第十二周第二次作业

姓名：　　　　　　学号：

习题 4.1.2. 设 $N=4$, $\chi(1+2k)=(-1)^k$, 证明 $L(1,\chi)=\frac{\pi}{4}$.

证明. $\square$

习题 4.1.5. 证明 $\tau(\chi)\tau(\overline{\chi})=\chi(-1)N$.

证明. $\square$

习题 4.1.8. 对于

$$f_{t,\varepsilon}=x^{\varepsilon}e^{-\pi t x^2},\quad \varepsilon=0,1,\mathrm{Re}(t)>0,$$

证明

$$\widehat{f}_{t,\varepsilon}=i^{\varepsilon}t^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}f_{\frac{1}{t},\varepsilon}.$$

证明. $\square$

习题 4.1.9. 证明

$$\theta_{\chi}(t)=\frac{(-i)^{\varepsilon}\tau(\chi)}{N^{\varepsilon+1}t^{\varepsilon+\frac{1}{2}}}\theta_{\overline{\chi}}\left(\frac{1}{N^2t}\right).$$

证明. $\square$

习题 4.1.10. (1) $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$, 因此 $\Gamma(n+1)=n!, n\in\mathbb{N}$.

(2) $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

证明. $\square$

习题 4.1.13. 如果 χ 是实特征, 即 $\chi:(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}\to\pm1$, 则 $\tau(\chi)=i^{\varepsilon}\sqrt{N}$.

证明. $\square$

习题 4.1.15. $\zeta(s)$ 可以解析延拓至 $\mathbb{C}-\{1\}$, 且在 $s=1$ 处有单极点, 留数为 1. $\zeta(s)$ 满足函数方程

$$\zeta(1-s)=2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s).$$

证明. $\square$