

# 复变函数与积分变换

张神星

合肥工业大学

2022 年秋季学期

## 第二章 解析函数

- 2, 3, 4
- 6, 8, 11
- 12, 15, 18

- ① 解析函数的概念
- ② 函数解析的充要条件
- ③ 初等函数

- 由于  $\mathbb{C}$  是一个域, 我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

## 定义

设  $w = f(z)$  的定义域是区域  $D$ ,  $z_0 \in D$ . 如果极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  可导. 这个极限值称为  $f(z)$  在  $z_0$  的导数, 记作

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果  $f(z)$  在区域  $D$  内处处可导, 称  $f(z)$  在  $D$  内可导.

## 典型例题: 线性函数的不可导性

- **例** 函数  $f(z) = x + 2yi$  是否可导?
- **解**

$$\begin{aligned}f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z} \\&= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}.\end{aligned}$$

- 当  $\Delta x = 0$  时, 上述极限为 2; 当  $\Delta y = 0$  时, 上述极限为 1.
- 因此该极限不存在,  $f(z)$  处处不可导. ■
- 若将其视为二元实变量的函数, 则该函数在不同方向的方向导数不同.
- **练习** 函数  $f(z) = x - yi$  是否可导? **答案** 不可导.

## 例题: 复变函数的导数

- 例 求  $f(z) = z^2$  的导数.
- 解

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- 和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:
- $(c)' = 0$ , 其中  $c$  为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$ , 其中  $n$  为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$ ,  $(cf)' = cf'$ ;
- $(fg)' = f'g + fg'$ ,  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ;
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z)$ ;
- $f'(z) = \frac{1}{(f^{-1})'[f(z)]}$ .



## 定理

若  $f(z)$  在  $z_0$  可导, 则  $f(z)$  在  $z_0$  连续.

- **证明** 该定理的证明和实变量情形完全相同.
- 设  $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$ , 则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z \\ &= f'(z_0) \cdot 0 = 0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

- 复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.
- 如果存在常数  $A$  使得函数  $w = f(z)$  满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

- 其中  $o(\Delta z)$  表示  $\Delta z$  的高阶无穷小量, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  处可微, 称  $A\Delta z$  为  $f(z)$  在  $z_0$  的微分, 记作  $dw = A\Delta z$ .
- 和实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且  $dw = f'(z_0)\Delta z, dz = \Delta z$ .
- 故  $dw = f'(z_0)dz, f'(z_0) = \frac{dw}{dz}$ .
- 如果此刻你想到了二元实变函数的全微分公式, 那么你就快要接触到解析函数本质了.

## 定义

- 如果函数  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 那么称  $f(z)$  在  $z_0$  解析.
- 如果  $f(z)$  在区域  $D$  内处处解析, 那么称  $f(z)$  在  $D$  内解析, 或称  $f(z)$  是  $D$  内的一个解析函数(也叫全纯函数或正则函数).
- 如果  $f(z)$  在  $z_0$  不解析, 称  $z_0$  为  $f(z)$  的一个奇点.
- 由于区域  $D$  是一个开集, 其中的任意  $z_0 \in D$  均存在一个包含在  $D$  的邻域. 所以  $f(z)$  在  $D$  内解析和在  $D$  内可导是等价的.
- 如果  $f(z)$  在  $z_0$  解析, 则  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 从而解析. 因此  $f(z)$  解析点全体是一个开集.

- ① 解析函数的概念
- ② 函数解析的充要条件
- ③ 初等函数

- 从上一节的例子中观察到: 解析函数往往可以直接表达为  $z$  的函数的形式, 而不解析的往往包含  $x, y, \bar{z}$  之类的内容.
- 这种直观印象实际上是有道理的.
- 我们知道, 给一个复变函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  等价于给两个二元实变函数, 也可以直接把  $f$  看成是  $x, y$  的二元实变量复值函数.
- 我们将从  $f$  的偏导数来推导出  $f$  可导的充要条件.

## 可导的等价刻画: 形式推导

- 为了简便我们用  $u_x, u_y, v_x, v_y$  等记号表示偏导数.
- 设  $f(z)$  在  $z$  处可导, 则

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

- 令  $\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x$ , 我们得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta x) - f(z)}{\Delta x} = u_x + iv_x.$$

- 令  $\Delta x = 0, \Delta z = \Delta yi$ , 我们得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta yi) - f(z)}{\Delta yi} = -i(u_y + iv_y).$$

- 因此  $u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y)$ , 即  $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$

- 反过来, 假设  $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$ .
- 那么由全微分公式

$$du = u_x dx + u_y dy = u_x dx - v_x dy,$$

$$dv = v_x dx + v_y dy = v_x dx + u_x dy,$$

$$\begin{aligned} df &= d(u + iv) = (u_x + iv_x) dx + (-v_x + iu_x) dy \\ &= (u_x + iv_x) d(x + iy) \\ &= (u_x + iv_x) dz = (v_y - iu_y) dz. \end{aligned}$$

- 故  $f(z)$  在  $z$  处可导, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

## 定理

- 函数  $f(z)$  在  $z$  可导当且仅当在  $z$  点  $u_x, u_y, v_x, v_y$  存在且满足柯西-黎曼方程 (C-R 方程)

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

- 此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iv_y.$$





- 具体计算时, 我们先判断  $f(z)$  的  $u, v$  的偏导数是否存在.
- 然后把偏导数按次序依次写出

$$u_x = \cdots, \quad u_y = \cdots$$

$$v_x = \cdots, \quad v_y = \cdots$$

- 列出 C-R 方程求出所有的可导点.
- 如果一个点的一个邻域内都可导, 那么这个点是解析点.
- 如果一个区域  $D$  内所有点都可导, 那么区域  $D$  是解析区域.
- 当然, 如果能用求导法则直接说明  $f(z)$  在  $D$  内处处可导, 则也可以知道  $f(z)$  是  $D$  内的解析函数.

- 注意到  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ , C-R 方程等价于

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (u_x - v_y) + i(v_x + u_y) = 0.$$

- 所以我们可以把  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  叫做 C-R 方程.

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- **例** 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:

- (1)  $f(z) = \bar{z}$ .

- **解** 由  $u = x, v = -y$  可知

$$\begin{aligned}u_x &= 1, & u_y &= 0, \\v_x &= 0, & v_y &= -1.\end{aligned}$$

- 因为  $u_x = 1 \neq v_y = -1$ , 所以该函数处处不可导, 处处不解析.
- 或者: 由于  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$ , 因此该函数处处不可导, 处处不解析.
- 不过这种方法由于课本上没有, 所以考试的时候最好只把它作为一种验算手段.

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- **例** 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (2)  $f(z) = z \operatorname{Re} z$ .
- **解** 由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

$$\begin{aligned}u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\v_x &= y, & v_y &= x.\end{aligned}$$

- 由  $2x = x, 0 = -y$  可知只有  $x = y = 0, z = 0$  满足 C-R 方程.
- 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0) = (u_x + iv_x)\Big|_{z=0} = 0.$$

- 也可从  $f(z) = \frac{z(z + \bar{z})}{2}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{2}$  看出.


## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- **例** 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (3)  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ .
- **解** 由  $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$  可知

$$\begin{aligned}u_x &= e^x \cos y, & u_y &= -e^x \sin y, \\v_x &= e^x \sin y, & v_y &= e^x \cos y.\end{aligned}$$

- 因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z).$$

- 实际上, 这个函数就是复变量的指数函数  $e^z$ . 
- **练习** 求  $f(z) = 3x^2 + y^2 - 2xyi$  的可导点和解析点.
- **解** 可导点为  $\operatorname{Re} z = 0$ , 没有解析点.

## 例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- **例** 设函数  $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$  在复平面内处处解析. 求实常数  $a, b, c, d$  以及  $f'(z)$ .
- **解** 由于

$$\begin{aligned}u_x &= 2x + ay, & u_y &= ax + 2by, \\v_x &= 2cx + dy, & v_y &= dx + 2y,\end{aligned}$$

- 因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$

$$a = d = 2, \quad b = c = -1,$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2y + i(-2x + 2y) = (2 - 2i)z. \quad \blacksquare$$

## 例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

- **例** 如果  $f'(z)$  在区域  $D$  内处处为零, 则  $f(z)$  在  $D$  内是一常数.

- **证明** 由于

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$

- 因此  $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ ,  $u, v$  均为常数, 从而  $f(z) = u + iv$  是常数.

- 类似地可以证明, 若  $f(z)$  在  $D$  内解析, 则下述条件等价:

$f(z)$  是一常数,

$|f(z)|$  是一常数,

$\operatorname{Re} f(z)$  是一常数,

$v = u^2$ ,

$f'(z) = 0$ ,

$\arg f(z)$  是一常数,

$\operatorname{Im} f(z)$  是一常数,

$u = v^2$ .

## 例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

- **例** 如果  $f(z)$  解析且  $f'(z)$  处处非零, 则曲线族  $u(x, y) = c_1$  和曲线族  $v(x, y) = c_2$  互相正交.
- **证明** 由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零.
- 对  $u(x, y) = c_1$  使用隐函数求导法则得

$$u_x dx + u_y dy = 0,$$

- 从而  $(u_x, -u_y)$  是该曲线在  $z$  处的非零切向量.
- 同理  $(v_x, -v_y)$  是  $v(x, y) = c_2$  在  $z$  处的非零切向量.
- 由于

$$u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0,$$

- 因此二者正交.





- 当  $f'(z_0) \neq 0$  时, 经过  $z_0$  的两条曲线  $C_1, C_2$  的夹角和它们的像  $f(C_1), f(C_2)$  在  $f(z_0)$  处的夹角总是相同的.
- 这种性质被称为保角性.
- 这是因为  $df = f'(z_0) dz$ .
- 局部来看  $f$  把  $z_0$  附近的点以  $z_0$  为中心放缩  $f'(z_0)$  倍并逆时针旋转  $\arg f'(z_0)$ .
- 上述例子是该结论关于  $w$  复平面上曲线族  $u = c_1, v = c_2$  的一个特殊情形.

- 最后我们来看复数在求导中的应用.
- **例** 求  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  的  $n$  阶导数.
- **解** 设  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ , 则它在除  $z = \pm i$  外处处解析.
- 当  $z = x$  为实数时,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right]^{(n)} \\ &= \frac{i}{2} \cdot (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right] \\ &= (-1)^{n+1} n! \operatorname{Im} \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n! \sin[(n+1) \operatorname{arccot} x]}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- ① 解析函数的概念
- ② 函数解析的充要条件
- ③ 初等函数

- 我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数.
- 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复.
- 现在我们来定义指数函数.
- 指数函数有多种等价的定义方式:
  - (1)  $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$ ; (欧拉恒等式)
  - (2)  $\exp z$  是唯一的一个处处解析的函数, 使得当  $z = x \in \mathbb{R}$  时,  $\exp z = e^x$ ;
  - (3)  $\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ ;
  - (4)  $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$

- 有些人会从  $e^x, \cos x, \sin x$  的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

- 形式地带入得到欧拉恒等式  $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ .
- 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明.

- 我们来证明 (1) 和 (3) 是一回事.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \text{ 型不定式}) \\ &= \exp \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left( \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.\end{aligned}$$

- 不妨设  $n > |z|$ , 这样  $1 + \frac{z}{n}$  落在右半平面,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \arg \left( 1 + \frac{z}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \arctan \frac{y}{n+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ny}{n+x} = y.$$

- 故  $\exp z = e^x (\cos y + i \sin y)$ .

- 指数函数

$$\exp z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

- 我们已经知道  $\exp z$  是一个处处解析的函数, 且  $(\exp z)' = \exp z$ .
- 不难看出
  - $\exp z \neq 0$ ;
  - $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$ , 即  $\exp z$  周期为  $2\pi i$ ;
  - $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$ .
- 为了方便, 我们也记  $e^z = \exp z$ .

- 指数函数将直线族  $\operatorname{Re} z = c$  映为圆周族  $|w| = e^c$ , 将直线族  $\operatorname{Im} z = c$  映为射线族  $\operatorname{Arg} w = c$ .
- **例** 求函数  $f(z) = \exp \frac{z}{5}$  的周期.
- **解** 由于  $\exp z$  的周期是  $2\pi i$ , 因此

$$f(z) = \exp \frac{z}{5} = \exp \left( \frac{z}{5} + 2\pi i \right) = \exp \frac{z + 10\pi i}{5} = f(z + 10\pi i),$$

- 所以  $f(z)$  的周期是  $10\pi i$ . ■



- 对数函数定义为指数函数的反函数.
- 设  $z \neq 0$ , 满足方程  $e^w = z$  的  $w = f(z)$  被称为对数函数, 记作  $w = \text{Ln } z$ .
- 为什么我们用大写的  $\text{Ln}$  呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支.
- 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写.
- 例如  $\text{Arg } z$  和  $\arg z$ .

- 设  $e^w = z = re^{i\theta} = \exp(\ln r + i\theta)$ , 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 所以

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

- 它是一个多值函数.
- 我们取它的主值为

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

- 那么  $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$ .
- 对于每一个  $k$ ,  $\ln z + 2k\pi i$  都给出了  $\operatorname{Ln} z$  的一个单值分支.
- 特别地, 当  $z = x > 0$  是正实数时,  $\ln z$  就是实变的对数函数.

## 典型例题: 对数函数的计算

- **例** 求  $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$  以及它们的主值.
- **解**  $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i$ , 主值就是  $\ln 2$ .

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k + 1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 主值是  $\pi i$ . ■
- **例** 解方程  $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$ .
- **解** 由于  $1 + \sqrt{3}i = 2 \exp \frac{\pi i}{3}$ , 因此

$$z = \operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right) \pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

## 典型例题: 对数函数的计算

- **例** 求  $\text{Ln}(-2 + 3i)$ ,  $\text{Ln}(3 - \sqrt{3}i)$ ,  $\text{Ln}(-3)$ .
- **解**

$$\begin{aligned}\text{Ln}(-2 + 3i) &= \ln |-2 + 3i| + i \text{Arg}(-2 + 3i) \\ &= \frac{1}{2} \ln 13 + \left( -\arctan \frac{3}{2} + \pi + 2k\pi \right) i, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ln}(3 - \sqrt{3}i) &= \ln |3 - \sqrt{3}i| + i \text{Arg}(3 - \sqrt{3}i) \\ &= \ln 2\sqrt{3} + \left( -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) i = \ln 2\sqrt{3} + \left( 2k - \frac{1}{6} \right) \pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\text{Ln}(-3) = \ln(-3) + i \text{Arg}(-3) = \ln 3 + (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

- **练习** 求  $\ln(-1 - \sqrt{3}i)$ . **答案**  $\ln 2 - \frac{2\pi i}{3}$ .

- 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

- 注意  $\operatorname{Ln} z$  不能换成  $\ln z$ , 原因乘除的主辐角不一定等于主辐角的加减.
- 同理, 当  $|n| \geq 2$  时,  $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$  也不成立.

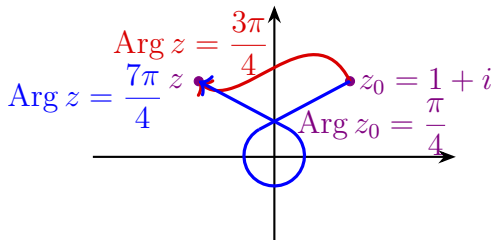
- 设  $z_0 < 0$  是负实数.
- 由于

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(z_0 + yi) = \ln |z_0| + \pi, \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \ln(z_0 + yi) = \ln |z_0| - \pi,$$

- 因此  $\ln z$  在负实轴和零处不连续.
- 而在其它地方  $-\pi < \arg z < \pi$ ,  $\ln z$  是  $e^z$  在区域  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$  上的单值反函数, 从而  $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ ,  $\ln z$  解析.
- 对于其它分支  $\ln z + 2k\pi i$ , 性质也是类似的.

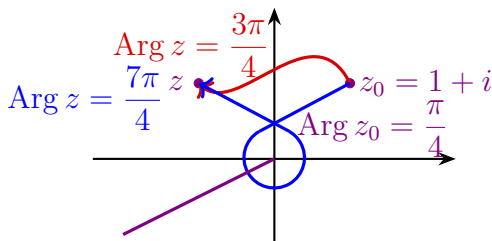
## 多值函数的单值化与支点 \*

- 我们以辐角函数为例简说明为什么要去掉这样一条线.
- 为了确定  $\text{Arg } z$  的一个单值分支, 固定  $\text{Arg } z_0$  的一个值.
- 然后让  $z$  从  $z_0$  出发连续地变化, 并让  $\text{Arg } z$  也连续地变化.
- 当  $z$  沿着原点逆时针绕一圈时,  $\text{Arg } z$  会增加  $2\pi$ .
- 当  $z$  沿着  $\infty$  逆时针绕一圈时, 也就是沿着原点顺时针绕一圈时,  $\text{Arg } z$  会减少  $2\pi$ .



## 多值函数的单值化与支点 \*

- 而在其它点附近逆时针绕一圈时,  $\text{Arg } z$  不会改变.
- 为了避免  $\text{Arg } z$  值发生改变, 把  $0$  和  $\infty$  用一条线连起来.
- 那么在复平面去掉这条线得到的区域上,  $\text{Arg } z$  就可以被连续地单值化了.





- 设  $a$  是一非零复数, 定义幂函数

$$\begin{aligned}w &= z^a = \exp(a \operatorname{Ln} z) \\&= \exp\left[a \ln |z| + ia(\arg z + 2k\pi)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

- 我们总假设  $z \neq 0$ .
- 根据  $a$  的不同, 这个函数有着不同的性质.
- 当  $a$  为整数时, 因为  $\exp(2ak\pi i) = 1$ , 所以  $w = z^a$  是单值的.
- 此时

$$z^a = |z|^a \exp(ia \arg z)$$

就是我们之前定义的方幂.

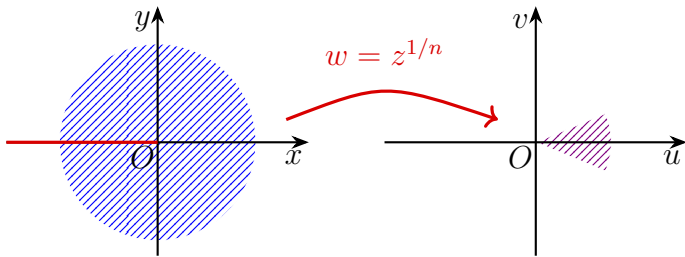
- 它在  $\mathbb{C} - \{0\}$  上处处解析.

## 幂函数的性质: $a$ 为分数时

- 当  $a = p/q$  为分数,  $p, q$  为互质的整数且  $q > 1$  时,

$$z^{p/q} = |z|^{p/q} \exp \left[ \frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q} \right], \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

- 具有  $q$  个值.
- 去掉负实轴和  $0$  之后, 它的主值  $w = \exp(a \ln z)$  是处处解析的.
- 当  $a = 1/n$  时,  $z^a$  就是方根  $\sqrt[n]{z}$ .



## 幂函数的性质: $a$ 为其他情形

- 对于其它的  $a$ ,  $z^a$  具有无穷多个值.
- 这是因为此时当  $k \neq 0$  时,  $2k\pi ai$  不可能是  $2\pi i$  的整数倍. 从而不同的  $k$  得到的是不同的值.
- 去掉负实轴和  $0$  之后, 它的主值

$$w = \exp(a \ln z)$$

- 也是处处解析的.
- 对于幂函数的主值, 或者任意固定一个分支

$$\text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i, \text{ 我们总有 } (z^a)' = \frac{az^a}{z}.$$

## 典型例题: 幂函数的计算

- 例 求  $1^{\sqrt{2}}$  和  $i^i$ .
- 解

$$\begin{aligned}1^{\sqrt{2}} &= \exp(\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1) = \exp(\sqrt{2} \cdot 2k\pi i) \\&= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i^i &= \exp(i \operatorname{Ln} i) = \exp\left[i \cdot \left(2k + \frac{1}{2}\right) \pi i\right] \\&= \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

- 练习 求  $(-1)^i$ . 答案  $\exp(2k+1)\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

- 注意  $e^a$  作为指数函数  $f(z) = e^z$  在  $a$  处的值和作为  $g(z) = z^a$  在  $e$  处的值是**不同**的.
- 因为后者在  $a \notin \mathbb{Z}$  时总是多值的.
- 前者实际上是后者的主值.
- 为避免混淆, 以后我们总**默认**  $e^a$  **表示指数函数**  $\exp a$ .

- 我们知道

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

对于任意实数  $y$  成立, 我们将其推广到复数情形.

- 定义余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

- 那么欧拉恒等式  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  对任意复数  $z$  均成立.

## 三角函数的性质

- 不难得到

$$\begin{aligned}\cos(x + iy) &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \\ \sin(x + iy) &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,\end{aligned}$$

- 其中  $\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cos iy$ ,  $\operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = -i \sin iy$ .
- 当  $y \rightarrow \infty$  时,  $\sin iy = i \operatorname{sh} y$  和  $\cos iy = \operatorname{ch} y$  都  $\rightarrow \infty$ .
- 因此  $\sin z$  和  $\cos z$  并不有界. 这和实变情形完全不同.
- 容易看出  $\cos z$  和  $\sin z$  的零点都是实数. 于是我们可类似定义其它三角函数

$$\begin{aligned}\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, & \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}, z \neq k\pi, \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, & \csc z &= \frac{1}{\sin z}, z \neq k\pi.\end{aligned}$$

- 这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

- 且在定义域范围内是处处解析的.
- 三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$



- 类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i.$$

- 它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.
- $\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$  的周期是  $2\pi i$ ,  $\operatorname{th} z$  的周期是  $\pi i$ .

## 反三角函数和反双曲函数

- 设  $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$ , 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值).}$$

- 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 显然它是多值的. 同理, 我们有:
- 反正弦函数  $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反正切函数  $\operatorname{Arctan} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$
- 反双曲余弦函数  $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反双曲正弦函数  $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$
- 反双曲正切函数  $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}$ .