



合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: <https://zhangshenxing.gitee.io>

第三章 复变函数的积分

- ① 复变函数积分的概念
- ② 柯西-古萨基本定理和复合闭路定理
- ③ 原函数和不定积分
- ④ 柯西积分公式
- ⑤ 解析函数与调和函数的关系

第一节 复变函数积分的概念

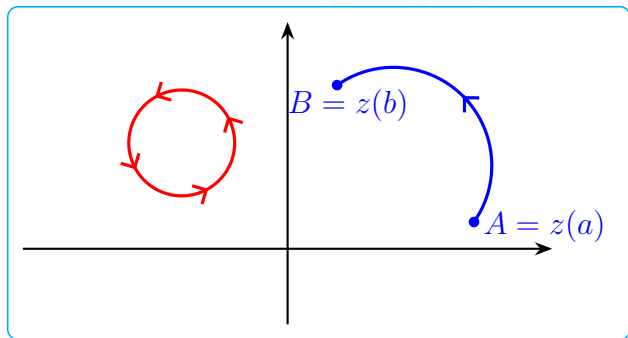
- 复变函数积分的定义
- 复变函数积分的算法

有向曲线

设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z = z(t), a \leq t \leq b$ 除去有限个点之外都有非零导数.

固定它的一个方向, 称为**正方向**, 则我们得到一条**有向曲线**. 和这条曲线方向相反的记作 C^- , 它的方向被称为该曲线**负方向**.

对于闭路, 它的**正方向总是指逆时针方向**, 负方向总是指顺时针方向. 以后我们不加说明的话**默认是正方向**.



复变函数积分的定义

所谓的复变函数积分, 本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 定义在区域 D 内, 有向曲线 C 包含在 D 中. 形式地展开

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy) = (u dx - v dy) + i(u dy + v dx).$$

定义

如果下述右侧两个线积分均存在, 则定义

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

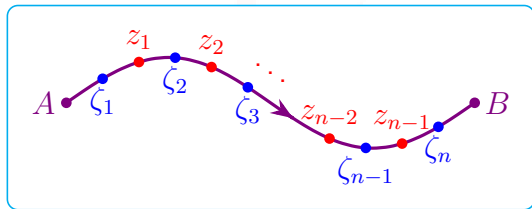
为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分.

复变函数积分的定义

当然, 我们也可以像线积分那样通过分割来定义. 在曲线 C 上依次选择分点 $z_0 = A, z_1, \dots, z_n = B$. 然后在每一段弧上任取 $\zeta_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$ 并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

然后称 $n \rightarrow \infty$, 分割的弧长 $\rightarrow 0$ 时 S_n 的极限为复变函数积分. 这二者是等价的.



如果 C 是闭曲线, 则该积分记为 $\oint_C f(z) dz$. 此时该积分不依赖端点的选取.

如果 C 是实轴上的区间 $[a, b]$ 且 $f(z) = u(x)$, 则

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b u(x) dx$$

就是黎曼积分.

根据线积分的存在性条件可知:

定理

如果 $f(z)$ 在 D 内连续, C 是光滑曲线, 则 $\int_C f(z) dz$ 总存在.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C : z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向. 则 $dz = z'(t) dt$,

复变函数积分的一般计算方法

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) z'(t) dt.$$

如果 C 的正方向是从 $z(b)$ 到 $z(a)$, 则需要交换右侧积分的上下限.

如果 C 是逐段光滑的, 则相应的积分就是各段的积分之和. 以后我们只考虑逐段光滑曲线上的连续函数的积分.

典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

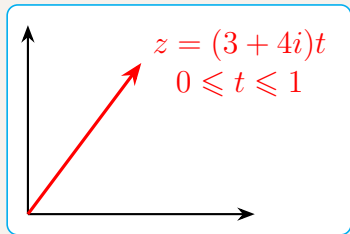
例

求 $\int_C z dz$, 其中 C 是从原点到点 $3 + 4i$ 的直线段.

解

由于 $z = (3 + 4i)t, 0 \leq t \leq 1$, 因此

$$\begin{aligned}\int_C z dz &= \int_0^1 (3 + 4i)t \cdot (3 + 4i) dt \\ &= (3 + 4i)^2 \int_0^1 t dt \\ &= \frac{1}{2}(3 + 4i)^2 = -\frac{7}{2} + 12i.\end{aligned}$$



典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

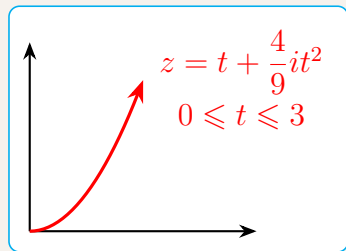
例

求 $\int_C z dz$, 其中 C 是抛物线 $y = \frac{4}{9}x^2$ 上从原点到点 $3 + 4i$ 的曲线段.

解

由于 $z = t + \frac{4}{9}it^2, 0 \leq t \leq 3$, 因此

$$\begin{aligned}\int_C z dz &= \int_0^3 \left(t + \frac{4}{9}it^2\right) \cdot \left(1 + \frac{8}{9}it\right) dt \\&= \int_0^3 \left(t + \frac{4}{3}it^2 - \frac{32}{81}t^3\right) dt \\&= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{9}it^3 - \frac{8}{81}t^4\right) \Big|_0^3 = -\frac{7}{2} + 12i.\end{aligned}$$



典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

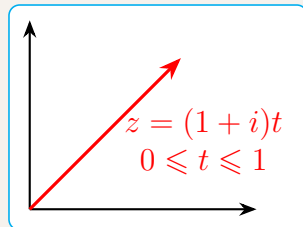
例

求 $\int_C \operatorname{Re} z \, dz$, 其中 C 是从原点到点 $1+i$ 的直线段.

解

由于 $z = (1+i)t, 0 \leq t \leq 1$, 因此 $\operatorname{Re} z = t$,

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{Re} z \, dz &= \int_0^1 t \cdot (1+i) \, dt \\ &= (1+i) \int_0^1 t \, dt \\ &= \frac{1+i}{2}.\end{aligned}$$



典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

例

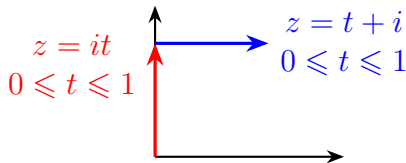
求 $\int_C \operatorname{Re} z \, dz$, 其中 C 是从原点到点 i 再到 $1+i$ 的折线段.

解

第一段 $z = it, 0 \leq t \leq 1, \operatorname{Re} z = 0$,

第二段 $z = t + i, 0 \leq t \leq 1, \operatorname{Re} z = t$. 因此

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}.$$

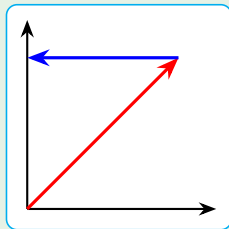


典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

可以看出, 即便起点和终点相同, 沿不同路径 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 的积分也可能不同. 而 $f(z) = z$ 的积分则只和起点和终点位置有关, 与路径无关. 原因在于 $f(z) = z$ 是处处解析的, 我们以后会详加解释.

练习

求 $\int_C \operatorname{Im} z \, dz = \underline{-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}}$, 其中 C 是从原点沿 $y = x$ 到点 $1 + i$ 再到 i 的折线段.



例题：计算复变函数沿圆周的积分

例

求 $\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$, 其中 n 为整数.

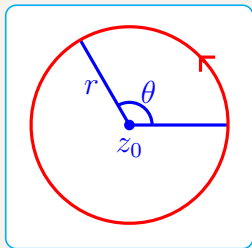
解

$C: |z-z_0|=r$ 的参数方程为 $z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.
于是 $dz = ire^{i\theta} d\theta$,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} i(re^{i\theta})^{-n} d\theta = ir^{-n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta.$$

当 $n=0$ 时, 该积分值为 $2\pi i$.

当 $n \neq 0$ 时, 该积分值 $= \left. \frac{ir^{-n}}{-in} e^{-in\theta} \right|_0^{2\pi} = 0$.



例题：计算复变函数沿圆周的积分

所以

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

这个积分以后经常用到，它的特点是积分值与圆周的圆心和半径都无关。

定理

$$(1) \int_C f(z) dz = - \int_{C^-} f(z) dz.$$

$$(2) \int_C k f(z) dz = k \int_C f(z) dz.$$

$$(3) \int_C [f(z) \pm g(z)] dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz.$$

(4) (长大不等式) 设 C 的长度为 L , $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \leq M$, 则

线性性质

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq ML.$$

证明

我们来证明下(4). 由

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k) \Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \Delta s_k \leq M \sum_{k=1}^n \Delta s_k$$

可知

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| ds \leq ML.$$

□

长大不等式常常用于证明等式: 估算一个积分和一个具体的数值之差不超过任意给定的 ε , 从而得到二者相等.

例

设 $f(z)$ 在 $z \neq a$ 处连续, 且 $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = k$, 则

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz = 2\pi i k.$$

证明

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - a| < \delta$ 时, $|(z - a)f(z) - k| \leq \varepsilon$. 当 $0 < r < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \oint_{|z-a|=r} f(z) dz - 2\pi i k \right| &= \left| \oint_{|z-a|=r} \left[f(z) - \frac{k}{z-a} \right] dz \right| \\ &= \left| \oint_{|z-a|=r} \frac{(z-a)f(z) - k}{z-a} dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 ε 是任意的, 因此命题得证. □

第二节 柯西-古萨基本定理和复合闭路定理

- 柯西-古萨基本定理
- 复合闭路定理

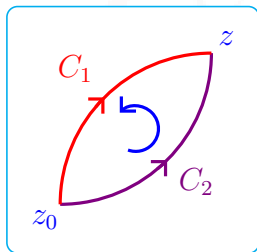
积分路径无关与闭路积分

观察下方的两条曲线 C_1, C_2 . 设 $C = C_1^- + C_2$. 可以看出

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \iff$$

$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz = 0.$$

所以 $f(z)$ 的积分只与起点终点有关 $\iff f(z)$ 绕任意闭路的积分为零.



上一节中我们计算了 $f(z) = z, \operatorname{Re} z, \frac{1}{z - z_0}$ 的积分. 其中

- $f(z) = z$ 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ 有奇点 z_0 , 沿绕 z_0 闭路的积分非零;
- $f(z) = \operatorname{Re} z$ 处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分非零).

由此可见函数沿闭路积分为零, 与函数在闭路内部是否解析有关.

柯西-古萨基本定理: 推导

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 $f(z)$ 在闭区域 $\bar{D} = D \cup C$ 上解析, 即存在区域 $B \supseteq \bar{D}$ 使得 $f(z)$ 在 B 上解析.

为了简便假设 $f'(z)$ 连续, 则

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy).$$

由格林公式和 C-R 方程可知

$$\oint_C f(z) dz = - \iint_D (v_x + u_y) dx dy + i \iint_D (u_x - v_y) dx dy = 0.$$

柯西-古萨基本定理

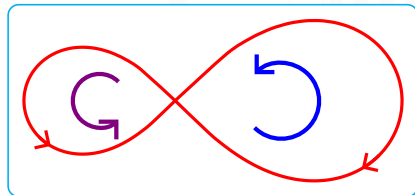
柯西-古萨基本定理

设 $f(z)$ 在闭路 C 上连续, C 内部解析, 则 $\oint_C f(z) dz = 0$.

推论

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条闭合曲线 (可以不是闭路), 则 $\oint_C f(z) dz = 0$.

这是因为即使不是简单曲线也可以拆分为一些简单曲线.



典型例题：柯西-古萨基本定理计算积分

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz.$$

解

由于 $\frac{1}{2z-3}$ 在 $|z| \leq 1$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz = 0.$$

练习

$$\text{求 } \oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z^2+z} dz = \underline{0}.$$

例题：柯西-古萨基本定理计算积分

例

求 $\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz$, 其中 $C: |z-i| = \frac{1}{2}$.

解

注意到 $\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right)$. 由于 $\frac{1}{z}, \frac{1}{z+i}$ 在 $|z-i| \leq \frac{1}{2}$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理

$$\oint_C \frac{1}{z} dz = \oint_C \frac{1}{z+i} dz = 0,$$

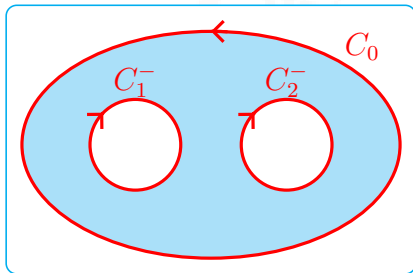
$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz = -\frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{z-i} dz = -\pi i.$$

多连通域边界与复合闭路

设 C_0, C_1, \dots, C_n 是 $n+1$ 条简单闭曲线, C_1, \dots, C_n 每一条都包含在其它闭路的外部, 而且它们都包含在 C_0 的内部. 这样它们围成了一个多连通区域 D , 它的边界称为一个**复合闭路**

$$C = C_0 + C_1^- + \dots + C_n^-.$$

沿着 C 前进的点, D 总在它的左侧, 所以这就是它的正方向.



复合闭路定理

设 $f(z)$ 在复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 及其所围成的多连通区域内解析, 则

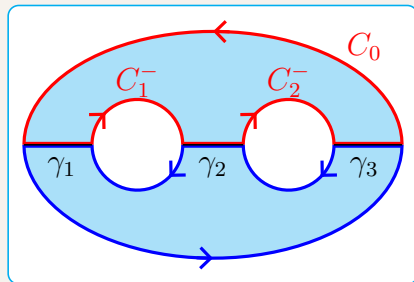
$$\oint_{C_0} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z) dz.$$

证明

以曲线 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$ 把 C_0, C_1, \dots, C_n 连接起来, 则它们把区域 D 分成了两个单连通域 D_1, D_2 . 对 D_1 和 D_2 的边界应用柯西积分定理并相加, 则 γ_i 对应的部分正好相互抵消, 因此

$$\oint_{C_0} f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz - \dots - \oint_{C_n} f(z) dz = 0.$$

于是定理得证. □



例题：复合闭路定理的应用

例

证明对于任意闭路 C , $\int_C (z-a)^n dz = 0$, $n \neq -1$ 为整数.

证明

如果 a 不在 C 的内部, 则 $(z-a)^n$ 在 C 及其内部解析. 由柯西积分定理,
 $\int_C (z-a)^n dz = 0$.

如果 a 在 C 的内部, 则在 C 的内部取一个以 a 为圆心的圆周 C_1 . 由复合闭路定理以及上一节的结论

$$\int_C (z-a)^n dz = \int_{C_1} (z-a)^n dz = 0.$$

□

例题：复合闭路定理的应用

同理, 由复合闭路定理和上一节的结论可知当 a 在 C 的内部且 $n = -1$ 时积分为 $2\pi i$.

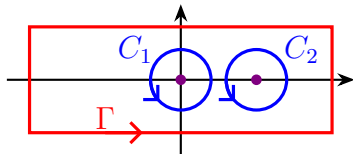
当 a 在 C 的内部时,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

例题：复合闭路定理的应用

例

求 $\int_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$, 其中 Γ 是由 $2 \pm i, -2 \pm i$ 形成的矩形闭路.



解

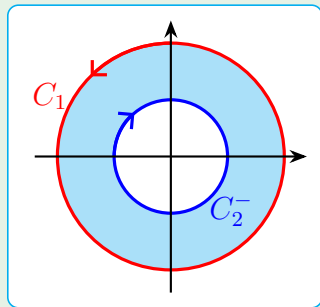
函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在 Γ 内有两个奇点 $z=0, 1$. 设 C_1, C_2 如图所示, 由复合闭路定理

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz &= \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z} dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz \\ &= \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z-1} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1} dz \\ &= 2\pi i + 0 + 0 + 2\pi i = 4\pi i. \end{aligned}$$

例题：复合闭路定理的应用

例

求 $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} dz$, 其中 $\Gamma = C_1 + C_2^-$, $C_1 : |z| = 2, C_2 : |z| = 1$.



解

函数 $\frac{e^z}{z}$ 在 C_1, C_2 围城的圆环域内解析. 由复合闭路定理可知 $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} dz = 0$.

第三节 原函数和不定积分

- 原函数
- 牛顿-莱布尼兹定理

原函数的存在性

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条起于 z_0 终于 z 的曲线. 由柯西-古萨基本定理可知, 积分 $\int_C f(\zeta) d\zeta$ 与路径无关, 只与 z_0, z 有关. 因此我们也将其记为 $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$.

对于任意固定的 $z_0 \in D$, 函数

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

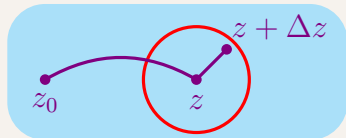
定义了一个单值函数.

定理

$F(z)$ 是 D 内的解析函数, 且 $F'(z) = f(z)$.

证明

以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K ,
取 $|\Delta z|$ 小于 K 的半径. 那么



$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta.$$

容易知道

$$\int_z^{z + \Delta z} f(z) d\zeta = f(z) \int_z^{z + \Delta z} d\zeta = f(z) \Delta z.$$

我们需要比较上述两个积分, 其中 z 到 $z + \Delta z$ 取直线.

续证

由于 $f(z)$ 解析, 因此连续. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|\zeta - z| < \delta$ 时, z 落在 K 中且 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. 当 $|\Delta z| < \delta$ 时, 由长大不等式

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \left| \int_z^{z+\Delta z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\Delta z} d\zeta \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \cdot |\Delta z| = \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 ε 是任意的, 因此

$$f(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = F'(z).$$



牛顿-莱布尼兹定理

设 $f(z)$ 在单连通区域 D 上解析, z_1 至 z_2 的积分路径落在 D 内, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_1) - F(z_2), \quad \text{其中 } F'(z) = f(z).$$

如果 D 上的解析函数 $G(z)$ 满足 $G'(z) = f(z)$, 则称 $G(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数. 由于导函数为 0 的解析函数只能是常值函数, 因此 $G(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz + C$.

我们称之为 $f(z)$ 的不定积分, 记为 $\int f(z) dz$.

复变函数和实变函数的牛顿-莱布尼兹定理的差异在哪呢? 复变情形要求是单连通区域上解析函数, 实变情形要求是闭区间上连续函数.

典型例题：利用原函数求积分

例

求 $\int_{z_0}^{z_1} z \, dz$.

解

由于 $f(z) = z$ 处处解析, 且 $\int z \, dz = \frac{1}{2}z^2 + C$, 因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z \, dz = \frac{1}{2}z^2 \Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_0^2).$$

因此之前的例子中 $\int_0^{3+4i} z \, dz = -\frac{7}{2} + 12i$, 而无论从 0 到 $3+4i$ 的路径如何.

典型例题：利用原函数求积分

例

求 $\int_0^{\pi i} z \cos z^2 dz$.

解

由于 $f(z) = z \cos z^2$ 处处解析, 且

$$\int z \cos z^2 dz = \frac{1}{2} \int \cos z^2 dz^2 = \frac{1}{2} \sin z^2 + C,$$

因此

$$\int_0^{\pi i} z \cos z^2 dz = \frac{1}{2} \sin z^2 \Big|_0^{\pi i} = -\frac{1}{2} \sin \pi^2.$$

这里我们使用了**凑微分法**.

典型例题：利用原函数求积分

例

求 $\int_0^i z \cos z \, dz$.

解

由于 $f(z) = z \cos z$ 处处解析, 且

$$\begin{aligned}\int z \cos z \, dz &= \int z \, d(\sin z) = z \sin z - \int \sin z \, dz \\ &= z \sin z + \cos z + C,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^i z \cos z \, dz &= (z \sin z + \cos z) \Big|_0^i \\ &= i \sin i + \cos i - 1 = e^{-1} - 1.\end{aligned}$$

这里我们使用了分部积分法.

典型例题：利用原函数求积分

例

求 $\int_1^{1+i} ze^z dz$.

解

由于 $f(z) = ze^z$ 处处解析, 且

$$\int ze^z dz = \int z de^z = ze^z - \int e^z dz = (z-1)e^z + c,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_1^{1+i} ze^z dz &= (z-1)e^z \Big|_1^{1+i} \\ &= ie^{1+i} = e(-\sin 1 + i \cos 1).\end{aligned}$$

典型例题：利用原函数求积分

练习

求 $\int_0^1 z \sin z \, dz = \underline{\sin 1 - \cos 1}$.

典型例题：利用原函数求积分

例

设 C 为沿着 $|z| = 1$ 从 1 到 i 的逆时针圆弧, 求 $\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$.

解

函数 $f(z) = \frac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在 $\operatorname{Re} z \leq -1$ 外的单连通区域解析.

$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \int \ln(z+1) d[\ln(z+1)] = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) + c.$$

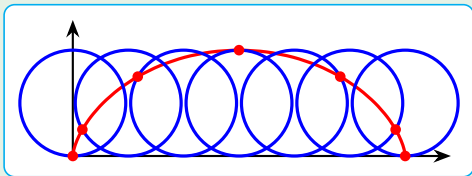
因此

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz &= \frac{1}{2} \ln^2(z+1) \Big|_1^i = \frac{1}{2} [\ln^2(1+i) - \ln^2 2] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i \right)^2 - \ln^2 2 \right] = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8} \ln^2 2 + \frac{\pi \ln 2}{8} i. \end{aligned}$$

典型例题：利用原函数求积分

例

求 $\int_C (2z^2 + 8z + 1) dz$, 其中 C 是摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta), \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$



解

由于 $f(z) = 2z^2 + 8z + 1$ 处处解析, 因此

$$\begin{aligned} \int_C (2z^2 + 8z + 1) dz &= \int_0^{2\pi a} (2z^2 + 8z + 1) dz \\ &= \left(\frac{2}{3} z^3 + 4z^2 + z \right) \Big|_0^{2\pi a} = \frac{16}{3} \pi^3 a^3 + 16\pi^2 a^2 + 2\pi a. \end{aligned}$$

第四节 柯西积分公式

- 柯西积分公式
- 高阶导数的柯西积分公式

柯西积分定理是解析函数理论的基础,但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式

设

- 函数 $f(z)$ 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析,
- $z_0 \in D$,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

如果 $z_0 \notin D$, 由柯西-古萨基本定理, 右侧的积分是 0.

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设 $z = z_0 + Re^{i\theta}$, 则 $dz = iRe^{i\theta} d\theta$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

证明

由连续性可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| \leq \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.
设 $\Gamma: |z - z_0| = \delta$, 则

$$\begin{aligned} & \left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| \xrightarrow{\text{复合闭路定理}} \left| \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| \\ &= \left| \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_{\Gamma} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \right| = \left| \oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知 $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$. □

典型例题：柯西积分公式的应用

从柯西积分公式可以看出, 被积函数分子解析而分母形如 $z - z_0$ 时, 绕闭路的积分可以使用该公式计算.

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz.$$

解

函数 $\sin z$ 处处解析. 取 $f(z) = \sin z, z_0 = 0$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i \sin z|_{z=0} = 0.$$

典型例题：柯西积分公式的应用

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz.$$

解

由于函数 e^z 处处解析, 取 $f(z) = e^z, z_0 = 1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i e^z|_{z=1} = 2\pi e i.$$

练习

$$\text{求 } \oint_{|z|=2\pi} \frac{\cos z}{z-\pi} dz = \underline{-2\pi i}.$$

典型例题：柯西积分公式的应用

例

设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta$, 求 $f'(1+i)$.

解

当 $|z| < \sqrt{3}$ 时, 由柯西积分公式得

$$\begin{aligned} f(z) &= \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta \\ &= 2\pi i(3\zeta^2 + 7\zeta + 1)|_{\zeta=z} = 2\pi i(3z^2 + 7z + 1). \end{aligned}$$

因此 $f'(z) = 2\pi i(6z + 7)$,

$$f'(1+i) = 2\pi i(13 + 6i) = -12\pi + 26\pi i.$$

注意当 $|z| > \sqrt{3}$ 时, $f(z) \equiv 0$.

典型例题：柯西积分公式的应用

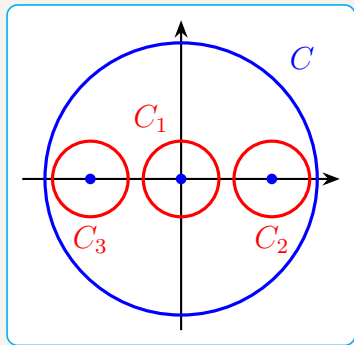
例

$$\text{求 } \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz.$$

解

被积函数的奇点为 $0, \pm 1$. 设 C_1, C_2, C_3 分别为绕 $0, 1, -1$ 的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz &= \oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^z}{z^2-1} \Big|_{z=0} + \frac{e^z}{z(z+1)} \Big|_{z=1} + \frac{e^z}{z(z-1)} \Big|_{z=-1} \right] \\ &= 2\pi i \left(-1 + \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = \pi i (e + e^{-1} - 2). \end{aligned}$$



高阶导数的柯西积分公式

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

柯西积分公式

设函数 $f(z)$ 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析, 则对任意 $z_0 \in D$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

假如 $f(z)$ 有泰勒展开

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots$$

那么由 $\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n}$ 的性质可知上述公式右侧应当为 $f^{(n)}(z_0)$.

高阶导数的柯西积分公式

证明

先证明 $n = 1$ 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离. 当 $|h| < \delta$ 时, $z_0 + h \in D$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - h} dz.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - h)} dz.$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, 左边的极限是 $f'(z_0)$. 因此我们只需要证明右边的极限等于 $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$.

续证

二者之差 $= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} dz$. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)| \leq M$. 注意到 $z \in C$, $|z-z_0| \geq \delta$, $|z-z_0-h| \geq \delta-|h|$. 由长大不等式,

$$\left| \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} dz \right| \leq \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h \rightarrow 0$ 时, 它的极限为 0, 因此 $n=1$ 情形得证.

对于一般的 n , 我们通过归纳法将 $f^{(n)}(z_0)$ 和 $f^{(n)}(z_0+h)$ 表达为积分形式. 比较 $\frac{f^{(n)}(z_0+h) - f^{(n)}(z_0)}{h}$ 与积分公式右侧之差, 并利用长大不等式证明 $h \rightarrow 0$ 时, 差趋于零. 具体过程省略. □

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的, 而是用高阶导数来计算积分的.

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz.$$

解

由于 $\cos(\pi z)$ 处处解析, 因此由柯西积分公式,

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz &= \frac{2\pi i}{4!} [\cos(\pi z)]^{(4)} \Big|_{z=1} \\ &= \frac{2\pi i}{24} \cdot \pi^4 \cos \pi = -\frac{\pi^5 i}{12}. \end{aligned}$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz.$$

解

$\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 $|z| < 2$ 的奇点为 $z = \pm i$. 取 C_1, C_2 为以 $i, -i$ 为圆心的分离圆周.
由复合闭路定理,

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz.$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解

由柯西积分公式,

$$\begin{aligned}\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz &= \frac{2\pi i}{1} \left[\frac{e^z}{(z+i)^2} \right]' \Big|_{z=i} \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^z}{(z+i)^2} - \frac{2e^z}{(z+i)^3} \right] \Big|_{z=i} = \frac{(1-i)e^{i\pi}}{2}.\end{aligned}$$

类似地, $\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{-(1+i)e^{-i\pi}}{2}$. 故

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{(1-i)e^{i\pi}}{2} + \frac{-(1+i)e^{-i\pi}}{2} = \pi i(\sin 1 - \cos 1).$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\oint_{|z|=1} z^n e^z dz$, 其中 n 是整数.

解

当 $n \geq 0$ 时, $z^n e^z$ 处处解析. 由柯西-古萨基本定理,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z dz = 0.$$

当 $n \leq -1$ 时, e^z 处处解析. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z dz = \frac{2\pi i}{(-n-1)!} (e^z)^{(-n-1)} \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(-n-1)!}.$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$ 和 $\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$.

解

(1) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-3| < 2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3} \right)' \Big|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解

(2) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-1| < 3$ 的奇点为 $z=0, 2$. 取 C_1, C_2 分别为以 0 和 2 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式,

$$\begin{aligned}\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz &= \oint_{C_1} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz \\ &= \frac{2\pi i}{2!} \left[\frac{1}{(z-2)^2} \right]'' \Big|_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3} \right)' \Big|_{z=2} = 0.\end{aligned}$$

练习

$$\oint_{|z-2i|=3} \frac{1}{z^2(z-i)} dz = \underline{0}.$$

例 (莫累拉定理)

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z) dz = 0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

该定理可视作柯西-古萨基本定理的逆定理.

证明

由题设可知 $f(z)$ 的积分与路径无关. 固定 $z_0 \in D$, 则

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

定义了 D 内的一个函数. 类似于原函数的证明可知 $F'(z) = f(z)$. 故 $f(z)$ 作为解析函数 $F(z)$ 的导数也是解析的. \square

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同？高阶柯西积分公式说明，函数 $f(z)$ 只要在区域 D 中处处可导，它就一定无限次可导，并且各阶导数仍然在 D 中解析。这一点与实变量函数有本质的区别。

同时我们也可以看出，如果一个二元实函数 $u(x, y)$ 是一个解析函数的实部或虚部，则 u 也是具有任意阶偏导数。这便引出了调和函数的概念。

第五节 解析函数与调和函数的关系

- 调和函数
- 共轭调和函数

调和函数是一类重要的二元实变函数, 它和解析函数有着紧密的联系. 为了简便, 我们用 u_{xx}, u_{yy} 来表示二阶偏导数.

定义

如果二元实变函数 $u(x, y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数, 且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

则称 $u(x, y)$ 是 D 内的调和函数.

定理

区域 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数.

证明

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, 则 u, v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_x.$$

由于 $f(z)$ 任意阶可导, 因此 u, v 存在任意阶偏导数. 由 $C-R$ 方程 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ 可知

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0. \quad \square$$

解析函数与调和函数的联系

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

如果 $u + iv$ 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的**共轭调和函数**. 换言之 $u_x = v_y, u_y = -v_x$. 显然 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

定理

设 $u(x, y)$ 是单连通域 D 内的调和函数, 则线积分

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy + C$$

是 u 的共轭调和函数.

由此可知, 调和函数总具有任意阶连续偏导数.

共轭调和函数的求法

如果 D 是多连通区域, 则未必存在共轭调和函数. 例如 $\ln(x^2 + y^2)$ 是复平面去掉原点上的调和函数, 但它并不是某个解析函数的实部. 事实上, 它是 $2 \operatorname{Ln} z$ 的实部.

在实际计算中, 我们一般不用线积分来得到共轭调和函数, 而是采用下述两种办法:

偏积分法

通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y = -v_x$ 中解出 $\psi(x)$.

不定积分法

对 $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ 求不定积分得到 $f(z)$.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

例

证明 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解

由 $u_x = -6xy, u_y = 3y^2 - 3x^2$ 可知 $u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$, 故 u 是调和函数.

由 $v_y = u_x = -6xy$ 得 $v = -3xy^2 + \psi(x)$.

由 $v_x = -u_y = 3x^2 - 3y^2$ 得 $\psi'(x) = 3x^2, \psi(x) = x^3 + C$.

故 $v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + C$,

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + C) \\ &= i(x + iy)^3 + iC = i(z^3 + C). \end{aligned}$$

也可由 $f'(z) = u_x - iu_y = 3iz^2$ 得 $f(z) = iz^3 + C$.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

例

求解析函数 $f(z)$ 使得它的虚部为

$$v(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y.$$

解

由 $u_x = v_y = e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1$ 得

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y) + x + \psi(y).$$

由 $u_y = -v_x = -e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) - 1$ 得

$$\psi'(y) = -1, \quad \psi(y) = -y + C.$$

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

续解

故

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv \\ &= e^x(x \cos y - y \sin y) + x - y + C \\ &\quad + i[e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y] \\ &= ze^z + (1 + i)z + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

也可由

$$\begin{aligned} f'(z) &= v_y + iv_x \\ &= e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1 \\ &\quad + i[e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) + 1] \\ &= (z + 1)e^z + 1 + i. \end{aligned}$$

得 $f(z) = ze^z + (1 + i)z + C$.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

练习

证明 $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

答案

$$v(x, y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + C.$$