



合肥工业大学

HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: <https://zhangshenxing.gitee.io>

第四章 级数

- ① 复数项级数
- ② 幂级数
- ③ 泰勒级数
- ④ 洛朗级数

第一节 复数项级数

- 复数项级数
- 绝对收敛和条件收敛

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n \geq 1}$ 是复数列. 表达式 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项 **无穷级数**.
- 称 $s_n := z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 为该级数的 **部分和**.
- 如果部分和数列 $\{s_n\}_{n \geq 1}$ 极限存在, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **收敛**, 并记 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 为它的 **和**. 否则称该级数 **发散**.

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = A$ 收敛, 则 $z_n = s_n - s_{n-1} \rightarrow A - A = 0$. 因此

$z_n \rightarrow 0$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件.

复数项级数敛散性的判定

定理

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi \text{ 当且仅当 } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b.$$

证明

设部分和

$$\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

则

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + i\tau_n.$$

由复数列的敛散性判定条件可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a + bi \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = b.$$

于是命题得证.



定理

如果实数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots$$

收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛, 且 $\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

复数项级数敛散性的判定

证明

因为 $|x_n|, |y_n| \leq |z_n|$, 由比较判别法可知实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

由三角不等式可知 $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$. 两边同时取极限即得级数的不等式关系

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|,$$

其中第二个等式是因为绝对值函数 $|z|$ 连续. □

定义

- (1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**.
- (2) 称收敛但不绝对收敛的级数 **条件收敛**.

定理

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

证明

必要性由前一定理的证明已经知道, 充分性由 $|z_n| \leq |x_n| + |y_n|$ 可得. □

绝对收敛和条件收敛的判定

		实部级数		
		发散	条件收敛	绝对收敛
虚部级数	发散	发散	发散	发散
	条件收敛	发散	条件收敛	条件收敛
	绝对收敛	发散	条件收敛	绝对收敛

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性, 且不改变其和.

一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和, 但如果重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

思考

什么时候 $\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$?

答案

当且仅当非零的 z_n 的辐角全都相同时成立.

典型例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解

由于实部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{2}{8} + \dots$$

发散, 所以该级数发散.

它的虚部级数是一个交错级数, 从而是条件收敛的.

典型例题: 复数项级数敛散性

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解

因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

均条件收敛, 所以原级数条件收敛.

典型例题: 判断级数的敛散性

练习

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{2^n} \right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

答案

实部级数条件收敛, 虚部级数绝对收敛, 所以该级数条件收敛.

由正项级数的判别法可以得到: 设

- (1) 达朗贝尔判别法 (比值法): $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$ (假设存在);
 - (2) 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);
 - (3) 柯西-阿达马判别法: $\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (子数列中极限的最大值).
- 当 $\lambda < 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.
 - 当 $\lambda > 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 发散.
 - 当 $\lambda = 1$ 时, 无法使用该方法判断敛散性.

其证明是通过将该级数与相应的等比级数做比较得到的.

典型例题: 判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{8}{n+1} \right| = 0$, 所以该级数绝对收敛.

实际上, 它的实部和虚部级数分别为

$$1 - \frac{8^2}{2!} + \frac{8^4}{4!} - \cdots = \cos 8, \quad 8 - \frac{8^3}{3!} + \frac{8^5}{5!} - \cdots = \sin 8,$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!} = \cos 8 + i \sin 8 = e^{8i}.$$

第二节 幂级数

- 幂级数的收敛域
- 收敛半径的计算
- 幂级数的运算性质

复变函数级数与实变函数级数也是类似的.

定义

- 设 $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为复变函数项级数.
- 对于 $z_0 \in D$, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 处收敛, 相应级数的值称为它的和.
- 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 上处处收敛, 则它的和是一个函数, 称为和函数.
- 称形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

我们只需要考虑 $a = 0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

阿贝尔定理

阿贝尔定理

- (1) 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 那么对任意 $|z| < |z_0|$ 的 z , 该级数必绝对收敛.
- (2) 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处发散, 那么对任意 $|z| > |z_0|$ 的 z , 该级数必发散.

证明

- (1) 因为级数收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$. 故存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 对于 $|z| < |z_0|$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = \frac{M}{1 - \left| \frac{z}{z_0} \right|}.$$

所以级数在 z 处绝对收敛. (2)是(1)的逆否命题.

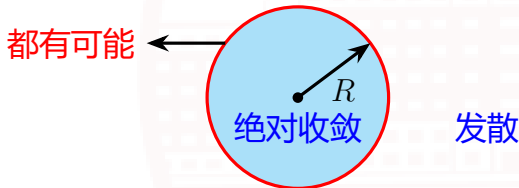


幂级数的收敛半径

设 R 是实幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| x^n$ 的收敛半径.

- 如果 $R = +\infty$, 由阿贝尔定理可知 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 处处绝对收敛.
- 如果 $0 < R < +\infty$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $|z| < R$ 上绝对收敛, 在 $|z| > R$ 上发散.
- 如果 $R = 0$, 那么 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 仅在 $z = 0$ 处收敛, 对任意 $z \neq 0$ 都发散.

我们称 R 为该幂级数的收敛半径.



例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解

如果幂级数收敛, 则由 $z^n \rightarrow 0$ 可知 $|z| < 1$. 当 $|z| < 1$ 时, 和函数为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

因此收敛半径为 1.

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R = \frac{1}{r}$, 其中

(1) 达朗贝尔公式 (比值法): $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ (假设存在);

(2) 柯西公式 (根式法): $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ (假设存在);

(3) 柯西-阿达马公式: $r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

如果 $r = 0$ 或 $+\infty$, 则 $R = +\infty$ 或 0 .

典型例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径, 并讨论 $z=0, 2$ 的情形.

解

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ 可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

当 $z=0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

事实上, 收敛圆周上既可能处处收敛, 也可能处处发散, 也可能既有收敛的点也有发散的点.

典型例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$ 的收敛半径.

解

我们有 $c_n = \cos(in) = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$. 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} + e^{-n-1}}{e^n + e^{-n}} = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2n-2}}{1 + e^{-2n}} = e$$

可知收敛半径为 $\frac{1}{e}$.

练习

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$ 的收敛半径为 $\underline{\sqrt{2}/2}$.

定理

设幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R_1, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, |z| < R_2.$$

那么当 $|z| < R = \min\{R_1, R_2\}$ 时,

$$(f \pm g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, \quad (fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

当 f, g 的收敛半径相同时, $f \pm g$ 或 fg 的收敛半径可以比 f, g 的大.

例题：幂级数展开

例

把函数 $\frac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数, 其中 $a \neq b$.

解

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-a}{b-a}}.$$

当 $|z - a| < |b - a|$ 时, $\frac{1}{z - b} = \frac{1}{a - b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{b - a} \right)^n$, 即

$$\frac{1}{z-b} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}, \quad |z-a| < |b-a|.$$

典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1} = 2$ 可知收敛半径为 $\frac{1}{2}$. 当 $|z| < \frac{1}{2}$ 时, $|2z| < 1$. 从而

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \\ &= \frac{2}{1 - 2z} - \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{(1 - 2z)(1 - z)}. \end{aligned}$$

典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ 可知收敛半径为 1. 当 $|z| < 1$ 时,

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \left(-\frac{1}{z-1} \right)' = \frac{1}{(z-1)^2}, \quad |z| < 1.$$

练习

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 的收敛半径与和函数.

答案

收敛半径为 1, 和函数为 $\ln(1 - z)$.

例题: 函数项级数的积分

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz.$$

解

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z| < 1$ 收敛, 它的和函数解析. 因此

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz &= \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z} dz + \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz \\ &= 2\pi i + 0 = 2\pi i. \end{aligned}$$

第三节 泰勒级数

- 泰勒展开的形式与性质
- 泰勒展开的计算方法

我们知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在**泰勒级数**展开?

在实变函数中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

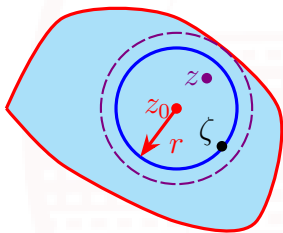
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它处处可导, 但是它在 0 处的各阶导数都是 0. 因此它的泰勒级数是 0, 余项恒为 $f(x)$. 除 0 外它的泰勒级数均不收敛到原函数.

泰勒展开的形式

设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$. 设 $|z - z_0|$ 小于 z_0 到 D 边界的距离 d , 则存在 $|z - z_0| < r < d$. 设 $K: |\zeta - z_0| = r$, 则 K 和它的内部包含在 D 中. 由于 $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$, 因此

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$



由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K$, 那么

$$\begin{aligned} |R_N(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_K \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^N \right| ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r - |z - z_0|} \cdot \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^N \cdot 2\pi r \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < d.$$

泰勒展开的成立范围

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此解析函数的泰勒展开成立的圆域不包含奇点. 由此可知, 解析函数在 z_0 处泰勒展开成立的圆域的最大半径是 z_0 到最近奇点的距离.

需要注意的是, 泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的, 而且泰勒展开等式也可能在这个圆域之外的点成立. 例如

$$f(z) = \begin{cases} e^z, & z \neq 1; \\ 0, & z = 1 \end{cases}$$

的麦克劳林展开为 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1.$

现在我们来看 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. 它的奇点为 $\pm i$, 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1, 1)$.

若 $f(z)$ 在 z_0 附近展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, 则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k k(k-1) \cdots (k-n+1)(z - z_0)^{k-n} \Big|_{z=z_0} = n!c_n.$$

所以解析函数的幂级数展开是唯一的.

因此解析函数的泰勒展开不仅可以直接求出各阶导数得到, 也可以利用幂级数的运算法则得到.

典型例题: 泰勒展开的计算

例

由于 $(e^z)^{(n)}(0) = e^z|_{z=0} = 1$, 因此

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z.$$

例

由于 $(\cos z)^{(n)} = \cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right)$,

$$(\cos z)^{(2n+1)}(0) = 0, \quad (\cos z)^{(2n)}(0) = (-1)^n,$$

因此

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z.$$

例

由 e^z 的泰勒展开可得

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n - (-iz)^n}{2i \cdot n!} \\ &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z.\end{aligned}$$

例

函数 $f(z) = (1+z)^\alpha$ 的主值为 $\exp[\alpha \ln(1+z)]$. 它在去掉射线 $z = x \leq -1$ 的区域内解析. 由于

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \exp\left[(\alpha-n)\ln(1+z)\right]\Big|_{z=0} \\ &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(1+z)^\alpha &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n, \quad |z| < 1.\end{aligned}$$

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z = x \leq -1$ 的区域内解析, 因此它在 $|z| < 1$ 内解析. 此时

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

逐项积分得到

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= \int_0^z \frac{1}{1+\zeta} d\zeta = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解

由于 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z = -1$, 因此它在 $|z| < 1$ 内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+z)^2} &= -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\frac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解

由于 $\frac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z = \frac{2}{3}$, 因此它在 $|z| < \frac{2}{3}$ 内解析. 此时

$$\begin{aligned}\frac{1}{3z-2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3z}{2}\right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} z^n, \quad |z| < \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

典型例题：泰勒展开的计算

练习

将 $\frac{1}{1-3z+2z^2}$ 展开成 z 的幂级数.

答案

$$\frac{1}{1-3z+2z^2} = \frac{2}{1-2z} - \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1)z^n, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

思考

奇函数和偶函数的麦克劳林展开有什么特点?

答案

奇函数 (偶函数) 的麦克劳林展开只有奇数次项 (偶数次项).

第四节 洛朗级数

- 双边幂级数
- 洛朗展开的形式
- 洛朗展开的计算方法

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z - z_0$ 的幂级数, 然而它却可能可以展开为**双边幂级数**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

例如

$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + \cdots, \quad 0 < |z| < 1.$$

设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2 , 则它在 $|z - z_0| < R_2$ 内收敛, 在 $|z - z_0| > R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R , 则它在 $|\zeta| < R$ 内收敛,

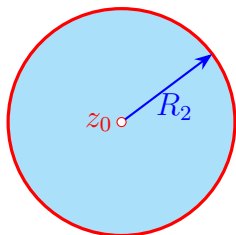
在 $|\zeta| > R$ 内发散. 设 $R_1 := \frac{1}{R}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$ 在 $|z - z_0| > R_1$ 内收敛, 在 $|z - z_0| < R_1$ 内发散.

- (1) 如果 $R_1 > R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.
- (2) 如果 $R_1 = R_2$, 则该双边幂级数只在圆周 $|z - z_0| = R_1$ 上可能有收敛的点. 此时没有收敛域.
- (3) 如果 $R_1 < R_2$, 则该双边幂级数在 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内收敛, 在 $|z - z_0| < R_1$ 或 $> R_2$ 内发散, 在圆周 $|z - z_0| = R_1$ 或 R_2 上既可能发散也可能收敛.

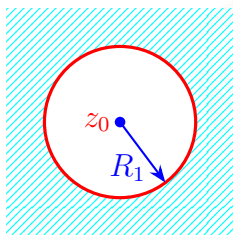
双边幂级数的收敛域

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

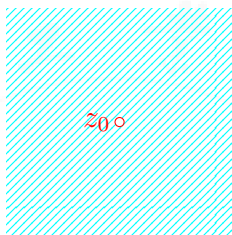
当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.



$$0 < |z - z_0| < R_2 \quad R_1 < |z - z_0| < +\infty \quad 0 < |z - z_0| < +\infty$$



$$R_1 < |z - z_0| < +\infty$$



$$0 < |z - z_0| < +\infty$$

双边幂级数的非负幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析 ($\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ 关于 z 解析), 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

例题: 双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2+i)^n}$ 的收敛域与和函数.

解

非负幂次部分收敛域为 $|z| < |2+i| = \sqrt{5}$, 负幂次部分收敛域为 $|z| > |2| = 2$. 因此该双边幂级数的收敛域为 $2 < |z| < \sqrt{5}$. 此时

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2+i)^n} = \frac{\frac{2}{z}}{1 - \frac{2}{z}} + \frac{1}{1 - \frac{z}{2+i}} = \frac{-iz}{(z-2)(z-2-i)}.$$

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为洛朗级数.

例如 $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ 在 $z = 0, 1$ 以外解析. 在圆环域 $0 < |z| < 1$ 内,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

在圆环域 $1 < |z| < +\infty$ 内,

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} - \dots$$

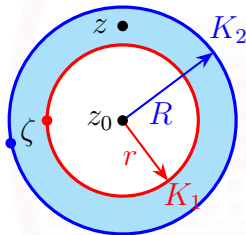
洛朗级数的形式

现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到洛朗展开式. 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析. 设

$$K_1 : |z - z_0| = r, \quad K_2 : |z - z_0| = R, \quad R_1 < r < R < R_2.$$

是该圆环域内的两个圆周. 对于 $r < |z - z_0| < R$, 由柯西积分公式,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$



和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta \in K_1$, 由 $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ 可得

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}},$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta.$$

令

$$\begin{aligned} R_N(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} \cdot \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{N-1} d\zeta. \end{aligned}$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K_1$, 那么

$$\begin{aligned} |R_N(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} \cdot \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{N-1} \right| ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{|z - z_0| - r} \cdot \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right|^{N-1} \cdot 2\pi r \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right] (z - z_0)^{-n},$$

其中 $r < |z - z_0| < R$. 由复合闭路定理, K_1, K_2 可以换成任意一条在圆环域内绕 z_0 的闭路 C . 从而我们得到 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心的圆环域的洛朗展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n,$$

其中 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

我们称 $f(z)$ 洛朗展开的非负幂次部分为它的解析部分, 负幂次部分为它的主要部分.

设在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为
双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

则逐项积分得到

$$\oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta = 2\pi i c_n.$$

因此 $f(z)$ 在圆环域内的双边幂级数展开是唯一的, 它就是洛朗级数.

典型例题: 求洛朗级数

例

将 $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

由洛朗级数的唯一性, 我们可以从 e^z 的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数. 这种做法比直接计算积分更简便. 因此我们一般不用直接法, 而是用双边幂级数的代数、求导、求积分运算来得到洛朗级数.

解

$$\frac{e^z - 1}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n,$$

其中 $0 < |z| < +\infty$.

例

在下列圆环域中把 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0 < |z| < 1$, (2) $1 < |z| < 2$, (3) $2 < |z| < +\infty$.

解

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1, 2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. 注意到

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},$$

因此我们可以根据 $|z|$ 的范围来将其展开成等比级数.

续解

(1) 由于 $|z| < 1$, $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2-z} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \dots \end{aligned}$$

续解

(2) 由于 $\left| \frac{1}{z} \right| < 1, \left| \frac{z}{2} \right| < 1$, 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \\ &= \dots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \dots \end{aligned}$$

续解

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots \end{aligned}$$

洛朗展开的一些特点可以帮助我们检验计算的正确性.

- 若 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由唯一性可知泰勒级数等于洛朗级数, 因此此时洛朗展开一定没有负幂次项.
- 若 $f(z)$ 在圆周 $|z - z_0| = R_1, R_2 > 0$ 上有奇点, 则在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 上的洛朗展开一定有无穷多负幂次和无穷多正幂次项.
- 有理函数在 $0 < |z - z_0| < r$ 洛朗展开最多只有有限多负幂次项, 在 $R < |z - z_0| < +\infty$ 洛朗展开最多只有有限多正幂次项.
- 有理函数在不同圆环域上的洛朗展开形式地相减, 系数会有共同的通项形式 (形如 $\frac{P(n)}{\lambda^n}$ 的组合, 其中 λ 是奇点, $P(n)$ 是多项式).

例如
$$f(z) = \frac{z^3 - 2z^2 - z + 3}{(z-1)(z-2)} = z + 1 + \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},$$

$$f(z) = -\sum_{n<0} z^n + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z - \sum_{n\geq 2} 2^{-n-1}z^n, \quad 1 < |z| < 2.$$

每个系数加 1 得到

$$f(z) = \frac{3}{2} + \frac{7}{4}z + \sum_{n\geq 2} (1 - 2^{-n-1})z^n, \quad 0 < |z| < 1,$$

每个系数加 2^{-n-1} 得到

$$f(z) = \sum_{n<0} (2^{-n-1} - 1)z^n + 1 + z, \quad |z| > 2.$$

例

(2022 年 A 卷) 将函数 $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域 $0 < |z| < 1$ 内展开成洛朗级数.

解

$$f(z) = \frac{z-1+2}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} = -\frac{1}{1-z} + 2\left(\frac{1}{1-z}\right)'$$

因此当 $0 < |z| < 1$ 时,

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) z^n.$$

注意到当 $n = -1$ 时, 洛朗级数的系数

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分, 它就是所谓的**留数**.

例题：洛朗展开的应用

例

求 $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)^2} dz$.

解

注意到闭路 $|z| = 3$ 落在 $1 < |z + 1| < +\infty$ 内. 我们在这个圆环域内求 $f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}$ 的洛朗展开.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z+1)^2} = \frac{1}{(z+1)^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z+1}} \\ &= \frac{1}{(z+1)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^{n+3}} \end{aligned}$$

故 $\oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1} = 0$.