



合肥工业大学

HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## 复变函数与积分变换

---

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: [zhangshenxing@hfut.edu.cn](mailto:zhangshenxing@hfut.edu.cn)

课件地址: <https://zhangshenxing.gitee.io>

## 第六章 积分变换

- ① 傅里叶变换
- ② 拉普拉斯变换

在学习指数和对数的时候, 我们了解到利用对数可以将乘除、幂次转化为加减、乘除.

例

计算  $12345 \times 67890$ .

解

通过查对数表得到

$$\ln 12345 \approx 9.4210, \quad \ln 67890 \approx 11.1256.$$

将二者相加并通过反查对数表得到原值

$$12345 \times 67890 \approx \exp(20.5466) \approx 8.3806 \times 10^8.$$

而对于函数而言, 我们常常要解函数的微积分方程.

例

解微分方程

$$\begin{cases} y'' + y = t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

解

我们希望能找到一种函数变换  $\mathcal{L}$ , 使得它可以把函数的微分和积分变成代数运算, 计算之后通过反变换  $\mathcal{L}^{-1}$  求得原来的解.

这个变换最常见的就是我们将要介绍的傅里叶变换和拉普拉斯变换.

## 第一节 傅里叶变换

- 傅里叶级数
- 傅里叶积分与傅里叶变换
- 狄拉克  $\delta$  函数
- 傅里叶变换的性质
- 卷积
- 傅里叶变换的应用

## 周期函数的傅里叶级数展开

为了引入傅里叶变换, 我们回顾下傅里叶级数展开.

设  $f(t)$  是定义在  $(-\infty, +\infty)$  上周期为  $T$  的可积实变函数. 我们知道  $\cos n\omega t$  和  $\sin n\omega t$  周期也是  $T$ , 其中  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . 如果  $f(t)$  在  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  上满足狄利克雷条件:

- 间断点只有有限多个, 且均为第一类间断点;
- 只有有限个极值点,

则我们有傅里叶级数展开:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t).$$

当  $t$  是间断点时, 傅里叶级数的左侧需改为  $\frac{f(t+) + f(t-)}{2}$ .

## 傅里叶级数的复指数形式

我们来将其改写为复指数形式. 物理中为了与电流  $i$  区分, 通常用  $j$  来表示虚数单位. 由

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

可知  $f(t)$  的傅里叶级数可以表示为函数  $e^{jn\omega t}$  的线性组合. 设

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}, \text{ 则}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jn\omega t} dt.$$

于是我们得到周期函数傅里叶级数的复指数形式:

$$f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-jn\omega\tau} d\tau \right] e^{jn\omega t}.$$

对于一般的函数  $f(t)$ , 它未必是周期的. 我们考虑它在  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  上的限制, 并向两边扩展成一个周期函数  $f_T(t)$ . 设

$$\omega_n = n\omega, \quad \Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \omega,$$

则

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} f_T(t) \\ &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega_n \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-j\omega_n \tau} d\tau \right] e^{j\omega_n t} \Delta\omega_n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right] e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$



## 傅里叶积分定理

## 傅里叶积分定理

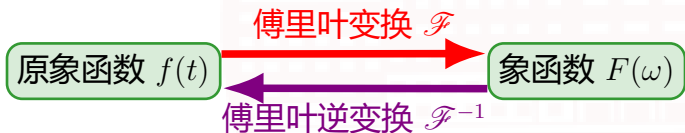
设函数  $f(t)$  满足

- 在  $(-\infty, +\infty)$  上绝对可积;
- 在任一有限区间上满足狄利克雷条件.

那么

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

对于  $f(t)$  的间断点左边需要改成  $\frac{f(t+)+f(t-)}{2}$ .







### 例题: 求傅里叶变换

例

求函数  $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$  的傅里叶变换.

解

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} \, dt \\ &= \int_{-1}^1 (\cos \omega t - j \sin \omega t) \, dt = \frac{2 \sin \omega}{\omega}. \end{aligned}$$

### 例题: 求傅里叶变换

由傅里叶积分公式

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 \sin \omega}{\omega} (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega. \end{aligned}$$

当  $t = \pm 1$  时, 左侧应替换为  $\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2}$ . 由此可得

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega \cos \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi/2, & |t| < 1, \\ \pi/4, & |t| = 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

特别地, 可以得到狄利克雷积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$ .

### 例题: 求傅里叶变换

例

求函数  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$  的傅里叶变换.

解

根据前面的例子可知

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin t \cos \omega t}{t} dt = \begin{cases} \pi, & |\omega| < 1, \\ \pi/2, & |\omega| = 1, \\ 0, & |\omega| > 1. \end{cases}$$

## 例题: 求傅里叶变换

例

求函数  $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (0, 1), \\ -1, & t \in (-1, 0), \\ 0, & \text{其它情形} \end{cases}$  的傅里叶变换.

解

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \left( \int_0^1 - \int_{-1}^0 \right) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = -\frac{2j(1 - \cos \omega)}{\omega}. \end{aligned}$$

类似可得  $\int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos \omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} \pi/2, & 0 < t < 1, \\ \pi/4, & t = 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$

### 例题: 求傅里叶变换

例

求指数衰减函数  $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-\beta t}, & t \geq 0 \end{cases}$  的傅里叶变换,  $\beta > 0$ .

解

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\beta+j\omega)t} dt = \frac{1}{\beta + j\omega}. \end{aligned}$$

类似可得  $\int_0^{+\infty} \frac{\beta \cos \omega t + \omega \sin \omega t}{\beta^2 + \omega^2} d\omega = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \pi/2, & t = 0, \\ \pi e^{-\beta t}, & t > 0. \end{cases}$



## 例题: 求傅里叶变换

例

求钟形脉冲函数  $f(t) = e^{-\beta t^2}$  的傅里叶变换和积分表达式,  $\beta > 0$ .

解

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta t^2} e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\beta \left( t + \frac{j\omega}{2\beta} \right)^2 \right] dt = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}. \end{aligned}$$

类似可得  $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \cos \omega t \, d\omega = \sqrt{\pi\beta} e^{-\beta t^2}$ .

## 广义函数

傅里叶变换存在的条件是比较苛刻的. 例如常值函数  $f(t) = 1$  在  $(-\infty, +\infty)$  上不是可积的, 所以它没有傅里叶变换, 这很影响我们使用傅里叶变换. 为此我们引入广义函数的概念.

设  $\mathcal{C}$  是一些函数形成的线性空间, 例如全体绝对可积函数, 或者全体光滑函数之类的. 从一个函数  $\lambda(t)$  出发, 可以定义一个线性映射  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\langle \lambda, f \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) f(t) \, dt.$$

这个线性映射基本上确定了  $\lambda(t)$  本身 (至多可数个点处不同).

广义函数就是指一个线性映射  $\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ . 为了和普通函数类比, 通常也将广义函数表为上述积分形式 (并不是真的积分):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) f(t) \, dt.$$

这里的  $\lambda(t)$  并不表示一个真正的函数.

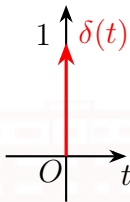
## 定义

$\delta$  函数是指广义函数

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0).$$

设  $\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases}$  则对于连续函数  $f(t)$ ,

$$\langle \delta_\varepsilon, f \rangle = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(t) dt = f(\xi), \quad \xi \in (0, \varepsilon).$$



当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 右侧就趋于  $f(0)$ . 因此  $\delta$  可以看成  $\delta_\varepsilon$  的某种极限. 基于此, 我们通常用长度为 1 的有向线段来表示它.





## 例题: 求傅里叶变换

例

证明  $\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ .

## 证明

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{j\omega} \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega.$$

由  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}$  可知  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2} \text{sgn}(t)$ . 故

$$\mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = \frac{1}{2}\text{sgn}(t) + \frac{1}{2} = u(t) \quad (t \neq 0).$$









## 傅里叶变换的性质

由微分性质可得

## 乘多项式性质

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[tf(t)] &= jF'(\omega), & \mathcal{F}^{-1}[\omega F(\omega)] &= -jf'(t), \\ \mathcal{F}[t^k f(t)] &= j^k F^{(k)}(\omega), & \mathcal{F}^{-1}[\omega^k F(\omega)] &= (-j)^k f^{(k)}(t).\end{aligned}$$

## 积分性质

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) \, \mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega).$$

由变量替换易得

## 相似性质

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad \mathcal{F}^{-1}[F(a\omega)] = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right).$$



## 典型例题：计算傅里叶变换

例

求  $\sin \omega_0 t$  的傅里叶变换.

解

由于  $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$ , 因此  $\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] &= \frac{1}{2j} [\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] - \mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t}]] \\ &= \frac{1}{2j} [2\pi\delta(\omega - \omega_0) - 2\pi\delta(\omega + \omega_0)] \\ &= j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)].\end{aligned}$$

## 练习

$$\mathcal{F}[\cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \quad .$$





## 例题: 计算卷积

例

设  $f_1(t) = u(t)$ ,  $f_2(t) = e^{-t}u(t)$ . 求  $f_1 * f_2$ .

解

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t - \tau) \, d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} u(t - \tau) \, d\tau.$$

当  $t < 0$  时,  $(f_1 * f_2)(t) = 0$ . 当  $t \geq 0$  时,

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t e^{-\tau} \, d\tau = 1 - e^{-t}.$$

故  $(f_1 * f_2)(t) = (1 - e^{-t})u(t)$ .











### 例题：使用傅里叶变换解微积分方程

例

解方程  $y'(t) - \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau = 2\delta(t)$ .

解

设  $\mathcal{F}[y] = Y$ . 两边同时作傅里叶变换得到

$$j\omega Y(\omega) - \frac{1}{j\omega} Y(\omega) = 2,$$

$$Y(\omega) = -\frac{2j\omega}{1 + \omega^2} = \frac{1}{1 + j\omega} - \frac{1}{1 - j\omega},$$

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{1-j\omega} \right] = \begin{cases} 0 - e^t = -e^t, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ e^{-t} - 0 = e^{-t}, & t > 0. \end{cases}$$

### 例题：使用傅里叶变换解微积分方程

例

解方程  $y''(t) - y(t) = 0$ .

解

设  $\mathcal{F}[y] = Y$ , 则

$$\mathcal{F}[y''(t) - y(t)] = [(j\omega)^2 - 1]Y(\omega) = 0,$$

$$Y(\omega) = 0, \quad y(t) = \mathcal{F}^{-1}[Y(\omega)] = 0.$$

显然这是不对的, 该方程的解应该是  $y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ .

原因在于使用傅里叶变换要求函数是绝对可积的, 而  $e^t, e^{-t}$  并不满足该条件. 我们需要一个对函数限制更少的积分变换来解决此类方程, 例如拉普拉斯变换.

## 第二节 拉普拉斯变换

- 拉普拉斯变换
- 拉普拉斯变换的性质
- 拉普拉斯逆变换
- 卷积定理
- 拉普拉斯变换的应用







### 例题：求拉普拉斯变换

例

求  $\mathcal{L}[e^{kt}]$ .

解

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{kt}] &= \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t} dt = -\frac{1}{s-k} e^{-(s-k)t} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s-k}, \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} k.\end{aligned}$$

即  $\mathcal{L}[e^{kt}] = \frac{1}{s-k}$ . 特别地  $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$ .

### 例题：求拉普拉斯变换

## 例

求  $\mathcal{L}[t^m]$ , 其中  $m$  是正整数.

解

由分部积分可知

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^m] &= \int_0^{+\infty} t^m e^{-st} \, dt \\ &= -\left. \frac{t^m e^{-st}}{s} \right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-st}}{s} \cdot m t^{m-1} \, dt \\ &= \frac{m}{s} \mathcal{L}[t^{m-1}].\end{aligned}$$

归纳可知  $\mathcal{L}[t^m] = \frac{m!}{s^m} \mathcal{L}[1] = \frac{m!}{s^{m+1}}$ .





## 典型例题：求拉普拉斯变换

例

求  $\mathcal{L}[\sin kt]$ .

解

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin kt] &= \frac{\mathcal{L}[e^{jkt}] - \mathcal{L}[e^{-jkt}]}{2j} \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - jk} - \frac{1}{s + jk} \right) = \frac{k}{s^2 + k^2}.\end{aligned}$$

练习

$$\mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2}.$$

## 例题: 求拉普拉斯变换

例

求  $\mathcal{L}[t^m e^{kt}]$ , 其中  $m$  是正整数.

解

由  $\mathcal{L}[t^m] = \frac{m!}{s^{m+1}}$  可知

$$\mathcal{L}[t^m e^{kt}] = \frac{m!}{(s - k)^{m+1}}.$$







## 例题: 求拉普拉斯逆变换

例

求  $F(s) = \frac{1}{s(s-1)^2}$  的拉普拉斯逆变换.

解

$$\text{Res}[F(s)e^{st}, 0] = \left. \frac{e^{st}}{(s-1)^2} \right|_{s=0} = 1,$$

$$\text{Res}[F(s)e^{st}, 1] = \left. \left( \frac{e^{st}}{s} \right)' \right|_{s=1} = \left. \frac{te^{st}s - e^{st}}{s^2} \right|_{s=1} = (t-1)e^t,$$

故  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 1 + (t-1)e^t$ .

### 例题: 求拉普拉斯逆变换

### 另解

设  $F(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{(s-1)^2}$ , 则

$$a = \text{Res}[F(s), 0] = \frac{1}{(s-1)^2} \Big|_{s=0} = 1,$$

$$b = \text{Res}[F(s), 1] = \left(\frac{1}{s}\right)' \Big|_{s=1} = -\frac{1}{s^2} \Big|_{s=1} = -1,$$

$$c = \text{Res}[(s-1)F(s), 1] = \frac{1}{s} \Big|_{s=1} = 1.$$

$$\text{故 } \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}\right] = 1 + (t-1)e^t.$$

由于在拉普拉斯变换中, 我们考虑的函数在  $t < 0$  时都是零. 此时函数的卷积变成了

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0,$$

且我们有如下的卷积定理.

### 卷积定理

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s).$$



### 例题：使用拉普拉斯变换解微分方程

## 例

(2022 年 A 卷) 解微分方程  $\begin{cases} y'' + 2y = \sin t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$

解

设  $\mathcal{L}[y] = Y$ , 则  $\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2$ , 因此

$$s^2Y - 2 + 2Y = \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1},$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 2} + \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 2)} = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 2},$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 2} \right] = \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}t).$$

## 例题: 使用拉普拉斯变换解微分方程

例

解微分方程  $y''(t) - y(t) = 0$ .

解

设  $a = y(0), b = y'(0), \mathcal{L}[y] = Y$ , 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - as - b,$$

$$s^2 Y - as - b - Y = 0,$$

$$Y(s) = \frac{as - b}{s^2 - 1} = \frac{a + b}{2} \cdot \frac{1}{s - 1} + \frac{a - b}{2} \cdot \frac{1}{s + 1},$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{a + b}{2} e^t + \frac{a - b}{2} e^{-t}.$$