.

1. 利用积分曲线的参数方程求 $\int_C z^2\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为:

   (1) 从 0 到 $3+i$ 的直线段;

   (2) 从 0 到 3 再到 $3+i$ 的折线段.

2. 试用观察法得出下列积分的值, 并说明为什么, 其中 $C:|z|=1$.

   (1) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-2}$;　(2) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\cos z}$;　(3) $\oint_C \frac{e^z}{(z-2i)^2}\,\mathrm{d}z$;

   (4) $\oint_C e^z\sin z\,\mathrm{d}z$;　(5) $\oint_C \frac{1}{\overline{z}}\,\mathrm{d}z$;　(6) $\oint_C (|z|+e^z\cos z)\,\mathrm{d}z$.

3. 设 C 为正向圆周 $|z|=4$, 求 $\oint_C \frac{\sin z}{|z|^2}\,\mathrm{d}z$.
4. 设 C 为从原点到 $1+i$ 的直线段, 求 $\int_C (z+1)^2\,\mathrm{d}z$.
5. 设 C 为从 i 到 $i-\pi$ 再到 $-\pi$ 的折线, 求 $\int_C \cos^2 z\,\mathrm{d}z$.
6. 设 C 为从原点到 2 再到 $2+i$ 的折线段, 求 $\int_C z^2\,\mathrm{d}z$.
7. 求 $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}\,\mathrm{d}z$.
8. 求 $\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z\,\mathrm{d}z$.

9. 求 $\displaystyle\int_0^i (z-i)e^{-z}\,\mathrm{d}z$.
10. 设 C 为正向圆周 $|z-2|=1$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{z-2}\,\mathrm{d}z$.
11. 设 C 为正向圆周 $|z|=r<1$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)(z^3-1)}$.
12. 设 C 为以 $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{6}{5}i$ 为顶点的菱形, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z$.
13. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,\mathrm{d}z$.
14. 设 C 为正向圆周 $|z-3|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z$.
15. 设 C_1 为正向圆周 $|z|=2$, C_2^- 为负向圆周 $|z|=3$, $C=C_1+C_2^-$ 为复合闭路, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\cos z}{z^3}\,\mathrm{d}z$.
16. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}z$.
17. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\cos z}{z^{2023}}\,\mathrm{d}z$.
18. 设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\ln(z+2)}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z$.
19. 设 C 为正向圆周 $|\zeta|=2$, $f(z)=\displaystyle\oint_C \frac{\zeta^3+\zeta+1}{(z-\zeta)^2}\,\mathrm{d}\zeta$. 求 $f'(1+i)$ 和 $f'(4)$.
20. 已知 $v(x,y)=x^3+y^3-axy(x+y)$ 为调和函数, 求参数 a 以及解析函数 $f(z)$ 使得 $v(x,y)$ 是它的虚部.
21. 已知 $f(z)=x^2+2xy-y^2+i(y^2+axy-x^2)$ 为解析函数, 求参数 a 和 $f'(z)$.
22. 已知 $f(z)=y^3+ax^2y+i(bx^3-3xy^2)$ 为解析函数, a,b 为实数, 求参数 a,b 和 $f'(z)$.
23. 设 u 为区域 D 内的调和函数, $f(z)=u_x-iu_y$. 那么 $f(z)$ 是不是 D 内的解析函数? 为什么?
24. 请谈一谈复积分与实积分的区别.

四、证明题.

1. 设 C_1 和 C_2 为两条分离的闭路, 证明
$$\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2\,\mathrm{d}z}{z-z_0}+\oint_{C_2}\frac{\sin z\,\mathrm{d}z}{z-z_0}\right]=\begin{cases} z_0^2, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_1 \text{ 内时,}\\ \sin z_0, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_2 \text{ 内时.}\end{cases}$$
2. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内任意一条闭路, 且 C 的内部完全包含在 D 中. 如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有的点处成立, 证明在 C 内部所有点处 $f(z)=g(z)$ 也成立.
3. 证明: 一对共轭调和函数的乘积仍为调和函数.

五、扩展阅读. 该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到任课教师邮箱.

1. 设 $f(z)=u+iv$. 当 u,v 是二元可微函数时, 我们也可以使用格林公式来计算 $f(z)$ 绕闭路的积分.

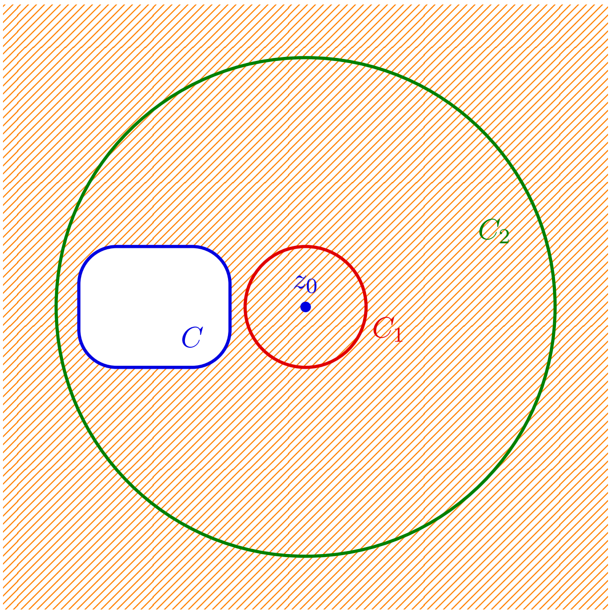
   (1) 设 C 是一条光滑或逐段光滑的闭路, D 是其内部区域. 函数 $u(x,y), v(x,y)$ 在 D 及其边界上连续可微. 证明
   $$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=-\iint_D (v_x+u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+i\iint_D (u_x-v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
   并由此计算 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z$.

(2) 证明

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z} = 2i\iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

并由此计算 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z$.

2. 设 $f(z)$ 在闭路 C 及其外部区域 D 解析, $z_0 \in D$. 是否有类似的柯西积分公式? 我们假设 $\displaystyle\lim_{z\to\infty} f(z) = A$ 存在.



(1) 选取以 z_0 为圆心的圆 C_1, C_2 如图所示. 利用长大不等式证明 $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = A$.

(2) 利用复合闭路定理证明 $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = A - f(z_0)$.

练习 参考答案

1.1.1.1 $-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$.

1.1.2.1 (1) 0; (2) 0.

1.3.1.5 $v(x,y)=2x^3+3x^2y-6xy^2-y^3+C$.