

复变函数与积分变换

张神星

合肥工业大学

2022 年秋季学期

本课程共 10 周 40 课时, 自 2022 年 9 月 30 日至 2022 年 11 月 3 日. **课程 QQ 群**为 (入群答案 **1400261B**)

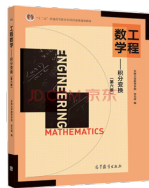
- 009 班 (电信工) **476993411**
- 010 班 (光信息和智感工) **672903188**

教材为

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》

成绩构成:

- 作业 15%, 每章交一次
- 课堂测验 25%, 一共 3 次, 取最高的两次
- 期末报告 10%
- 期末考试 50%, 至少 45 分才计算总评



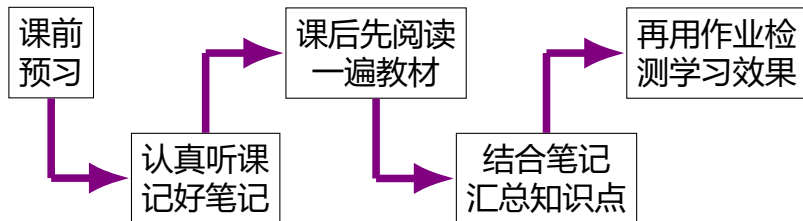
复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统.....
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学.....
- 信息学、电子学、电气工程.....

可以说复变函数应用之广, 在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.

本课程主要研究下述问题:

- 什么是复数? 为什么要引入复数?
- 复变量函数和实变量函数有什么差异?
- 我们应该研究哪一类复变量函数?
- 复变函数的微积分理论是怎样的? 这也包括级数和留数理论.
- 如何用傅里叶/拉普拉斯变换解微分方程?



第一章 复数与复变函数

- **1, 5, 8(1)(3)**
- **12(3), 13, 14(1)(3)**
- **21(4)(7), 22(5)(10), 27(2)**

- 1 复数及其代数运算
- 2 复数的三角与指数形式
- 3 复数的乘除、方幂与方根
- 4 曲线和区域
- 5 复变函数
- 6 极限和连续性

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$, 由求根公式可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

- 1 当 $\Delta > 0$ 时, 有两个不同的实根;
- 2 当 $\Delta = 0$ 时, 有一个二重的实根;
- 3 当 $\Delta < 0$ 时, 无实根. 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根, 形式地计算可以发现它们满足原来的方程.

三次方程的根

对于三次方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, 通过变量替换 $x \mapsto x - \frac{a}{3}$ 可将其二次项系数化为零. 因此可不妨设其方程为

$$x^3 - 3px - 2q = 0.$$

当 $p = 0$ 时它的可解性和解容易得到. 我们不妨设 $p \neq 0$. 此时我们有求根公式

$$x = u + \frac{p}{u}, \quad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = q^2 - p^3.$$

- 1 当 $\Delta > 0$ 时, 有一个实根.
- 2 当 $\Delta = 0$ 时, 有两个实根 $x = 2\sqrt[3]{q}, -\sqrt[3]{q}$ (2 重).
- 3 当 $\Delta < 0$ 时, 看上去没有根, 实际上有 3 个实根. 这可以通过分析函数单调性得到. 但我们[必须接受负数开方](#).

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 1 的平方根。

——莱布尼兹 (*Leibniz*)

例

解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

解.

此时 $p = -2, q = 10, \Delta = 108 > 0$, 因此

$$u = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = 1 + \sqrt{3},$$

$$x = u - \frac{2}{u} = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2. \quad \blacksquare$$

三次方程的根

例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解.

此时 $p = \frac{7}{3}, q = -3, \Delta = -\frac{100}{27} < 0$, 因此

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$
$$x = u + \frac{7}{3u} = 2, -3, 1.$$

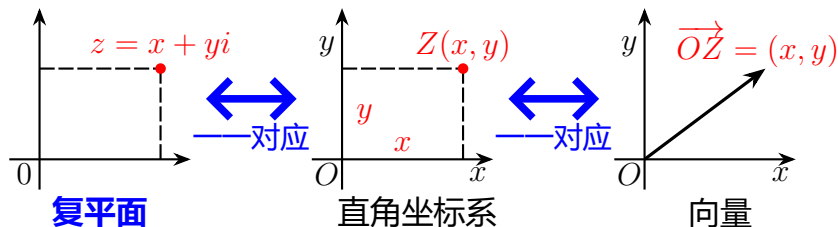
为什么 $\Delta < 0$ 时从求根公式一定会得到三个实根? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答了.

定义

固定一个记号 i , **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

换言之, 复数全体构成一个二维实线性空间, $\{1, i\}$ 是一组基. 我们将**全体复数**记作 \mathbb{C} , 全体实数记作 \mathbb{R} , 则 $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.

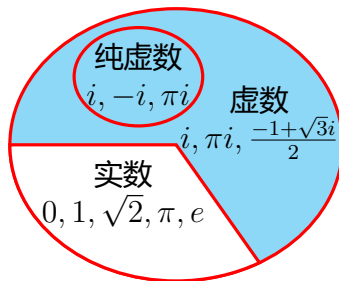
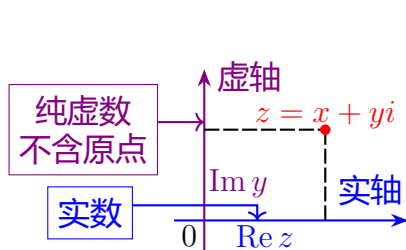
由于 \mathbb{C} 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



实部和虚部, 虚数和纯虚数

当 $y = 0$ 时, $z = x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们将直线 $y = 0$ 称为**实轴**. 相应地, 直线 $x = 0$ 被称为**虚轴**. 我们称 $z = x + yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的**实部** $\operatorname{Re} z = x$ 和**虚部** $\operatorname{Im} z = y$.

当 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, z 是实数. 不是实数的复数是**虚数**. 当 $\operatorname{Re} z = 0$ 且 $z \neq 0$ 时, 称 z 是**纯虚数**.



全体复数

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $(x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是: (1) 实数; (2) 纯虚数.

解.

(1) $x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .

(2) $x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4 . 但同时要求 $x^2 - 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq -1$, $x = 4$. ■

练习

实数 x 取何值时, $x^2(1 + i) + x(5 + 4i) + 4 + 3i$ 是纯虚数.

答案.

$x = -4$.

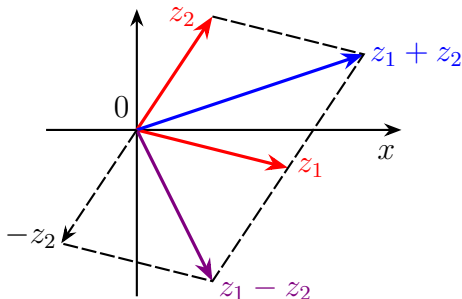
复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$. 由 \mathbb{C} 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量 \overrightarrow{OZ} 的加减法是一致的.



规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得复数的乘除法:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

对于正整数 n , 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘. 当 $z \neq 0$ 时, 还可以定义 $z^0 = 1, z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

例题: 常见复数的幂次

例

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. 一般地, 对于整数 n ,
$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(2) 令 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$.

我们把满足 $z^n = 1$ 的复数 z 称为 n 次单位根. 那么
 $1, i, -1, -i$ 是 4 次单位根, $1, \omega, \omega^2$ 是 3 次单位根.

思考

$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 是单位根吗? 如果是, 是几次单位根?

答案.

它是 8 次单位根.

例题: 解复数方程

例

解方程 $z^2 - 2(1 + i)z - 5 - 10i = 0$.

解.

配方可得 $(z - 1 - i)^2 = 5 + 10i + (1 + i)^2 = 5 + 12i$.

设 $(x + yi)^2 = 5 + 12i$, 则

$$x^2 - y^2 = 5, \quad 2xy = 12, \quad y = \frac{6}{x},$$

$$x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5, \quad x^4 - 5x^2 - 36 = 0, \quad x^2 = 9,$$

故 $(x, y) = (3, 2)$ 或 $(-3, -2)$,

$$z = 1 + i \pm (3 + 2i) = 4 + 3i \text{ 或 } -2 - i.$$

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a , $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 \mathbb{Q} , 实数全体 \mathbb{R} 也构成域, 它们是 \mathbb{C} 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域. 也就是说, 对于任何一个非常数的复系数多项式

$$p(z) = z^n + \cdots + c_1 z + c_0, \quad n \geq 1,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0) = 0$. 我们会在第五章证明该结论.

在 \mathbb{Q}, \mathbb{R} 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则 $a > b$ 或 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c , $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

而 \mathbb{C} 却不是有序域. 如果 $i > 0$, 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

于是 $0 > i$, 矛盾! 同理 $i < 0$ 也不可能.

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 \bar{z} . 换言之,
 $\bar{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

结论

- z 是 \bar{z} 的共轭复数.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
- $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$.
- z 是实数当且仅当 $z = \bar{z}$.
- z 是纯虚数当且仅当 $z = \bar{z}$ 且 $z \neq 0$.

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$, 因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$

例题：共轭复数判断实数

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明.

$\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

即 $z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2), \quad (z-\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0.$

由于 $y \neq 0$, 因此 $z \neq \bar{z}$. 故上述等式等价于 $z\bar{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$.

典型例题: 复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} \quad \text{将其转化为乘法.}$$

例

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}, \quad \text{求 } \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \text{ 以及 } z\bar{z}.$$

解.

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad z\bar{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

典型例题: 复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{z_1/z_2}$.

解.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

因此 $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$. ■

练习

计算 $\operatorname{Re}\left(\frac{1 + 2i}{8 + i}\right)$.

答案.

$$\frac{2}{13}.$$

复数也有其它的构造方式, 例如

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$$

其中 $E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$.

此时自然地有加法、乘法 (满足交换律)、取逆等运算, 从而这个集合构成一个域. 由于 $J^2 = -E$, 所以 J 实际上就相当于虚数单位, 这个域就是我们前面定义的复数域 \mathbb{C} .

- 1 复数及其代数运算
- 2 复数的三角与指数形式**
- 3 复数的乘除、方幂与方根
- 4 曲线和区域
- 5 复变函数
- 6 极限和连续性

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



定义

- 称 r 为 z 的**模**, 记为 $|z| = r$.
- 称 θ 为 z 的**辐角**, 记为 $\text{Arg } z = \theta$. 0 的辐角没有意义.

由极坐标和直角坐标的对应可知

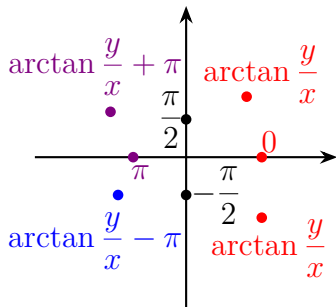
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + (2k+1)\pi, & x < 0; \\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y < 0; \\ \text{任意/无意义}, & z = 0, \end{cases}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$.

任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 $\arg z$.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



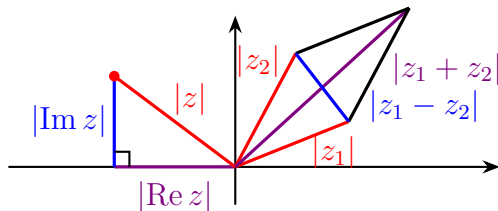
z 是实数当且仅当 $\arg z = 0, \pi$ 或 $z = 0$. z 是纯虚数当且仅当 $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$.

结论

复数的模满足如下性质:

- $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$;
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.

这些不等式均可以用三角不等式证明, 也可以用代数方法证明.



例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;

(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

证明.

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(2)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}). \end{aligned}$$

由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = r e^{i\theta} = r \exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

典型例题: 求复数的三角/指数形式

例

将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.

解.

$r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$. 由于 z 在第三象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z = 4 \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right] = 4 \exp \left(-\frac{5\pi i}{6} \right). \quad \blacksquare$$

典型例题: 求复数的三角/指数形式

例

将 $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解.

$$\begin{aligned} z &= \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} \\ &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) \\ &= \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = \exp \left(\frac{3\pi i}{10} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

典型例题: 求复数的三角/指数形式

练习

将 $z = \sqrt{3} - 3i$ 化成三角形式和指数形式.

答案.

$$z = 2\sqrt{3} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} \right) \right] = 2\sqrt{3} \exp \left(\frac{5\pi i}{3} \right).$$

求复数的三角或指数形式时, 我们只需要任取一个辐角就可以了, 不要求必须是主辐角.

例

将 $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$ 化成三角形式和指数形式, 并求出它的主辐角, 其中 $0 < \alpha \leq \pi$.

典型例题: 求复数的三角/指数形式

解.

$$|z|^2 = (1 - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 2 - 2 \cos \alpha = 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

因此 $|z| = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$. 由于

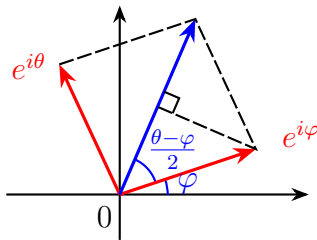
$$\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \cot \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\pi - \alpha}{2},$$

且 $\operatorname{Re} z = 1 - \cos \alpha > 0$, 因此 $\arg z = \frac{\pi - \alpha}{2}$,

$$z = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\pi - \alpha}{2} + i \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} e^{\frac{(\pi - \alpha)i}{2}}.$$

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2 \cos \frac{\theta - \varphi}{2} \exp \left[\frac{i(\theta + \varphi)}{2} \right].$$



- 1 复数及其代数运算
- 2 复数的三角与指数形式
- 3 复数的乘除、方幂与方根
- 4 曲线和区域
- 5 复变函数
- 6 极限和连续性

三角形式和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

这里关于辐角的两个等式的含义是指: 两边所能取到的值构成的集合相等, 即

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \{\theta_1 - \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

注意

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 \pm \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上. 例如

$$\begin{aligned}(-1 + i)(-1 + i) &= 2i, \\ \arg(-1 + i) + \arg(-1 + i) &= \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}, \\ \arg(-2i) &= -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

证明.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

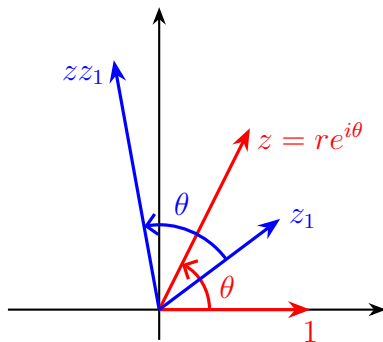
因此乘法情形得证.

设 $\frac{z_1}{z_2} = r e^{i\theta}$, 则由乘法情形可知

$$r r_2 = r_1, \quad \theta + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1.$$

因此 $r = \frac{r_1}{r_2}, \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. ■

从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍, 并按逆时针旋转角度 θ .



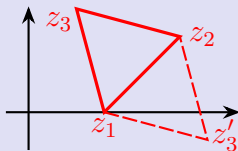
例题：复数解决平面几何问题

例

已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

解.

由于 $\overrightarrow{z_1 z_3}$ 为 $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$,



例题: 复数解决平面几何问题

续解.

因此

$$\begin{aligned} z_3 - z_1 &= (z_2 - z_1) \exp\left(\pm \frac{\pi i}{3}\right) = (1 + i) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i, \end{aligned}$$

$$z_3 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i.$$

设 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \neq 0$. 根据复数三角形式的乘法和除法运算法则, 我们有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地, 当 $r = 1$ 时, 我们得到棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

注意 $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$ 一般不成立, 除非 $n = \pm 1$. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \operatorname{Arg} z = n \arg z + 2nk\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开

$$\begin{aligned}
 \cos(n\theta) &= \operatorname{Re} \left[\sum_{0 \leq k \leq n} C_n^k \cos^{n-k} \theta (i \sin \theta)^k \right] \\
 &= \sum_{0 \leq 2k \leq n} C_n^{2k} \cos^{n-2k} \theta (-\sin^2 \theta)^k \\
 &= \sum_{0 \leq k \leq n/2} C_n^{2k} \cos^{n-2k} \theta (\cos^2 \theta - 1)^k.
 \end{aligned}$$

因此 $\cos n\theta$ 是 $\cos \theta$ 的多项式. 这个多项式

$$g_n(T) = \sum_{0 \leq k \leq n/2} C_n^{2k} T^{n-2k} (T^2 - 1)^k.$$

叫做切比雪夫多项式. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

典型例题: 复数乘幂的计算

例

求 $(1+i)^n + (1-i)^n$.

解.

由于

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad 1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

因此

$$\begin{aligned} & (1+i)^n + (1-i)^n \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \\ &= 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

典型例题: 复数乘幂的计算

练习

求 $(\sqrt{3} + i)^{2022}$.

答案.

-2^{2022} .

我们利用复数方幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = r \exp(i\theta) \neq 0, \quad w = \rho \exp(i\varphi),$$

则

$$w^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r (\cos \theta + i \sin \theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$.

为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为**算术根**. 由于 $n\varphi$ 和 θ 的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

故

$$\begin{aligned} w = w_k &= \sqrt[n]{r} \exp \frac{(\theta + 2k\pi)i}{n} \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 w_0, w_1, \dots, w_{n-1} 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \dots, n-1$. 故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值.

这些根的模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\frac{2\pi}{n}$. 因此它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的正接 n 边形的顶点.

典型例题: 复数方根的计算

例

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解.

由于 $1+i = \sqrt{2} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$, 因此

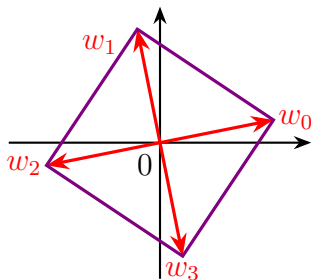
$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2} \exp\left[\frac{\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i}{4}\right], \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

所以该方根所有值为

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[8]{2} \exp \frac{\pi i}{16}, & w_1 &= \sqrt[8]{2} \exp \frac{9\pi i}{16}, \\ w_2 &= \sqrt[8]{2} \exp \frac{17\pi i}{16}, & w_3 &= \sqrt[8]{2} \exp \frac{25\pi i}{16}. \end{aligned}$$

典型例题: 复数方根的计算

$w_0, w_1 = iw_0, w_2 = -w_0, w_3 = -iw_0$ 形成了一个正方形.



典型例题: 复数方根的计算

练习

求 $\sqrt[6]{-1}$.

答案.

$$\pm \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \pm i, \pm \frac{\sqrt{3} - i}{2}.$$

思考

$i = \sqrt{-1}$ 吗?

答案.

$\sqrt{-1}$ 是多值的, 此时 $\sqrt{-1} = \pm i$. 除非给定单值分支
 $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \exp\left(\frac{i \arg z}{2}\right)$, 否则不能说 $\sqrt{-1} = i$.

三次方程的求根问题 *

现在我们来看三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$ 的根.

$$x = u + \frac{p}{u}, \quad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = q^2 - p^3.$$

1 如果 $\Delta > 0$, 设 $\alpha = \sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}}$ 是算术根. 则

$$x = \alpha + \frac{p}{\alpha}, \quad \alpha\omega + \frac{p}{\alpha}\omega^2, \quad \alpha\omega^2 + \frac{p}{\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

2 如果 $\Delta < 0$, 则 $p > 0$. 设 $\sqrt[3]{q + \sqrt{\Delta}} = u_1, u_2, u_3$, 则 u_i 都是虚数, 且

$$|u_i|^6 = \left| q + \sqrt{\Delta} \right|^2 = p^3, \quad u_i \bar{u}_i = |u_i|^2 = p.$$

于是我们得到 3 个实根 $x = u_i + \bar{u}_i$.

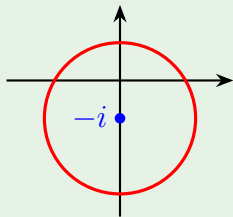
- 1 复数及其代数运算
- 2 复数的三角与指数形式
- 3 复数的乘除、方幂与方根
- 4 曲线和区域**
- 5 复变函数
- 6 极限和连续性

典型例题: 复数方程表平面图形

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解. 由于 $x = \frac{z + \bar{z}}{2i}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2}$, 因此很容易将 x, y 的方程和 z 的方程相互转化.

例

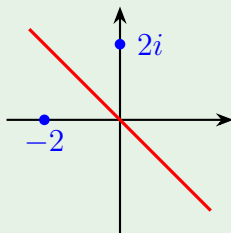
$|z + i| = 2$. 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆. 设 $z = x + yi$, 则方程可以化为 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$.



一般的圆方程为 $|z - z_0| = R$, 其中 z_0 是圆心, R 是半径.

例

$|z - 2i| = |z + 2|$. 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 $z + i\bar{z} = 0$ 或 $x + y = 0$.



典型例题: 复数方程表平面图形

例

- (3) $\text{Im}(i + \bar{z}) = 4$. 设 $z = x + yi$, 则 $\text{Im}(i + \bar{z}) = 1 - y = 4$, 因此 $y = -3$.
- (4) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.
- (5) $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

练习

$z^2 + \bar{z}^2 = 1$ 和 $z^2 - \bar{z}^2 = i$ 表示什么图形?

答案.

双曲线 $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ 和双曲线 $xy = \frac{1}{4}$.

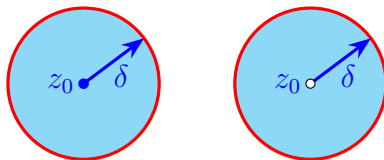
在高等数学中, 为了引入极限的概念, 需要考虑点的邻域. 类似地, 在复变函数中, 称开圆盘

$$U(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

为 z_0 的一个 δ -邻域, 称去心开圆盘

$$\overset{\circ}{U}(z_0, \delta) = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

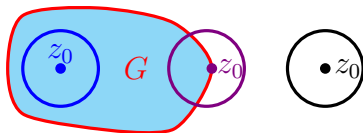
为 z_0 的一个去心 δ -邻域.



设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

- 1 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
- 2 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.
- 3 如果 z_0 的任何一个邻域 U , 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

显然内点都属于 G , 外点都不属于 G , 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.



如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G , 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

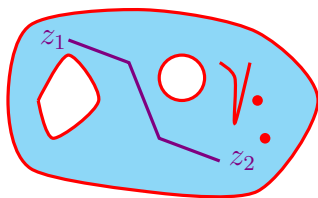
直观上看: 开集往往由 $>, <$ 的不等式给出, 闭集往往由 \geq, \leq 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0, \delta)$ 中, 则称它是有界的. 否则称它是无界的.

定义

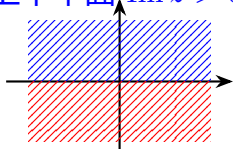
如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个区域. 也就是说, 区域是连通的开集.

观察下侧的图案, 淡蓝色部分是一个区域. 红色的线条和点是它的边界. 区域和它的边界一起构成了闭区域, 记作 \bar{D} . 它是一个闭集.



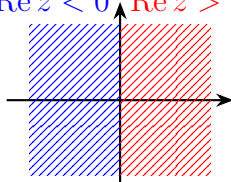
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定. 这些区域对应的闭区域是什么?

上半平面 $\text{Im } z > 0$



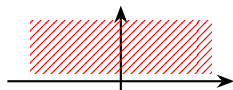
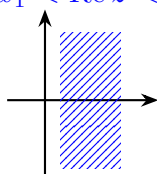
下半平面 $\text{Im } z < 0$

左半平面 $\text{Re } z < 0$ 右半平面 $\text{Re } z > 0$



竖直带状区域

$x_1 < \text{Re } z < x_2$

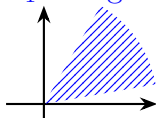


水平带状区域

$y_1 < \text{Im } z < y_2$

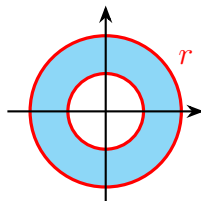
角状区域

$\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$



圆环域

$r < |z| < R$

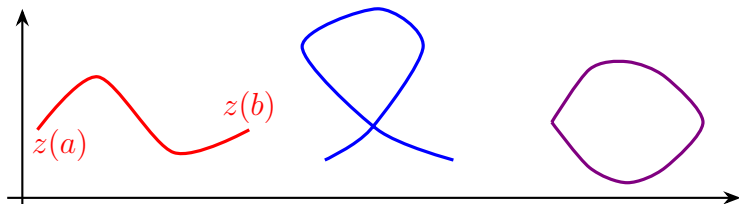


设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程

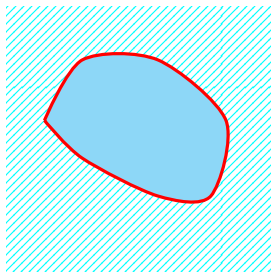
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b] \text{ 定义了一条连续曲线. 这也等价于}$$

$$C : z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b].$$

如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线. 如果还满足两个端点重叠, 即 $z(a) = z(b)$, 则称 C 是简单闭曲线, 也简称为闭路.



闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界. 分别称这两个区域是 C 的**内部**和**外部**. C 是它们的公共边界.
这件事情的严格证明是十分困难的.



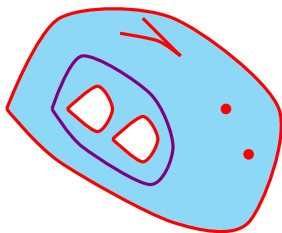
单连通域和多连通域

在前面所说的几个区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外, 闭路的内部仍然包含在这个区域内.

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中, 则称 D 是**单连通域**. 否则称之为**多连通域**.

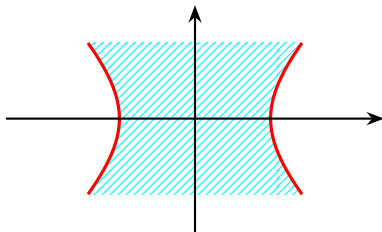
单连通域内的任一闭路可以连续地变形成一个点.



例

$$\operatorname{Re}(z^2) < 1.$$

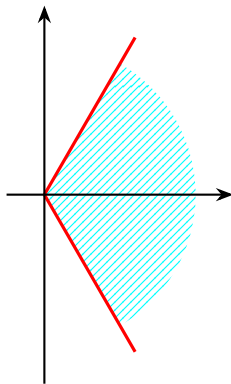
设 $z = x + yi$, 则 $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$. 这是无界的单连通域.



例

$$|\arg z| < \frac{\pi}{3}.$$

即角状区域 $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}$. 这是无界的单连通域.

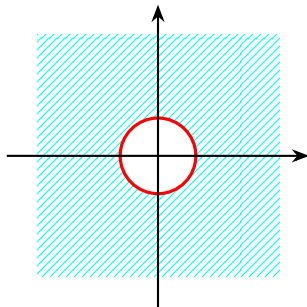


例题：区域的特性

例

$$\left| \frac{1}{z} \right| < 3.$$

即 $|z| > \frac{1}{3}$. 这是无界的单连通域.

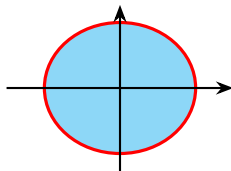


例题: 区域的特性

例

$$|z + 1| + |z - 1| < 4.$$

表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.



思考

$|z + 1| + |z - 1| \geq 1$ 表示什么区域?

答案.

整个复平面.

- 1 复数及其代数运算
- 2 复数的三角与指数形式
- 3 复数的乘除、方幂与方根
- 4 曲线和区域
- 5 复变函数**
- 6 极限和连续性

复变函数就是复数集合 $G \subseteq \mathbb{C}$ 上的一个映射 $f: G \rightarrow \mathbb{C}$. 换言之, 对于每一个 $z \in G$, 有一个唯一确定的复数 $w = f(z)$ 与之对应. 例如 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \arg z, |z|, z^n$ 都是复变函数.

f 的**定义域**是指 G , **值域**是指 $\{w = f(z) : z \in G\}$.

如果 $z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2)$, 则称 f 是**单射**.

不过在复变函数中, 我们常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 如果对每一个定义域范围内的 z , 选取固定的一个 $f(z)$ 的值, 则我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数: 对于任意点 $w \in$, 存在一个或多个 $z \in G$ 使得 $w = f(z)$. 这样 w 到 z 的就定义了 f 的反函数 f^{-1} . 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是一一对应. 若无特别声明, 复变函数总是指单值的复变函数.

每一个复变函数 $w = f(z) = u + iv$ 等价于给了两个二元实变函数

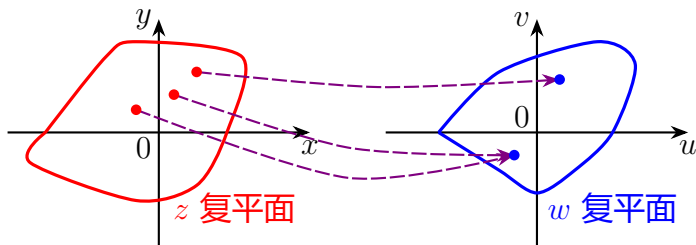
$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

例如

$$w = z^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot 2xy,$$
$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

其实我们也可以把 $f(z)$ 看成一个二元实变量复值函数.

在实变函数中, 我们常常用函数图像直观来理解和研究函数. 在复变函数中, 我们可以用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映射 (称之为映照) 来表示这种对应关系.



例

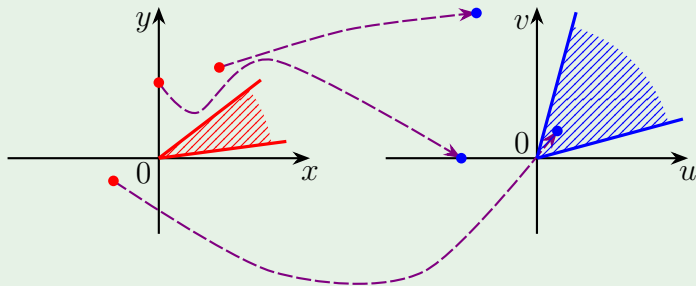
函数 $w = \bar{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域.

例

函数 $w = az$. 设 $a = re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.

例

函数 $w = z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



这个映射对应两个实变函数 $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

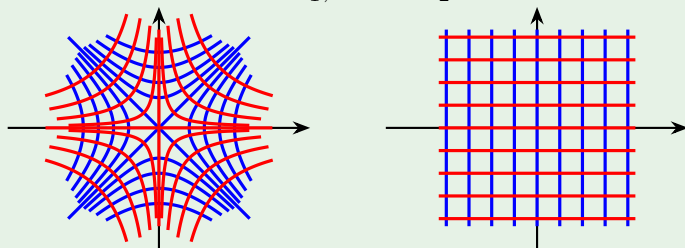
例 (续)

因此它把 z 平面上两族分别以直线 $y = \pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2 - y^2 = c_1, \quad 2xy = c_2$$

分别映射为 w 平面上的两族平行直线

$$u = c_1, \quad v = c_2.$$



例题：映照的像

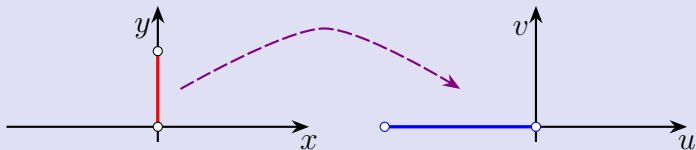
例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

- (1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \frac{\pi}{2}$.
- (2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.
- (3) 扇形区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2$.

解.

(1) 设 $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$, 则 $w = z^2 = -r^2$. 因此它的像还是一条线段 $0 < |w| < 4, \arg w = -\pi$.



续解.

(2) 由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

因此 $u = x^2 - y^2 = 4, v = 2xy$.

对于任意 $v \in \mathbb{R}$, 存在 $z = x + yi \in \mathbb{C}$ 使得 $z^2 = 4 + vi$, 且 $x^2 - y^2 = 4$. 因此这条双曲线的像是一条直线 $\operatorname{Re} w = 4$.

(3) 设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2 e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域 $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}, 0 < |w| < 4$.

例题: 映照的像

例

求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = z + \frac{1}{z}$ 下的像.

解.

设 $z = x + yi$, 则

$$w = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\bar{z}}{4} = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}yi = u + vi,$$

$$x = \frac{4}{5}u, \quad y = \frac{4}{3}v, \quad \left(\frac{4}{5}u\right)^2 + \left(\frac{4}{3}v\right)^2 = 4,$$

$$\left(\frac{u}{5/2}\right)^2 + \left(\frac{v}{3/2}\right)^2 = 1.$$

- 1 复数及其代数运算
- 2 复数的三角与指数形式
- 3 复数的乘除、方幂与方根
- 4 曲线和区域
- 5 复变函数
- 6 极限和连续性**

复变函数的极限和连续性的定义和实函数情形是类似的. 我们先来看数列极限的定义.

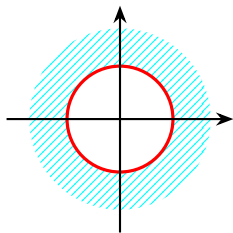
定义

- 设 $\{z_n\}_{n \geq 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.
- 如果 $\forall X > 0, \exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $|z_n| > X$, 则称 ∞ 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$.

如果我们称

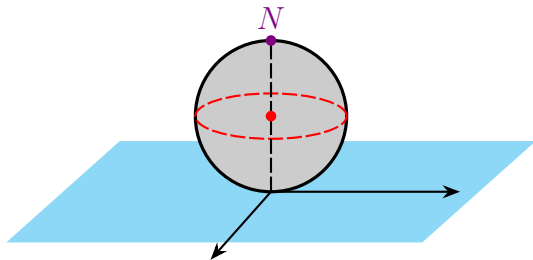
$$\overset{\circ}{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 (去心) 邻域. 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 可统一表述为:
对 z 的任意邻域 U , $\exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $z_n \in U$.

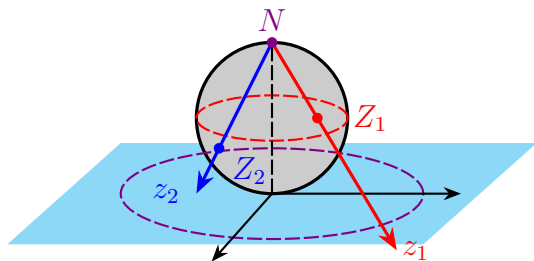


那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞ . 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

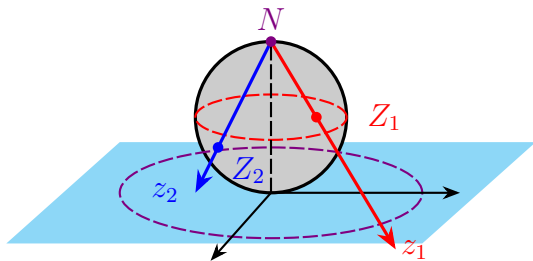
取一个与复平面相切于原点 $z = 0$ 的球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于另一点 N , 称之为**北极**.



对于平面上的任意一点 z , 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z . 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z , 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点. 这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.

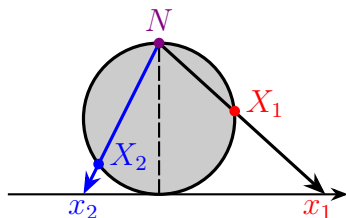


当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N . 如果我们在复平面上添加一个额外的"点"——**无穷远点**, 记作 ∞ . 那么**扩充复数集合** $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应. 称这样的球面为**复球面**, 称包含无穷远点的复平面为**扩充复平面**(**闭复平面**).



复球面: 与实数无穷的联系

它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 同样的, 当 $|x|$ 越来越大时, 其对应圆周上点也越来越接近 N . 所以实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上或闭复平面上就是 ∞ , 只是在实数时我们往往还关心它的符号, 所以区分正负.



∞ 的实部、虚部和辐角无意义, 规定 $|\infty| = +\infty$. 约定

$$z \pm \infty = \infty \pm z = \infty \quad (z \neq \infty),$$

$$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty \quad (z \neq 0),$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \quad (z \neq \infty), \quad \frac{\infty}{z} = \infty \quad (z \neq 0), \quad \frac{z}{0} = \infty \quad (z \neq 0).$$

根据开集的定义可知, 包含 z 的任何一个开集均包含 z 的一个邻域. 由此可知, 将极限定义中的 ε -邻域换成开邻域 (包含 z 的开集) 并不影响极限的定义. 在复球面上的任意一点, 可以自然地定义 $z \in \mathbb{C}^*$ 的开邻域. 它在上述对应下的像便是 z 的一个开邻域.

定理

设 $z_n = x_n + y_n i, z = x + yi$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

证明.

由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证. 

例题: 数列的敛散性


例

设 $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \exp\left(\frac{\pi i}{n}\right)$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解.

由于

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \rightarrow 1, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow 0.$$

因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$. 

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义. 如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 U , $\exists \delta > 0$ 使得当 $z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta)$ 时, 有 $f(z) \in U$, 则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \rightarrow A (z \rightarrow z_0)$.

对于 $z_0 = \infty$ 或 $A = \infty$ 的情形, 也可以用上述定义统一描述. 通常我们说极限存在是不包括 $\lim f(z) = \infty$ 的情形的.

与实函数极限之联系

通过与二元实函数的极限对比可知, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的. $z \rightarrow z_0$ 可以是沿着任意一条曲线趋向于 z_0 , 或者看成 z 是在一个开圆盘内任意的点逐渐地靠拢 z_0 .

定理

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + y_0i$, $A = u_0 + v_0i$, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

证明.

由三角不等式

$$|u - u_0|, |v - v_0| \leq |z - z_0| \leq |u - u_0| + |v - v_0|$$

易证.

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, 则

1 $\lim_{z \rightarrow z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B;$

2 $\lim_{z \rightarrow z_0} (fg)(z) = AB;$

3 当 $B \neq 0$ 时, $\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f}{g} \right) (z) = \frac{A}{B}.$

例题: 判断函数极限是否存在


例

证明当 $z \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明.

令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当 z 沿着直线 $y = 0$ 左右两侧趋向于 0 时, 则 $u(x, y) \rightarrow \pm 1$. 因此 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y)$ 不存在, 从而 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在. 

定义

- 如果 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

定理

函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

例如 $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x, y) = x^2 - y^2$ 处处连续. 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

也处处连续, 有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

有时候我们会遇到在曲线上连续的函数, 它指的是当 z 沿着该曲线趋向于 z_0 时, $f(z) \rightarrow f(z_0)$. 对于闭合曲线或包含端点的曲线段, 其之上的连续函数 $f(z)$ 是有界的.


例题: 函数连续性的判定

例

证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明.

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x, y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

另一种看法是, 函数 $g(z) = \bar{z} = x - iy$ 处处连续, 从而 $g(f(z)) = \overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续. 

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 \mathbb{C} 是一个域, 上面可以做除法.

这就导致了复变函数有**导数**, 而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.