



# 复变函数与积分变换

## 张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

#### 课程信息

- 课时:
  - 10 周 40 课时;
  - 2024-09-09 ~ 2024-11-14
- 课程 QQ 群 (入群答案 1400261B)
  - 008 班 (生医、通信工程) 973042840
  - 009 班 (车辆创新实验、集成) 973041550
- 教材: 西交高数教研室《复变函数》, 张元林《积分变换》





#### 作业 15 分

作业每次会提前发布,每两周交一次. 作业不允许迟交. 没带的请当天联系助教补交, 迟一天交 -50% 当次作业分, 迟两天或以上 0分. 请假需提前交给我请假条.

#### 期末考试 50 分

期末卷面需要达到 45分 才计算总评分数, 45分以下 直接不及格.

#### 课堂测验 25 分

课堂测验共 3次,取最高的两次平均.测验范围和时间会提前通知.测验时在教室内作答,否则按未考处理.

## 期末报告 10 分

期末之前会告知主题. 请交手写纸质版, 并自行留存电子版本 以免意外丢失.

复变函数的应用非常广泛, 它包括:



复变函数的应用非常广泛, 它包括:

• 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……

复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……

复变函数的应用非常广泛, 它包括:

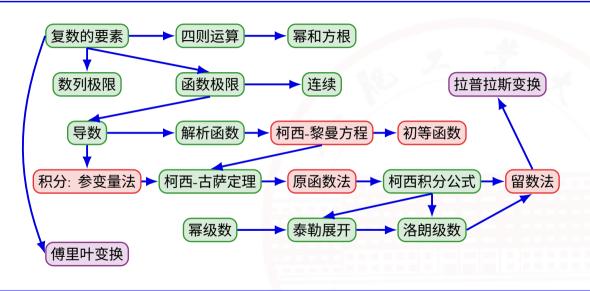
- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

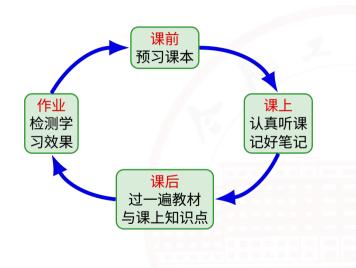
复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

可以说复变函数应用之广, 在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.

## 课程内容关系





## 第一章 复数与复变函数

- 1 复数及其代数运算
- 2 复数的三角与指数形式
- 3 复数的乘除、乘幂与方根
- 4 曲线和区域
- 5 复变函数
- 6 极限和连续性

复数起源于多项式方程的求根问题.



$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

(1) 当  $\Delta > 0$  时, 有两个不同的实根;

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当  $\Delta > 0$  时, 有两个不同的实根;
- (2) 当  $\Delta = 0$  时, 有一个二重的实根;

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当  $\Delta > 0$  时, 有两个不同的实根;
- (2) 当  $\Delta = 0$  时, 有一个二重的实根;
- (3) 当  $\Delta < 0$  时, 无实根.

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当  $\Delta > 0$  时, 有两个不同的实根;
- (2) 当  $\Delta = 0$  时, 有一个二重的实根;
- (3) 当  $\Delta < 0$  时, 无实根.

可以看出, 在一元二次方程中, 我们可以舍去包含负数开方的解.

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$
,  $\Delta = b^2 - 4c$ .

- (1) 当  $\Delta > 0$  时, 有两个不同的实根;
- (2) 当  $\Delta = 0$  时, 有一个二重的实根;
- (3) 当  $\Delta < 0$  时, 无实根.

可以看出,在一元二次方程中,我们可以舍去包含负数开方的解.然而在一元三次方程中,即便只考虑实数根也会不可避免地引入负数开方.

解方程  $x^3 + 6x - 20 = 0$ .

解方程  $x^3 + 6x - 20 = 0$ .

解

设 x = u + v,则

$$u^{3} + v^{3} + 3uv(u+v) + 6(u+v) - 20 = 0.$$

解方程  $x^3 + 6x - 20 = 0$ .

解

设 x = u + v,则

$$u^{3} + v^{3} + 3uv(u+v) + 6(u+v) - 20 = 0.$$

我们希望  $u^3 + v^3 = 20, uv = -2$ ,

解方程  $x^3 + 6x - 20 = 0$ .

## 解

设 x = u + v, 则

$$u^{3} + v^{3} + 3uv(u+v) + 6(u+v) - 20 = 0.$$

我们希望  $u^3+v^3=20, uv=-2$ , 则  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2-20X-8=0$ .

解方程  $x^3 + 6x - 20 = 0$ .

## 解

设 x = u + v,则

$$u^{3} + v^{3} + 3uv(u+v) + 6(u+v) - 20 = 0.$$

我们希望  $u^3+v^3=20, uv=-2$ , 则  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2-20X-8=0$ . 解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108}$$

解方程  $x^3 + 6x - 20 = 0$ .

解

设 x = u + v, 则

$$u^{3} + v^{3} + 3uv(u+v) + 6(u+v) - 20 = 0.$$

我们希望  $u^3+v^3=20, uv=-2$ , 则  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2-20X-8=0$ . 解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3$$
.

解方程  $x^3 + 6x - 20 = 0$ .

# 解

设 x = u + v, 则

$$u^{3} + v^{3} + 3uv(u+v) + 6(u+v) - 20 = 0.$$

我们希望  $u^3+v^3=20, uv=-2$ , 则  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2-20X-8=0$ . 解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$

所以  $u = 1 \pm \sqrt{3}, v = 1 \mp \sqrt{3},$ 

解方程  $x^3 + 6x - 20 = 0$ .

## 解

设 x = u + v, 则

$$u^{3} + v^{3} + 3uv(u+v) + 6(u+v) - 20 = 0.$$

我们希望  $u^3+v^3=20, uv=-2$ , 则  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2-20X-8=0$ . 解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$

所以  $u = 1 \pm \sqrt{3}, v = 1 \mp \sqrt{3}, x = u + v = 2.$ 

解方程  $x^3 + 6x - 20 = 0$ .

# 解

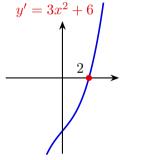
设 x = u + v, 则

$$u^{3} + v^{3} + 3uv(u+v) + 6(u+v) - 20 = 0.$$

我们希望  $u^3 + v^3 = 20, uv = -2$ , 则  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2 - 20X - 8 = 0$  解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$

所以  $u = 1 \pm \sqrt{3}, v = 1 \mp \sqrt{3}, x = u + v = 2.$ 



解方程  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

解方程  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

## 解

同样地我们有 x = u + v, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

解方程  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

## 解

同样地我们有 x = u + v, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$ .

解方程  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

## 解

同样地我们有 x = u + v, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$ . 然而这个方程没有实数解.

解方程  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

同样地我们有 x = u + v, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$ . 然而这个方程没有实数解. 我们

可以强行解得

解方程  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

## 解

同样地我们有 x = u + v. 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$ . 然而这个方程没有实数解. 我们可以强行解得

$$u^3 = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3},$$

解方程  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

#### 解

同样地我们有 x = u + v, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$ . 然而这个方程没有实数解. 我们可以强行解得

$$u^{3} = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}, \qquad u = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

例

解方程  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

解

同样地我们有 x = u + v 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$ . 然而这个方程没有实数解. 我们可以强行解得

$$u^{3} = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}, \qquad u = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

$$v = \frac{3 - 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 - \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 + 5\sqrt{-3}}{6},$$

例

解方程  $x^3 - 7x + 6 = 0$ .

解

同样地,我们有 x = u + v 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是  $u^3, v^3$  满足一元二次方程  $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$ . 然而这个方程没有实数解. 我们可以强行解得

$$u^{3} = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}, \qquad u = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

$$v = \frac{3 - 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 - \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 + 5\sqrt{-3}}{6}, \qquad x = u + v = 2, -3, 1.$$

$$x = u - \frac{p}{3u}$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

$$x = u - \frac{p}{3u}$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

由于 p=0 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形.

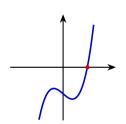
$$x = u - \frac{p}{3u}$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

由于 p=0 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

$$x = u - \frac{p}{3u}$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

由于 p=0 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

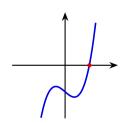
(1) 当  $\Delta > 0$  时, 有 1 个实根.

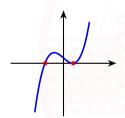


$$x = u - \frac{p}{3u}$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

由于 p=0 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

- (1) 当  $\Delta > 0$  时, 有 1 个实根.
- (2) 当  $\Delta = 0$  时, 有 2 个实根  $x = -\sqrt[3]{4q}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$  (2 重).

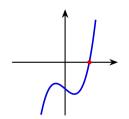


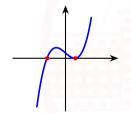


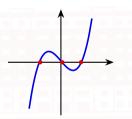
$$x = u - \frac{p}{3u}$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

由于 p=0 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

- (1) 当  $\Delta > 0$  时, 有 1 个实根.
- (2) 当  $\Delta = 0$  时,有 2 个实根  $x = -\sqrt[3]{4q}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$  (2 重).
- (3) 当  $\Delta < 0$  时, 有 3 个实根.







所以我们想要使用求根公式的话, 就必须接受负数开方.

所以我们想要使用求根公式的话, 就必须接受负数开方. 那么为什么当  $\Delta < 0$  时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢?

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根。

莱布尼兹 (Leibniz)

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根。

莱布尼兹 (Leibniz)

我们将在下一节使用更为现代的语言来解释和运用复数.

# 第一节 复数及其代数运算

- 复数的概念
- ■复数的代数运算
- 共轭复数

现在我们来正式介绍复数的概念.



现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号  $\sqrt{-1}$  带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号  $\sqrt{-1}$  带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

### 定义

固定一个记号 i, 复数就是形如 z = x + yi 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

现在我们来正式介绍复数的概念. 为了避免记号  $\sqrt{-1}$  带来的歧义, 我们先引入抽象符号 i, 再通过定义它的运算来构造复数.

### 定义

固定一个记号 i, 复数就是形如 z=x+yi 的元素, 其中 x,y 均是实数, 且不同的 (x,y) 对应不同的复数.

实数 x 可以自然地看成复数 x + 0i.

## 复平面

将全体复数记作 ℂ.



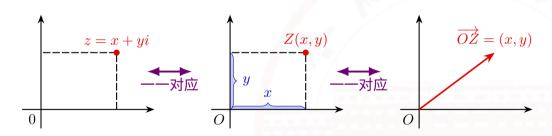
### 复平面

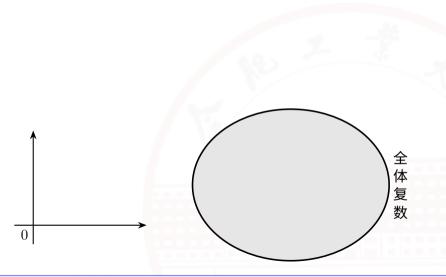
将全体复数记作  $\mathbb{C}$ . 那么  $\mathbb{C}$  自然构成一个二维实线性空间, 且  $\{1,i\}$  是一组基.

### 复平面

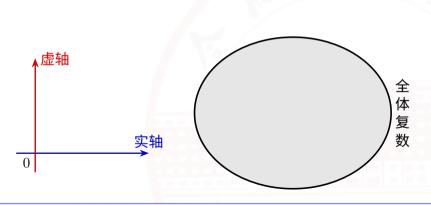
将全体复数记作  $\mathbb{C}$ . 那么  $\mathbb{C}$  自然构成一个二维实线性空间, 且  $\{1,i\}$  是一组基. 因此它和平面上的点可以建立一一对应, 并将建立起这种对应的平面称为复平面.

将全体复数记作  $\mathbb{C}$ . 那么  $\mathbb{C}$  自然构成一个二维实线性空间, 且  $\{1,i\}$  是一组基. 因此它和平面上的点可以建立一一对应, 并将建立起这种对应的平面称为复平面.

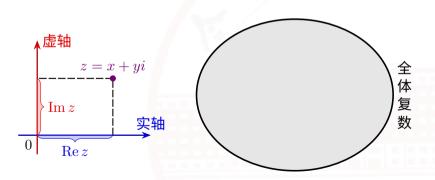




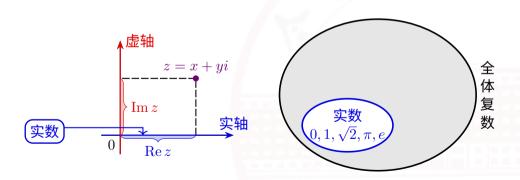
• x, y 轴分别对应复平面的实轴和虚轴.



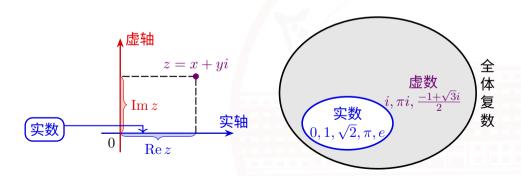
- x, y 轴分别对应复平面的实轴和虚轴.
- $\Re z = x + yi + x = \operatorname{Re} z + yi = \operatorname{Im} z + z = \operatorname{Im} z$



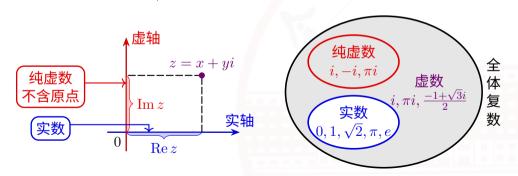
- x, y 轴分别对应复平面的实轴和虚轴.
- $\pi z = x + yi + x = \operatorname{Re} z + yi = \operatorname{Im} z + z = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im$
- 当虚部 Im z = 0 时, z 为实数, 它落在实轴上.



- ▼ x, y 轴分别对应复平面的实轴和虚轴.
- $\Re z = x + yi$  中  $x = \operatorname{Re} z$  为 z 的实部;  $y = \operatorname{Im} z$  为 z 的虚部.
- 当虚部 Im z = 0 时, z 为实数, 它落在实轴上.
- 不是实数的复数是虚数.



- x, y 轴分别对应复平面的实轴和虚轴.
- $\pi z = x + yi + x = \operatorname{Re} z + yi = \operatorname{Im} z + z = \operatorname{Im} z = \operatorname{Im$
- 当虚部 Im z = 0 时, z 为实数, 它落在实轴上.
- 不是实数的复数是虚数.
- 当实部  $\operatorname{Re} z = 0$  且  $z \neq 0$  时, z 为纯虚数, 它落在虚轴上.



#### 例

实数 x 取何值时,  $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$  是:

- (1) 实数;
- (2) 纯虚数.

#### 例

实数 x 取何值时,  $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$  是:

- (1) 实数;
- (2) 纯虚数.

#### 例

实数 x 取何值时,  $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$  是:

- (1) 实数;
- (2) 纯虚数.

### 解

(1) Im  $z = x^2 - 5x - 6 = 0$ ,  $p x = -1 \le 6$ .

#### 例

实数  $\overline{x}$  取何值时,  $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$  是:

- (1) 实数;
- (2) 纯虚数.

- (1) Im  $z = x^2 5x 6 = 0$ ,  $x = -1 \neq 6$ .
- (2) Re  $z = x^2 3x 4 = 0$ ,  $\mathbb{P} x = -1 \neq 4$ .

#### 例

实数  $\overline{x}$  取何值时,  $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$  是:

- (1) 实数;
- (2) 纯虚数.

- (1) Im  $z = x^2 5x 6 = 0$ ,  $\mathbb{P} x = -1 \neq 6$ .
- (2) Re  $z=x^2-3x-4=0$ , 即 x=-1 或 4. 但同时要求 Im  $z=x^2-5x-6\neq 0$ , 因此  $x\neq -1$ .

#### 例

实数  $\overline{x}$  取何值时,  $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$  是:

- (1) 实数;
- (2) 纯虚数.

- (1) Im  $z = x^2 5x 6 = 0$ ,  $x = -1 \neq 6$ .
- (2) Re  $z=x^2-3x-4=0$ , 即 x=-1 或 4. 但同时要求 Im  $z=x^2-5x-6\neq 0$ , 因此  $x\neq -1$ . 故 x=4.

#### 例

实数  $\overline{x}$  取何值时,  $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$  是:

- (1) 实数;
- (2) 纯虚数.

#### 解

- (1) Im  $z = x^2 5x 6 = 0$ ,  $x = -1 \neq 6$ .
- (2) Re  $z=x^2-3x-4=0$ , 即 x=-1 或 4. 但同时要求 Im  $z=x^2-5x-6\neq 0$ , 因此  $x\neq -1$ . 故 x=4.

### 练习

# 例题: 判断实数和纯虚数

#### 例

实数  $\overline{x}$  取何值时,  $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$  是:

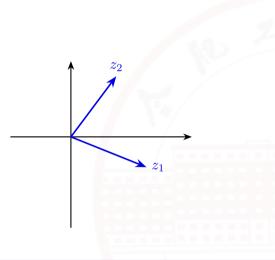
- (1) 实数;
- (2) 纯虚数.

#### 解

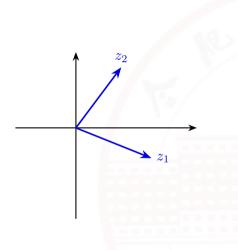
- (1) Im  $z = x^2 5x 6 = 0$ ,  $x = -1 \neq 6$ .
- (2) Re  $z=x^2-3x-4=0$ , 即 x=-1 或 4. 但同时要求  ${\rm Im}\,z=x^2-5x-6\neq 0$ , 因此  $x\neq -1$ . 故 x=4.

### 练习

设  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i.$ 

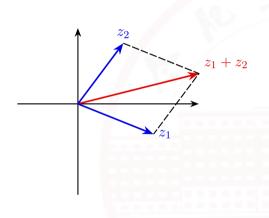


设  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ . 定义复数的加法和减法:



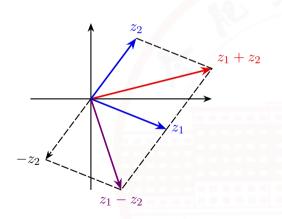
设  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ . 定义复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$



设  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ . 定义复数的加法和减法:

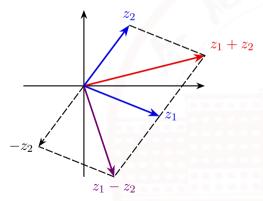
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$



设  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$ . 定义复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i, \quad z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量  $\overrightarrow{OZ}$  的加减法是一致的.



规定  $i \cdot i = -1$  并定义复数的乘法:



## 规定 $i \cdot i = -1$ 并定义复数的乘法:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i$$
  
=  $(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$ ,

## 规定 $i \cdot i = -1$ 并定义复数的乘法:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i$$
  
=  $(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$ ,

### 由此可得复数的除法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

## 规定 $i \cdot i = -1$ 并定义复数的乘法:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i$$
  
=  $(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$ ,

## 由此可得复数的除法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘.

## 规定 $i \cdot i = -1$ 并定义复数的乘法:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i$$
  
=  $(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$ ,

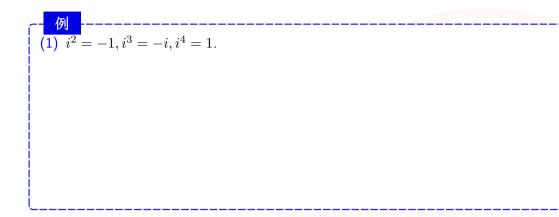
### 由此可得复数的除法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘.

当 
$$z \neq 0$$
 时, 还可以定义  $z^0 = 1, z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ .





例

$$(1)$$
  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = 1$ . 一般地, 对于整数  $n$ ,

$$i^{4n} = 1$$
,  $i^{4n+1} = i$ ,  $i^{4n+2} = -1$ ,  $i^{4n+3} = -i$ .

#### 例

(1) 
$$i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$$
. 一般地, 对于整数  $n$ ,

$$i^{4n} = 1$$
,  $i^{4n+1} = i$ ,  $i^{4n+2} = -1$ ,  $i^{4n+3} = -i$ .

(2) 
$$\Leftrightarrow \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$
,  $\mathbb{N} \omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ ,  $\omega^3 = 1$ .

#### 例

(1)  $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ . 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n} = 1$$
,  $i^{4n+1} = i$ ,  $i^{4n+2} = -1$ ,  $i^{4n+3} = -i$ .

(2) 
$$\Leftrightarrow \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
,  $\mathbb{N}$   $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ,  $\omega^3 = 1$ .

(3) 
$$\diamondsuit z = 1 + i$$
,

#### 例

(1)  $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ . 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n} = 1$$
,  $i^{4n+1} = i$ ,  $i^{4n+2} = -1$ ,  $i^{4n+3} = -i$ .

(2) 
$$\Leftrightarrow \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$
,  $\mathbb{N} \omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ ,  $\omega^3 = 1$ .

$$z^2 = 2i$$
,  $z^3 = -2 + 2i$ ,  $z^4 = -4$ ,  $z^8 = 16 = 2^4$ .

#### 例

(1)  $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ . 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n} = 1$$
,  $i^{4n+1} = i$ ,  $i^{4n+2} = -1$ ,  $i^{4n+3} = -i$ .

(2) 
$$\Leftrightarrow \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$
,  $\mathbb{N} \omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ ,  $\omega^3 = 1$ .

$$z^2 = 2i$$
,  $z^3 = -2 + 2i$ ,  $z^4 = -4$ ,  $z^8 = 16 = 2^4$ .

将满足  $z^n = 1$  的复数 z 称为 n 次单位根.

#### 例

(1)  $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$ . 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n} = 1$$
,  $i^{4n+1} = i$ ,  $i^{4n+2} = -1$ ,  $i^{4n+3} = -i$ .

(2) 
$$\Leftrightarrow \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$
,  $\mathbb{N} \omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ ,  $\omega^3 = 1$ .

(3) 令 z = 1 + i, 则

$$z^2 = 2i$$
,  $z^3 = -2 + 2i$ ,  $z^4 = -4$ ,  $z^8 = 16 = 2^4$ .

将满足  $z^n=1$  的复数 z 称为 n 次单位根. 那么 1,i,-1,-i 是 4 次单位根,  $1,\omega,\omega^2$  是 3 次单位根,  $-\omega$  是 6 次单位根.



化简  $1+i+i^2+i^3+i^4$ .

## 例

化简  $1 + i + i^2 + i^3 + i^4$ .

# 解

根据等比数列求和公式,

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \frac{i^5 - 1}{i - 1}$$

## 例

化简  $1 + i + i^2 + i^3 + i^4$ .

# 解

根据等比数列求和公式,

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \frac{i^5 - 1}{i - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1.$$

例

化简  $1+i+i^2+i^3+i^4$ .

解

根据等比数列求和公式,

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \frac{i^5 - 1}{i - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1.$$

练习

化简  $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020} =$ \_\_\_\_\_

例

化简  $1+i+i^2+i^3+i^4$ .

解

根据等比数列求和公式,

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \frac{i^5 - 1}{i - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1.$$

练习

化简 
$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020} = 1$$

复数域

非考试内容

复数全体构成一个域。

• 包含 0,1, 且有四则运算;

- 包含 0,1,且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;

- 包含 0,1,且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a,  $a + 0 = a \times 1 = a$ .

- 包含 0,1,且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a,  $a + 0 = a \times 1 = a$ .

有理数全体 ℚ, 实数全体 ℝ 也构成域, 它们是 ℂ 的子域.

- 包含 0,1,且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意  $a, a + 0 = a \times 1 = a$ .

有理数全体  $\mathbb{Q}$ , 实数全体  $\mathbb{R}$  也构成域, 它们是  $\mathbb{C}$  的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域:

- 包含 0,1, 且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意  $a, a + 0 = a \times 1 = a$ .

有理数全体  $\mathbb{Q}$ , 实数全体  $\mathbb{R}$  也构成域, 它们是  $\mathbb{C}$  的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任何次数  $n\geqslant 1$  的复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0,$$

都存在复数  $z_0$  使得  $p(z_0) = 0$ .

- 包含 0,1, 且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意  $a, a + 0 = a \times 1 = a$ .

有理数全体  $\mathbb{Q}$ , 实数全体  $\mathbb{R}$  也构成域, 它们是  $\mathbb{C}$  的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任何次数  $n\geqslant 1$  的复系数多项式

$$p(z) = z^{n} + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_{1}z + c_{0},$$

都存在复数  $z_0$  使得  $p(z_0)=0$ . 由此不难知道, 复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘积.

- 包含 0,1, 且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意  $a, a + 0 = a \times 1 = a$ .

有理数全体  $\mathbb{Q}$ , 实数全体  $\mathbb{R}$  也构成域, 它们是  $\mathbb{C}$  的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任何次数  $n\geqslant 1$  的复系数多项式

$$p(z) = z^{n} + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_{1}z + c_{0},$$

都存在复数  $z_0$  使得  $p(z_0) = 0$ . 由此不难知道, 复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘积. 我们会在第五章证明该结论.

在  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$  上可以定义出一个好的大小关系,

在  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 >:

• 若  $a \neq b$ , 则要么 a > b, 要么 b > a;

- 若  $a \neq b$ , 则要么 a > b, 要么 b > a;
- 若 a > b, 则对于任意 c, a + c > b + c;

- 若  $a \neq b$ , 则要么 a > b, 要么 b > a;
- 若 a > b, 则对于任意 c, a + c > b + c;
- <math>a > b, c > 0,<math><math><math><math><math><math>ac > bc.

- 若  $a \neq b$ , 则要么 a > b, 要么 b > a;
- 若 a > b, 则对于任意 c, a + c > b + c;

而 ℂ 却不是有序域.

- 若  $a \neq b$ , 则要么 a > b, 要么 b > a;
- 若 a > b, 则对于任意 c, a + c > b + c;

而  $\mathbb{C}$  却不是有序域. 如果 i > 0, 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

- 若  $a \neq b$ , 则要么 a > b, 要么 b > a;
- 若 a > b, 则对于任意 c, a + c > b + c;
- 若 a > b, c > 0, 则 ac > bc.

而  $\mathbb{C}$  却不是有序域. 如果 i > 0, 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

于是 0 > i, 矛盾! 同理 i < 0 也不可能.

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\overline{z}$ . 换言之,  $\overline{x+yi}=x-yi$ .

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\overline{z}$ . 换言之,  $\overline{x+yi}=x-yi$ .

练习

z 关于虚轴的对称点是\_\_\_\_.

## 定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\overline{z}$ . 换言之,  $\overline{x+yi}=x-yi$ .

# 练习

z 关于虚轴的对称点是  $-\overline{z}$  .

### 定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\overline{z}$ . 换言之,  $\overline{x+yi}=x-yi$ .

## 练习

z 关于虚轴的对称点是  $-\overline{z}$  .

## 定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\overline{z}$ . 换言之,  $\overline{x+yi}=x-yi$ .

## 练习

z 关于虚轴的对称点是  $-\overline{z}$ .

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是  $\overline{z}$  的共轭复数.

## 定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\overline{z}$ . 换言之,  $\overline{x+yi}=x-yi$ .

## 练习

z 关于虚轴的对称点是  $-\overline{z}$  .

- (1) z 是  $\overline{z}$  的共轭复数.
- (2)  $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \ \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}.$

## 定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\overline{z}$ . 换言之,  $\overline{x+yi}=x-yi$ .

# 练习

z 关于虚轴的对称点是  $-\overline{z}$  .

- (1) z 是  $\overline{z}$  的共轭复数.
- (2)  $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \ \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}.$
- (3)  $z\overline{z} = (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2$ .

## 定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\overline{z}$ . 换言之,  $\overline{x+yi}=x-yi$ .

## 练习

z 关于虚轴的对称点是  $-\overline{z}$  .

- (1) z 是  $\overline{z}$  的共轭复数.
- (2)  $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \ \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}.$
- (3)  $z\overline{z} = (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2$ .
- (4)  $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$ ,  $z \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$ .

## 定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\overline{z}$ . 换言之,  $\overline{x+yi}=x-yi$ .

# 练习

z 关于虚轴的对称点是  $-\overline{z}$  .

- (1) z 是  $\overline{z}$  的共轭复数.
- (2)  $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \ \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}.$
- (3)  $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ .
- (4)  $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$ ,  $z \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$ .
- (5)  $z = \overline{z} \iff z$  是实数;  $z = -\overline{z} \iff z$  是纯虚数或 z = 0.

## 定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\overline{z}$ . 换言之,  $\overline{x+yi}=x-yi$ .

# 练习

z 关于虚轴的对称点是  $-\overline{z}$  .

- (1) z 是  $\overline{z}$  的共轭复数.
- (2)  $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \ \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}.$
- (3)  $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ .
- (4)  $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$ ,  $z \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$ .
- (5)  $z = \overline{z} \iff z$  是实数;  $z = -\overline{z} \iff z$  是纯虚数或 z = 0.
- (4)表明了 x, y 可以用  $z, \overline{z}$  表出.

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\overline{z}$ . 换言之,  $\overline{x+yi}=x-yi$ .

z 关于虚轴的对称点是  $-\overline{z}$ .

- (1) z 是  $\overline{z}$  的共轭复数.
- (2)  $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \ \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}.$
- (3)  $z\overline{z} = (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2$ .
- (4)  $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$ ,  $z \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$ .
- (5)  $z = \overline{z} \iff z$  是实数:  $z = -\overline{z} \iff z$  是纯虚数或 z = 0.
- (4)表明了 x, y 可以用  $z, \overline{z}$  表出. (2)表明共轭复数和四则运算交换.

## 定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数  $\overline{z}$ . 换言之,  $\overline{x+yi}=x-yi$ .

## 练习

z 关于虚轴的对称点是  $-\overline{z}$  .

- (1) z 是  $\overline{z}$  的共轭复数.
- (2)  $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \ \overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}.$
- (3)  $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ .
- (4)  $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$ ,  $z \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$ .
- (5)  $z = \overline{z} \iff z$  是实数;  $z = -\overline{z} \iff z$  是纯虚数或 z = 0.
- (4)表明了 x,y 可以用  $z,\overline{z}$  表出. (2)表明共轭复数和四则运算交换. 这意味着使用共轭复数进行计算和证明,往往比直接使用 x,y 表达的形式更简单.

证明  $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$ 

例

证明  $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$ 

我们可以设  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i,$  然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到.

例

证明  $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$ 

我们可以设  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i,$  然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

#### 例

证明  $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$ 

我们可以设  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i,$  然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

## 证明

#### 例

证明  $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$ 

我们可以设  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i,$  然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

## 证明

由于  $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$ ,

#### 例

证明  $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$ 

我们可以设  $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i,$  然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

## 证明

由于 
$$\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$$
, 因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$

例

设z = x + yi且 $y \neq 0, \pm 1$ .证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1 + z^2}$ 是实数.

## 例

设 z = x + yi 且  $y \neq 0, \pm 1$ . 证明:  $x^2 + y^2 = 1$  当且仅当  $\frac{z}{1 + z^2}$  是实数.

# 证明

 $\frac{z}{1+z^2}$  是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \left(\frac{z}{1+z^2}\right) = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

#### 例

设 z = x + yi 且  $y \neq 0, \pm 1$ . 证明:  $x^2 + y^2 = 1$  当且仅当  $\frac{z}{1 + z^2}$  是实数.

# 证明

 $\frac{z}{1+z^2}$  是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即

$$z(1+\overline{z}^2) = \overline{z}(1+z^2), \quad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1) = 0.$$

#### 例

设 z = x + yi 且  $y \neq 0, \pm 1$ . 证明:  $x^2 + y^2 = 1$  当且仅当  $\frac{z}{1 + z^2}$  是实数.

# 证明

 $\frac{z}{1+z^2}$  是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即

$$z(1+\overline{z}^2) = \overline{z}(1+z^2), \quad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1) = 0.$$

由  $y \neq 0$  可知  $z \neq \overline{z}$ .

#### 例

设 z = x + yi 且  $y \neq 0, \pm 1$ . 证明:  $x^2 + y^2 = 1$  当且仅当  $\frac{z}{1 + z^2}$  是实数.

# 证明

<del>z</del> 1 + -2 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即

$$z(1+\overline{z}^2) = \overline{z}(1+z^2), \quad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1) = 0.$$

由  $y \neq 0$  可知  $z \neq \overline{z}$ . 故上述等式等价于  $z\overline{z} = 1$ , 即  $x^2 + y^2 = 1$ .

由于  $z\overline{z}$  是一个实数,

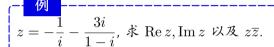


由于  $z\overline{z}$  是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

由于 zz 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$



由于  $z\overline{z}$  是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$$z=-rac{1}{i}-rac{3i}{1-i}$$
,求  $\operatorname{Re} z,\operatorname{Im} z$  以及  $z\overline{z}$ .

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$$

由于 zz 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$$z=-rac{1}{i}-rac{3i}{1-i}$$
,求  $\operatorname{Re} z,\operatorname{Im} z$  以及  $z\overline{z}$ .

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

由于 zz 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

$$z=-rac{1}{i}-rac{3i}{1-i}$$
,求 Re  $z$ , Im  $z$  以及  $z\overline{z}$ .

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

因此

Re 
$$z = \frac{3}{2}$$
, Im  $z = -\frac{1}{2}$ ,  $z\overline{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$ .





设 
$$z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i, \, \, \, \, \, \, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4}$$

#### 例

谈 
$$z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i, \, \, \, \, \, \, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2}$$

#### 例

谈 
$$z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \left(\frac{z_1}{z_2}\right).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2}$$
$$= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25}$$

#### 例

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2}$$
$$= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,$$

例

设 
$$z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i, \, \, \, \, \, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2}$$
$$= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,$$

因此 
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$$
.

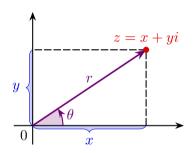
## 第二节 复数的三角与指数形式

- 复数的模和辐角
- 复数的三角形式和指数形式

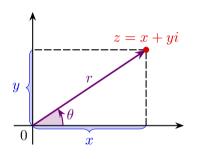
由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式.

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴 为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



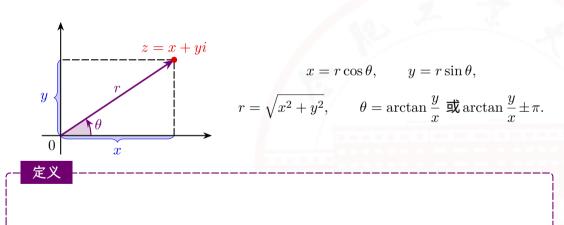
由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴 为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



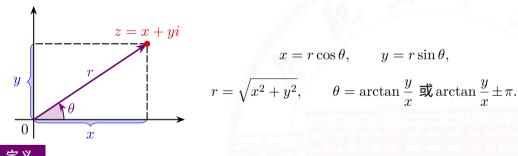
$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta,$$
 
$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta=\arctan\frac{y}{x}$$
或  $\arctan\frac{y}{x}\pm\pi.$ 

复变函数与积分变换 ▶第一章 复数与复变函数 ▶2 复数的三角与指数形式 ▶A 复数的模和辐角

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴 为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



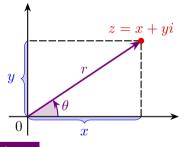
由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴 为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



#### 定义

• 称 r 为 z 的模, 记为 |z|=r.

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴 为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



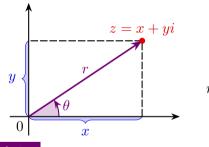
$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x} \ \mathbf{Z} \arctan \frac{y}{x} \pm \pi.$$

#### 定义

- 称 r 为 z 的模, 记为 |z|=r.
- $\theta \to z$  的辐角, 记为  $Arg z = \theta$ .

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴 为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \arctan \frac{y}{x} \ \mathbf{Z} \arctan \frac{y}{x} \pm \pi.$$

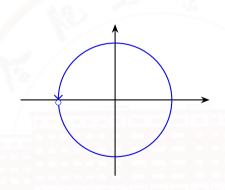
#### 定义

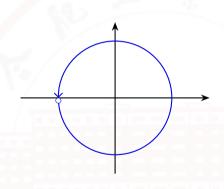
- 称 r 为 z 的模, 记为 |z|=r.
- $\theta \to z$  的辐角, 记为  $Argz = \theta$ . 约定0 的辐角没有定义.

任意  $z \neq 0$  的辐角有无穷多个.

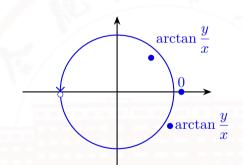


任意  $z \neq 0$  的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于  $(-\pi, \pi]$  的那个, 并称之为主辐角或辐角主值, 记作  $\arg z$ .

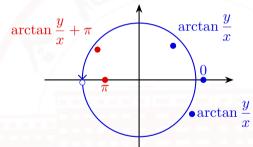




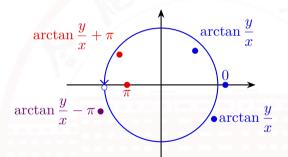
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \end{cases}$$



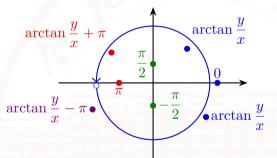
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \end{cases}$$
 arctan  $\frac{y}{x}$ 



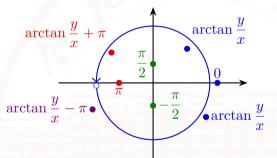
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \ge 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \end{cases}$$



$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \ge 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \ge 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



任意  $z \neq 0$  的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于  $(-\pi, \pi]$  的那个, 并称之为主辐角或辐角主值, 记作  $\arg z$ . 那么  $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$
 
$$\arctan \frac{y}{x} - \pi$$
 
$$\arctan \frac{y}{x} - \pi$$
 
$$\arctan \frac{y}{x} - \pi$$
 
$$\arctan \frac{y}{x} - \pi$$
 
$$\arctan \frac{y}{x} - \pi$$

注意  $\arg \overline{z} = -\arg z$  未必成立, 仅当 z 不是负实数和 0 时成立.

复数的模满足如下性质:



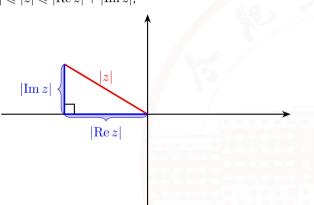
#### 复数的模满足如下性质:

•  $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$ ;



#### 复数的模满足如下性质:

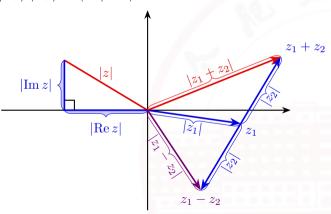
- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$ ;
- $|\operatorname{Re} z|$ ,  $|\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ ;



#### 复数的模满足如下性质:

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$ ;
- $|\operatorname{Re} z|$ ,  $|\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ ;

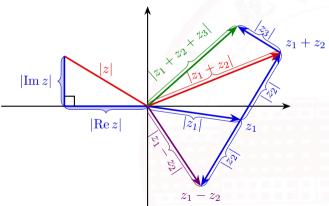
•  $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ;



#### 复数的模满足如下性质:

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$ ;
- $|\operatorname{Re} z|$ ,  $|\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$ ;

- $||z_1| |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ;
- $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$ .



一<mark>例</mark> 证明

--<mark> 例</mark> 证明

(1) 
$$|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

例

证明

(1) 
$$|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$$
;

(2) 
$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).$$

一 例 证明

- (1)  $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;
- (2)  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).$

证明

# 例

证明

- (1)  $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;
- (2)  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).$

#### 证明

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

# 例

证明

- (1)  $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;
- (2)  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).$

#### 证明

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2 \cdot \overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以  $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

- (1)  $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;
- (2)  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).$

#### 证明

$$|z_1z_2|^2=z_1z_2\cdot\overline{z_1z_2}=z_1z_2\overline{z_1z_2}=|z_1|^2\cdot|z_2|^2,$$
  
所以  $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|.$  因此  $|z_1\overline{z_2}|=|z_1|\cdot|\overline{z_2}|=|z_1|\cdot|z_2|.$ 

# 例

证明

- (1)  $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;
- (2)  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).$

#### 证明

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2 \cdot \overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$
  
所以  $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ . 因此  $|z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$ .

(2) 因为

左边 = 
$$(z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$$
,  
右边 =  $z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}\overline{z_2}$ ,

# 例题: 共轭复数解决模的等式

# 例

证明

- (1)  $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$ ;
- (2)  $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).$

#### 证明

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以  $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ . 因此  $|z_1\overline{z_2}|=|z_1|\cdot|\overline{z_2}|=|z_1|\cdot|z_2|$ .

(2) 因为

左边 = 
$$(z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$$
,  
右边 =  $z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}\overline{z_2}$ ,

而  $\overline{z_1\overline{z_2}} = \overline{z_1}z_2$ , 所以两侧相等.

由  $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$  可得



由 
$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$
 可得

# 定义 (复数的三角形式)

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

由  $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$  可得

# 定义 (复数的三角形式)

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义  $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$  (欧拉恒等式),

由  $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$  可得

# 定义 (复数的三角形式)

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义  $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$  (欧拉恒等式), 则我们得到

# 定义 (复数的指数形式)

$$z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta).$$

由  $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$  可得

# 定义 (复数的三角形式)

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义  $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$  (欧拉恒等式), 则我们得到

# 定义 (复数的指数形式)

$$z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

由  $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$  可得

# 定义 (复数的三角形式)

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义  $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$  (欧拉恒等式), 则我们得到

# 定义 (复数的指数形式)

$$z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

求复数的三角和指数形式的关键在于计算模和辐角

例

将  $z = -\sqrt{12} - 2i$  化成三角形式和指数形式.

例

将 
$$z = -\sqrt{12} - 2i$$
 化成三角形式和指数形式.

# - 解

$$r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4.$$

例

将  $z = -\sqrt{12} - 2i$  化成三角形式和指数形式.

# — 解

$$r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$$
. 由于  $z$  在第三象限,

例

将  $z = -\sqrt{12} - 2i$  化成三角形式和指数形式.

#### - 解

 $r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$ . 由于 z 在第三象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

将  $z = -\sqrt{12} - 2i$  化成三角形式和指数形式.

 $r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$ . 由于 z 在第三象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 4e^{-\frac{5\pi i}{6}}.$$

例

将  $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$  化成三角形式和指数形式.

例

将 
$$z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$$
 化成三角形式和指数形式.

$$r = |z| = 1.$$

例

将 
$$z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$$
 化成三角形式和指数形式.

#### - 解

$$r=|z|=1$$
. 由于  $z$  在第一象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \arctan \cot \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}.$$

将  $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$  化成三角形式和指数形式.

$$r=|z|=1$$
. 由于  $z$  在第一象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \arctan \cot \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}.$$

故

$$z = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

例

将  $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$  化成三角形式和指数形式.

- 解

$$r=|z|=1$$
. 由于  $z$  在第一象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \arctan \cot \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}.$$

故

$$z = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

另解

$$z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}$$

例

将  $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$  化成三角形式和指数形式.

解

$$r=|z|=1$$
. 由于  $z$  在第一象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \arctan \cot \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}.$$

故

$$z = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

另解

$$z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right)$$

例

将  $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$  化成三角形式和指数形式.

- 解

$$r=|z|=1$$
. 由于  $z$  在第一象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \arctan \cot \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}.$$

故

$$z = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

另解

$$z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

求复数的三角或指数形式时, 我们只需要任取一个辐角就可以了, 不要求必须是主辐角.

求复数的三角或指数形式时, 我们只需要任取一个辐角就可以了, 不要求必须是主辐角.

#### 练习

将  $z = \sqrt{3} - 3i$  化成三角形式和指数形式.

求复数的三角或指数形式时, 我们只需要任取一个辐角就可以了, 不要求必须是主辐角.

#### 练习

将  $z = \sqrt{3} - 3i$  化成三角形式和指数形式.

#### 答案

$$z = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{3}}$$
,写成  $\frac{5\pi}{3}$  也可以.

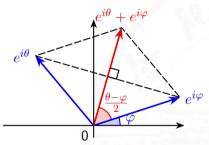
两个模相等的复数之和的三角和指数形式形式较为简单.

两个模相等的复数之和的三角和指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2\cos\frac{\theta - \varphi}{2}e^{\frac{\theta + \varphi}{2}i}$$

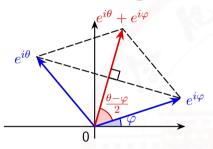
两个模相等的复数之和的三角和指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2\cos\frac{\theta - \varphi}{2}e^{\frac{\theta + \varphi}{2}i}.$$



两个模相等的复数之和的三角和指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2\cos\frac{\theta - \varphi}{2}e^{\frac{\theta + \varphi}{2}i}.$$



#### 例

如果 |z| = 1,  $\arg z = \theta$ , 则  $z + 1 = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{\theta i}{2}}$ .

# 第三节 复数的乘除、乘幂与方根

- ■复数的乘除与三角、指数表示
- 复数的乘幂
- 复数的方根

三角和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

# 三角和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便

定理  $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1e^{i\theta_1}$  $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2e^{i\theta_2} \neq 0$ 则  $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$ 

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等.

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等.

注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等.

注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立. 这是因为  $\arg z_1 \pm \arg z_2$  有可能不落在区间  $(-\pi, \pi]$  上.

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等.

注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立. 这是因为  $\arg z_1 \pm \arg z_2$  有可能不落在区间  $(-\pi,\pi]$  上. 事实上, 当且仅当等式右侧落在区间  $(-\pi,\pi]$  内时才成立, 否则等式两侧会相差  $\pm 2\pi$ .

#### 证明

根据和差的正弦、余弦公式可知

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

#### 证明

根据和差的正弦、余弦公式可知

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$
  
=  $r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)]$ 

#### 证明

根据和差的正弦、余弦公式可知

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$
  
=  $r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)]$   
=  $r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ 

#### 证明

根据和差的正弦、余弦公式可知

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$
  
=  $r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)]$   
=  $r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ 

#### 证明

根据和差的正弦、余弦公式可知

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$
  
=  $r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)]$   
=  $r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ 

设 
$$\frac{z_1}{z_2} = re^{i\theta}$$
,

#### 证明

根据和差的正弦、余弦公式可知

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$
  
=  $r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)]$   
=  $r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ 

设 
$$\frac{z_1}{z_2} = re^{i\theta}$$
, 则由乘法情形可知

$$rr_2 = r_1, \quad \theta + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1.$$

#### 证明

根据和差的正弦、余弦公式可知

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$
  
=  $r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)]$   
=  $r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$ 

设 
$$\frac{z_1}{z_2} = re^{i\theta}$$
, 则由乘法情形可知

$$rr_2 = r_1, \quad \theta + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1.$$

因此 
$$r = \frac{r_1}{r_2}$$
,  $\theta$  可取  $\theta_1 - \theta_2$ .

#### 乘积的几何意义

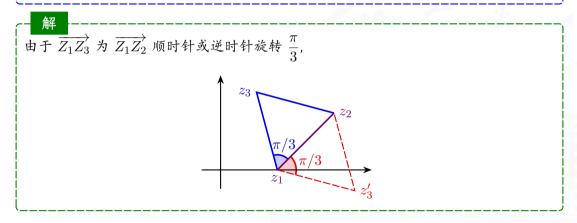
从该定理可以看出, 乘以复数  $z=re^{i\theta}$  可以理解为模放大为 r 倍, 并沿逆时针旋转角度  $\theta$ .

例

已知正三角形的两个顶点为  $z_1 = 1$  和  $z_2 = 2 + i$ , 求它的另一个顶点.

例

已知正三角形的两个顶点为  $z_1 = 1$  和  $z_2 = 2 + i$ , 求它的另一个顶点.



续解

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1) \exp\left(\pm \frac{\pi i}{3}\right) = (1+i)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

#### 续解

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1) \exp\left(\pm \frac{\pi i}{3}\right) = (1+i) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i \not \otimes \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i,$$

#### 续解



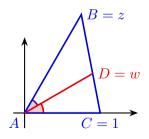
设 AD 是  $\triangle ABC$  的角平分线, 证明  $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ .

#### 例

设 AD 是  $\triangle ABC$  的角平分线, 证明  $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$ .

#### 证明

不妨设 A=0, B=z, C=1, D=w, 设  $\lambda=\frac{DC}{BC}=\frac{w-1}{z-1}\in (0,1).$ 



-- 续证 那么

$$w = 1 + \lambda(z - 1) = \lambda z + (1 - \lambda).$$

续证

$$w = 1 + \lambda(z - 1) = \lambda z + (1 - \lambda).$$

由于  $\angle BAD = \angle DAC$ , 根据复数乘法的几何意义,  $\frac{z-0}{w-0}$  是  $\frac{w-0}{1-0}$  的正实数倍,

续证

那么

$$w = 1 + \lambda(z - 1) = \lambda z + (1 - \lambda).$$

由于 
$$\angle BAD=\angle DAC$$
, 根据复数乘法的几何意义,  $\frac{z-0}{w-0}$  是  $\frac{w-0}{1-0}$  的正实数倍, 即 
$$\frac{w^2}{z}=\lambda^2z+2\lambda(1-\lambda)+\frac{(1-\lambda)^2}{z}\in\mathbb{R},$$

#### 续证

那么

$$w = 1 + \lambda(z - 1) = \lambda z + (1 - \lambda).$$

由于  $\angle BAD = \angle DAC$ , 根据复数乘法的几何意义,  $\frac{z-0}{w-0}$  是  $\frac{w-0}{1-0}$  的正实数倍, 即

$$\frac{w^2}{z} = \lambda^2 z + 2\lambda(1-\lambda) + \frac{(1-\lambda)^2}{z} \in \mathbb{R},$$

于是

$$\lambda^2 z + \frac{(1-\lambda)^2}{z} = \lambda^2 \overline{z} + \frac{(1-\lambda)^2}{\overline{z}}, \qquad (\lambda^2 |z|^2 - (1-\lambda)^2)(z-\overline{z}) = 0.$$

续证

邓么

$$w = 1 + \lambda(z - 1) = \lambda z + (1 - \lambda).$$

由于  $\angle BAD = \angle DAC$ , 根据复数乘法的几何意义,  $\frac{z-0}{w-0}$  是  $\frac{w-0}{1-0}$  的正实数倍, 即

$$\frac{w^2}{z} = \lambda^2 z + 2\lambda(1-\lambda) + \frac{(1-\lambda)^2}{z} \in \mathbb{R},$$

于是

$$\lambda^2 z + \frac{(1-\lambda)^2}{z} = \lambda^2 \overline{z} + \frac{(1-\lambda)^2}{\overline{z}}, \qquad (\lambda^2 |z|^2 - (1-\lambda)^2)(z-\overline{z}) = 0.$$

显然  $z \neq \overline{z}$ . 又因为  $0 < \lambda < 1$ , 故

$$\frac{AB}{AC} = |z| = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{BC - DC}{DC} = \frac{DB}{DC}.$$

设 
$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \neq 0.$$



设  $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}\neq0$ . 根据复数三角和指数形式的乘法和除法运算法则. 我们有

设  $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}\neq0$ . 根据复数三角和指数形式的乘法和除法运算法则, 我们有

# 定理 (复数的乘幂)

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

设  $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}\neq0$ . 根据复数三角和指数形式的乘法和除法运算法则, 我们有

## 定理 (复数的乘幂)

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地, 当 r=1 时, 我们得到棣莫弗公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1,$$

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

$$\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1,$$

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.$$

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1,$$

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

$$\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1,$$

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.$$

一般地, 可以证明  $\cos n\theta$  是  $\cos \theta$  的 n 次多项式,

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1,$$

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

$$\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1,$$

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.$$

一般地, 可以证明  $\cos n\theta$  是  $\cos \theta$  的 n 次多项式, 这个多项式

$$g_n(T) = 2^{n-1}T^n - n2^{n-3}T^{n-2} + \cdots$$

叫做切比雪夫多项式.

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1,$$

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

$$\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1,$$

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.$$

一般地, 可以证明  $\cos n\theta$  是  $\cos \theta$  的 n 次多项式, 这个多项式

$$g_n(T) = 2^{n-1}T^n - n2^{n-3}T^{n-2} + \cdots$$

叫做切比雪夫多项式. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

例

$$\cancel{x} (1+i)^n + (1-i)^n$$
.

# 解

由于

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \ 1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

例

$$\cancel{x} (1+i)^n + (1-i)^n$$
.

解

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \ 1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

例

$$\cancel{x} (1+i)^n + (1-i)^n$$
.

解

由于

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \ 1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

例

$$\cancel{x} (1+i)^n + (1-i)^n$$
.

解

日于

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \ 1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

因此

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

练习

$$\cancel{x} (1+i)^n + (1-i)^n.$$

解

$$1 + i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \ 1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

### 复数的方根

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根  $\sqrt[n]{z}$ .

#### 复数的方根

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根  $\sqrt[n]{z}$ . 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos \theta + i\sin \theta).$$

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos \theta + i\sin \theta).$$

比较两边的模可知  $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$ .

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos \theta + i\sin \theta).$$

比较两边的模可知  $\rho^n = r, \rho = \sqrt[r]{r}$ . 为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时,  $\sqrt[r]{r}$  默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为算术根.

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos \theta + i\sin \theta).$$

比较两边的模可知  $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$ . 为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时,  $\sqrt[n]{r}$  默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为<mark>算术</mark>根.

由于  $n\varphi$  和  $\theta$  的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

## 复数的方根

故 
$$w = w_k = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right).$$



#### 复数的方根

故 
$$w=w_k=\sqrt[n]{r}\exp\Bigl(\frac{\theta+2k\pi}{n}i\Bigr)$$
. 不难看出,  $w_k=w_{k+n}$ , 而  $w_0,w_1,\ldots,w_{n-1}$  两不同. 因此只需取  $k=0,1,\ldots,n-1$ .

#### 复数的方根

故 
$$w=w_k=\sqrt[n]{r}\exp\Bigl(\frac{\theta+2k\pi}{n}i\Bigr)$$
. 不难看出,  $w_k=w_{k+n}$ , 而  $w_0,w_1,\ldots,w_{n-1}$  两不同. 因此只需取  $k=0,1,\ldots,n-1$ .

#### 定理 (复数的方根)

任意一个非零复数z的n次方根有n个值:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

故 
$$w=w_k=\sqrt[n]{r}\exp\Bigl(\frac{\theta+2k\pi}{n}i\Bigr)$$
. 不难看出,  $w_k=w_{k+n}$ , 而  $w_0,w_1,\ldots,w_{n-1}$  两 两不同. 因此只需取  $k=0,1,\ldots,n-1$ .

#### 定理 (复数的方根) -

任意一个非零复数 z 的 n 次方根有 n 个值:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

这些根的模都相等, 且  $w_k$  和  $w_{k+1}$  辐角相差  $\frac{2\pi}{n}$ .

故  $w=w_k=\sqrt[n]{r}\exp\Bigl(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}i\Bigr)$ . 不难看出,  $w_k=w_{k+n}$ , 而  $w_0,w_1,\ldots,w_{n-1}$  两两不同. 因此只需取  $k=0,1,\ldots,n-1$ .

## - 定理 (复数的方根) -

任意一个非零复数 z 的 n 次方根有 n 个值:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

这些根的模都相等,且  $w_k$  和  $w_{k+1}$  辐角相差  $\frac{2\pi}{n}$ . 因此它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$  为半径的圆的内接正 n 边形的顶点.





求  $\sqrt[4]{1+i}$ .



由于 
$$1+i=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$$
,

#### 例

求  $\sqrt[4]{1+i}$ .

## 解

由于  $1+i=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$ , 因此

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2} \exp \frac{(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)i}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

#### 例

求  $\sqrt[4]{1+i}$ .

#### 解

由于  $1+i=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$ , 因此

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2} \exp \frac{(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)i}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

于是该方根所有值为

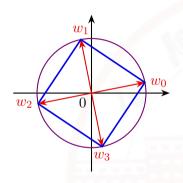
$$w_0 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi i}{16}}, \quad w_1 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{9\pi i}{16}}, \quad w_2 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{17\pi i}{16}}, \quad w_3 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{25\pi i}{16}}.$$

显然  $w_{k+1} = iw_k$ ,

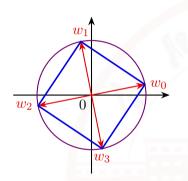


显然  $w_{k+1} = iw_k$ , 所以  $w_0, w_1, w_2, w_3$  形成了一个正方形.

显然  $w_{k+1}=iw_k$ , 所以  $w_0,w_1,w_2,w_3$  形成了一个正方形.

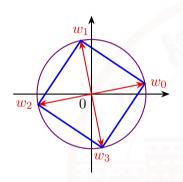


显然  $w_{k+1}=iw_k$ , 所以  $w_0,w_1,w_2,w_3$  形成了一个正方形.



|      | •                |  |  |
|------|------------------|--|--|
|      |                  |  |  |
| 计算   | $\sqrt[6]{-1} =$ |  |  |
| , ,, | v –              |  |  |

显然  $w_{k+1} = iw_k$ , 所以  $w_0, w_1, w_2, w_3$  形成了一个正方形.



計算  $\sqrt[6]{-1} = \frac{\pm \sqrt{3} + i}{2}, \pm i, \pm \frac{\sqrt{3} - i}{2}$ 

注意当  $|n| \ge 2$  时,  $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$  不成立.

注意当 
$$|n| \ge 2$$
 时,  $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$  不成立. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{arg} z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \operatorname{Arg} z = n \operatorname{arg} z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

注意当 
$$|n| \ge 2$$
 时,  $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$  不成立. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{arg} z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \operatorname{Arg} z = n \operatorname{arg} z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Arg} z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

注意当 
$$|n| \ge 2$$
 时,  $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$  不成立. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{arg} z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \operatorname{Arg} z = n \operatorname{arg} z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\operatorname{Arg}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\operatorname{Arg} z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

其中左边表示 z 的所有 n 次方根的所有辐角.

$$x = u + v$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $uv = -\frac{p}{3}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

$$x = u + v$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $uv = -\frac{p}{3}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

(1) 如果 
$$\Delta > 0$$
, 设  $\omega = e^{2\pi i/3}$ , 设实数  $\alpha$  满足  $\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,

$$x = u + v$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $uv = -\frac{p}{3}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

(1) 如果 
$$\Delta>0$$
, 设  $\omega=e^{2\pi i/3}$ , 设实数  $\alpha$  满足  $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$ , 则

$$u = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \qquad x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, \ \alpha\omega - \frac{p}{3\alpha}\omega^2, \ \alpha\omega^2 - \frac{p}{3\alpha}\omega.$$

$$x = u + v$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $uv = -\frac{p}{3}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

(1) 如果 
$$\Delta>0$$
, 设  $\omega=e^{2\pi i/3}$ , 设实数  $\alpha$  满足  $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$ , 则

$$u = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \qquad x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, \ \alpha\omega - \frac{p}{3\alpha}\omega^2, \ \alpha\omega^2 - \frac{p}{3\alpha}\omega.$$

$$x = u + v$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $uv = -\frac{p}{3}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

(1) 如果  $\Delta>0$ , 设  $\omega=e^{2\pi i/3}$ , 设实数  $\alpha$  满足  $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$ , 则

$$u = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \qquad x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, \ \alpha\omega - \frac{p}{3\alpha}\omega^2, \ \alpha\omega^2 - \frac{p}{3\alpha}\omega.$$

(2) 如果 
$$\Delta \leq 0$$
, 则  $p < 0$ ,  $|u|^2 = -\frac{p}{3} > 0$ .

$$x = u + v$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $uv = -\frac{p}{3}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

(1) 如果  $\Delta>0$ , 设  $\omega=e^{2\pi i/3}$ , 设实数  $\alpha$  满足  $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$ , 则

$$u = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \qquad x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, \ \alpha\omega - \frac{p}{3\alpha}\omega^2, \ \alpha\omega^2 - \frac{p}{3\alpha}\omega.$$

(2) 如果 
$$\Delta \le 0$$
, 则  $p < 0$ ,  $|u|^2 = -\frac{p}{3} > 0$ . 从而  $v = \overline{u}$ .

$$x = u + v$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $uv = -\frac{p}{3}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

(1) 如果  $\Delta>0$ , 设  $\omega=e^{2\pi i/3}$ , 设实数  $\alpha$  满足  $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$ , 则

$$u = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \qquad x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, \ \alpha\omega - \frac{p}{3\alpha}\omega^2, \ \alpha\omega^2 - \frac{p}{3\alpha}\omega.$$

(2) 如果 
$$\Delta \leqslant 0$$
, 则  $p < 0$ ,  $|u|^2 = -\frac{p}{3} > 0$ . 从而  $v = \overline{u}$ . 设  $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = u_1, u_2, u_3$ ,

$$x = u + v$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $uv = -\frac{p}{3}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

(1) 如果  $\Delta>0$ , 设  $\omega=e^{2\pi i/3}$ , 设实数  $\alpha$  满足  $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$ , 则

$$u = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \qquad x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, \ \alpha\omega - \frac{p}{3\alpha}\omega^2, \ \alpha\omega^2 - \frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果  $\Delta \le 0$ , 则 p < 0,  $|u|^2 = -\frac{p}{3} > 0$ . 从而  $v = \overline{u}$ . 设  $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = u_1, u_2, u_3$ , 则我们得到 3 个实根

$$x = u_1 + \overline{u_1}, \ u_2 + \overline{u_2}, \ u_3 + \overline{u_3}.$$

$$x = u + v$$
,  $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$ ,  $uv = -\frac{p}{3}$ ,  $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ .

(1) 如果  $\Delta>0$ , 设  $\omega=e^{2\pi i/3}$ , 设实数  $\alpha$  满足  $\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$ , 则

$$u = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \qquad x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, \ \alpha\omega - \frac{p}{3\alpha}\omega^2, \ \alpha\omega^2 - \frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果  $\Delta \le 0$ , 则 p < 0,  $|u|^2 = -\frac{p}{3} > 0$ . 从而  $v = \overline{u}$ . 设  $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = u_1, u_2, u_3$ , 则我们得到 3 个实根

$$x = u_1 + \overline{u_1}, \ u_2 + \overline{u_2}, \ u_3 + \overline{u_3}.$$

不难验证, 若有重根则  $\Delta = 0$ .

# 第四节 曲线和区域

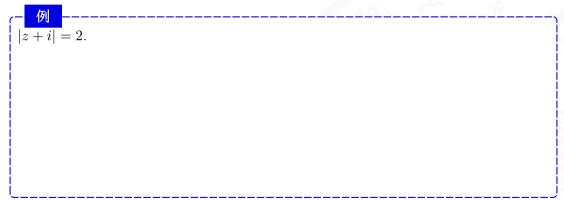
- 复数表平面曲线
- 区域的定义
- ■区域的特性

#### 例:复数方程表平面图形

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示,这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

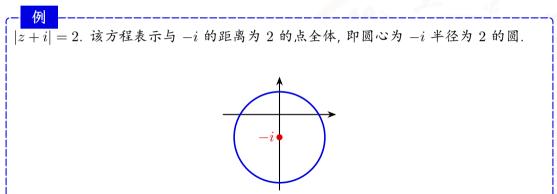
#### 例:复数方程表平面图形

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加 直观和易于理解.



#### 例:复数方程表平面图形

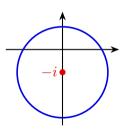
很多的平面图形能用复数形式的方程来表示,这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

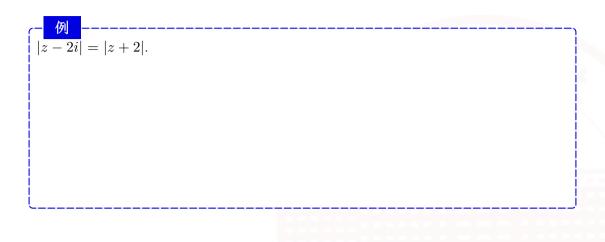


很多的平面图形能用复数形式的方程来表示,这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

#### 例

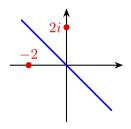
|z+i|=2. 该方程表示与 -i 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 -i 半径为 2 的圆. 一般的圆方程为  $|z-z_0|=R$ , 其中  $z_0$  是圆心, R 是半径.





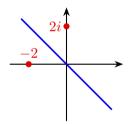


|z-2i|=|z+2|. 该方程表示与 2i 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线.



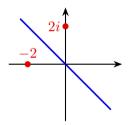
#### 例

|z-2i| = |z+2|. 该方程表示与 2i 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 x+y=0.



#### 例

|z-2i|=|z+2|. 该方程表示与 2i 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 x+y=0.

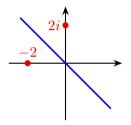


## 例

 $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4.$ 

#### 例

|z-2i|=|z+2|. 该方程表示与 2i 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 x+y=0.



### 例

 $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4$ . 设 z=x+yi, 则  $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$ , 因此 y=-3.



#### 例

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$$

• 当  $2a>|z_1-z_2|$  时, 该方程表示以  $z_1,z_2$  为焦点, a 为长半轴的椭圆;

#### 例

 $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$ 

- 当  $2a > |z_1 z_2|$  时, 该方程表示以  $z_1, z_2$  为焦点, a 为长半轴的椭圆;
- 当  $2a = |z_1 z_2|$  时, 该方程表示连接  $z_1, z_2$  的线段;

#### 例

 $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$ 

- 当  $2a > |z_1 z_2|$  时, 该方程表示以  $z_1, z_2$  为焦点, a 为长半轴的椭圆;
- 当  $2a = |z_1 z_2|$  时, 该方程表示连接  $z_1, z_2$  的线段;
- 当  $2a < |z_1 z_2|$  时, 该方程表示空集.

#### 例

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$$

- 当  $2a > |z_1 z_2|$  时, 该方程表示以  $z_1, z_2$  为焦点, a 为长半轴的椭圆;
- 当  $2a = |z_1 z_2|$  时, 该方程表示连接  $z_1, z_2$  的线段;
- 当  $2a < |z_1 z_2|$  时,该方程表示空集.

#### 例

$$|z - z_1| - |z - z_2| = 2a.$$

#### 例

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$$

- 当  $2a > |z_1 z_2|$  时, 该方程表示以  $z_1, z_2$  为焦点, a 为长半轴的椭圆;
- 当  $2a = |z_1 z_2|$  时, 该方程表示连接  $z_1, z_2$  的线段;
- 当  $2a < |z_1 z_2|$  时, 该方程表示空集.

#### 例

$$|z-z_1| - |z-z_2| = 2a.$$

• 当  $2a < |z_1 - z_2|$  时, 该方程表示以  $z_1, z_2$  为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支;

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$$

- 当  $2a > |z_1 z_2|$  时, 该方程表示以  $z_1, z_2$  为焦点, a 为长半轴的椭圆:
- 当  $2a = |z_1 z_2|$  时, 该方程表示连接  $z_1, z_2$  的线段;
- 当  $2a < |z_1 z_2|$  时, 该方程表示空集.

$$|z-z_1| - |z-z_2| = 2a.$$

- $9 \cdot 2a < |z_1 z_2|$  时, 该方程表示以  $z_1, z_2$  为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支;
- 当  $2a = |z_1 z_2|$  时, 该方程表示以  $z_2$  为起点, 与  $z_2$  ,  $z_3$  连线反向的射线:

#### 例

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$$

- 当  $2a > |z_1 z_2|$  时, 该方程表示以  $z_1, z_2$  为焦点, a 为长半轴的椭圆;
- 当  $2a = |z_1 z_2|$  时, 该方程表示连接  $z_1, z_2$  的线段;
- 当  $2a < |z_1 z_2|$  时, 该方程表示空集.

#### 例

$$|z-z_1| - |z-z_2| = 2a.$$

- 当  $2a < |z_1 z_2|$  时, 该方程表示以  $z_1, z_2$  为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支;
- 当  $2a = |z_1 z_2|$  时, 该方程表示以  $z_2$  为起点, 与  $z_2, z_1$  连线反向的射线;
- 当  $2a > |z_1 z_2|$  时, 该方程表示空集.



 $z^2 + \overline{z}^2 = 1$  和  $z^2 - \overline{z}^2 = i$  分别表示什么图形?

# 练习

$$z^2 + \overline{z}^2 = 1$$
 和  $z^2 - \overline{z}^2 = i$  分别表示什么图形?

# 答案

双曲线  $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$  和双曲线  $xy = \frac{1}{4}$ .

# 邻域

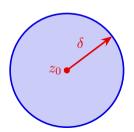
为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域.

## 邻域

为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域. 类比于高等数学中的邻域和去心邻域, 我们在复变函数中, 称开圆盘

$$U(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

为  $z_0$  的一个  $\delta$ -邻域,



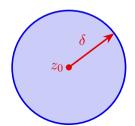
为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域. 类比于高等数学中的邻域和去心邻域, 我们在复变函数中, 称开圆盘

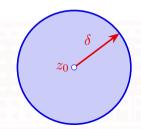
$$U(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

为  $z_0$  的一个  $\delta$ -邻域, 称去心开圆盘

$$\overset{\circ}{U}(z_0, \delta) = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

为  $z_0$  的一个去心  $\delta$ -邻域.

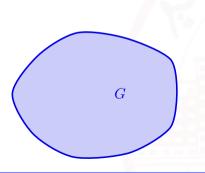




设 G 是复平面的一个子集,  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

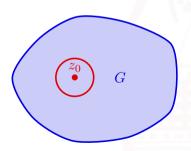


设 G 是复平面的一个子集,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . 它们的位置关系有三种可能:



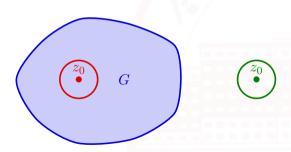
设 G 是复平面的一个子集,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在  $z_0$  的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称  $z_0$  是 G 的一个内点.



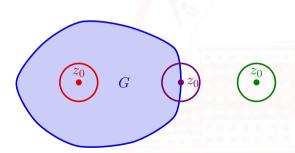
设 G 是复平面的一个子集,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . 它们的位置关系有三种可能:

- (1) 如果存在  $z_0$  的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称  $z_0$  是 G 的一个内点.
- (2) 如果存在  $z_0$  的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称  $z_0$  是 G 的一个外点.



设 G 是复平面的一个子集,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . 它们的位置关系有三种可能:

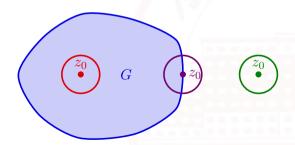
- (1) 如果存在  $z_0$  的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称  $z_0$  是 G 的一个内点.
- (2) 如果存在  $z_0$  的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称  $z_0$  是 G 的一个外点.
- (3) 如果  $z_0$  的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称  $z_0$  是 G 的一个边界点.



设 G 是复平面的一个子集,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . 它们的位置关系有三种可能:

- (1) 如果存在  $z_0$  的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称  $z_0$  是 G 的一个内点.
- (2) 如果存在  $z_0$  的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称  $z_0$  是 G 的一个外点.
- (3) 如果  $z_0$  的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称  $z_0$  是 G 的一个边界点.

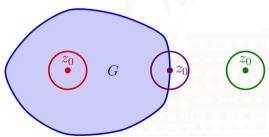
显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能.

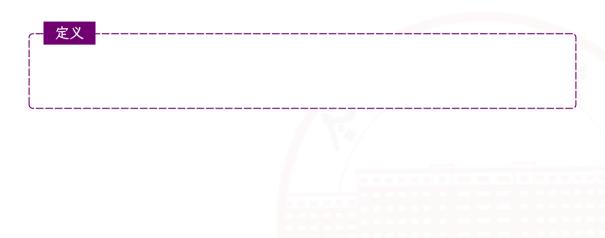


设 G 是复平面的一个子集,  $z_0 \in \mathbb{C}$ . 它们的位置关系有三种可能:

- (1) 如果存在  $z_0$  的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称  $z_0$  是 G 的一个内点.
- (2) 如果存在  $z_0$  的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称  $z_0$  是 G 的一个外点.
- (3) 如果  $z_0$  的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称  $z_0$  是 G 的一个边界点.

显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.





定义

(1) 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.

# 定义

- (1) 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.
- (2) 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

# 定义

- (1) 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.
- (2) 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

例如

$$|z - z_0| < R$$
,  $1 < \text{Re } z < 3$ ,  $\frac{\pi}{4} < \text{arg } z < \frac{3\pi}{4}$ 

都是开集.

# 定义

- (1) 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.
- (2) 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

例如

$$|z - z_0| < R$$
,  $1 < \text{Re } z < 3$ ,  $\frac{\pi}{4} < \text{arg } z < \frac{3\pi}{4}$ 

都是开集. G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集.

# 定义

- (1) 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.
- (2) 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

例如

$$|z - z_0| < R$$
,  $1 < \text{Re } z < 3$ ,  $\frac{\pi}{4} < \text{arg } z < \frac{3\pi}{4}$ 

都是开集. G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集. 直观上看: 开集往往由 >,< 的不等式给出, 闭集往往由 >,< 的不等式给出.

# 定义

- (1) 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.
- (2) 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

例如

$$|z - z_0| < R$$
,  $1 < \text{Re } z < 3$ ,  $\frac{\pi}{4} < \text{arg } z < \frac{3\pi}{4}$ 

都是开集. G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集. 直观上看: 开集往往由 >,< 的不等式给出, 闭集往往由 >,< 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

# 定义

- (1) 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.
- (2) 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

例如

$$|z - z_0| < R$$
,  $1 < \text{Re } z < 3$ ,  $\frac{\pi}{4} < \text{arg } z < \frac{3\pi}{4}$ 

都是开集. G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集. 直观上看: 开集往往由 >,< 的不等式给出, 闭集往往由 >,< 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 D 可以被包含在某个开圆盘 U(0,R) 中, 则称它是有界的.

# 定义

- (1) 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.
- (2) 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

例如

$$|z - z_0| < R$$
,  $1 < \text{Re } z < 3$ ,  $\frac{\pi}{4} < \text{arg } z < \frac{3\pi}{4}$ 

都是开集. G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集. 直观上看: 开集往往由 >,< 的不等式给出, 闭集往往由 >,< 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 D 可以被包含在某个开圆盘 U(0,R) 中, 则称它是有界的. 否则称它是无界的.

## 区域和闭区域

## 定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来,则称 D 是一个区域.

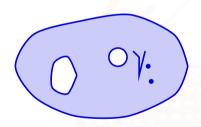
#### 定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来,则称 D 是一个区域. 也就是说,区域是连通的开集.

## 定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来,则称 D 是一个区域. 也就是说,区域是连通的开集.

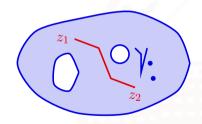
#### 观察下方的图案,



### 定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来,则称 D 是一个区域. 也就是说,区域是连通的开集.

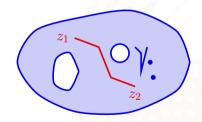
观察下方的图案, 阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接, 因此它是一个区域.



## 定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来,则称 D 是一个区域. 也就是说,区域是连通的开集.

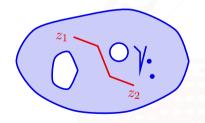
观察下方的图案, 阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接, 因此它是一个区域. 这些线条和点构成了它的边界.



## 定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来,则称 D 是一个区域. 也就是说,区域是连通的开集.

观察下方的图案, 阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接, 因此它是一个区域. 这些线条和点构成了它的边界.

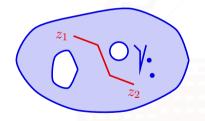


区域和它的边界一起构成了闭区域, 记作  $\overline{D}$ .

## 定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来,则称 D 是一个区域. 也就是说,区域是连通的开集.

观察下方的图案, 阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接, 因此它是一个区域. 这些线条和点构成了它的边界.

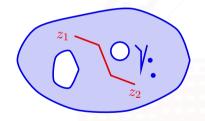


区域和它的边界一起构成了闭区域,记作  $\overline{D}$ . 它是一个闭集.

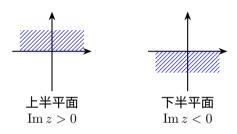
#### 定义

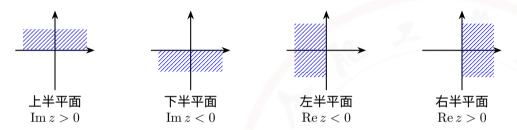
如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来,则称 D 是一个区域. 也就是说,区域是连通的开集.

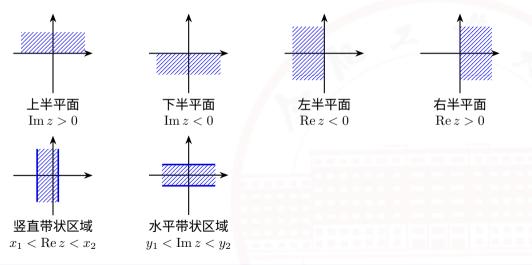
观察下方的图案, 阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接, 因此它是一个区域. 这些线条和点构成了它的边界.

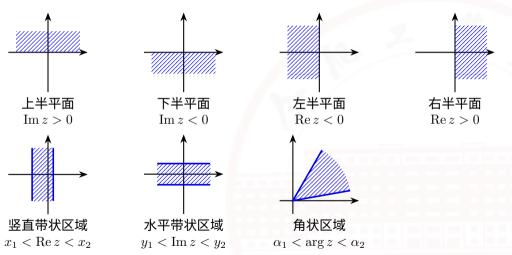


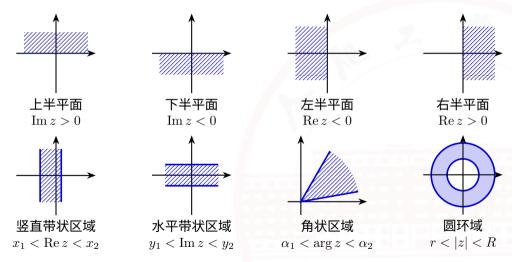
区域和它的边界一起构成了闭区域, 记作  $\overline{D}$ . 它是一个闭集. 数学中边界的概念与日常所说的边界是两码事. 例如区域 |z| > 1 的边界是 |z| = 1, 其闭区域是  $|z| \ge 1$ .



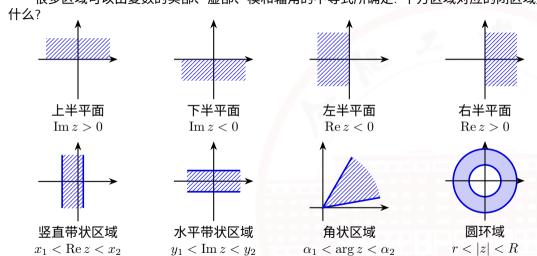








很多区域可以由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定. 下方区域对应的闭区域是



设  $x(t), y(t), t \in [a, b]$  是两个连续函数,

设  $x(t),y(t),t\in [a,b]$  是两个连续函数,则参变量方程  $\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t), \end{cases}$   $t\in [a,b]$  定义

了一条连续曲线.

设  $x(t),y(t),t\in [a,b]$  是两个连续函数, 则参变量方程  $\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t), \end{cases}$   $t\in [a,b]$  定义

了一条连续曲线. 这也等价于  $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$ .

设 
$$x(t), y(t), t \in [a, b]$$
 是两个连续函数,则参变量方程 
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$
 定义

了一条连续曲线. 这也等价于  $C: z=z(t)=x(t)+iy(t), t\in [a,b]$ . 例如

设  $x(t),y(t),t\in [a,b]$  是两个连续函数,则参变量方程  $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases}$   $t\in [a,b]$  定义

了一条连续曲线. 这也等价于  $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$ . 例如

•  $z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t, t \in [0, 1]$  表示连接  $z_1, z_2$  的直线段;

设 
$$x(t),y(t),t\in [a,b]$$
 是两个连续函数,则参变量方程  $\begin{cases} x=x(t), & t\in [a,b]$  定义

了一条连续曲线. 这也等价于  $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$ . 例如

- $z(t) = z_1 + (z_2 z_1)t, t \in [0, 1]$  表示连接  $z_1, z_2$  的直线段;
- $z(\theta) = z_0 + r(\cos \theta + i \sin \theta), \theta \in [0, 2\pi]$  表示以  $z_0$  为圆心, r 为半径的圆周.

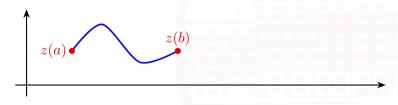
设 
$$x(t), y(t), t \in [a, b]$$
 是两个连续函数,则参变量方程 
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$
 定义

了一条连续曲线. 这也等价于  $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$ . 例如

- $z(t) = z_1 + (z_2 z_1)t, t \in [0, 1]$  表示连接  $z_1, z_2$  的直线段;
- $z(\theta)=z_0+r(\cos\theta+i\sin\theta), \theta\in[0,2\pi]$  表示以  $z_0$  为圆心, r 为半径的圆周.

如果除了两个端点有可能重叠外,其它情形不会出现重叠的点,则称 C 是简单曲

线.



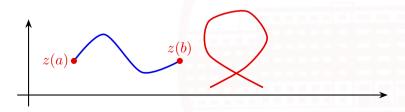
设  $x(t),y(t),t\in [a,b]$  是两个连续函数,则参变量方程  $\begin{cases} x=x(t), & t\in [a,b]$  定义

了一条连续曲线. 这也等价于  $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$ . 例如

- $z(t) = z_1 + (z_2 z_1)t, t \in [0, 1]$  表示连接  $z_1, z_2$  的直线段;
- $z(\theta) = z_0 + r(\cos \theta + i \sin \theta), \theta \in [0, 2\pi]$  表示以  $z_0$  为圆心, r 为半径的圆周.

如果除了两个端点有可能重叠外,其它情形不会出现重叠的点,则称 C 是简单曲

线.

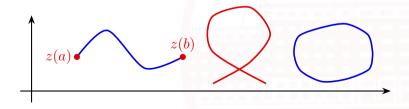


设 
$$x(t), y(t), t \in [a, b]$$
 是两个连续函数,则参变量方程 
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$
 定义

了一条连续曲线. 这也等价于  $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$ . 例如

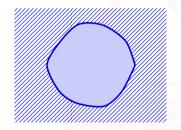
- $z(t) = z_1 + (z_2 z_1)t, t \in [0, 1]$  表示连接  $z_1, z_2$  的直线段;
- $z(\theta)=z_0+r(\cos\theta+i\sin\theta), \theta\in[0,2\pi]$  表示以  $z_0$  为圆心, r 为半径的圆周.

如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线. 如果还满足两个端点重叠, 即 z(a)=z(b), 则称 C 是简单闭曲线或闭路.



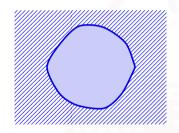
## 闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域,一个有界一个无界.



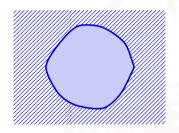
## 闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域,一个有界一个无界。分别称这两个区域是 C 的内部和外部。



#### 闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域,一个有界一个无界. 分别称这两个区域是 C 的内部和外部. C 是它们的公共边界.



在前面所说的几个常见区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路.

在前面所说的几个常见区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外, 闭路的内部仍然包含在这个区域内.

在前面所说的几个常见区域的例子中,我们在区域中画一条闭路.除了圆环域之外,闭路的内部仍然包含在这个区域内.

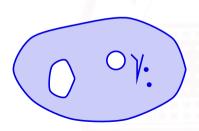
# 定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中,则称 D 是单连通区域. 否则称之为多连通区域.

在前面所说的几个常见区域的例子中,我们在区域中画一条闭路.除了圆环域之外,闭路的内部仍然包含在这个区域内.

# 定义

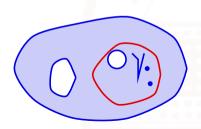
如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中, 则称 D 是单连通区域. 否则称之为多连通区域.



在前面所说的几个常见区域的例子中,我们在区域中画一条闭路.除了圆环域之外,闭路的内部仍然包含在这个区域内.

# 定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中, 则称 D 是单连通区域. 否则称之为多连通区域.

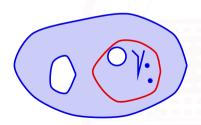


在前面所说的几个常见区域的例子中,我们在区域中画一条闭路.除了圆环域之外,闭路的内部仍然包含在这个区域内.

# 定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中,则称 D 是单连通区域. 否则称之为多连通区域.

单连通区域内的任一闭路可以"连续地变形"成一个点.

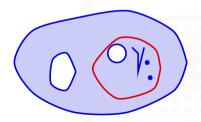


在前面所说的几个常见区域的例子中,我们在区域中画一条闭路.除了圆环域之外,闭路的内部仍然包含在这个区域内.

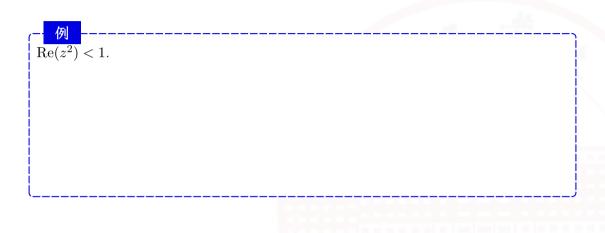
## 定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中, 则称 D 是单连通区域. 否则称之为多连通区域.

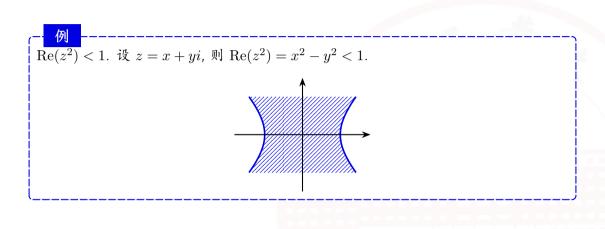
单连通区域内的任一闭路可以 "连续地变形" 成一个点. 这也等价于: 设  $\ell_0,\ell_1$  是 从 A 到 B 的两条连续曲线, 则  $\ell_0$  可以连续地变形为  $\ell_1$  且保持端点不动.



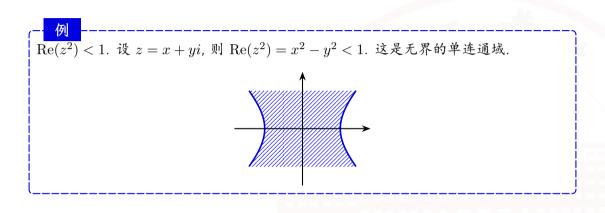
# 例: 区域的特性



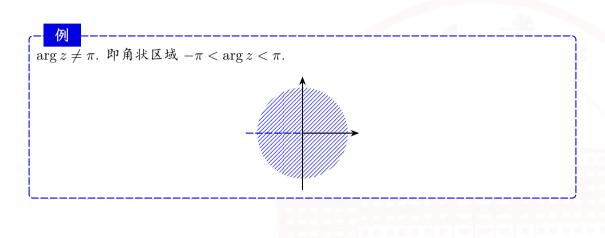
# 例: 区域的特性



# 例: 区域的特性

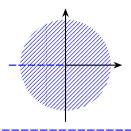




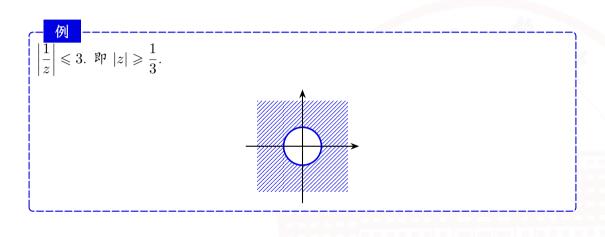


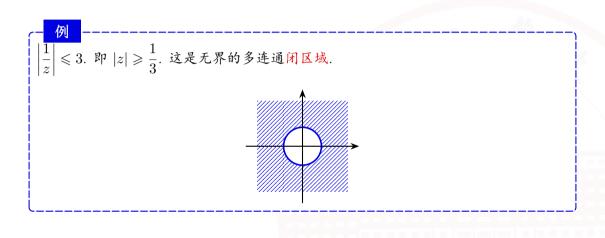


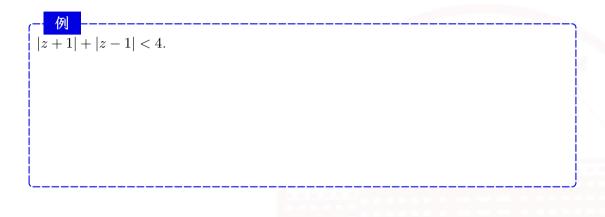
 $arg z \neq \pi$ . 即角状区域  $-\pi < arg z < \pi$ . 这是无界的单连通区域.

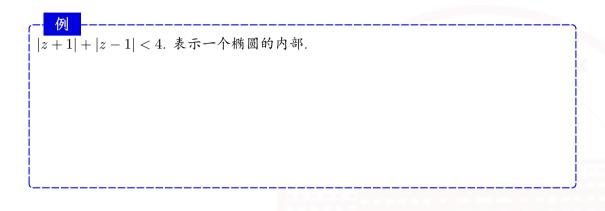


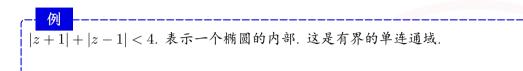


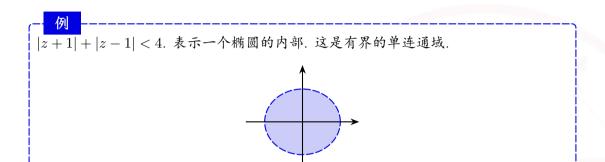






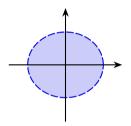








|z+1| + |z-1| < 4. 表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.

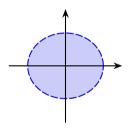


### 思考

|z+1|+|z-1| ≥ 1 表示什么集合?

#### 例

|z+1| + |z-1| < 4. 表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.



#### 思考

|z+1|+|z-1| ≥ 1 表示什么集合? 整个复平面.

第五节 复变函数

- 复变函数的定义
- 映照

所谓的映射, 就是两个集合之间的一种对应  $f:A\to B$ , 使得对于每一个  $a\in A$ , 有一个唯一确定的 b=f(a) 与之对应.

所谓的映射,就是两个集合之间的一种对应  $f:A\to B$ ,使得对于每一个  $a\in A$ ,有一个唯一确定的 b=f(a) 与之对应.

• 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.

所谓的映射,就是两个集合之间的一种对应  $f:A\to B$ ,使得对于每一个  $a\in A$ ,有一个唯一确定的 b=f(a) 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个复变函数.

所谓的映射,就是两个集合之间的一种对应  $f:A\to B$ ,使得对于每一个  $a\in A$ ,有一个唯一确定的 b=f(a) 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个复变函数.

#### 例

$$f(z) = \operatorname{Re} z, \operatorname{arg} z, |z|, z^n (n 为整数), \frac{z+1}{z^2+1}$$
 都是复变函数.

所谓的映射,就是两个集合之间的一种对应  $f:A\to B$ ,使得对于每一个  $a\in A$ ,有一个唯一确定的 b=f(a) 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个复变函数.

## - 例

$$f(z) = \operatorname{Re} z, \operatorname{arg} z, |z|, z^n (n 为整数), \frac{z+1}{z^2+1}$$
 都是复变函数.

定义

所谓的映射,就是两个集合之间的一种对应  $f:A\to B$ ,使得对于每一个  $a\in A$ ,有一个唯一确定的 b=f(a) 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个复变函数.

### 例

$$f(z) = \operatorname{Re} z, \operatorname{arg} z, |z|, z^n (n 为整数), \frac{z+1}{z^2+1}$$
 都是复变函数.

### 定义

称 A 为函数 f 的定义域。

所谓的映射,就是两个集合之间的一种对应  $f:A\to B$ ,使得对于每一个  $a\in A$ ,有一个唯一确定的 b=f(a) 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个复变函数.

#### 例

$$f(z) = \operatorname{Re} z, \operatorname{arg} z, |z|, z^n (n 为整数), \frac{z+1}{z^2+1}$$
 都是复变函数.

### 定义

- 称 A 为函数 f 的定义域。
- 称  $\{w = f(z) \mid z \in A\}$  为它的值域.

所谓的映射,就是两个集合之间的一种对应  $f:A\to B$ ,使得对于每一个  $a\in A$ ,有一个唯一确定的 b=f(a) 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个复变函数.

#### 例

$$f(z) = \operatorname{Re} z, \operatorname{arg} z, |z|, z^n (n 为整数), \frac{z+1}{z^2+1}$$
 都是复变函数.

## 定义

- 称 A 为函数 f 的定义域。
- 称  $\{w = f(z) \mid z \in A\}$  为它的值域.

上述函数的定义域和值域分别是什么?

在复变函数理论中, 我们常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个  $z \in A$  可能有多个 w 与之对应.

在复变函数理论中,我们常常会遇到多值的复变函数,也就是说一个  $z\in A$  可能有多个 w 与之对应. 例如  $\operatorname{Arg} z, \sqrt[n]{z}$  等.

在复变函数理论中,我们常常会遇到多值的复变函数,也就是说一个  $z \in A$  可能有多个 w 与之对应. 例如  $\operatorname{Arg} z$ ,  $\sqrt[n]{z}$  等. 为了方便研究,我们常常需要对每一个 z, 选取 固定的一个 f(z) 的值.

在复变函数理论中,我们常常会遇到多值的复变函数,也就是说一个  $z \in A$  可能有多个 w 与之对应. 例如  $\operatorname{Arg} z$ ,  $\sqrt[p]{z}$  等. 为了方便研究,我们常常需要对每一个 z, 选取 固定的一个 f(z) 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

在复变函数理论中,我们常常会遇到多值的复变函数,也就是说一个  $z \in A$  可能有多个 w 与之对应. 例如  $\operatorname{Arg} z$ ,  $\sqrt[n]{z}$  等. 为了方便研究,我们常常需要对每一个 z, 选取 固定的一个 f(z) 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

#### 例

 $\arg z$  是无穷多值函数  $\operatorname{Arg} z$  的一个单值分支.

在复变函数理论中,我们常常会遇到多值的复变函数,也就是说一个  $z \in A$  可能有多个 w 与之对应. 例如  $\operatorname{Arg} z$ ,  $\sqrt[n]{z}$  等. 为了方便研究,我们常常需要对每一个 z, 选取 固定的一个 f(z) 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

#### 例

 $\arg z$  是无穷多值函数  $\operatorname{Arg} z$  的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数.

在复变函数理论中,我们常常会遇到多值的复变函数,也就是说一个  $z \in A$  可能有多个 w 与之对应. 例如  $\operatorname{Arg} z$ ,  $\sqrt[n]{z}$  等. 为了方便研究,我们常常需要对每一个 z, 选取 固定的一个 f(z) 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

### 例

arg z 是无穷多值函数 Arg z 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下,复变函数总有反函数. 如果 f 和  $f^{-1}$  都是单值的,则称 f 是一一对应.

在复变函数理论中,我们常常会遇到多值的复变函数,也就是说一个  $z \in A$  可能有多个 w 与之对应. 例如  $\operatorname{Arg} z$ ,  $\sqrt[n]{z}$  等. 为了方便研究,我们常常需要对每一个 z, 选取 固定的一个 f(z) 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

## 例

arg z 是无穷多值函数 Arg z 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下,复变函数总有反函数. 如果 f 和  $f^{-1}$  都是单值的, 则称 f 是一一对应.

#### 例

 $f(z) = z^n$  的反函数就是  $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$ .

在复变函数理论中,我们常常会遇到多值的复变函数,也就是说一个  $z \in A$  可能有多个 w 与之对应. 例如  $\operatorname{Arg} z$ ,  $\sqrt[n]{z}$  等. 为了方便研究,我们常常需要对每一个 z, 选取 固定的一个 f(z) 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

### 例

 $\arg z$  是无穷多值函数  $\operatorname{Arg} z$  的一个单值分支.

在考虑多值的情况下,复变函数总有反函数. 如果 f 和  $f^{-1}$  都是单值的, 则称 f 是一一对应.

#### 例

 $f(z)=z^n$  的反函数就是  $f^{-1}(w)=\sqrt[n]{w}$ . 当  $n=\pm 1$  时, f 是一一对应.

在复变函数理论中,我们常常会遇到多值的复变函数,也就是说一个  $z \in A$  可能有多个 w 与之对应. 例如  $\operatorname{Arg} z$ ,  $\sqrt[n]{z}$  等. 为了方便研究,我们常常需要对每一个 z, 选取 固定的一个 f(z) 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

## 例

arg z 是无穷多值函数 Arg z 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下,复变函数总有反函数. 如果 f 和  $f^{-1}$  都是单值的, 则称 f 是一一对应.

#### 例

 $f(z) = z^n$  的反函数就是  $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$ . 当  $n = \pm 1$  时, f 是一一对应.

若无特别声明,本课程中复变函数总是指单值的复变函数,

## 映照

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来.

### 映照

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系,

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系, 其中

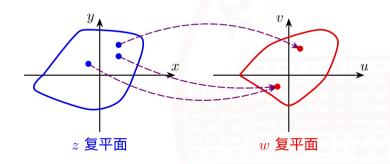
$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

的实部和虚部是两个二元实变函数.

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系, 其中

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

的实部和虚部是两个二元实变函数.



# 例: 映照



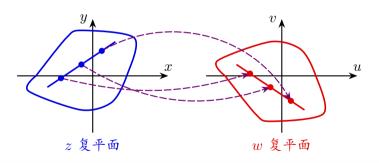
# 例: 映照

例

函数  $w=\overline{z}$ . 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置,则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换.



函数  $\overline{w}=\overline{z}$ . 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置,则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域,且 u=x,v=-y.



# 例: 映照

函数 w = az.

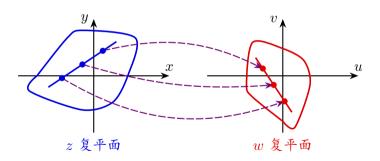
例

函数 w = az. 设  $a = re^{i\theta}$ , 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转  $\theta$ ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合.

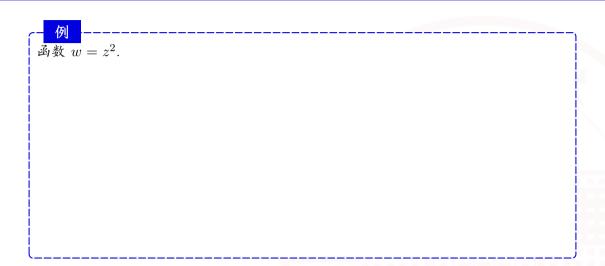
### 例: 映照



函数 w=az. 设  $a=re^{i\theta}$ ,则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转  $\theta$ ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.



# 例: 映照

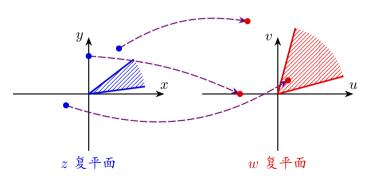


例

函数  $w=z^2$ . 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



函数  $w=z^2$ . 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.

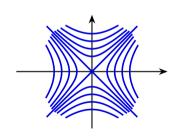




-- 例 (续) 由于  $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ .

# 例 (续)

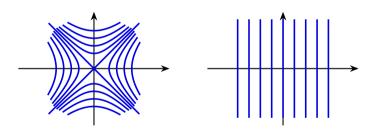
由于  $u=x^2-y^2, v=2xy$ . 因此它把 z 复平面上两族分别以直线  $y=\pm x$  和坐标轴 为渐近线的等轴双曲线  $x^2-y^2=c_1, 2xy=c_2$ 



### 例: 映照

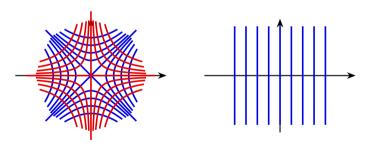
### 例 (续)

由于  $u=x^2-y^2, v=2xy$ . 因此它把 z 复平面上两族分别以直线  $y=\pm x$  和坐标轴 为渐近线的等轴双曲线  $x^2-y^2=c_1, 2xy=c_2$  分别映射为 w 复平面上的两族平行直线  $u=c_1, v=c_2$ .



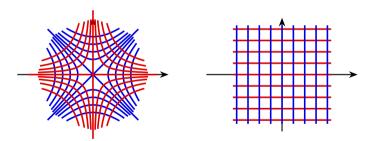
## 例 (续)

由于  $u=x^2-y^2, v=2xy$ . 因此它把 z 复平面上两族分别以直线  $y=\pm x$  和坐标轴 为渐近线的等轴双曲线  $x^2 - y^2 = c_1$ ,  $2xy = c_2$  分别映射为 w 复平面上的两族平行直 线  $u = c_1, v = c_2$ .



### 例 (续)

由于  $u=x^2-y^2, v=2xy$ . 因此它把 z 复平面上两族分别以直线  $y=\pm x$  和坐标轴 为渐近线的等轴双曲线  $x^2-y^2=c_1, 2xy=c_2$  分别映射为 w 复平面上的两族平行直线  $u=c_1, v=c_2$ .



例

求下列集合在映照  $w=z^2$  下的像.

例

求下列集合在映照  $w=z^2$  下的像.

(1) 线段 0 < |z| < 2,  $\arg z = \pi/2$ .

例

求下列集合在映照  $w=z^2$  下的像.

- (1) 线段 0 < |z| < 2,  $\arg z = \pi/2$ .
- (2) 双曲线  $x^2 y^2 = 4$ .

#### 例

求下列集合在映照  $w=z^2$  下的像.

- (1) 线段 0 < |z| < 2,  $\arg z = \pi/2$ .
- (2) 双曲线  $x^2 y^2 = 4$ .
- (3) 扇形区域  $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2$ .

#### 例

求下列集合在映照  $w=z^2$  下的像.

- (1) 线段 0 < |z| < 2,  $\arg z = \pi/2$ .
- (2) 双曲线  $x^2 y^2 = 4$ .
- (3) 扇形区域  $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2.$

#### 例

求下列集合在映照  $w=z^2$  下的像.

- (1) 线段 0 < |z| < 2,  $\arg z = \pi/2$ .
- (2) 双曲线  $x^2 y^2 = 4$ .
- (3) 扇形区域  $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2.$

#### 解

(1)  $\mathfrak{F}$   $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$ ,  $\mathfrak{M}$   $w = z^2 = -r^2$ .

例

求下列集合在映照  $w=z^2$  下的像.

- (1) 线段 0 < |z| < 2,  $\arg z = \pi/2$ .
- (2) 双曲线  $x^2 y^2 = 4$ .
- (3) 扇形区域  $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2$ .

#### 解

 $\overline{(1)}$  设  $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$ , 则  $w = z^2 = -r^2$ . 因此它的像是线段 0 < |w| < 4,  $\arg w = \pi$ .

例

求下列集合在映照  $w=z^2$  下的像.

- (1) 线段 0 < |z| < 2,  $\arg z = \pi/2$ .
- (2) 双曲线  $x^2 y^2 = 4$ .
- (3) 扇形区域  $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2$ .

- $\overline{(1)}$  设  $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$ , 则  $w = z^2 = -r^2$ . 因此它的像是线段 0 < |w| < 4,  $\arg w = \pi$ .
- (2) 由于  $w = u + iv = z^2 = (x^2 y^2) + 2xyi$ .

例

求下列集合在映照  $w=z^2$  下的像.

- (1) 线段 0 < |z| < 2,  $\arg z = \pi/2$ .
- (2) 双曲线  $x^2 y^2 = 4$ .
- (3) 扇形区域  $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2$ .

- (1) 设  $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$ , 则  $w = z^2 = -r^2$ . 因此它的像是线段 0 < |w| < 4,  $\arg w = \pi$ .
- (2) 由于  $w = u + iv = z^2 = (x^2 y^2) + 2xyi$ . 因此  $u = x^2 y^2 = 4, v = 2xy$ .

例

求下列集合在映照  $w=z^2$  下的像.

- (1) 线段 0 < |z| < 2,  $\arg z = \pi/2$ .
- (2) 双曲线  $x^2 y^2 = 4$ .
- (3) 扇形区域  $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2$ .

- $\overline{(1)}$  设  $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$ , 则  $w = z^2 = -r^2$ . 因此它的像是线段 0 < |w| < 4,  $\arg w = \pi$ .
- (2) 由于  $w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi$ . 因此  $u=x^2-y^2=4, v=2xy$ . 可以说明当 u=4 时, 对任意  $v,\,u+iv$  都是该双曲线上某一点的像.

#### 例

求下列集合在映照  $w=z^2$  下的像.

- (1) 线段 0 < |z| < 2,  $\arg z = \pi/2$ .
- (2) 双曲线  $x^2 y^2 = 4$ .
- (3) 扇形区域  $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2$ .

- $\overline{(1)}$  设  $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$ , 则  $w = z^2 = -r^2$ . 因此它的像是线段 0 < |w| < 4,  $\arg w = \pi$ .
- (2) 由于  $w = u + iv = z^2 = (x^2 y^2) + 2xyi$ . 因此  $u = x^2 y^2 = 4, v = 2xy$ . 可以说明当 u = 4 时, 对任意 v, u + iv 都是该双曲线上某一点的像. 所以这条双曲线的像是直线 Re w = 4.

例

求下列集合在映照  $w=z^2$  下的像.

- (1) 线段 0 < |z| < 2,  $\arg z = \pi/2$ .
- (2) 双曲线  $x^2 y^2 = 4$ .
- (3) 扇形区域  $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2$ .

- $\overline{(1)}$  设  $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$ , 则  $w = z^2 = -r^2$ . 因此它的像是线段 0 < |w| < 4,  $\arg w = \pi$ .
- (2) 由于  $w = u + iv = z^2 = (x^2 y^2) + 2xyi$ . 因此  $u = x^2 y^2 = 4, v = 2xy$ . 可以说明当 u = 4 时, 对任意 v, u + iv 都是该双曲线上某一点的像. 所以这条双曲线的像是直线 Re w = 4
- (3) 设  $z = re^{i\theta}$ , 则  $w = r^2 e^{2i\theta}$ .

#### 例

求下列集合在映照  $w=z^2$  下的像.

- (1) 线段 0 < |z| < 2,  $\arg z = \pi/2$ .
- (2) 双曲线  $x^2 y^2 = 4$ .
- (3) 扇形区域  $0 < \arg z < \pi/4, 0 < |z| < 2$ .

- (1) 设  $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$ , 则  $w = z^2 = -r^2$ . 因此它的像是线段 0 < |w| < 4,  $\arg w = \pi$ .
- (2) 由于  $w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi$ . 因此  $u=x^2-y^2=4, v=2xy$ . 可以说明当 u=4 时, 对任意 v, u+iv 都是该双曲线上某一点的像. 所以这条双曲线的像是直线  $\mathrm{Re}\,w=4$ .
- (3) 设  $z = re^{i\theta}$ , 则  $w = r^2 e^{2i\theta}$ . 因此它的像是扇形区域  $0 < \arg w < \pi/2, 0 < |w| < 4$ .

例

求圆周 |z|=2 在映照  $w=\dfrac{z+1}{z-1}$  下的像.

#### 例

求圆周 |z|=2 在映照  $w=\frac{z+1}{z-1}$  下的像.

#### 解

由于  $z = \frac{w+1}{w-1}, \left| \frac{w+1}{w-1} \right| = 2,$ 

### 例

求圆周 |z|=2 在映照  $w=\frac{z+1}{z-1}$  下的像.

由于 
$$z = \frac{w+1}{w-1}, \left| \frac{w+1}{w-1} \right| = 2$$
, 因此

$$|w+1|=2|w-1|, \quad w\overline{w}+w+\overline{w}+1=4w\overline{w}-4w-4\overline{w}+4,$$

#### 例

求圆周 |z| = 2 在映照  $w = \frac{z+1}{z-1}$  下的像.

由于 
$$z = \frac{w+1}{w-1}, \left| \frac{w+1}{w-1} \right| = 2$$
, 因此

$$|w+1|=2|w-1|, \quad w\overline{w}+w+\overline{w}+1=4w\overline{w}-4w-4\overline{w}+4,$$

$$w\overline{w} - \frac{5}{3}w - \frac{5}{3}\overline{w} + 1 = 0, \quad \left|w - \frac{5}{3}\right|^2 = \frac{16}{9},$$

例

求圆周 |z| = 2 在映照  $w = \frac{z+1}{z-1}$  下的像.

由于 
$$z = \frac{w+1}{w-1}, \left| \frac{w+1}{w-1} \right| = 2$$
, 因此

$$|w+1|=2|w-1|, \quad w\overline{w}+w+\overline{w}+1=4w\overline{w}-4w-4\overline{w}+4,$$

$$w\overline{w} - \frac{5}{3}w - \frac{5}{3}\overline{w} + 1 = 0, \quad \left|w - \frac{5}{3}\right|^2 = \frac{16}{9},$$

即 
$$\left| w - \frac{5}{3} \right| = \frac{4}{3}$$
, 是一个圆周.

# 第六节 极限和连续性

- 无穷远点
- 数列的极限
- ■函数的极限
- ■函数的连续性

# 数列极限

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限.

### 数列极限

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

#### 数列极限

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

#### 定义

设  $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$  是一个复数列. 如果  $\forall \varepsilon>0, \exists N$  使得当  $n\geqslant N$  时  $|z_n-z|<\varepsilon$ , 则称 z 是数列  $\{z_n\}$  的极限, 记作  $\lim_{n\to\infty}z_n=z$ .

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

#### 定义

设  $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$  是一个复数列. 如果  $\forall \varepsilon>0, \exists N$  使得当  $n\geqslant N$  时  $|z_n-z|<\varepsilon$ , 则称 z 是数列  $\{z_n\}$  的极限, 记作  $\lim_{n\to\infty}z_n=z$ .

如果  $\forall X > 0, \exists N$  使得当  $n \ge N$  时  $|z_n| > X$ , 则记  $\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$ .

如果我们称

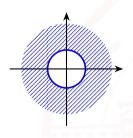
$$\overset{\circ}{U}(\infty,X)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>X\}$$

为  $\infty$  的 (去心) 邻域,

如果我们称

$$\overset{\circ}{U}(\infty,X)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>X\}$$

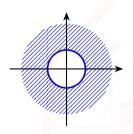
为  $\infty$  的 (去心) 邻域,



如果我们称

$$\overset{\circ}{U}(\infty,X)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>X\}$$

为  $\infty$  的 (去心) 邻域,

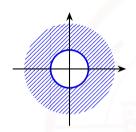


那么上述定义可统一表述为:

如果我们称

$$\overset{\circ}{U}(\infty, X) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > X \}$$

为 $\infty$ 的(去心)邻域,



### 那么上述定义可统一表述为:

### 数列极限的等价定义

对 z 的任意邻域 U,  $\exists N$  使得当  $n \ge N$  时  $z_n \in U$ .

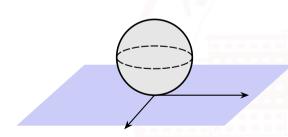
那么有没有一种看法使得  $\infty$  的邻域和普通复数的邻域没有差异呢?

那么有没有一种看法使得  $\infty$  的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点  $\infty$ .

那么有没有一种看法使得  $\infty$  的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点  $\infty$ . 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

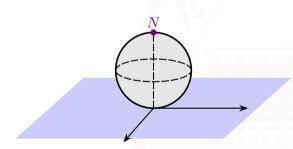
那么有没有一种看法使得  $\infty$  的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点  $\infty$ . 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

取一个与复平面相切于原点 z=0 的球面.

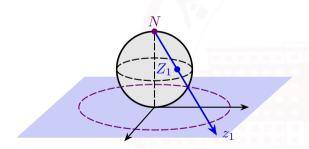


那么有没有一种看法使得  $\infty$  的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点  $\infty$ . 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

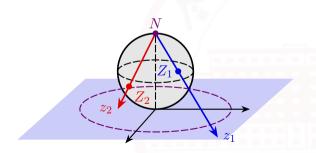
取一个与复平面相切于原点 z=0 的球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于另一点 N, 称之为北极.



• 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.

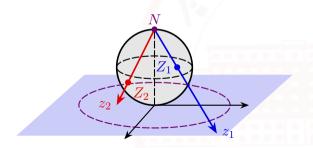


- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.

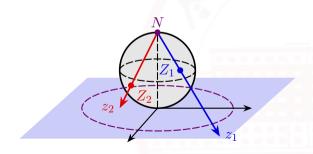


- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.

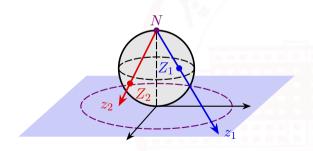
这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了——对应.



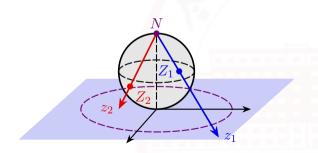
当 |z| 越来越大时,其对应球面上点也越来越接近 N.



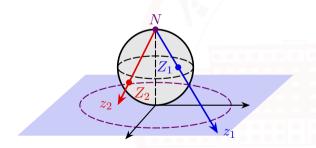
当 |z| 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点, 记作  $\infty$ .



当 |z| 越来越大时,其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点,记作  $\infty$ . 那么扩充复数集合  $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$  就正好和球面上的点——对应.

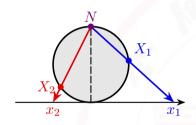


当 |z| 越来越大时,其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的"点"——无穷远点,记作  $\infty$ . 那么扩充复数集合  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  就正好和球面上的点——对应. 称这样的球面为复球面,称包含无穷远点的复平面为扩充复平面或闭复平面.

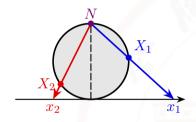


它和实数列极限符号中的  $\infty$  有什么联系呢?

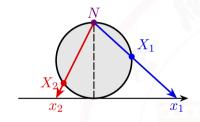
它和实数列极限符号中的  $\infty$  有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应.



它和实数列极限符号中的  $\infty$  有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数列极限符号中的  $\infty$  在复球面上就是  $\infty$ .

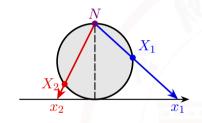


它和实数列极限符号中的  $\infty$  有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数列极限符号中的  $\infty$  在复球面上就是  $\infty$ .



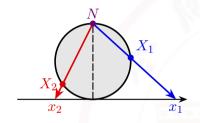
朴素地看,复球面上任意一点可以定义  $\delta$  邻域为与其距离小于  $\delta$  的所有点.

它和实数列极限符号中的  $\infty$  有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数列极限符号中的  $\infty$  在复球面上就是  $\infty$ .



朴素地看, 复球面上任意一点可以定义  $\delta$  邻域为与其距离小于  $\delta$  的所有点. 特别地,  $\infty$  的开邻域通过前面所说的对应关系, 可以对应到扩充复平面上  $\infty$  的一个邻域.

它和实数列极限符号中的  $\infty$  有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数列极限符号中的  $\infty$  在复球面上就是  $\infty$ .



朴素地看, 复球面上任意一点可以定义  $\delta$  邻域为与其距离小于  $\delta$  的所有点. 特别地,  $\infty$  的开邻域通过前面所说的对应关系, 可以对应到扩充复平面上  $\infty$  的一个邻域. 所以在复球面上, 我们将普通复数和  $\infty$  的开邻域可以视为相同的概念.

### 数列收敛的等价刻画

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

### 定理

设 
$$z_n = x_n + y_n i, z = x + y i,$$
 则

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \iff \lim_{n \to \infty} x_n = x, \lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

### 下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

#### 定理

设  $z_n = x_n + y_n i, z = x + y i,$  则

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \iff \lim_{n \to \infty} x_n = x, \lim_{n \to \infty} y_n = y.$$

#### 证明

由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \le |z_n - z| \le |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证.

# 极限的四则运算

由此可知极限的四则运算法则对于数列也是成立的.

### 极限的四则运算

由此可知极限的四则运算法则对于数列也是成立的.

### 定理

设 
$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$
,  $\lim_{n\to\infty} w_n = w$ , 则

由此可知极限的四则运算法则对于数列也是成立的。

#### 定理

设 
$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$
,  $\lim_{n\to\infty} w_n = w$ , 则

(1) 
$$\lim_{n \to \infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w;$$

由此可知极限的四则运算法则对于数列也是成立的.

#### 定理

设  $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ ,  $\lim_{n\to\infty} w_n = w$ , 则

- (1)  $\lim_{n\to\infty}(z_n\pm w_n)=z\pm w;$
- $(2) \lim_{n \to \infty} z_n w_n = zw;$

### 极限的四则运算

由此可知极限的四则运算法则对于数列也是成立的

#### 定理

谟 
$$\lim_{n\to\infty} \overline{z}_n = z$$
,  $\lim_{n\to\infty} w_n = w$ , 则

- $(1) \lim_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w;$
- $(2) \lim_{n\to\infty} z_n w_n = zw;$
- (3) 当  $w \neq 0$  时,  $\lim_{n \to \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}$ .

# 例: 数列的敛散性



设  $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{\frac{\pi i}{n}}$ . 数列  $\{z_n\}$  是否收敛?

# 例: 数列的敛散性

#### 例

设  $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{\frac{\pi i}{n}}$ . 数列  $\{z_n\}$  是否收敛?

### 解

由于

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0.$$

# 例: 数列的敛散性

#### 例

设  $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)e^{\frac{\pi i}{n}}$ . 数列  $\{z_n\}$  是否收敛?

### 解

由于

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0.$$

因此  $\{z_n\}$  收敛且  $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$ .

### 函数的极限



设函数 f(z) 在点  $z_0$  的某个去心邻域内有定义.

### 函数的极限

#### 定义

设函数 f(z) 在点  $z_0$  的某个去心邻域内有定义. 如果存在复数 A, 使得对 A 的任意邻域  $U(A,\varepsilon), \exists \delta>0$  使得

$$z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(A, \varepsilon),$$

### 函数的极限

#### 定义

设函数 f(z) 在点  $z_0$  的某个去心邻域内有定义. 如果存在复数 A, 使得对 A 的任意邻域  $U(A,\varepsilon), \exists \delta>0$  使得

$$z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(A, \varepsilon),$$

则称 A 为 f(z) 当  $z \to z_0$  时的极限, 记为  $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$  或  $f(z) \to A(z \to z_0)$ .

### 函数的极限

#### 定义

设函数 f(z) 在点  $z_0$  的某个去心邻域内有定义. 如果存在复数 A, 使得对 A 的任意邻域  $U(A,\varepsilon), \exists \delta>0$  使得

$$z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(A, \varepsilon),$$

则称 A 为 f(z) 当  $z \to z_0$  时的极限, 记为  $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$  或  $f(z) \to A(z \to z_0)$ .

此时我们称极限存在.

#### 函数的极限

#### 定义

设函数 f(z) 在点  $z_0$  的某个去心邻域内有定义. 如果存在复数 A, 使得对 A 的任意邻域  $U(A,\varepsilon), \exists \delta>0$  使得

$$z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(A, \varepsilon),$$

则称 A 为 f(z) 当  $z \to z_0$  时的极限, 记为  $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$  或  $f(z) \to A(z \to z_0)$ .

此时我们称极限存在.

上述定义中的  $z_0$  和 A 可换成  $\infty$ , 从而得到  $z \to \infty$  的极限定义, 以及  $\lim f(z) = \infty$  的含义.

不难看出, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的:

不难看出, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的: 即  $z \to z_0$  沿任一曲线趋向于  $z_0$  的极限都是相同的.

不难看出, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的: 即  $z \to z_0$  沿任一曲线趋向于  $z_0$  的极限都是相同的.

# 定理 该 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + y_0 i, A = u_0 + v_0 i,$ 则 $\lim_{z \to z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0.$

不难看出,复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的: 即  $z \to z_0$  沿任一曲线趋向于  $z_0$  的极限都是相同的.

### 定理

设 
$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + y_0 i, A = u_0 + v_0 i,$$
则

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0.$$

#### 证明

由三角不等式

$$|u - u_0|, |v - v_0| \le |f(z) - A| \le |u - u_0| + |v - v_0|$$

易证.

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

#### 定理

设 
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A, \lim_{z \to z_0} g(z) = B$$
,则

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的。

#### 定理

设 
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$
,  $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$ , 则

(1) 
$$\lim_{z \to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B;$$

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的。

### 定理

设  $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$ ,  $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$ , 则

- (1)  $\lim_{z \to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B;$
- (2)  $\lim_{z \to z_0} (fg)(z) = AB;$

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

#### 定理

读 
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$
,  $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$ , 则

- (1)  $\lim_{z \to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B;$
- (2)  $\lim_{z \to z_0} (fg)(z) = AB;$
- (3) 当  $B \neq 0$  时,  $\lim_{z \to z_0} \left( \frac{f}{g} \right) (z) = \frac{A}{B}$ .

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的。

### 定理

读 
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$
,  $\lim_{z \to z_0} g(z) = B$ , 则

- (1)  $\lim_{z \to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B;$
- (2)  $\lim_{z \to z_0} (fg)(z) = AB;$

(3) 当 
$$B \neq 0$$
 时,  $\lim_{z \to z_0} \left( \frac{f}{g} \right) (z) = \frac{A}{B}$ .

在学习了复变函数的导数后, 我们也可以使用等价无穷小替换、洛必达法则等工具来计算极限.

例

证明: 当  $z \to 0$  时, 函数  $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$  的极限不存在.

#### 例

证明: 当  $z \to 0$  时, 函数  $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$  的极限不存在.

#### 证明

#### 例

证明: 当  $z \to 0$  时, 函数  $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$  的极限不存在.

#### 证明

令 
$$z = x + yi$$
, 则  $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . 因此

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x,y) = 0.$$

证明: 当  $z \to 0$  时, 函数  $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$  的极限不存在.

令 z = x + yi,则  $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . 因此

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x,y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时,  $u(x,y) \rightarrow \pm 1$ .

证明: 当  $z \to 0$  时, 函数  $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$  的极限不存在.

令 
$$z = x + yi$$
,则  $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . 因此

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x,y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时,  $u(x,y) \to \pm 1$ . 因此  $\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x,y)$  不存在,

证明: 当  $z \to 0$  时, 函数  $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$  的极限不存在.

令 z = x + yi,则  $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . 因此

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x,y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时,  $u(x,y)\to \pm 1$ . 因此  $\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}u(x,y)$  不存在, 从而

 $\lim_{z\to z_0} f(z)$  不存在.



### 定义

• 如果  $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ , 则称 f(z) 在  $z_0$  处连续.

### 定义

- 如果  $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ , 则称 f(z) 在  $z_0$  处连续.
- 如果 f(z) 在区域 D 内处处连续, 则称 f(z) 在 D 内连续.

#### 定义

- 如果  $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ , 则称 f(z) 在  $z_0$  处连续.
- 如果 f(z) 在区域 D 内处处连续, 则称 f(z) 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

### 定义

- 如果  $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ , 则称 f(z) 在  $z_0$  处连续.
- 如果 f(z) 在区域 D 内处处连续, 则称 f(z) 在 D 内连续.

#### 根据前面的极限判定定理可知:

#### 定理

函数 f(z)=u(x,y)+iv(x,y) 在  $z_0=x_0+iy_0$  处连续当且仅当 u(x,y) 和 v(x,y) 在  $(x_0,y_0)$  处连续.

### 定义

- 如果  $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$ , 则称 f(z) 在  $z_0$  处连续.
- 如果 f(z) 在区域 D 内处处连续, 则称 f(z) 在 D 内连续.

#### 根据前面的极限判定定理可知:

### 定理

函数 f(z)=u(x,y)+iv(x,y) 在  $z_0=x_0+iy_0$  处连续当且仅当 u(x,y) 和 v(x,y) 在  $(x_0,y_0)$  处连续.

#### 例

设 
$$f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2).$$

#### 定义

- 如果  $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ , 则称 f(z) 在  $z_0$  处连续.
- 如果 f(z) 在区域 D 内处处连续, 则称 f(z) 在 D 内连续.

#### 根据前面的极限判定定理可知:

### 定理

函数 f(z) = u(x,y) + iv(x,y) 在  $z_0 = x_0 + iy_0$  处连续当且仅当 u(x,y) 和 v(x,y) 在  $(x_0,y_0)$  处连续.

#### 例

设  $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$ .  $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$  除原点外处处连续,  $v(x,y) = x^2 - y^2$  处处连续.

#### 定义

- 如果  $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ , 则称 f(z) 在  $z_0$  处连续.
- 如果 f(z) 在区域 D 内处处连续, 则称 f(z) 在 D 内连续.

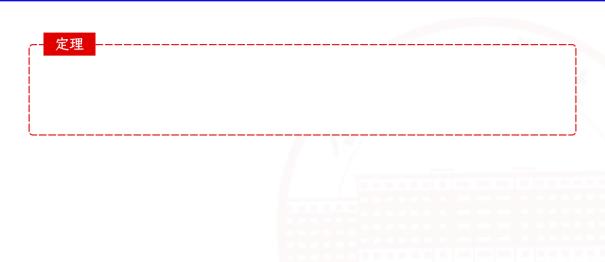
#### 根据前面的极限判定定理可知:

### 定理

函数 f(z)=u(x,y)+iv(x,y) 在  $z_0=x_0+iy_0$  处连续当且仅当 u(x,y) 和 v(x,y) 在  $(x_0,y_0)$  处连续.

#### 例

设  $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$ .  $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$  除原点外处处连续,  $v(x,y) = x^2 - y^2$  处处连续. 因此 f(z) 在  $z \neq 0$  处连续.



#### 定理

• 在  $z_0$  处连续的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商  $(g(z_0) \neq 0)$  在  $z_0$  处仍然 连续.

#### 定理

- 在  $z_0$  处连续的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商  $(g(z_0) \neq 0)$  在  $z_0$  处仍然 连续.
- 如果函数 g(z) 在  $z_0$  处连续, 函数 f(w) 在  $g(z_0)$  处连续, 则 f(g(z)) 在  $z_0$  处连续.

#### 定理

- 在  $z_0$  处连续的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商  $(g(z_0) \neq 0)$  在  $z_0$  处仍然 连续.
- 如果函数 g(z) 在  $z_0$  处连续, 函数 f(w) 在  $g(z_0)$  处连续, 则 f(g(z)) 在  $z_0$  处连续.

显然 f(z) = z 是处处连续的,

#### 定理

- 在  $z_0$  处连续的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商  $(g(z_0) \neq 0)$  在  $z_0$  处仍然 连续.
- 如果函数 g(z) 在  $z_0$  处连续, 函数 f(w) 在  $g(z_0)$  处连续, 则 f(g(z)) 在  $z_0$  处连续.

显然 f(z) = z 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

也处处连续,

#### 定理

- 在  $z_0$  处连续的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商  $(g(z_0) \neq 0)$  在  $z_0$  处仍然 连续.
- 如果函数 g(z) 在  $z_0$  处连续, 函数 f(w) 在  $g(z_0)$  处连续, 则 f(g(z)) 在  $z_0$  处连续.

显然 f(z) = z 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

也处处连续, 有理函数  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  在 Q(z) 的零点以外处处连续.



证明: 如果 f(z) 在  $z_0$  连续, 则  $\overline{f(z)}$  在  $z_0$  也连续.

#### 例

证明: 如果 f(z) 在  $z_0$  连续, 则  $\overline{f(z)}$  在  $z_0$  也连续.

### 证明

 $i\bar{\xi} \ f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0.$ 

#### 例

证明: 如果 f(z) 在  $z_0$  连续, 则  $\overline{f(z)}$  在  $z_0$  也连续.

### 证明

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$ . 那么 u(x,y), v(x,y) 在  $(x_0,y_0)$  连续.

#### 例

证明: 如果 f(z) 在  $z_0$  连续, 则  $\overline{f(z)}$  在  $z_0$  也连续.

#### 证明

设  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$ . 那么 u(x,y), v(x,y) 在  $(x_0,y_0)$  连续. 从而 -v(x,y) 也在  $(x_0,y_0)$  连续.

#### 例

证明: 如果 f(z) 在  $z_0$  连续, 则  $\overline{f(z)}$  在  $z_0$  也连续.

#### 证明

设  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$ . 那么 u(x,y), v(x,y) 在  $(x_0,y_0)$  连续. 从 而 -v(x,y) 也在  $(x_0,y_0)$  连续. 所以  $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$  在  $(x_0,y_0)$  连续.

#### 例

证明: 如果 f(z) 在  $z_0$  连续, 则  $\overline{f(z)}$  在  $z_0$  也连续.

#### 证明

设  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$ . 那么 u(x,y), v(x,y) 在  $(x_0,y_0)$  连续. 从而 -v(x,y) 也在  $(x_0,y_0)$  连续. 所以  $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$  在  $(x_0,y_0)$  连续.

### 另证

函数  $g(z) = \overline{z} = x - iy$  处处连续,

#### 例

证明: 如果 f(z) 在  $z_0$  连续, 则  $\overline{f(z)}$  在  $z_0$  也连续.

#### 证明

设  $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$ . 那么 u(x,y), v(x,y) 在  $(x_0,y_0)$  连续. 从 而 -v(x,y) 也在  $(x_0,y_0)$  连续. 所以  $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$  在  $(x_0,y_0)$  连续.

### 另证

函数  $g(z) = \overline{z} = x - iy$  处处连续, 从而  $g(f(z)) = \overline{f(z)}$  在  $z_0$  处连续.



可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别.

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢?

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 © 是一个域, 上面可以做除法.

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 © 是一个域, 上面可以做除法.

这就导致了复变函数有导数,而不是像多变量实函数只有偏导数.

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 © 是一个域, 上面可以做除法.

这就导致了复变函数有<mark>导数</mark>,而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.