复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

课程安排

本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2023 年 11 月 16 日.

课程安排

本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2023 年 11 月 16 日.

课程 QQ 群：(入群答案 **1400261B**)

- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

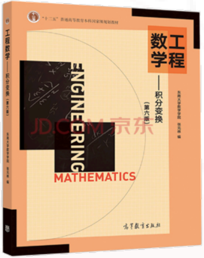
本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2023 年 11 月 16 日.

课程 QQ 群：(入群答案 **1400261B**)

- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

教材：

- 西安交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》



课程安排

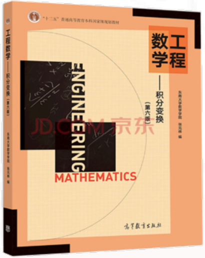
本课程共 10 周 40 课时，自 2023 年 9 月 12 日至 2023 年 11 月 16 日.

课程 QQ 群：(入群答案 **1400261B**)

- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

教材：

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》



成绩构成：

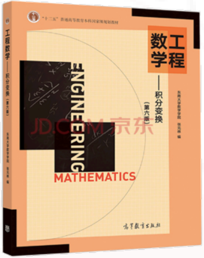
本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2023 年 11 月 16 日.

课程 QQ 群：(入群答案 **1400261B**)

- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

教材：

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》



成绩构成：

- 作业 15%, 每章交一次

课程安排

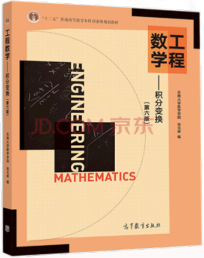
本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2023 年 11 月 16 日.

课程 QQ 群: (入群答案 **1400261B**)

- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

教材:

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》



成绩构成:

- 作业 15%, 每章交一次
- 课堂测验 25%, 一共 3 次, 取最高的两次

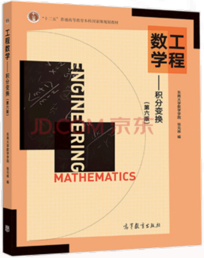
本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2023 年 11 月 16 日.

课程 QQ 群: (入群答案 **1400261B**)

- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

教材:

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》



成绩构成:

- 作业 15%, 每章交一次
- 课堂测验 25%, 一共 3 次, 取最高的两次
- 期末报告 10%

课程安排

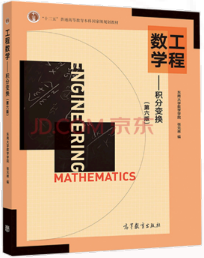
本课程共 10 周 40 课时，自 2023 年 9 月 12 日至 2023 年 11 月 16 日.

课程 QQ 群：(入群答案 **1400261B**)

- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

教材：

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》



成绩构成：

- 作业 15%，每章交一次
- 课堂测验 25%，一共 3 次，取最高的两次
- 期末报告 10%
- 期末考试 50%，至少 45 分才计算总评

复变函数的应用非常广泛，它包括：

复变函数的应用

复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……

复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……

复变函数的应用非常广泛, 它包括:

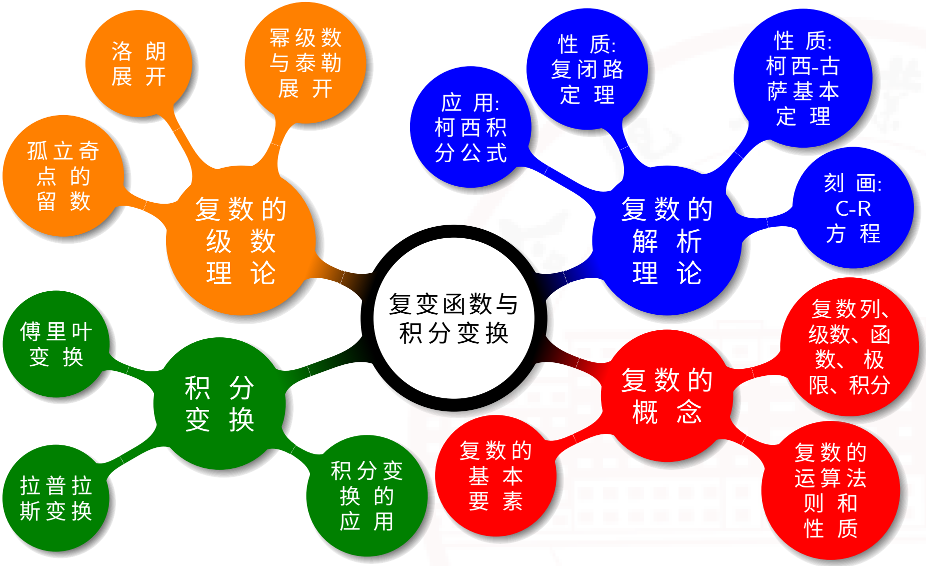
- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

复变函数的应用非常广泛, 它包括:

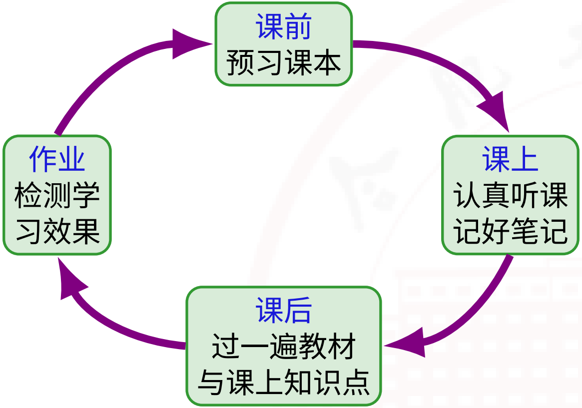
- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

可以说复变函数应用之广, 在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.

课程内容



复变函数与积分变换
复数的级数理论
洛朗展开
幂级数与泰勒展开
孤立奇点的留数
复数的解析理论
应用:柯西积分公式
性质:复闭路定理
性质:柯西-古萨基本定理
刻画:C-R方程
积分变换
傅里叶变换
拉普拉斯变换
积分变换的应用
复数的概念
复数列、级数、函数、极限、积分
复数的基本要素
复数的运算法则和性质


课前
预习课本
课上
认真听课
记好笔记
课后
过一遍教材
与课上知识点
作业
检测学
习效果

第一章　复数与复变函数

1. 复数及其代数运算
2. 复数的三角与指数形式
3. 复数的乘除、方幂与方根
4. 曲线和区域
5. 复变函数
6. 极限和连续性

复数起源于多项式方程的求根问题.

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$,

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=b^2-4c.$$

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=b^2-4c.$$

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=b^2-4c.$$

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=b^2-4c.$$

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;
(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=b^2-4c.$$

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;
(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根. 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根, 形式地计算可以发现它们满足原来的方程.

现在我们来考虑一元三次方程.

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望 $u^3+v^3=20, uv=-2$,

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望 $u^3+v^3=20, uv=-2$, 则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$.

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望 $u^3+v^3=20, uv=-2$, 则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$. 解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}$$

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望 $u^3+v^3=20, uv=-2$, 则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$. 解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

解

设 $x = u + v$, 则

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + 6(u+v) - 20 = 0.$$

我们希望 $u^3 + v^3 = 20, uv = -2$, 则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 - 20X - 8 = 0$. 解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$

所以 $u = 1 \pm \sqrt{3}, v = 1 \mp \sqrt{3}$,

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望 $u^3+v^3=20, uv=-2$, 则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$. 解得

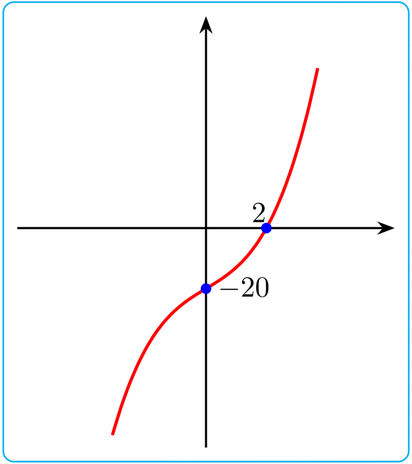
$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

所以 $u=1\pm\sqrt{3}, v=1\mp\sqrt{3}$, $x=u+v=2$.

那么这个方程是不是真的只有 $x=2$ 这一个解呢?

那么这个方程是不是真的只有 $x=2$ 这一个解呢？由 $f'(x)=3x^2+6>0$ 可知其单调递增，因此确实只有一个解.

那么这个方程是不是真的只有 $x = 2$ 这一个解呢？由 $f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$ 可知其单调递增，因此确实只有一个解.



例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0.$

例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解

同样地我们有 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解

同样地我们有 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$.

例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解

同样地我们有 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + \dfrac{343}{27} = 0$. 然而这个方程没有实数解.

例

解方程 $x^3-7x+6=0$.

解

同样地我们有 $x=u+v$, 其中

$$u^3+v^3=-6,\quad uv=\frac{7}{3}.$$

于是 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+\frac{343}{27}=0$. 然而这个方程没有实数解.

我们可以强行解得

$$u^3=-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}.$$

续解

$$u=\sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

续解

$$u=\sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

$$v=\frac{3-2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9-\sqrt{-3}}{6},\frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

续解

$$u=\sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

$$v=\frac{3-2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9-\sqrt{-3}}{6},\frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x=u+v=2,-3,1.$$

续解

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

$$v = \frac{3 - 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 - \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 + 5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x = u + v = 2, -3, 1.$$

所以我们从一条 “错误的路径” 走到了正确的目的地?

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言，类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言，类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

由于 $p=0$ 情形较为简单，所以我们不考虑这种情形.

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言, 类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

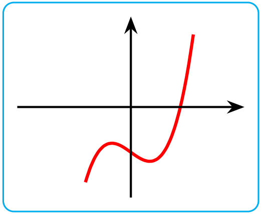
由于 $p=0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言，类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

由于 $p=0$ 情形较为简单，所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

(1) 当 $\Delta>0$ 时，有 1 个实根.



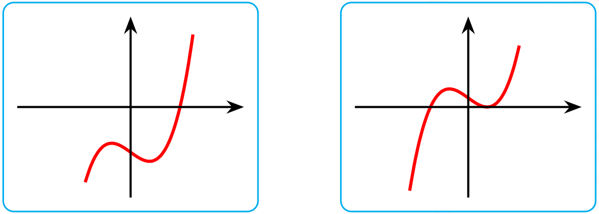
对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言, 类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

由于 $p=0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有 1 个实根.

(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有 2 个实根 $x=-\sqrt[3]{4q},\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).

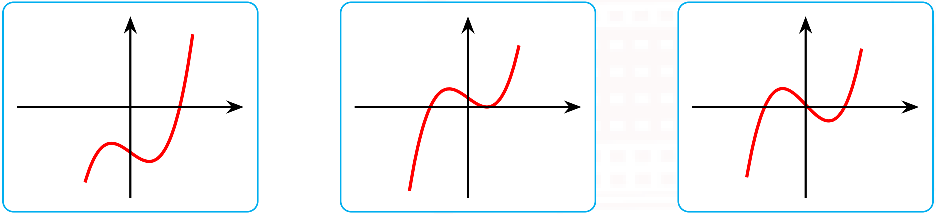


对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言，类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

由于 $p=0$ 情形较为简单，所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

(1) 当 $\Delta>0$ 时，有 1 个实根.
(2) 当 $\Delta=0$ 时，有 2 个实根 $x=-\sqrt[3]{4q},\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).
(3) 当 $\Delta<0$ 时，有 3 个实根.



所以我们想要使用求根公式的话，就必须接受负数开方.

所以我们想要使用求根公式的话，就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时，从求根公式一定能得到 3 个实根呢?

所以我们想要使用求根公式的话，就必须接受负数开方．那么为什么当 $\Delta < 0$ 时，从求根公式一定能得到 3 个实根呢？在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了．

所以我们想要使用求根公式的话，就必须接受负数开方．那么为什么当 $\Delta < 0$ 时，从求根公式一定能得到 3 个实根呢？在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了．

尽管在十六世纪，人们已经得到了三次方程的求根公式，然而对其中出现的虚数，却是难以接受．

所以我们想要使用求根公式的话，就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时，从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了.

尽管在十六世纪，人们已经得到了三次方程的求根公式，然而对其中出现的虚数，却是难以接受.

> 圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚的 -1 的平方根。
>
> 莱布尼兹 (Leibniz)

所以我们想要使用求根公式的话，就必须接受负数开方。那么为什么当 $\Delta < 0$ 时，从求根公式一定能得到 3 个实根呢？在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了。

尽管在十六世纪，人们已经得到了三次方程的求根公式，然而对其中出现的虚数，却是难以接受。

> 圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚的 -1 的平方根。
>
> 莱布尼兹 (*Leibniz*)

我们将在下一节使用更为现代的语言来解释和运用复数。

第一节　复数及其代数运算

- 复数的概念
- 复数的代数运算
- 共轭复数

复数的定义

现在我们来正式介绍复数的概念.

复数的定义

现在我们来正式介绍复数的概念.

定义

固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

现在我们来正式介绍复数的概念.

定义

固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

换言之, 每一个复数可以唯一地表达成 $x + yi$ 这样的形式.

现在我们来正式介绍复数的概念.

定义

固定一个记号 i, 复数就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

换言之, 每一个复数可以唯一地表达成 $x + yi$ 这样的形式. 也就是说, 复数全体构成一个二维实线性空间, 且 $\{1, i\}$ 是一组基.

现在我们来正式介绍复数的概念.

定义

固定一个记号 i, 复数就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

换言之, 每一个复数可以唯一地表达成 $x + yi$ 这样的形式. 也就是说, 复数全体构成一个二维实线性空间, 且 $\{1, i\}$ 是一组基.

我们将全体复数记作 $\mathbb{C}$, 全体实数记作 $\mathbb{R}$, 则 $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.

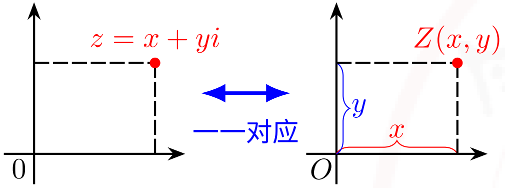
复平面

由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基,

复平面

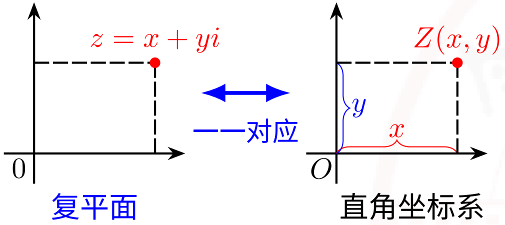
由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.

由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.

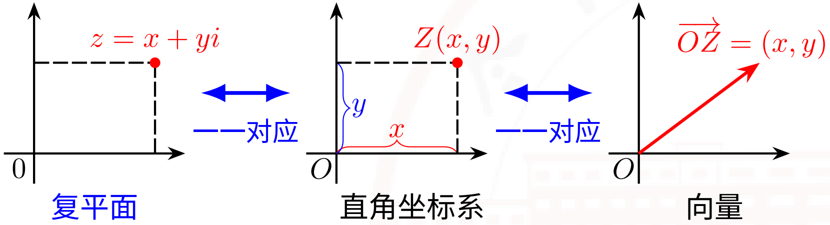


直角坐标系

由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.

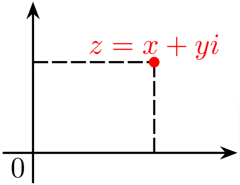


由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.

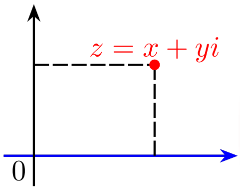


实部和虚部，虚数和纯虚数

当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数.

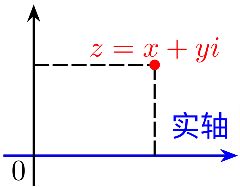


当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点.



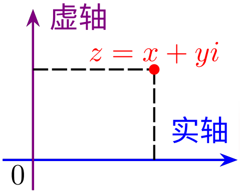
实部和虚部，虚数和纯虚数

当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数．它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点．因此我们称 x 轴为实轴．

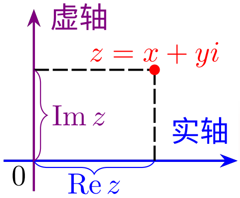


实部和虚部，虚数和纯虚数

当 $y = 0$ 时，$z = x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们称 x 轴为实轴. 相应地，称 y 轴为虚轴.



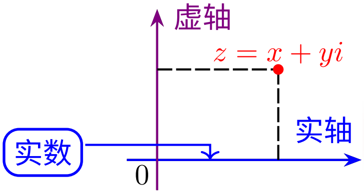
当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们称 x 轴为实轴. 相应地，称 y 轴为虚轴. 称 $z=x+yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的实部 $\operatorname{Re} z=x$ 和虚部 $\operatorname{Im} z=y$.

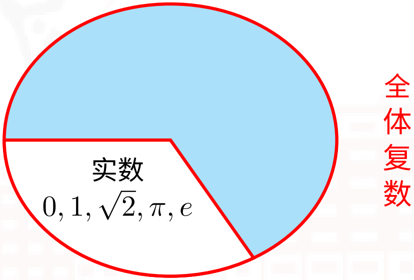


实部和虚部，虚数和纯虚数

当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们称 x 轴为实轴. 相应地，称 y 轴为虚轴. 称 $z=x+yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的实部 $\operatorname{Re} z=x$ 和虚部 $\operatorname{Im} z=y$.

当 $\operatorname{Im} z=0$ 时，z 是实数.

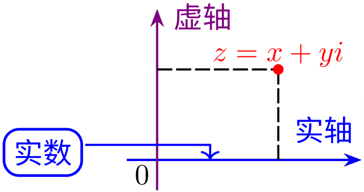


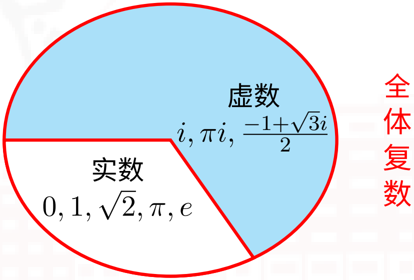


实部和虚部，虚数和纯虚数

当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们称 x 轴为实轴. 相应地，称 y 轴为虚轴. 称 $z=x+yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的实部 $\operatorname{Re} z=x$ 和虚部 $\operatorname{Im} z=y$.

当 $\operatorname{Im} z=0$ 时，z 是实数. 不是实数的复数是虚数.

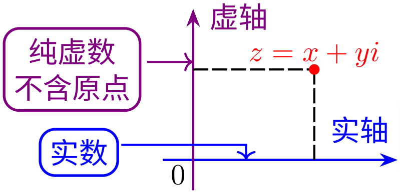


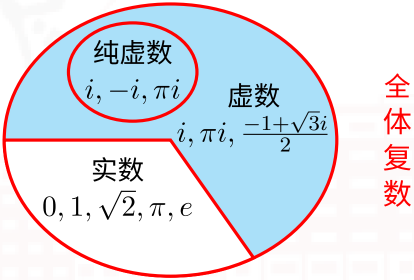


实部和虚部，虚数和纯虚数

当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们称 x 轴为实轴. 相应地，称 y 轴为虚轴. 称 $z=x+yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的实部 $\operatorname{Re} z=x$ 和虚部 $\operatorname{Im} z=y$.

当 $\operatorname{Im} z=0$ 时，z 是实数. 不是实数的复数是虚数. 当 $\operatorname{Re} z=0$ 且 $z\neq 0$ 时，称 z 是纯虚数.





例

实数 x 取何值时，$z=(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
(1) 实数; (2) 纯虚数.

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时，$z=(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是：
(1) 实数；(2) 纯虚数.

解

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是:
(1) 实数; (2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6.

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z=(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
(1) 实数; (2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z=x^2-5x-6=0$, 即 $x=-1$ 或 6.

(2) $\operatorname{Re} z=x^2-3x-4=0$, 即 $x=-1$ 或 4.

例

实数 x 取何值时，$z=(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
(1) 实数; (2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z=x^2-5x-6=0$，即 $x=-1$ 或 6.

(2) $\operatorname{Re} z=x^2-3x-4=0$，即 $x=-1$ 或 4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z=x^2-5x-6\neq 0$，因此 $x\neq -1$，$x=4$.

例

实数 x 取何值时，$z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是:
(1) 实数; (2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$，即 $x = -1$ 或 6.

(2) $\operatorname{Re} z = x^2 - 3x - 4 = 0$，即 $x = -1$ 或 4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 \neq 0$，因此 $x \neq -1$，$x = 4$.

练习

若 $x^2(1+i) + x(5+4i) + 4 + 3i$ 是纯虚数，则实数 $x =$______.

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z=(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
(1) 实数; (2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z=x^2-5x-6=0$, 即 $x=-1$ 或 6.

(2) $\operatorname{Re} z=x^2-3x-4=0$, 即 $x=-1$ 或 4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z=x^2-5x-6\neq 0$, 因此 $x\neq -1$, $x=4$.

练习

若 $x^2(1+i)+x(5+4i)+4+3i$ 是纯虚数, 则实数 $x=$ $\underline{\ -4\ }$.

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i.$

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

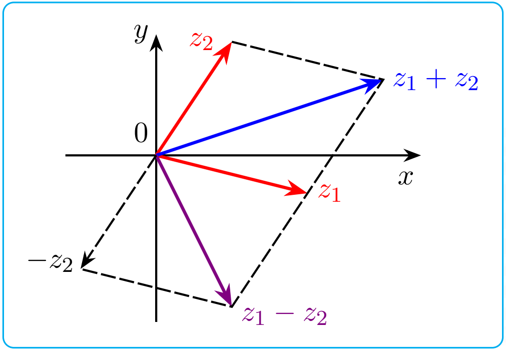
复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.



复数的乘除法

规定 $i \cdot i = -1.$

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

复数的乘除法

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2},$$

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘.

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘.
当 $z \neq 0$ 时, 还可以定义 $z^0 = 1, z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

典型例题：常见复数的幂次

例

典型例题：常见复数的幂次

例

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$

典型例题：常见复数的幂次

例

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. 一般地，对于整数 n,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

典型例题：常见复数的幂次

例

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1$.

例

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+i$,

例

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+i$, 则

$$z^2=2i,\quad z^3=-2+2i,\quad z^4=-4,\quad z^8=16=2^4.$$

例

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+i$, 则

$$z^2=2i,\quad z^3=-2+2i,\quad z^4=-4,\quad z^8=16=2^4.$$

我们把满足 $z^n=1$ 的复数 z 称为 n 次单位根.

例

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+i$, 则

$$z^2=2i,\quad z^3=-2+2i,\quad z^4=-4,\quad z^8=16=2^4.$$

我们把满足 $z^n=1$ 的复数 z 称为 n 次单位根. 那么 $1,i,-1,-i$ 是 4 次单位根, $1,\omega,\omega^2$ 是 3 次单位根.

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1+i+i^2+i^3+i^4=$______.

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1+i+i^2+i^3+i^4=$______.

解

根据等比数列求和公式，

$$1+i+i^2+i^3+i^4=\frac{i^5-1}{i-1}$$

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1+i+i^2+i^3+i^4 = \underline{\quad 1 \quad}$.

解

根据等比数列求和公式，

$$1+i+i^2+i^3+i^4 = \frac{i^5-1}{i-1} = \frac{i-1}{i-1} = 1.$$

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1+i+i^2+i^3+i^4=$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

解

根据等比数列求和公式，

$$1+i+i^2+i^3+i^4=\frac{i^5-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1.$$

练习 (2020 年 A 卷)

化简 $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2020}=$______.

例

化简 $1+i+i^2+i^3+i^4=$ ___1___.

解

根据等比数列求和公式，

$$1+i+i^2+i^3+i^4=\frac{i^5-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1.$$

练习 (2020 年 A 卷)

化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020}=$ ___1___.

复数全体构成一个域.

复数域

复数全体构成一个域. 所谓的域, 是指带有如下内容和性质的集合

复数全体构成一个域. 所谓的域, 是指带有如下内容和性质的集合

- 包含 $0, 1$, 且有四则运算;

复数域

复数全体构成一个域. 所谓的域, 是指带有如下内容和性质的集合

- 包含 $0, 1$, 且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;

复数全体构成一个域. 所谓的域, 是指带有如下内容和性质的集合

- 包含 $0, 1$, 且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a + 0 = a \times 1 = a$.

复数全体构成一个域. 所谓的域, 是指带有如下内容和性质的集合

- 包含 $0, 1$, 且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域.

复数全体构成一个域. 所谓的域, 是指带有如下内容和性质的集合

- 包含 $0, 1$, 且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域:

复数全体构成一个域. 所谓的域, 是指带有如下内容和性质的集合

- 包含 $0, 1$, 且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任何次数 $n \geqslant 1$ 的复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0) = 0$.

复数全体构成一个域. 所谓的域, 是指带有如下内容和性质的集合

- 包含 $0, 1$, 且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任何次数 $n \geqslant 1$ 的复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0) = 0$. 也就是说复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘积.

复数全体构成一个域. 所谓的域, 是指带有如下内容和性质的集合

- 包含 $0, 1$, 且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任何次数 $n \geqslant 1$ 的复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0) = 0$. 也就是说复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘积. 我们会在第五章证明该结论.

在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系,

在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系，换言之它们是有序域，即存在一个满足下述性质的 $>$:

复数域不是有序域

在 $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系，换言之它们是有序域，即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$，则要么 $a > b$，要么 $b > a$;

复数域不是有序域

在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系，换言之它们是有序域，即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$，则要么 $a > b$，要么 $b > a$;
- 若 $a > b$，则对于任意 c，$a + c > b + c$;

在 $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系，换言之它们是有序域，即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a\neq b$，则要么 $a>b$，要么 $b>a$;
- 若 $a>b$，则对于任意 c，$a+c>b+c$;
- 若 $a>b, c>0$，则 $ac>bc$.

复数域不是有序域

在 $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则要么 $a > b$, 要么 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c, $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

而 $\mathbb{C}$ 却不是有序域.

在 $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a\neq b$, 则要么 $a>b$, 要么 $b>a$;
- 若 $a>b$, 则对于任意 c, $a+c>b+c$;
- 若 $a>b, c>0$, 则 $ac>bc$.

而 $\mathbb{C}$ 却不是有序域. 如果 $i>0$, 则

$$-1=i\cdot i>0,\quad -i=-1\cdot i>0.$$

复数域不是有序域

在 $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系，换言之它们是有序域，即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a\neq b$，则要么 $a>b$，要么 $b>a$;
- 若 $a>b$，则对于任意 c，$a+c>b+c$;
- 若 $a>b, c>0$，则 $ac>bc$.

而 $\mathbb{C}$ 却不是有序域. 如果 $i>0$，则

$$-1=i\cdot i>0,\quad -i=-1\cdot i>0.$$

于是 $0>i$，矛盾！同理 $i<0$ 也不可能.

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z}=x-yi$.

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

共轭复数

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z}=x-yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z}=x-yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
- $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{z_1/z_2}=\overline{z_1}/\overline{z_2}$.

共轭复数

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$.
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

共轭复数

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

从定义出发，不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$.
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$.
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
- $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$.

练习

z 关于虚轴的对称点是______.

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$.
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

练习

z 关于虚轴的对称点是 $\underline{\ -\overline{z}\ }$.

例题：共轭复数判断实数

例

设 $z=x+yi$ 且 $y\neq 0,\pm 1$. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

例题：共轭复数判断实数

例

设 $z=x+yi$ 且 $y\neq 0,\pm 1$. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即

$$z(1+\overline{z}^2) = \overline{z}(1+z^2), \quad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1) = 0.$$

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即

$$z(1+\overline{z}^2) = \overline{z}(1+z^2), \quad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1) = 0.$$

由 $y \neq 0$ 可知 $z \neq \overline{z}$.

例

设 $z=x+yi$ 且 $y\neq 0,\pm1$. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即

$$z(1+\overline{z}^2)=\overline{z}(1+z^2),\quad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1)=0.$$

由 $y\neq 0$ 可知 $z\neq\overline{z}$. 故上述等式等价于 $z\overline{z}=1$, 即 $x^2+y^2=1$. □

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到.

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$，然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$,

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$, 因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$

□

例题：复数的代数计算

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数，

例题：复数的代数计算

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例题：复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例

$z = -\dfrac{1}{i} - \dfrac{3i}{1-i}$，求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\bar{z}$.

例题：复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例

$z = -\dfrac{1}{i} - \dfrac{3i}{1-i}$，求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\bar{z}$.

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$$

例题：复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2+y_2^2}.$$

例

$z=-\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$，求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\bar{z}$.

解

$$z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=i-\frac{3i-3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$$

例题：复数的代数计算

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例

$z = -\dfrac{1}{i} - \dfrac{3i}{1-i}$，求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\overline{z}$.

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

因此

$$\operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad z\overline{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

例题：复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$，求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

例题：复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i}$$

例题：复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$，求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2}$$

例题：复数的代数计算

例

设 $z_1=5-5i, z_2=-3+4i$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5i}{-3+4i}=\frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2}$$
$$=\frac{(-15-20)+(-20+15)i}{25}$$

例

设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2}$$
$$= \frac{(-15-20)+(-20+15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,$$

例题：复数的代数计算

例

设 $z_1=5-5i$, $z_2=-3+4i$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5-5i}{-3+4i}=\frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2}$$
$$=\frac{(-15-20)+(-20+15)i}{25}=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i,$$

因此 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=-\dfrac{7}{5}+\dfrac{1}{5}i.$

第二节　复数的三角与指数形式

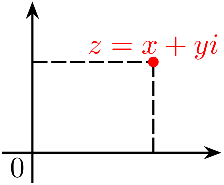
- 复数的模和辐角
- 复数的三角形式和指数形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式.

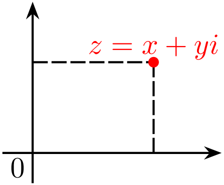
由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.

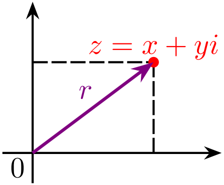


由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式．以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系．



定义

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式．以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系．



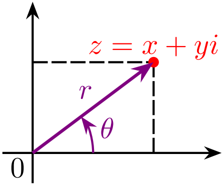
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

定义

- 称 r 为 z 的**模**，记为 $|z| = r$.

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式．以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系．



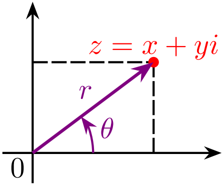
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \text{ 或 } \arctan \frac{y}{x} \pm \pi$$

定义

- 称 r 为 z 的**模**，记为 $|z| = r$.
- 称 θ 为 z 的**辐角**，记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$.

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式．以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系．



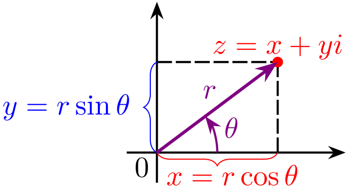
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} \text{ 或 } \arctan\frac{y}{x} \pm \pi$$

定义

- 称 r 为 z 的模，记为 $|z| = r$.
- 称 θ 为 z 的辐角，记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$. 0 的辐角没有意义.

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式．以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系．



$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta=\arctan\frac{y}{x}\ \text{或}\ \arctan\frac{y}{x}\pm\pi$$

定义

- 称 r 为 z 的**模**，记为 $|z|=r$.
- 称 θ 为 z 的**辐角**，记为 $\operatorname{Arg} z=\theta$. 0 的辐角没有意义.

主辐角

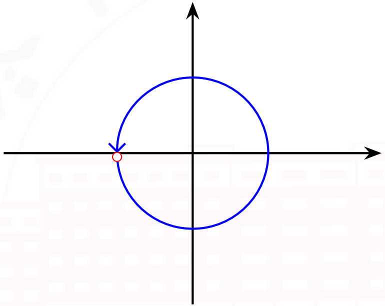
任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.

主辐角

任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**或辐角主值, 记作 $\arg z$.

任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**或辐角主值, 记作 $\arg z$.

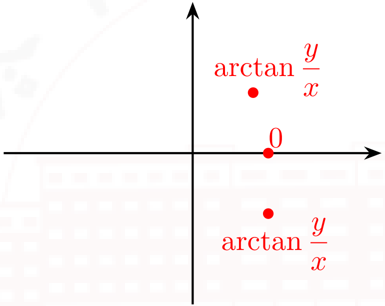
$$\arg z = \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$



主辐角

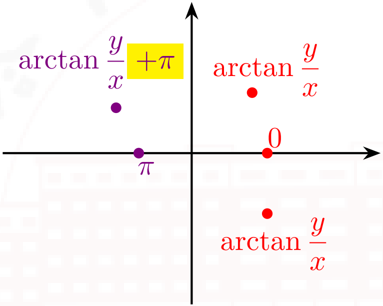
任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**或辐角主值, 记作 $\arg z$.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \end{cases}$$



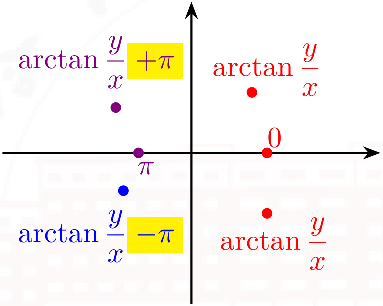
任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为主辐角或辐角主值, 记作 $\arg z$.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \end{cases}$$



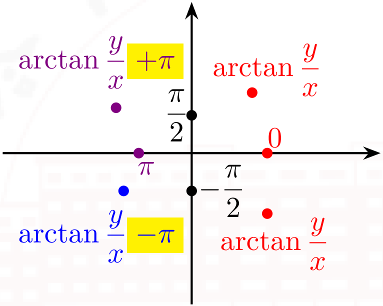
任意 $z\neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi,\pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**或辐角主值, 记作 $\arg z$.

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0, y\geqslant 0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0, y<0;\end{cases}$$



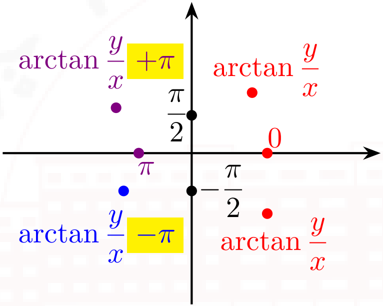
任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个．我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个，并称之为主辐角或辐角主值，记作 $\arg z$．

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



任意 $z\neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi,\pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**或辐角主值, 记作 $\arg z$.

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant 0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0;\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0;\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}$$



那么 $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

复数模的性质

复数的模满足如下性质:

复数模的性质

复数的模满足如下性质:

模的性质汇总

复数模的性质

复数的模满足如下性质:

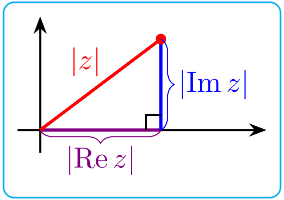
模的性质汇总

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;

复数的模满足如下性质:

模的性质汇总

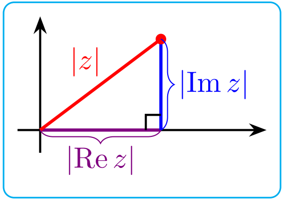
- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;
- $|\mathrm{Re}\, z|\,, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$;

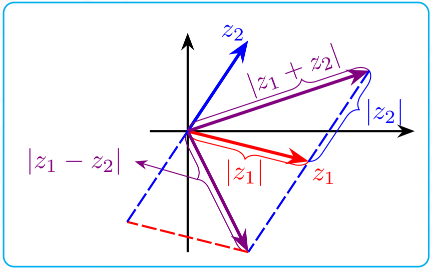


复数的模满足如下性质:

模的性质汇总

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

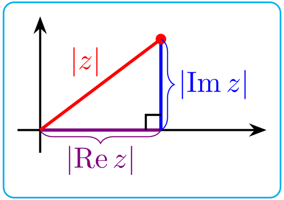


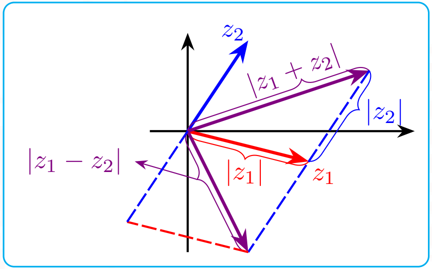


复数的模满足如下性质:

模的性质汇总

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.





例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

而 $\overline{z_1 \overline{z_2}} = \overline{z_1} z_2$, 所以两侧相等. □

例

证明 (1) $|z_1z_2|=|z_1\overline{z_2}|=|z_1|\cdot|z_2|$;
(2) $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2=z_1z_2\cdot\overline{z_1z_2}=z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2}=|z_1|^2\cdot|z_2|^2,$$

所以 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.

而 $\overline{z_1\overline{z_2}}=\overline{z_1}z_2$, 所以两侧相等. □

例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;

(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

而 $\overline{z_1 \overline{z_2}} = \overline{z_1} z_2$, 所以两侧相等. □

例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.
(2) 因为

$$\begin{aligned} \text{左边} &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ \text{右边} &= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 \overline{z_2}}, \end{aligned}$$

而 $\overline{z_1 \overline{z_2}} = \overline{z_1} z_2$, 所以两侧相等. □

例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(2) 因为

$$\begin{aligned} \text{左边} &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2, \\ \text{右边} &= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 \overline{z_2}}, \end{aligned}$$

而 $\overline{z_1 \overline{z_2}} = \overline{z_1} z_2$, 所以两侧相等. □

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ (欧拉恒等式),

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta).$$

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.
求复数的三角/指数形式的关键在于计算模和辐角.

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化成三角形式和指数形式.

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化成三角形式和指数形式.

解

$r=|z|=\sqrt{12+4}=4.$

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化成三角形式和指数形式.

解

$r=|z|=\sqrt{12+4}=4.$ 由于 z 在第三象限,

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化成三角形式和指数形式.

解

$r=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第三象限, 因此

$$\arg z=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}.$$

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化成三角形式和指数形式.

解

$r=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第三象限，因此

$$\arg z=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=4e^{-\frac{5\pi i}{6}}.$$

例

将 $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+i\cos\dfrac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解

$$|z|=1,$$

例

将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解

$$|z|=1,\qquad \arg z=\arctan\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)}=\arctan\cot\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}.$$

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+i\cos\dfrac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解

$$|z|=1,\qquad \arg z=\arctan\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)}=\arctan\cot\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}.$$

因此 $z=\cos\dfrac{3\pi}{10}+i\sin\dfrac{3\pi}{10}=e^{\frac{3\pi i}{10}}$.

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解

$$|z|=1,\qquad \arg z=\arctan\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)}=\arctan\cot\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}.$$

因此 $z=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}=e^{\frac{3\pi i}{10}}$.

另解

$$z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$$

例

将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解

$$|z|=1,\qquad \arg z=\arctan\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)}=\arctan\cot\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}.$$

因此 $z=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}=e^{\frac{3\pi i}{10}}$.

另解

$$z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$$

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解

$$|z|=1,\qquad \arg z=\arctan\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)}=\arctan\cot\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}.$$

因此 $z=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}=e^{\frac{3\pi i}{10}}$.

另解

$$z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$$
$$=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}=e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

求复数的三角或指数形式时，我们只需要任取一个辐角就可以了，不要求必须是主辐角.

典型例题：求复数的三角/指数形式

求复数的三角或指数形式时，我们只需要任取一个辐角就可以了，不要求必须是主辐角.

练习

将 $z = \sqrt{3} - 3i$ 化成三角形式和指数形式.

典型例题：求复数的三角/指数形式

求复数的三角或指数形式时，我们只需要任取一个辐角就可以了，不要求必须是主辐角.

练习

将 $z=\sqrt{3}-3i$ 化成三角形式和指数形式.

答案

$z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{3}}$，写成 $\frac{5\pi}{3}$ 也可以.

模为 1 的复数

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

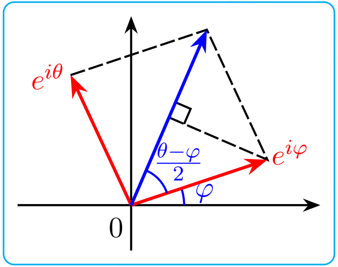
模为 1 的复数

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

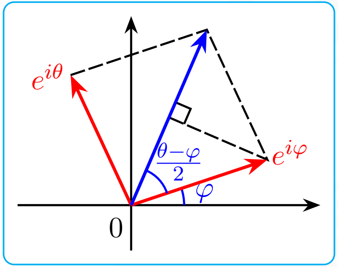
$$e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$



模为 1 的复数

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$

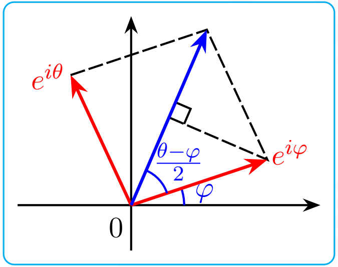


例

$z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha$

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$

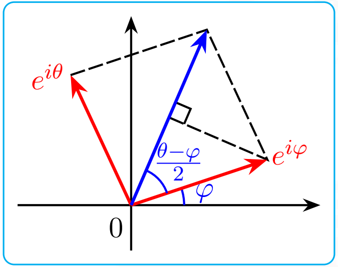


例

$z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=e^0+e^{(\pi-\alpha)i}$

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$

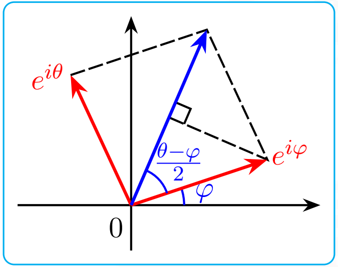


例

$$z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{0}+e^{(\pi-\alpha)i}=2\cos\frac{\pi-\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}$$

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$



例

$$z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{0}+e^{(\pi-\alpha)i}=2\cos\frac{\pi-\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}.$$

第三节　复数的乘除、乘幂与方根

- 复数的乘除与三角/指数表示
- 复数的乘幂
- 复数的方根

三角/指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

三角/指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

换言之,

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

换言之，

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

关于多值函数的等式的含义是指：两边所能取到的值构成的集合相等.

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

关于多值函数的等式的含义是指: 两边所能取到的值构成的集合相等. 例如此处关于辐角的等式的含义是:

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \{\theta_1 - \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

注意上述等式中 Arg 不能换成 $\arg$, 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立.

注意上述等式中 Arg 不能换成 $\arg$, 也就是说

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2,\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$$

不一定成立. 这是因为 $\arg z_1\pm\arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi,\pi]$ 上.

注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 \pm \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上. 例如

$$(-1+i)(-1+i) = -2i,$$

注意上述等式中 Arg 不能换成 $\arg$, 也就是说

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2,\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$$

不一定成立. 这是因为 $\arg z_1\pm\arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi,\pi]$ 上. 例如

$$(-1+i)(-1+i)=-2i,$$

$$\arg(-1+i)+\arg(-1+i)=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2},$$

注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2,\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$$

不一定成立. 这是因为 $\arg z_1\pm\arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi,\pi]$ 上. 例如

$$(-1+i)(-1+i)=-2i,$$

$$\arg(-1+i)+\arg(-1+i)=\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{2},$$

$$\arg(-2i)=-\frac{\pi}{2}.$$

证明

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

证明

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big] \end{aligned}$$

证明

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2\big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big] \\
&= r_1 r_2\big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big]
\end{aligned}
$$

证明

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big] \\ &= r_1 r_2\big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big] \end{aligned}$$

因此乘法情形得证.

复数的乘除与三角/指数表示

证明

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2\big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big] \\ &= r_1 r_2\big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big] \end{aligned}$$

因此乘法情形得证.

设 $\dfrac{z_1}{z_2} = re^{i\theta}$,

证明

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big] \\ &= r_1r_2\big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big] \end{aligned}$$

因此乘法情形得证.

设 $\dfrac{z_1}{z_2} = re^{i\theta}$, 则由乘法情形可知

$$rr_2 = r_1, \quad \theta + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1.$$

证明

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2\big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big]\\
&= r_1 r_2\big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big]
\end{aligned}
$$

因此乘法情形得证.

设 $\dfrac{z_1}{z_2} = re^{i\theta}$, 则由乘法情形可知

$$
rr_2 = r_1, \qquad \theta + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1.
$$

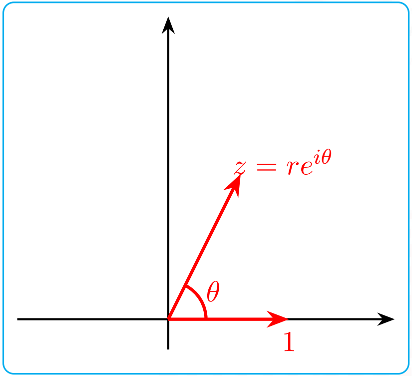
因此 $r = \dfrac{r_1}{r_2}, \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. □

乘积的几何意义

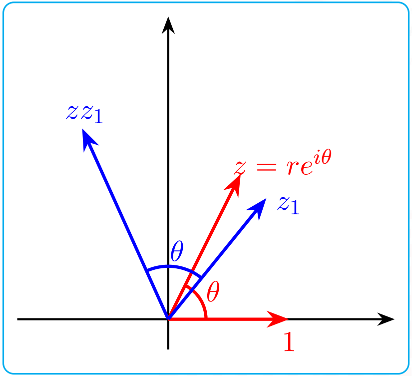
从该定理可以看出，乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍，并沿逆时针旋转角度 θ.

乘积的几何意义

从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍, 并沿逆时针旋转角度 θ.



从该定理可以看出，乘以复数 $z=re^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍，并沿逆时针旋转角度 θ.



例题：复数解决平面几何问题

例

已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

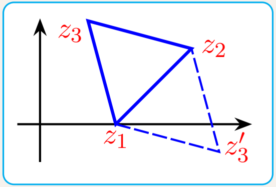
例题：复数解决平面几何问题

例

已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2+i$，求它的另一个顶点.

解

由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$，



例题：复数解决平面几何问题

续解

因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\exp\left(\pm\frac{\pi i}{3}\right) = (1+i)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

续解

因此

$$
\begin{aligned}
z_3 - z_1 &= (z_2 - z_1)\exp\left(\pm\frac{\pi i}{3}\right) = (1+i)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i,
\end{aligned}
$$

例题：复数解决平面几何问题

续解

因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\exp\left(\pm\frac{\pi i}{3}\right) = (1+i)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i.$$

复数的乘幂

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \neq 0.$

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \neq 0$. 根据复数三角/指数形式的乘法和除法运算法则，我们有

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \neq 0$. 根据复数三角/指数形式的乘法和除法运算法则，我们有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}\neq 0$. 根据复数三角/指数形式的乘法和除法运算法则, 我们有

$$\boxed{z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^ne^{in\theta},\quad \forall n\in\mathbb{Z}.}$$

特别地, 当 $r=1$ 时, 我们得到棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \ \ 2\cos^2\theta - \ \ 1,\\ \cos(3\theta) &= \ \ 4\cos^3\theta - \ \ 3\cos\theta,\\ \cos(4\theta) &= \ \ 8\cos^4\theta - \ \ 8\cos^2\theta + 1,\\ \cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.\end{aligned}$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1, \\
\cos(3\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \\
\cos(4\theta) &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \\
\cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}$$

一般地，可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式，

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1, \\
\cos(3\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \\
\cos(4\theta) &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \\
\cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}$$

一般地, 可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式, 这个多项式

$$g_n(T) = 2^{n-1}T^n - n2^{n-3}T^{n-2} + \cdots$$

叫做切比雪夫多项式.

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \ \ 2\cos^2\theta - \ \ 1, \\
\cos(3\theta) &= \ \ 4\cos^3\theta - \ \ 3\cos\theta, \\
\cos(4\theta) &= \ \ 8\cos^4\theta - \ \ 8\cos^2\theta + 1, \\
\cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}$$

一般地, 可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式, 这个多项式

$$g_n(T) = 2^{n-1}T^n - n2^{n-3}T^{n-2} + \cdots$$

叫做切比雪夫多项式. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

例

求 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

典型例题：复数乘幂的计算

例

求 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

典型例题：复数乘幂的计算

例

求 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，因此

$$\begin{aligned}&(1+i)^n+(1-i)^n\\=\;&2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

例

求 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，因此

$$\begin{aligned}&(1+i)^n+(1-i)^n\\&=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\&=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.\end{aligned}$$

例

求 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，因此

$$\begin{aligned}&(1+i)^n+(1-i)^n\\ &=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\ &=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.\end{aligned}$$

练习

求 $(\sqrt{3}+i)^{2022}=$__________.

例

求 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，因此

$$\begin{aligned}&(1+i)^n+(1-i)^n\\&=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\&=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.\end{aligned}$$

练习

求 $(\sqrt{3}+i)^{2022}=$ $\underline{\quad -2^{2022} \quad}$.

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$.

复数的方根

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$.

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$.

为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为算术根.

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$.

为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为算术根.

由于 $n\varphi$ 和 θ 的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

故

$$
\begin{aligned}
w = w_k &= \sqrt[n]{r}\exp\frac{(\theta+2k\pi)i}{n} \\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
w = w_k &= \sqrt[n]{r}\exp\frac{(\theta+2k\pi)i}{n} \\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).
\end{aligned}
$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ 两两不同.

故

$$w = w_k = \sqrt[n]{r}\exp\frac{(\theta+2k\pi)i}{n}$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

故

$$w = w_k = \sqrt[n]{r}\exp\frac{(\theta+2k\pi)i}{n}$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \ldots, n-1$. 故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值.

故

$$w = w_k = \sqrt[n]{r}\exp\frac{(\theta+2k\pi)i}{n}$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

不难看出，$w_k = w_{k+n}$，而 $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ 两两不同．因此只需取 $k = 0, 1, \ldots, n-1$．故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值．

这些根的模都相等，且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\dfrac{2\pi}{n}$．

故

$$w = w_k = \sqrt[n]{r}\exp\frac{(\theta+2k\pi)i}{n}$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \dots, n-1$. 故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值.

这些根的模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\dfrac{2\pi}{n}$. 因此它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点.

典型例题：复数方根的计算

例

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

典型例题：复数方根的计算

例

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\exp\left(\dfrac{\pi i}{4}\right)$,

典型例题：复数方根的计算

例

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\exp\left(\dfrac{\pi i}{4}\right)$, 因此

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\exp\frac{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)i}{4},\quad k=0,1,2,3.$$

典型例题：复数方根的计算

例

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$，因此

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\exp\frac{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)i}{4},\quad k=0,1,2,3.$$

所以该方根所有值为

$$w_0=\sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi i}{16}},\quad w_1=\sqrt[8]{2}e^{\frac{9\pi i}{16}},\quad w_2=\sqrt[8]{2}e^{\frac{17\pi i}{16}},\quad w_3=\sqrt[8]{2}e^{\frac{25\pi i}{16}}.$$

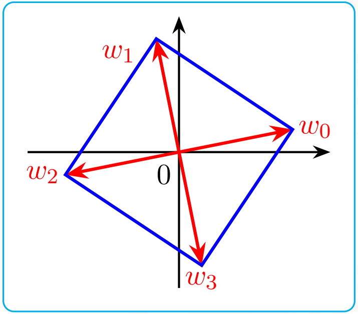
典型例题：复数方根的计算

显然 $w_{k+1} = iw_k$,

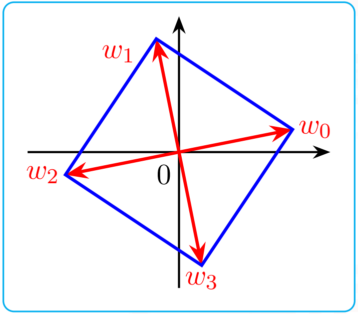
显然 $w_{k+1}=iw_k$, 所以 w_0,w_1,w_2,w_3 形成了一个正方形.

典型例题：复数方根的计算

显然 $w_{k+1} = iw_k$, 所以 w_0, w_1, w_2, w_3 形成了一个正方形.



显然 $w_{k+1}=iw_k$，所以 w_0,w_1,w_2,w_3 形成了一个正方形.

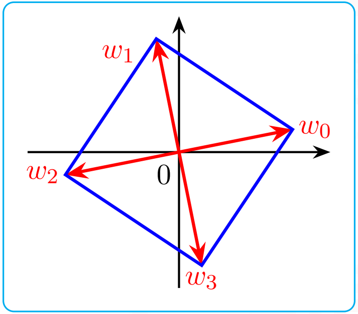


练习

求 $\sqrt[6]{-1}=$________________________.

典型例题：复数方根的计算

显然 $w_{k+1} = iw_k$, 所以 w_0, w_1, w_2, w_3 形成了一个正方形.



练习

求 $\sqrt[6]{-1} =$ $\underline{\pm\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}, \pm i, \pm\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}}$.

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$ 不成立.

方幂和方根的辐角等式

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$ 不成立. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \operatorname{Arg} z = n \arg z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时，$\mathrm{Arg}(z^n) = n\,\mathrm{Arg}\,z$ 不成立. 这是因为

$$\mathrm{Arg}(z^n) = n\arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n\,\mathrm{Arg}\,z = n\arg z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\mathrm{Arg}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\mathrm{Arg}\,z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

方幂和方根的辐角等式

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$ 不成立. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \operatorname{Arg} z = n \arg z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Arg} z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

其中左边表示 z 的所有 n 次方根的所有辐角.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-q/2+\sqrt{\Delta}$, $\omega=e^{2\pi i/3}$.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-q/2+\sqrt{\Delta}$, $\omega=e^{2\pi i/3}$. 那么

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-q/2+\sqrt{\Delta}$, $\omega=e^{2\pi i/3}$. 那么

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-q/2+\sqrt{\Delta}$, $\omega=e^{2\pi i/3}$. 那么

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果 $\Delta<0$, 则 $p<0$, $|u|^2=-p/3$. 从而 $v=\overline{u}$.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-q/2+\sqrt{\Delta}$, $\omega=e^{2\pi i/3}$. 那么

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果 $\Delta<0$, 则 $p<0$, $|u|^2=-p/3$. 从而 $v=\overline{u}$. 设 $\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\Delta}}=u_1,u_2,u_3$,

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设实数 α 满足 $\alpha^3=-q/2+\sqrt{\Delta}$, $\omega=e^{2\pi i/3}$. 那么

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果 $\Delta<0$, 则 $p<0$, $|u|^2=-p/3$. 从而 $v=\overline{u}$. 设 $\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\Delta}}=u_1,u_2,u_3$, 则我们得到 3 个实根

$$x=u_1+\overline{u_1},\ u_2+\overline{u_2},\ u_3+\overline{u_3}.$$

第四节　曲线和区域

- 复数表平面曲线
- 区域的定义
- 区域的特性

典型例题：复数方程表平面图形

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示，这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示，这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

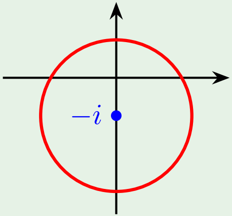
例

(1) $|z+i|=2.$

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示，这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例

(1) $|z+i|=2$. 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体，即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.

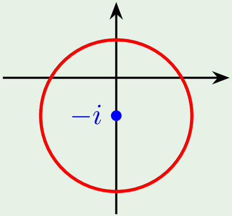


典型例题：复数方程表平面图形

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示，这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例

(1) $|z+i|=2$. 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体，即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆. 一般的圆方程为 $|z-z_0|=R$，其中 z_0 是圆心，R 是半径.



典型例题：复数方程表平面图形

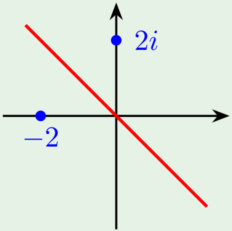
例（续）

(2) $|z-2i|=|z+2|$.

典型例题：复数方程表平面图形

例 (续)

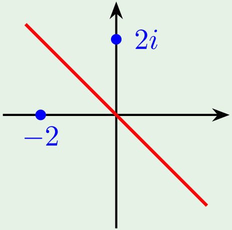
(2) $|z-2i|=|z+2|$. 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点，即二者连线的垂直平分线.



典型例题：复数方程表平面图形

例（续）

(2) $|z-2i|=|z+2|$. 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点，即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 $x+y=0$.



典型例题：复数方程表平面图形

例（续）

(3) $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4.$

典型例题：复数方程表平面图形

例 (续)

(3) $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

例 (续)

(3) $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$.

例 (续)

(3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

典型例题：复数方程表平面图形

例 (续)

(3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

(5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$.

例 (续)

(3) $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.
(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.
(5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

典型例题：复数方程表平面图形

例 (续)

(3) $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

(5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

练习

$z^2+\overline{z}^2=1$ 和 $z^2-\overline{z}^2=i$ 分别表示什么图形?

例（续）

(3) $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

(5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

练习

$z^2+\overline{z}^2=1$ 和 $z^2-\overline{z}^2=i$ 分别表示什么图形?

答案

双曲线 $x^2-y^2=\dfrac{1}{2}$ 和双曲线 $xy=\dfrac{1}{4}$.

邻域

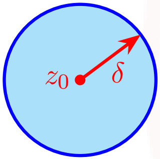
为了引入极限的概念，我们需要考虑点的邻域.

邻域

为了引入极限的概念，我们需要考虑点的邻域．类比于高等数学中的邻域和去心邻域，我们在复变函数中，称开圆盘

$$U(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个 δ-邻域，



邻域

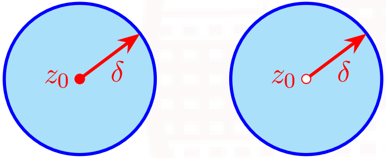
为了引入极限的概念，我们需要考虑点的邻域．类比于高等数学中的邻域和去心邻域，我们在复变函数中，称开圆盘

$$U(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

为 z_0 的一个 δ-邻域，称去心开圆盘

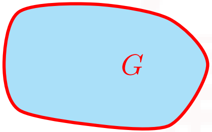
$$\mathring{U}(z_0, \delta) = z : 0 < |z - z_0| < \delta$$

为 z_0 的一个去心 δ-邻域.

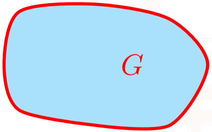


内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集，$z_0 \in \mathbb{C}$.

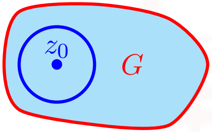


设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:



设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

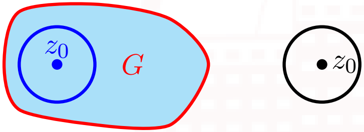
(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.



设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

(2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.

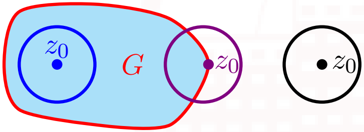


设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

(2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.

(3) 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.



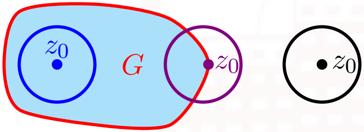
设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

(2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.

(3) 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能.



内部、外部、边界

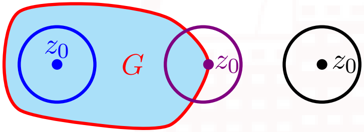
设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

(2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.

(3) 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.



如果 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个开集.

如果 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个开集. 例如

$$|z-z_0|<R,\quad 1<\operatorname{Re} z<3,\quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集.

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z-z_0|<R,\quad 1<\operatorname{Re} z<3,\quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集.

如果 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个开集。例如

$$|z-z_0|<R, \quad 1<\operatorname{Re} z<3, \quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集。如果 G 的所有边界点都属于 G，称 G 是一个闭集。这等价于它的补集是开集。

如果 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个开集. 例如

$$|z-z_0|<R,\quad 1<\operatorname{Re} z<3,\quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G，称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

直观上看：开集往往由 $>, <$ 的不等式给出，闭集往往由 $\geqslant, \leqslant$ 的不等式给出.

如果 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个开集。例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G，称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

直观上看：开集往往由 $>, <$ 的不等式给出，闭集往往由 $\geqslant, \leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z-z_0|<R, \quad 1<\operatorname{Re} z<3, \quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

直观上看: 开集往往由 $>,<$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant,\leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0,R)$ 中, 则称它是有界的.

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z-z_0|<R, \quad 1<\operatorname{Re} z<3, \quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

直观上看: 开集往往由 $>,<$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant,\leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0,R)$ 中, 则称它是有界的. 否则称它是无界的.

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域.

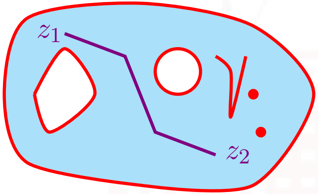
定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域. 也就是说，区域是连通的开集.

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域. 也就是说，区域是连通的开集.

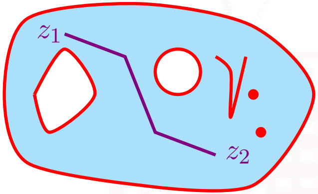
观察下侧的图案，青色部分是一个区域 (不包含红色部分).



定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域. 也就是说，区域是连通的开集.

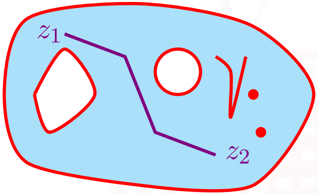
观察下侧的图案，青色部分是一个区域 (不包含红色部分). 红色的线条和点是它的边界.



定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域. 也就是说，区域是连通的开集.

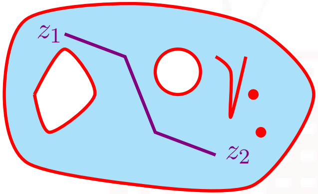
观察下侧的图案，青色部分是一个区域 (不包含红色部分). 红色的线条和点是它的边界. 区域和它的边界一起构成了闭区域，记作 $\overline{D}$.



定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域．也就是说，区域是连通的开集．

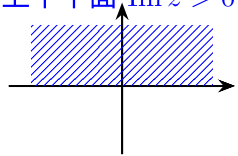
观察下侧的图案，青色部分是一个区域 (不包含红色部分)．红色的线条和点是它的边界．区域和它的边界一起构成了闭区域，记作 $\overline{D}$．它是一个闭集．



复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

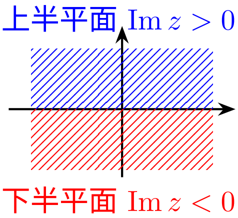
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$



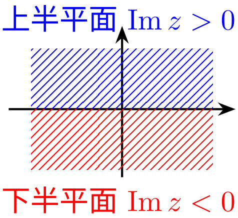
常见区域

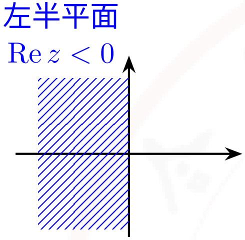
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.



常见区域

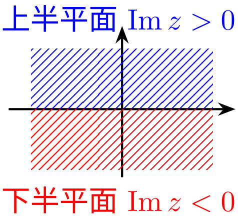
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

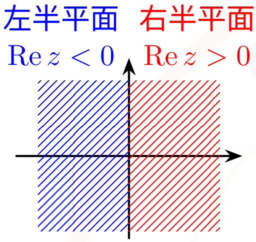




常见区域

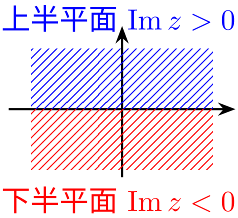
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

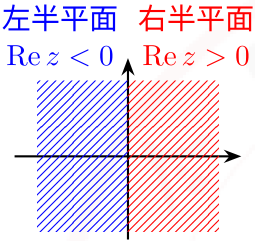


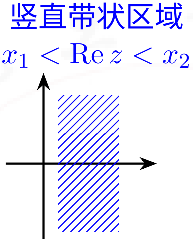


常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

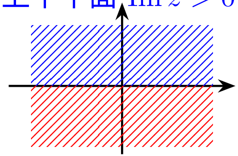






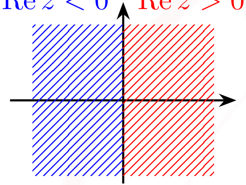
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$

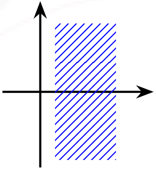


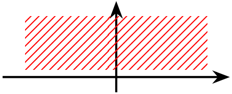
下半平面 $\operatorname{Im} z < 0$

左半平面 $\operatorname{Re} z < 0$　右半平面 $\operatorname{Re} z > 0$



竖直带状区域 $x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$

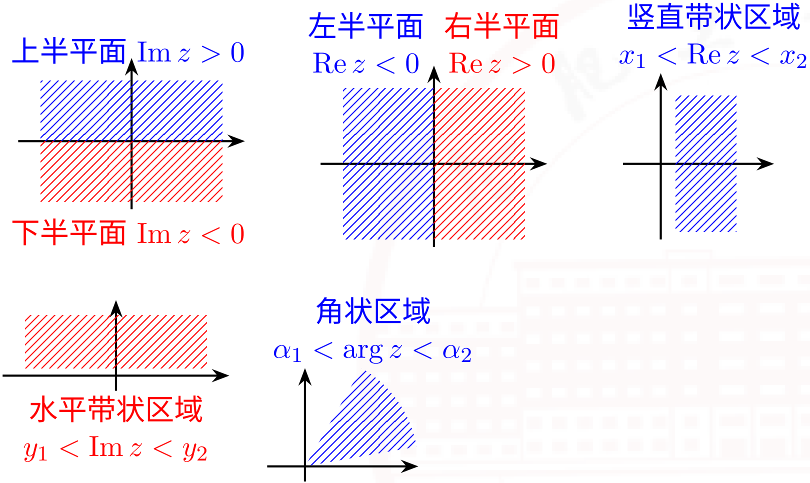




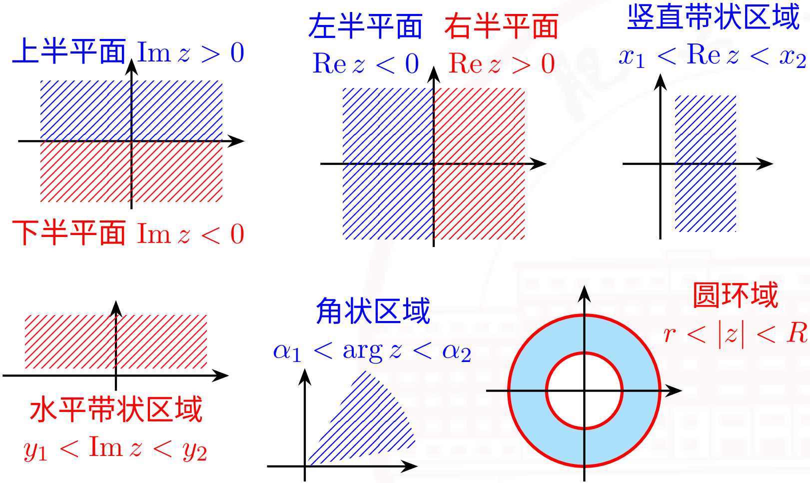
水平带状区域 $y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$

常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

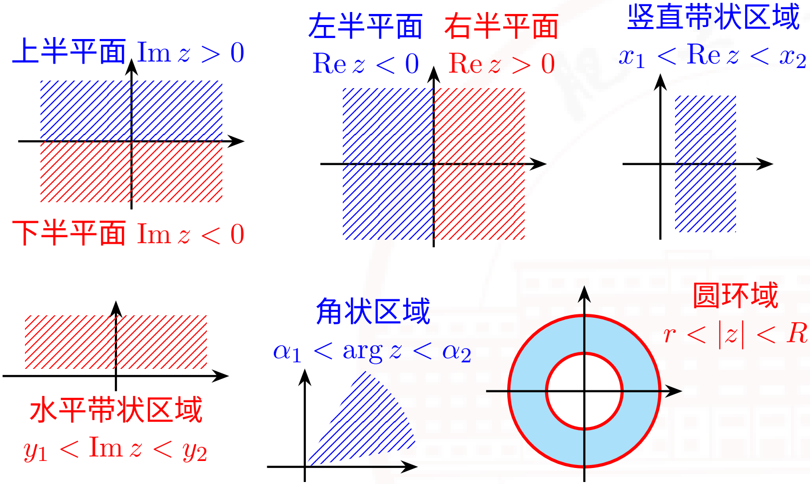


复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.



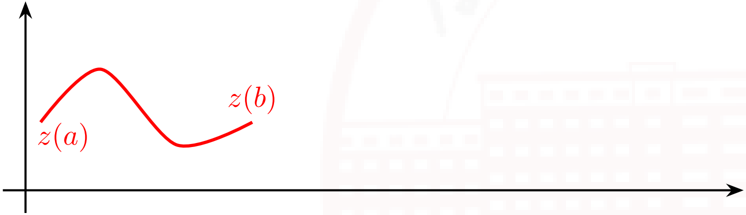
常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定. 这些区域对应的闭区域是什么?



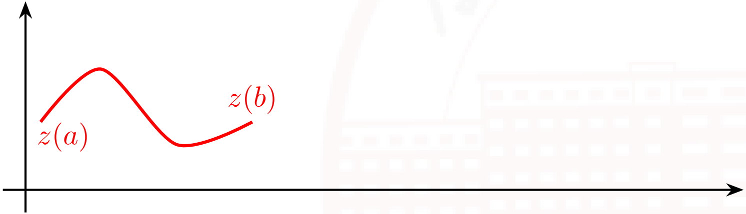
设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数,

设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$ 定义了一条连续曲线.



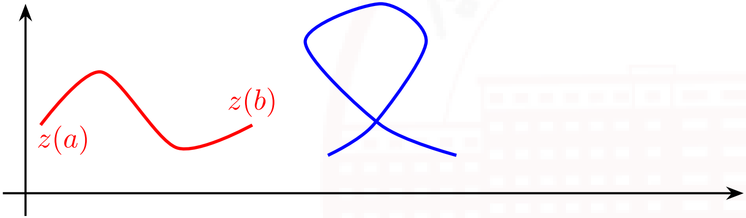
连续区间、简单曲线和闭路

设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [a,b]$ 定义了一条连续曲线. 这也等价于 $C : z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b]$.



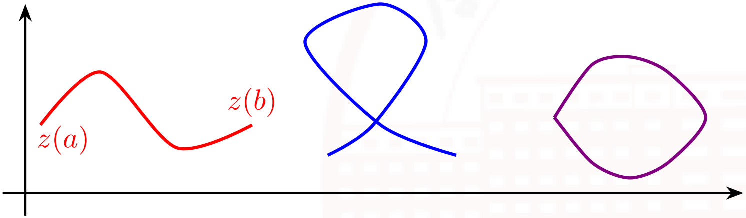
设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数，则参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$ 定义了一条连续曲线. 这也等价于 $C : z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b]$.

如果除了两个端点有可能重叠外，其它情形不会出现重叠的点，则称 C 是简单曲线.



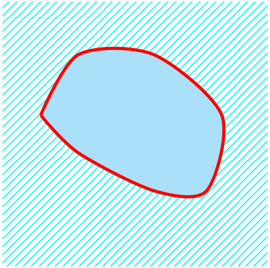
设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$ 定义了一条连续曲线. 这也等价于 $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b]$.

如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线. 如果还满足两个端点重叠, 即 $z(a) = z(b)$, 则称 C 是简单闭曲线, 也简称为闭路.



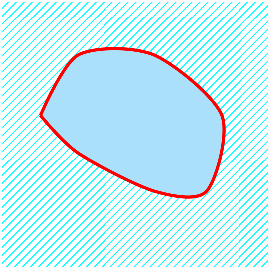
闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界.



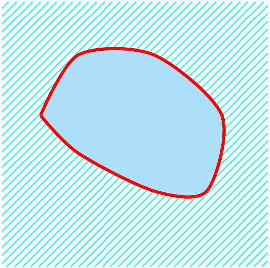
闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域，一个有界一个无界．分别称这两个区域是 C 的内部和外部．



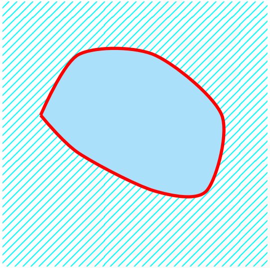
闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域，一个有界一个无界．分别称这两个区域是 C 的内部和外部．C 是它们的公共边界．



闭路 C 把复平面划分成了两个区域，一个有界一个无界．分别称这两个区域是 C 的内部和外部．C 是它们的公共边界．

这件事情的严格证明是十分困难的 (Veblen 1905).



在前面所说的几个区域的例子中，我们在区域中画一条闭路.

在前面所说的几个区域的例子中，我们在区域中画一条闭路．除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内．

在前面所说的几个区域的例子中，我们在区域中画一条闭路．除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内．

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中，则称 D 是单连通域．否则称之为多连通域．

在前面所说的几个区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外, 闭路的内部仍然包含在这个区域内.

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中, 则称 D 是单连通域. 否则称之为多连通域.

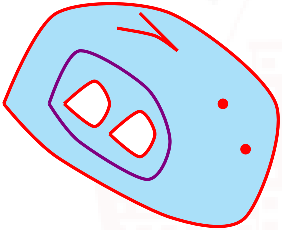
单连通域内的任一闭路可以连续地变形成一个点.

在前面所说的几个区域的例子中，我们在区域中画一条闭路．除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内．

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中，则称 D 是单连通域．否则称之为多连通域．

单连通域内的任一闭路可以连续地变形成一个点．



例题：区域的特性

例

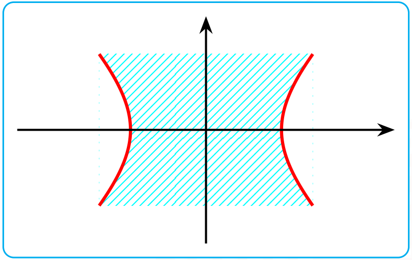
(1) $\mathrm{Re}(z^2) < 1$.

例题：区域的特性

例

(1) $\operatorname{Re}(z^2) < 1$.

设 $z = x + yi$, 则 $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$.

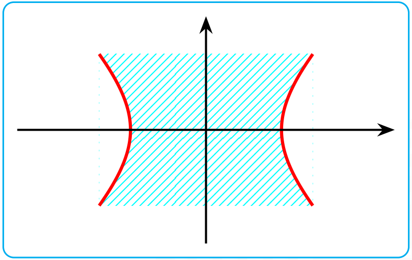


例题：区域的特性

例

(1) $\mathrm{Re}(z^2) < 1$.

设 $z = x + yi$, 则 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$. 这是无界的单连通域.

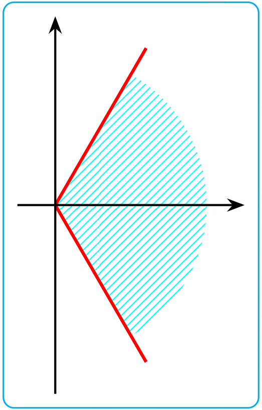


例 (续)

(2) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{3}$ (不含原点).

例 (续)

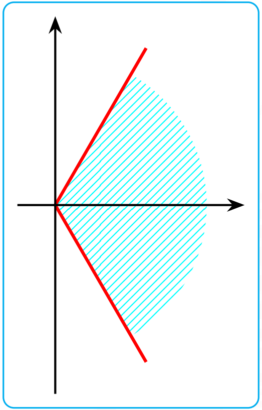
(2) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{3}$ (不含原点). 即角状区域 $-\dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$.



例题：区域的特性

例 (续)

(2) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{3}$ (不含原点). 即角状区域 $-\dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$. 这是无界的单连通域.



例题：区域的特性

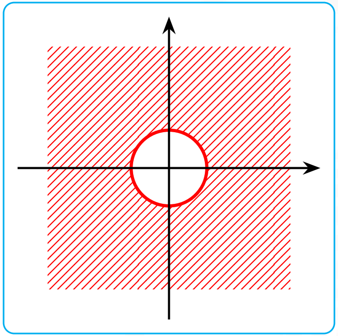
例 (续)

(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3.$

例题：区域的特性

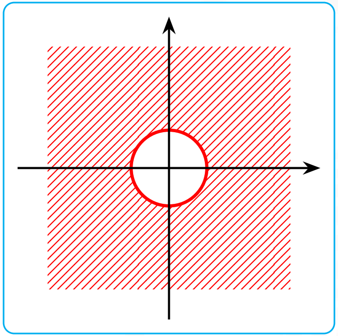
例（续）

(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \dfrac{1}{3}$.



例 (续)

(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \dfrac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.



例题：区域的特性

例 (续)

(4) $|z+1|+|z-1|<4.$

例 (续)

(4) $|z+1|+|z-1|<4.$

表示一个椭圆的内部.

例题：区域的特性

例（续）

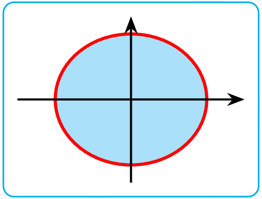
(4) $|z+1|+|z-1|<4.$
表示一个椭圆的内部．这是有界的单连通域．

例题：区域的特性

例 (续)

(4) $|z+1|+|z-1|<4.$

表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.

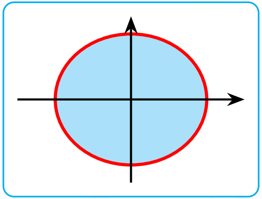


例题：区域的特性

例 (续)

(4) $|z+1|+|z-1|<4.$

表示一个椭圆的内部．这是有界的单连通域．



思考

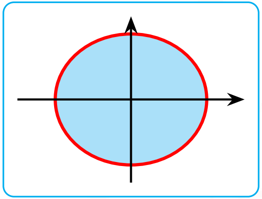
$|z+1|+|z-1|\geqslant 1$ 表示什么集合？

例题：区域的特性

例（续）

(4) $|z+1|+|z-1|<4.$

表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.



思考

$|z+1|+|z-1|\geqslant 1$ 表示什么集合?

答案

整个复平面.

第五节　复变函数

- 复变函数的定义
- 映照

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

- 称 A 为函数 f 的定义域.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

- 称 A 为函数 f 的定义域.
- 称 $\{w = f(z) : z \in A\}$ 为它的值域.

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

- 称 A 为函数 f 的定义域.
- 称 $\{w = f(z) : z \in A\}$ 为它的值域.

上述函数的定义域和值域分别是什么?

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应.

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应。例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等。为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值。

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应．例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等．为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值．这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支．

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究，我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应．例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等．为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值．这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支．

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支．

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数．

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的，则称 f 是一一对应.

在复变函数理论中, 我们常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是一一对应.

例

$f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$.

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的，则称 f 是一一对应.

例

$f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时，f 是一一对应.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应．例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等．为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值．这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支．

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支．

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数．如果 f 和 f^{-1} 都是单值的，则称 f 是一一对应．

例

$f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$．当 $n = \pm 1$ 时，f 是一一对应．

若无特别声明，复变函数总是指单值的复变函数．

映照

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来.

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系,

映照

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系, 其中

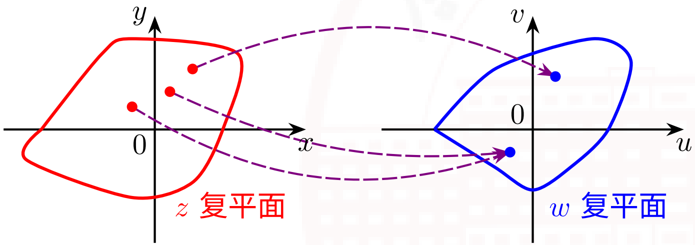
$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

的实部和虚部是两个二元实变函数.

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系, 其中

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

的实部和虚部是两个二元实变函数.



例题：映照

例

函数 $w = \overline{z}$.

例题：映照

例

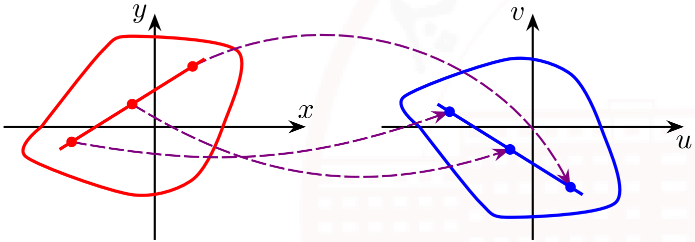
函数 $w = \overline{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置，则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换.

例

函数 $w=\overline{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域, 且 $u=x, v=-y$.

例

函数 $w=\bar{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置，则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域，且 $u=x, v=-y$.



例

函数 $w = az$.

例题：映照

例

函数 $w = az$. 设 $a = re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合.

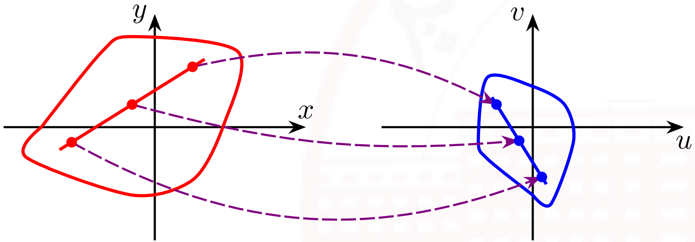
例题：映照

例

函数 $w = az$. 设 $a = re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.

例

函数 $w=az$. 设 $a=re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.



例题：映照

例

函数 $w = z^2$.

例题：映照

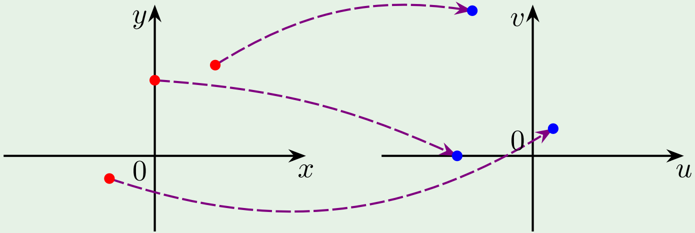
例

函数 $w = z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.

例题：映照

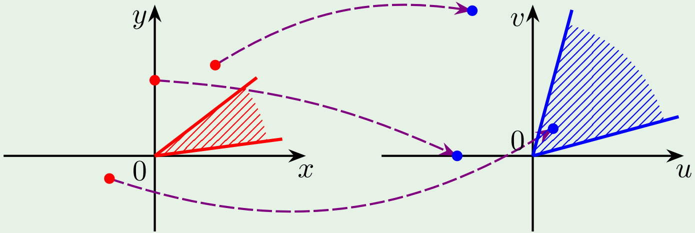
例

函数 $w = z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍，因此它会把角形区域变换为角形区域，并将夹角放大一倍.



例

函数 $w=z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



例 (续)

由于 $u = x^2 - y^2, v = 2xy.$

例 (续)

由于 $u=x^2-y^2, v=2xy$. 因此它把 z 平面上两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2-y^2=c_1, \quad 2xy=c_2$$

例 (续)

由于 $u=x^2-y^2, v=2xy$. 因此它把 z 平面上两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2-y^2=c_1, \quad 2xy=c_2$$

分别映射为 w 平面上的两族平行直线

$$u=c_1, \quad v=c_2.$$

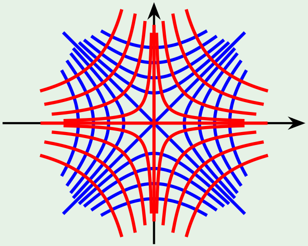
例 (续)

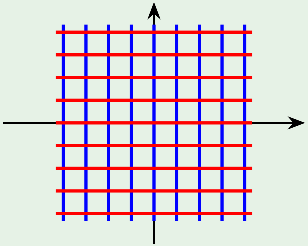
由于 $u=x^2-y^2, v=2xy$. 因此它把 z 平面上两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2-y^2=c_1,\quad 2xy=c_2$$

分别映射为 w 平面上的两族平行直线

$$u=c_1,\quad v=c_2.$$





例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\dfrac{\pi}{2}$.

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\dfrac{\pi}{2}$.

解

设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=ir$, 则 $w=z^2=-r^2$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\dfrac{\pi}{2}$.

解

设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=ir$，则 $w=z^2=-r^2$. 因此它的像还是一条线段 $0<|w|<4, \arg w=-\pi$.

例题：映照的像

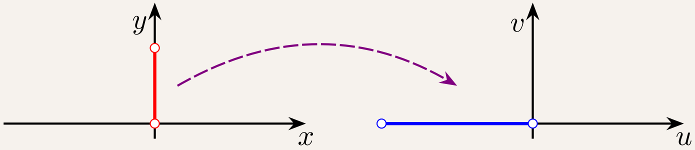
例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\dfrac{\pi}{2}$.

解

设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=ir$, 则 $w=z^2=-r^2$. 因此它的像还是一条线段 $0<|w|<4, \arg w=-\pi$.



例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

解

由于

$$w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi.$$

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

解

由于

$$w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi.$$

因此 $u=x^2-y^2=4, v=2xy$.

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

解

由于

$$w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi.$$

因此 $u=x^2-y^2=4, v=2xy$.

可以说明当 $u=4$ 时，对任意 v，$u+iv$ 都是该双曲线上某一点的像.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

解

由于

$$w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi.$$

因此 $u=x^2-y^2=4, v=2xy$.

可以说明当 $u=4$ 时，对任意 v，$u+iv$ 都是该双曲线上某一点的像. 所以这条双曲线的像是直线 $\mathrm{Re}\, w=4$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(3) 扇形区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}, 0<|z|<2$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(3) 扇形区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2.$

解

设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2e^{2i\theta}$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(3) 扇形区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2$.

解

设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2 e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域 $0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}, 0 < |w| < 4$.

例题：映照的像

例

求圆周 $|z|=2$ 在映照 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

例题：映照的像

例

求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = \dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解

由于 $z = \dfrac{w+1}{w-1}$, $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right| = 2$,

例题：映照的像

例

求圆周 $|z|=2$ 在映照 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解

由于 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$, $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|=2$, 因此

$$|w+1|=2|w-1|,\quad w\overline{w}+w+\overline{w}+1=4w\overline{w}-4w-4\overline{w}+4,$$

例题：映照的像

例

求圆周 $|z|=2$ 在映照 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解

由于 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$, $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|=2$, 因此

$$|w+1|=2|w-1|,\quad w\overline{w}+w+\overline{w}+1=4w\overline{w}-4w-4\overline{w}+4,$$

$$w\overline{w}-\frac{5}{3}w-\frac{5}{3}\overline{w}+1=0,\quad \left|w-\frac{5}{3}\right|^2=\frac{16}{9},$$

例题：映照的像

例

求圆周 $|z|=2$ 在映照 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解

由于 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$, $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|=2$, 因此

$$|w+1|=2|w-1|,\quad w\overline{w}+w+\overline{w}+1=4w\overline{w}-4w-4\overline{w}+4,$$

$$w\overline{w}-\frac{5}{3}w-\frac{5}{3}\overline{w}+1=0,\quad \left|w-\frac{5}{3}\right|^2=\frac{16}{9},$$

即 $\left|w-\dfrac{5}{3}\right|=\dfrac{4}{3}$, 是一个圆周.

第六节　极限和连续性

- 无穷远点
- 数列的极限
- 函数的极限
- 函数的连续性

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限.

类似于实变函数情形，我们可以定义复变函数的极限．我们先来看数列极限的定义．

定义

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall\varepsilon>0, \exists N$ 使得当 $n\geqslant N$ 时 $|z_n-z|<\varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$.

类似于实变函数情形，我们可以定义复变函数的极限．我们先来看数列极限的定义．

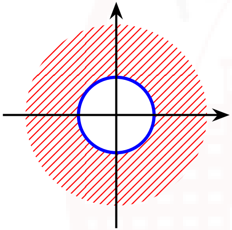
定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geq 1}$ 是一个复数列．如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $|z_n - z| < \varepsilon$，则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$．
- 如果 $\forall X > 0, \exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $|z_n| > X$，则称 ∞ 是数列 $\{z_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$．

如果我们称

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

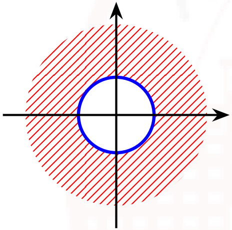
为 ∞ 的 (去心) 邻域,



如果我们称

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 (去心) 邻域, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 可统一表述为:

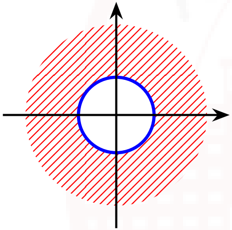


如果我们称

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 (去心) 邻域, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 可统一表述为:

对 z 的任意邻域 U, $\exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $z_n \in U$.



那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢?

复球面

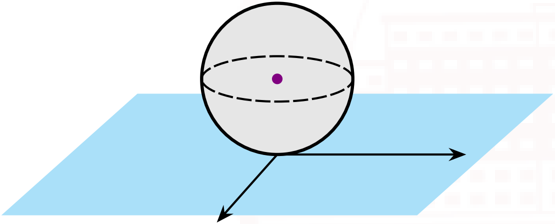
那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢？我们将介绍复球面的概念，它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞.

那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢？我们将介绍复球面的概念，它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

复球面

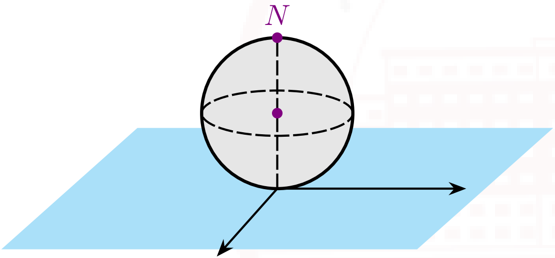
那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢？我们将介绍复球面的概念，它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

取一个与复平面相切于原点 $z=0$ 的球面.

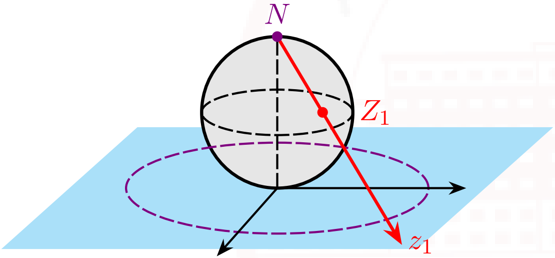


那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

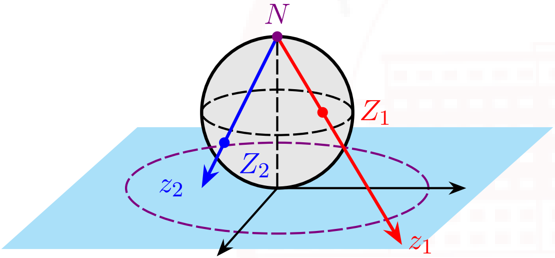
取一个与复平面相切于原点 $z=0$ 的球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于另一点 N, 称之为北极.



- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.

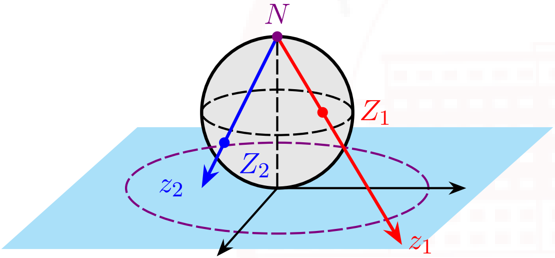


- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.

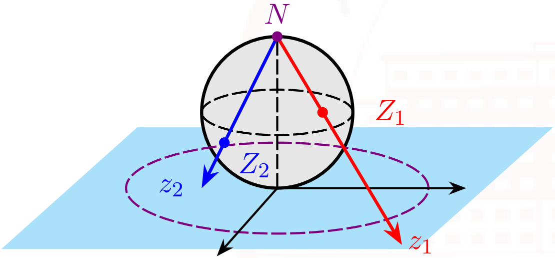


- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.

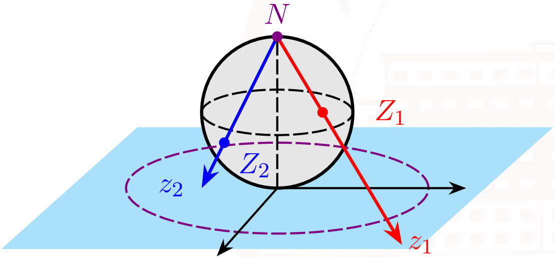
这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.



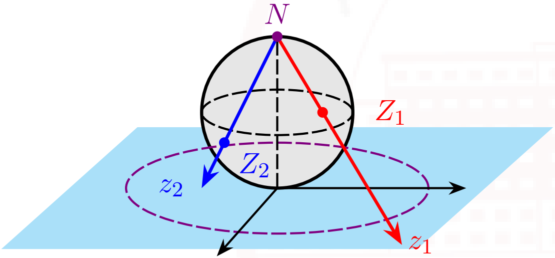
当 $|z|$ 越来越大时，其对应球面上点也越来越接近 N.



当 $|z|$ 越来越大时，其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点，记作 ∞.

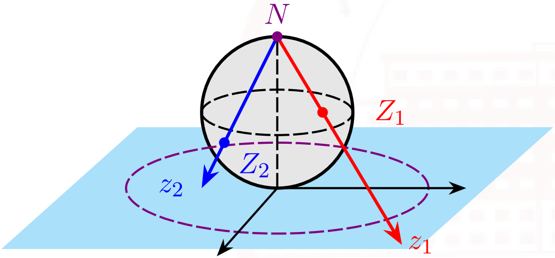


当 $|z|$ 越来越大时，其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点，记作 ∞. 那么扩充复数集合 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应.



复球面：无穷远点

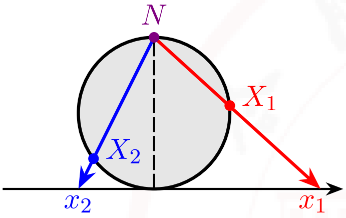
当 $|z|$ 越来越大时，其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点，记作 ∞. 那么扩充复数集合 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应. 称这样的球面为复球面，称包含无穷远点的复平面为扩充复平面(闭复平面).



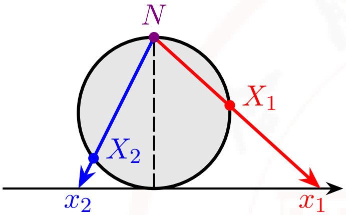
它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？

复球面：与实数无穷的联系

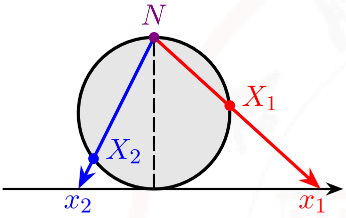
它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应.



它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞.



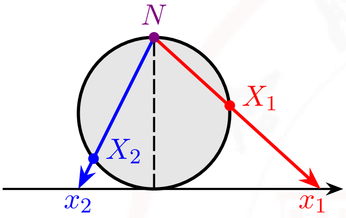
它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应．于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞．



朴素地看，复球面上任意一点可以定义邻域的概念．

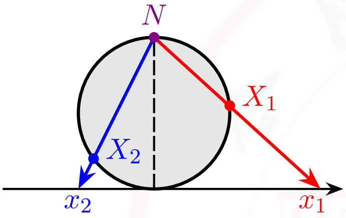
复球面：与实数无穷的联系

它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应．于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞．



朴素地看，复球面上任意一点可以定义邻域的概念．特别地，∞ 的开邻域通过前面所说的对应关系，可以对应到扩充复平面上 ∞ 的一个邻域．

它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应．于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞.



朴素地看，复球面上任意一点可以定义邻域的概念．特别地，∞ 的开邻域通过前面所说的对应关系，可以对应到扩充复平面上 ∞ 的一个邻域．所以在复球面上，我们将普通复数和 ∞ 的开邻域可以视为相同的概念.

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

定理

设 $z_n=x_n+y_ni, z=x+yi$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n=z \iff \lim_{n\to\infty} x_n=x, \lim_{n\to\infty} y_n=y.$$

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

定理

设 $z_n = x_n + y_n i, z = x + yi$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

证明

由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leqslant |z_n - z| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证. $\square$

例题：数列的敛散性

例

设 $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

例题：数列的敛散性

例

设 $z_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解

由于

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0.$$

例题：数列的敛散性

例

设 $z_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解

由于

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0.$$

因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

函数的极限

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.
如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon),\exists\delta>0$ 使得

$$z\in\overset{\circ}{U}(z_0,\delta)\implies f(z)\in U(A,\varepsilon),$$

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.
如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists\delta>0$ 使得

$$z \in \mathring{U}(z_0,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 或 $f(z)\to A(z\to z_0)$.

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.
如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists\delta>0$ 使得

$$z \in \overset{\circ}{U}(z_0,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A (z \to z_0)$.

此时我们称极限存在.

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.
如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists\delta>0$ 使得

$$z \in \mathring{U}(z_0,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A (z \to z_0)$.

此时我们称极限存在.
对于 $z_0 = \infty$ 或 $A = \infty$ 的情形, 也可以用上述定义统一描述.

与实函数极限之联系

不难看出，变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的:

不难看出, 变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的: 即 $z \to z_0$ 沿任一曲线趋向于 z_0 的极限都是相同的.

不难看出，变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的：即 $z \to z_0$ 沿任一曲线趋向于 z_0 的极限都是相同的.

定理

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + y_0 i, A = u_0 + v_0 i$, 则

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

不难看出, 变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的: 即 $z \to z_0$ 沿任一曲线趋向于 z_0 的极限都是相同的.

定理

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + y_0 i, A = u_0 + v_0 i$, 则

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

证明

由三角不等式

$$|u-u_0|, |v-v_0| \leqslant |f(z)-A| \leqslant |u-u_0| + |v-v_0|$$

易证. □

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 则

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B$;

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$, 则

(1) $\lim\limits_{z \to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{z \to z_0} (fg)(z) = AB$;

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}(f\pm g)(z)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}(fg)(z)=AB$;

(3) 当 $B\neq 0$ 时, $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(z)=\dfrac{A}{B}$.

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}(f\pm g)(z)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}(fg)(z)=AB$;

(3) 当 $B\neq 0$ 时, $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(z)=\dfrac{A}{B}$.

类似地, 我们也可以使用等价无穷小替换、洛必达法则等。

例题：判断函数极限是否存在

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

例题：判断函数极限是否存在

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

例题：判断函数极限是否存在

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad v(x,y) = 0.$$

例

证明当 $z\to 0$ 时，函数 $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z=x+yi$，则 $f(z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad v(x,y)=0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时，$u(x,y)\to\pm 1$.

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时，$u(x, y) \to \pm 1$. 因此 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x, y)$ 不存在，

例题：判断函数极限是否存在

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时，$u(x, y) \to \pm 1$. 因此 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x, y)$ 不存在，从而 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 不存在. $\square$

定义

定义

- 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

定义

- 如果 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

定义

- 如果 $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

定义

- 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

定理

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

定义

- 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

定理

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

例

设 $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$.

定义

- 如果 $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

定理

函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

例

设 $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$. $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x,y) = x^2 - y^2$ 处处连续.

定义

- 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

定理

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

例

设 $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$. $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x,y)=x^2-y^2$ 处处连续. 因此 $f(z)$ 在 $z\neq 0$ 处连续.

连续函数的性质

定理

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的,

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续，函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续，则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的，故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续，

连续函数的性质

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续, 有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续，函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续，则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的，故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续，有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

有时候我们会遇到在曲线上连续的函数，它指的是当 z 沿着该曲线趋向于 z_0 时，$f(z) \to f(z_0)$.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续, 有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

有时候我们会遇到在曲线上连续的函数, 它指的是当 z 沿着该曲线趋向于 z_0 时, $f(z) \to f(z_0)$. 此时它具有类似一元实变量函数的性质.

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

例题：函数连续性的判定

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$.

$\square$

例题：函数连续性的判定

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

$\square$

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续. □

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z_0=x_0+iy_0$. 那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. $\square$

例题：函数连续性的判定

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$. 那么 $u(x,y)$, $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

另一种看法是，函数 $g(z)=\overline{z}=x-iy$ 处处连续，

□

例题：函数连续性的判定

例

证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

另一种看法是, 函数 $g(z) = \overline{z} = x - iy$ 处处连续, 从而 $g(f(z)) = \overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续. $\square$

注记

可以看出，在极限和连续性上，复变函数和两个二元实函数没有什么差别.

注记

可以看出，在极限和连续性上，复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢?

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法.

注记

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法.

这就导致了复变函数有导数, 而不是像多变量实函数只有偏导数.

注记

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法.

这就导致了复变函数有导数, 而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.