1.5 复变函数

复变函数的定义

- **复变函数**就是复数集合 $G \subseteq \mathbb{C}$ 上的一个映射 $f: G \to \mathbb{C}$.

复变函数的定义

- **复变函数**就是复数集合 $G \subseteq \mathbb{C}$ 上的一个映射 $f: G \to \mathbb{C}$.
- 换言之, 对于每一个 $z \in G$, 有一个唯一确定的复数 $w = f(z)$ 与之对应.

复变函数的定义

- **复变函数**就是复数集合 $G \subseteq \mathbb{C}$ 上的一个映射 $f: G \to \mathbb{C}$.
- 换言之, 对于每一个 $z \in G$, 有一个唯一确定的复数 $w = f(z)$ 与之对应.
- 例如 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\arg z$, $|z|$, z^n 都是复变函数.

复变函数的定义

- **复变函数**就是复数集合 $G \subseteq \mathbb{C}$ 上的一个映射 $f: G \to \mathbb{C}$.
- 换言之, 对于每一个 $z \in G$, 有一个唯一确定的复数 $w = f(z)$ 与之对应.
- 例如 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\arg z$, $|z|$, z^n 都是复变函数.
- f 的定义域是指 G, 值域是指 $\{w = f(z): z \in G\}$.

复变函数的定义

- **复变函数**就是复数集合 $G \subseteq \mathbb{C}$ 上的一个映射 $f: G \to \mathbb{C}$.
- 换言之, 对于每一个 $z \in G$, 有一个唯一确定的复数 $w = f(z)$ 与之对应.
- 例如 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\arg z$, $|z|$, z^n 都是复变函数.
- f 的定义域是指 G, 值域是指 $\{w = f(z): z \in G\}$.
- 如果 $f(z_1) = f(z_2) \Longrightarrow z_1 = z_2$, 则称 f 是单射.

复变函数的定义

- **复变函数**就是复数集合 $G \subseteq \mathbb{C}$ 上的一个映射 $f: G \to \mathbb{C}$.
- 换言之, 对于每一个 $z \in G$, 有一个唯一确定的复数 $w = f(z)$ 与之对应.
- 例如 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \arg z, |z|, z^n$ 都是复变函数.
- f 的定义域是指 G, 值域是指 $\{w = f(z): z \in G\}$.
- 如果 $f(z_1) = f(z_2) \Longrightarrow z_1 = z_2$, 则称 f 是单射.
- 在本课程中, 复变函数的定义域常常是一个区域.

多值函数的单值化

- 在复变函数中，我们会经常遇到多值的复变函数，

多值函数的单值化

- 在复变函数中, 我们会经常遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应.

多值函数的单值化

- 在复变函数中, 我们会经常遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应.
- 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

多值函数的单值化

- 在复变函数中, 我们会经常遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应.
- 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.
- 如果对每一个定义域范围内的 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值, 则我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

多值函数的单值化

- 在复变函数中，我们会经常遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应.
- 例如 $\operatorname{Arg} z, \sqrt[n]{z}$ 等.
- 如果对每一个定义域范围内的 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值，则我们得到了这个多值函数的一个单值分支.
- 若无特别声明，复变函数总是指单值的复变函数.

反函数

- 在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数: 对于任意点 $w \in f(G)$, 存在一个或多个 $z \in G$ 使得 $w = f(z)$.

反函数

- 在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数: 对于任意点 $w \in f(G)$, 存在一个或多个 $z \in G$ 使得 $w = f(z)$.
- 这样 w 到 z 的就定义了 f 的反函数 f^{-1}.

反函数

- 在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数：对于任意点 $w \in f(G)$，存在一个或多个 $z \in G$ 使得 $w = f(z)$.
- 这样 w 到 z 的就定义了 f 的反函数 f^{-1}.
- 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的，则称 f 是一一对应.

与实变函数的关系

- 每一个复变函数 $w = f(z) = u + iv$ 等价于给了两个二元实变函数

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y).$$

与实变函数的关系

- 每一个复变函数 $w = f(z) = u + iv$ 等价于给了两个二元实变函数

$$u = u(x, y), \qquad v = v(x, y).$$

- 例如

$$w = z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + i \bullet 2xy,$$

$$u(x, y) = u^2 - v^2, \qquad v(x, y) = 2xy.$$

与实变函数的关系

- 每一个复变函数 $w=f(z)=u+iv$ 等价于给了两个二元实变函数

$$u=u(x,y),\qquad v=v(x,y).$$

- 例如

$$w=z^2=\left(x^2-y^2\right)+i\bullet 2xy,$$

$$u(x,y)=u^2-v^2,\qquad v(x,y)=2xy.$$

- 不过其实我们也可以把 $f(z)$ 看成一个二元实变量复值函数.

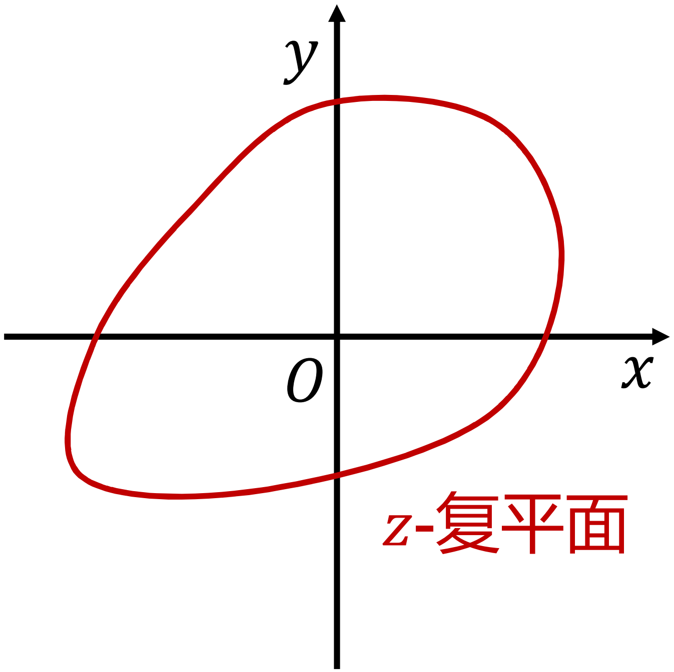
复变函数与映照

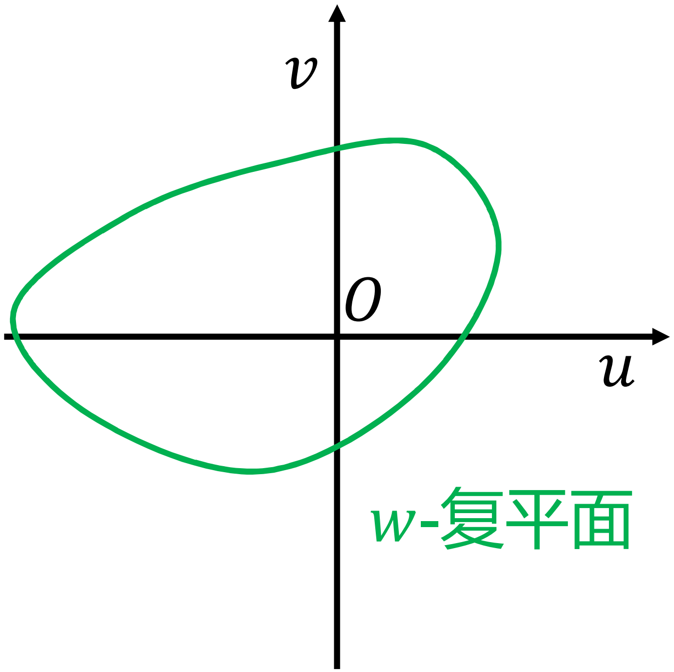
- 在实变函数中, 我们常常用函数图像直观来理解和研究函数.

复变函数与映照

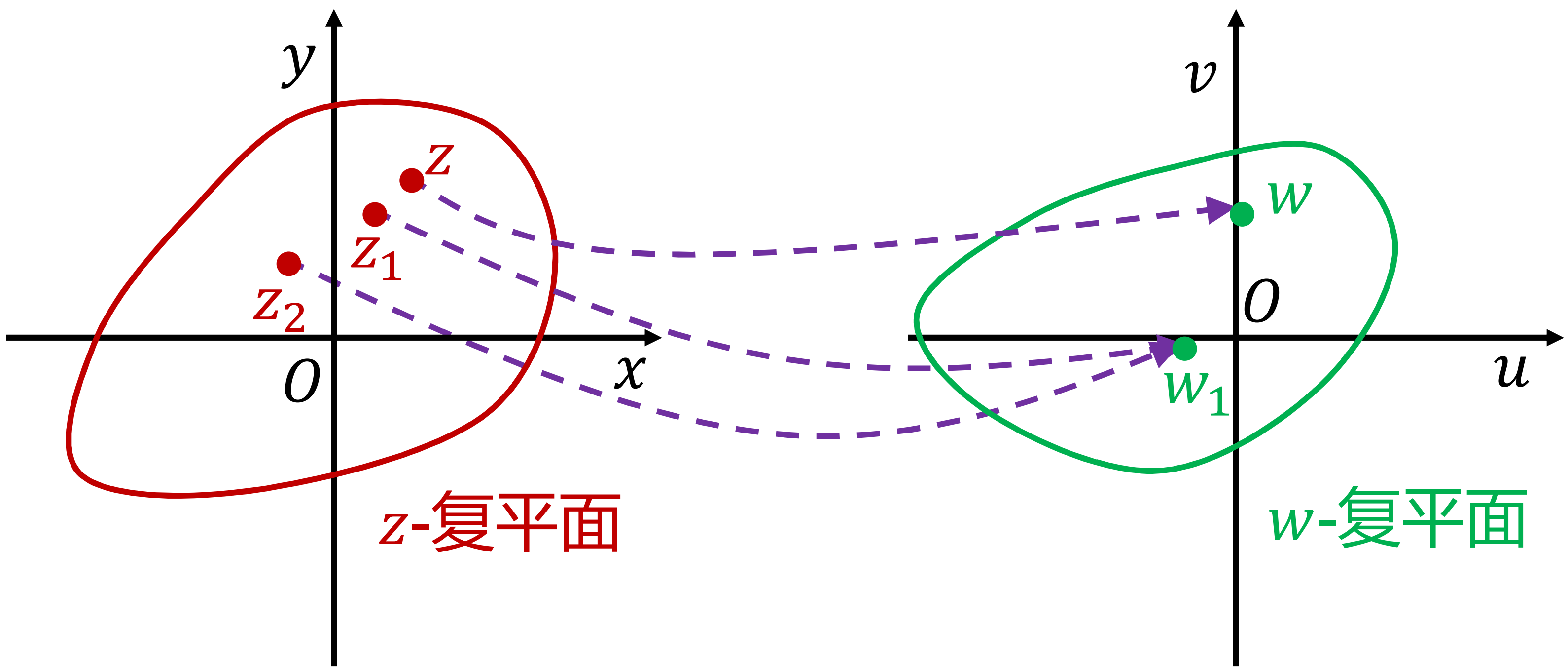
- 在实变函数中, 我们常常用函数图像直观来理解和研究函数.
- 在复变函数中, 我们可以用两个复平面(z 复平面和 w 复平面)之间的映射(称之为**映照**)来表示这种对应关系.

- 在实变函数中，我们常常用函数图像直观来理解和研究函数.
- 在复变函数中，我们可以用两个复平面(z 复平面和 w 复平面)之间的映射(称之为**映照**)来表示这种对应关系.





- 在实变函数中, 我们常常用函数图像直观来理解和研究函数.
- 在复变函数中, 我们可以用两个复平面(z 复平面和 w 复平面)之间的映射(称之为**映照**)来表示这种对应关系.



例题: 映照

- 例 函数 $w = \overline{z}$.

例题: 映照

- 例 函数 $w = \overline{z}$.
- 如果把 z-复平面和 w-复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换.

例题: 映照

- 例 函数 $w = \overline{z}$.
- 如果把 z-复平面和 w-复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换.
- 它把任一区域映成和它全等的区域.

例题: 映照

- 例 函数 $w = \overline{z}$.
- 如果把 z-复平面和 w-复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换.
- 它把任一区域映成和它全等的区域.
- 例 函数 $w = az$.

例题: 映照

- 例 函数 $w = \bar{z}$.
- 如果把 z-复平面和 w-复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换.
- 它把任一区域映成和它全等的区域.
- 例 函数 $w = az$.
- 设 $a = re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照(逆时针旋转 θ)和一个相似映照(放大 r 倍)的复合.

例题: 映照

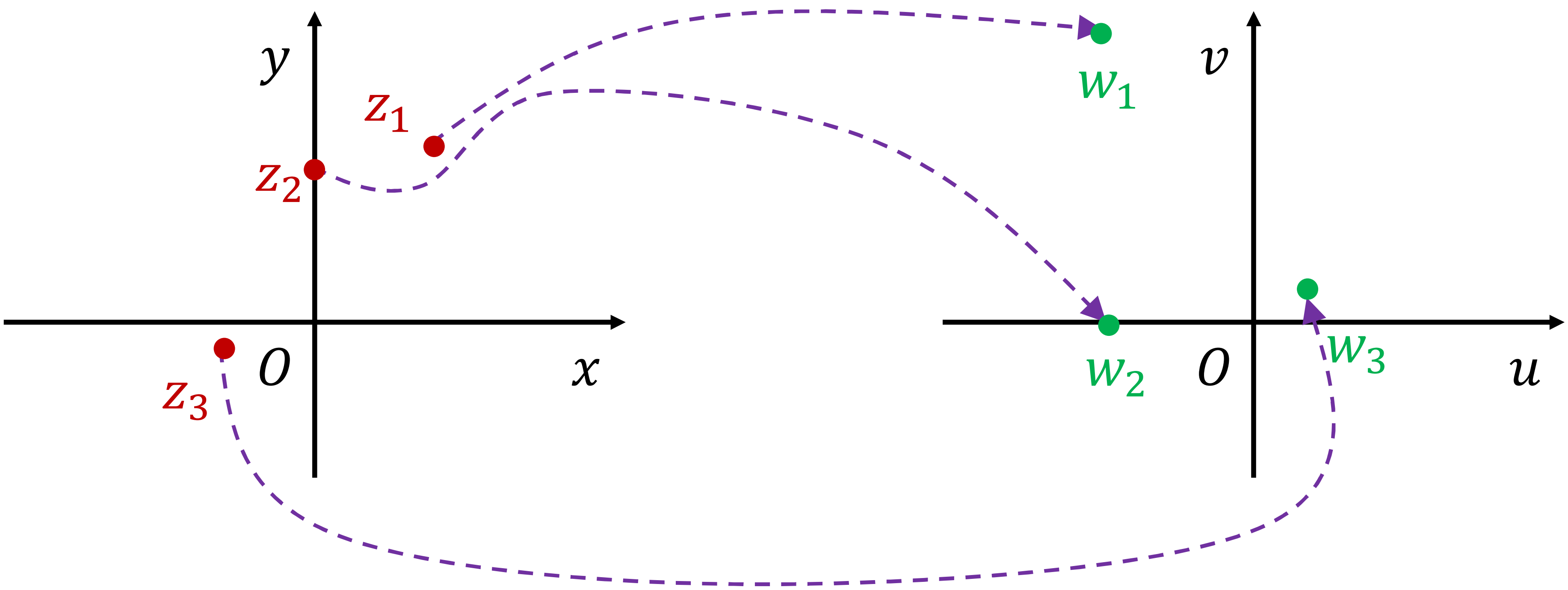
- 例 函数 $w = z^2$.

例题: 映照

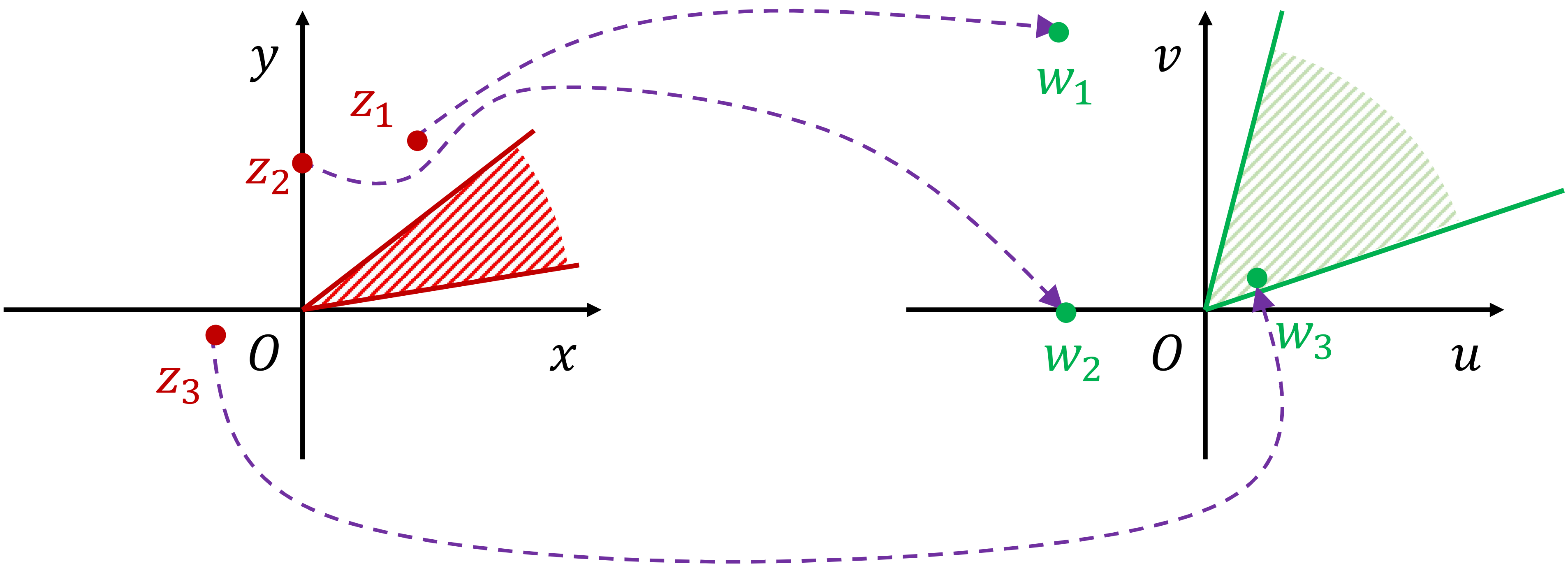
- 例 函数 $w = z^2$.
- 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.

例题: 映照

- 例 函数 $w = z^2$.
- 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



- 例 函数 $w = z^2$.
- 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



- 这个映射对应两个实变函数

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

- 这个映射对应两个实变函数

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

- 因此它把 z-平面上两族分别以直线 $y = \pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2 - y^2 = c_1, \qquad 2xy = c_2$$

例题: 映照

- 这个映射对应两个实变函数

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

- 因此它把 z-平面上两族分别以直线 $y = \pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2 - y^2 = c_1, \qquad 2xy = c_2$$

- 分别映射为 w-平面上的两族平行直线

$$u = c_1, \qquad v = c_2.$$

例题: 映照

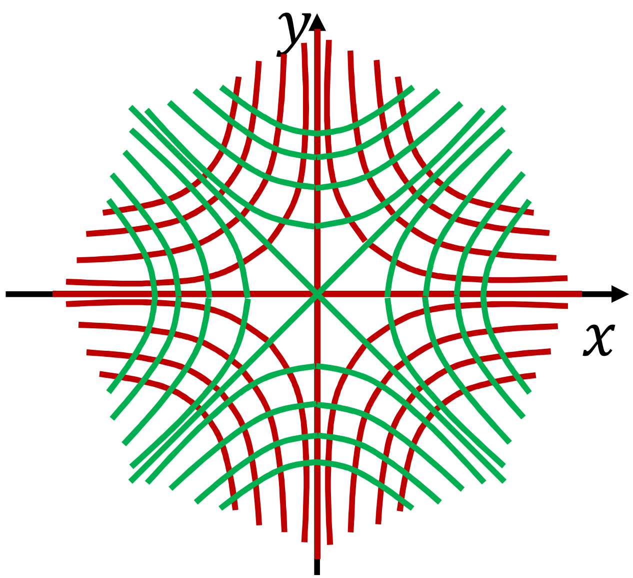
- 这个映射对应两个实变函数

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy.$$

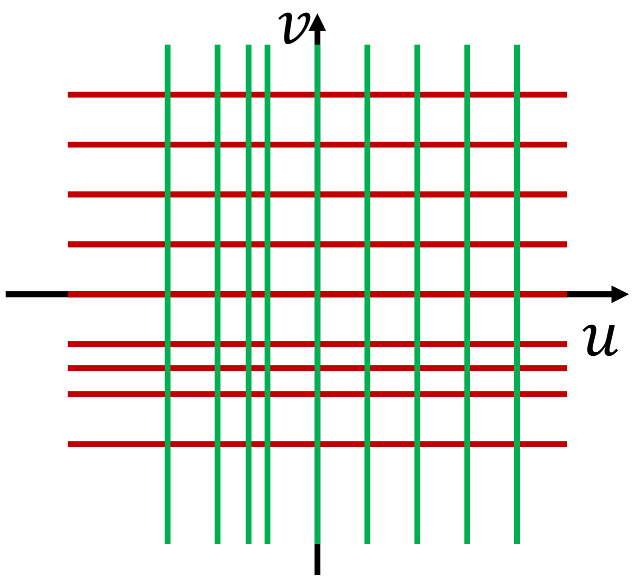
- 因此它把 z-平面上两族分别以直线 $y = \pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2 - y^2 = c_1, \qquad 2xy = c_2$$

- 分别映射为 w-平面上的两族平行直线



$$u = c_1, \qquad v = c_2.$$



例题: 映照

- 它把 z-平面上两族平行直线 $x = \lambda,\ y = \mu$

例题: 映照

- 它把 z-平面上两族平行直线 $x=\lambda$, $y=\mu$ 分别映射为 w-平面上的两族抛物线

$$v^2=4\lambda^2(\lambda^2-u),\qquad v^2=4\mu^2(\mu^2+u).$$

例题: 映照的像

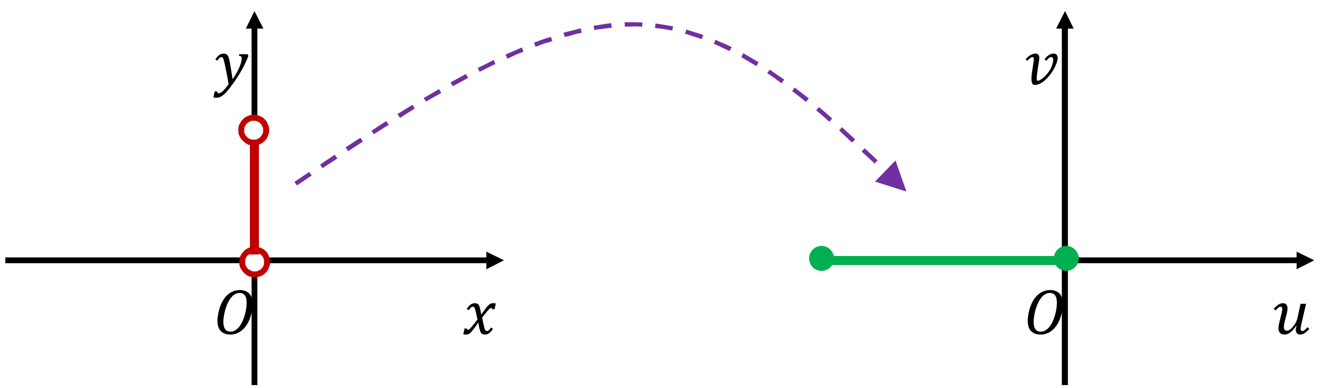
- 例 求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.
- (1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \frac{\pi}{2}$.

- 例 求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.
- (1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \dfrac{\pi}{2}$.
- 解 设 $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$, 则 $w = z^2 = -r^2$.

- 例 求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.
- (1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\frac{\pi}{2}$.
- 解 设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=ir$, 则 $w=z^2=-r^2$.
- 因此它的像还是一条线段 $0<|w|<4, \arg w=-\pi$.

例题: 映照的像

- **例** 求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.
- (1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \frac{\pi}{2}$.
- **解** 设 $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$, 则 $w = z^2 = -r^2$.
- 因此它的像还是一条线段 $0 < |w| < 4, \arg w = -\pi$.



例题: 映照的像

- 例 求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.
- (2) 双曲线 $(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2 = 4$.

- 例 求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.
- (2) 双曲线 $(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2 = 4$.
- 解 设 $z = x + yi$, 则 $w = u + iv = z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2xyi$.

例题: 映照的像

- 例 求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.
- (2) 双曲线 $(\mathrm{Re}\,z)^2-(\mathrm{Im}\,z)^2=4$.
- 解 设 $z=x+yi$, 则 $w=u+iv=z^2=\left(x^2-y^2\right)+2xyi$.
- 因此 $u=x^2-y^2=4, v=2xy$.

- 例 求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.
- (2) 双曲线 $(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2 = 4$.
- 解 设 $z = x + yi$, 则 $w = u + iv = z^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2xyi$.
- 因此 $u = x^2 - y^2 = 4, v = 2xy$.
- 对于任意 $v \in \mathbb{R}$, 方程组 $xy = \frac{v}{2}, x^2 - y^2 = 4$ 总是有解的.

- 例 求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.
- (2) 双曲线 $(\operatorname{Re} z)^2-(\operatorname{Im} z)^2=4$.
- 解 设 $z=x+yi$, 则 $w=u+iv=z^2=\left(x^2-y^2\right)+2xyi$.
- 因此 $u=x^2-y^2=4, v=2xy$.
- 对于任意 $v\in\mathbb{R}$, 方程组 $xy=\frac{v}{2}, x^2-y^2=4$ 总是有解的.
- 因此这条双曲线的像是一条直线 $\operatorname{Re} w=4$.

例题: 映照的像

- 例 求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.
- (3) 扇形区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2$.

例题: 映照的像

- 例 求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.
- (3) 扇形区域 $0<\arg z<\frac{\pi}{4}, 0<|z|<2$.
- 解 设 $z=re^{i\theta}$, 则 $w=r^2e^{i\theta}$.

例题: 映照的像

- 例 求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.
- (3) 扇形区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2$.
- 解 设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2 e^{i\theta}$.
- 因此它的像是扇形区域 $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}, 0 < |w| < 4$.

例题: 映照的像

- 例 求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = z + \frac{1}{z}$ 下的像.

- 例 求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = z + \frac{1}{z}$ 下的像.

- 解 设 $z = x + yi$, 则 $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{\overline{z}}{4}$,

例题: 映照的像

- **例** 求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = z + \frac{1}{z}$ 下的像.

- **解** 设 $z = x + yi$, 则 $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{\overline{z}}{4}$,

$$w = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\overline{z}}{4} = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}yi, \qquad u = \frac{5}{4}x, v = \frac{3}{4}y,$$

- 例 求圆周 $|z|=2$ 在映照 $w=z+\frac{1}{z}$ 下的像.

- 解 设 $z=x+yi$, 则 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}=\dfrac{\bar{z}}{4}$,

$$w=z+\frac{1}{z}=z+\frac{\bar{z}}{4}=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}yi, \qquad u=\frac{5}{4}x, v=\frac{3}{4}y,$$

$$x=\frac{4}{5}u, y=\frac{4}{3}v, \qquad \left(\frac{4}{5}u\right)^2+\left(\frac{4}{3}v\right)^2=4,$$

- 例 求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = z + \frac{1}{z}$ 下的像.

- 解 设 $z = x + yi$, 则 $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{\bar{z}}{4}$,

$$w = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{4} = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}yi, \qquad u = \frac{5}{4}x, v = \frac{3}{4}y,$$

$$x = \frac{4}{5}u, y = \frac{4}{3}v, \qquad \left(\frac{4}{5}u\right)^2 + \left(\frac{4}{3}v\right)^2 = 4,$$

$$\left(\frac{u}{5/2}\right)^2 + \left(\frac{v}{3/2}\right)^2 = 1.$$