线性代数

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第二章　等价和秩

❶ 标准正交基

第一节　标准正交基

- 向量的内积
- 正交向量组与格拉姆-施密特正交化
- 正交矩阵

本节考虑的向量都是实向量.

设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 的秩为 r, 则它们生成的线性空间 V 的维数就是 r. S 的极大无关组 S_0 的大小就是 r, 且 S_0 是 V 的一组基.

有时候我们想更进一步, 就像 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 一样, 我们希望找到 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 使得

(1) $\boldsymbol{\alpha}_i$ “长度” 都是 1;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 两两 “垂直”.

定义

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, 定义内积

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n\in\mathbb{R}.$$

内积是数量积的推广, 它满足

(1) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$;

(2) $[\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\beta}]=\lambda[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$;

(3) $[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$;

(4) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]\geqslant 0$. 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时, $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=0$.

这说明内积是一个对称正定双线性型.

定义

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义 $\boldsymbol{x}$ 的长度或模为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}.$$

当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时, 称 $\boldsymbol{x}$ 为单位向量. 对于非零向量 $\boldsymbol{x}$, $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的单位化向量.

我们有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \iff \|\boldsymbol{x}\|=0 \iff [\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]=0.$

夹角

定义

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\dots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,\dots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, 定义 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的夹角为

$$\theta=\arccos\frac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|}\in[0,\pi].$$

若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 夹角为 $\frac{\pi}{2}$, 即 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$, 称 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交(垂直).

定义

(1) 如果向量组 S 中的向量两两正交且非零，则称 S 为正交向量组.

(2) 如果向量组 S 中的向量两两正交且均为标准向量，则称 S 为标准正交向量组.

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,-2,1)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3$. 求向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组.

解

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 正交. 设 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3] &= x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ [\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3] &= x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{aligned}$$

解得 $(x_1, x_2, x_3) = (k, 0, -k)$. 故可取 $\boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$.

定理

正交向量组必线性无关.

证明

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是正交向量组, $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$. 对任意 $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$0 = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_i] = [\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_i] = \lambda_i[\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i].$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 非零, $[\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i] \neq 0, \lambda_i = 0$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. $\square$

现在我们来看如何从空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 得到一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1, \dots, \boldsymbol{\beta}_k$ 已经是两两正交的单位向量, 设 $\boldsymbol{\beta}_{k+1} = \boldsymbol{\alpha}_{k+1} + \lambda_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{\beta}_k$ 与它们均正交, 则

$$[\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_{k+1}] = [\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\alpha}_{k+1}] + \lambda_i\|\boldsymbol{\beta}_i\| = 0 \implies \lambda_i = -\frac{[\boldsymbol{\alpha}_{k+1}, \boldsymbol{\beta}_i]}{[\boldsymbol{\beta}_i, \boldsymbol{\beta}_i]}.$$

由此得到格拉姆-施密特 正交单位化方法: 取 (Gram Schmidt)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\beta}_r &= \boldsymbol{\alpha}_r - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \cdots - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1}
\end{aligned}
$$

那么 $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|}, \ldots, \boldsymbol{e}_r = \dfrac{\boldsymbol{b}_r}{\|\boldsymbol{b}_r\|}$ 就是 V 的一组标准正交基.

典型例题：格拉姆-施密特正交化

例

将 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1,0,1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (1,1,2)^{\mathrm{T}}$ 正交单位化.

解

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 = (1,0,1)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}(1,1,0)^{\mathrm{T}} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2 = (1,1,2)^{\mathrm{T}} - (1,1,0)^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3/2}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)^{\mathrm{T}} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{b}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{b}_2}{\|\boldsymbol{b}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \frac{\boldsymbol{b}_3}{\|\boldsymbol{b}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$