



# 复变函数与积分变换

◆ 张神星

办公室：翡翠科教楼 B1810 东

<https://zhangshenxing.gitee.io/>

## 第七章 复习课

- 复数的四则运算, 求实部  $\operatorname{Re} z$ , 虚部  $\operatorname{Im} z$ , 模  $|z|$ .
- 复数的主辐角  $\arg z$ :
  - 1 当  $z$  在一四象限时, 主辐角为  $\arctan \frac{y}{x}$ ;
  - 2 当  $z$  在第二象限时, 主辐角为  $\arctan \frac{y}{x} + \pi$ ;
  - 3 当  $z$  在第三象限时, 主辐角为  $\arctan \frac{y}{x} - \pi$ .
- 复数的辐角  $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- 共轭复数的有关等式和不等式.

- 复数的三角/指数形式主要是要求它的模和辐角.
- 复数的乘法, 除法, 方幂的计算.
- 以下等式成立 (Arg 可以换成 Ln)

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

- 以下等式未必成立 (arg 可以换成 ln)

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg \left( \frac{z_1}{z_2} \right) = \arg z_1 - \arg z_2,$$

$$\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z, \quad \operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z.$$

- 圆  $|z - z_0| = r$ ;
- 椭圆  $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a > |z_1 - z_2|$ ;
- 双曲线  $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a < |z_1 - z_2|$ ;
- 直线  $ax + by + c = 0$ .
- 区域是连通的开集, 闭区域是区域和它的边界
- 有界/无界, 单连通/多连通的判断.

- 集合在映照下的像.
- 数列的极限: 实部虚部数列都收敛.
- 函数的极限: 会证明特定函数极限不存在, 例如
$$f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, z \rightarrow 0.$$
- 会计算函数的导数.
- 可导蕴含连续.
- 可导与解析的差别: 解析要求在一个邻域内都可导.

## 解析函数的判定: C-R 方程

- $f(z) = u + iv$  在  $z_0$  可导等价于  $u, v$  均可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

- $f'(z) = u_x + iv_x$ .
- 会计算函数的可导点和解析区域.

### 练习

求  $f(z) = 3x^2 - y^2 + 2xyi$  的可导点和解析点.

答案.

可导点为  $\operatorname{Re} z = 0$ , 没有解析点.

# 初等函数

- 指数函数  $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$ .
- 指数函数的周期性, 解析性: 处处解析, 导数  $(\exp z)' = \exp z$ .
- 对数函数  $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$  和主值  $\ln z = \ln |z| + i \arg z$  的计算.
- 主值的解析性: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数  $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ .
- 幂函数  $z^a = \exp(a \operatorname{Ln} z)$  的计算, 主值  $\exp(a \ln z)$  的计算.
- 主值的解析性质: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数  $(z^a)' = a z^{a-1}$ .
- 三角函数的定义

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

- 无界性, 处处解析, 其它性质和实情形类似.
- 反三角函数的计算: 化成指数函数和对数函数来计算.



# 复变函数积分的计算

- 一般情形: 曲线  $C : z = z(t), a \leq t \leq b$ , 则

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t) dt.$$

- 如果  $f(z)$  在一个单连通区域  $D$  上解析, 且  $z_1, z_2 \in D$ ,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1), \quad F(z) = \int f(z) dz.$$

- 如果  $f(z)$  在闭路  $C$  内只有奇点  $z_1, \dots, z_n$ , 则

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k].$$

- 会求原函数: 分部积分, 凑微分等.

## 练习

三类积分题, 自己多翻书.

# 复变函数积分的解析理论

- 柯西古萨基本定理: 若  $f(z)$  在闭路  $C$  及其内部解析, 则
$$\oint_C f(z) dz = 0.$$
- 复合闭路定理: 若  $f(z)$  在复合闭路  $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$  及其围成的多连通区域内解析, 则  $\oint_C f(z) dz = 0$ , 即

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z) dz.$$

- 柯西积分公式: 若  $f(z)$  在闭路  $C$  及其内部解析,  $z_0 \in D$ , 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

从  $z_0$  是 (至多)  $n + 1$  阶极点看出.

- 可去奇点: 从  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  存在得到.
- 本性奇点: 从洛朗展开的形式得到, 主要部分有无穷多项.
- 极点 (包括可去奇点): 从函数的各个部分的 order 计算得到, 例如 0 是  $\frac{(\sin z)^3(e^z - 1)^4}{z^9}$  的 2 阶极点, 0 是  $\frac{(\sin z)^3(e^z - 1)^4}{z^5}$  的可去奇点.
- $\infty$  的奇点类型: 看正幂次部分.

- 可去奇点处留数为 0, 本性奇点留数按照定义计算:  $c_{-1}$ .
- (至多)  $n$  阶极点

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)]^{(n-1)},$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z), \quad \text{若 } n = 1,$$

- 设  $z_0$  是  $P$  的解析点, 是  $Q$  的一阶零点, 则

$$\operatorname{Res}\left[\frac{P}{Q}, z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

# 调和函数

- 定义: 二阶连续可导,  $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ .
- 解析函数的实部和虚部都是调和函数, 单连通区域内调和函数是解析函数的实部或虚部.
- 求共轭调和函数:
  - 1 偏积分法: 通过  $v_y = u_x$  解得  $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$ , 其中  $\psi(x)$  待定. 再代入  $u_y = -v_x$  中解出  $\psi(x)$ .
  - 2 不定积分法: 对  $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$  求不定积分得到  $f(z)$ .

## 练习

证明  $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$  是调和函数并求它的共轭调和函数.

答案.

$$v(x, y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + C.$$

- 级数收敛等价于实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛等价于实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径  $R = \frac{1}{r}$ , 其中

1 比值法:  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|;$

2 根式法:  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$

- 在收敛圆周上可能收敛可能发散.
- 幂级数有理运算, 逐项求导, 逐项积分性质; 等比级数的展开.
- 上述技巧在函数的幂级数/洛朗级数展开中的运用.

- 幂级数的收敛域是圆域, 双边幂级数的收敛域是圆环域.
- 泰勒展开与洛朗展开的成立范围的判定: 看奇点位置.
- 有理函数的洛朗展开:

## 练习

求  $f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)}$  在以 0 为圆心的不同圆环域的洛朗展开.

## ■ 傅里叶变换:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

## ■ 傅里叶变换的性质: 重点是位移性质和微分性质

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(\omega), \quad \mathcal{F}^{-1}[F(\omega - \omega_0)] = e^{j\omega_0 t} f(t),$$

$$\mathcal{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega), \quad \mathcal{F}^{-1}[F'(\omega)] = -jtf(t).$$



- $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1, \mathcal{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0},$
- $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathcal{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$
- $\mathcal{F}[\sin \omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)],$
- $\mathcal{F}[\cos \omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)].$
- $\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega),$
- $\mathcal{F}[u(t)e^{-\beta t}] = \frac{1}{\beta + j\omega},$
- $\mathcal{F}[e^{-\beta t^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\omega^2/(4\beta)}$

## ■ 拉普拉斯变换:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

## ■ 拉普拉斯变换的性质: 重点是延迟/位移性质和微分性质

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s), \quad \mathcal{L}[e^{s_0 t} f(t)] = F(s - s_0),$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0),$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0),$$

其它性质可由此类推.

$$\blacksquare \mathcal{L}[e^{kt}] = \frac{1}{s - k}, \mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}, \mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}.$$

$$\blacksquare \mathcal{L}[\sin kt] = \frac{k}{s^2 + k^2}, \mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2}.$$

- 解微分方程: 两边同时做  $\mathcal{L}$ , 利用微分性质求得  $X = \mathcal{L}[x]$ , 然后利用常见函数的拉普拉斯变换反解得到  $x(t)$ .

## 练习

解方程 
$$\begin{cases} x''(t) + 4x(t) = 3 \cos t, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$