第六章　积分变换

作业 1. 单选题: (2020 年 A 卷) 下列不是傅里叶变换对的是 (　　).

(A) $\delta(t), 1$　　(B) $e^{j\omega_0 t}, 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

(C) $\sin\omega_0 t, \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$　　(D) $1, 2\pi\delta(\omega)$

作业 2. 填空题: (2020 年 B 卷) $\delta(t-t_0)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=$__________.

作业 3. 填空题: (2021 年 A 卷) $F(\omega)=\delta(\omega+2)$ 的傅里叶逆变换为 $f(t)=$__________.

作业 4. 填空题: (2021 年 B 卷) $F(\omega)=2\pi\delta(\omega)$ 的傅里叶逆变换为 $f(t)=$__________.

作业 5. 填空题: (2022 年 A 卷) $f(t)=\sin t+j\cos t$ 的傅里叶变换为______________.

作业 6. (2020 年 A 卷) 用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} y''+4y'+3y=e^{-t}, \\ y(0)=y'(0)=1. \end{cases}$$

作业 7. (2020 年 B 卷) 用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} y''+y=t, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-2. \end{cases}$$

作业 8. (2021 年 A 卷) 用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} y''+4y'+3y=e^{t}, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

作业 9. (2021 年 B 卷) 用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=2e^{-t}, \\ y(0)=2, \quad y'(0)=-1. \end{cases}$$

作业 10. 用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} y''(t)+4y(t)=3\cos t, \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

作业 11. 用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} x'(t)+2x(t)+2y(t)=10e^{2t}, \\ -2x(t)+y'(t)+3y(t)=13e^{2t}, \\ x(0)=1, y(0)=3. \end{cases}$$

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 12. 对于正奇数 k, 设 $F_k(\omega)=\dfrac{\sin(\omega/k)}{\omega/k}$, 设

$$I_k=\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\omega)F_3(\omega)\cdots F_k(\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

则

$$I_1=I_3=I_5=\cdots=I_{13}=\pi, \quad I_{15}=\frac{467807924713440738696537864469}{467807924720320453655260875000}\pi.$$

这是为什么呢?

(1) 根据

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F_1]=\begin{cases} 1/2, & |t|<1, \\ 1/4, & |t|=1, \\ 0, & |t|>1 \end{cases}$$

得到 $\mathscr{F}^{-1}[F_k]=f_k(t):=kf(kt)$.

(2) 注意到函数 $g(t)$ 和 $f_k(t)$ 卷积之后在 t 处的值相当于 $g(t)$ 在 $\left[t-\dfrac{1}{k}, t+\dfrac{1}{k}\right]$ 上取平均值. 由此证明 $f_1(t)*f_3(t)*\cdots*f_k(t)$ 在 $|t|<1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}-\cdots-\dfrac{1}{k}$ 上取值为 $\dfrac{1}{2}$.

(3) 根据

$$\frac{1}{2\pi}I_k=\mathscr{F}^{-1}[F_1F_3\cdots F_k](0)=(f_1*f_3*\cdots*f_k)(0)$$

解释上述现象.

更多细节可见: https://www.bilibili.com/video/BV18e4y1u7BH/