漫谈指数和与 L 函数

张神星 (合肥工业大学)
首都师范大学
zhangshenxing@hfut.edu.cn

提纲

1. 指数和与 L 函数的特征根
2. L 函数的牛顿折线
3. 指数和的生成域

1

指数和与 L 函数的特征根

指数和与 L 函数

设 p 是素数, $\mathbb{F}_q$ 是含有 $q=p^a$ 个元素的有限域. 设 $\psi:\mathbb{F}_p\to\mathbb{Q}(\zeta_p)^\times$ 是一非平凡加性特征, 那么 $\psi_k=\psi\circ\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_p}$ 是 $\mathbb{F}_{q^k}$ 的加性特征.

对于多项式 $f(x)\in\mathbb{F}_q[x]$, 定义指数和

$$S_k(f):=\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^k}}\psi_k(f(x))\in\mathbb{Z}[\zeta_p]$$

以及L 函数

$$L(s,f):=\exp\left(\sum_k S_k(f)\frac{s^k}{k}\right)=\prod_{x\in\overline{\mathbb{F}}_p}\left(1-\psi_{\deg x}(f(x))s^{\deg x}\right)^{-1}.$$

我们关心，作为一个代数整数, $S_k(f)$ 的各种性质, 以及 L 函数的各种性质.

L 函数的有理性

定理 (Dwork-Bombieri-Grothendick)

$L(s,f)$ 是有理函数.

$$L(s,f)=\frac{\prod_j(1-\beta_j s)}{\prod_i(1-\alpha_i s)},\quad \alpha_i\neq\beta_j \implies S_k(f)=\sum_i\alpha_i^k-\sum_j\beta_j^k.$$

称 α_i,β_j 为特征根. 为了估计特征根, 我们需要 ℓ 进方法.

ℓ 进方法

设 $E \supseteq \mu_p$ 是一 $\ell \neq p$ 进域. Deligne 在 $\mathbb{G}_{a,\overline{\mathbb{F}}_p}$ 上构造了一个局部自由秩 1 的 E 系数 ℓ 进 lisse 层 $\mathcal{F}_\ell(f)$, 它满足

$$L(s,f) = \prod_i \det(1 - s\mathrm{Frob}, \mathrm{H}_c^i)^{(-1)^{i+1}},$$

$$S_k(f) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}^k, \mathrm{H}_c^i).$$

这里 Frob 是几何 Frobenius, $\mathrm{H}_c^i = \mathrm{H}_c^i(\mathbb{G}_{a,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathcal{F}_\ell(f))$ 是紧支撑上同调.

记 ω_{ij} 为 Frob 在 H_c^i 上的特征值, 则

$$S_k(f) = \sum_{ij} (-1)^i \omega_{ij}^k.$$

定理 (Deligne)

ω_{ij} 是代数整数, 且存在整数 $0 \leqslant r_{ij} \leqslant i$ 使得它的所有 $\mathbb{Q}$ 共轭的绝对值均为 $q^{r_{ij}/2}$.

我们把 r_{ij} 就叫做对应特征根 ω_{ij} 的权.
记 $b_i = \dim_E \mathrm{H}_c^i$ 为 Betti 数, 则

$$|S_k(f)| \leqslant \sum_i b_i q^{ki/2}.$$

一般地，设

- $V \subseteq \mathbb{A}^N$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的闭子簇，
- $f \in \mathbb{F}_q[V]$，$g \in \mathbb{F}_q[V]^\times$，
- χ 是 $\mathbb{F}_q^\times$ 上乘性特征.

定义指数和和 L 函数

$$S_k = \sum_{x \in V(\mathbb{F}_{q^k})} \psi_{k \log_p q}(f(x)) \chi\Big(\mathbf{N}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(g(x))\Big), \quad L(s, V, f) = \exp\left(\sum_k S_k \frac{s^k}{k}\right).$$

前述结论依然成立.

定理 (Bombieri1978)

特征根个数不超过 $(4 \max\{\deg V + 1, \deg f\} + 5)^{2N+1}$.

例 (Deligne SGA4$\frac{1}{2}$, Serre1977)

设 $\chi = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ 是 $\mathbb{F}_q^\times$ 上的 n 个特征, $a \in \mathbb{F}_q^\times$. 定义 Kloosterman 和

$$\mathrm{Kl}_k = \sum_{\substack{x_1 \cdots x_n = a \\ x_i \in \mathbb{F}_{q^k}}} \chi_1(x_1) \cdots \chi_n(x_n) \psi_k(x_1 + \cdots + x_n).$$

它是 $V = V(X_1 \cdots X_n - a)$ 上 $f = X_1 + \cdots + X_n$ 的指数和.

此时 $L(s, V, f)^{(-1)^n}$ 是 n 次多项式, 即

$$\mathrm{Kl}_k = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^k,$$

且特征根权均为 $n-1$. 因此 $|\mathrm{Kl}_k| \leqslant nq^{(n-1)k/2}$.

例 (Serre1977)

设 X 是一几何不可约仿射光滑曲线，$\widehat{X}$ 为其对应的射影曲线，$X_\infty = \widehat{X} - X$. 设 $X' \to X$ 是方程 $y^p - y = f(x)$ 给出的 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 平展覆盖，并延拓至 $\widehat{X}' \to \widehat{X}$. 对于 $P \in X_\infty$，如果该覆盖在 P 处非分歧，记 $n_P = 0$; 否则记

$$n_P = 1 - \sup_{\varphi \in \mathbb{F}_q(\widehat{X})} v_P(f - \varphi^p + \varphi) \geqslant 2.$$

那么

- $L(s, X, f)$ 是多项式; $b_i = 0, \forall i \neq 1$;
- (X, f) 权全为 $1 \iff n_P \neq 0, \forall P$，此时 $b_1 = 2g - 2 + \sum n_P \deg P$.

例 (Serre1977)

对于仿射平面 $\mathbb{A}^n$, $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ 是 d 次多项式且 $p \nmid d$, 有

- $L(s, X, f)^{(-1)^{n-1}}$ 是多项式; $b_i = 0, \forall i \neq n$;
- (X, f) 权全为 n, $b_n = (d-1)^r$.

此时 $|S_k| \leqslant (d-1)^n q^{nk/2}$.

2

L 函数的牛顿折线

指数和的变化

现在我们来考虑指数和的 p 进性质.
设 $f\in\mathbb{F}_q[x]$ 是 d 次多项式. 我们可以考虑更一般点. 设

- $\psi_m:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{C}_p^\times$ 是一个阶为 p^m 的加性特征;
- $\omega^{-u}:\mathbb{F}_q^\times\to\mathbb{C}_p^\times$ 是一个乘性特征, 其中 ω 是 Teichmüller 提升, $0\leqslant u\leqslant q-2$.

定义

$$S_{k,u}(f,\psi_m)=\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^k}^\times}\psi_m\left(\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_{q^k}/\mathbb{Q}_p}(\hat{f}(\hat{x}))\right)\omega^{-u}\left(\mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_q}(x)\right),$$

$$L_u(s,f,\psi_m)=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,u}(f,\psi_m)\frac{s^m}{m}\right).$$

定理 (Adolphson-Sperber, 李文卿, 刘春雷-魏达盛, 刘春雷)

如果 $p \nmid d = \deg f$, 则 $L_u(s, f, \psi_m)$ 是次数为 $p^{m-1}d$ 的多项式.

记

$$L_u(s, f, \psi_m) = \sum_{n=0}^{p^{m-1}d} a_n s^n = \prod_i (1 - \alpha_i s), \quad S_{u,k}(f) = -\sum_i \alpha_i^k.$$

为了了解 $S_{u,k}(f)$ 的 p 进性质, 我们需要了解 α_i 的赋值. 而它们正是该 L 函数的牛顿折线的斜率, 其中牛顿折线是指所有

$$(n, v_p(a_n))$$

的下凸包.

T 进指数和和 T 进 L 函数

为了统一考虑不同 m 对应的牛顿折线, 我们引入 T 进指数和和 T 进 L 函数:

$$S_{k,u}(f,T)=\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^k}^\times}(1+T)^{\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_{q^k}/\mathbb{Q}_p}(\hat{f}(\hat{x}))}\omega^{-u}\left(\mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_q}(x)\right),$$

$$L_u(s,f,T)=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,u}(f,T)\frac{s^k}{k}\right)\in 1+s\mathbb{Z}_q[\![T]\!][\![s]\!].$$

我们有 $L_u(s,f,\psi_m)=L_u(s,f,\pi_m)$, 其中 $\pi_m=\psi_m(1)-1$.

定义特征函数

$$C_u(s,f,T)=\prod_{j=0}^{\infty}L_u(q^js,f,T)\in 1+s\mathbb{Z}_q[\![T]\!][\![s]\!],$$

则

$$L_u(s,f,T)=\frac{C_u(s,f,T)}{C_u(qs,f,T)}.$$

牛顿折线的关系

记

- $\mathrm{NP}_{u,m}(f) = C_u(s, f, \pi_m)$ 的 $\pi_m^{a(p-1)}$ 进牛顿折线 (不依赖 ψ_m), $a = \log_p q$;
- $\mathrm{NP}_{u,T}(f) = C_u(s, f, T)$ 的 $T^{a(p-1)}$ 进牛顿折线.
- $H^{\infty}_{[0,d],u}$ 为扭霍奇折线, 其斜率为 $\frac{n}{d} + \frac{1}{bd(p-1)} \sum_{k=1}^{b} u_k$, $n \in \mathbb{N}$, 其中 b 是满足 $p^b u \equiv u \bmod (q-1)$ 的最小正整数,

$$u = u_0 + u_1 p + \cdots + u_{a-1} p^{a-1}, \ 0 \leqslant u_i \leqslant p-1.$$

这样规范化后的牛顿折线满足

$$\mathrm{NP}_{u,m}(f) \geqslant \mathrm{NP}_{u,T}(f) \geqslant H^{\infty}_{[0,d],u}.$$

由定义可知 $\mathrm{NP}_{u,m}(f)$ 完全由它在 $[0, d-1]$ 上的值决定.

不妨设

$$f(x)=\sum_{i=1}^{d}a_ix^i.$$

我们需要 T 进 Dwork 迹公式来计算牛顿折线. 定义

$$E(X)=\exp\left(\sum_{i=0}^{\infty}p^{-i}X^{p^i}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_nX^n\in\mathbb{Z}_p[\![X]\!],$$

$$E_f(X)=\prod_{i=1}^{d}E(\pi\hat{a}_iX^i)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_nX^n,$$

则

$$\gamma_k=\sum\pi^{x_1+\cdots+x_d}\prod_{i=1}^{d}\lambda_{x_i}\hat{a}_i^{x_i},$$

其中 $(x_1,\ldots,x_d)$ 取遍 $\sum ix_i=k$ 的所有非负整数解.

T 进 Dwork 半线性算子

定义

$$\mathcal{B}_u = \left\{ \sum_{v \in M_u} b_v \pi^{\frac{v}{d}} X^v \mid b_v \in \mathbb{Z}_q[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!] \to 0(\pi\text{进}) \right\},\ M_u = \frac{u}{q-1} + \mathbb{N},$$

$$\psi : \mathcal{B}_u \longrightarrow \mathcal{B}_{p^{-1}u},\ \sum_{v \in M_u} b_v X^v \longmapsto \sum_{v \in M_{p^{-1}u}} b_{pv} X^v,$$

则

$$\Psi := \sigma^{-1} \circ \psi \circ E_f : \mathcal{B}_u \to \mathcal{B}_{p^{-1}u}$$

是一个半线性算子, 其中 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_q/\mathbb{Q}_p)$ 是 Frobenius. 那么它定义了 $\mathcal{B} := \bigoplus_{i=0}^{b-1} \mathcal{B}_{p^i u}$ 上的算子, 且 Ψ^a 是 $\mathbb{Z}_q[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!]$ 线性的.

T 进 Dwork 迹公式

定理

我们有

$$C_u(s,f,T)=\det\left(1-\Psi^a s \mid \mathcal{B}_u/\mathbb{Z}_q[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!]\right).$$

因此 $C_u(s,f,T)$ 的 T 进牛顿折线是

$$\left(n,\frac{1}{b}\mathrm{ord}_T(c_{abn})\right),\ n\in\mathbb{N},$$

的凸包, 其中

$$\det\left(1-\Psi s \mid \mathcal{B}/\mathbb{Z}_p[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!]\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^n c_n s^n.$$

二项式情形的已知结果

对于一般的多项式，上述方法可以得到牛顿折线的下界．这个下界是否能否达到，取决于对应赋值项的系数是否为零．

对于二项式 $f(x)=x^d+\lambda x^e$ 情形，相应系数与 f 的系数无关．由于 $(d,e)>1$ 时可以化归到扭的情形，我们不妨设 $(d,e)=1$．此时最低赋值项为

$$\pm\hat{\lambda}^{(*)}\mathrm{Nm}\left(\prod_{k=1}^{b} h_{n,k}\right),\quad h_{n,k}:=\sum_{\tau\in S^{\circ}_{u_k,n}}\mathrm{sgn}(\tau)\prod_{i=0}^{n}\frac{1}{x^{\tau}_{u_k,i}!y^{\tau}_{u_k,i}!},$$

其中 $S^{\circ}_{u_k,n}$ 是 $\{0,1,\ldots,n\}$ 上满足 $e^{-1}(pi-\tau(i)+u_k) \bmod d$ 所有最小非负剩余之和达到最小的置换全体，

$$dx^{\tau}_{u_k,i}+ey^{\tau}_{u_k,i}=pi-\tau(i)+u_k, 0\leqslant y^{\tau}_{u_k,i}\leqslant d-1.$$

因此当且仅当所有的 $h_{n,k}\in\mathbb{Z}_p^{\times}$ 时，

$$\mathrm{NP}_{u,m}(f)=\mathrm{NP}_{u,T}(f)$$

达到应有的下界．

二项式情形的已知结果

如下情形是已知的 ($p \gg 0$):

- $u = 0$:
  - $p \equiv 1 \bmod d$, 此时 $\mathrm{NP}_{u,m}(f) = H^{\infty}_{[0,d],u}$.
  - $f(x) = x^d + \lambda x$, 有很多人计算过, 不在此列举.
  - $f(x) = x^d + \lambda x^{d-1}, p \equiv -1 \bmod d$, 欧阳毅-张 2016.
  - $f(x) = x^d + \lambda x^2, p \equiv 2 \bmod d$, Zhang Qingjie-牛传择 2021.
- 任意 u:
  - $f(x) = x^d + \lambda x$, 刘春雷-牛传择 2011.
  - $f(x) = x^d + \lambda x^{d-1}$, 张 2022.

二项式情形的已知结果

例如, 当 $e=d-1$ 时, 若 $p>(d^2-d-1)\mathrm{order}(\omega^{-u})$, 我们有

$$
\begin{aligned}
h_{n,k} &\equiv \det\left(\frac{1}{(-d^{-1}ev_i+u_k(1-d^{-1}e)-j)!(v_i+j)!}\right) \\
&\equiv \prod_{i=0}^{n}\frac{(d^{-1}e(i-t)+t)_i}{(-d^{-1}ev_i+u_k(1-d^{-1}e))!\cdot(v_i+n)!}\cdot\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n}(v_i-v_j)\not\equiv 0 \bmod p.
\end{aligned}
$$

因此此时 $\mathrm{NP}_{u,m}(f)=\mathrm{NP}_{u,T}(f)=P_{u,e,d}$.

3

指数和的生成域

生成域

设 χ 是 $\mathbb{F}_q^\times$ 上乘性特征, 阶为 c. 那么指数和 $S_k \in \mathbb{Q}(\mu_{pc})$. 我们可以问, $\mathbb{Q}(S_k) \subseteq \mathbb{Q}(\mu_{pc})$ 这个子域是什么?

对于多项式情形, 我们有一些已知结果, 在此省略. 我们来看一下 Kloosterman 和的生成域. 设 $\boldsymbol{\chi} = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ 是 $\mathbb{F}_q^\times$ 的 n 个乘性特征, 重新记

$$\mathrm{Kl}_n(\psi, \boldsymbol{\chi}, q, a) = \sum_{\substack{x_1 \cdots x_n = a \\ x_i \in \mathbb{F}_q}} \chi_1(x_1) \cdots \chi_n(x_n) \psi_{\log_p q}(x_1 + \cdots + x_n).$$

Stickelberger 同余定理

首先回顾下 Stickelberger 同余定理. 固定 $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p} \mid p$ 为 $\mathbb{Q}(\mu_{(q-1)p})$ 和 $\mathbb{Q}(\mu_{q-1})$ 的素位. 固定 $\mathfrak{p}$ 的剩余域到 $\mathbb{F}_q$ 的同构. 那么 Teichmüller 提升给出了一个特征 $\omega : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{Q}(\mu_{q-1})^\times$. 记 $g(m) := \sum_{t\in\mathbb{F}_q^\times} \omega(t)^{-m}\psi_{\log_p q}(\mathrm{Tr}(t))$ 为 ω^{-m} 的高斯和.

定理 (Stickelberger 同余定理)

对于 $0 \leqslant m < q-1$,

$$g(m) \equiv -\frac{\pi^{m_0+\cdots+m_{k-1}}}{m_0!\cdots m_{k-1}!} \bmod \mathfrak{P}^{m_0+\cdots+m_{k-1}+1},$$

其中

$$m = m_0 + m_1 p + \cdots + m_{k-1}p^{k-1}, \quad 0 \leqslant m_i \leqslant p-1.$$

设 $\chi_i = \omega^{-s_i}$. 根据

$$\sum_{m=0}^{q-2} \omega^{-m}(a^{-1}x_1 \cdots x_n) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_1 \cdots x_n \neq a; \\ q-1, & \text{if } x_1 \cdots x_n = a, \end{cases}$$

得到

$$(q-1)\mathrm{Kl}_n(\psi, \boldsymbol{\chi}, q, a) = \sum_{m=0}^{q-2} \omega^m(a) \prod_{i=1}^{n} g(m+s_i).$$

通过小心地估计, 可以证明: 如果 $\chi_i^{-1}\chi_j = 1$ 或不是 n 阶特征, $\forall i, j$, 则当 $p \gg 0$ 时, 存在唯一的 m 使得

$$v_{\mathfrak{P}}\Big(\prod_{i=1}^{n} g(m+s_i)\Big)$$

达到最小. 这样我们得到 $\mathrm{Kl}_n \neq 0$.

事实上, 该方法也可以用来对指数和何时能被 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{pc})/\mathbb{Q})$ 中元素固定做出一些判断, 从而得到特定情形下的指数和的生成域.

记

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{pc})/\mathbb{Q}) = \{\sigma_t\tau_w \mid t \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times, w \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times\},$$

其中

$$\sigma_t(\zeta_p) = \zeta_p^t, \quad \sigma_t(\zeta_c) = \zeta_c,$$
$$\tau_w(\zeta_p) = \zeta_p, \quad \tau_w(\zeta_c) = \zeta_c^w.$$

容易看出

$$\sigma_t\tau_w \mathrm{Kl}_n(\psi, \boldsymbol{\chi}, q, a) = \prod \boldsymbol{\chi}(t)^{-w}\mathrm{Kl}_n(\psi, \boldsymbol{\chi}^w, q, at^n).$$

因此我们需要研究两个 Kloosterman 和何时相差一个 $(q-1)$ 次单位根. 这需要用到 ℓ 进方法.

为了刻画 lisse 层的一些性质, 我们需要 Swan 导子的概念. 设 K 是完备离散赋值域, $I^{(x)}, x \geqslant 0$ 为其高阶分歧群. 对于分歧群 P 的 E 表示 M, 我们有满足如下性质的分解 $M = \oplus M(x)$,

$$M(0) = M^P, \quad M(x)^{I^{(x)}} = 0, \quad M(x)^{I^{(y)}} = M(x),\ y > x > 0.$$

称 $M(x) \neq 0$ 的 x 为 M 的**断点**. 定义 M 的 **Swan 导子**为

$$\mathrm{Sw}(M) = \sum x \dim M(x).$$

它总是一个整数.

曲线

令 C 是特征 p 完全域 $\mathbb{F}$ 上一射影光滑几何连通代数曲线, $K=\mathbb{F}(C)$ 为其函数域. 对于任意闭点 $x\in C(\mathbb{F})$, 我们有完备化 K_x.

对于非空开集 $U\subset C$, 我们有阿贝尔范畴等价

$$\begin{aligned}\{U \text{ 上的 lisse } E \text{ 层}\} &\longrightarrow \mathrm{Rep}_E^c\pi_1(U,\overline{\eta})\\ \mathcal{F} &\longmapsto \mathcal{F}_{\overline{\eta}}.\end{aligned}$$

由于基本群 $\pi_1(U,\overline{\eta})$ 是伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ 的商, 因此分解群 D_x 作用在 $\mathcal{F}_{\overline{\eta}}$ 上. 于是我们可以定义 $\mathcal{F}$ 在 x 处的 Swan 导子. 对于 $x\in U$, 由于惯性群 I_x 作用平凡, 因此 $\mathrm{Sw}_x(\mathcal{F})=0$.

我们将会取 $C=\mathbb{P}^1$ and $U=\mathbb{G}_m$.

Kloosterman 层

Deligne 和 Katz 在 $\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_q$ 上定义了一个 lisse 层

$$\mathcal{K}\mathrm{l} = \mathcal{K}\mathrm{l}_{n,q}(\psi, \boldsymbol{\chi}),$$

它满足如下性质

(1) $\mathcal{K}\mathrm{l}$ 秩为 n, 纯粹权为 $n-1$.

(2) 对任意 $a \in \mathbb{F}_q^\times$, $\mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_a, \mathcal{K}\mathrm{l}_{\overline{a}}\big) = (-1)^{n-1}\mathrm{Kl}_n(\psi, \boldsymbol{\chi}, q, a)$.

(3) $\mathcal{K}\mathrm{l}$ 在 0 处温和 $(\mathrm{Sw}_0 = 0)$.

(4) $\mathcal{K}\mathrm{l}$ 在 ∞ 处完全野, $\mathrm{Sw}_\infty = 1$. 于是它的 ∞ 断点均为 $1/n$.

Fisher 给了 Kloosterman 层沿着有限域的扩张的下降. 对于 $a \in \mathbb{F}_q^\times$, 他定义了 $\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_p$ 上的一个 lisse 层 $\mathcal{F}_a(\boldsymbol{\chi})$, 使得

$$\mathcal{F}_a(\boldsymbol{\chi})|\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_q = \bigotimes_{\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)} (t \mapsto \sigma(a)t^n)^* \mathcal{K}\mathrm{l}_n(\psi \circ \sigma^{-1}, \boldsymbol{\chi} \circ \sigma^{-1})$$

并满足如下性质:

(1) $\mathcal{F}_a(\boldsymbol{\chi})$ 秩为 n^d, 纯粹权为 $d(n-1)$.

(2) 对任意 $t \in \mathbb{F}_p^\times$, $\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_t, \mathcal{F}_a(\boldsymbol{\chi})_{\bar{t}}) = (-1)^{(n-1)d}\mathrm{Kl}_n(\psi, \boldsymbol{\chi}, q, at^n)$.

(3) $\mathcal{F}_a(\boldsymbol{\chi})$ 在 0 处温和.

(4) $\mathcal{F}_a(\boldsymbol{\chi})$ 的 ∞ 断点均不超过 1.

辅助层

将乘性特征 χ 看作 $\mathbb{B}^\times = \mathrm{Res}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}\mathbb{G}_m$ 的 $\mathbb{F}_p$ 的特征, 通过 Lang torsor 给出 $\mathbb{B}^\times$ 上的秩一 lisse 层. 记 $\mathcal{L}_\chi$ 为其在 $\mathbb{G}_m$ 上的限制. 类似地, 加性特征 ψ 给出了 $\mathbb{G}_a/\mathbb{F}_p$ 上的 lisse 层, 记 $\mathcal{L}_\psi$ 为其在 $\mathbb{G}_m$ 上的限制.

对于 $t \in \mathbb{F}_p^\times$,

$$\mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_t, (\mathcal{L}_\chi)_{\bar{t}}\big) = \chi(t), \quad \mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_t, (\mathcal{L}_\psi)_{\bar{t}}\big) = \psi(t).$$

对于单位根 $\lambda \in \mu_{q-1}$, 令 V 为一维 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 线性空间, 使得几何 Frobenius 通过 λ 作用. 那么它给出了 $\mathrm{Spec}\,\mathbb{F}_p$ 上的层, 通过拉回到 $\mathbb{G}_m$ 上得到 $\mathcal{L}$. 那么对于 $t \in \mathbb{F}_p^\times$,

$$\mathrm{Tr}\big(\mathrm{Frob}_t, \mathcal{L}_{\bar{t}}\big) = \lambda.$$

引理

设 $\mathcal{F},\mathcal{F}'$ 是 $\mathbb{G}_m\otimes\mathbb{F}_p$ 上秩均为 r，纯粹权为 w 的 lisse 层. 假设存在单位根 λ 使得对任意 $t\in\mathbb{F}_p^\times$ 有

$$\operatorname{Tr}\left(\operatorname{Frob}_t,\mathcal{F}_{\bar{t}}\right)=\operatorname{Tr}\left(\operatorname{Frob}_t,\mathcal{F}'_{\bar{t}}\right).$$

设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{G}_m\otimes\mathbb{F}_p$ 上一几何不可约秩为 s，纯粹权为 w 的层，使得 $\mathcal{G}\mid\mathbb{G}_m\otimes\overline{\mathbb{F}}_p$ 在 $\mathcal{F}\mid\mathbb{G}_m\otimes\overline{\mathbb{F}}_p$ 中恰好出现一次，则它在 $\mathcal{F}'\mid\mathbb{G}_m\otimes\overline{\mathbb{F}}_p$ 中至少出现一次，其中我们要求 $p>[2rs(M_0+M_\infty)+1]^2$，$M_\eta$ 是 $\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}'$ 的最大 η 断点.

最高权的比较

设 $\mathcal{G}_a(\boldsymbol{\chi})$ 为 $\mathcal{F}_a(\boldsymbol{\chi})$ 的一个子层, 使得作为连通几何单值群 $G_{\mathrm{geom}}(\mathcal{F}_a(\boldsymbol{\chi}))^\circ$ 的李代数的子表示, 其具有最高权. 将

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_a(\boldsymbol{\chi}) \otimes \mathcal{L}_{\prod \overline{\boldsymbol{\chi}}}, \quad \mathcal{F}' = \mathcal{F}'_b(\boldsymbol{\rho}) \otimes \mathcal{L}_{\prod \overline{\boldsymbol{\rho}}}, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_a(\boldsymbol{\chi}) \otimes \mathcal{L}_{\prod \overline{\boldsymbol{\chi}}}$$

代入上述引理中, 以及交换二者的情形, 得到二者具有相等的最高权.

将 $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ 通过伽罗瓦作用得到的层直和起来, $\mathcal{G}_a(\chi), \mathcal{G}_b(\rho)$ 可视为其连通几何单值群的李代数表示, 分解得到伽罗瓦作用之后得到的两个层的集合具有一样的最高权集合, 从而 $\boldsymbol{\chi}$ 和 $\boldsymbol{\rho}$ 在相差伽罗瓦作用下只相差一个特征:

$$\exists \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p), \quad \boldsymbol{\rho} = \eta \cdot (\boldsymbol{\chi} \circ \sigma^{-1}), \quad b = \sigma(a).$$

生成域

定理

若 $p \gg 0$ 且 χ_i 之间不相差非平凡的 n 次特征, 则 $\mathrm{Kl}_n(\psi, \boldsymbol{\chi}, q, a)$ 生成 $\mathbb{Q}(\mu_{pc})^H$, 其中 H 包含的 $\sigma_t\tau_w$ 满足: 存在整数 β 和特征 η 使得

$$t = \lambda a_1^{\beta}, \lambda^{n_1} = 1, \ \boldsymbol{\chi}^w = \eta \boldsymbol{\chi}^{q_1^{\beta}}, \ \eta(a) = \prod \boldsymbol{\chi}^w(t).$$

这里, $n_1 = (n, p-1)$, $q_1 = \#\mathbb{F}_p(a^{(p-1)/n_1})$, $a_1 \in \mathbb{F}_p^{\times}$ 满足 $a_1^{n/n_1} = \mathbf{N}_{\mathbb{F}_{q_1}/\mathbb{F}_p}(a^{(1-p)/n_1}) = a^{(1-q_1)/n_1}$.

例子: $n=2$ 情形

设 $\boldsymbol{\chi}=\{1,\chi\}$, χ 的阶为 $c\neq 2$. 若 $p\gg 0$, 则 $\mathrm{Kl}(\psi,\boldsymbol{\chi},p^d,a)$ 生成 $\mathbb{Q}(\mu_{pc})^H$, 其中

$$H=\begin{cases}\langle \tau_{q_1}\sigma_{a_1},\sigma_{-1},\tau_{-1}\rangle, & 若\ \chi(-1)=1,\chi(a)=1;\\ \langle \tau_{-q_1}\sigma_{a_1},\sigma_{-1}\rangle, & 若\ \chi(-1)=1,\chi(a)=\chi(a_1)=-1;\\ \langle \tau_{q_1^\alpha}\sigma_{a_1^\alpha},\sigma_{-1}\rangle, & 若\ \chi(-1)=1,\chi(a)^\alpha\neq 1;\\ \langle \tau_{q_1}\sigma_{-a_1},\tau_{-1}\sigma_{-1}\rangle, & 若\ \chi(-1)=-1,\chi(a)=\chi(a_1)=-1;\\ \langle \tau_{q_1}\sigma_{a_1},\tau_{-1}\rangle & 若\ \chi(-1)=-1,\chi(a)=1;\\ \langle \tau_{q_1}\sigma_{a_1},\tau_{-1}\sigma_{-1}\rangle, & 若\ \chi(-1)=-1,\chi(a)=-1,\chi(a_1)=1;\\ \langle \tau_{q_1^{\alpha/2}}\sigma_{-a_1^{\alpha/2}}\rangle, & 若\ \chi(-1)=-1,2\mid\alpha,\chi(a)\neq\pm 1;\\ \langle \tau_{q_1^\alpha}\sigma_{a_1^\alpha}\rangle, & 若\ \chi(-1)=-1,2\nmid\alpha,\chi(a)\neq\pm 1.\end{cases}$$

$q_1=\#\mathbb{F}_p(a^{(1-p)/2}),a_1=a^{(1-q_1)/2}$, α 是 $\chi(a_1)\in\mu_{p-1}$ 的阶.

指数和的生成域序列

回到一般情形, 数列 $\{S_k\}_{k\geqslant 1}$ 的生成域是一个有理函数. 因此它是线性递推数列.

类比 Skolem-Mahler-Lech 关于线性递推数列零点的定理, 万大庆-尹航证明了此类数列的生成域是周期的.

谢 谢!