

第二章 解析函数

2.1 解析函数的概念

作业 1. 判断题: 如果 $f'(z)$ 存在, 那么 $f(z)$ 在 z_0 解析.()

作业 2. 判断题: 如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的奇点, 那么 z_0 也是 $f(z) + g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点.()

作业 3. 单选题: (2021 年 A 卷) 函数 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域内可导是 $f(z)$ 在该邻域内解析的 ().

- (A) 充分条件 (B) 必要条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

作业 4. (2021 年 A 卷) 设 $f(z) = \frac{1}{5}z^5 - (1+i)z$, 解方程 $f'(z) = 0$.

2.2 函数解析的充要条件

作业 5. 判断题: 如果 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 可导 (指偏导数存在), 那么 $f(z) = u + iv$ 亦可导.()

作业 6. 单选题: (2021 年 B 卷) 下列函数中, 为解析函数的是 ().

- (A) $x^2 - y^2 - 2xyi$ (B) $x^2 + xyi$
(C) $2(x-1)y + i(y^2 - x^2 + 2x)$ (D) $x^3 + iy^3$

作业 7. 填空题: 函数 $\frac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$ 的奇点为_____.

作业 8. 填空题: (2022 年 A 卷) 如果函数 $f(z) = x^2 - 2xy - y^2 + i(ax^2 + bxy + cy^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a + b + c =$ _____.

作业 9. 下列函数何处可导? 何处解析?

- (1) $f(z) = 1/\bar{z}$; (2) $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$;
(3) $f(z) = e^{x^2+y^2}$; (4) $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$.

作业 10. 指出下列函数 $f(z)$ 的解析区域, 并求出其导数.

$$(1) z^3 + 2iz; \quad (2) \frac{1}{z^2 - 1}; \quad (3) \frac{az + b}{cz + d} \quad (c, d \text{ 不全为零}).$$

作业 11. 设 $my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$ 为解析函数, 试确定实数 l, m, n 的值.

2.3 初等函数

作业 12. 选择题: (2021 年 A 卷) 下列式子一定正确的是 ().

$$\begin{array}{ll} (A) \operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z & (B) \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) \\ (C) \operatorname{Ln} \sqrt{z} = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} z & (D) \operatorname{Ln} z^2 = 2 \operatorname{Ln} z \end{array}$$

作业 13. 填空题: (2021 年 B 卷) 设复数 $z = 1^{\sqrt{3}}$, 则 $|z| =$ _____.

作业 14. 填空题: (2022 年 A 卷) i^{-i} 的主值是 _____.

作业 15. (2021 年 A 卷) 求 $\sin(1+i)$ 的虚部.

作业 16. (2022 年 A 卷) 复变函数 $f(z) = \sin z$ 和实变量函数 $g(x) = \sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试说出 3 点.

作业 17. 下列关系是否正确? 证明或给出反例.

$$(1) \overline{e^z} = e^{\bar{z}}; \quad (2) \overline{\sin z} = \sin \bar{z}.$$

作业 18. 找出下列方程的全部解.

$$(1) 1 + e^z = 0; \quad (2) \sin z + \cos z = 0.$$

作业 19. 求 $\operatorname{Ln}(-i)$, $\operatorname{Ln}(-3+4i)$ 和它们的主值.

作业 20. 求 $\exp\left(1 - \frac{\pi i}{2}\right)$, 3^i 和 $(1+i)^i$ 的值.

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 21. 注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}$, $y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 我们定义 f 对 z 和 \bar{z} 的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

(1) 证明 C-R 方程等价于 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. 所以我们可以把 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 叫做 C-R 方程.

(2) 利用该结论求函数 $f(z) = \bar{z}, z \operatorname{Im} z, e^{z\bar{z}}$ 的可导点和解析点.

作业 22. 仿照复数的指数函数, 我们可以尝试在矩阵上定义指数函数. 设 $A \in M_m(\mathbb{C})$ 是一个 $m \times m$ 的复矩阵, 我们想说明极限

$$e^A := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} A \right)^n$$

存在.

(1) 当 $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ 是一个对角矩阵时, 证明 e^A 存在且

$$e^A = \text{diag}\{e^{a_1}, e^{a_2}, \dots, e^{a_m}\}.$$

(2) 当

$$A = J_m(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$$

是 Jordan 块时, 证明 e^A 存在.

(3) 根据每个方阵都可以相似于一些 Jordan 块证明 e^A 总存在.

(4) 当 $A = xE + yJ = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ 时, 证明 $e^A = \begin{pmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$.

(5) 证明 $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$.

(6) 证明 $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.