目录

第一章 解析函数

§1.1 解析函数的概念

§1.1.1 可导的函数

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义 1.1 (导数)

设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作

$$f'(z_0) = \left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 称 $f(z)$ 在 D 内可导.

例题 1.1 函数 $f(z) = x + 2yi$ 在哪些点处可导?

解答:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}. \end{aligned}$$

当 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ 时, 上式 $\to 2$; 当 $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ 时, 上式 $\to 1$. 因此该极限不存在, $f(z)$ 处处不可导.

✍ **练习 1.1.1** 函数 $f(z) = \overline{z} = x - yi$ 在哪些点处可导?

例题 1.2 求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解答:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

定理 1.2 (导函数的运算法则)

- $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $\quad (cf)' = cf'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$, $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$;
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z)$;
- $g'(z) = \dfrac{1}{f'(w)}, g = f^{-1}, w = g(z)$.

定理 1.3 (可导蕴含连续)

若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

该定理的证明和实变量情形完全相同.

证明: 设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = f'(z_0) \cdot 0 = 0.$$ □

§1.1.2 可微的函数

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

定义 1.4 (微分)

如果存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}w = A\Delta z$.

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $\mathrm{d}w = f'(z_0)\Delta z$, $\mathrm{d}z = \Delta z$. 故

$$\mathrm{d}w = f'(z_0)\,\mathrm{d}z, f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.$$

§1.1.3 解析的函数

定义 1.5 (解析和奇点)

- 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.
- 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生.

由于区域 D 是一个开集, 其中的任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 的邻域. 所以 **$f(z)$ 在 D 内解析和在 D 内可导是等价的**.

如果 $f(z)$ 在 z_0 解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 **$f(z)$ 解析点全体是一个开集**.

✍ **练习 1.1.2** 单选题: 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析是 $f(z)$ 在该点可导的 (   ).

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

例题 1.3 研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

解答: 由于

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi},$$

(1) 若 $z=0$, 则当 $\Delta z\to 0$ 时该极限为 0.

(2) 若 $z\neq 0$, 则当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}+z$; 当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}-z$. 因此此时极限不存在.

故 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处可导, 从而处处不解析.

§1.2 函数解析的充要条件

§1.2.1 柯西-黎曼方程

通过对一些简单函数的分析, 我们发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x,y,\overline{z}$ 等内容. 这种现象并不是孤立的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

为了简便我们用 u_x,u_y,v_x,v_y 等记号表示偏导数.

设 f 在 z 处可导, $f'(z)=a+bi$, 则

$$\Delta u+i\Delta v=\Delta f=(a+bi)(\Delta x+i\Delta y)+o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+o(\Delta z),$$
$$\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+o(\Delta z).$$

由于 $o(\Delta z)=o(|\Delta z|)=o(\sqrt{x^2+y^2})$, 因此 u,v 可微且 $u_x=v_y=a,v_x=-u_y=b$.

反过来, 假设 u,v 可微且 $u_x=v_y,v_x=-u_y$. 由全微分公式

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u&=u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=u_x\,\mathrm{d}x-v_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}v&=v_x\,\mathrm{d}x+v_y\,\mathrm{d}y=v_x\,\mathrm{d}x+u_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}f&=\mathrm{d}(u+iv)=(u_x+iv_x)\,\mathrm{d}x+(-v_x+iu_x)\,\mathrm{d}y\\
&=(u_x+iv_x)\,\mathrm{d}(x+iy)\\
&=(u_x+iv_x)\,\mathrm{d}z=(v_y-iu_y)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

故 $f(z)$ 在 z 处可导, 且 $f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$.

由此得到

定理 1.6 (柯西-黎曼方程)

$f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u,v 可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x=v_y,\quad v_x=-u_y.$$

此时

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y.$$

注意到 $x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z},y=-\frac{i}{2}z+\frac{i}{2}\overline{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 我们定

图 1.1: 柯西

图 1.2: 黎曼

义 f 对 z 和 $\bar{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial z}=\dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}-\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y},\\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\dfrac{\partial x}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}.\end{cases}$$

如果把 $z,\bar{z}$ 看成独立变量, 那么当 f 在 z 处可导时, $\mathrm{d}f=f'\,\mathrm{d}z$. 当 f 关于 $z,\bar{z}$ 可微时 (即 u,v 可微),

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,\mathrm{d}\bar{z}.$$

所以 **f 在 z 处可导当且仅当 u,v 可微且 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$, 此时 $f'(z)=\dfrac{\partial f}{\partial z}$.**

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理 1.7

- 如果 u_x,u_y,v_x,v_y 在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 z 可导.
- 如果 u_x,u_y,v_x,v_y 在区域 D 上处处连续, 且满足 C-R 方程, 则 $f(z)$ 在 D 上可导 (从而解析).

§1.2.2 柯西-黎曼方程的应用

例题 1.4

(1) 函数 $f(z)=\bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

(2) 函数 $f(z)=z\operatorname{Re}z$ 在何处可导, 在何处解析?

(3) 函数 $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解答:

(1) 由 $u=x, v=-y$ 可知

$$u_x=1,\qquad u_y=0,$$
$$v_x=0,\qquad v_y=-1.$$

因为 $u_x=1\neq v_y=-1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析. [1]

(2) 由 $f(z)=x^2+ixy, u=x^2, v=xy$ 可知

$$u_x=2x,\qquad u_y=0,$$
$$v_x=y,\qquad v_y=x.$$

由 $2x=x, 0=-y$ 可知只有 $x=y=0, z=0$ 满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析

[1] 也可由 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=1\neq 0$ 看出.

且 $f'(0) = u_x(0) + iv_x(0) = 0$. [2]

(3) 由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$u_x = e^x \cos y, \qquad u_y = -e^x \sin y,$$
$$v_x = e^x \sin y, \qquad v_y = e^x \cos y.$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z).$$

实际上, (3) 中的函数就是复变量的指数函数 e^z.

✍ **练习 1.2.1** 单选题: 函数 (　) 在 $z = 0$ 处不可导.

(A) $2x + 3yi$　　(B) $2x^2 + 3y^2 i$　　(C) $e^x \cos y + ie^x \sin y$　　(D) $x^2 - xyi$

例题 1.5 设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

解答: 由于

$$u_x = 2x + ay, \qquad u_y = ax + 2by,$$
$$v_x = 2cx + dy, \qquad v_y = dx + 2y,$$

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$

$$a = d = 2, \quad b = c = -1,$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2y + i(-2x + 2y) = (2 - 2i)z.$$

例题 1.6 证明: 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明: 由于

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$

因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数. □

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件等价:

- $f(z)$ 是一常数,
- $f'(z) = 0$,
- $\arg f(z)$ 是一常数,
- $|f(z)|$ 是一常数,
- $\mathrm{Re}\, f(z)$ 是一常数,
- $\mathrm{Im}\, f(z)$ 是一常数,
- $v = u^2$,
- $u = v^2$.

例题 1.7 证明: 如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x, y) = c_1$ 和曲线族 $v(x, y) = c_2$ 互相正交.

[2] 也可由 $f = \frac{1}{2}z(z + \bar{z})$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}z$ 看出, $f'(0) = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=0} = z|_{z=0} = 0$.

证明: 由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得 $u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0$, 从而 $(u_y,-u_x)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理 $(v_y,-v_x)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_yv_y+u_xv_x=u_yu_x-u_xu_y=0,$$

因此二者正交. □

当 $f'(z_0)\neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1,C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1),f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性. 这是因为 $\mathrm{d}f=f'(z_0)\,\mathrm{d}z$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 由 w 复平面上曲线族 $u=c_1,v=c_2$ 正交可知上述例题成立.

最后我们来看复数在求导中的一个应用.

例题 1.8 设 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 则它在除 $z=\pm i$ 外处处解析. 当 $z=x$ 为实数时,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}&=f^{(n)}(x)=\frac{i}{2}\left(\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x-i}\right)^{(n)}\\&=\frac{i}{2}\cdot(-1)^nn!\left(\frac{1}{(x+i)^{n+1}}-\frac{1}{(x-i)^{n+1}}\right)\\&=(-1)^{n+1}n!\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{(x+i)^{n+1}}\\&=(-1)^nn!(x^2+1)^{-\frac{n+1}{2}}\sin\big((n+1)\,\mathrm{arccot}\,x\big).\end{aligned}$$

任意有理函数的高阶导数均可使用此法计算.

§1.3 初等函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复.

§1.3.1 指数函数

我们来定义指数函数. 指数函数有多种等价的定义方式:

(1) $\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)$ (欧拉恒等式);

(2) $\exp z=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);

(3) $\exp z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{z^3}{3!}+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{z^k}{k!}$ (级数定义);

(4) $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z=x\in\mathbb{R}$ 时, $\exp z=e^x$ (e^x 的解析延拓).

有些人会从 $e^x,\cos x,\sin x$ 的泰勒展开

$$\begin{aligned}e^x&=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\\\cos x&=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\\\sin x&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\cdots\end{aligned}$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们将在第四章说明(1)、(3)和(4)是等价的.

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\quad(1^\infty\text{ 型不定式})$$
$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right]=e^x.$$

不妨设 $n>|z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n\to\infty}n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\arctan\frac{y}{n+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x}=y.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=e^x(\cos y+i\sin y).$$

定义 1.8 (指数函数)

定义指数函数

$$\exp z:=e^x(\cos y+i\sin y).$$

为了方便, 我们也记 $e^z=\exp z$. 指数函数有如下性质:

- $\exp z$ 处处解析, 且 $(\exp z)'=\exp z$.
- $\exp z\neq 0$.
- $\exp(z_1+z_2)=\exp z_1\cdot\exp z_2$.
- $\exp(z+2k\pi i)=\exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$.
- $\exp z_1=\exp z_2$ 当且仅当 $z_1=z_2+2k\pi i, k\in\mathbb{Z}$.
- $\exp z$ 将直线族 $\operatorname{Re}z=c$ 映为圆周族 $|w|=e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im}z=c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg}w=c$.

例题 1.9 计算函数 $f(z)=\exp(z/6)$ 的周期.

解答: 设 $f(z_1)=f(z_2)$, 则 $\exp(z_1/6)=\exp(z_2/6)$. 因此存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6}=\frac{z_2}{6}+2k\pi i,$$

从而 $z_1-z_2=12k\pi i$. 所以 $f(z)$ 的周期是 $12\pi i$.

一般地, $\exp(az+b)$ 的周期是 $\dfrac{2\pi i}{a}$ (或写成 $-\dfrac{2\pi i}{a}$), $a\neq 0$.

§1.3.2 对数函数

对数函数 $\operatorname{Ln}z$ 定义为指数函数 $\exp z$ 的反函数. 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\operatorname{Arg}z$ 和 $\arg z$.

设 $z\neq 0$, $e^w=z=re^{i\theta}=e^{\ln r+i\theta}$, 则

$$w=\ln r+i\theta+2k\pi i,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

定义 1.9 (对数函数)

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln}z=\ln|z|+i\operatorname{Arg}z.$$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

对于每一个整数 k, $\ln z + 2k\pi i$ 都给出了 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支. 特别地, 当 $z = x > 0$ 是正实数时, $\ln z$ 就是实变的对数函数.

例题 1.10 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解答:

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

主值为 $\ln 2$.

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i\operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

主值为 πi.

例题 1.11 求 $\operatorname{Ln}(-2+3i), \operatorname{Ln}(3-\sqrt{3}i)$.

解答:

$$\operatorname{Ln}(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i\operatorname{Arg}(-2+3i) = \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{Ln}(3-\sqrt{3}i) = \ln\left|3+\sqrt{3}i\right| + i\operatorname{Arg}(3-\sqrt{3}i) = \ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)i = \ln 2\sqrt{3} + \left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

例题 1.12 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解答: 由于 $1+\sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$, 因此

$$z = \operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

✍ **练习 1.3.1** 求 $\ln(-1-\sqrt{3}i) =$__________.

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及主辐角的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\operatorname{Ln} z.$$

而当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Ln} z^n = n\operatorname{Ln} z$ 不成立. 以上等式换成 $\ln z$ 均不一定成立.

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i, \quad \lim_{y\to 0^-}\ln(-x+yi) = \ln x - \pi i,$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续. 而在其它地方, $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数, 从而 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, $\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析. [3]

[3]任取一条从 0 到 ∞ 的简单曲线, 在去掉这条曲线后, 若固定一复数 z_0 的辐角, 则多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 可以在该区域内连续单值化, 简单来说就是沿着 z_0 到 z 的曲线让辐角连续变化. 同理, $\operatorname{Ln} z$ 也可以在该区域内单值化, 只需固定一复数 z_0 的值.

也可以通过 C-R 方程来得到 $\ln z$ 的解析性和导数: 当 $x>0$ 时,

$$\ln z=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\arctan\frac{y}{x},$$

$$u_x=v_y=\frac{x}{x^2+y^2},\qquad v_x=-u_y=-\frac{y}{x^2+y^2},$$

$$(\ln z)'=\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{1}{z}.$$

其它情形可取虚部为 $\operatorname{arccot}\frac{x}{y}$ 或 $\operatorname{arccot}\frac{x}{y}-\pi$ 类似证明.

§1.3.3 幂函数

定义 1.10 (幂函数)

(1) 设 $a\neq 0$, $z\neq 0$, 定义幂函数

$$w=z^a=e^{a\operatorname{Ln}z}=\exp\big(a\ln|z|+ia(\arg z+2k\pi)\big),\quad k\in\mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w=e^{a\ln z}=\exp\big(a\ln|z|+ia\arg z\big).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

(1) 当 a 为整数时, 因为 $e^{2ak\pi i}=1$, 所以 $w=z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂. 当 a 是非负整数时, z^a 在复平面上解析; 当 a 是负整数时, z^a 在 $\mathbb{C}-\{0\}$ 上解析.

(2) 当 $a=\frac{p}{q}$ 为分数, p,q 为互质的整数且 $q>1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}}=|z|^{\frac{p}{q}}\exp\left(\frac{ip(\arg z+2k\pi)}{q}\right),\quad k=0,1,\ldots,q-1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w=\exp(a\ln z)$ 是处处解析的. 事实上它就是 $\sqrt[q]{z^p}=(\sqrt[q]{z})^p$.

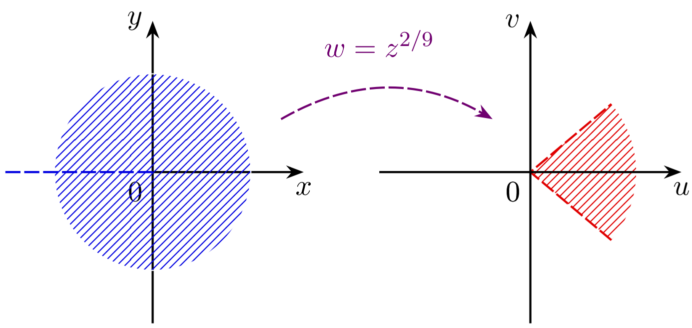

图 1.3: 映照 $w=z^{2/9}$

(3) 对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k\neq 0$ 时, $2k\pi ai$ 不可能是 $2\pi i$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w=\exp(a\ln z)$ 也是处处解析的. [4]

[4] 对于 $\operatorname{Ln}\frac{z-a}{z-b}$, $\sqrt{(z-a)(z-b)}$ 等类型的多值函数, 我们需要将它的 "奇点" 连接起来形成 "割线". 复平面上去掉这些割线得到的区域内, 这些函数也可以如同 $\operatorname{Arg}z$, $\operatorname{Ln}z$ 那样单值化.

a	z^a 的值	z^a 的解析区域
整数 n	单值	$n \geqslant 0$ 时处处解析 $n < 0$ 时除零点外解析
分数 p/q	q 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

例题 1.13 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i.

解答:

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = e^{\sqrt{2}\cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = \exp\left(i\cdot\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right) = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

✍ **练习 1.3.2** 3^i 的主辐角是_____.

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a\ln z}\cdot 1^a = e^{a\ln z}\cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = \left(e^{a\ln z}\right)' = \frac{ae^{a\ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言, $z^a\cdot z^b = z^{a+b}$ 和 $(z^a)^b = z^{ab}$ 都是不成立的. [5]

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是不同的. 因为后者在 $a \notin \mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆, 以后我们总**默认 e^a 表示指数函数 $\exp a$**.

§1.3.4 三角函数和反三角函数

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 x 成立, 我们将其推广到复数情形.

定义 1.11 (余弦和正弦函数)

定义余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

那么欧拉恒等式 **$e^{iz} = \cos z + i\sin z$ 对任意复数 z 均成立**.

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y+e^{-y}}{2}, \qquad \sin(iy) = i\frac{e^y-e^{-y}}{2}.$$

当 $y \to \infty$ 时, $\cos(iy)$ 和 $\sin(iy)$ 都 $\to \infty$. 因此 **$\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界**. 这和实变情形不同.

[5] $z^a\cdot z^b = z^{a+b}$ 成立当且仅当 $\dfrac{a}{a+b} \in \mathbb{Z}$. $(z^a)^b = z^{ab}$ 成立当且仅当 $\dfrac{1}{a} \in \mathbb{Z}$.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数. 于是可类似定义其它三角函数

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}, z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}, z\neq k\pi,$$
$$\sec z=\frac{1}{\cos z}, z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \csc z=\frac{1}{\sin z}, z\neq k\pi.$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)'=-\sin z, \quad (\sin z)'=\cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的. 三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2$,
- $\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2$,
- $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\cos iz,$$
$$\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=-i\sin iz,$$
$$\operatorname{th} z=\frac{e^z-e^{-z}}{e^z+e^{-z}}=-i\tan iz, \quad z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的. $\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ 的周期是 $2\pi i$, $\operatorname{th} z$ 的周期是 πi.

设 $z=\cos w=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0, \quad e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}[6].$$

因此反余弦函数为

$$w=\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$;
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z=-\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}, z\neq\pm i$;
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$;
- 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$;
- 反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}, z\neq\pm 1$.

例题 1.14 解方程 $\sin z=2$.

解答: 由于

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2,$$

我们有

$$e^{2iz}-4ie^{iz}-1=0.$$

于是 $e^{iz}=(2\pm\sqrt{3})i$,

$$z=-i\operatorname{Ln}[(2\pm\sqrt{3})i]=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\pm i\ln(2+\sqrt{3}), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

另解: 由 $\sin z = 2$ 可知

$$\cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} = \pm\sqrt{3}i.$$

于是 $e^{iz} = \cos z + i\sin z = (2\pm\sqrt{3})i$,

$$z = -i\,\mathrm{Ln}[(2\pm\sqrt{3})i] = \left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3}), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

我们总有形式

$$\begin{aligned}\mathrm{Arcsin}\, z &= (2k+\frac{1}{2})\pi \pm \theta,\\ \mathrm{Arccos}\, z &= 2k\pi \pm \theta,\\ \mathrm{Arctan}\, z &= k\pi + \theta, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

作业

一、判断题.

1. 如果 $f'(z_0)$ 存在, 那么 $f(z)$ 在 z_0 解析.( )
2. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点, 那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导.( )
3. 如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的奇点, 那么 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点.( )
4. 如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 偏导数均存在, 那么 $f(z)=u+iv$ 亦可导.( )
5. 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 则 $f(z)$ 在区域 D 解析. ( )
6. 对任意复数 z, 有 $\overline{e^z}=e^{\overline{z}}$.( )
7. 对任意复数 z, 有 $\overline{\cos z}=\cos\overline{z}$.( )
8. 对任意复数 z, 有 $\overline{\sin z}=\sin\overline{z}$.( )
9. 对任意复数 z, 有 $\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1$.( )

二、选择题.

1. 函数 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域内可导是 $f(z)$ 在该邻域内解析的 ( ).

   (A) 充分条件　　(B) 必要条件

   (C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

2. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. 将下述选项不重复地填入括号内:

$$(\quad)\Longrightarrow(\quad)\Longrightarrow(\quad)\Longrightarrow(\quad)\Longrightarrow(\quad)\Longrightarrow(\quad)$$

   (A) $f(z)$ 在点 z_0 有定义　　(B) $f(z)$ 在点 z_0 连续

   (C) $f(z)$ 在点 z_0 可导　　(D) $f(z)$ 在点 z_0 解析

   (E) $f(z)$ 在点 z_0 的一个邻域内解析　　(F) u,v 均在点 (x_0,y_0) 处有偏导数

3. 下列函数中, 为解析函数的是 ( ).

   (A) x^2-y^2-2xyi　　(B) x^2+xyi

   (C) $2(x-1)y+i(y^2-x^2+2x)$　　(D) x^3+iy^3

4. 设 n 是正整数, $z_1,z_2\neq 0$. 下列式子一定正确的是 ( ).

   (A) $\operatorname{Arg}(\sqrt{z})=\dfrac{1}{2}\operatorname{Arg}z$　　(B) $\operatorname{Arg}(z^n)=n\operatorname{Arg}z$

   (C) $\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}(z_1)+\operatorname{Arg}(z_2)$　　(D) $\arg(\sqrt{z})=\dfrac{1}{2}\arg z$

   (E) $\arg(z^{-n})=-n\arg z$　　(F) $\arg(z_1/z_2)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$

   (G) $\operatorname{Ln}\sqrt[3]{z}=\dfrac{1}{3}\operatorname{Ln}z$　　(H) $\operatorname{Ln}(z^{-n})=-n\operatorname{Ln}z$

   (I) $\operatorname{Ln}(z_1z_2)=\operatorname{Ln}(z_1)+\operatorname{Ln}(z_2)$　　(J) $\ln\sqrt{z}=\dfrac{1}{2}\ln z$

   (K) $\ln(z^n)=n\ln z$　　(L) $\ln(z_1/z_2)=\ln(z_1)-\ln(z_2)$

三、填空题.

1. 函数 $\dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$ 的奇点为_____.

2. 函数 $\dfrac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$ 的奇点为_____.
3. 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的奇点为_____.
4. 如果函数 $f(z)=x^2-2xy-y^2+i(ax^2+bxy+cy^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a+b+c=$_____.
5. 计算 $\ln i=$__________.
6. 设 $z=1^{\sqrt{3}}$, 则 $|z|=$_____.
7. i^{-i} 的主值是_____.

四、计算题.

1. 设 $f(z)=\dfrac{1}{5}z^5-(1+i)z$, 解方程 $f'(z)=0$.
2. 下列函数何处可导? 何处解析?

   (1) $f(z)=1/\overline{z}$; (2) $f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$;

   (3) $f(z)=2x^3+3y^3i$; (4) $f(z)=xy^2+ix^2y$; (5) $f(z)=e^{x^2+y^2}$;

   (6) $f(z)=z\operatorname{Im} z$; (7) $f(z)=\sin x\operatorname{ch} y+i\cos x\operatorname{sh} y$.
3. 指出下列函数 $f(z)$ 的解析区域, 并求出其导数.

   (1) $(z-1)^5$; (2) z^3+2iz;

   (3) $\dfrac{1}{z^2-1}$; (4) $\dfrac{az+b}{cz+d}$ (c,d 不全为零).
4. 设 $my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为解析函数, 试确定实数 l,m,n 的值.
5. 计算

   (1) $\operatorname{Ln} 4$; (2) $2\operatorname{Ln} 2$; (3) $\ln(-i)$; (4) $\ln(-3+4i)$;

   (5) $\operatorname{Im}\sin(1+i)$; (6) $\arg e^{1-4i}$; (7) $\exp\left(1-\dfrac{\pi i}{2}\right)$; (8) $\exp\left(\dfrac{1+\pi i}{4}\right)$;

   (9) 3^i; (10) $(1+i)^i$.
6. 解方程

   (1) $\sin z=0$; (2) $\cos z=0$; (3) $1+e^z=0$;

   (4) $\sin z+\cos z=0$; (5) $\sin z=2\cos z$.
7. 复变函数 $f(z)=\sin z$ 和实变量函数 $g(x)=\sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试说出 3 点.

五、扩展阅读. 该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到任课教师邮箱.

仿照复数的指数函数, 我们可以尝试在矩阵上定义指数函数. 设 $\mathbf{A}\in M_m(\mathbb{C})$ 是一个 $m\times m$ 的复矩阵, 我们想说明极限

$$e^{\mathbf{A}}:=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\mathbf{A}\right)^n$$

存在.

(1) 当 $\mathbf{A}=\operatorname{diag}\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ 是一个对角矩阵时, 证明 $e^{\mathbf{A}}$ 存在且

$$e^{\mathbf{A}}=\operatorname{diag}\{e^{a_1},e^{a_2},\dots,e^{a_m}\}.$$

(2) 当

$$\mathbf{A} = \mathbf{J}_m(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$$

是约当块时, 证明 $e^{\mathbf{A}}$ 存在.

(3) 每个方阵都可以相似于一些约当块构成的分块对角阵, 由此证明 $e^{\mathbf{A}}$ 总存在.

(4) 当 $\mathbf{A} = x\mathbf{E} + y\mathbf{J} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ 时, 证明 $e^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^x(cosy\mathbf{E} + \sin y\mathbf{J})$.

(5) 证明 $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \dfrac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dfrac{\mathbf{A}^3}{3!} + \cdots$.

(6) 证明 $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} \cdot e^{\mathbf{B}}$.

练习 参考答案

1.1.1 处处不可导.

1.1.2 A. 因为解析要求在 z_0 的一个邻域内都可导才行.

1.2.1 A. 根据 C-R 方程可知对于 A, $u_x(0) = 2 \neq v_y(0) = 3$. 对于 BD, 各个偏导数在 0 处取值都是 0. C 则是处处都可导.

1.3.1 $\ln 2 - \dfrac{2\pi i}{3}$.

1.3.2 $\ln 3$.