2022 年合肥工业大学试卷（A）

2022～2023 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. i^{-i} 的主值是________________.

2. 设 $z=-i$, 则 $1+z+z^2+z^3+z^4=$________________.

3. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 则积分 $\oint_C \left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right)\,\mathrm{d}z=$________________.

4. 设 a,b,c 为实数. 如果函数 $f(z)=x^2-2xy-y^2+i(ax^2+bxy+cy^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a+b+c=$________________.

5. 函数 $\sin t+j\cos t$ 的傅里叶变换为________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 方程 $\big||z+i|-|z-i|\big|=1$ 表示的曲线是 (　　).

A. 直线　　B. 不是圆的椭圆　　C. 双曲线　　D. 圆周

2. 不等式 $-1\leqslant \arg z\leqslant \pi-1$ 确定是的 (　　).

A. 有界多连通闭区域　　B. 有界单连通区域

C. 无界多连通区域　　D. 无界单连通闭区域

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(iz)^n$ 的收敛半径是 (　　).

A. i　　B. $-i$　　C. 1　　D. $+\infty$

4. 下面哪个函数在 $z=0$ 处不可导? (　　)

A. $2x+3yi$　　B. $2x^2+3y^2i$　　C. x^2-xyi　　D. $e^x\cos y+ie^x\sin y$

5. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, $g(z)$ 的一阶零点, 则 z_0 是 $f(z)^3g(z)^2$ 的 (　　).

A. 一阶极点　　B. 一阶零点　　C. 可去奇点　　D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z=\dfrac{3+i}{i}-\dfrac{10i}{3-i}$, 求 z 的模和辐角.

2. (6 分) 解方程 $\sin z=2\cos z$.

3. (6 分) 设 C 为从 i 到 $i-\pi$ 再到 $-\pi$ 的折线, 求 $\int_C \cos^2 z\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z-3|=4$, 求 $\oint_C \dfrac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $v(x,y)=x^3+y^3-axy(x+y)$ 是调和函数，求参数 a 以及解析函数 $f(z)$ 使得 $v(x,y)$ 是它的虚部.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<1$;　　(2) $1<|z|<+\infty$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 求 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z^2-\pi^2)}$ 在有限复平面内的奇点和相应的留数.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+2y(t)=\sin t, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

9. (3 分) 复变函数 $f(z)=\sin z$ 和实变量函数 $g(x)=\sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试列举一二.

2022 年合肥工业大学考试参考答案（A）

2022～2023 学年第一学期　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad e^{\pi/2} \quad}$, **2.** $\underline{\quad 1 \quad}$, **3.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **4.** $\underline{\quad 2 \quad}$, **5.** $\underline{2\pi j\delta(\omega+1)}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	C	D	C	A	A

三、解答题

1. （6 分）【解】

由于 $z = -3i + 1 - i(3+i) = 2 - 6i$, ……………………………………(2 分)

因此 $|z| = 2\sqrt{10}$, ……………………………………(2 分)

$\operatorname{Arg} z = 2k\pi - \arctan 3, k \in \mathbb{Z}$. ……………………(2 分, 只有主值得 1 分)

2. （6 分）【解】

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 2\cdot\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$e^{iz}-e^{-iz} = 2i(e^{iz}+e^{-iz}),$$

$$e^{2iz} = \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)^2}{5}, \quad \cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

$$2iz = \operatorname{Ln}\frac{(1+2i)^2}{5} = (2\arctan 2 + 2k\pi)i, \quad \cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

$$z = \arctan 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分, 只有主值得 1 分})$$

其它答案: $z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{4}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. （6 分）【解】

由于 $\cos^2 z$ 解析, 且 ……………………………………(1 分)

$$\int \cos^2 z\,\mathrm{d}z = \int \frac{1+\cos(2z)}{2}\,\mathrm{d}z \quad \cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{z}{2} + \frac{\sin(2z)}{4} + C, \quad \cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

因此

$$\int_C \cos^2 z\,\mathrm{d}z = \left[\frac{z}{2}+\frac{\sin(2z)}{4}\right]\Bigg|_i^{-\pi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$
$$= -\frac{\pi}{2} - \left[\frac{i}{2}+\frac{\sin(2i)}{4}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$
$$= -\frac{\pi}{2} + \frac{(e^{-2}-4-e^{2})i}{8}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

4. （10 分）【解】

由于 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}$ 在 $|z-3| \leqslant 4$ 内的奇点为 $\pi, 2\pi$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (3 分)

因此

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\big[\mathrm{Res}[f(z),\pi]+\mathrm{Res}[f(z),2\pi]\big] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= 2\pi i\left[\frac{e^{iz}}{z-2\pi}\bigg|_{z=\pi} + \frac{e^{iz}}{z-\pi}\bigg|_{z=2\pi}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= 2\pi i\left[\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right] = 4i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

5. （10 分）【解】

由 $\Delta v = v_{xx}+v_{yy} = 6x-2ay+6y-2ax = 0$ 可知 $a=3$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (3 分)

由

$$f'(z) = v_y + iv_x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= (3y^2-3x^2-6xy)+i(3x^2-6xy-3y^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= 3(i-1)(x+iy)^2 = 3(i-1)z^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

可知 $f(z) = (i-1)z^3 + C, C\in\mathbb{R}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2 分, 没有常数项得 1 分)

其它解法: 由 $u_x = v_y = 3y^2-3x^2-6xy$ 得 $u = 3xy^2-x^3-3x^2y+\psi(y)$. $\cdots\cdots\cdots$ (2 分)

由 $u_y = -v_x = -(3x^2-6xy-3y^2)$ 得 $\psi'(y) = 3y^2$,

$\psi(y) = y^3 + C$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (3 分, 没有常数项得 2 分)

$$f(z) = u+iv$$
$$= 3xy^2-x^3-3x^2y+y^3+C+i(x^3+y^3-3xy^2-3x^2y)$$
$$= (i-1)z^3+C, C\in\mathbb{R}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

6. （10 分）【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 1, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{z-1+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}=-\frac{1}{1-z}+2\left(\frac{1}{1-z}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n. \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}, \quad \cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-2\left(\frac{1}{z-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\left(\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-n)z^{-n-1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-n+1)z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)z^{-n}. \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

7. （10 分）【解】

由于 0 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$

由于 $\pm\pi$ 是分母的一阶零点, 因此它们是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\left(\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\right)'\bigg|_{z=0} \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$
$$=\frac{-\sin z\cdot(z^2-\pi^2)-\cos z\cdot 2z}{(z^2-\pi^2)^2}\bigg|_{z=0}=0, \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$
$$\operatorname{Res}[f(z),\pi]=\frac{\cos z}{z^2(z+\pi)}\bigg|_{z=\pi}=-\frac{1}{2\pi^3}, \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$
$$\operatorname{Res}[f(z),-\pi]=\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}\bigg|_{z=-\pi}=\frac{1}{2\pi^3}. \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

8. （9 分）【解】

设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-2, \quad \cdots\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 2 + 2Y = \mathscr{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2+2} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+2)} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+2}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2}\right] = \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin(\sqrt{2}t). \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

9. （3 分）【解】

例如 (每项 1 分)

- $f'(z) = \cos z, g'(x) = \cos x.$ ……………………………………(1 分)
- $\sin z$ 处处可导, $\sin x$ 处处可导. ……………………………………(1 分)
- 麦克劳林展开的系数相同. ……………………………………(1 分)
- $\sin z$ 无界, $\sin x$ 有界. ……………………………………(1 分)

2022 年合肥工业大学试卷（B）

2022～2023 学年第一学期　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $-1+\sqrt{3}i$ 的辐角主值是________.

2. $i^{2022}-(-i)^{2022}=$________.

3. 如果函数 $f(z)=e^{ax}(\cos y-i\sin y)$ 在复平面上处处解析, 则实数 $a=$________.

4. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 则积分 $\oint_C\left(\frac{1+z+z^2}{z^3}\right)\mathrm{d}z=$________.

5. 函数 e^{jt} 的傅里叶变换为________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 不等式 $1<|z|<2$ 确定是的 (　).

A. 有界多连通区域　B. 有界单连通区域　C. 无界多连通区域　D. 无界单连通区域

2. 方程 $|z+i|=|z-i|$ 表示的曲线是 (　).

A. 直线　B. 不是圆的椭圆　C. 双曲线　D. 圆周

3. 幂级数在其收敛圆周上 (　).

A. 一定处处绝对收敛　B. 一定处处条件收敛

C. 一定有发散的点　D. 可能处处收敛也可能有发散的点

4. 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处可导的充要条件是 (　).

A. u,v 均在 (x_0,y_0) 处连续

B. u,v 均在 (x_0,y_0) 处有偏导数

C. u,v 均在 (x_0,y_0) 处可微

D. u,v 均在 (x_0,y_0) 处可微且满足 C-R 方程

5. $z=\pi$ 是函数 $\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$ 的 (　).

A. 一阶极点　B. 一阶零点　C. 可去奇点　D. 本性奇点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z=\frac{2+i}{1-2i}$, 求 z 的模和辐角.

2. (6 分) 求 $\sqrt[3]{-8}$.

3. (7 分) 设 C 是从 i 到 $2+i$ 的直线, 求 $\displaystyle\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$.

4. (7 分) 求 $\displaystyle\int_{-\pi i}^{\pi i} (e^z+1)\,\mathrm{d}z$.

5. (7 分) 求 $\displaystyle\int_0^{\pi} (z+\cos 2z)\,\mathrm{d}z$.

6. (7 分) 设 C 为正向圆周 $|z|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{z-6}{z^2+9}\,\mathrm{d}z$.

7. (8 分) 已知 $f(z)=u+iv$ 是解析函数, 其中 $u(x,y)=x^2+axy-y^2, v=2x^2-2y^2+2xy$ 且 a 是实数. 求参数 a 以及解析函数 $f'(z)$, 其中 $f'(z)$ 需要写成 z 的表达式.

8. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{2}{z(z+2)}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<2$; (2) $2<|z|<+\infty$

内的洛朗级数展开式.

9. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+2y'(t)=8e^{2t}, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

10. (3 分) 复积分的计算方法或公式有哪些? 请给出至少三条.

2022 年合肥工业大学考试参考答案（B）

2022～2023 学年第一学期　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad \frac{2\pi}{3} \quad}$, **2.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **3.** $\underline{\quad -1 \quad}$, **4.** $\underline{\quad 2\pi i \quad}$, **5.** $\underline{\quad 2\pi\delta(\omega-1) \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 **A, B, C, D** 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	A	A	D	D	A

三、解答题

1.（6 分）【解】 由于 $z = \dfrac{(2+i)(1+2i)}{5} = i$, ······(2 分)

因此 $|z| = 1$, ······(2 分)

$\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ······(2 分, 只有主值得 1 分)

2.（6 分）【解】 由于 $-8 = 8e^{\pi i}$, ······(2 分)

因此

$$\sqrt[3]{-8} = 2e^{\frac{1}{3}(\pi i + 2k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2 \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

即

$$2e^{\frac{\pi i}{3}} = 1 + \sqrt{3}i, \quad 2e^{\pi i} = -2, \quad 2e^{\frac{5\pi i}{3}} = 1 - \sqrt{3}i. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

3.（7 分）【解】

直线 C 的方程为 $z = t + i, 0 \leqslant t \leqslant 2$. ······(2 分)

因此 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t, \overline{z} = t - i$. ······(2 分)

$$\int \overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^2 (t-i)\,\mathrm{d}t \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} - it\right)\Big|_0^2 = 2 - 2i. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

4.（7 分）【解】 由于 $e^z + 1$ 处处解析, 因此 ······(2 分)

$$\int_{-\pi i}^{\pi i} (e^z + 1)\,\mathrm{d}z = (e^z + z)\Big|_{-\pi i}^{\pi i} \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$= (e^{\pi i} + \pi i) - (e^{-\pi i} - \pi i) \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$= 2\pi i. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

5. （7 分）【解】 由于 $z+\cos 2z$ 处处解析, 因此 $\cdots\cdots$(2 分)

$$\int_0^{\pi}(z+\cos 2z)\,\mathrm{d}z=\left(\frac{z^2}{2}+\frac{\sin 2z}{2}\right)\Big|_0^{\pi} \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\frac{\sin 2\pi}{2} \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\frac{\pi^2}{2}. \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

6. （7 分）【解】

由于 $f(z)=\dfrac{z-6}{z^2+9}$ 在 $|z|\leqslant 4$ 内的奇点为 $\pm 3i$, $\cdots\cdots$(2 分)

因此

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\big[\mathrm{Res}[f(z),3i]+\mathrm{Res}[f(z),-3i]\big] \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=2\pi i\left[\frac{z-6}{z+3i}\bigg|_{z=3i}+\frac{z-6}{z-3i}\bigg|_{z=-3i}\right] \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=2\pi i\left(\frac{3i-6}{6i}+\frac{-3i-6}{-6i}\right)=2\pi i \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

7. （8 分）【解】

由 $u_x=2x+ay=v_y=-4y+2x$ 可知 $a=-4$. $\cdots\cdots$(2 分)

由

$$f'(z)=u_x+iv_x \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=(-4y+2x)+i(4x+2y) \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=(2+4i)z. \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

8. （10 分）【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 $0,2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1)

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2} \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n. \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

(2)

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} && \cdots\cdots (2\text{ 分}) \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} && \cdots\cdots (1\text{ 分}) \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n && \cdots\cdots (1\text{ 分}) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{z^n}. && \cdots\cdots (1\text{ 分}) \end{aligned}$$

9. （9 分）【解】

设 $\mathscr{L}[y] = Y$, 则

$$\mathscr{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2, \quad \cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 2 + 2sY = \mathscr{L}[8e^{2t}] = \frac{8}{s-2}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+2s)} = \frac{2}{s(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s}, && \cdots\cdots (2\text{ 分}) \\ y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = e^{2t} - 1. && \cdots\cdots (2\text{ 分}) \end{aligned}$$

10. （3 分）【解】例如

- 列出参数方程 $z = z(t)$ 并将积分表达为 t 的积分形式;
- 单连通区域内解析函数的积分可以用原函数计算;
- 利用柯西-古萨基本定理;
- 利用复合闭路定理;
- 利用柯西积分公式;
- 利用高阶导数的柯西积分公式;
- 利用留数;
- 利用长大不等式.

2023 年合肥工业大学试卷（A）

2023～2024 学年第一学期　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 2^{-i} 的辐角主值是________________.

2. $2023-i$ 绕 0 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到的复数是________________.

3. 如果函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+5)\sin z}$ 可以在圆环域 $0<|z|<R$ 内作洛朗展开, 则 R 的最大值为________________.

4. 设 $f(z)=e^z-|z|\cos z$, 则 $\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z=$________________.

5. 函数 $f(t)=\cos(3t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=$________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在下面哪个区域内有原函数? (　)

A. $0<|z|<1$　　B. $\mathrm{Re}\,z>0$

C. $|z-1|>2$　　D. $|z+1|+|z-1|>4$

2. 设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=4}\dfrac{\sin\zeta-\cos\zeta}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 则 $f'(\pi)=$(　)

A. 0　　B. $2\pi i$　　C. $-2\pi i$　　D. πi

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$ 的收敛半径是 (　).

A. 0　　B. $+\infty$　　C. e　　D. 1

4. 下面哪个函数不能作为解析函数的虚部? (　)

A. $2x+3y$　　B. $2x^2+3y^2$　　C. x^2-xy-y^2　　D. $e^x\cos y$

5. $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{(e^z-1)^2z^3}{\sin z^8}$ 的 (　).

A. 一阶极点　　B. 本性奇点　　C. 可去奇点　　D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 计算 $(-1+i)^{10}-(-1-i)^{10}$.

2. (6 分) 解方程 $\cos z=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

3. (6 分) 设 C 为有向曲线 $z(t)=\sin t+it, 0\leqslant t\leqslant \pi$, 求 $\displaystyle\int_C ze^z\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z-1|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $u(x,y)=x^3+ax^2y+bxy^2-3y^3$ 是调和函数，求参数 a,b 以及 $v(x,y)$ 使得 $v(0,0)=0$ 且 $f(z)=u+iv$ 是解析函数.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{z}{z^2-3z+2}$ 在圆环域

(1) $|z|>2$; (2) $0<|z-2|<1$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 设 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-\pi i)(z-2\pi i)^2}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点以及 $\displaystyle\oint_{|z|=8} f(z)\,\mathrm{d}z$.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+4y(t)=3\cos t, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

9. (3 分) 复变函数 $f(z)=e^z$ 和实变量函数 $g(x)=e^x$ 的性质有什么相似和不同之处？试举出三点.

2023 年合肥工业大学考试参考答案（A）

2023～2024 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad -\ln 2 \quad}$, **2.** $\underline{\quad 1+2023i \quad}$, **3.** $\underline{\quad \pi \quad}$, **4.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **5.** $\underline{\quad \pi[\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)] \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 **A, B, C, D** 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	B	C	C	B	D

三、解答题

1.（6 分）【解】 由于

$$-1+i=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

因此

$$(-1+i)^{10}=32e^{\frac{30\pi i}{4}}=-32i, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$(-1-i)^{10}=32e^{-\frac{30\pi i}{4}}=32i, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

故

$$(-1+i)^{10}-(-1-i)^{10}=-64i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

也可以直接计算 $(-1+i)^2=-2i$ 得到 $(-1+i)^{10}=-32i$.

2.（6 分）【解】 由

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

整理得到

$$e^{2iz}-\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{iz}+1=0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$e^{iz}=\frac{1}{2}\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-4}\right]=\sqrt{2}\text{ 或}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

因此

$$iz=\operatorname{Ln}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2+2k\pi i\text{ 或 }\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{2}\ln 2+2k\pi i,$$

$$z = 2k\pi \pm \frac{\ln 2}{2} i, k \in \mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

3. （6 分）【解】 由于 ze^z 解析, 且 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

$$\int ze^z \,\mathrm{d}z = (z-1)e^z + C, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

而曲线 C 的起点是 0, 终点是 πi, 因此

$$\begin{aligned} \int_C ze^z \,\mathrm{d}z &= (z-1)e^z \Big|_0^{\pi i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分}) \\ &= (\pi i - 1)e^{\pi i} - (-1) = 2 - \pi i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \end{aligned}$$

4. （10 分）【解】 由于 $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z+i)(z-i)}$ 在 $|z-1| \leqslant 4$ 内的奇点为 $\pm i$, 因此 $\cdots$ (2 分)

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i \big[\mathrm{Res}[f(z), -i] + \mathrm{Res}[f(z), -2i]\big] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\ &= 2\pi i \left[\frac{\sin z}{z+i}\bigg|_{z=i} + \frac{\sin z}{z-i}\bigg|_{z=-i} \right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\ &= 2\pi i \left[\frac{\sin i}{2i} + \frac{\sin(-i)}{-2i} \right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\ &= 2\pi \sin i = \pi i \big(e - \frac{1}{e}\big). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \end{aligned}$$

5. （10 分）【解】 由

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6x + 2ay + 2bx - 18y = 0$$

可知 $a = 9, b = -3$. 由 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (3 分)

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x - iu_y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\ &= (3x^2 + 18xy - 3y^2) - i(9x^2 - 6xy - 9y^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\ &= (3 - 9i)(x + iy)^2 = (3 - 9i)z^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分}) \end{aligned}$$

可知

$$f(z) = (1 - 3i)z^3 + C, C \in \mathbb{R}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

由 $v(0,0) = 0, f(0) = 0$ 可知 $C = 0$,

$$v = -3x^3 + 3x^2 y + 9xy^2 - y^3. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

其它解法: 由 $u_x = v_y = 3x^2 + 18xy - 3y^2$ 得

$$v = 3x^2 y + 9xy^2 - y^3 + \psi(x). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

由 $v_x = -u_y = -(9x^2 - 6xy - 9y^2)$ 得

$$\psi'(x) = -9x^2, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\psi(x) = -3x^3 + C, \quad v = -3x^3 + 3x^2y + 9xy^2 - y^3 + C. \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

由 $v(0,0) = 0$ 可知 $C = 0$,

$$v = -3x^3 + 3x^2y + 9xy^2 - y^3. \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

6. （10 分）【解】由于 $f(z)$ 的奇点是 $1, 2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^n}. \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{2}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n. \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

7. （10 分）【解】由于 πi 是分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots$(1 分)

由于 $2\pi i$ 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\cdots\cdots$(1 分)

$$\operatorname{Res}[f(z), \pi i] = \left.\frac{e^z}{(z-2\pi i)^2}\right|_{z=\pi i} = \frac{1}{\pi^2}, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z), 2\pi i] = \left.\left(\frac{e^z}{z-\pi i}\right)'\right|_{z=2\pi i} \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$= \left.\frac{e^z(z-\pi i-1)}{(z-\pi i)^2}\right|_{z=2\pi i} = \frac{1-\pi i}{\pi^2}, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\oint_{|z|=8} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\big[\operatorname{Res}[f(z), \pi i] + \operatorname{Res}[f(z), 2\pi i]\big] = 2 + \frac{4}{\pi} i. \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

8. **（9 分）【解】** 设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-s-2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y-s-2+4Y=3\mathscr{L}[\cos t]=\frac{3s}{s^2+1}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned} Y(s)&=\frac{s+2}{s^2+4}+\frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{s^3+2s^2+4s+2}{(s^2+1)(s^2+4)}\\ &=\frac{2}{s^2+4}+\frac{s}{s^2+1}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ y(t)&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]=\sin 2t+\cos t. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \end{aligned}$$

9. **（3 分）【解】** 例如 (每项 1 分)

- $f'(z)=e^z, g'(x)=e^x$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)
- e^z 处处可导, e^x 处处可导. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)
- 麦克劳林展开的系数相同. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)
- e^z 无界, e^x 无界. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)
- e^z 是周期的, e^x 不是. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)