

第一章 复数与复变函数

1.1 复数及其代数运算

作业 1. 判断题: z 是实数当且仅当 $z = \bar{z}$. (✓).

作业 2. 判断题: z 是纯虚数当且仅当 $z = -\bar{z}$. (×).

解析. $z = 0$ 也满足 $z = -\bar{z}$ 但却不是纯虚数. ■

作业 3. 填空题: (2022 年 A 卷) 设 $z = -i$, 则 $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 =$ 1.

解析.

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z^5 - 1}{z - 1} = \frac{-i - 1}{-i - 1} = 1. \quad \blacksquare$$

作业 4. 填空题: (2021 年 A 卷) 化简 $\frac{(1+i)^{101}}{(1-i)^{99}} =$ 2.

解析.

$$\frac{(1+i)^{101}}{(1-i)^{99}} = (1+i)^2 \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{99} = 2i \cdot i^{99} = 2i \cdot (-i) = 2. \quad \blacksquare$$

作业 5. 填空题: 如果 x, y 是实数且 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$, 那么 $x+y =$ 12.

解析.

$$x+1+i(y-3) = (1+i)(5+3i) = 2+8i,$$

因此 $x=1, y=11, x+y=12$. ■

作业 6. $z_1 = -z, z_2 = \bar{z}, z_3 = -\bar{z}$ 在复平面上对应的点分别与 z 在复平面上对应的点是什么关系?

解. z_1 是 z 关于原点中心对称的点, z_2 是 z 关于实轴轴对称的点, z_3 是 z 关于虚轴轴对称的点. ■

作业 7. 已知点 z_1, z_2, z_3 . 点 $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ 和 $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ 表示什么点?

解. 点 $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ 表示 z_1, z_2 连线的中点, 点 $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ 表示 z_1, z_2, z_3 形成的三角形 (可能退化) 的重心. ■

1.2 复数的三角与指数形式

作业 8. 判断题: z 是实数当且仅当 $\arg z = 0, \pi$. (×).

解析. $z = 0$ 辐角无意义. ■

作业 9. 判断题: z 是纯虚数当且仅当 $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$. (✓).

解析. $z = 0$ 辐角无意义, 所以此时不包含 $z = 0$ 的情形. ■

作业 10. 求下列复数 z 的实部与虚部, 共轭复数, 模和主辐角:

$$\begin{array}{lll} (1) \frac{1}{3+2i}; & (2) \frac{3i}{1-i} - \frac{1}{i}; & (3) \frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}; \\ (4) i^8 - 4i^{21} + i; & (5) \frac{1+2i}{3-4i} - \frac{2-i}{5i}; & (6) \frac{3+i}{i} - \frac{10i}{3-i}. \end{array}$$

解. (1) 由于

$$z = \frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{13}$$

位于第四象限, 因此

$$\operatorname{Re} z = \frac{3}{13}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{2}{13}, \quad \bar{z} = \frac{3+2i}{13}, \quad |z| = \frac{\sqrt{13}}{13}, \quad \arg z = -\arctan \frac{2}{3}.$$

(2) 由于

$$z = \frac{3i}{1-i} - \frac{1}{i} = \frac{3i(1+i)}{2} + i = \frac{-3+5i}{2}$$

位于第二象限, 因此

$$\operatorname{Re} z = -\frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{5}{2}, \quad \bar{z} = \frac{-3-5i}{2}, \quad |z| = \frac{\sqrt{34}}{2}, \quad \arg z = \pi - \arctan \frac{5}{3}.$$

(3) 由于

$$\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i} = \frac{26-7i}{2i} = -\frac{7}{2} - 13i$$

位于第三象限, 因此

$$\operatorname{Re} z = -\frac{7}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -13, \quad \bar{z} = -\frac{7}{2} + 13i, \quad |z| = \frac{5\sqrt{29}}{2}, \quad \arg z = \arctan \frac{26}{7} - \pi.$$

(4) 由于

$$i^8 - 4i^{21} + i = 1 - 4i + i = 1 - 3i$$

位于第四象限, 因此

$$\operatorname{Re} z = 1, \quad \operatorname{Im} z = -3, \quad \bar{z} = 1 + 3i, \quad |z| = \sqrt{10}, \quad \arg z = -\arctan 3. \quad \blacksquare$$

作业 11. (2020 年 A 卷) 如果 $(1+2i)\bar{z} = 4+3i$, 求 z 及其主辐角.

解. 由于

$$\bar{z} = \frac{4+3i}{1+2i} = \frac{(4+3i)(1-2i)}{5} = \frac{10-5i}{5} = 2-i,$$

因此 $z = 2+i$, $\arg z = \arctan \frac{1}{2}$. ■

作业 12. 求下列复数 z 的三角和指数形式:

- (1) i ; (2) $1+i\sqrt{3}$;
(3) $3-\sqrt{3}i$; (4) $\frac{2i}{1-i}$.

解. (1) 由于 $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{2}$, 因此

$$z = z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi i}{2}}.$$

(2) 由于 $|z| = 2$, $\arg z = \frac{\pi}{3}$, 因此

$$z = z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

(3) 由于 $|z| = 2\sqrt{3}$, $\arg z = -\frac{\pi}{6}$, 因此

$$z = 2\sqrt{3} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] = 2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{6}}.$$

(4) 由于 $z = \frac{2i(1+i)}{2} = -1+i$, $|z| = \sqrt{2}$, $\arg z = \frac{3\pi}{4}$, 因此

$$z = \sqrt{2} \left[\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right] = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}. \quad \text{■}$$

作业 13. 证明当 $|z| = 1 > |w|$ 时, $\left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right| = 1$.

证明. 由于 $|z\bar{w}| = |w| < 1$, 因此 $1-z\bar{w} \neq 0$. 由于

$$|z-w|^2 = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = z\bar{z} - w\bar{z} - z\bar{w} + w\bar{w} = 1 - w\bar{z} - z\bar{w} + w\bar{w},$$

$$|1-z\bar{w}|^2 = (1-z\bar{w})(1-\bar{z}w) = 1 - w\bar{z} - z\bar{w} + z\bar{z}w\bar{w} = 1 - w\bar{z} - z\bar{w} + w\bar{w},$$

因此 $|z-w| = |1-z\bar{w}|$, $\left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right| = 1$. ■

作业 14. 证明如果复数 $a+ib$ 是实系数方程

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$$

的根, 则 $a-ib$ 也是它的根.

证明. 两边取共轭即可. ■

1.3 复数的乘除、方幂与方根

作业 15. 填空题: (2020 年 B 卷) 复数 $\left[\frac{(1+i)^2}{2}\right]^{2021}$ 的模是 1.

解析. 因为 $\left|\frac{(1+i)^2}{2}\right| = |i| = 1$, 所以答案是 1. ■

作业 16. 将 $z = \frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5}{(\cos \varphi - i \sin \varphi)^3}$ 写成三角形形式和指数形式.

解.

$$z = \frac{e^{5\varphi i}}{e^{-3\varphi i}} = e^{8\varphi i} = \cos 8\varphi + i \sin 8\varphi. \quad \text{■}$$

作业 17. 计算

- | | | |
|---------------------------|----------------------|-----------------------|
| (1) $(\sqrt{3} - i)^5$; | (2) $(1 + i)^6$; | (3) $\sqrt[6]{-1}$; |
| (4) $\sqrt[4]{-2 + 2i}$; | (5) $\sqrt[4]{-2}$; | (6) $(1 - i)^{1/3}$. |

解. (1) 由于 $\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{\pi i}{6}}$, 因此

$$(\sqrt{3} - i)^5 = 2^5 e^{-\frac{5\pi i}{6}} = 32 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = -16\sqrt{3} - 16i.$$

(2) 由于 $1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$, 因此

$$(1 + i)^6 = 8e^{\frac{6\pi i}{4}} = -8i.$$

(3) 由于 $-1 = e^{\pi i}$, 因此

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{-1} &= \exp\left(\frac{\pi + 2k}{6}i\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ &= \exp\left(\frac{\pi i}{6}\right), \exp\left(\frac{3\pi i}{6}\right), \exp\left(\frac{5\pi i}{6}\right), \exp\left(\frac{7\pi i}{6}\right), \exp\left(\frac{9\pi i}{6}\right), \exp\left(\frac{11\pi i}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3} + i}{2}, i, \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \frac{-\sqrt{3} - i}{2}, -i, \frac{\sqrt{3} - i}{2}. \end{aligned}$$

(4) 由于 $-2 + 2i = 4e^{\frac{3\pi i}{4}}$, 因此

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{-2 + 2i} &= \sqrt{2} \exp\left(\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k}{4}i\right), \quad k = 0, 1, 2, 3 \\ &= \sqrt{2} \exp\left(\frac{3\pi i}{16}\right), \sqrt{2} \exp\left(\frac{11\pi i}{16}\right), \sqrt{2} \exp\left(\frac{19\pi i}{16}\right), \sqrt{2} \exp\left(\frac{27\pi i}{16}\right). \end{aligned}$$

(5) 由于 $-2 = 2e^{\pi i}$, 因此

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{-2} &= \sqrt[4]{2} \exp\left(\frac{\pi + 2k}{4}i\right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \\ &= \sqrt[4]{2} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right), \sqrt[4]{2} \exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right), \sqrt[4]{2} \exp\left(\frac{5\pi i}{4}\right), \sqrt[4]{2} \exp\left(\frac{7\pi i}{4}\right) \\ &= \frac{1+i}{\sqrt[4]{2}}, \frac{-1+i}{\sqrt[4]{2}}, -\frac{1+i}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1-i}{\sqrt[4]{2}}.\end{aligned}$$

(6) 由于 $1-i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}$, 因此

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1-i} &= \sqrt[6]{2} \exp\left(\frac{-\frac{\pi}{4} + 2k}{3}i\right), \quad k = 0, 1, 2, \\ &= \sqrt[6]{2} \exp\left(-\frac{\pi i}{12}\right), \sqrt[6]{2} \exp\left(\frac{7\pi i}{12}\right), \sqrt[6]{2} \exp\left(\frac{15\pi i}{12}\right) \\ &= \sqrt[6]{2} \exp\left(-\frac{\pi i}{12}\right), \sqrt[6]{2} \exp\left(\frac{7\pi i}{12}\right), -\frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}.\end{aligned}$$

作业 18. (2021 年 A 卷) 解方程 $z^3 + 8 = 0$.

解. 由于 $-8 = 8e^{\pi i}$, 因此

$$\begin{aligned}z &= \sqrt[3]{-8} = 2 \exp\left(\frac{\pi + 2k}{3}i\right), \quad k = 0, 1, 2, \\ &= 2 \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right), 2 \exp\left(\frac{3\pi i}{3}\right), 2 \exp\left(\frac{5\pi i}{3}\right) \\ &= 1 + i\sqrt{3}, -2, 1 - i\sqrt{3}.\end{aligned}$$

作业 19. 如果 $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$. 证明 $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ 并说明这些等式的几何意义.

解. 设 $z_2 - z_1 = \lambda(z_3 - z_1)$, 则 $z_2 - z_3 = (\lambda - 1)(z_3 - z_1)$,

$$\lambda = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

因此 $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$, $\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$. 于是有 $|\lambda| = 1, |1 - \lambda| = |\lambda^2| = 1$, 从而

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|.$$

设 z_1, z_2, z_3 对应的点为 A, B, C , 则 $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ 意味着 $\angle BAC = \angle ACB, \frac{BA}{CA} = \frac{AC}{BC}$. 于是 $AB = BC = CA$, $\triangle ABC$ 是等边三角形.

作业 20. 如果 $z = e^{it}$, 证明:

$$(1) \quad z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos nt; \quad (2) \quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin nt.$$

证明.

$$z^n = e^{nit}, \quad \frac{1}{z^n} = e^{-nit},$$

$$z^n + \frac{1}{z^n} = e^{nit} + e^{-nit} = 2 \operatorname{Re} e^{nit} = 2 \cos nt.$$

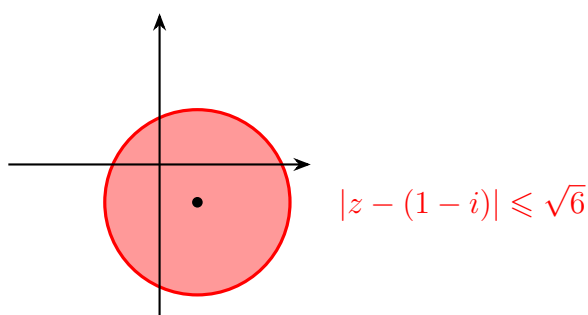
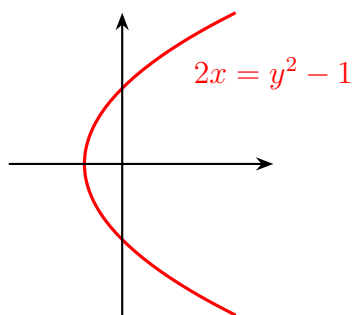
$$z^n - \frac{1}{z^n} = e^{nit} - e^{-nit} = 2i \operatorname{Im} e^{nit} = 2i \sin nt. \quad \blacksquare$$

1.4 曲线和区域

作业 21. 单选题: (2020 年 A 卷) 方程 $|z| = \operatorname{Re} z + 1$ 中 z 的轨迹为 (B).

- (A) 椭圆 (B) 抛物线 (C) 双曲线 (D) 直线

解析. $|z|^2 = x^2 + y^2 = (\operatorname{Re} z + 1)^2 = (x + 1)^2$, 于是 $2x + 1 = y^2, x = \frac{y^2 - 1}{2}$. 而且注意到 $x > -1$, 因此该方程的轨迹就是抛物线. \blacksquare



作业 22. 单选题: (2020 年 A 卷) 不等式 $z\bar{z} - (2+i)z - (2-i)\bar{z} \leq 4$ 确定的是 (A).

- (A) 有界单连通闭区域 (B) 无界多连通区域
(C) 无界单连通闭区域 (D) 有界多连通区域

解析. 即 $|z - (1 - i)| \leq \sqrt{6}$, 是一个闭圆盘. \blacksquare

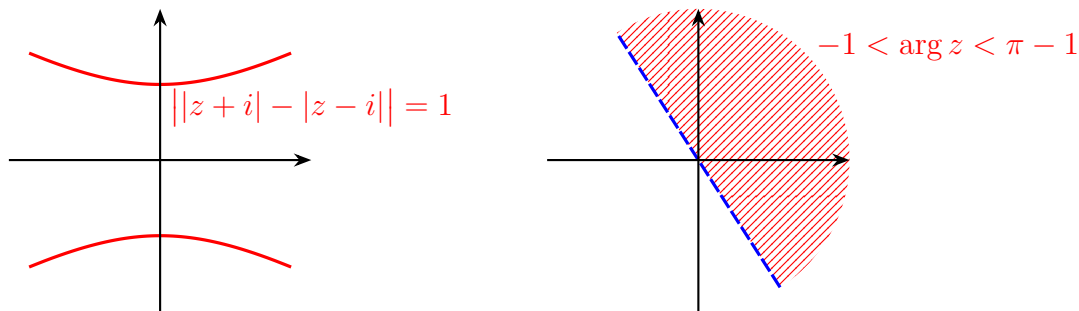
作业 23. 单选题: (2022 年 A 卷) 方程 $||z + i| - |z - i|| = 1$ 表示的是 (C).

- (A) 直线 (B) 不是圆的椭圆 (C) 双曲线 (D) 圆周

解析. 即以 $i, -i$ 为焦点, $1/2$ 为虚半轴 ($\sqrt{3}/2$ 为实半轴) 的双曲线. \blacksquare

作业 24. 单选题: 不等式 $-1 < \arg z < \pi - 1$ 确定的是 (C).

- (A) 有界单连通闭区域 (B) 有界多连通区域
(C) 无界单连通区域 (D) 无界多连通闭区域



解析. 即角状区域. 实际上它也是直线 $y = -x \tan 1$ 右上方的区域. ■

作业 25. 用复参数方程表示连接 $-1+i$ 与 $1-4i$ 的直线段.

解. 由于 $(1-4i) - (-1+i) = 2-5i$, 因此直线段方程为

$$z = -1 + i + (2 - 5i)t = (2t - 1) + (1 - 5t)i, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad \blacksquare$$

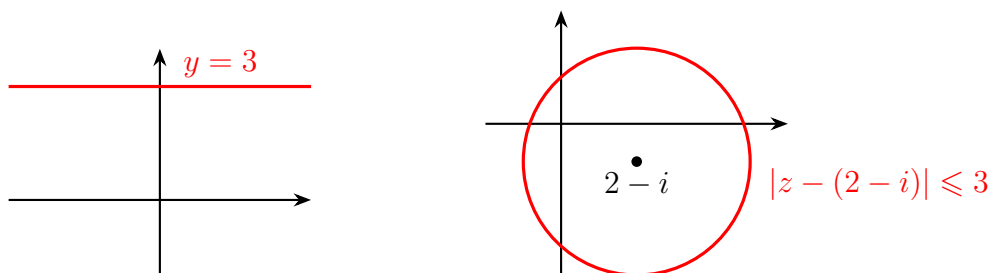
作业 26. 求下列各题中 z 的轨迹或范围, 并作图.

(1) $\operatorname{Re}(iz) = 3$;

(2) $z\bar{z} - (2+i)z - (2-i)\bar{z} = 4$.

解. (1) 设 $z = x + yi$, $3 = \operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Re}(y + xi) = y$, 所以是直线 $y = 3$.

(2) 即 $|z - (2 - i)| = 3$, 是圆周. ■



作业 27. 描出下列不等式所确定的区域或闭区域, 并指出它是有界还是无界的, 单连通还是多连通.

(1) $\operatorname{Im} z \leq 0, \operatorname{Re} z \geq 0$;

(2) $|z - 1| < |z + 3|$;

(3) $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 2$;

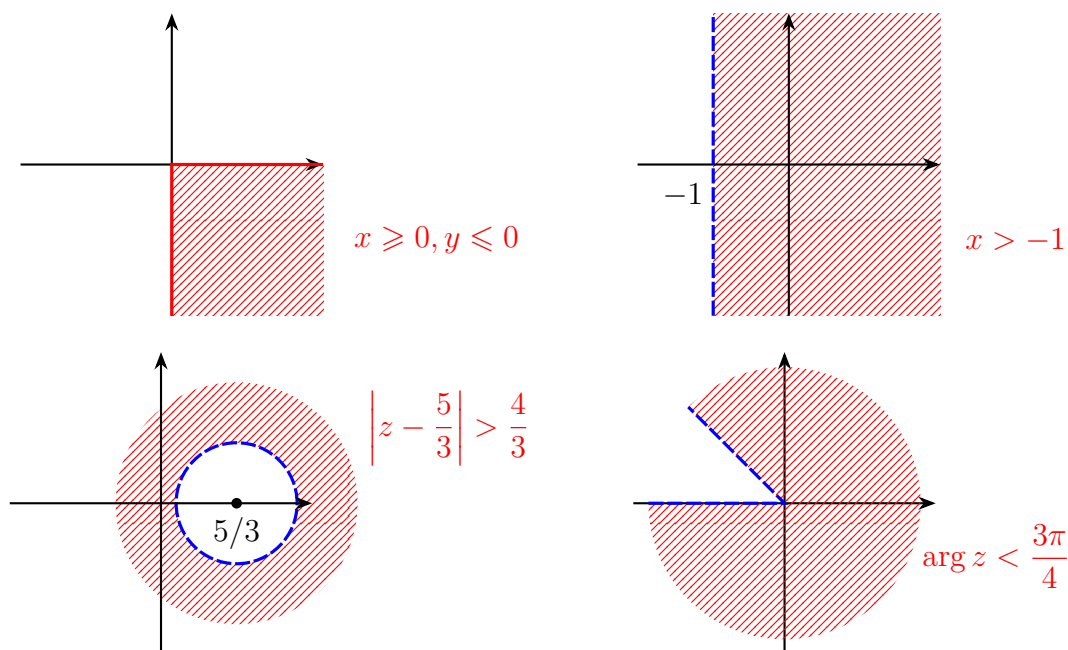
(4) $\arg z < \frac{3\pi}{4}$.

解. (1) 即第四象限, 包括边界, 它是无界单连通闭区域.

(2) 即 $(x-1)^2 + y^2 < (x+3)^2 + y^2$, 化简得到 $x > -1$, 它是无界单连通区域.

(3) 即 $(x+1)^2 + y^2 < 4[(x-1)^2 + y^2]$, 化简得到 $\left(x - \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 > \frac{16}{9}$, $\left|z - \frac{5}{3}\right| > \frac{4}{3}$, 它是无界多连通区域.

(4) 即 $\frac{3\pi}{4} > \arg z > -\pi$, 它无界单连通区域. ■



1.5 复变函数

作业 28. 填空题: 求区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$ 在映射 $w = z^3$ 下的像 = $0 < \arg w < \pi$.

解析. 根据乘幂的辐角变化可知 $0 < \arg z^3 < \pi$. ■

作业 29. 填空题: (2021 年 B 卷) 已知映射 $w = z^3$, 则 $z = \sqrt{3} + i$ 在 w -平面上的像是 $8i$.

解析. 即 $(\sqrt{3} + i)^3 = (2e^{\frac{\pi i}{6}})^3 = 8e^{\frac{\pi i}{2}} = 8i$. ■

1.6 极限和连续性

作业 30. 填空题: (2020 年 A 卷) 极限 $\lim_{z \rightarrow 1+i} (1 + z^2 + 2z^4) =$ $-7 + 2i$.

解析. 由连续性可知为 $1 + (1 + i)^2 + 2(1 + i)^4 = 1 + 2i + 2 \cdot (-4) = -7 + 2i$. ■

作业 31. (2020 年 A 卷) 讨论极限 $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$ 是否存在. 若存在请求出具体的值, 若不存在请证明.

解. 不存在. 当 $z = (1 + i)t \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} = \frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = i - (-i) = 2i.$$

当 $z = t \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} = 1 - 1 = 0.$$

由于二者不等, 因此该极限不存在. ■

作业 32. 下列数列 $\{z_n\}$ 是否收敛? 如果收敛, 求出它们的极限:

- (1) $z_n = \frac{1+ni}{1-ni}$; (2) $z_n = \left(1 + \frac{i}{2}\right)^n$;
 (3) $z_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1}$; (4) $z_n = \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right] e^{-\frac{n\pi i}{2}}$;
 (5) $z_n = \frac{(3+2i)^n}{(3+4i)^n}$.

解. (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+ni}{1-ni} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + i}{\frac{1}{n} - i} = \frac{i}{-i} = -1.$$

(2) 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-n} = 0,$$

因此 $\{z_n\}$ 的极限是 0.

(3) 由于 $\{z_n\}$ 的实部数列 $\{(-1)^n\}$ 不收敛, 因此 $\{z_n\}$ 不收敛.

(4) 由于 $\{z_n\}$ 的实部数列 $\left\{\left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right] \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$ 不收敛, 因此 $\{z_n\}$ 不收敛.

(5) 由于 $|z_n| = \left(\frac{\sqrt{13}}{5}\right)^n \rightarrow 0$, 因此 $\{z_n\}$ 的极限是 0. ■

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 33. 我们知道, 对于任意两个集合 A, B , 我们可以定义 $A \rightarrow B$ 的映射. 在数学中, 很多对象是带有“结构”的集合, 例如实线性空间 V 是一个拥有如下结构:

$$\text{零元 } 0 \in V; \quad \text{加法 } v_1 + v_2 \in V; \quad \text{数乘 } \lambda v,$$

且满足一些特定性质的集合. 如果 A, B 具有同一种结构, 映射 $f: A \rightarrow B$ “保持”了这些结构, 则我们称 f 是同态. 例如实线性空间之间的同态就是指一个映射 $f: V \rightarrow W$, 使得

$$f(0) = 0; \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2); \quad f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

再比如域是带有如下结构:

$$\text{零元 } 0; \quad \text{幺元 } 1; \quad \text{加法}; \quad \text{减法}; \quad \text{乘法}; \quad \text{除法},$$

且满足特定性质的集合 (交换律分配律之类的). 所以域之间的同态就是指一个 $f: F \rightarrow K$, 使得

- $f(0) = 0, \quad f(1) = 1;$
- $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(x - y) = f(x) - f(y);$
- $f(xy) = f(x)f(y), \quad f(x/y) = f(x)/f(y).$

如果一个同态是双射 (一一对应), 则称之为同构.

- (1) 设 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ 是有理数域之间的同构, 证明 f 只能是恒等映射.
- (2) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是实数域之间的连续的同构, 证明 f 只能是恒等映射.
- (3) 设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是复数域之间的连续的同构, 证明 f 只能是恒等映射或复共轭.
- (4) 如果 $F = \mathbb{R} + \mathbb{R}t$ 是一个真包含 \mathbb{R} 的域, 证明 F 同构于 \mathbb{C} .
- (5) 设

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$$

其中 $E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$. 证明 F 是一个域且同构于 \mathbb{C} .

作业 34. 满足 $z^n = 1$ 的复数 z 被称为 n 次单位根. 不难看出 $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1$. 单位根在代数, 几何和组合中有着丰富的应用. 我们来看一个例子. 设集合 $A = \{1, 2, \dots, 2023\}$.

- (1) 集合 A 有多少个子集? 试着将 A 的每一个子集与

$$N(x) = \prod_{a=1}^{2023} (1 + x^a)$$

的展开式中的每一项建立一个一一对应.

- (2) 设 $S \subseteq A$. 定义

$$f(S) = \prod_{a \in S} x^a = x^{\sum_{a \in S} a}.$$

证明所有的 S 对应的 $f(S)$ 之和就是 $N(x)$.

(3) 证明 $N(x)$ 的展开式合并同类项后 x^k 的系数就是 A 的那些满足元素之和是 k 的子集的个数.

(4) 现在我们想知道 A 有多少个子集满足元素之和是 5 的倍数. 令 x 是 5 次单位根, 则 $N(x)$ 可以表为

$$N(x) = N_0 + N_1x + N_2x^2 + N_3x^3 + N_4x^4,$$

那么 N_0 就是元素之和是 5 的倍数的集合个数.

(5) 当 $x = 1$ 时, 显然 $N(1) = 2^{2023}$. 当 $x \neq 1$ 是 5 次单位根时, $1, x, x^2, x^3, x^4$ 是方程 $X^5 - 1 = 0$ 的所有根, 所以 $2, 1+x, 1+x^2, 1+x^3, 1+x^4$ 是方程 $(X-1)^5 - 1 = 0$ 的所有根. 由韦达定理可知

$$(1+x^0)(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) = 2.$$

由此证明

$$N(x) = 2^{404}(1+x^0)(1+x)(1+x^2) = 2^{405}(1+x+x^2+x^3).$$

(6) 计算 $N(1)+N(e^{2\pi i/5})+N(e^{4\pi i/5})+N(e^{6\pi i/5})+N(e^{8\pi i/5})$. 由此得到 $N_0 = \frac{2^{2023} + 4 \cdot 2^{405}}{5}$.

(7) 想一想, N_1, N_2, N_3, N_4 分别是多少?

更多细节可见: <https://www.bilibili.com/video/BV1R34y1W7Xn/>