



3.3 高阶导数

- 沿直线运动的物体的速度 $v(t)$ 是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的变化率, 即 $v(t) = s'(t)$. 而加速度 $a(t)$ 是速度 $v(t)$ 对时间 t 的变化率, 即这种导数称为 $s(t)$ 对 t 的二阶导数.
- **例** 一物体沿单位圆逆时针匀速运动, 其位置函数为 $(s_1, s_2) = (\cos t, \sin t)$, 则速度为 $(v_1, v_2) = (-\sin t, \cos t)$, 加速度为 $(a_1, a_2) = (-\cos t, -\sin t)$, 因此该物体受力 $F = ma = (-m \cos t, -m \sin t)$, 该力为指向圆心的大小固定的力, 被称为**向心力**.
- 对导函数再讨论其可导性或再求导数, 甚至可以对导函数的导函数继续讨论下去, 则就是本节所要介绍的高阶导数.



- **定义** 如果函数 $y = f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在点 x 处可导, 就称 $y = f(x)$ 在 x 处**二阶可导**. $f'(x)$ 在点 x 处的导数称为函数 $y = f(x)$ 在 x 点处的**二阶导数**, 记作 $f''(x)$, y'' , $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 或 $\frac{d^2 f}{dx^2}$, 即

$$f''(x) = [f'(x)]' \text{ 或 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

- 此处的分母表示 $(dx)^2$, 即 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \left(\frac{d}{dx} \right)^2 y$.
- 极限形式为 $f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$.
- 类似地, 我们可以定义**三阶导数** $f'''(x)$, y''' , $\frac{d^3 y}{dx^3}$ 或 $\frac{d^3 f}{dx^3}$, **四阶导数** $f^{(4)}(x)$, $y^{(4)}$, $\frac{d^4 y}{dx^4}$ 或 $\frac{d^4 f}{dx^4}$ 等等.



- 一般地, $y = f(x)$ 的 $(n - 1)$ 阶导数的导数称为 $f(x)$ 的 n 阶导数, 记作 $f^{(n)}(x)$, $y^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$ 或 $\frac{d^n f}{dx^n}$, 即

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' \quad \text{或} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right).$$

- 二阶及二阶以上的导数称为高阶导数, $f'(x)$ 称为一阶导数. 有时候为了方便也称 $f(x)$ 为零阶导数, 即 $f^0(x) = f(x)$.
- 注意, 低阶导数存在不能推出更高阶的导数存在.
- 例如 $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ 在 $x = 0$ 处可导, 但导函数 $f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x = 0$ 处不可导, 即 $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$ 在 $x = 0$ 处不是二阶可导的. 实际上 $x^{n+\frac{2}{3}}$ 在 $x = 0$ 处 n 阶可导但不是 $(n + 1)$ 阶可导.



- 一般函数的高阶导数难以求得, 我们本节主要介绍三种情形的高阶导数.
- (1) 多项式/幂函数/对数函数
- 例 求 $y = 2x^3 - x^2 + 5x + 1$ 的各阶导数.
- 解 $y' = 6x^2 - 2x + 5, y'' = 12x - 2, y''' = 12$.
- 当 $n \geq 4$ 时, $y^{(n)} = 0$.
- 从这个例子中可以看出, 多项式函数任意阶可导, 且每次求导后仍然为多项式, 次数降低一次直至为 0.
- 一般地, 若 $y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_m \neq 0$), 则

$$y^{(n)} = \begin{cases} a_m m(m-1) \cdots (m-n+1) x^{m-n} + \cdots + a_n n!, & n < m, \\ a_m m!, & n = m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$



- **例** 求 $y = x^\mu$ (μ 为常数)的各阶导数.
- **解** $y' = \mu x^{\mu-1}$, $y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$, ...
- 一般地, $y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- 如果 μ 是正整数则情形同多项式, 上式亦成立.
- 特别地, 我们有 $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$
- **结论** $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$. 如果 $F'(x) = f(x)$, 则 $F^{(n)} = f^{(n-1)}$.
- $[f(x+C)]^{(n)} = f^{(n)}(x+C)$, $f(\lambda x)^{(n)} = \lambda^n f^{(n)}(\lambda x)$.



- 由此可知

$$\left[\frac{1}{(x+C)^2} \right]^{(n)} = - \left(\frac{1}{x+C} \right)^{(n+1)} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x+C)^{n+2}},$$

$$[\ln|x+C|]^{(n)} = \left(\frac{1}{x+C} \right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x+C)^n}.$$

- 这意味着特别地,

$$[\ln(C+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x+C)^n}, \quad [\ln(C-x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x-C)^n}.$$



- 求一个函数的 n 阶导数时, 可以先求一阶导数、二阶导数、三阶导数, 根据其中的规律, 归纳得到函数的 n 阶导数. 这种求函数 n 阶导数的方法我们称为**直接法**.
- 利用直接法可以求一些简单函数的高阶导数. 对于复杂的函数, 用直接法很难求出 n 阶导数. 下面介绍间接法, 为此先介绍**高阶导数的运算法则**.

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}, \quad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad (\text{莱布尼兹公式}).$$

- 特别地,

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + 2uv'', \quad (uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + v'''.$$



- 利用高阶导数运算法则, 以及常用高阶导数公式, 通过适当的函数变形求出函数 n 阶导数的方法称为**间接法**.
- **例** 函数 $y = \ln(1 - 2x)$ 在点 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
- **解** 由于 $y = \ln 2 + \ln \left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln 2 + \ln \left|x - \frac{1}{2}\right|$, 因此

$$y^{(n)} = \left[\ln \left| x - \frac{1}{2} \right| \right]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^n},$$

$$y^{(n)}(0) = -2^n (n-1)!.$$



• 例 设 $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 则 $y^{(99)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

• 解 由于 $y = \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1+x)] = \frac{1}{2} [\ln|x-1| - \ln|x+1|]$, 因此

$$\begin{aligned} y^{(99)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^{100} 98!}{(x-1)^{99}} - \frac{(-1)^{100} 98!}{(x+1)^{99}} \right] \\ &= \frac{98!}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^{99}} - \frac{1}{(x+1)^{99}} \right], \\ y^{(99)}(0) &= -98!. \end{aligned}$$



- 例 求 $y = \frac{x}{1-x^2}$ 的各阶导数.
- 解 由于 $y = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$, 因此

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{x-1} \right)^{(n)} + \left(\frac{1}{x+1} \right)^{(n)} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1} n!}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$



- 例 求 $y = \frac{1}{x^2-1}$ 的各阶导数.
- 解 由于 $y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$, 因此

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{x-1} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+1} \right)^{(n)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$



- 对于一般的有理函数, 我们是不是可以类似地求得任意阶导数呢?
- 实际上是可以的, 但一般的情形过于复杂, 我们只考虑 $g(x)$ 可以分解为一些一次多项式的乘积的情形.

- 对于非零多项式 $f(x), g(x)$, 存在多项式 $q(x), r(x)$ 使得

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \deg r < \deg g.$$

- 这被称为多项式的带余除法. 如此, 有理函数 $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$, 其中多项式 $q(x)$ 的各阶导数容易求得, 而 $\frac{r(x)}{g(x)}$ 可以表为一些形如 $\frac{a}{(x+b)^k}$ 的有理函数之和, 从而可以求得它的导数.



• 例 设 $y = \frac{x^5}{(x-1)^2(x+1)}$. 由于

$$y = x^2 + x + 2 + \frac{2x^2 - x - 2}{(x-1)^2(x+1)} = x^2 + x + 2 + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{7}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2},$$

因此 $n \geq 3$ 时,

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+1} \right)^{(n)} + \frac{7}{4} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{(n)} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{(n+1)} \\ &= \frac{1}{4} \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{7}{4} \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(x-1)^{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{4} \left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{7(x-1) - 2(n+1)}{(x-1)^{n+2}} \right]. \end{aligned}$$



• 例 设 $y = \arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$, 其中 $n > 1$.

• 解 由于 $y' = \frac{1}{1+x^2}$, 因此 $(1+x^2)y' = 1$.

• 两边同时对 x 求 $(n-1)$ 阶导数, 则

$$(1+x^2)y^{(n)} + 2(n-1)xy^{(n-1)} + (n-1)(n-2)y^{(n-2)} = 0.$$

• 令 $x = 0$, 则 $y^{(n)} = -(n-1)(n-2)y^{(n-2)}$.

• 由于 $y(0) = 0, y'(0) = 1$, 因此

$$y^{(n)} = \begin{cases} (-1)^m (2m)!, & n = 2m + 1, \\ 0, & n = 2m, \end{cases} \quad m = 1, 2, \dots$$



- 如果允许使用复数的话, $y' = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right),$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{2i} \left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n} \right]$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}(n-1)! \sin \left(n \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}.$$

- 类似地,

$$(e^x \cos x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos \left(x + \frac{n\pi}{4} \right).$$



- (2) 指数函数

- 例 求 $y = xe^x$ 的各阶导数.

- 解 $y' = x' \cdot e^x + xe^x = (1 + x)e^x,$

- $y'' = (1 + x)' \cdot e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x.$

- 归纳可知 $y^{(n)} = (x + n)e^x.$

- 例 求 $y = e^{\lambda x}$ (λ 为常数)的各阶导数.

- 解 $y' = \lambda e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda f'(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}.$

- 归纳可知 $y^{(n)} = (e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}.$ 特别地, $(e^x)^{(n)} = e^x.$



- 例 求 $y = x^2 e^{-x}$ 的 10 阶导数.
- 解 由莱布尼兹公式,

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= (x^2 e^{-x})^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^2)^{(k)} (e^{-x})^{(10-k)} \\ &= x^2 (e^{-x})^{(10)} + C_{10}^1 \cdot 2x (e^{-x})^{(9)} + C_{10}^2 \cdot 2 (e^{-x})^{(8)} \\ &= x^2 e^{-x} - 20x e^{-x} + 90 e^{-x} = (x^2 - 20x + 90) e^{-x}. \end{aligned}$$



- 一般地, 如果 $P(x)$ 是多项式, $P(x)e^{\lambda x}$ 的各阶导数仍然为 $Q(x)e^{\lambda x}$ 这种形式, 其中 $Q(x)$ 是与 $P(x)$ 同次数的多项式.
- 例如由莱布尼兹公式有

$$(xe^{\lambda x})^{(n)} = x\lambda^n e^{\lambda x} + C_n^1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} = \lambda^n \left(x + \frac{n}{\lambda} \right) e^{\lambda x},$$

$$\begin{aligned} (x^2 e^{\lambda x})^{(n)} &= x^2 \lambda^n e^{\lambda x} + C_n^1 \cdot 2x \cdot \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + C_n^2 \cdot 2 \cdot \lambda^{n-2} e^{\lambda x} \\ &= \lambda^n \left(x^2 + \frac{2n}{\lambda} + \frac{n(n-1)}{\lambda^2} \right) e^{\lambda x}. \end{aligned}$$



- (3) 三角函数

- 例 求 $y = \sin \omega x$ (ω 为常数) 的各阶导数.

- 解 $y' = \omega \cos \omega x = \omega \sin \left(\omega x + \frac{\pi}{2} \right),$ (奇变偶不变, 符号看象限)

$$y'' = \omega^2 \cos \left(\omega x + \frac{\pi}{2} \right) = \omega^2 \sin \left(\omega x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y''' = \omega^3 \cos \left(\omega x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \omega^3 \sin \left(\omega x + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y^{(n)} = \omega^n \sin \left(\omega x + \frac{n\pi}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- 同理 $(\cos \omega x)^{(n)} = \omega^n \cos \left(\omega x + \frac{n\pi}{2} \right), n = 0, 1, 2, \dots$



- 例 求 $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ 的 10 阶导数.

- 解 由于

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4}, \end{aligned}$$

- 因此 $y^{(10)} = \frac{1}{4} \cdot 4^{10} \cos \left(4x + 10 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = -4^9 \cos 4x.$



- 另解 由于
$$\begin{aligned}y' &= 4 \sin^3 x \cos x - 4 \cos^3 x \sin x \\&= 4 \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) \\&= -2 \sin 2x \cos 2x = -\sin 4x,\end{aligned}$$

因此 $y^{(10)} = -(\sin 4x)^{(9)} = -4^9 \sin\left(4x + 9 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -4^9 \cos 4x$.

- 例 求 $y = \sin x \sin 3x$ 的 20 阶导数.

- 解 由于 $y = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$, 因此

$$\begin{aligned}y^{(20)} &= \frac{1}{2} \cdot \left[2^{20} \cos\left(2x + 20 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 4^{20} \cos\left(4x + 20 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right] \\&= 2^{19} \cos 2x - 2^{39} \cos 4x.\end{aligned}$$



- 一般地, 由 $\sin \omega x$ 和 $\cos \omega x$ 构成的多项式, 总可以通过积化和差最终化为若干这种形式的三角函数的线性组合.
- 例 求 $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$ 的各阶导数.
- 解 由于

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x) \sin 3x = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin 4x + \sin 2x}{2} - \frac{\sin 5x + \sin x}{2} \right] \\ &= \frac{1}{4}(-\sin x + \sin 2x + \sin 4x - \sin 5x), \end{aligned}$$

- 因此

$$y^{(n)} = \frac{1}{4} \left[-\sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) + 2^n \sin \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right) + 4^n \sin \left(4x + \frac{n\pi}{2} \right) - 5^n \sin \left(5x + \frac{n\pi}{2} \right) \right].$$



• 常用高阶导数公式

$$(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}, \quad (x^n)^{(n)} = n!.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \quad [\ln |x|]^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{x^n}.$$

$$(e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

$$(\sin \omega x)^{(n)} = \omega^n \sin\left(\omega x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad (\cos \omega x)^{(n)} = \omega^n \cos\left(\omega x + \frac{n\pi}{2}\right).$$