



合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

数学 (下)

主讲教师: 汪任 (目前由张神星代课)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: <https://zhangshenxing.gitee.io>

第二章 极限和连续

① 函数的极限

第一节 函数的极限

■ 函数极限的定义

函数在 $+\infty$ 的极限

和数列情形类似, 我们可以定义 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 的极限. 回忆数列的 ε - N 语言:

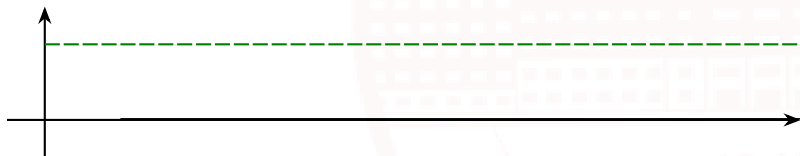
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ 使得当 } n > N \text{ 时, 有 } |a_n - a| < \varepsilon.$$

定义

设函数 $f(x)$ 的定义包含某个 $(M, +\infty)$, 即在 x 充分大时有定义, A 为一常数. 如果

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X \text{ 使得当 } x > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon, \quad \varepsilon\text{-}X \text{ 语言}$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$.



函数在 ∞ 的极限

从图像上看, 就是函数在 $(X, +\infty)$ 的限制的图像被夹在直线 $y = A \pm \varepsilon$ 之间. 我们将红字部分称为 ε - X 语言. 仿造上述定义, 我们有:

定义

设函数 $f(x)$ 当 $-x$ 充分大时有定义 (即存在 M 使得 $f(x)$ 在 $(-\infty, -M)$ 上有定义), A 为常数. 如果

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X \text{ 使得当 } x < -X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty)$.

定义

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 充分大时有定义 (即存在 M 使得 $f(x)$ 在 $(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$ 上有定义), A 为常数. 如果

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X \text{ 使得当 } |x| > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon,$$