# 复变函数与积分变换

张神星

合肥工业大学

2022 年秋季学期

# 第二章　解析函数

# 本章作业

- 2, 3, 4
- 6, 8, 11
- 12, 15, 18

1 解析函数的概念

2 函数解析的充要条件

3 初等函数

# 复变函数的导数

由于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

## 定义

设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 $D$, $z_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 $z_0$ 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 $z_0$ 的导数, 记作

$$f'(z_0) = \frac{dw}{dz}\Big|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果 $f(z)$ 在区域 $D$ 内处处可导, 称 $f(z)$ 在 $D$ 内可导.

**例**

函数 $f(z)=x+2yi$ 在哪些点处可导?

**解.**

$$\begin{aligned}
f'(z)&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}\\
&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)i-(x+2yi)}{\Delta z}\\
&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}.
\end{aligned}$$

当 $\Delta x=0$ 时, 上述极限为 $2$; 当 $\Delta y=0$ 时, 上述极限为 $1$. 因此该极限不存在, $f(z)$ 处处不可导. ■

若将 $f(z)$ 视为二元实变量的函数, 则该函数在不同方向的方向导数不同.

# 例题: 复变函数的导数

## 练习

函数 $f(z) = x - yi$ 在哪些点处可导?

## 答案.

处处不可导.

## 例

求 $f(z) = z^2$ 的导数.

## 解.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

# 求导运算法则

和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

## 定理

- $(c)' = 0$, 其中 $c$ 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 $n$ 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf'$;
- $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$;
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z)$;
- $f'(z) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(w)}, w = f(z)$.

# 可导蕴含连续

## 定理

若 $f(z)$ 在 $z_0$ 可导, 则 $f(z)$ 在 $z_0$ 连续.

## 证明.

该定理的证明和实变量情形完全相同. 设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

则

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z \\
&= f'(z_0) \cdot 0 = 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

## 定义

如果存在常数 $A$ 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 $\Delta z$ 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 $z_0$ 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 $z_0$ 的微分, 记作 $\mathrm{d}w = A\Delta z$.

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $\mathrm{d}w = f'(z_0)\Delta z$, $\mathrm{d}z = \Delta z$. 故 $\mathrm{d}w = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$, $f'(z_0) = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$.

**定义**

- 若函数 $f(z)$ 在 $z_0$ 的一个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 $z_0$ 解析.
- 若 $f(z)$ 在区域 $D$ 内处处解析，则称 $f(z)$ 在 $D$ 内解析，或称 $f(z)$ 是 $D$ 内的一个解析函数(也叫全纯函数或正则函数).
- 若 $f(z)$ 在 $z_0$ 不解析，则称 $z_0$ 为 $f(z)$ 的一个奇点.

由于区域 $D$ 是一个开集，其中的任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 $D$ 的邻域. 所以 $f(z)$ 在 $D$ 内解析和在 $D$ 内可导是等价的.

如果 $f(z)$ 在 $z_0$ 解析，则 $f(z)$ 在 $z_0$ 的一个邻域内处处可导，从而在该邻域内解析. 因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集.

**例**

研究函数 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

**解.**

由于

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}$$
$$=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi},$$

若 $z=0$, 则当 $\Delta z\to 0$ 时该极限为 $0$.

若 $z\neq 0$, 则当 $\Delta y=0,\Delta x\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}+z$; 当 $\Delta x=0,\Delta y\to 0$ 时该极限为 $\overline{z}-z$. 因此此时极限不存在.

故 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处可导, 从而处处不解析. ■

从上一节的例子中观察到: 解析函数往往可以直接表达为 $z$ 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \overline{z}$ 之类的内容. 这种直观印象实际上是有道理的.

我们知道, 给一个复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 等价于给两个二元实变函数. 我们将从 $u, v$ 的偏导数来推导出 $f$ 可导的充要条件.

# 可导的等价刻画: 形式推导

为了简便我们用 $u_x, u_y, v_x, v_y$ 等记号表示偏导数.
设 $f$ 在 $z$ 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

由于 $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$, 因此 $u, v$ 可微且

$$\mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}x - b\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}v = b\,\mathrm{d}x + a\,\mathrm{d}y.$$

故 $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$.

# 可导的等价刻画: 形式推导

反过来, 假设 $u, v$ 可微且 $u_x = v_y, u_y = -v_x$. 由全微分公式

$$\begin{aligned}
du &= u_x\, dx + u_y\, dy = u_x\, dx - v_x\, dy, \\
dv &= v_x\, dx + v_y\, dy = v_x\, dx + u_x\, dy, \\
df &= d(u+iv) = (u_x + iv_x)\, dx + (-v_x + iu_x)\, dy \\
&= (u_x + iv_x)\, d(x+iy) \\
&= (u_x + iv_x)\, dz = (v_y - iu_y)\, dz.
\end{aligned}$$

故 $f(z)$ 在 $z$ 处可导, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

## 定理

函数 $f(z)$ 在 $z$ 可导当且仅当在 $z$ 点 $u, v$ 可微且满足柯西-黎曼方程 (C-R 方程)

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

具体计算时，我们先判断 $f(z)$ 的 $u, v$ 的偏导数是否存在. 然后把偏导数按次序依次写出

$$u_x = \cdots, \quad u_y = \cdots$$

$$v_x = \cdots, \quad v_y = \cdots$$

列出 C-R 方程，求出所有的可导点.

如果一个点的一个邻域内都可导，那么这个点是解析点. 如果一个区域 $D$ 内所有点都可导，那么区域 $D$ 是解析区域.

当然，如果能用求导法则直接说明 $f(z)$ 在 $D$ 内处处可导，则也可以知道 $f(z)$ 是 $D$ 内的解析函数.

# 柯西-黎曼方程的极坐标形式 *

设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 则

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta,\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta,\ \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta.$$

因此

$$u_r = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta, \quad u_\theta = r(-u_x\sin\theta + u_y\cos\theta).$$

将 C-R 方程代入后, 我们可以得到 C-R 方程的极坐标形式:

$$ru_r = v_\theta, \quad rv_r = -u_\theta.$$

且

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{v_\theta - iu_\theta}{z}.$$

# 柯西-黎曼方程的极坐标形式 *

设 $w = f(z) = \rho e^{i\varphi}$, 则类似可得 C-R 方程

$$\rho_r = \frac{\rho\varphi_\theta}{r}, \quad \varphi_r = -\frac{\rho_\theta}{\rho r}.$$

此时

$$f'(z) = \frac{w}{z}(\varphi_\theta + ir\varphi_r) = \frac{w}{z\rho}(r\rho_r - i\rho_\theta).$$

## 柯西-黎曼方程的 $z, \bar{z}$ 形式 *

如果把复变函数 $f$ 写成

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right),$$

把 $z, \bar{z}$ 看作独立变量, $f$ 分别对 $z$ 和 $\bar{z}$ 的偏导数可定义为

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

那么 C-R 方程等价于

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (u_x - v_y) + i(v_x + u_y) = 0.$$

所以我们也可以把 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 叫做 C-R 方程.

**例**

函数 $f(z)=\bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

**解.**

由 $u=x, v=-y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 1, & u_y &= 0, \\ v_x &= 0, & v_y &= -1. \end{aligned}$$

因为 $u_x=1\neq v_y=-1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

也可以从 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=1\neq 0$ 看出. ■

不过这种方法由于课本上没有, 所以考试的时候最好只把它作为一种验算手段.

**例**

函数 $f(z) = z\operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

**解.**

由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$u_x = 2x, \qquad u_y = 0,$$
$$v_x = y, \qquad v_y = x.$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 C-R 方程. 因此该函数只在 $0$ 可导, 处处不解析且

$$f'(0) = (u_x + iv_x)\Big|_{z=0} = 0.$$

也可从 $f(z) = \dfrac{z(z+\overline{z})}{2}, \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{z}{2}$ 看出. ■

# 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

**例**

函数 $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

**解.**

由 $u=e^x\cos y, v=e^x\sin y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= e^x\cos y, & u_y &= -e^x\sin y,\\ v_x &= e^x\sin y, & v_y &= e^x\cos y. \end{aligned}$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z)=u_x+iv_x=e^x(\cos y+i\sin y)=f(z).$$ ■

实际上, 这个函数就是复变量的指数函数 $e^z$.

**练习**

求 $f(z) = 3x^2 + y^2 - 2xyi$ 的可导点和解析点.

**答案.**

可导点为 $\operatorname{Re} z = 0$, 没有解析点.

# 例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

## 例

设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 $a, b, c, d$ 以及 $f'(z)$.

## 解.

由于

$$u_x = 2x + ay, \qquad u_y = ax + 2by,$$
$$v_x = 2cx + dy, \qquad v_y = dx + 2y,$$

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$
$$a = d = 2, \quad b = c = -1,$$
$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2y + i(-2x + 2y) = (2 - 2i)z. \qquad \blacksquare$$

**例**

如果 $f'(z)$ 在区域 $D$ 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 $D$ 内是一常数.

**证明.**

由于
$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$
因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, $u, v$ 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数. ■

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 $D$ 内解析, 则下述条件等价:

- $f(z)$ 是一常数,
- $|f(z)|$ 是一常数,
- $\operatorname{Re} f(z)$ 是一常数,
- $v = u^2$,
- $f'(z) = 0$,
- $\arg f(z)$ 是一常数,
- $\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数,
- $u = v^2$.

# 例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

**例**

如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

**证明.**

由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 $u_x,u_y$ 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,dx+u_y\,dy=0,$$

从而 $(u_x,-u_y)$ 是该曲线在 $z$ 处的非零切向量.

同理 $(v_x,-v_y)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 $z$ 处的非零切向量. 由于

$$u_xv_x+u_yv_y=-u_xu_y+u_yu_x=0,$$

因此二者正交. ∎

当 $f'(z_0)\neq 0$ 时, 经过 $z_0$ 的两条曲线 $C_1, C_2$ 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性.

这是因为 $d\,f = f'(z_0)\,d\,z$. 局部来看 $f$ 把 $z_0$ 附近的点以 $z_0$ 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 上述例子是该结论关于 $w$ 复平面上曲线族 $u=c_1, v=c_2$ 的一个特殊情形.

最后我们来看复数在求导中的一个应用.

**例**

求 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的各阶导数.

**解.**

设 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 则它在除 $z=\pm i$ 外处处解析. 当 $z=x$ 为实数时,

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x)&=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x-i}\right]^{(n)}\\
&=\frac{i}{2}\cdot(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x+i)^{n+1}}-\frac{1}{(x-i)^{n+1}}\right]\\
&=(-1)^{n+1}n!\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{(x+i)^{n+1}}\\
&=\frac{(-1)^n n!\sin[(n+1)\operatorname{arccot}x]}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}.
\end{aligned}
$$

■

# 指数函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

1. $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$ (欧拉恒等式);
2. $\exp z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);
3. $\exp z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots = \lim\limits_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{z^k}{k!}$ (级数定义);
4. $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z = x \in \mathbb{R}$ 时, $\exp z = e^x$ ($e^x$ 的解析延拓).

# 指数函数

有些人会从 $e^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义，而不是欧拉恒等式的证明. 我们会在幂级数一节说明 1 和 3 等价.

# 指数函数的定义

我们来证明 1 和 2 等价.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\quad(1^\infty\text{ 型不定式})$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right]=e^x.$$

不妨设 $n>|z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n\to\infty}n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\arctan\frac{y}{n+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x}=y.$$

故 $\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)$.

定义指数函数

$$\exp z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

我们已经知道 $\exp z$ 是一个处处解析的函数, 且 $(\exp z)' = \exp z$. 不难看出

- $\exp z \neq 0$;
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$;
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$;
- $\exp z_1 = \exp z_2$ 当且仅当 $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$;
- $\lim\limits_{z\to\infty} \exp z$ 不存在也不为 $\infty$.

为了方便, 我们也记 $e^z = \exp z$.

## 指数函数的性质

指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.

**例**

求函数 $f(z) = \exp[(1+i)z]$ 的周期.

**解.**

设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $\exp[(1+i)z_1] = \exp[(1+i)z_2]$. 因此存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$(1+i)z_1 = (1+i)z_2 + 2k\pi i,$$

从而 $z_1 - z_2 = k\pi(1+i)$. 所以 $f(z)$ 的周期是 $\pi(1+i)$. ∎

一般地, $\exp(az+b)$ 的周期是 $\dfrac{2\pi i}{a}$ (或写成 $-\dfrac{2\pi i}{a}$), $a \neq 0$.

对数函数定义为指数函数的反函数. 设 $z \neq 0$, 满足方程 $\exp w = z$ 的 $w = f(z)$ 被称为对数函数, 记作 $w = \operatorname{Ln} z$.

为什么我们用大写的 $\operatorname{Ln}$ 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\operatorname{Arg} z$ 和 $\arg z$.

设 $\exp w = z = r\exp(i\theta) = \exp(\ln r + i\theta)$, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

所以

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

我们取它的主值为

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

那么

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi i.$$

对于每一个 $k$, $\ln z + 2k\pi i$ 都给出了 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支. 特别地, 当 $z = x > 0$ 是正实数时, $\ln z$ 就是实变的对数函数.

## 典型例题：对数函数的计算

**例**

求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

**解.**

$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$, 主值就是 $\ln 2$.
$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$, 主值是 $\pi i$. ∎

**例**

求 $\mathrm{Ln}(-2+3i), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i), \mathrm{Ln}(-3)$.

**解.**

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(-2+3i) &= \ln|-2+3i| + i\,\mathrm{Arg}(-2+3i)\\ &= \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2}+\pi+2k\pi\right)i, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i) = \ln|3+\sqrt{3}i| + i\,\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}i)$$

$$= \ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)i = \ln 2\sqrt{3} + \left(2k-\frac{1}{6}\right)\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{Ln}(-3) = \ln(-3) + i\,\mathrm{Arg}(-3) = \ln 3 + (2k+1)\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}.$$ ■

### 例

解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

### 解.

由于 $1 + \sqrt{3}i = 2\exp\dfrac{\pi i}{3}$, 因此

$$z = \operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

■

### 练习

求 $\ln(-1-\sqrt{3}i)$.

### 答案.

$\ln 2 - \dfrac{2\pi i}{3}$.

我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

注意 $\operatorname{Ln} z$ 不能换成 $\ln z$, 原因在于乘除的主辐角不一定等于主辐角的加减.

同理, 当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ 也不成立. 不过 $\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \dfrac{1}{n} \operatorname{Ln} z$ 是正确的. 这是因为两侧所能取到的值都是

$$\frac{1}{n} \ln z + \frac{2k\pi i}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

设 $z_0 = x < 0$ 是负实数. 由于

$$\lim_{y\to 0^+} \ln(x+yi) = \ln(-x) + \pi, \quad \lim_{y\to 0^-} \ln(x+yi) = \ln(-x) - \pi,$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续. 实际上, $\lim\limits_{z\to 0} \ln z = \infty$.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 $e^z$ 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数, 从而

$$(\ln z)' = \frac{1}{z},$$

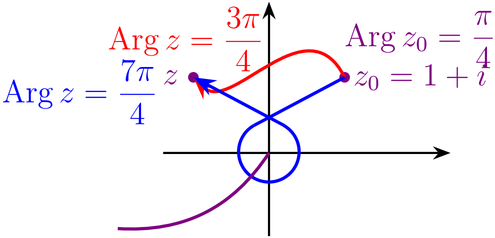
$\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

对于其它分支 $\ln z + 2k\pi i$, 性质也是类似的.

我们以辐角函数为例简说明为什么要去掉这样一条线. 为了确定 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支, 固定 $\operatorname{Arg} z_0$ 的一个值. 然后让 $z$ 从 $z_0$ 出发连续地变化, 并让 $\operatorname{Arg} z$ 也连续地变化.

- 当 $z$ 沿着原点逆时针绕一圈时, $\operatorname{Arg} z$ 会增加 $2\pi$.
- 当 $z$ 沿着 $\infty$ 逆时针绕一圈时, $\operatorname{Arg} z$ 会减少 $2\pi$.
- 当 $z$ 沿着其它点附近逆时针绕一圈时, $\operatorname{Arg} z$ 不会改变.

为了避免 $\operatorname{Arg} z$ 值发生改变, 把 $0$ 和 $\infty$ 连起来. 那么在复平面去掉这条连线后, $\operatorname{Arg} z$ 就可以被连续地单值化了.



设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义幂函数

$$\begin{aligned} w = z^a &= \exp(a \operatorname{Ln} z) \\ &= \exp\big[a \ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)\big], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

它的主值为

$$\exp(a \ln z) = \exp\big(a \ln|z| + ia \arg z\big).$$

我们有 $z^a = \exp(a \ln z) \cdot 1^a$.

根据 $a$ 的不同, 这个函数有着不同的性质. 当 $a$ 为整数时, 因为 $\exp(2ak\pi i) = 1$, 所以 $w = z^a$ 是单值的. 此时

$$z^a = |z|^a \exp(ia \arg z)$$

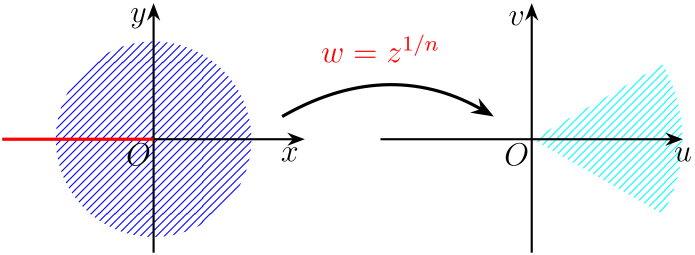
就是我们之前定义的方幂. 当 $a$ 是非负整数时, 补充定义 $0^a = 0$. 那么当 $a$ 是非负整数时, $z^a$ 在复平面上解析; 当 $a$ 是负整数时, $z^a$ 在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上解析.

# 幂函数的性质: $a$ 为分数时

当 $a=\frac{p}{q}$ 为分数, $p,q$ 为互质的整数且 $q>1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}}=|z|^{\frac{p}{q}}\exp\left[\frac{ip(\arg z+2k\pi)}{q}\right],\quad k=0,1,\ldots,q-1$$

具有 $q$ 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w=\exp(a\ln z)$ 是处处解析的. 当 $a=\frac{1}{n}$ 时, $z^a$ 就是方根 $\sqrt[n]{z}$.



对于其它的 $a$, $z^a$ 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k\neq 0$ 时, $2k\pi ai$ 不可能是 $2\pi i$ 的整数倍. 从而不同的 $k$ 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 $0$ 之后, 它的主值 $w=\exp(a\ln z)$ 也是处处解析的.

| $a$ | $z^a$ 的值 | $z^a$ 的解析区域 |
|---|---|---|
| 整数 $n$ | 单值 | $n\geqslant 0$ 时处处解析<br>$n<0$ 时除零点外解析 |
| 分数 $p/q$ | $q$ 值 | 除负实轴和零点外解析 |
| 无理数或虚数 | 无穷多值 | 除负实轴和零点外解析 |

对于幂函数的主值, 或者任意固定一个分支 $\operatorname{Ln} z=\ln z+2k\pi i$, 我们总有 $(z^a)'=\dfrac{az^a}{z}$.

# 典型例题：幂函数的计算

## 例

求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 $i^i$.

## 解.

$$1^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1) = \exp(\sqrt{2}\cdot 2k\pi i)$$
$$= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k\in\mathbb{Z}.$$
$$i^i = \exp(i\,\mathrm{Ln}\,i) = \exp\left[i\cdot\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]$$
$$= \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), \quad k\in\mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

## 练习

求 $(-1)^i$.

## 答案.

$\exp(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

我们总有

$$z^a \cdot z^b = z^{a+b}, \quad (z^a)^n = z^{an}, n \in \mathbb{Z}.$$

我们来看 $\operatorname{Ln} z^a = a \operatorname{Ln} z$ 何时成立. 由于

$$\operatorname{Ln} z^a = a \ln z + 2a\pi i \cdot \left(k + \frac{\ell}{a}\right)\pi i, \quad k, \ell \in \mathbb{Z},$$

$$a \operatorname{Ln} z = a \ln z + 2a\pi i \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

因此当且仅当 $a = \pm\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}_+$ 时, $\operatorname{Ln} z^a = a \operatorname{Ln} z$ 成立. 对于除此之外的 $a$, 该式子并不成立.

最后, 注意 $e^a$ 作为指数函数 $f(z) = e^z$ 在 $a$ 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 $e$ 处的值是不同的. 因为后者在 $a \notin \mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆, 以后我们总默认 $e^a$ 表示指数函数 $\exp a$.

# 三角函数的定义

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 $y$ 成立, 我们将其推广到复数情形. 定义余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

那么欧拉恒等式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ 对任意复数 $z$ 均成立.

不难得到

$$\cos(x+iy)=\cos x \operatorname{ch} y - i\sin x \operatorname{sh} y,$$
$$\sin(x+iy)=\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y,$$

其中 $\operatorname{ch} y = \dfrac{e^y+e^{-y}}{2} = \cos iy$, $\operatorname{sh} y = \dfrac{e^y-e^{-y}}{2} = -i\sin iy$.

当 $y\to\infty$ 时, $\sin iy = i\operatorname{sh} y$ 和 $\cos iy = \operatorname{ch} y$ 都 $\to\infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数. 于是我们可类似定义其它三角函数

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}, z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}, z\neq k\pi,$$
$$\sec z=\frac{1}{\cos z}, z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \csc z=\frac{1}{\sin z}, z\neq k\pi.$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$,
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

$\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ 的周期是 $2\pi i$, $\operatorname{th} z$ 的周期是 $\pi i$.

# 反三角函数和反双曲函数

设 $z=\cos w=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0,\quad e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}\text{ (双值)}.$$

因此反余弦函数为

$$w=\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

显然它是多值的.

同理, 我们有:

- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}(iz+\sqrt{z^2-1})$
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z=-\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$
- 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$
- 反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}$.

# 例题：解三角函数方程

## 例

解方程 $\sin z = 2$ 和 $\cos z = 2$.

## 解.

由于 $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$，我们有 $e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$. 于是 $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

由于 $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$，我们有 $e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$. 于是 $e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}$,

$$z = -i \operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) = 2k\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

∎