复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

第四章　级数

1. 复数项级数

第一节　幂级数

- 复数项级数
- 绝对收敛和条件收敛

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义

- 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义.

函数项级数

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义

- 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为**复变函数项级数**.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义

- 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为复变函数项级数.
- 对于 $z_0 \in D$, 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 处收敛, 相应级数的值称为它的和.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义

- 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为复变函数项级数.
- 对于 $z_0 \in D$, 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 处收敛, 相应级数的值称为它的和.
- 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 上处处收敛, 则它的和是一个函数, 称为和函数.

幂级数及其敛散性

定义

称形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

定义

称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为**幂级数**.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

定义

称形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数, 我们也有阿贝尔定理.

阿贝尔定理

幂级数及其敛散性

定义

称形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数，因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数，我们也有阿贝尔定理.

阿贝尔定理

(1) 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛，那么对任意 $|z|<|z_0|$ 的 z，该级数必绝对收敛.

定义

称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数, 我们也有阿贝尔定理.

阿贝尔定理

(1) 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 那么对任意 $|z|<|z_0|$ 的 z, 该级数必绝对收敛.

(2) 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处发散, 那么对任意 $|z|>|z_0|$ 的 z, 该级数必发散.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

设

$$R = \sup\left\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛}\right\}.$$

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

设

$$R = \sup\left\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛}\right\}.$$

- 如果 $R = +\infty$, 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

设

$$R = \sup\left\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛}\right\}.$$

- 如果 $R = +\infty$, 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.
- 如果 $0 < R < +\infty$, 那么该幂级数在 $|z| < R$ 上绝对收敛, 在 $|z| > R$ 上发散.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

设

$$R = \sup\left\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛}\right\}.$$

- 如果 $R = +\infty$, 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.
- 如果 $0 < R < +\infty$, 那么该幂级数在 $|z| < R$ 上绝对收敛, 在 $|z| > R$ 上发散.
- 如果 $R = 0$, 那么该幂级数仅在 $z = 0$ 处收敛, 对任意 $z \neq 0$ 都发散.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

设

$$R = \sup\left\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛}\right\}.$$

- 如果 $R = +\infty$, 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.
- 如果 $0 < R < +\infty$, 那么该幂级数在 $|z| < R$ 上绝对收敛, 在 $|z| > R$ 上发散.
- 如果 $R = 0$, 那么该幂级数仅在 $z = 0$ 处收敛, 对任意 $z \neq 0$ 都发散.

我们称 R 为该幂级数的收敛半径.

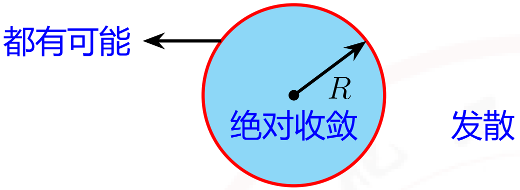
从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

设

$$R = \sup\left\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛}\right\}.$$

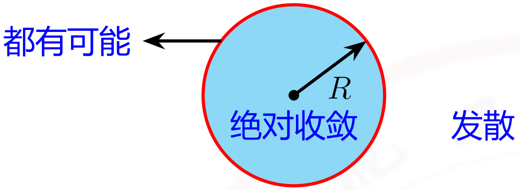
- 如果 $R = +\infty$, 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.
- 如果 $0 < R < +\infty$, 那么该幂级数在 $|z| < R$ 上绝对收敛, 在 $|z| > R$ 上发散.
- 如果 $R = 0$, 那么该幂级数仅在 $z = 0$ 处收敛, 对任意 $z \neq 0$ 都发散.

我们称 R 为该幂级数的收敛半径. 这也等同于实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| z^n$ 的收敛半径.



证明

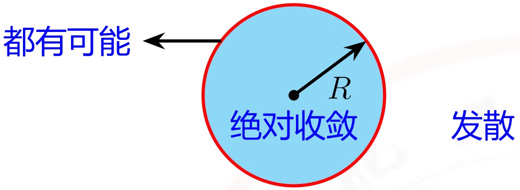
(2)可由(1)的逆否命题得到. □



证明

(2)可由(1)的逆否命题得到. 我们来证明(1). 因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$.

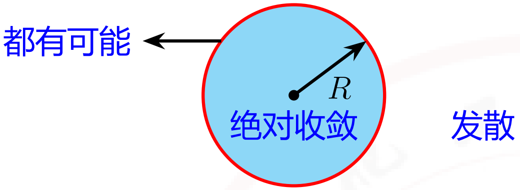
$\square$



证明

(2)可由(1)的逆否命题得到．我们来证明(1)．因为级数收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$．于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$．

$\square$



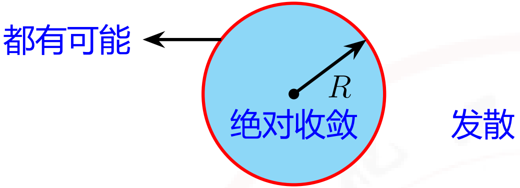
证明

(2)可由(1)的逆否命题得到．我们来证明(1)．因为级数收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$．于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$．如果 $|z| < |z_0|$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

□

幂级数及其敛散性

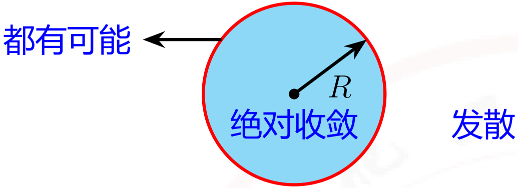


证明

(2)可由(1)的逆否命题得到. 我们来证明(1). 因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 如果 $|z| < |z_0|$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{1 - \left|\dfrac{z}{z_0}\right|}.$$

□



证明

(2)可由(1)的逆否命题得到. 我们来证明(1). 因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 如果 $|z| < |z_0|$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{1 - \left|\dfrac{z}{z_0}\right|}.$$

所以级数在 z 处绝对收敛. □

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解

如果幂级数收敛，则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解

如果幂级数收敛，则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$. 当 $|z| < 1$ 时，和函数为

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解

如果幂级数收敛，则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$. 当 $|z| < 1$ 时，和函数为

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

因此收敛半径为 1.

收敛半径的计算

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中

收敛半径的计算

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R=\dfrac{1}{r}$, 其中

(1) 达朗贝尔公式 (比值法): $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ (假设存在);

收敛半径的计算

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中

(1) 达朗贝尔公式 (比值法): $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ (假设存在);

(2) 柯西公式 (根式法): $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ (假设存在);

收敛半径的计算

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R=\dfrac{1}{r}$, 其中

(1) 达朗贝尔公式 (比值法): $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ (假设存在);

(2) 柯西公式 (根式法): $r=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ (假设存在);

(3) 柯西-阿达马公式: $r=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$.

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中

(1) 达朗贝尔公式 (比值法): $\boxed{r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|}$ (假设存在);

(2) 柯西公式 (根式法): $r = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ (假设存在);

(3) 柯西-阿达马公式: $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$.

如果 $r = 0$ 或 $+\infty$, 则 $R = +\infty$ 或 0.

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径, 并讨论 $z=0,2$ 的情形.

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径, 并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ 可知收敛半径为 1.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解

由 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ 可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径, 并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ 可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

当 $z=0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径, 并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$ 可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

当 $z=0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

事实上, 收敛圆周上既可能处处收敛, 也可能处处发散, 也可能既有收敛的点也有发散的点.

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos(in)z^n$ 的收敛半径.

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$ 的收敛半径.

解

我们有 $c_n = \cos(in) = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2}$.

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos(in)z^n$ 的收敛半径.

解

我们有 $c_n=\cos(in)=\dfrac{e^n+e^{-n}}{2}$. 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}+e^{-n-1}}{e^n+e^{-n}}=e\lim_{n\to\infty}\frac{1+e^{-2n-2}}{1+e^{-2n}}=e$$

可知收敛半径为 $\dfrac{1}{e}$.

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径.

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径.

解

由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |1+i| = \sqrt{2}$$

可知收敛半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例题: 收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p\in\mathbb{R}$.

例题：收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p\in\mathbb{R}$.

解

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$ 可知收敛半径为 1.

例题: 收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p\in\mathbb{R}$.

解

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$ 可知收敛半径为 1. 设 $|z|=1$.

例题：收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p \in \mathbb{R}$.

解

由 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$ 可知收敛半径为 1. 设 $|z| = 1$.

- 若 $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛,

例题: 收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p \in \mathbb{R}$.

解

由 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$ 可知收敛半径为 1. 设 $|z| = 1$.

- 若 $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，原级数在收敛圆周上处处绝对收敛.

例题: 收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形, 其中 $p \in \mathbb{R}$.

解

由 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$ 可知收敛半径为 1. 设 $|z| = 1$.

- 若 $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 原级数在收敛圆周上处处绝对收敛.
- 若 $p \leqslant 0$, $\left|\frac{z^n}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p} \not\to 0$,

例题: 收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形, 其中 $p \in \mathbb{R}$.

解

由 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$ 可知收敛半径为 1. 设 $|z| = 1$.

- 若 $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 原级数在收敛圆周上处处绝对收敛.
- 若 $p \leqslant 0$, $\left|\frac{z^n}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p} \not\to 0$, 原级数在收敛圆周上处处发散.

例题: 收敛半径的计算 *

回忆狄利克雷判别法: 若 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 部分和有界, 实数项数列 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

例题: 收敛半径的计算 *

回忆狄利克雷判别法: 若 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 部分和有界, 实数项数列 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

续解

回忆狄利克雷判别法: 若 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 部分和有界, 实数项数列 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

续解

- 若 $0 < p \leqslant 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 发散,

例题: 收敛半径的计算 *

回忆狄利克雷判别法: 若 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 部分和有界, 实数项数列 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

续解

- 若 $0 < p \leqslant 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 发散, 而在收敛圆周上其它点 $z \neq 1$ 处,

$$|z + z^2 + \cdots + z^n| = \left|\frac{z(1 - z^n)}{1 - z}\right| \leqslant \frac{2}{|1 - z|}$$

有界, 数列 $\{n^{-p}\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0,

例题：收敛半径的计算 *

回忆狄利克雷判别法：若 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 部分和有界，实数项数列 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

续解

- 若 $0 < p \leqslant 1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 发散，而在收敛圆周上其它点 $z \neq 1$ 处，

$$|z + z^2 + \cdots + z^n| = \left|\frac{z(1-z^n)}{1-z}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|}$$

有界，数列 $\{n^{-p}\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^p}$ 收敛.

例题: 收敛半径的计算 *

回忆狄利克雷判别法: 若 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 部分和有界, 实数项数列 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

续解

- 若 $0 < p \leqslant 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 发散, 而在收敛圆周上其它点 $z \neq 1$ 处,

$$|z + z^2 + \cdots + z^n| = \left|\frac{z(1-z^n)}{1-z}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|}$$

有界, 数列 $\{n^{-p}\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^p}$ 收敛. 故该级数在 $z=1$ 发散, 在收敛圆周上其它点收敛.

幂级数的有理运算

定理

设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\ |z|<R_1,\qquad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\ |z|<R_2.$$

幂级数的有理运算

定理

设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,|z|<R_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,|z|<R_2.$$

那么当 $|z|<R=\min\{R_1,R_2\}$ 时,

$$(f\pm g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,\quad (fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)z^n.$$

幂级数的有理运算

定理

设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,|z|<R_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,|z|<R_2.$$

那么当 $|z|<R=\min\{R_1,R_2\}$ 时,

$$(f\pm g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,\quad (fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)z^n.$$

注意当 $R_1=R_2$ 时, $f\pm g$ 或 fg 的收敛半径可以比 f,g 的大.

幂级数的有理运算

定理

设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, |z|<R_1, \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n, |z|<R_2.$$

那么当 $|z|<R=\min\{R_1,R_2\}$ 时,

$$(f\pm g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n, \quad (fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)z^n.$$

注意当 $R_1=R_2$ 时, $f\pm g$ 或 fg 的收敛半径可以比 f,g 的大. 在某些情形下, 我们只关心 fg 的某一幂次系数.

幂级数的有理运算

定理

设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,|z|<R_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,|z|<R_2.$$

那么当 $|z|<R=\min\{R_1,R_2\}$ 时,

$$(f\pm g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,\quad (fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)z^n.$$

注意当 $R_1=R_2$ 时, $f\pm g$ 或 fg 的收敛半径可以比 f,g 的大.

在某些情形下, 我们只关心 fg 的某一幂次系数, 此时我们便可以用上述表达式来计算特定幂次系数.

定理

设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, |z|<R,$$

设函数 $\varphi(z)$ 在 $|z|<r$ 上解析且 $|\varphi(z)|<R$,

定理

设幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R,$$

设函数 $\varphi(z)$ 在 $|z| < r$ 上解析且 $|\varphi(z)| < R$, 那么当 $|z| < r$ 时,

$$f[\varphi(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\varphi(z)]^n.$$

定理

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

(1) 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

幂级数的解析性质

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

(1) 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

(2) $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,

幂级数的解析性质

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

(1) 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

(2) $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,

(3) $\displaystyle\int_0^z f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$.

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

(1) 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

(2) $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,

(3) $\displaystyle\int_0^z f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$.

也就是说, 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析, 且可以逐项求导, 逐项积分.

由于和函数在 $|z| > R$ 上没有定义, 因此在 $|z| = R$ 上处处不解析.

由于和函数在 $|z| > R$ 上没有定义, 因此在 $|z| = R$ 上处处不解析.

如果函数 $g(z)$ 在该幂级数收敛的点处和 $f(z)$ 均相同, 则 $g(z)$ 也一定在收敛圆周上有奇点.

由于和函数在 $|z|>R$ 上没有定义, 因此在 $|z|=R$ 上处处不解析.

如果函数 $g(z)$ 在该幂级数收敛的点处和 $f(z)$ 均相同, 则 $g(z)$ 也一定在收敛圆周上有奇点. 这是因为一旦 $g(z)$ 在收敛圆周上处处解析, 该和函数就可以在一个半径更大的圆域上作泰勒展开.

例题：幂级数展开

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

例题：幂级数展开

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

解

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)}$$

例题：幂级数展开

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

解

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}.$$

例题：幂级数展开

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

解

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}.$$

当 $|z-a| < |b-a|$ 时,

例题: 幂级数展开

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数, 其中 $a \neq b$.

解

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}.$$

当 $|z-a| < |b-a|$ 时, $\dfrac{1}{z-b} = \dfrac{1}{a-b} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)^n$,

例题：幂级数展开

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

解

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}.$$

当 $|z-a| < |b-a|$ 时，$\dfrac{1}{z-b} = \dfrac{1}{a-b} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)^n$，即

$$\frac{1}{z-b} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}, \qquad |z-a| < |b-a|.$$

典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1}=2$ 可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$.

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1}=2$ 可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$. 当 $|z|<\dfrac{1}{2}$ 时, $|2z|<1$.

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = 2$ 可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$. 当 $|z|<\dfrac{1}{2}$ 时, $|2z|<1$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}$$

典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = 2$ 可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$. 当 $|z|<\dfrac{1}{2}$ 时, $|2z|<1$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}$$
$$= \frac{2}{1-2z} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-2z)(1-z)}.$$

典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$ 可知收敛半径为 1.

典型例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$ 可知收敛半径为 1. 当 $|z| < 1$ 时,

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$ 可知收敛半径为 1. 当 $|z|<1$ 时,

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1-\frac{1}{z-1},$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \left(-\frac{1}{z-1}\right)' = \frac{1}{(z-1)^2}, \qquad |z|<1.$$

典型例题：幂级数的收敛半径与和函数

练习

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 的和函数.

典型例题：幂级数的收敛半径与和函数

练习

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ 的和函数.

答案

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln(1-z), \quad |z| < 1.$$

典型例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right)\mathrm{d}z.$

典型例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right)\mathrm{d}z.$

注意这里并不能逐项积分，因为该级数并不是幂级数，它的和函数不解析.

解

由于 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 收敛，

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right) \mathrm{d}z.$

注意这里并不能逐项积分，因为该级数并不是幂级数，它的和函数不解析.

解

由于 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 收敛，它的和函数解析.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right) \mathrm{d}z.$

注意这里并不能逐项积分，因为该级数并不是幂级数，它的和函数不解析.

解

由于 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 收敛，它的和函数解析. 因此

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right) \mathrm{d}z = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z} \mathrm{d}z + \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \mathrm{d}z$$

典型例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right)\mathrm{d}z.$

注意这里并不能逐项积分，因为该级数并不是幂级数，它的和函数不解析.

解

由于 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 收敛，它的和函数解析．因此

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right)\mathrm{d}z=\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z}\,\mathrm{d}z+\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\mathrm{d}z$$
$$=2\pi i+0=2\pi i.$$

另解

当 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n$ 收敛且

$$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{z^{-1}}{1-z} = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1},$$

典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

另解

当 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 时, $\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n$ 收敛且

$$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{z^{-1}}{1-z} = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1},$$

故

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right) \mathrm{d}z = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}\right) \mathrm{d}z = 2\pi i.$$