

第三章 复变函数的积分

3.1 复变函数积分的概念

作业 1. 设 C 为正向圆周 $|z| = 2$, 求 $\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|} dz$.

作业 2. 求 $\int_C z^2 dz$, 其中 C 为:

(1) 从 0 到 $3+i$ 的直线段;

(2) 从 0 到 3 再到 $3+i$ 的折线段;

3.2 柯西-古萨基本定理和复合闭路定理

作业 3. 试用观察法得出下列积分的值, 并说明为什么, 其中 $C: |z| = 1$.

(1) $\oint_C \frac{dz}{z-2};$

(2) $\oint_C \frac{dz}{\cos z};$

(3) $\oint_C \frac{e^z}{(z-2i)^2} dz;$

(4) $\oint_C e^z \sin z dz;$

(5) $\oint_C \frac{1}{\bar{z}} dz;$

(6) $\oint_C (|z| + e^z \cos z) dz.$

作业 4. 设 C 为正向圆周 $|z| = 4$, 求 $\oint_C \frac{\sin z}{|z|^2} dz$.

3.3 原函数和不定积分

作业 5. (2021 年 B 卷) 设 C 为从原点到 $1+i$ 的直线段, 求 $\int_C (z+1)^2 dz$.

作业 6. (2022 年 A 卷) 设 C 为从 i 到 $i-\pi$ 再到 $-\pi$ 的折线, 求 $\int_C \cos^2 z dz$.

作业 7. (2020 年 A 卷) 设 C 为从原点到 2 再到 $2+i$ 的折线段, 求 $\int_C z^2 dz$.

作业 8. 求 $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z} dz$.

作业 9. 求 $\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z \, dz$.

作业 10. 求 $\int_0^i (z-i)e^{-z} \, dz$.

3.4 柯西积分公式

作业 11. 选择题: (2021 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|\zeta| = 2$, $\int_C f(z) = \oint \frac{\sin \zeta}{\zeta - z} \, dz$, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) =$ ().

(A) πi

(B) $-\pi i$

(C) 0

(D) $2\pi i$

作业 12. 填空题: (2021 年 A 卷) 设 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析且不为零, C 为 D 内任何一条简单闭曲线, 则 $\oint_C \frac{f''(z) + 2f'(z) + f(z)}{f(z)} \, dz =$ _____.

作业 13. 填空题: 设 C 为正向圆周 $|z| = 1$, 则 $\oint_C \bar{z} \, dz =$ _____.

作业 14. 填空题: (2022 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|z| = 2$, 则 $\oint_C \left(\frac{\bar{z}}{z}\right) \, dz =$ _____.

作业 15. 设 C 为以 $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{6}{5}i$ 为顶点的菱形, 求 $\oint_C \frac{dz}{z-i}$.

作业 16. (2021 年 B 卷) 设 C 为正向圆周 $|z| = 2$, 求 $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)} \, dz$.

作业 17. (2022 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|z-3| = 4$, 求 $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2} \, dz$.

作业 18. 设 C_1 为正向圆周 $|z| = 2$, C_2^- 为负向圆周 $|z| = 3$, $C = C_1 + C_2^-$ 为复合闭路, 求 $\oint_C \frac{\cos z}{z^3} \, dz$.

作业 19. 设 C 为正向圆周 $|z| = 2$, 求 $\oint_C \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} \, dz$.

作业 20. 设 C 为正向圆周 $|z| = 1$, 求 $\oint_C \frac{\cos z}{z^{2023}} \, dz$.

作业 21. 设 C 为正向圆周 $|z| = 1$, 求 $\oint_C \frac{\ln(z+2)}{(z-1)^3} \, dz$.

作业 22. 设 C 为正向圆周 $|z| = 2$, $f(z) = \oint_C \frac{\zeta^3 + \zeta + 1}{(z-\zeta)^2}$. 求 $f'(1+i)$ 和 $f'(4)$.

作业 23. 设 C_1 和 C_2 为两条分离的闭路, 证明

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{C_1} \frac{z^2 \, dz}{z - z_0} + \oint_{C_2} \frac{\sin z \, dz}{z - z_0} \right] = \begin{cases} z_0^2, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_1 \text{ 内时,} \\ \sin z_0, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_2 \text{ 内时.} \end{cases}$$

作业 24. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内任意一条闭路, 且 C 的内部完全包含在 D 中. 如果 $f(z) = g(z)$ 在 C 上所有的点处成立, 证明在 C 内部所有点处 $f(z) = g(z)$ 也成立.

作业 25. (2021 年 B 卷) 请谈一谈复积分与实积分的区别.

3.5 解析函数与调和函数的关系

作业 26. (2021 年 A 卷) 下列命题中, 正确的是 ().

- (A) 设 v_1, v_2 在区域 D 内均为 u 的共轭调和函数, 则必有 $v_1 = v_2$
- (B) 解析函数的实部是虚部的共轭调和函数
- (C) 以调和函数为实部与虚部的函数是解析函数
- (D) 若 $f(z) = u + iv$ 在区域 D 内解析, 则 u_x 为 D 内的调和函数

作业 27. (2022 年 A 卷) 已知 $v(x, y) = x^3 + y^3 - axy(x + y)$ 为调和函数, 求参数 a 以及解析函数 $f(z)$ 使得 $v(x, y)$ 是它的虚部.

作业 28. (2021 年 A 卷) 已知 $f(z) = y^3 + ax^2y + i(bx^3 - 3xy^2)$ 为解析函数, a, b 为实数, 求参数 a, b 和 $f'(z)$.

作业 29. 设 u 为区域 D 内的调和函数, $f(z) = u_x - iu_y$. 那么 $f(z)$ 是不是 D 内的解析函数? 为什么?

作业 30. 证明一对共轭调和函数的乘积仍为调和函数.

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 31. 设 $f(z) = u + iv$. 当 u, v 是二元可微函数时, 我们也可以使用格林公式来计算 $f(z)$ 绕闭路的积分.

(1) 设 C 是一条光滑或逐段光滑的闭路, D 是其内部区域. 函数 $u(x, y), v(x, y)$ 在 D 及其边界上连续可微. 证明

$$\oint_C f(z) dz = - \iint_D (v_x + u_y) dx dy + i \iint_D (u_x - v_y) dx dy,$$

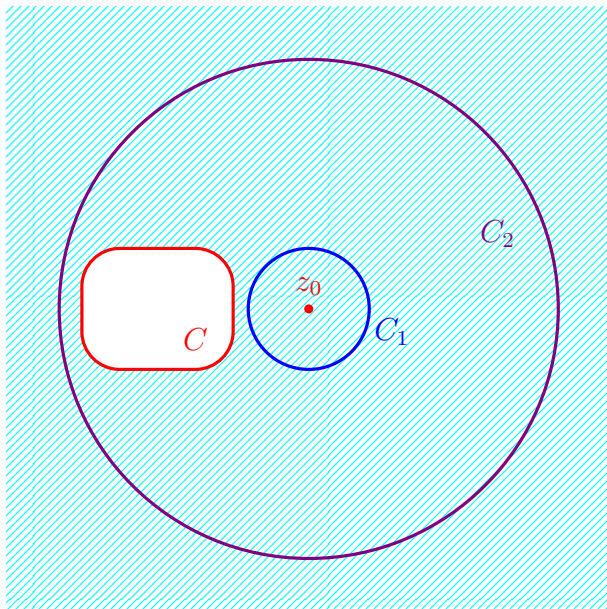
并由此计算 $\oint_{|z|=1} \operatorname{Re} z dz$.

(2) 证明

$$\oint_C f(z) dz = - \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dz d\bar{z} = 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy,$$

并由此计算 $\oint_{|z|=1} \operatorname{Re} z \, dz$.

作业 32. 设 $f(z)$ 在闭路 C 及其外部区域 D 解析, $z_0 \in D$. 是否有类似的柯西积分公式? 我们假设 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$ 存在.



- (1) 选取以 z_0 为圆心的圆 C_1, C_2 如图所示. 利用长大不等式证明 $\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = A$.
- (2) 利用复合闭路定理证明 $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz = A - f(z_0)$.