抓石子游戏中的数学问题

张神星 (合肥工业大学)
哈尔滨工程大学
zhangshenxing@hfut.edu.cn

抓石子游戏

- 幼儿园里有两个小朋友 Alice 和 Bob, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.

抓石子游戏

- 幼儿园里有两个小朋友 Alice 和 Bob, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.
- 每个人每次可以取走 $1 \sim 3$ 个石子, 最终谁把最后一颗石子取走, 谁就获得了游戏的胜利.

抓石子游戏

- 幼儿园里有两个小朋友 Alice 和 Bob, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.
- 每个人每次可以取走 $1 \sim 3$ 个石子, 最终谁把最后一颗石子取走, 谁就获得了游戏的胜利.
- 不难知道, 如果一开始石子的个数是 4 的倍数. 那么每次 Alice 取 x 个之后, Bob 只需要取 $4-x$ 个, 就可以保证必胜.

抓石子游戏

- 幼儿园里有两个小朋友 Alice 和 Bob, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.
- 每个人每次可以取走 $1 \sim 3$ 个石子, 最终谁把最后一颗石子取走, 谁就获得了游戏的胜利.
- 不难知道, 如果一开始石子的个数是 4 的倍数. 那么每次 Alice 取 x 个之后, Bob 只需要取 $4 - x$ 个, 就可以保证必胜.
- 而如果一开始石子的个数不是 4 的倍数, 那么 Alice 只需要取 $1 \sim 3$ 个石子, 使得剩下的石子个数是 4 的倍数即可获胜.

胜负数列

- 我们将这个游戏记为 $\textsc{sub}(S)$, 其中 $S = \{1, 2, 3\}$ 表示每次可以取的石头个数.

胜负数列

- 我们将这个游戏记为 $\text{SUB}(S)$, 其中 $S = \{1, 2, 3\}$ 表示每次可以取的石头个数.
- 那么根据初始石头个数 n 的不同, 我们可以得到一个胜负数列(从 0 开始):

$$0111\ 0111\ 0111\ \cdots$$

这里 0 表示先手必败, 1 表示先手必胜.

胜负数列

- 我们将这个游戏记为 $\textsc{sub}(S)$, 其中 $S=\{1,2,3\}$ 表示每次可以取的石头个数.
- 那么根据初始石头个数 n 的不同, 我们可以得到一个胜负数列(从 0 开始):

$$0111\ 0111\ 0111\ \cdots$$

  这里 0 表示先手必败, 1 表示先手必胜.
- 事实上, 我们将游戏规则改成谁不能取谁算输更为合理, 因为允许取的石子个数的集合 S 可能不包含 1, 这样有时候会剩下石子.

Sprague-Grundy 数列

- 如果存在 $s \in S$ 使得 $n - s$ 个石子情形是先手必败的 (必败点), 则 n 个石子情形是先手必胜的 (必胜点).

Sprague-Grundy 数列

- 如果存在 $s \in S$ 使得 $n - s$ 个石子情形是先手必败的 (必败点), 则 n 个石子情形是先手必胜的 (必胜点).
- 而有些情形, 既可以转化为必胜点, 也可以转化为必败点. 为了一般化, 我们把必败点叫做 0 级必胜点, 把可以一步走到 $0 \sim m-1$ 级必胜点的点, 叫做 m 级必胜点.

Sprague-Grundy 数列

- 如果存在 $s \in S$ 使得 $n-s$ 个石子情形是先手必败的 (必败点), 则 n 个石子情形是先手必胜的 (必胜点).
- 而有些情形, 既可以转化为必胜点, 也可以转化为必败点. 为了一般化, 我们把必败点叫做 0 级必胜点, 把可以一步走到 $0 \sim m-1$ 级必胜点的点, 叫做 m 级必胜点.
- 如果 n 个石子情形是 m 级必胜点, 定义 $\mathcal{G}_S(n) = m$.

Sprague-Grundy 数列

- 如果存在 $s \in S$ 使得 $n - s$ 个石子情形是先手必败的 (必败点), 则 n 个石子情形是先手必胜的 (必胜点).
- 而有些情形, 既可以转化为必胜点, 也可以转化为必败点. 为了一般化, 我们把必败点叫做 0 级必胜点, 把可以一步走到 $0 \sim m - 1$ 级必胜点的点, 叫做 m 级必胜点.
- 如果 n 个石子情形是 m 级必胜点, 定义 $\mathcal{G}_S(n) = m$. 这样我们得到了一个数列, 称之为 Sprague-Grundy 数列 (或 Nim 数列),

Sprague-Grundy 数列

- 如果存在 $s \in S$ 使得 $n-s$ 个石子情形是先手必败的 (必败点), 则 n 个石子情形是先手必胜的 (必胜点).
- 而有些情形, 既可以转化为必胜点, 也可以转化为必败点. 为了一般化, 我们把必败点叫做 0 级必胜点, 把可以一步走到 $0 \sim m-1$ 级必胜点的点, 叫做 m 级必胜点.
- 如果 n 个石子情形是 m 级必胜点, 定义 $\mathcal{G}_S(n) = m$. 这样我们得到了一个数列, 称之为 Sprague-Grundy 数列 (或 Nim 数列), 且

$$\mathcal{G}_S(n) = \operatorname{mex}\{\mathcal{G}_S(n-s) : s \in S\}.$$

mex 是指不属于后面集合的最小的非负整数 (minimal except).

Nim 游戏及其变种

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;

Nim 游戏及其变种

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 (S 无限);

Nim 游戏及其变种

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 (S 无限);
- 高维情形 (n 是向量, S 是向量集合).

Nim 游戏及其变种

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 (S 无限);
- 高维情形 (n 是向量, S 是向量集合).

不过我们今天只讨论 S 有限的一维一堆情形.

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 (S 无限);
- 高维情形 (n 是向量, S 是向量集合).

不过我们今天只讨论 S 有限的一维一堆情形.

注意到 $\mathcal{G}_{dS}(n) = \mathcal{G}_S([\frac{n}{d}])$.

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 (S 无限);
- 高维情形 (n 是向量, S 是向量集合).

不过我们今天只讨论 S 有限的一维一堆情形.

注意到 $\mathcal{G}_{dS}(n) = \mathcal{G}_S([\frac{n}{d}])$. 因此我们只需考虑 S 的所有元素公因子为 1 的情形.

周期和预周期

通过抽屉原理, 容易说明:

周期和预周期

通过抽屉原理，容易说明:

命题

数列 $\mathcal{G}_S$ 是最终周期的，即存在整数 $p \geqslant 1, \ell \geqslant 0$ 使得 $\mathcal{G}_S(n+p) = \mathcal{G}_S(n), \forall n \geqslant \ell$.

通过抽屉原理, 容易说明:

命题

数列 $\mathcal{G}_S$ 是最终周期的, 即存在整数 $p \geqslant 1, \ell \geqslant 0$ 使得 $\mathcal{G}_S(n+p) = \mathcal{G}_S(n), \forall n \geqslant \ell$.

将最小的 p 称为 ($\mathcal{G}_S$ 或 $\textsc{sub}(S)$ 的)周期, 最小的 ℓ 称为预周期 (pre-period).

通过抽屉原理, 容易说明:

命题

数列 $\mathcal{G}_S$ 是最终周期的, 即存在整数 $p \geqslant 1, \ell \geqslant 0$ 使得 $\mathcal{G}_S(n+p) = \mathcal{G}_S(n), \forall n \geqslant \ell$.

将最小的 p 称为 ($\mathcal{G}_S$ 或 $\textsc{sub}(S)$ 的)周期, 最小的 ℓ 称为预周期 (pre-period).
我们总将集合 S 中的元素从小到大排列, 即

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}, \quad s_1 < s_2 < \cdots < s_k.$$

通过抽屉原理，容易说明:

命题

数列 $\mathcal{G}_S$ 是最终周期的，即存在整数 $p \geqslant 1, \ell \geqslant 0$ 使得 $\mathcal{G}_S(n+p) = \mathcal{G}_S(n), \forall n \geqslant \ell$.

将最小的 p 称为 ($\mathcal{G}_S$ 或 $\textsc{sub}(S)$ 的)周期，最小的 ℓ 称为预周期 (pre-period).
我们总将集合 S 中的元素从小到大排列，即

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}, \quad s_1 < s_2 < \cdots < s_k.$$

不难说明，满足 $\mathcal{G}_S(n) = \mathcal{G}_S(n+p), \ell \leqslant \forall n \leqslant \ell + s_k$ 的最小的 p 和 ℓ 就是周期和预周期.

周期和预周期

通过抽屉原理，容易说明:

命题

数列 $\mathcal{G}_S$ 是最终周期的，即存在整数 $p \geqslant 1, \ell \geqslant 0$ 使得 $\mathcal{G}_S(n+p) = \mathcal{G}_S(n), \forall n \geqslant \ell$.

将最小的 p 称为 ($\mathcal{G}_S$ 或 $\textsc{sub}(S)$ 的)周期，最小的 ℓ 称为预周期 (pre-period).
我们总将集合 S 中的元素从小到大排列，即

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}, \quad s_1 < s_2 < \cdots < s_k.$$

不难说明，满足 $\mathcal{G}_S(n) = \mathcal{G}_S(n+p), \ell \leqslant \forall n \leqslant \ell + s_k$ 的最小的 p 和 ℓ 就是周期和预周期. 因此对于任意集合 S，很容易通过计算机来计算它的周期和预周期，从而得到整个 SG 数列.

$k \leqslant 2$ 等情形

当 $k = \#S \leqslant 2$ 时, p 和 ℓ 都是已知的.

$k \leqslant 2$ 等情形

当 $k = \#S \leqslant 2$ 时, p 和 ℓ 都是已知的. 而即使是 $k = 3$ 的情形, p 和 ℓ 依然还不是完全知道.

当 $k = \#S \leqslant 2$ 时, p 和 ℓ 都是已知的. 而即使是 $k = 3$ 的情形, p 和 ℓ 依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

当 $k = \#S \leqslant 2$ 时, p 和 ℓ 都是已知的. 而即使是 $k = 3$ 的情形, p 和 ℓ 依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

- $\mathcal{G}_{\{1\}} = \underline{01}$. 这里 $\underline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\mathcal{H}\cdots$ 表示无穷多个 $\mathcal{H}$ 重复得到的序列.

$k \leqslant 2$ 等情形

当 $k = \#S \leqslant 2$ 时, p 和 ℓ 都是已知的. 而即使是 $k = 3$ 的情形, p 和 ℓ 依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

- $\mathcal{G}_{\{1\}} = \underline{01}$. 这里 $\underline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\mathcal{H}\cdots$ 表示无穷多个 $\mathcal{H}$ 重复得到的序列.
- $1 \in S$ 不含偶数 $\iff \mathcal{G}_S = \underline{01}$.

$k \leqslant 2$ 等情形

当 $k = \#S \leqslant 2$ 时, p 和 ℓ 都是已知的. 而即使是 $k = 3$ 的情形, p 和 ℓ 依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

- $\mathcal{G}_{\{1\}} = \underline{01}$. 这里 $\underline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\mathcal{H}\cdots$ 表示无穷多个 $\mathcal{H}$ 重复得到的序列.
- $1 \in S$ 不含偶数 $\iff \mathcal{G}_S = \underline{01}$.
- 设 $S = \{a, c = at + r\}, 0 \leqslant r < a$, 则

$$\mathcal{G}_S = \begin{cases} \underline{(0^a 1^a)^{t/2} 0^r 2^{a-r} 1^r}, & 2 \mid t; \\ \underline{(0^a 1^a)^{(t+1)/2} 2^r}, & 2 \nmid t, \end{cases} \quad \ell = 0, p = c + a \text{ 或 } 2a.$$

这里 $\mathcal{H}^t = \mathcal{H}\cdots\mathcal{H}$ 表示 t 个 $\mathcal{H}$ 重复得到的序列.

$S = \{1, b, c\}$ 的简单情形

- 设 $S = \{1, b, c\}, 2 \nmid b$. 注意到 $\mathcal{G}_{\{1,b\}} = \underline{\mathcal{H}}, \mathcal{H} = 01$. 我们有

c	$\mathcal{G}_S$	ℓ	p
奇数	$\underline{\mathcal{H}}$	0	2
偶数	$\underline{\mathcal{H}^{c/2}(23)^{(b-1)/2}2}$	0	$c+b$

$S = \{1, b, c\}$ 的简单情形

- 设 $S = \{1, b, c\}, 2 \nmid b$. 注意到 $\mathcal{G}_{\{1,b\}} = \underline{\mathcal{H}}, \mathcal{H} = 01$. 我们有

c	$\mathcal{G}_S$	ℓ	p
奇数	$\underline{\mathcal{H}}$	0	2
偶数	$\underline{\mathcal{H}^{c/2}(23)^{(b-1)/2}2}$	0	$c+b$

- 设 $S = \{1, 2, 3t + r\}, 0 \leqslant r < 3$. 注意到 $\mathcal{G}_{\{1,2\}} = \underline{\mathcal{H}}, \mathcal{H} = 012$. 我们有

r	$\mathcal{G}_S$	ℓ	p
0	$\underline{(012)^t3}$	0	$c+1$
$1, 2$	$\underline{012}$	0	3

$S = \{1, b, c\}$ 的简单情形

- 设 $S = \{1, 4, c = 5t + r\}, 0 \leqslant r < 5$. 注意到 $\mathcal{G}_{\{1,4\}} = \underline{\mathcal{H}}, \mathcal{H} = 01012$. 我们有

r, c	$\mathcal{G}_S$	ℓ	p
$r = 0, c = 5$	$\underline{\mathcal{H}\,323}$	0	8
$r = 0, c > 5$	$\mathcal{H}^t\,323013\underline{\mathcal{H}^{t-1}012012}$	$c + 6$	$c + 1$
$r = 1, 4$	$\underline{\mathcal{H}}$	0	5
$r = 2$	$\underline{\mathcal{H}^t\,012}$	0	$c + 1$
$r = 3$	$\underline{\mathcal{H}^{t+1}\,32}$	0	$c + 4$

$S=\{1,b,c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S=\{1,b,c=t(b+1)+r\}, b=2k\geqslant 6, 0\leqslant r\leqslant b.$

$S = \{1, b, c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S = \{1, b, c = t(b+1) + r\}, b = 2k \geqslant 6, 0 \leqslant r \leqslant b.$

(1) 若 $r = 1, b$, 则 $\ell = 0, p = b + 1.$

命题

设 $S=\{1,b,c=t(b+1)+r\},b=2k\geqslant 6,0\leqslant r\leqslant b.$

(1) 若 $r=1,b$, 则 $\ell=0,p=b+1.$

(2) 若 $3\leqslant r\leqslant b-1$ 是奇数, 则 $\ell=0,p=c+b.$

$S = \{1, b, c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S = \{1, b, c = t(b+1) + r\}, b = 2k \geqslant 6, 0 \leqslant r \leqslant b$.

(1) 若 $r = 1, b$, 则 $\ell = 0, p = b + 1$.

(2) 若 $3 \leqslant r \leqslant b - 1$ 是奇数, 则 $\ell = 0, p = c + b$.

(3) 若 $r = b - 2$, 则 $\ell = 0, p = c + 1$.

$S=\{1,b,c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S=\{1,b,c=t(b+1)+r\}, b=2k\geqslant 6, 0\leqslant r\leqslant b$.

(1) 若 $r=1,b$, 则 $\ell=0, p=b+1$.

(2) 若 $3\leqslant r\leqslant b-1$ 是奇数, 则 $\ell=0, p=c+b$.

(3) 若 $r=b-2$, 则 $\ell=0, p=c+1$.

(4) 若 $c=b+1$, 则 $\ell=0, p=2b$.

$S=\{1,b,c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S=\{1,b,c=t(b+1)+r\}, b=2k\geqslant 6, 0\leqslant r\leqslant b$.

(1) 若 $r=1,b$, 则 $\ell=0, p=b+1$.

(2) 若 $3\leqslant r\leqslant b-1$ 是奇数, 则 $\ell=0, p=c+b$.

(3) 若 $r=b-2$, 则 $\ell=0, p=c+1$.

(4) 若 $c=b+1$, 则 $\ell=0, p=2b$.

(5) 若 $c>b+1$, $0\leqslant r\leqslant b-4$ 是偶数且 $t+r/2\geqslant k$, 则 $\ell=((b-r)/2-1)(c+b+2)-b, p=c+1$.

$S=\{1,b,c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S=\{1,b,c=t(b+1)+r\},b=2k\geqslant 6,0\leqslant r\leqslant b$.

(1) 若 $r=1,b$, 则 $\ell=0,p=b+1$.

(2) 若 $3\leqslant r\leqslant b-1$ 是奇数, 则 $\ell=0,p=c+b$.

(3) 若 $r=b-2$, 则 $\ell=0,p=c+1$.

(4) 若 $c=b+1$, 则 $\ell=0,p=2b$.

(5) 若 $c>b+1$, $0\leqslant r\leqslant b-4$ 是偶数且 $t+r/2\geqslant k$, 则 $\ell=((b-r)/2-1)(c+b+2)-b,p=c+1$.

(6) 若 $c>b+1$, $0\leqslant r\leqslant b-4$ 是偶数且 $t+r/2\leqslant k-1$, 则 $\ell=t(c+b+2)-b$. 若 $t+r/2<k-1$, 则 $p=c+b$; 若 $t+r/2=k-1$, 则 $p=b-1$.

$S=\{1,b,c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S=\{1,b,c=t(b+1)+r\},b=2k\geqslant 6,0\leqslant r\leqslant b.$

(1) 若 $r=1,b$, 则 $\ell=0,p=b+1.$

(2) 若 $3\leqslant r\leqslant b-1$ 是奇数, 则 $\ell=0,p=c+b.$

(3) 若 $r=b-2$, 则 $\ell=0,p=c+1.$

(4) 若 $c=b+1$, 则 $\ell=0,p=2b.$

(5) 若 $c>b+1,\ 0\leqslant r\leqslant b-4$ 是偶数且 $t+r/2\geqslant k$, 则 $\ell=((b-r)/2-1)(c+b+2)-b,p=c+1.$

(6) 若 $c>b+1,\ 0\leqslant r\leqslant b-4$ 是偶数且 $t+r/2\leqslant k-1$, 则 $\ell=t(c+b+2)-b$. 若 $t+r/2<k-1$, 则 $p=c+b$; 若 $t+r/2=k-1$, 则 $p=b-1.$

我们发现, 对于集合 $S=\{1,b,c\}$, p 和 ℓ 的形式与 c 模 $\{1,b\}$ 的周期的同余类有关.

$S=\{1,b,c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S=\{1,b,c=t(b+1)+r\}, b=2k\geqslant 6, 0\leqslant r\leqslant b$.

(1) 若 $r=1,b$, 则 $\ell=0, p=b+1$.

(2) 若 $3\leqslant r\leqslant b-1$ 是奇数, 则 $\ell=0, p=c+b$.

(3) 若 $r=b-2$, 则 $\ell=0, p=c+1$.

(4) 若 $c=b+1$, 则 $\ell=0, p=2b$.

(5) 若 $c>b+1$, $0\leqslant r\leqslant b-4$ 是偶数且 $t+r/2\geqslant k$, 则 $\ell=((b-r)/2-1)(c+b+2)-b, p=c+1$.

(6) 若 $c>b+1$, $0\leqslant r\leqslant b-4$ 是偶数且 $t+r/2\leqslant k-1$, 则 $\ell=t(c+b+2)-b$. 若 $t+r/2<k-1$, 则 $p=c+b$; 若 $t+r/2=k-1$, 则 $p=b-1$.

我们发现, 对于集合 $S=\{1,b,c\}$, p 和 ℓ 的形式与 c 模 $\{1,b\}$ 的周期的同余类有关. 对于每一个同余类而言, p 和 ℓ 是 c 的一次函数.

更多的例子

命题

更多的例子

命题

(1) 设 $S=\{a,2a,c=3at+r\},0\leqslant r<3a$, 则

$$\ell=\begin{cases}c+a-r, & 0<r<a;\\ 0, & \text{其它情形},\end{cases}\qquad p=\begin{cases}3a/2, & r=a/2;\\ 3a, & a/2<r\leqslant 2a;\\ c+a, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

更多的例子

命题

(1) 设 $S=\{a,2a,c=3at+r\},0\leqslant r<3a$, 则

$$\ell=\begin{cases}c+a-r, & 0<r<a;\\ 0, & \text{其它情形},\end{cases}\quad p=\begin{cases}3a/2, & r=a/2;\\ 3a, & a/2<r\leqslant 2a;\\ c+a, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

(2) 设 $S=\{a,a+1,\ldots,b-1,b,c=t(a+b)+r\},0\leqslant r<a+b$, 则

$$\ell=0,\quad p=\begin{cases}a+b, & a\leqslant r\leqslant b;\\ c+a, & r=0\ \text{或} r>b;\\ c+b, & 0<r<a.\end{cases}$$

更多的例子

例

设 $S=\{2,3,5,7\}$, 则 $\mathcal{G}_S=0^21^22^23^24$ 周期为 9. 对于 $11\leqslant c\leqslant 500$, $\textsc{sub}(S\cup\{c\})$ 的预周期和周期为

$$\ell_c=\begin{cases}2c-4, & c\equiv 1 \bmod 18;\\ c+5, & c\equiv 10 \bmod 18;\\ 0, & \text{其它情形},\end{cases}\qquad p_c=\begin{cases}c+2, & c\equiv 0,8,9,10,17 \bmod 18;\\ 4, & c\equiv 1 \bmod 18;\\ 9, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

主要猜想结论

根据这些结论，我们提出如下猜想：

主要猜想结论

根据这些结论，我们提出如下猜想:

猜想

固定集合 S. 存在正整数 q, N 以及 $\alpha_r, \beta_r, \lambda_r, \mu_r, 0 \leqslant r < q$, 使得当 $c \geqslant N$ 且 $c \equiv r \bmod q$ 时, $\textsc{sub}(S \cup \{c\})$ 的预周期和周期分别是 $\alpha_r c + \beta_r$ 和 $\lambda_r c + \mu_r$.

主要猜想结论

根据这些结论，我们提出如下猜想:

猜想

固定集合 S. 存在正整数 q, N 以及 $\alpha_r, \beta_r, \lambda_r, \mu_r, 0 \leqslant r < q$, 使得当 $c \geqslant N$ 且 $c \equiv r \bmod q$ 时, $\textsc{sub}(S \cup \{c\})$ 的预周期和周期分别是 $\alpha_r c + \beta_r$ 和 $\lambda_r c + \mu_r$.

定理

上述猜想在如下情形成立:

(1) $1 \in S$ 且 S 所有元素均为奇数;

(2) $S = \{1, b\}$;

(3) $S = \{a, 2a\}$;

(4) $S = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$.

应用：最终二分序列

这个猜想可以指导我们寻找特定周期的 SG 序列.

应用：最终二分序列

这个猜想可以指导我们寻找特定周期的 SG 序列. 如果 $\mathcal{G}_S$ 的周期为 2, 称 $\textsc{sub}(S)$ 是最终二分的.

应用：最终二分序列

这个猜想可以指导我们寻找特定周期的 SG 序列. 如果 $\mathcal{G}_S$ 的周期为 2, 称 $\textsc{sub}(S)$ 是最终二分的. 可以证明如果 $\textsc{sub}(S)$ 是最终二分的, 则 S 不含偶数.

应用：最终二分序列

这个猜想可以指导我们寻找特定周期的 SG 序列. 如果 $\mathcal{G}_S$ 的周期为 2, 称 $\textsc{sub}(S)$ 是**最终二分**的. 可以证明如果 $\textsc{sub}(S)$ 是最终二分的, 则 S 不含偶数.

例

设 $a \geqslant 3$ 是奇数. 如果 S 是如下情形之一:

- $S = \{3, 5, 9, \ldots, 2^a + 1\}$;
- $S = \{3, 5, 2^a + 1\}$;
- $S = \{a, a + 2, 2a + 3\}$;
- $S = \{a, 2a + 1, 3a\}$,

则 $\textsc{sub}(S)$ 是最终二分的.

应用：最终二分序列

根据上面的例子和猜想的启发，我们发现了如下三元最终二分 $\textsc{sub}(S)$.

应用：最终二分序列

根据上面的例子和猜想的启发，我们发现了如下三元最终二分 $\textsc{sub}(S)$.

定理

设 $a \geqslant 3$ 是奇数，$t \geqslant 1$. 如果 S 是如下情形之一：

(1) $S = \{a, a+2, (2a+2)t+1\}$;

(2) $S = \{a, 2a+1, (3a+1)t-1\}$;

(3) $S = \{a, 2a-1, (3a-1)t+a-2\}$,

则 $\textsc{sub}(S)$ 是最终二分的.

应用：最终二分序列

根据上面的例子和猜想的启发，我们发现了如下三元最终二分 $\textsc{sub}(S)$.

定理

设 $a \geqslant 3$ 是奇数，$t \geqslant 1$. 如果 S 是如下情形之一:

(1) $S = \{a, a+2, (2a+2)t+1\}$;

(2) $S = \{a, 2a+1, (3a+1)t-1\}$;

(3) $S = \{a, 2a-1, (3a-1)t+a-2\}$,

则 $\textsc{sub}(S)$ 是最终二分的.

对于四元情形，我们通过计算发现了当 $3 \leqslant a \leqslant 25, c < 500$ 且 $c \not\equiv \pm 1 \bmod a$ 时，$\textsc{sub}(\{a, 2a+1, 3a, c\})$ 是最终二分的.

谢谢!