问题与征解

问题

问题 21(供题者：上海数学中心　江辰)　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶复矩阵且 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都为 1. 记 $P_{\boldsymbol{A}}(m)=\det\left(\sum_{k=0}^{m-1}(\boldsymbol{A}^{*})^{k}\boldsymbol{A}^{k}\right)$，其中 $\boldsymbol{A}^{*}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置.

(i) 证明：$P_{\boldsymbol{A}}(m)$是以 m 为变量的多项式；

(ii) 证明：$P_{\boldsymbol{A}}(m)$的阶数 $\deg P_{\boldsymbol{A}}(m)$是 $\boldsymbol{A}$ 的相似不变量；

(iii) 计算 $\deg P_{\boldsymbol{A}}(m)$，用 $\boldsymbol{A}$ 的若当块的阶数表示.

问题 22(供题者：吉林大学　周鸣君)　设 $n\geqslant 2$，$\Omega\in\mathbb{R}^{n}$ 是有界区域，

$$p(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^{T}\boldsymbol{x}+c,$$

其中，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是 $n\times n$ 阶实矩阵，$\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是 n 维列向量，c 是常数. 若 $a_{11}a_{22}<a_{12}a_{21}$，且在 Ω 的边界$\partial\Omega$ 上有 $p\leqslant 0$ 成立. 证明：在 Ω 内恒有 $p\leqslant 0$.

解答

问题 11(供题者：复旦大学　严金海)　设 f 为$\mathbb{R}$上的非线性连续函数，称 $x_0\in\mathbb{R}$为 f 的严格凹支撑点，若存在 $k\in\mathbb{R}$，使得 $f(x)>f(x_0)+k(x-x_0)$，$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$. 类似地，称 $x_0\in\mathbb{R}$为 f 的严格凸支撑点，若存在 $k\in\mathbb{R}$，使得 $f(x)<f(x_0)+k(x-x_0)$，$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$. 设 f 有两条斜渐近线 $y=k_ix+b_i$，$k_i,b_i\in\mathbb{R}$，$i=1,2$. $\lim\limits_{(-1)^{i}x\to+\infty}(f(x)-(k_ix+b_i))=0$，$i=1,2$. 问两条渐近线满足什么条件时，$f$ 必有严格凹支撑点或严格凸支撑点？为什么？

解　本解答由张神星(合肥工业大学副研究员，E-mail：zhangshenxing@hfut.edu.cn)提供.

(i)当 $k_1<k_2$时，f 必有严格凹支撑点，无严格凸支撑点；

(ii)当 $k_1>k_2$时，f 必有严格凸支撑点，无严格凹支撑点；

(iii)当 $k_1=k_2$时，各种情形都有可能.

不难看出，x_0是 f 的严格凹支撑点当且仅当存在 k 使得

$$f(x)-kx>f(x_0)-kx_0,\forall x\neq x_0.$$

换言之，x_0是函数 $g_k(x)=f(x)-kx$ 的唯一最小值点. 凸的情形类似.

(i)设 $k_1<k_2$. 对于 $k_1<k<k_2$，

$$\lim_{x\to-\infty}g_k(x)=\lim_{x\to-\infty}(k_1x+b_1-kx)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}g_k(x)=\lim_{x\to+\infty}(k_2x+b_2-kx)=+\infty.$$

由于 g_k是连续函数，因此它存在最小值.

我们断言，存在 $k_1<k<k_2$使得 g_k的最小值点是唯一的. 若不然，设 $c_k<d_k$均是 g_k的最小值点. 设 $k_1<k<k'<k_2$，设 c 是 $g_{k'}$的最小值点，则

$$f(d_k)-kd_kf(c)-kc,f(c)-k'cf(d_k)-k'd_k,$$

于是 $k'(d_k-c)f(d_k)-f(c)k(d_k-c)$，故 cd_k. 因此 $c_k<d_k\,c_{k'}<d_{k'}$. 换言之，开区间 (c_k,d_k) 两两不交. 设有理数 $r_k\in(c_k,d_k)$. 由于 k 有不可数无穷多，而有理数只有可数多个，因此这些有理数有

注：读者在提供问题解答时，请先提供印刷体的版本，并注明单位、姓名和身份(教师、本科生或研究生等). 解答被选用后需提供 word 版本.

相同的，矛盾！故存在 $k_1<k<k_2$ 使得 $g_k(x)$ 的最小值点是唯一的，相应的最小值点就是 $f(x)$ 的严格凹支撑点.

当 $k>k_1$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty}g_k(x)=+\infty$. 当 $k<k_2$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}g_k(x)=+\infty$. 因此对任意的 k，$g_k(x)$ 均不存在最大值，从而 f 没有严格凸支撑点.

(ii)此时 $-f$ 满足(i)中的条件，从而易证.

(iii)由(i)最后一段论述可知若 f 有严格凹或凸支撑点，则对应的 k 只能是 $k_1=k_2$. 由此不难得出：

$f_1(x)=k_1x+\arctan x$，无严格凹和凸支撑点.

$f_2(x)=\begin{cases}k_1x, & |x|>\pi,\\ k_1x+\sin x, & |x|\leqslant\pi\end{cases}$ 有严格凹支撑点 $\frac{\pi}{2}$， 严格凸支撑点 $-\frac{\pi}{2}$.

$f_3(x)=\begin{cases}k_1x, & |x|>\frac{\pi}{2},\\ k_1x+\cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 有严格凸支撑点 0，无严格凹支撑点.

$f_4(x)=\begin{cases}k_1x, & |x|>\frac{\pi}{2},\\ k_1x-\cos x, & |x|\leqslant\frac{\pi}{2}\end{cases}$ 有严格凹支撑点 0，无严格凸支撑点.

供题者点评 解答正确，其将单调性与可列性结合得到唯一性的方法非常巧妙.