第一章　复数与复变函数

本章中我们将学习复数和复变函数的基本概念, 以及复数列和复变函数的极限. 我们将从解一元三次方程问题出发, 逐步展示引入复数的必要性. 然后介绍复数的运算规则, 并展示复数的三角形式和指数形式在运算中所起的关键作用. 最后, 我们仿照实数情形引入复变函数、复数列以及极限的概念, 并讨论它们与实数情形的联系.

1.1　复数及其代数运算

1.1.1　复数的产生

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=b^2-4c.$$

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;

(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;①

(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.

可以看出, 当我们考虑在实数范围内解一元二次方程时, 可以直接舍去包含负数开平方的解. 这样不会影响我们得到方程的实数解. 然而在一元三次方程中, 即便只考虑实数解也会不可避免地引入负数开平方.

例 1.1　解方程 $x^3+6x-20=0$.

我们将使用由费罗最先发现, 并由卡尔达诺最先公开的解法.②

① 若 x_0 是多项式方程 $f(x)=0$ 的根, 则 $x-x_0$ 是 $f(x)$ 的因式, 即存在多项式 $g(x)$ 使得 $f(x)=(x-x_0)g(x)$. 若 $(x-x_0)^k$ 是 $f(x)$ 的因式, 但 $(x-x_0)^{k+1}$ 不是, 则称 x_0 是 $f(x)$ 或该方程的 k **重根**. 在定义 **??** 中我们将会定义一般函数零点的重数.

② 费罗发现了该方法后, 并没有发表他的结果, 因为当时人们常把他们的发现保密, 而向对手们提出挑战. 参考 [**?**, 第 13 章 4 节].

解: 设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望

$$u^3+v^3=20, \qquad uv=-2,$$

则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$. 解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

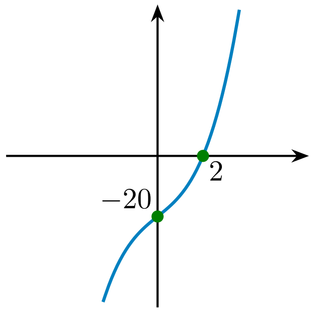

图 1.1 $y=x^3+6x-20$

所以

$$u=1\pm\sqrt{3}, \quad v=1\mp\sqrt{3}, \quad x=u+v=2.$$

这个方程是不是真的只有 $x=2$ 这一个实数解呢? 由方程左侧多项式导数为 $3x^2+6>0$ 可知其单调递增, 因此确实只有这一个实数解.

例 1.2 解方程 $x^3-7x+6=0$.

解: 同样地我们有 $x=u+v$, 其中

$$u^3+v^3=-6, \qquad uv=\frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程

$$X^2+6X+\frac{343}{27}=0.$$

然而这个方程没有实数解.

我们可以强行解得

$$u^3=-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3},$$

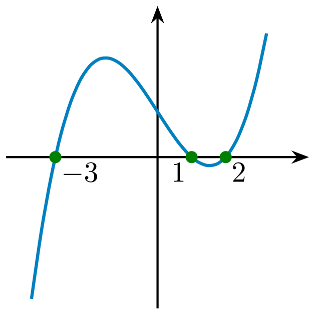

图 1.2 $y=x^3-7x+6$

$$u=\sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3}, \ \frac{-9+\sqrt{-3}}{6}, \ \frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地,

$$v=\frac{3-2\sqrt{-3}}{3}, \ \frac{-9-\sqrt{-3}}{6}, \ \frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

从而

$$x=u+v=2, \ -3, \ 1.$$

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言, 类似可得:[①]

$$x=u-\frac{p}{3u}, \quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}, \quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

通过分析函数图像的极值点可以知道:

① 若 $p=0, q>0$, 则选择 $u^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}$ 以避免 $u=0$.

(1) 当 $\Delta > 0$ 时, 有 1 个实根;

(2) 当 $\Delta \leqslant 0$ 时, 有 3 个实根 (含重根情形).

所以我们想要使用一元三次方程求根公式的话, 就必须接受负数开方. 为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 我们将在 **??**利用复数回答这个问题.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的带负数平方根的所谓虚数, 却是难以接受. 对复数没有清楚认识的这种情况, 反映在常被人引述的莱布尼茨的一段话中: *圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根.*② 直到后来通过十七、十八世纪一系列数学家对复变函数理论的发展和完善, 才使得人们逐渐接受复数并将其应用到数学和科学的各个角落. 科学发现的过程总是这样充满了曲折与挑战, 只有通过不断的研究、实验和修正, 才能逐步逼近真理.

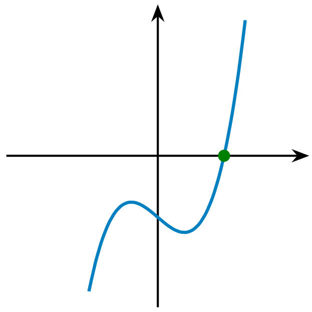

图 1.3 $\Delta > 0$

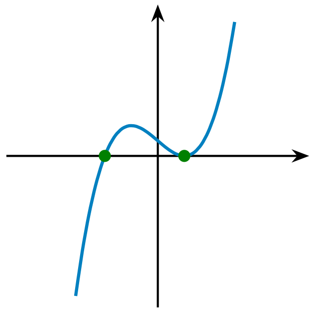

图 1.4 $\Delta = 0$

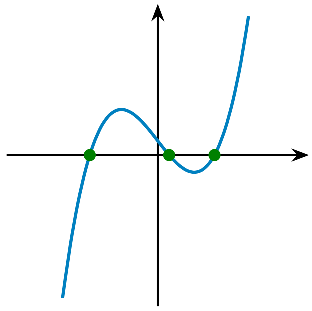

图 1.5 $\Delta < 0$

1.1.2 复数的概念

现在我们来正式介绍复数的概念. 由于方程 $x^2 = -1$ 在复数范围内有两个不同的根, 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们引入符号 i 来表示其中一个根.

定义 1.1

固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + y\mathrm{i}$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数. 分别称 x 和 y 为 z 的**实部**和**虚部**, 并记作 $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$.

本书中, 我们将不言自明地使用 $x, y, x_1, y_1, \cdots$ 等记号表示实数. 复数 $x + y\mathrm{i}$ 也可表达为形式 $x + \mathrm{i}y$.

记号 i 叫作**虚数单位**, 它最先是由欧拉引入并使用. 将全体复数记作 $\mathbb{C}$, 全体实数记作 $\mathbb{R}$.① 由于实数 x 可以自然地看

② 参考 [?, 第 13 章 2 节].

① 全体复数、实数、有理数、整数、自然数构成的集合分别记作 $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$, 整数集合记号来自其德语 Zahlen, 其余来自它们的英文名称 complex number, real number, rational number, natural number. 这些符号叫做空心体或白粗体, 手写时, 可在普通字母格式上添加一条竖线 (对于 $\mathbb{Z}$ 是斜线) 来区分. 有些文献使用黑粗体字母 $\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{N}$ 来表示这些集合.

成复数 $x+0\mathrm{i}$, 在此观点下, 我们有 $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$. 我们简记 $x+0\mathrm{i}=x, 0+y\mathrm{i}=y\mathrm{i}$.

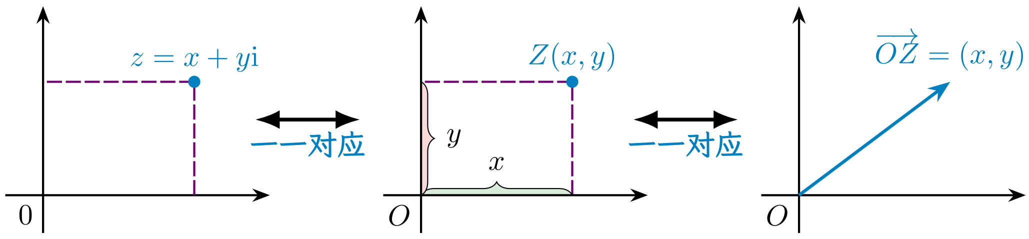

图 1.6 复数、平面上的点、平面向量一一对应

由定义可知, 每一个复数都可以唯一地表达成 $x+y\mathrm{i}$ 这样的形式. 对于建立了直角坐标系的平面, 平面上的点 (x,y) 和复数 $x+y\mathrm{i}$ 一一对应. 将建立起这种对应的平面称为**复平面**. 于是, 我们可将复数 z 与它对应的点 Z 等同起来. 复数 z 还可与复平面上起于原点、终于点 Z 的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 一一对应.

为了强调表示复数的字母 z, w 等的不同, 也可将对应复平面称之为 z 平面、w 平面等等.