线性代数

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第一章　矩阵及其运算

❶ 矩阵的运算

第一节　矩阵的运算

- 矩阵的乘法

设 n 个变量 $x_1, \ldots, x_n$ 和 m 变量 $y_1, \ldots, y_m$ 满足关系:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad\qquad\vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}.$$

它的系数形成了一个矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

如果这些变量均取实数, 我们用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 个实数形成的数组. 那么上述关系定义了映射

$$\mathscr{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

这样的由线性关系给出的映射被称为线性变换.

线性变换的例子：旋转

如何用矩阵表示平面上的旋转？设 $A(x_1, x_2)$ 是平面上的一个点，沿着原点逆时针旋转角度 θ 变成 $B(y_1, y_2)$. 利用极坐标将 A 表示为

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\alpha, \\ x_2 = \rho\sin\alpha, \end{cases}$$

那么

$$\begin{cases} y_1 = \rho\cos(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = (\cos\theta)x_1 - (\sin\theta)x_2, \\ y_2 = \rho\sin(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) = (\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_2. \end{cases}$$

因此上述旋转变换 $\mathscr{A}$ 对应的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

给定两个矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times p}$, 其中 $\mathbf{A}$ 的列数和 $\mathbf{B}$ 的行数相等. 那么它们对应两个映射

$$\mathscr{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \mathscr{B} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n.$$

它们的复合

$$\mathscr{A} \circ \mathscr{B} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

是否还是一个线性变换呢? 如果是, 对应的矩阵是什么?

线性变换的复合

设 $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, 那么

$$y=(y_1,\ldots,y_n)=\mathscr{B}(x)\in\mathbb{R}^n \qquad \text{满足} \qquad y_k=\sum_{j=1}^{p}b_{kj}x_j.$$

$$z=(z_1,\ldots,z_m)=\mathscr{A}(y)\in\mathbb{R}^n$$

满足

$$z_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}y_k=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\sum_{j=1}^{p}b_{kj}x_j=\sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\Big)x_j.$$

所以 $\mathscr{A}\circ\mathscr{B}$ 是线性变换, 且对应的矩阵为

$$\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times p}, \qquad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

我们把它定义为矩阵的乘法 $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$.

定义

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n},\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. 定义矩阵的乘法为 $\mathbf{C}=\mathbf{AB}=(c_{ij})_{m\times p}$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数才能相乘.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=? \times .$$

行向量与列向量的乘法

设 $\mathbf{A}=(a_1,\dots,a_n)$ 是 n 为行向量, $\mathbf{B}=(b_1,\dots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量. $\mathbf{AB},\mathbf{BA}=?$

$$\mathbf{AB}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\qquad \mathbf{BA}=(b_ia_j)_{n\times n}\in M_n.$$

对于矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n},\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. $\mathbf{AB}$ 的 (i,j) 元其实就是 $\mathbf{A}$ 第 i 行对应的行向量和 $\mathbf{B}$ 第 j 列对应的列向量相乘得到的数 (1 阶方阵).

例：矩阵乘法的计算

例

求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 的乘积 $\mathbf{AB}$.

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 6 & 23 & 3 \end{pmatrix}.$$

设线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad\qquad\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{cases}
$$

的系数矩阵为 $\mathbf{A}$. 如果我们令

$$
\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1},
$$

那么上述方程等价于矩阵方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. 对应的齐次方程为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

矩阵乘法满足如下规律:

(1) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(2) $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$;

(3) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$;

(4) 如果 $\mathbf{A} \in M_{m\times n}$, 则 $\mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}$.

(5) 如果 $\mathbf{A} \in M_{m\times n}$, 则 $\mathbf{O}_{p\times m}\mathbf{A} = \mathbf{O}_{p\times n}, \mathbf{A}\mathbf{O}_{n\times p} = \mathbf{O}_{m\times p}$.

矩阵乘法无交换律和消去律

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\mathbf{AB}$ 为 $\mathbf{A}$ 左乘 $\mathbf{B}$, 或者 $\mathbf{B}$ 右乘 $\mathbf{A}$.
如果 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, 则称 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 是可交换的. 此时 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 必为同阶方阵. 例如

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

矩阵乘法也没有消去律: $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ 推不出 $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ 或 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$. 例如

$$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\mathbf{O}_2.$$

由此可知: $\mathbf{AC}=\mathbf{BC}$ 推不出 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

练习

设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为 $n>1$ 阶方阵, 则 $\mathbf{A}+\mathbf{AB}=$(C)

(A) $\mathbf{A}(1+\mathbf{B})$ (B) $(\mathbf{E}+\mathbf{B})\mathbf{A}$ (C) $\mathbf{A}(\mathbf{E}+\mathbf{B})$ (D) 以上都不对

例

求与矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

解

设 $\mathbf{B}=(a_{ij})_{3\times 3}$ 与 $\mathbf{A}$ 可交换, 则

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}0&a_{11}&a_{12}\\0&a_{21}&a_{22}\\0&a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow a_{11}=a_{21}=a_{31}=a_{32}=0,\quad a_{11}=a_{22}=a_{33},\quad a_{23}=a_{12},$$

即 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\&a_{11}&a_{12}\\&&a_{11}\end{pmatrix}.$