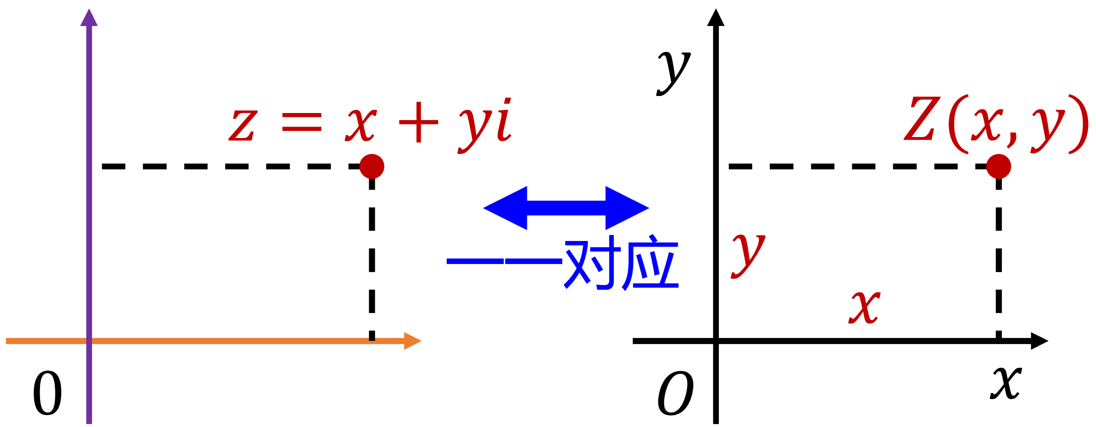
1.2 复数的几何表示

复平面

- 由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.

复平面

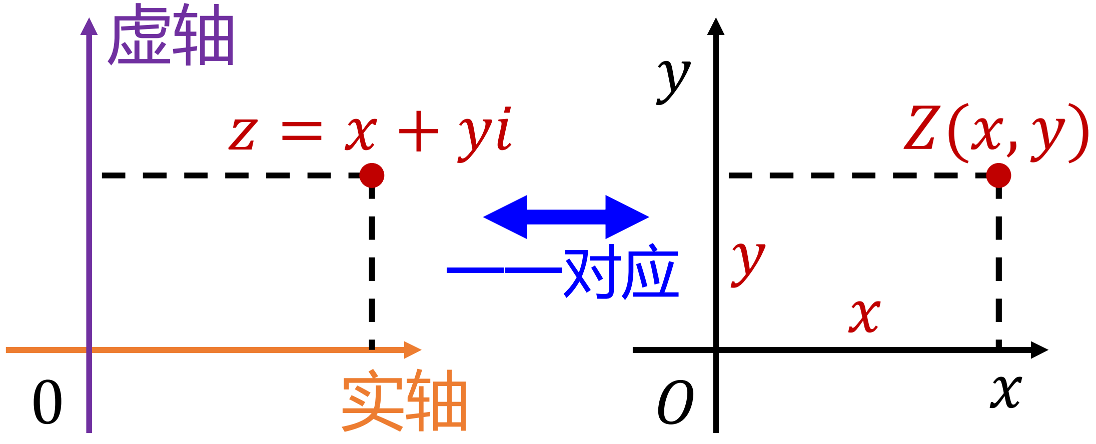
- 由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



直角坐标系

复平面

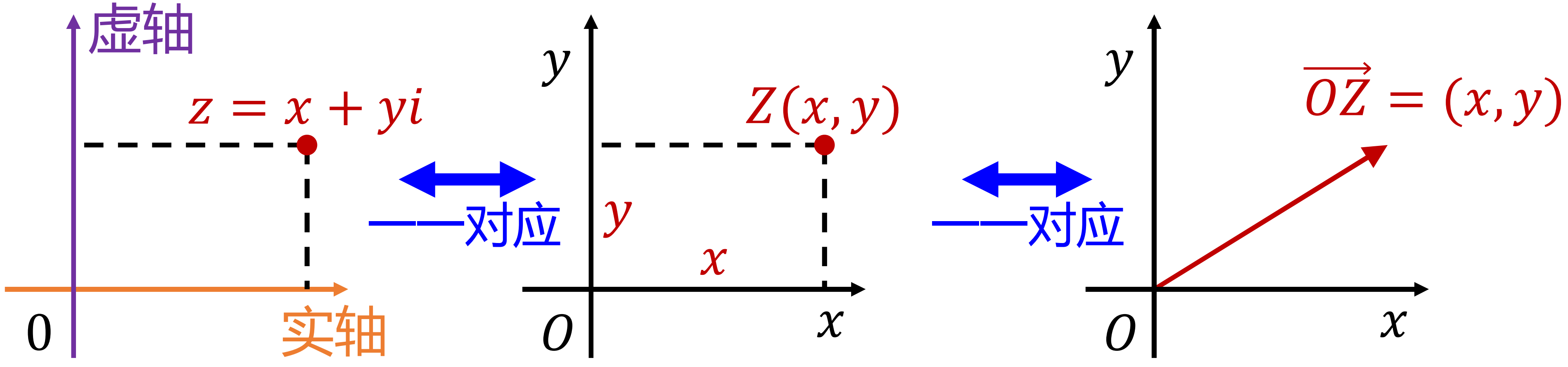
- 由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



复平面　　　　直角坐标系

复平面

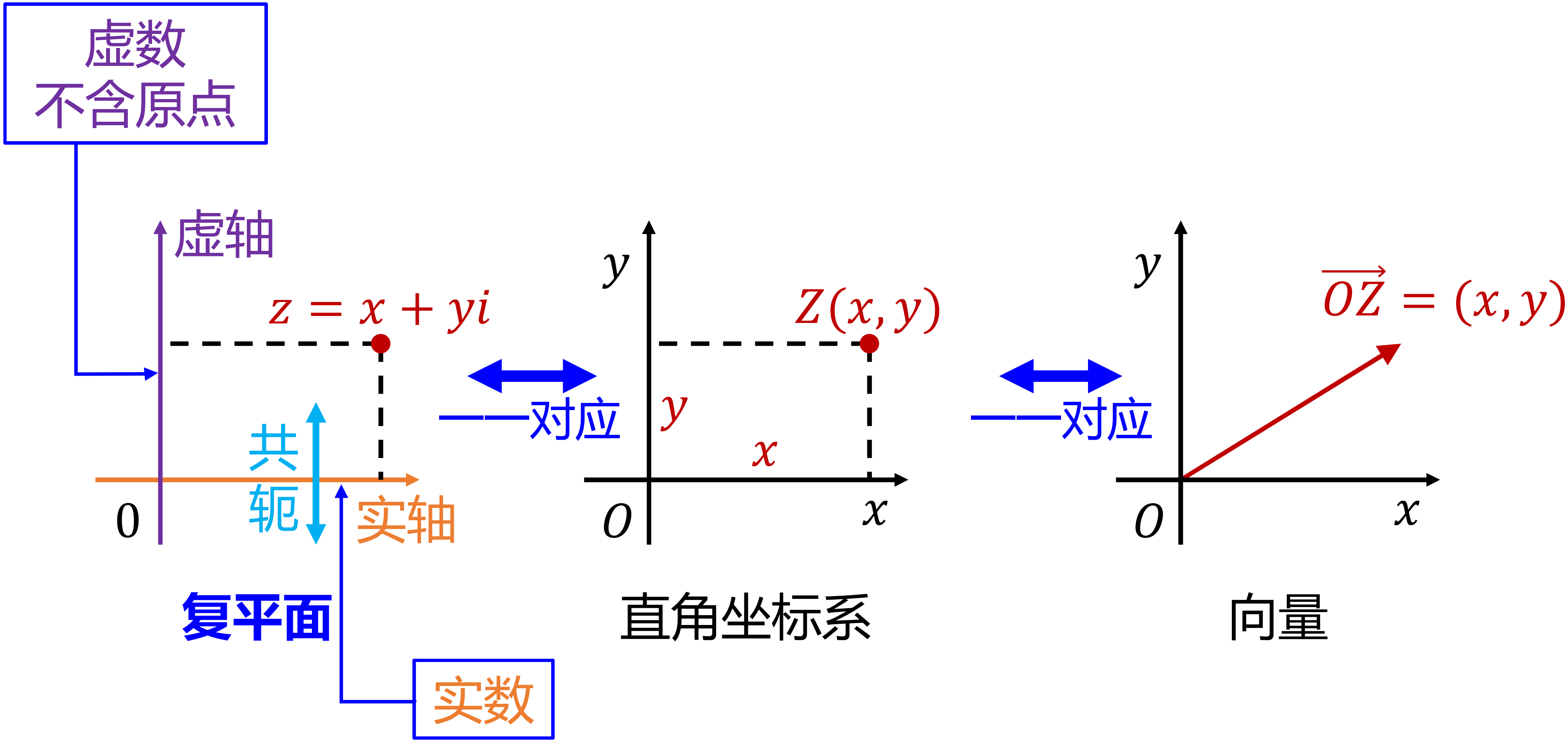
- 由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



复平面 直角坐标系 向量

复平面

- 由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.

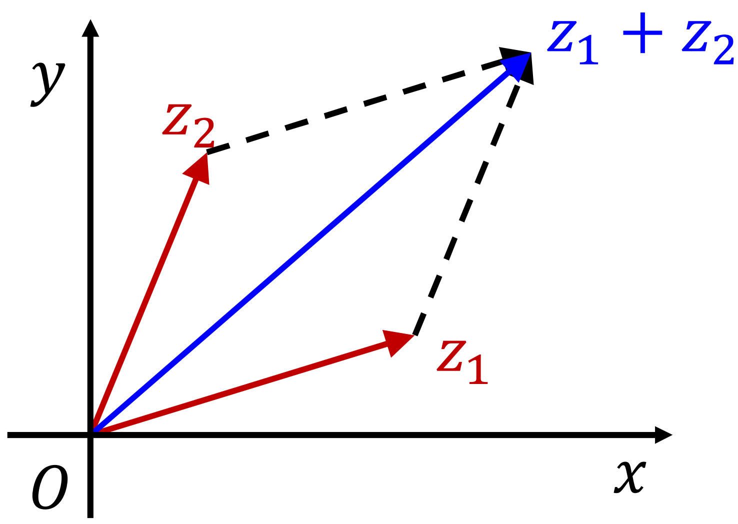


加减法一致

- 在这种对应关系下, 复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.

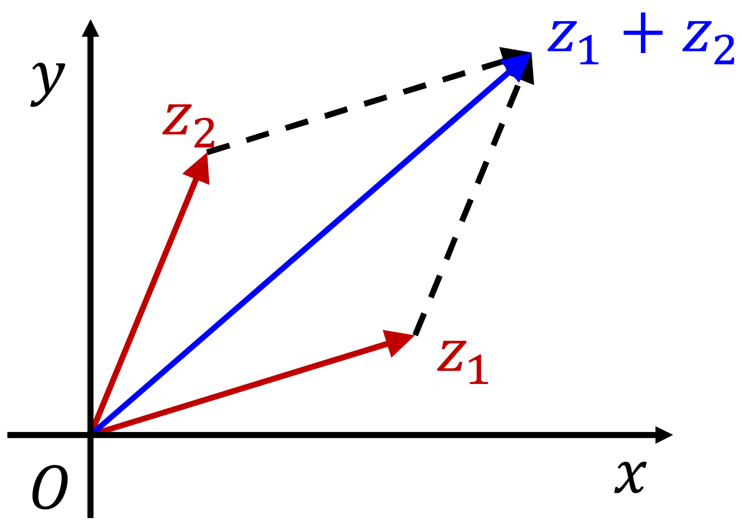
加减法一致

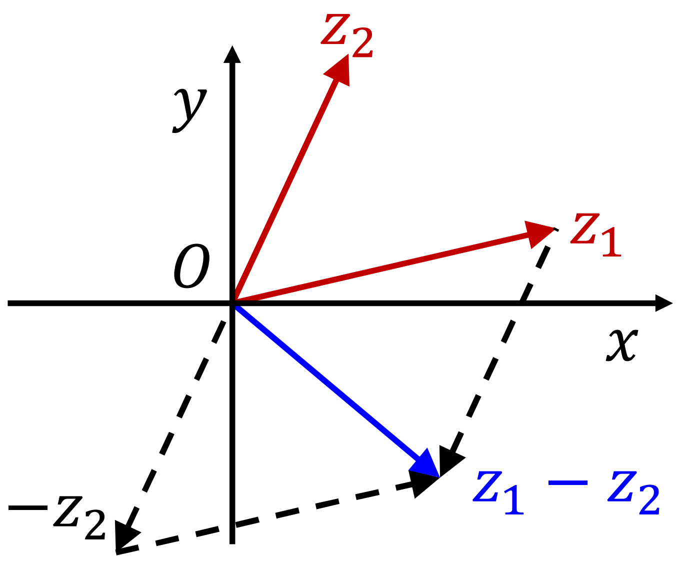
- 在这种对应关系下, 复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.



加减法一致

- 在这种对应关系下，复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.





复数的极坐标形式

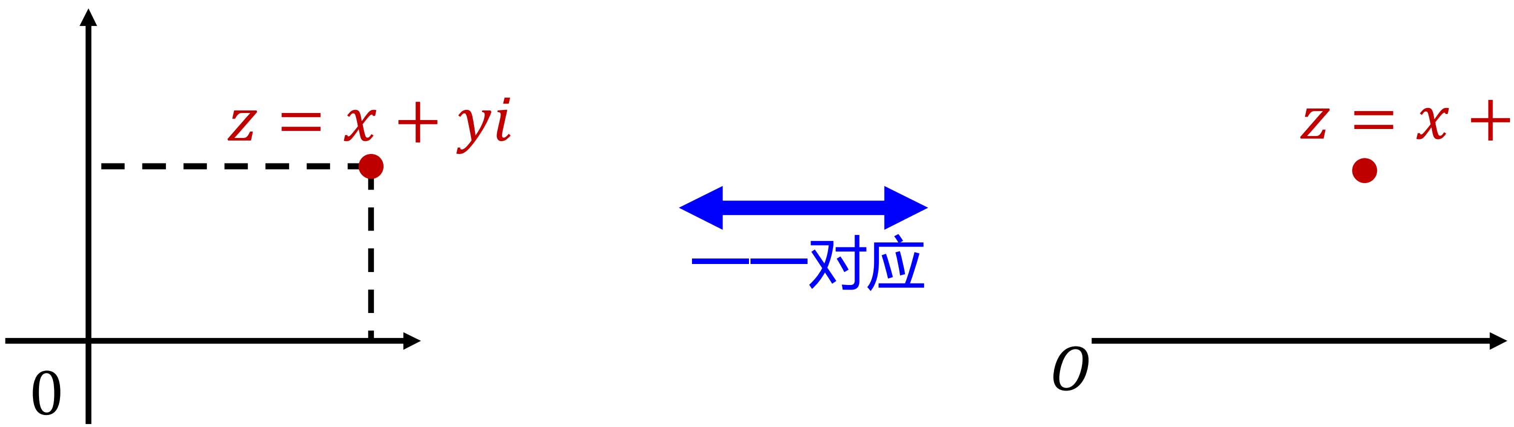
- 由平面的极坐标表示, 可以得到复数的另一种表示方式.

复数的极坐标形式

- 由平面的极坐标表示, 可以得到复数的另一种表示方式.
- 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.

复数的极坐标形式

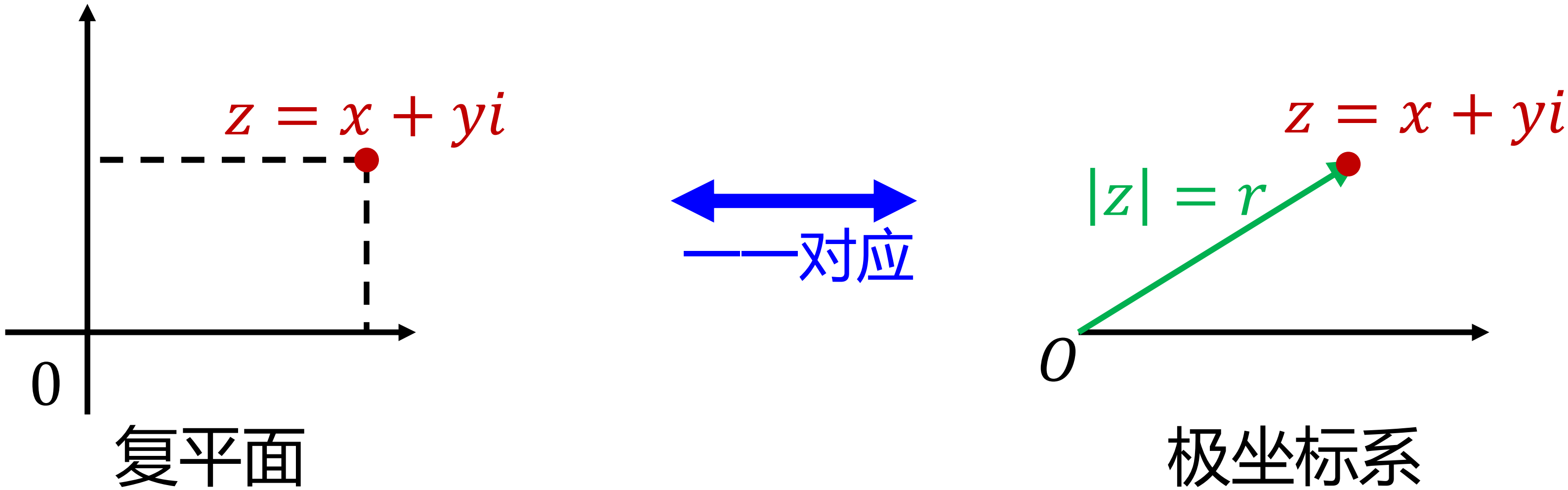
- 由平面的极坐标表示，可以得到复数的另一种表示方式.
- 以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



复平面　　　　极坐标系

复数的极坐标形式

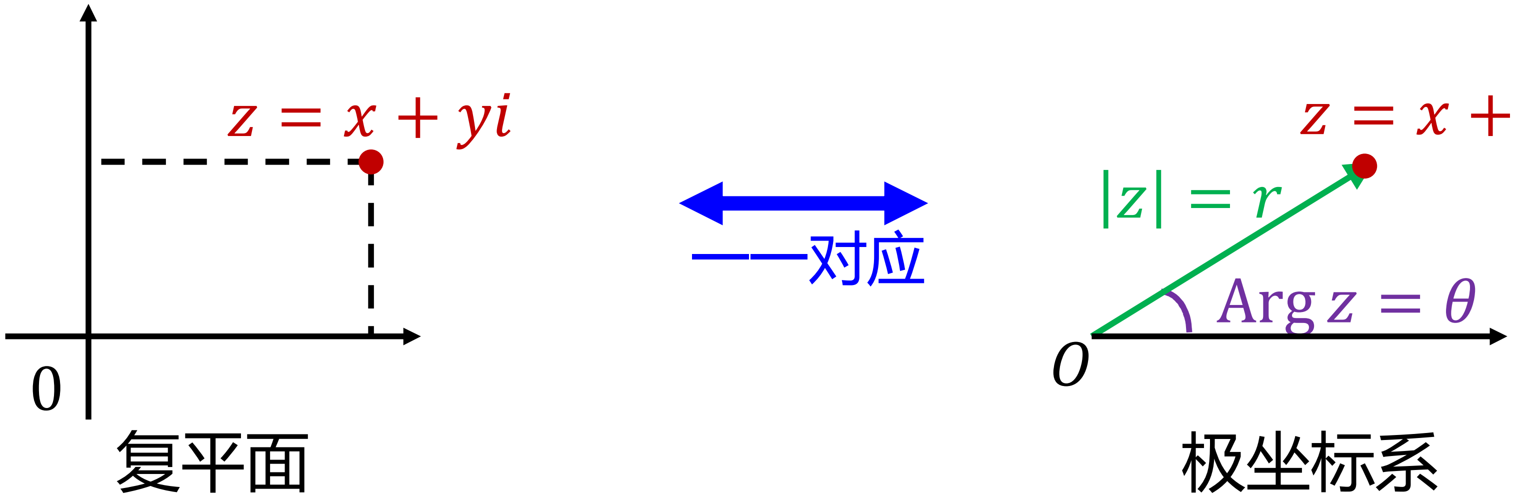
- 由平面的极坐标表示, 可以得到复数的另一种表示方式.
- 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



定义

称 r 为 z 的**模**, 记为 $|z| = r$.

- 由平面的极坐标表示, 可以得到复数的另一种表示方式.
- 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



定义

称 r 为 z 的**模**, 记为 $|z| = r$.

称 θ 为 z 的**辐角**, 记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$. 0 的辐角没有意义.

极坐标和直角坐标的对应

- 由极坐标和直角坐标的对应可知

极坐标和直角坐标的对应

- 由极坐标和直角坐标的对应可知

$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta\,,$$

- 由极坐标和直角坐标的对应可知

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

极坐标和直角坐标的对应

- 由极坐标和直角坐标的对应可知

$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta\,, \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi, & x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y < 0, \\ \text{任意/无意义}, & x = y = 0. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 由极坐标和直角坐标的对应可知

$$x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta\,, \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi, & x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y < 0, \\ \text{任意/无意义}, & x = y = 0. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{\arctan t : (-\infty, +\infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$$

主辐角

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.

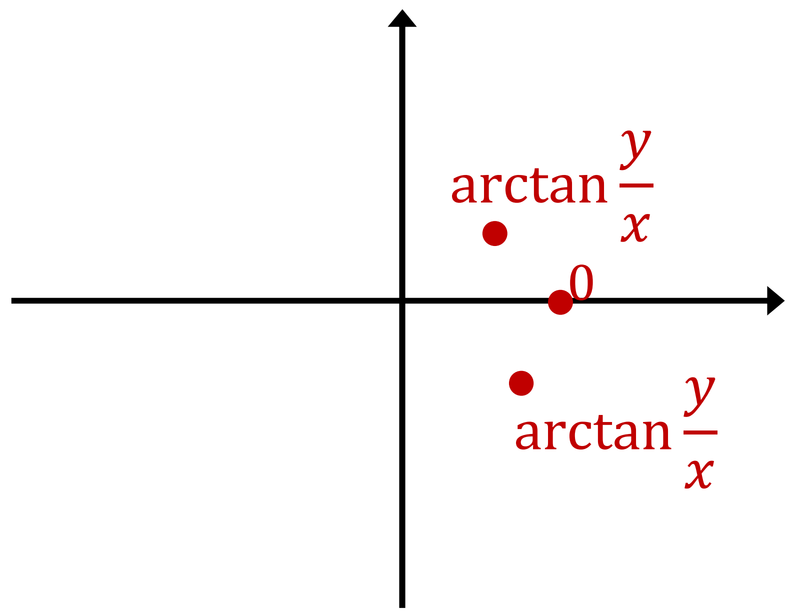
主辐角

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.
- 固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 $\mathbf{arg}\, z$.

主辐角

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.
- 固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 $\boldsymbol{\arg z}$.

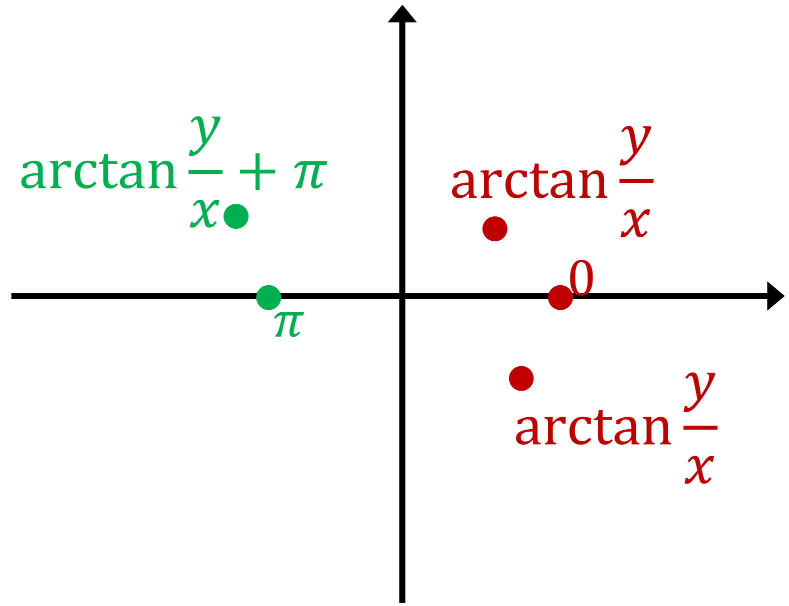
$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0, \end{cases}$$



主辐角

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.
- 固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 $\boldsymbol{\arg z}$.

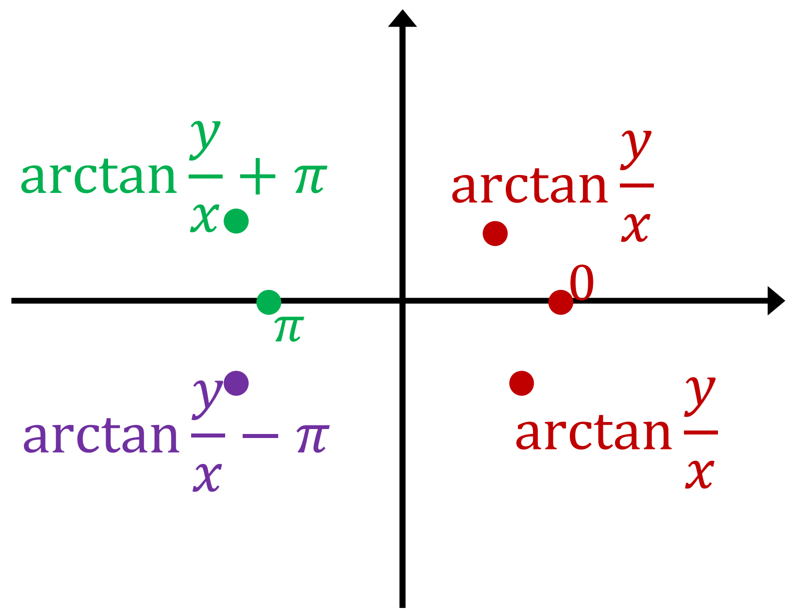
$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0, \end{cases}$$



主辐角

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.
- 固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 $\mathbf{arg}\, z$.

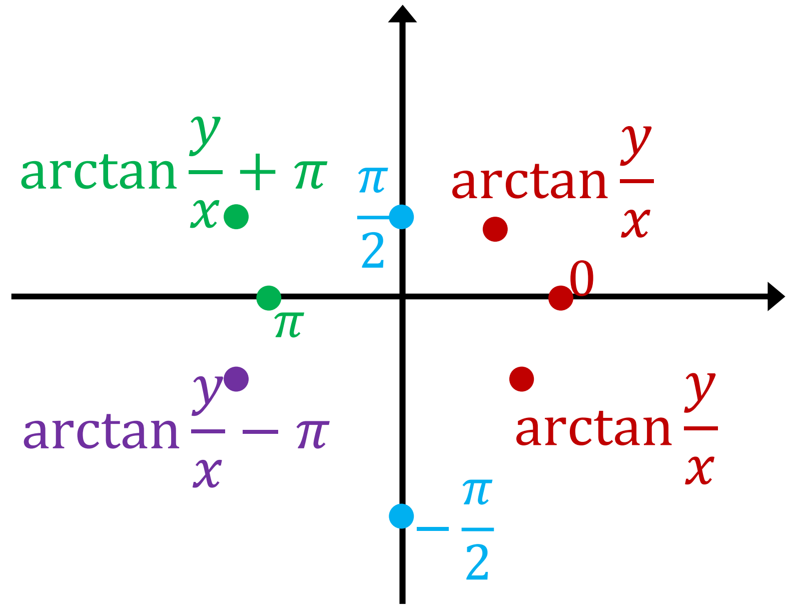
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \end{cases}$$



主辐角

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.
- 固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 $\boldsymbol{\arg z}$.

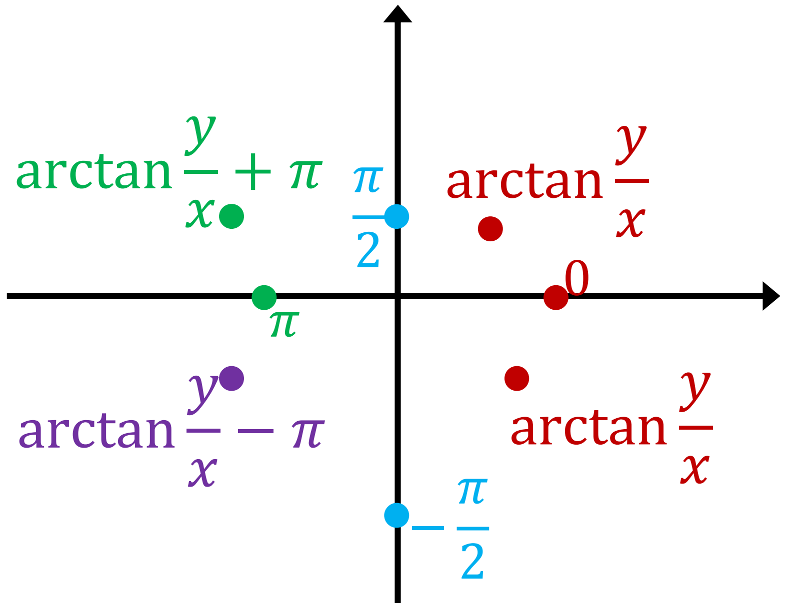
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0, \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



主辐角

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.
- 固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 $\mathbf{arg}\, z$.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



- z 是实数$\Leftrightarrow \arg z = 0, \pi$ 或 $z = 0$
- z 是纯虚数$\Leftrightarrow \arg z = \pm\dfrac{\pi}{2}$

复数模的不等式

结论

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$

复数模的不等式

结论

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$
- $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z|$

复数模的不等式

结论

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z|$
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

复数模的不等式

结论

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$
- $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z|$
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$

复数模的不等式

结论

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z|$
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$

- 这些不等式可以用三角不等式证明,

复数模的不等式

结论

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$
- $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z|$
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$

- 这些不等式可以用三角不等式证明, 也可以用代数方法证明, 例如:

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)$$
$$\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z}_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2)$.

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z}_2| = |z_1| \bullet |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2)$.
- 证明 (1) 由于

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \bullet \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = |z_1|^2 \bullet |z_2|^2,$$

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z}_2| = |z_1| \bullet |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2)$.
- 证明 (1) 由于

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \bullet \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = |z_1|^2 \bullet |z_2|^2,$$

- 所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \bullet |z_2|$.

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z}_2| = |z_1| \bullet |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2)$.
- 证明 (1) 由于

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \bullet \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = |z_1|^2 \bullet |z_2|^2,$$

- 所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \bullet |z_2|$.
- 同理 $|z_1 \overline{z}_2| = |z_1| \bullet |z_2|$.

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z}_2| = |z_1| \bullet |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2)$.
- 证明 (1) 由于

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \bullet \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = |z_1|^2 \bullet |z_2|^2,$$

- 所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \bullet |z_2|$.
- 同理 $|z_1 \overline{z}_2| = |z_1| \bullet |z_2|$.
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2)$

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z}_2| = |z_1| \bullet |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z}_2)$.
- 证明 (1) 由于

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \bullet \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = |z_1|^2 \bullet |z_2|^2,$$

- 所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \bullet |z_2|$.
- 同理 $|z_1 \overline{z}_2| = |z_1| \bullet |z_2|$.
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2)$

$$= z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 + z_1 \overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2$$

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z}_2| = |z_1| \bullet |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z}_2)$.
- 证明 (1) 由于

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \bullet \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = |z_1|^2 \bullet |z_2|^2,$$

- 所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \bullet |z_2|$.
- 同理 $|z_1 \overline{z}_2| = |z_1| \bullet |z_2|$.
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2)$

$$= z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 + z_1 \overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z}_2).$$

复数的三角形式和指数形式

- 由 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 可得复数的**三角形式**

$$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta).}$$

复数的三角形式和指数形式

- 由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的**三角形式**

$$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta).}$$

- 再由欧拉恒等式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

复数的三角形式和指数形式

- 由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的**三角形式**

$$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta).}$$

- 再由欧拉恒等式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 可得复数的**指数形式**

$$\boldsymbol{z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta)}$$

复数的三角形式和指数形式

- 由 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ 可得复数的**三角形式**

$$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta).}$$

- 再由欧拉恒等式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 可得复数的**指数形式**

$$\boldsymbol{z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta)}$$

- 三角形式和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

复数的三角形式和指数形式

- 由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的**三角形式**

$$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}.$$

- 再由欧拉恒等式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ 可得复数的**指数形式**

$$\boldsymbol{z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta)}$$

- 三角形式和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.
- 目前我们尚未解释 e^z 的含义，也没有证明欧拉恒等式，所以我们只把它当做三角表示的一种等价写法.

三角/指数表示与乘法

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

证明 $z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \bullet r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

证明 $z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\bullet r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$+i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$$

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$
$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

证明 $z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\bullet r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$+i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$$
$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

乘积的模和辐角

- 换言之，

$$|z_1 z_2| = |z_1| \bullet |z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 .$$

乘积的模和辐角

- 换言之,

$$|z_1z_2| = |z_1| \bullet |z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 .$$

- 第二个等式含义如下: 如果我们把它们都看成集合, 那么

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1 , \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

乘积的模和辐角

- 换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 .$$

- 第二个等式含义如下: 如果我们把它们都看成集合, 那么

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1 , \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

- 注意 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ 不一定成立.

乘积的模和辐角

- 换言之,

$$|z_1z_2| = |z_1| \bullet |z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 .$$

- 第二个等式含义如下: 如果我们把它们都看成集合, 那么

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

- 注意 $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ 不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 + \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上.

乘积的模和辐角

- 换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 .$$

- 第二个等式含义如下: 如果我们把它们都看成集合, 那么

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1 , \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

- 注意 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ 不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 + \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上.
- 例如 $(-1 + i)(-1 + i) = -2i$,

- 换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 .$$

- 第二个等式含义如下: 如果我们把它们都看成集合, 那么

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

- 注意 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ 不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 + \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上.
- 例如 $(-1+i)(-1+i) = -2i$,

$$\arg(-1+i) + \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2},$$

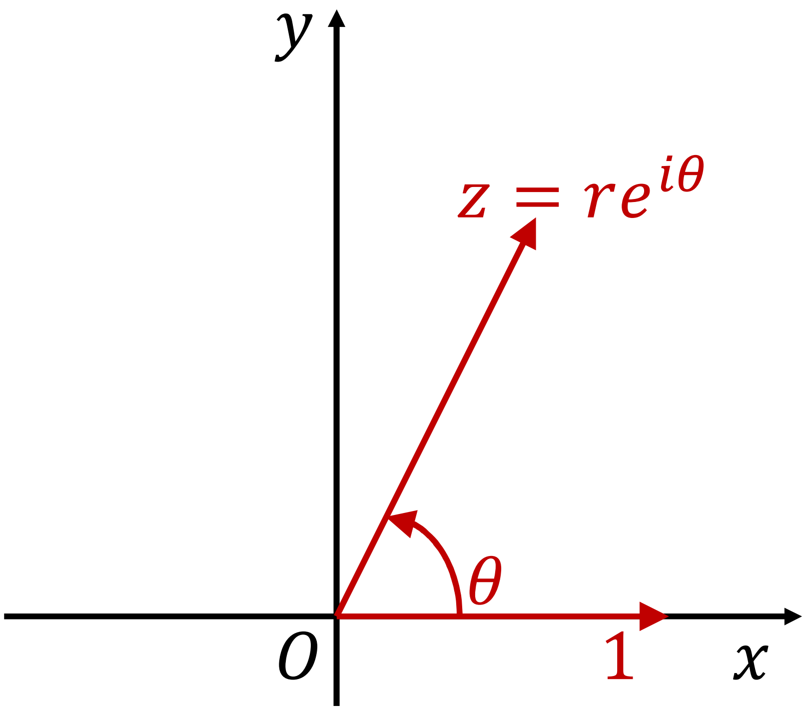
$$\arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}.$$

乘积的几何意义

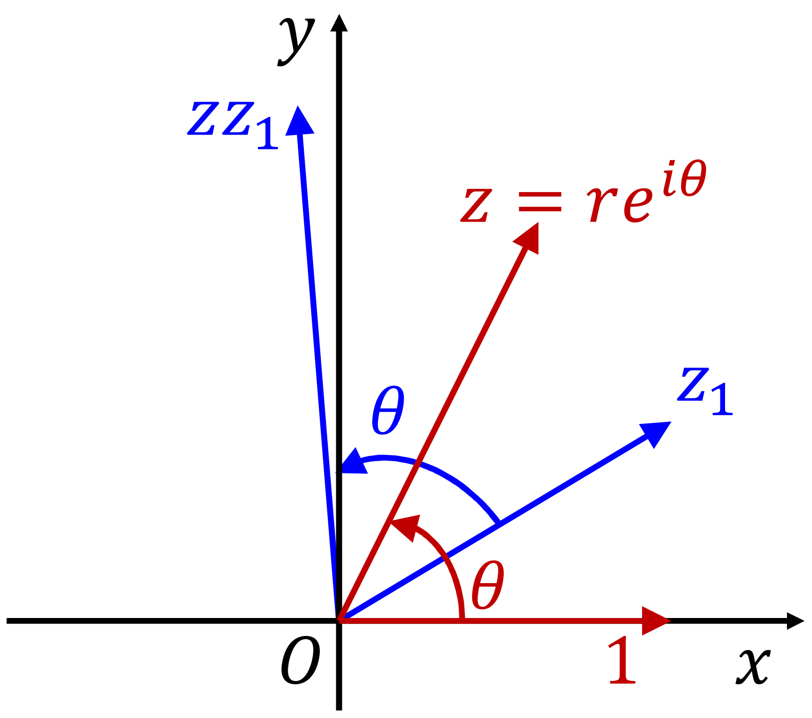
- 从该定理可以看出，乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模长放大 r 倍，并按逆时针旋转角度 θ.

乘积的几何意义

- 从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模长放大 r 倍, 并按逆时针旋转角度 θ.



- 从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模长放大 r 倍, 并按逆时针旋转角度 θ.



定理

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

则 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

则 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$.

换言之, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$.

三角/指数表示与除法

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

则 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

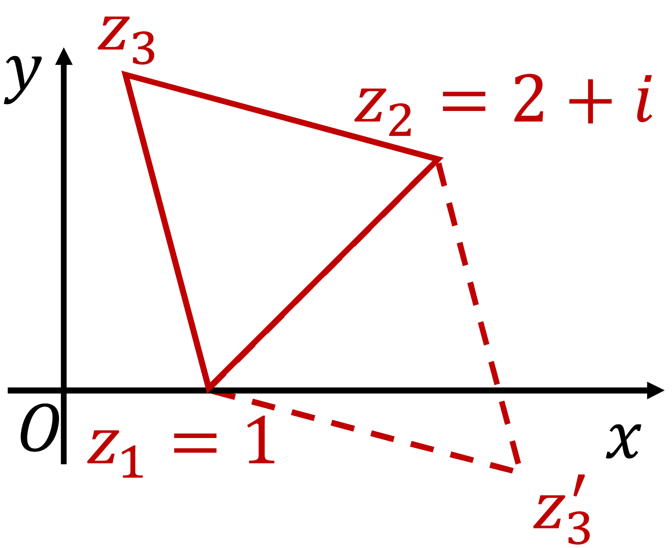
换言之, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $\quad \operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$.

- 证明 设 $\frac{z_1}{z_2} = re^{i\theta}$, 那么由乘法可知 $rr_2 = r_1$ 和 $\theta + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1$.

- 例 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

例题: 复数解决平面几何问题

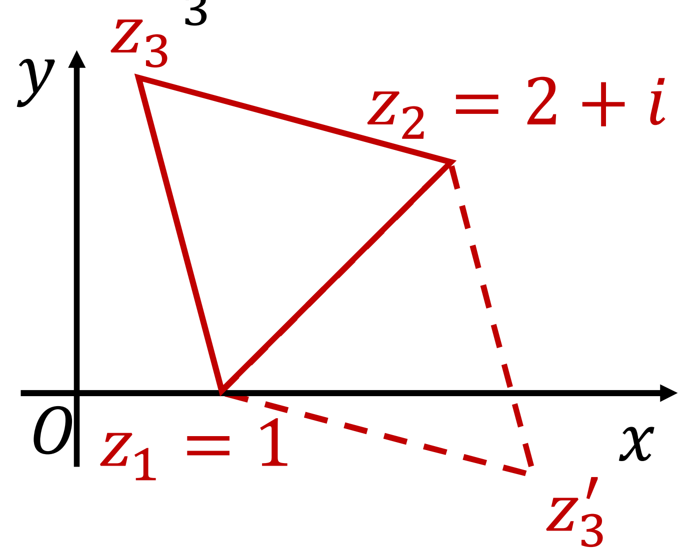
- 例 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.



例题: 复数解决平面几何问题

- 例 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

- 解 由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 因此

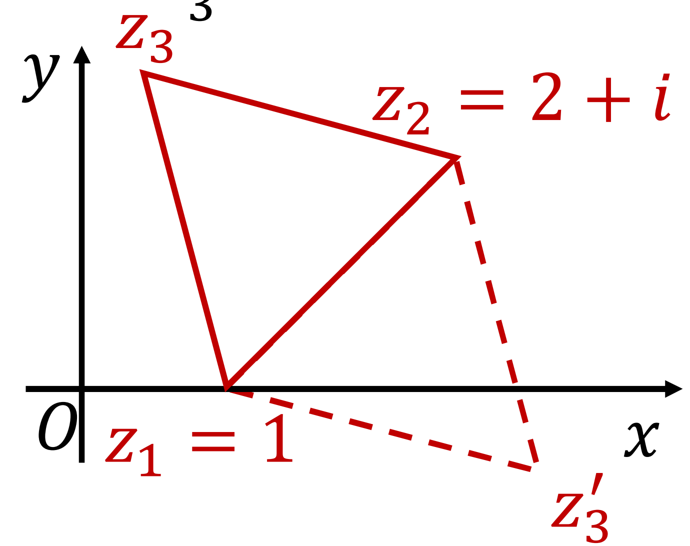


例题: 复数解决平面几何问题

- 例 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

- 解 由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$$

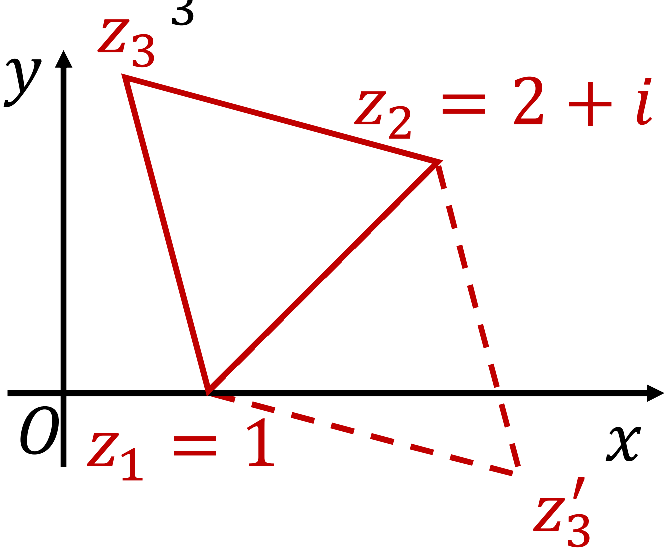


- 例 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+i$, 求它的另一个顶点.

- 解 由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 因此

$$z_3-z_1=(z_2-z_1)e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$$

$$=(1+i)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$



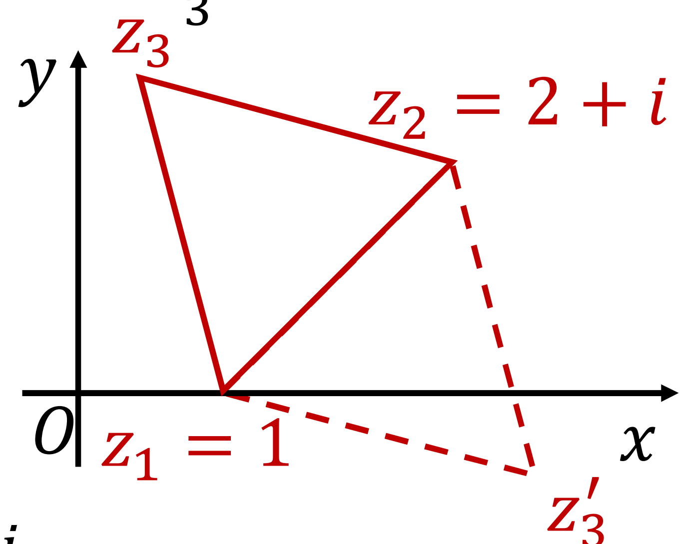
- 例 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

- 解 由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$$

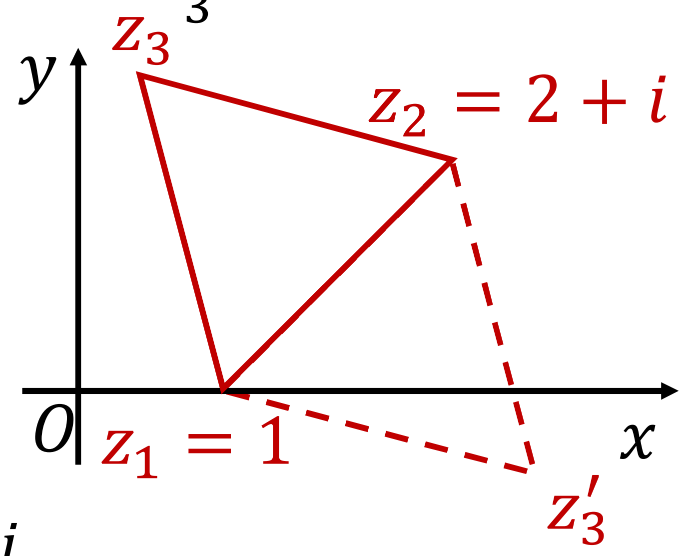
$$= (1+i)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i,$$



- 例 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+i$, 求它的另一个顶点.

- 解 由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 因此



$$z_3-z_1=(z_2-z_1)e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$$

$$=(1+i)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{3+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i.$$

例题: 求复数的三角/指数形式

- 我们可以根据实际需要选择复数的合适形式.

例题: 求复数的三角/指数形式

- 我们可以根据实际需要选择复数的合适形式.
- 例 将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.

例题: 求复数的三角/指数形式

- 我们可以根据实际需要选择复数的合适形式.
- 例 将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.
- 解 $r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4.$

例题: 求复数的三角/指数形式

- 我们可以根据实际需要选择复数的合适形式.
- 例 将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.
- 解 $r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4.$
- 由于 z 在第三象限,

$$\arg z = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi.$$

- 我们可以根据实际需要选择复数的合适形式.
- 例 将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化成三角形式和指数形式.
- 解 $r=|z|=\sqrt{12+4}=4$.
- 由于 z 在第三象限,

$$\arg z=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5}{6}\pi.$$

- 故

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right]=4\exp\left(-\frac{5\pi i}{6}\right).$$

例题: 求复数的三角/指数形式

- 例 将 $z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

例题: 求复数的三角/指数形式

- 例 将 $z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.
- 解

$$z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5} = \cos\frac{3\pi}{10} + i\cos\frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

例题: 求复数的三角/指数形式

- 例 将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形形式.
- 解

$$z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{10}+i\cos\frac{3\pi}{10}=e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

- 练习 将 $z=\sqrt{3}-3i$ 化成三角形式和指数形式.

- 例 将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形形式.
- 解

$$z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}=\cos\frac{3\pi}{10}+i\cos\frac{3\pi}{10}=e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

- 练习 将 $z=\sqrt{3}-3i$ 化成三角形式和指数形式.
- 答案

$$z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\cos\frac{5\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi i}{3}}.$$

例题: 求复数的三角/指数形式

- 例 将 $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \ (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ 化成三角形式和指数形式, 并求出它的主辐角.

- **例** 将 $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \ (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ 化成三角形式和指数形式, 并求出它的主辐角.
- **解**

$$z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + i \bullet 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

- 例 将 $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha\ (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ 化成三角形式和指数形式, 并求出它的主辐角.
- 解

$$z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + i \bullet 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

- 例 将 $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ 化成三角形式和指数形式, 并求出它的主辐角.
- 解

$$z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + i \bullet 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2} \bullet e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i},$$

例题: 求复数的三角/指数形式

- **例** 将 $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha \ (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$ 化成三角形式和指数形式, 并求出它的主辐角.

- **解**

$$z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + i \bullet 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2} \bullet e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i},$$

$$\arg z = \frac{\pi-\alpha}{2}.$$

复数方程表平面图形

- 很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

复数方程表平面图形

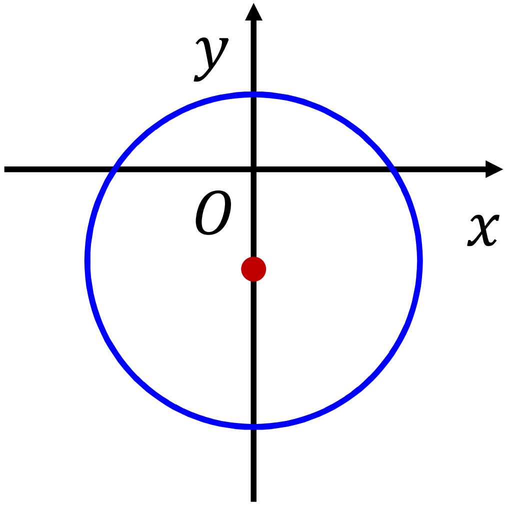
- 很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.
- 例 (1) $|z+i|=2.$

复数方程表平面图形

- 很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.
- 例 (1) $|z+i|=2$.
- 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体,
即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.

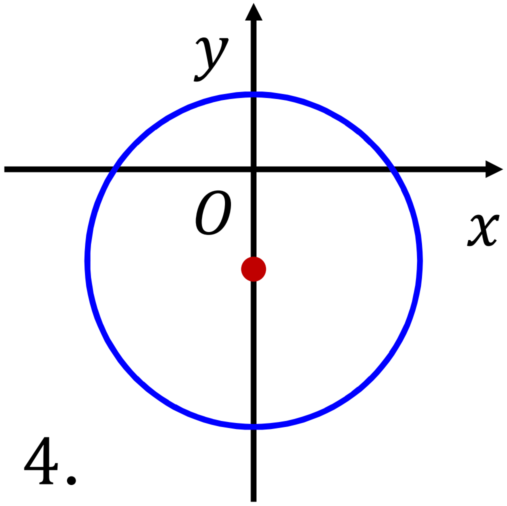
复数方程表平面图形

- 很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.
- 例 (1) $|z+i|=2$.
- 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.



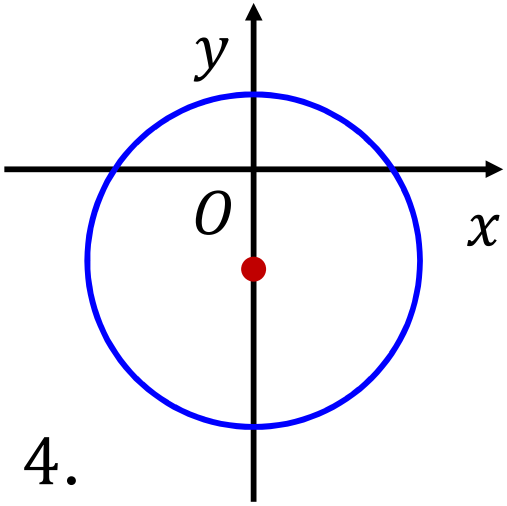
复数方程表平面图形

- 很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.
- 例 (1) $|z+i|=2$.
- 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.
- 设 $z=x+yi$, 则方程为 $x^2+(y+1)^2=4$.



复数方程表平面图形

- 很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.
- 例 (1) $|z+i|=2$.



- 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.
- 设 $z=x+yi$, 则方程为 $x^2+(y+1)^2=4$.
- 一般的圆方程为 $|z-z_0|=R$, 其中 z_0 是圆心, R 是半径.

复数方程表平面图形

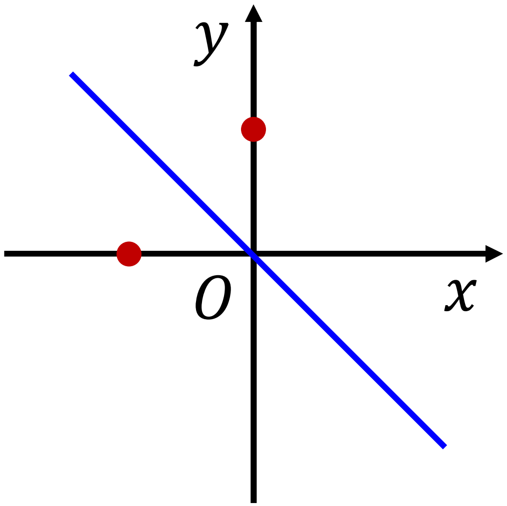
- (2) $|z-2i|=|z+2|$.

复数方程表平面图形

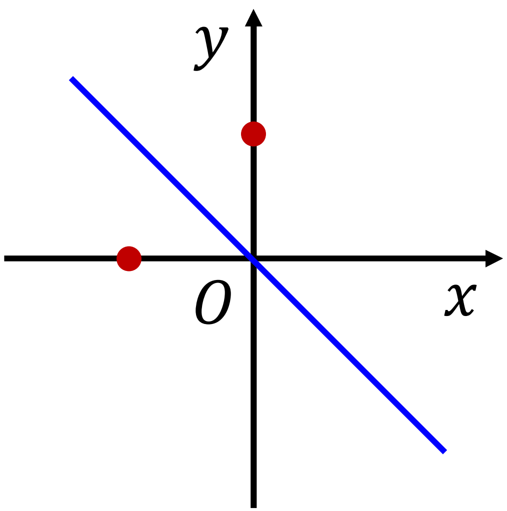
- (2) $|z-2i|=|z+2|$.
- 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线.

复数方程表平面图形

- (2) $|z-2i|=|z+2|$.
- 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线.



- (2) $|z-2i|=|z+2|$.
- 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线.
- 两边同时平方化简可得 $z+i\bar{z}=0$ 或 $x+y=0$.



复数方程表平面图形

- (3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4.$

复数方程表平面图形

- (3) $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4$.
- 设 $z=x+yi$, 则 $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

复数方程表平面图形

- (3) $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4.$
- 设 $z=x+yi$, 则 $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3.$
- (4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a.$
- 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

复数方程表平面图形

- (3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4.$
- 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3.$
- (4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a.$
- 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.
- (5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a.$
- 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

复数方程表平面图形

- (3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4$.
- 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.
- (4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$.
- 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.
- (5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$.
- 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.
- 类似地, 含 z 的不等式往往表示一个区域, 例如 $|z-i|<2$ 表示一个开圆盘.

复球面

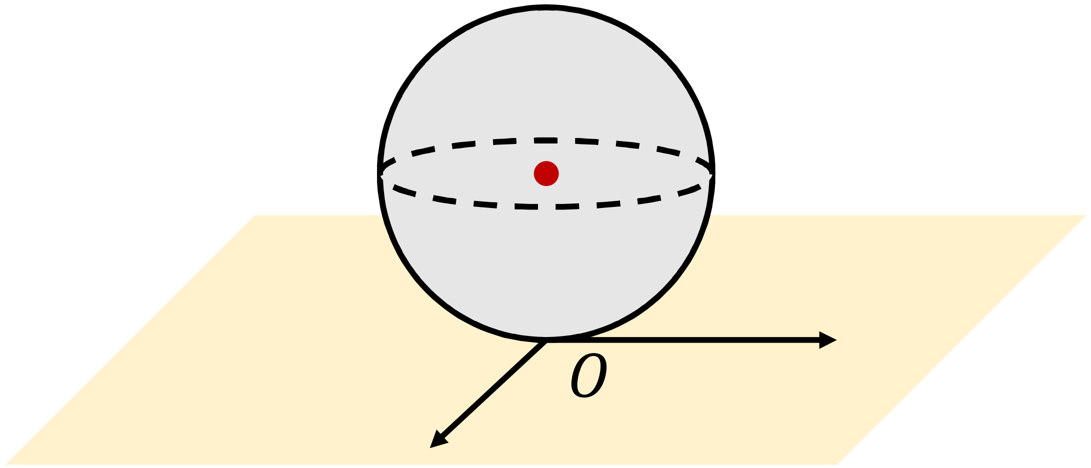
- 我们给出复数的一种几何表示使得其自然包含无穷远点 ∞.

复球面

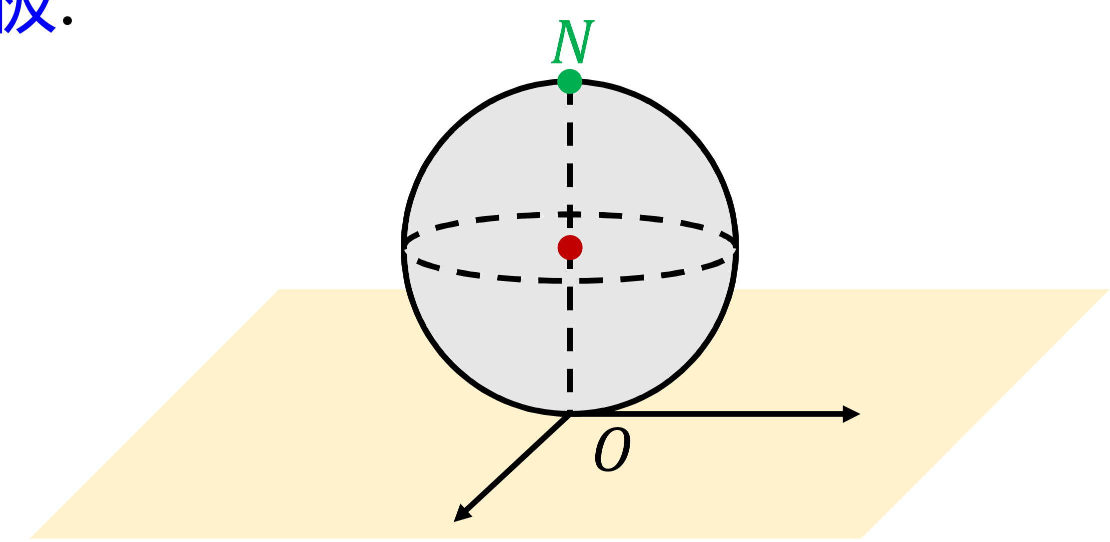
- 我们给出复数的一种几何表示使得其自然包含无穷远点 ∞.
- 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

复球面

- 我们给出复数的一种几何表示使得其自然包含无穷远点 ∞.
- 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.
- 取一个与复平面相切于原点 $z = 0$ 的球面.

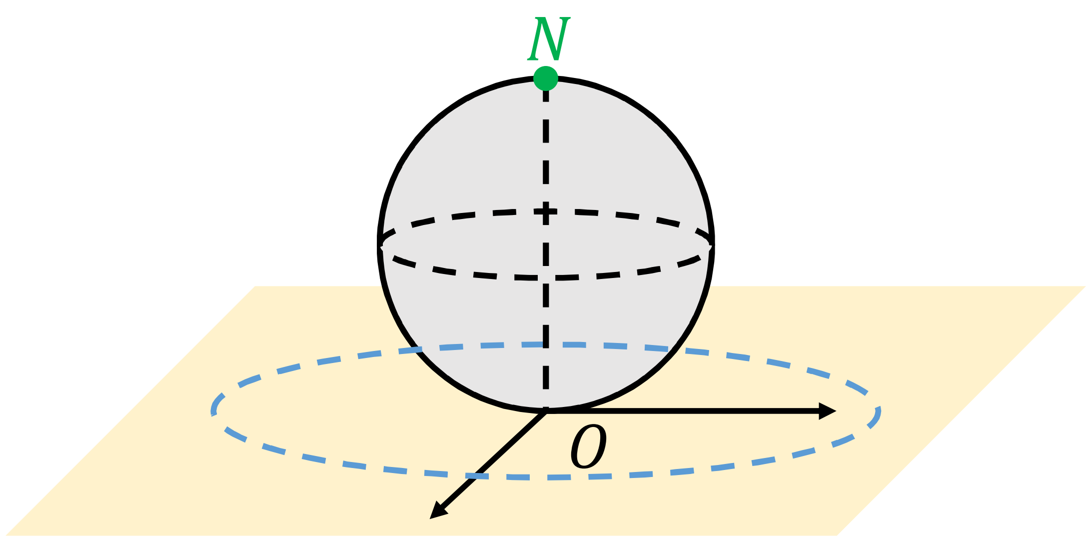


- 我们给出复数的一种几何表示使得其自然包含无穷远点 ∞.
- 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.
- 取一个与复平面相切于原点 $z=0$ 的球面.
- 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于另一点 N, 称之为北极.



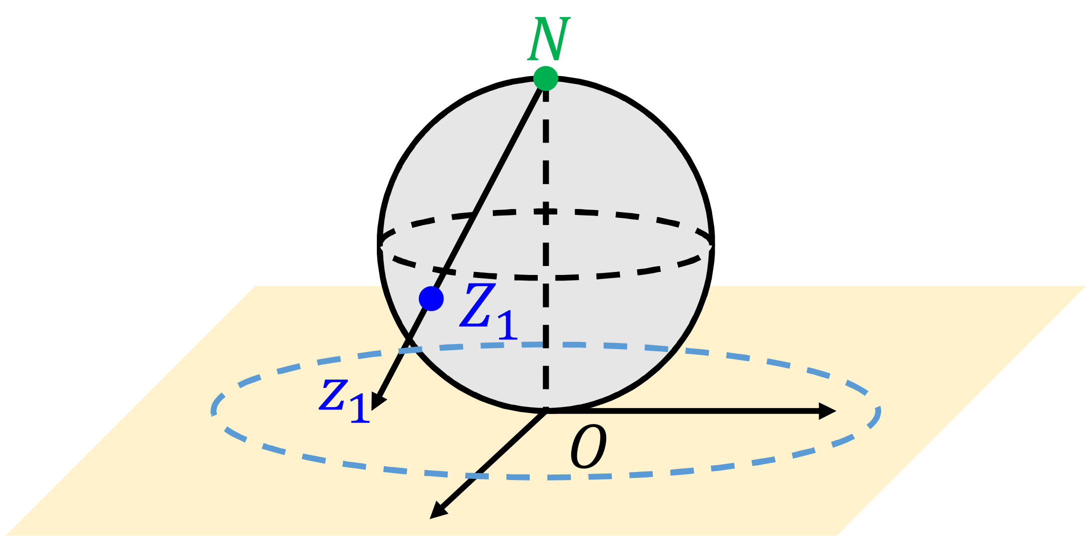
复球面

- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.



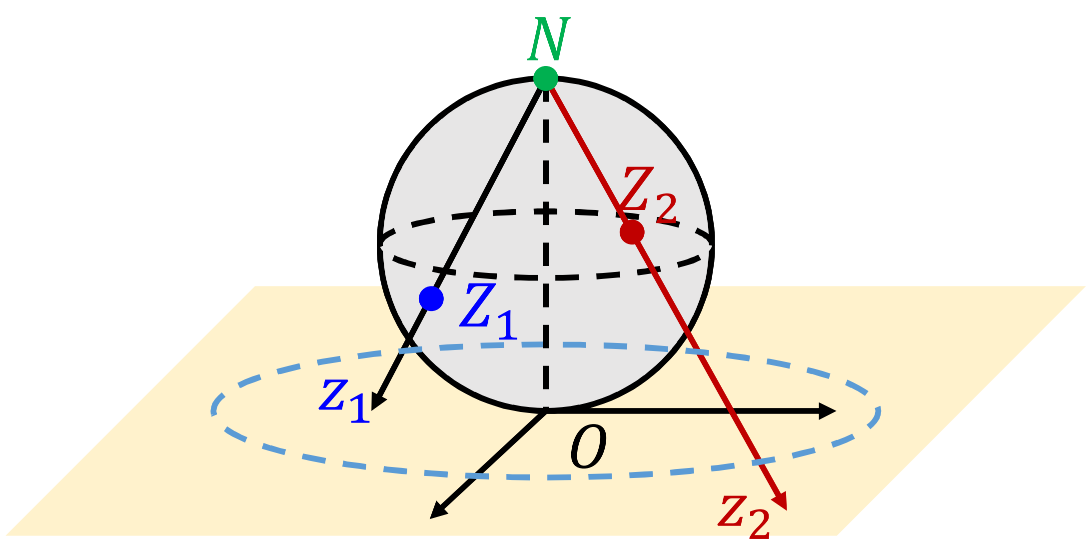
复球面

- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.



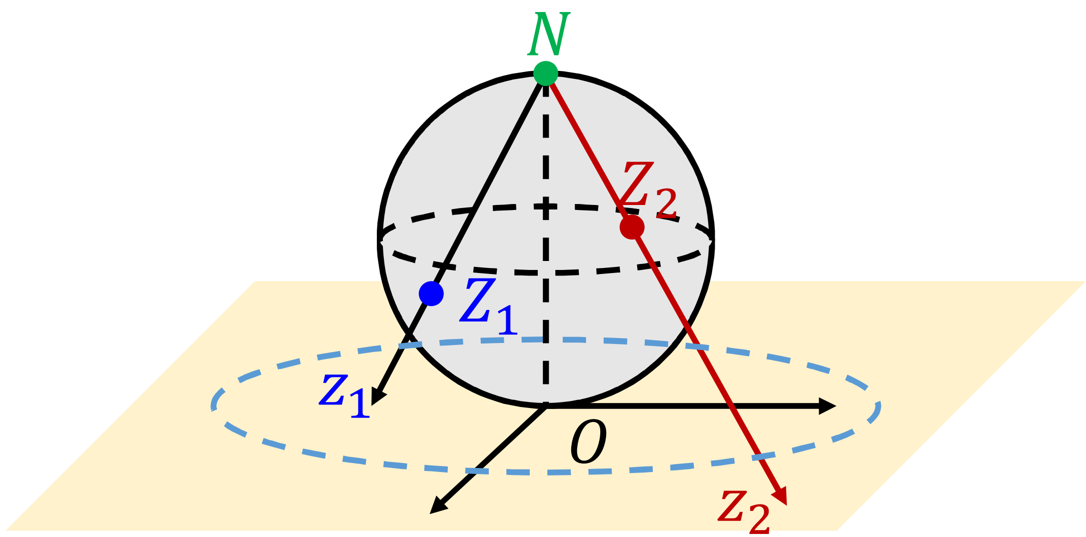
复球面

- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.



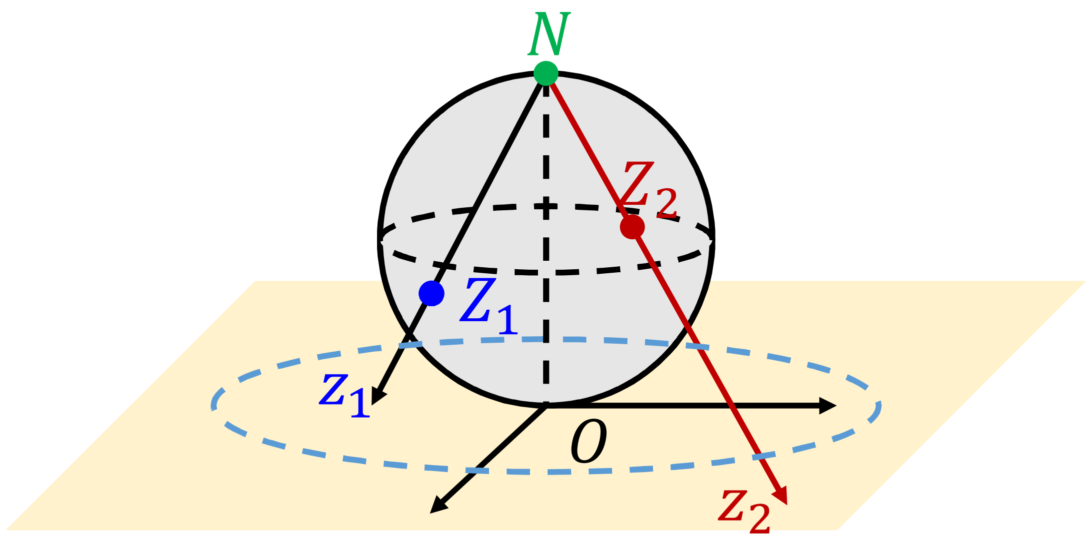
复球面

- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.
- 这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.

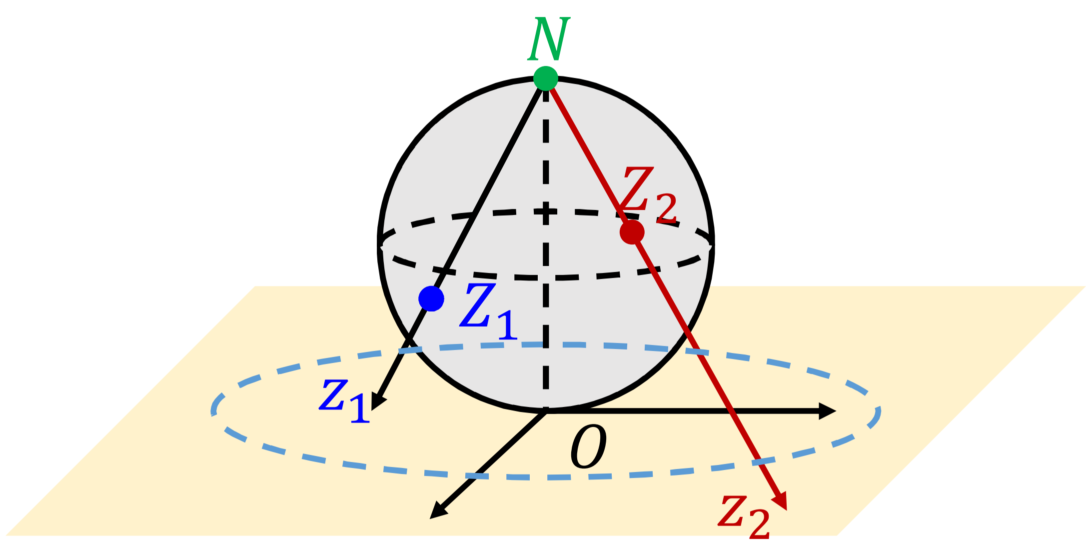


复球面: 无穷远点

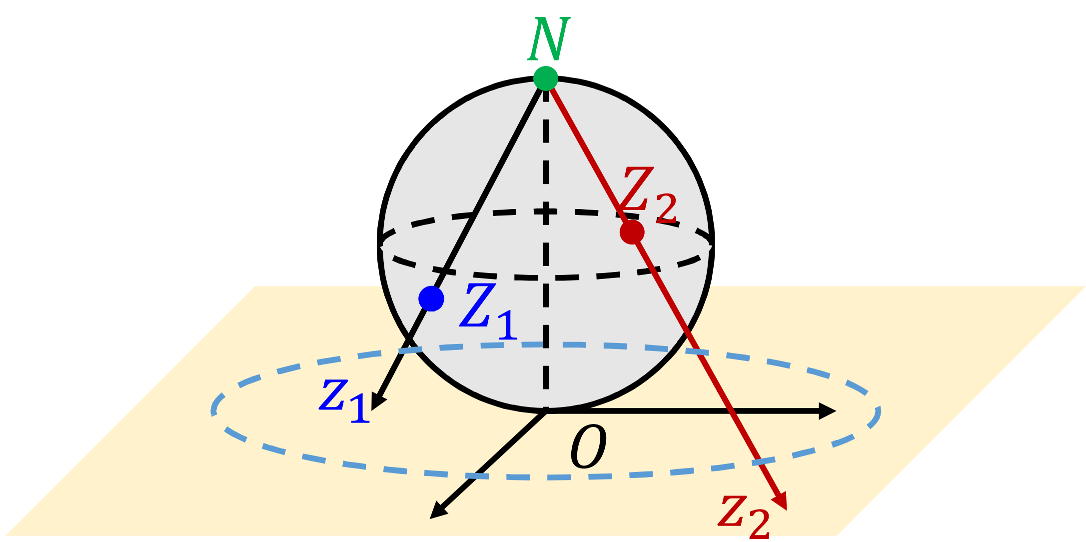
- 当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N.



- 当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N.
- 如果我们在复平面上添加一个额外的"点"——**无穷远点**, 记作 ∞.

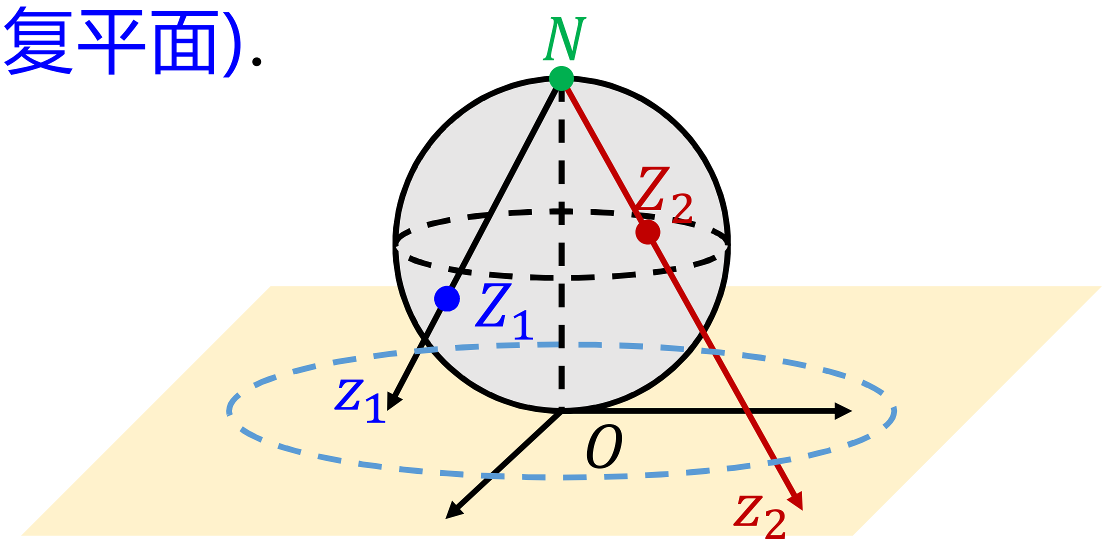


- 当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N.
- 如果我们在复平面上添加一个额外的"点"——**无穷远点**, 记作 ∞.
- 那么扩充复数集合 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应.



复球面: 无穷远点

- 当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N.
- 如果我们在复平面上添加一个额外的"点"——**无穷远点**, 记作 ∞.
- 那么扩充复数集合 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应.
- 称这样的球面为复球面, 称包含无穷远点的复平面为扩充复平面(闭复平面).

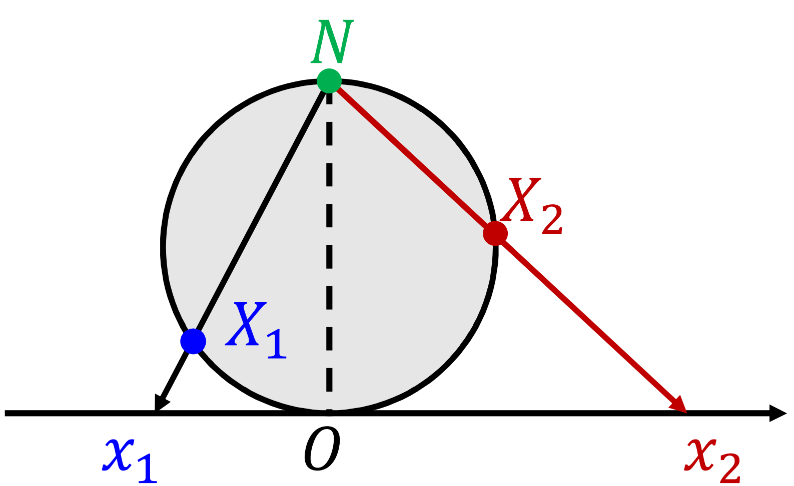


复球面: 与实数无穷的联系

- 它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢?

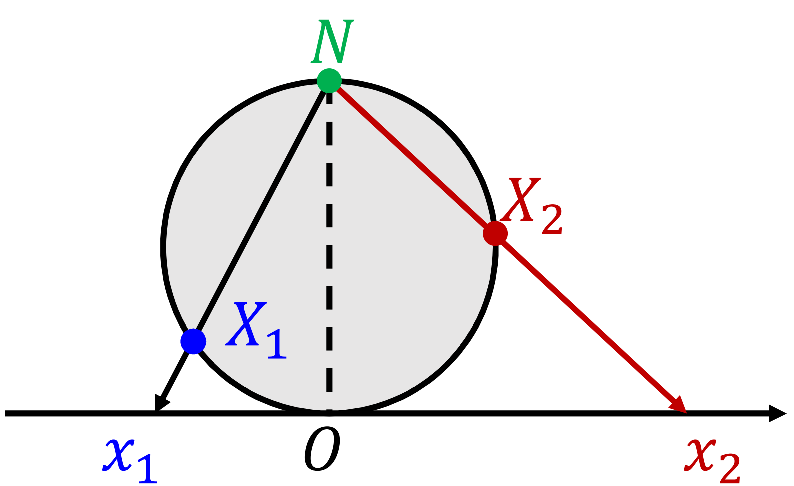
复球面: 与实数无穷的联系

- 它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢?
- 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应.



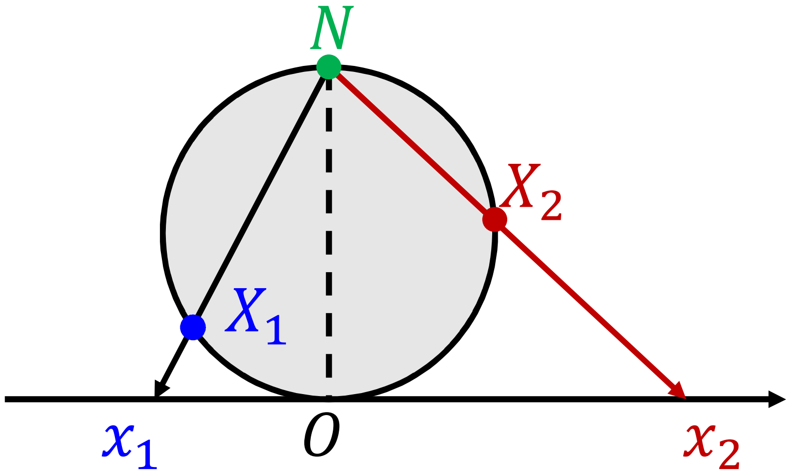
复球面: 与实数无穷的联系

- 它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢?
- 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应.
- 同样的, 当 $|x|$ 越来越大时, 其对应圆周上点也越来越接近 N.



复球面: 与实数无穷的联系

- 它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢?
- 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应.
- 同样的, 当 $|x|$ 越来越大时, 其对应圆周上点也越来越接近 N.
- 所以实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上或扩充复平面上就是 ∞, 只是在实数时我们往往还关心它的符号, 所以区分正负.



∞ 的性质

- ∞ 的实部、虚部和辐角无意义, 规定 $|\infty| = +\infty$.

∞ 的性质

- ∞ 的实部、虚部和辐角无意义, 规定 $|\infty| = +\infty$.
- 约定

$$z + \infty = \infty + z = \infty \ (z \neq \infty)$$

$$z - \infty = \infty - z = \infty \ (z \neq \infty)$$

∞ 的性质

- ∞ 的实部、虚部和辐角无意义, 规定 $|\infty| = +\infty$.
- 约定

$$z + \infty = \infty + z = \infty \; (z \neq \infty)$$

$$z - \infty = \infty - z = \infty \; (z \neq \infty)$$

$$z \bullet \infty = \infty \bullet z = \infty \; (z \neq 0)$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \qquad \frac{\infty}{z} = 0 (z \neq 0), \qquad \frac{z}{0} = \infty (z \neq 0)$$