

问题与征解

问题

问题 27 (供题者: 中国科学技术大学 任广斌) 设 $k_1, k_2, \dots, k_n, m \in \mathbb{N}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, 计算 $\frac{d^m}{dx^m}((x-\alpha_1)^{-k_1}(x-\alpha_2)^{-k_2}\cdots(x-\alpha_n)^{-k_n})$.

问题 28 (供题者: 南开大学 黄利兵) 假设 $f \in C(\mathbb{R})$, 且 $\int_0^{2\pi} f(r \cos t) dt$ 与 $r \in \mathbb{R}$ 无关, 证明或否定: $f(x) + f(-x) = 2f(0), \forall x \in \mathbb{R}$.

解答

问题 16 (供题者: 复旦大学 严金海) 实数集 \mathbb{R} 上是否有满足如下条件的函数? 若有请给出例子, 若没有请给出证明: $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, 成立 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$.

多位读者独立地给出了正确的解答, 且思路一致. 如下采用的是张神星 (合肥工业大学副研究员, E-mail: zhangshenxing@hfut.edu.cn) 提供的解答. 提供本题正确解答的还有以下读者 (以提供解答的时间为序): 吴楷彦 (复旦大学数学科学学院 2020 级本科生, E-mail: 20307110052@fudan.edu.cn); 陈嵩骏 (复旦大学数学科学学院 2022 级本科生, E-mail: 22300180092@m.fudan.edu.cn); 王睿 (复旦大学数学科学学院 2022 级本科生, E-mail: 22307130093@m.fudan.edu.cn); 胡伟 (北京航空航天大学数学学院 2020 级本科生, E-mail: 2396047845@qq.com).

解 不存在. 实际上对于任意不可数集合 $S \subseteq \mathbb{R}$, 均不存在函数满足 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \forall x_0 \in S$.

设 $S_n = \{x \in S : |f(x)| < n\}$. 如果对任意 n , S_n 均至多可数, 则 $S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n$ 也至多可数, 矛盾. 从而存在 n , 使得 $T = S_n$ 不可数.

假设 T 不存在属于自身的聚点. 对于任意 $x \in T$, 存在 $\delta_x > 0$ 使得去心邻域

$$U_{\delta_x} = (x - \delta_x, x) \cup (x, x + \delta_x)$$

内没有属于 T 的点. 若不然, 存在 $a_n \in U_{1/n} \cap T$, 于是 $a_n \rightarrow x$, x 是 T 的聚点. 故开区间 $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ 两两不交. 任取有理数 $q_x \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$, 那么 q_x 两两不等. 然而有理数只有可数多个, 而 x 有不可数多个, 矛盾! 因此 T 有属于自身的聚点.

设 $x_0 \in T$ 是 T 的一个聚点, 则存在 $x_1, x_2, \dots \in T, x_m \rightarrow x_0$. 而 $|f(x_m)| < n$, 因此 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不可能是 ∞ .

有关资料请查询 <https://math.stackexchange.com/questions/2097092/existence-of-a-function-whose-limits-go-to-infinity-almost-everywhere>.

供题者点评 张神星不但完美地解答了问题, 而且还将条件放松到了最弱的情况, 这种钻研精神值得喝彩!

注: 读者在提供问题解答时, 请先提供印刷体的版本, 并注明单位、姓名和身份 (教师、本科生或研究生等). 解答被选用后需提供 word 版本.