第三章　复变函数的积分

3.1　复变函数积分的概念

作业 1. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\oint_C \frac{\overline{z}}{|z|}\,\mathrm{d}z$.

解. 设 $z=2e^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=2ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$,

$$\oint_C \frac{\overline{z}}{|z|}\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{2e^{-i\theta}}{2}\cdot 2ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}2i\,\mathrm{d}\theta=4\pi i.$$

■

作业 2. 求 $\int_C z^2\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为:

(1) 从 0 到 $3+i$ 的直线段;　　(2) 从 0 到 3 再到 $3+i$ 的折线段;

解. (1) 由于 $z=(3+i)t, 0\leqslant t\leqslant 1$, 因此

$$\int_C z^2\,\mathrm{d}z=\int_0^1(3+i)^2t^2\cdot(3+i)\,\mathrm{d}t=\frac{(3+i)^3t^3}{3}\Big|_0^1=\frac{(3+i)^3}{3}=6+\frac{26i}{3}.$$

(2) 由于第一段 $z=t, 0\leqslant t\leqslant 3$, 第二段 $z=3+it, 0\leqslant t\leqslant 1$, 因此

$$\begin{aligned}\int_C z^2\,\mathrm{d}z&=\int_0^3 t^2\,\mathrm{d}t+\int_0^1(3+it)^2 i\,\mathrm{d}t=\frac{t^3}{3}\Big|_0^3+\left(9it-3t^2-\frac{it^3}{3}\right)\Big|_0^1\\&=9+(9i-3-\frac{i}{3})=6+\frac{26i}{3}.\end{aligned}$$

■

3.2　柯西-古萨基本定理和复合闭路定理

作业 3. 试用观察法得出下列积分的值, 并说明为什么, 其中 $C:|z|=1$.

(1) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-2}$;　　(2) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\cos z}$;

(3) $\oint_C \frac{e^z}{(z-2i)^2}\,\mathrm{d}z$;　　(4) $\oint_C e^z\sin z\,\mathrm{d}z$;

(5) $\oint_C \frac{1}{\overline{z}}\,\mathrm{d}z$;　　(6) $\oint_C (|z|+e^z\cos z)\,\mathrm{d}z$.

解. (1) 由于 $\dfrac{1}{z-2}$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析, 因此积分为 0.

(2) 由于 $\dfrac{1}{\cos z}$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析, 因此积分为 0.

(3) 由于 $\dfrac{e^z}{(z-2i)^2}$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析, 因此积分为 0.

(4) 由于 $e^z\sin z$ 处处解析, 因此积分为 0.

(5) 由于 $\displaystyle\oint_C \frac{1}{\overline{z}}\,\mathrm{d}z=\oint_C z\,\mathrm{d}z$, 因此为 0.

(6) 由于 $\displaystyle\oint_C (|z|+e^z\cos z)\,\mathrm{d}z=\oint_C (1+e^z\cos z)\,\mathrm{d}z$ 而 $1+e^z\cos z$ 处处解析, 因此为 0. ■

作业 4. 设 C 为正向圆周 $|z|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{|z|^2}\,\mathrm{d}z$.

解.

$$\oint_C \frac{\sin z}{|z|^2}\,\mathrm{d}z=\oint_C \frac{\sin z}{16}\,\mathrm{d}z=0.$$ ■

3.3 原函数和不定积分

作业 5. (2021 年 B 卷) 设 C 为从原点到 $1+i$ 的直线段, 求 $\displaystyle\int_C (z+1)^2\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 $f(z)=(z+1)^2$ 处处解析且

$$\int f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{(z+1)^3}{3}+C,$$

因此

$$\int_C (z+1)^2\,\mathrm{d}z=\frac{(z+1)^3}{3}\bigg|_0^{1+i}=\frac{(2+i)^3}{3}=\frac{2+11i}{3}.$$ ■

作业 6. (2022 年 A 卷) 设 C 为从 i 到 $i-\pi$ 再到 $-\pi$ 的折线, 求 $\displaystyle\int_C \cos^2 z\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 $f(z)=\cos^2 z$ 处处解析且

$$\int f(z)\,\mathrm{d}z=\int \frac{e^{2iz}+e^{-2iz}+2}{4}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{2iz}}{2i}-\frac{e^{-2iz}}{2i}+2z\right)+C,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C \cos^2 z\,\mathrm{d}z&=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{2iz}}{2i}-\frac{e^{-2iz}}{2i}+2z\right)\bigg|_i^{-\pi}\\&=-\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\left(\frac{e^{-2}}{2i}-\frac{e^{2}}{2i}+2i\right)=-\frac{\pi}{2}-\frac{i}{2}+\frac{e^{-2}-e^{2}}{8}i.\end{aligned}$$ ■

作业 7. (2020 年 A 卷) 设 C 为从原点到 2 再到 $2+i$ 的折线段, 求 $\displaystyle\int_C z^2\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 $f(z)=z^2$ 处处解析且

$$\int f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{z^3}{3},$$

因此

$$\int_C z^2\,\mathrm{d}z=\frac{z^3}{3}\Big|_2^{2+i}=\frac{(2+i)^3-8}{3}=-2+\frac{11i}{3}.$$ ■

作业 8. 求 $\displaystyle\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 e^{2z} 处处解析, 且

$$\int e^{2z}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}e^{2z},$$

因此

$$\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}e^{2z}\Big|_{-\pi i}^{3\pi i}=\frac{1}{2}(e^{6\pi i}-e^{-2\pi i})=0.$$ ■

作业 9. 求 $\displaystyle\int_{-\pi i}^{\pi i}\sin^2 z\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 $\sin^2 z=\dfrac{1-\cos 2z}{2}$ 处处解析, 且

$$\int\frac{1-\cos 2z}{2}\,\mathrm{d}z=\frac{z}{2}-\frac{\sin 2z}{4},$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{-\pi i}^{\pi i}\sin^2 z\,\mathrm{d}z&=\left(\frac{z}{2}-\frac{\sin 2z}{4}\right)\Big|_{-\pi i}^{\pi i}=\pi i-\frac{1}{4}\big(\sin(2\pi i)-\sin(-2\pi i)\big)\\&=\pi i-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-2\pi}-e^{2\pi}}{2i}=\left(\pi+\frac{e^{-2\pi}-e^{2\pi}}{4}\right)i.\end{aligned}$$ ■

作业 10. 求 $\displaystyle\int_0^i (z-i)e^{-z}\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 $(z-i)e^{-z}$ 处处解析, 且

$$\begin{aligned}\int(z-i)e^{-z}\,\mathrm{d}z&=\int(i-z)\,\mathrm{d}e^{-z}=e^{-z}(i-z)-\int e^{-z}\,\mathrm{d}(i-z)\\&=e^{-z}(i-z)+\int e^{-z}\,\mathrm{d}z=e^{-z}(i-z-1),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^i (z-i)e^{-z}\,\mathrm{d}z&=e^{-z}(i-z-1)\Big|_0^i=e^{-i}(i-i-1)-(i-1)\\&=-(\cos 1-i\sin 1)-(i-1)=(1-\cos 1)+i(\sin 1-1).\end{aligned}$$ ■

3.4 柯西积分公式

作业 11. 选择题: (2021 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|\zeta|=2$, $f(z)=\oint_C \frac{\sin\zeta}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$ (A).

(A) πi (B) $-\pi i$ (C) 0 (D) $2\pi i$

解析. 当 $|z|<2$ 时, $f(z)=2\pi i\sin z$, 因此答案是 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\pi i\sin\frac{\pi}{6}=\pi i$. ■

作业 12. 填空题: (2021 年 A 卷) 设 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析且不为零, C 为 D 内任何一条简单闭曲线, 则 $\oint_C \frac{f''(z)+2f'(z)+f(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=$ ___0___.

解析. 由于解析函数的任意阶导数还是解析的, 且 $f(z)\neq 0$, 因此被积函数是解析的, 从而积分为 0. ■

作业 13. 填空题: 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 则 $\oint_C \overline{z}\,\mathrm{d}z=$ ___$2\pi i$___.

解析. $\oint_C \overline{z}\,\mathrm{d}z=\oint_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z=2\pi i$. ■

作业 14. 填空题: (2022 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 则 $\oint_C \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\mathrm{d}z=$ ___0___.

解析. $\oint_C \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\mathrm{d}z=\oint_C \frac{4}{z^2}\,\mathrm{d}z=0$. ■

作业 15. 设 C 为以 $\pm\frac{1}{2},\pm\frac{6}{5}i$ 为顶点的菱形, 求 $\oint_C \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 $\frac{1}{z-i}$ 在 C 及其内部的奇点为 $z=i$, 因此

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-i}\,\mathrm{d}z=2\pi i.$$ ■

作业 16. (2021 年 B 卷) 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,\mathrm{d}z$.

解. 取 C_1,C_2 分别为绕 $i,-i$ 的分离圆周, 则

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,\mathrm{d}z&=\oint_{C_1} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2} \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,\mathrm{d}z\\&=2\pi i\left[\left.\frac{1}{(z^2+9)(z+i)}\right|_{z=i}+\left.\frac{1}{(z^2+9)(z-i)}\right|_{z=-i}\right]\\&=2\pi i\left[\frac{1}{16i}+\frac{1}{-16i}\right]=0.\end{aligned}$$ ■

作业 17. (2022 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|z-3|=4$, 求 $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z$.

解. 取 C_1, C_2 分别为绕 $\pi, 2\pi$ 的分离圆周, 则

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z &= \oint_{C_1} \frac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi i\left[\frac{e^{iz}}{z-2\pi}\bigg|_{z=\pi} + \frac{e^{iz}}{z-\pi}\bigg|_{z=2\pi}\right] \\ &= 2\pi i\left[-\frac{e^{\pi i}}{\pi} + \frac{e^{2\pi i}}{\pi}\right] = 4i.\end{aligned}$$

■

作业 18. 设 C_1 为正向圆周 $|z|=2$, C_2^- 为负向圆周 $|z|=3$, $C=C_1+C_2^-$ 为复合闭路, 求 $\oint_C \frac{\cos z}{z^3}\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 $\frac{\cos z}{z^3}$ 在复合闭路 C 及其的内部解析, 因此该积分为 0. ■

作业 19. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\oint_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 $\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}$ 在 $|z|\leqslant 2$ 上有唯一奇点 $z=\frac{\pi}{2}$, 因此

$$\oint_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1!}(\sin z)'|_{z=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

■

作业 20. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 求 $\oint_C \frac{\cos z}{z^{2023}}\,\mathrm{d}z$.

解.

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^{2023}}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2022!}\cos^{(2022)} z|_{z=0} = \frac{2\pi i}{2022!}\cos(z+\frac{2022\pi}{2})|_{z=0} = -\frac{2\pi i}{2022!}.$$

■

作业 21. 设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$, 求 $\oint_C \frac{\ln(z+2)}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z$.

解.

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\ln(z+2)}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z &= \frac{2\pi i}{2!}[\ln(z+2)]''|_{z=1} \\ &= -\pi i\cdot\frac{1}{(z+2)^2}\bigg|_{z=1} = -\frac{2\pi i}{9}.\end{aligned}$$

■

作业 22. 设 C 为正向圆周 $|\zeta|=2$, $f(z)=\oint_C \frac{\zeta^3+\zeta+1}{(z-\zeta)^2}\,\mathrm{d}\zeta$. 求 $f'(1+i)$ 和 $f'(4)$.

解. 当 $|z|<2$ 时, $f(z)=2\pi i(z^3+z+1)'=2\pi i(3z^2+1)$, 因此 $f'(1+i)=12\pi(-1+i)$.

当 $|z|>2$ 时, $f(z)=0$, 因此 $f'(4)=0$. ■

作业 23. 设 C_1 和 C_2 为两条分离的闭路, 证明

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2\,\mathrm{d}z}{z-z_0}+\oint_{C_2}\frac{\sin z\,\mathrm{d}z}{z-z_0}\right]=\begin{cases} z_0^2, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_1 \text{ 内时}, \\ \sin z_0, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_2 \text{ 内时}. \end{cases}$$

证明. 当 z_0 在 C_1 内时, $\dfrac{\sin z}{z-z_0}$ 在 C_2 及其内部解析, 从而

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2\,\mathrm{d}z}{z-z_0}+\oint_{C_2}\frac{\sin z\,\mathrm{d}z}{z-z_0}\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{z^2\,\mathrm{d}z}{z-z_0}=z_0^2.$$

当 z_0 在 C_2 内时, $\dfrac{z^2}{z-z_0}$ 在 C_1 及其内部解析, 从而

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2\,\mathrm{d}z}{z-z_0}+\oint_{C_2}\frac{\sin z\,\mathrm{d}z}{z-z_0}\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{\sin z\,\mathrm{d}z}{z-z_0}=\sin z_0.$$ ■

作业 24. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内任意一条闭路, 且 C 的内部完全包含在 D 中. 如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有的点处成立, 证明在 C 内部所有点处 $f(z)=g(z)$ 也成立.

证明. 设 $h(z)=f(z)-g(z)$, 则 $h(z)$ 在区域 D 内处处解析且在 C 上 $h(z)=0$. 从而对任意 C 内部的点 z_0,

$$h(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{h(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=0,$$

即 $f(z_0)=g(z_0)$. ■

作业 25. (2021 年 B 卷) 请谈一谈复积分与实积分的区别.

3.5 解析函数与调和函数的关系

作业 26. (2021 年 A 卷) 下列命题中, 正确的是 (D).

(A) 设 v_1, v_2 在区域 D 内均为 u 的共轭调和函数, 则必有 $v_1=v_2$

(B) 解析函数的实部是虚部的共轭调和函数

(C) 以调和函数为实部与虚部的函数是解析函数

(D) 若 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则 u_x 为 D 内的调和函数

解析. A 可以相差一个常数. B 实部是虚部的共轭解析函数乘 -1. C 未必, 例如 $f(z)=xy+xyi$ 不解析. D 因为 u_x 是 $f'(z)$ 的实部, 所以调和. ■

作业 27. (2022 年 A 卷) 已知 $v(x,y)=x^3+y^3-axy(x+y)$ 为调和函数, 求参数 a 以及解析函数 $f(z)$ 使得 $v(x,y)$ 是它的虚部.

解. 由 $\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=6x-2ay+6y-2ax=0$ 可知 $a=3$. 由

$$\begin{aligned}f'(z)&=v_y+iv_x\\&=(3y^2-3x^2-6xy)+i(3x^2-6xy-3y^2)\\&=3(i-1)(x+iy)^2=3(i-1)z^2\end{aligned}$$

可知 $f(z)=(i-1)z^3+C, C\in\mathbb{R}$.

也可以由 $u_x=v_y=3y^2-3x^2-6xy$ 得 $u=3xy^2-x^3-3x^2y+\psi(y)$. 由 $u_y=-v_x=-(3x^2-6xy-3y^2)$ 得 $\psi'(y)=3y^2$, $\psi(y)=y^3+C$,

$$\begin{aligned}f(z)&=u+iv\\&=3xy^2-x^3-3x^2y+y^3+C+i(x^3+y^3-3xy^2-3x^2y)\\&=(i-1)z^3+C.\end{aligned}$$

■

作业 28. (2021 年 A 卷) 已知 $f(z)=y^3+ax^2y+i(bx^3-3xy^2)$ 为解析函数, a,b 为实数, 求参数 a,b 和 $f'(z)$.

解. 由 $u_x=2axy=v_y=-6xy$ 可知 $a=-3$. 由 $u_y=3y^2-3x^2=-v_x=-(3bx^2-3y^2)$ 可知 $b=1$. 因此 $f'(z)=u_x+iv_x=-6xy+i(3x^2-3y^2)=3iz^2$. ■

作业 29. 设 u 为区域 D 内的调和函数, $f(z)=u_x-iu_y$. 那么 $f(z)$ 是不是 D 内的解析函数? 为什么?

解. 是, 由于 u 具有二阶连续偏导数, 因此 u_x,u_y 具有连续偏导数, 从而可微. 又

$$(u_x)_x=u_{xx}=-u_{yy}=(-u_y)_y,\quad (u_x)_y=u_{xy}=u_{yx}=-(-u_y)_x,$$

C-R 方程满足, 从而 $f(z)$ 解析. ■

作业 30. 证明一对共轭调和函数的乘积仍为调和函数.

证明. 设 v 是 u 的共轭调和函数, 则 $f(z)=u+iv$ 是解析函数, 从而

$$\frac{1}{2}f^2(z)=\frac{u^2-v^2}{2}+uvi$$

也是解析函数, 故它的虚部 uv 是调和函数.

另证: 设 v 是 u 的共轭调和函数, 则 $u_x = v_y, u_y = -v_x$. 显然 uv 具有二阶连续偏导数. 由于

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= (uv)_{xx} + (uv)_{yy} = u_{xx}v + 2u_xv_x + uv_{xx} + u_{yy}v + 2u_yv_y + uv_{yy} \\ &= v\Delta u + u\Delta v + 2(u_xv_x + u_yv_y) = 2(-u_xu_y + u_yu_x) = 0,\end{aligned}$$

所以 uv 是调和函数. ■

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 31. 设 $f(z) = u + iv$. 当 u, v 是二元可微函数时, 我们也可以使用格林公式来计算 $f(z)$ 绕闭路的积分.

(1) 设 C 是一条光滑或逐段光滑的闭路, D 是其内部区域. 函数 $u(x,y), v(x,y)$ 在 D 及其边界上连续可微. 证明

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\iint_D (v_x + u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\iint_D (u_x - v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

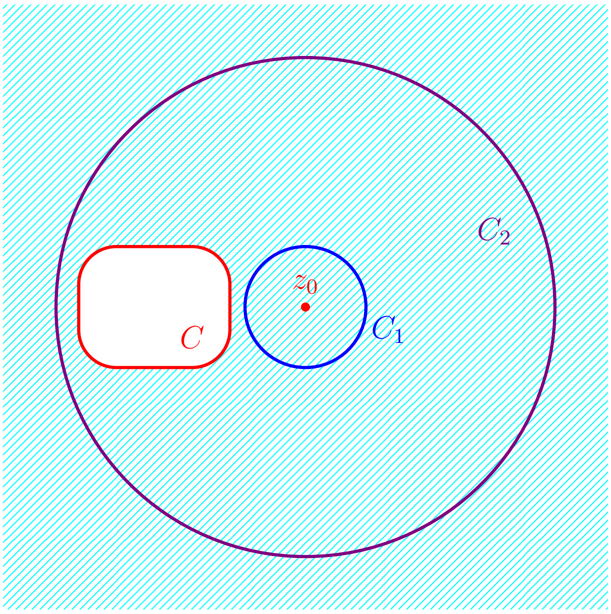
并由此计算 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z$.

(2) 证明

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\overline{z} = 2i\iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

并由此计算 $\displaystyle\oint_{|z|=1} \operatorname{Re} z\,\mathrm{d}z$.

作业 32. 设 $f(z)$ 在闭路 C 及其外部区域 D 解析, $z_0 \in D$. 是否有类似的柯西积分公式? 我们假设 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = A$ 存在.



(1) 选取以 z_0 为圆心的圆 C_1, C_2 如图所示. 利用长大不等式证明 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\dfrac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = A$.

(2) 利用复合闭路定理证明 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C}\dfrac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = A - f(z_0)$.