HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室：翡翠科教楼 *B1810* 东

Email：zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址：https://zhangshenxing.gitee.io

第二章　解析函数

第一节　解析函数的概念

由于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义

设 $w=f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0\in D$. 如果极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作

$$f'(z_0)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 称 $f(z)$ 在 D 内可导.

典型例题：线性函数的不可导性

例

函数 $f(z)=x+2yi$ 在哪些点处可导?

解

$$
\begin{aligned}
f'(z)&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\
&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)i-(x+2yi)}{\Delta z}\\
&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}.
\end{aligned}
$$

当 $\Delta x=0$ 时，上述极限为 2；当 $\Delta y=0$ 时，上述极限为 1. 因此该极限不存在，$f(z)$ 处处不可导.

若将 $f(z)$ 视为二元实变量的函数，则该函数在不同方向的方向导数不同.

例题：复变函数的导数

练习

函数 $f(z) = x - yi$ 在哪些点处可导?

答案

处处不可导.

例

求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.
\end{aligned}
$$

求导运算法则

和一元实变函数情形类似，我们有如下求导法则：

定理

- $(c)' = 0$，其中 c 为复常数；
- $(z^n)' = nz^{n-1}$，其中 n 为整数；
- $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf'$；
- $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$；
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z)$；
- $f'(z) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(w)}, w = f(z)$.

可导蕴含连续

定理

若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

证明

该定理的证明和实变量情形完全相同. 设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0} \Delta w &= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z \\ &= \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z\to 0} \Delta z \\ &= f'(z_0) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

□

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

定义

如果存在常数 A 使得函数 $w=f(z)$ 满足

$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\Delta z+o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}w=A\Delta z$.

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $\mathrm{d}w=f'(z_0)\Delta z$, $\mathrm{d}z=\Delta z$. 故 $\mathrm{d}w=f'(z_0)\,\mathrm{d}z$, $f'(z_0)=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$.

解析函数

定义

- 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数(也叫全纯函数或正则函数).
- 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

由于区域 D 是一个开集, 其中的任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 的邻域. 所以 $f(z)$ 在 D 内解析和在 D 内可导是等价的.

如果 $f(z)$ 在 z_0 解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集.

解析函数

例

研究函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

解

由于

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}$$
$$=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi},$$

若 $z=0$, 则当 $\Delta z\to 0$ 时该极限为 0.

若 $z\neq 0$, 则当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}+z$; 当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}-z$. 因此此时极限不存在.

故 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处可导, 从而处处不解析.