习题课

- 习题2-1
- (A)1. x_n 递减趋向于 0, 极限是 0.
- 2. x_n 奇数项恒为 0, 偶数项 $x_{2n}=\frac{2}{2n}=\frac{1}{n}$ 递减趋向于 0, 极限是 0.
- 3. x_n 奇数项递减趋向于 -1, 偶数项递减趋向于 1, 极限不存在.
- 4. x_n 在 $(-1,1)$ 之间震荡, 极限不存在.
- 5. $\frac{\pi}{n}$ 递减趋向于 0, x_n 递增趋向于 1, 极限是 1.
- 6. $\frac{1}{n}$ 递减趋向于 0, x_n 递增趋向于 $-\infty$, 极限不存在.

- (B)1.(1) $\left|\frac{2n-1}{3n+2}-\frac{2}{3}\right|=\frac{7}{3(3n+2)}\le\frac{1}{n}$. $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\frac{1}{\varepsilon}$. 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{2n-1}{3n+2}-\frac{2}{3}\right|\le\frac{1}{n}<\frac{1}{N}=\varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=\frac{2}{3}$.
- 也可以取 $N=\frac{7}{9\varepsilon}-\frac{2}{3}$.

- (2) $\left|\sin\frac{\pi}{n}\right| \le \left|\frac{\pi}{n}\right| = \frac{\pi}{n}$. $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = \frac{\pi}{\varepsilon}$. 当 $n > N$ 时, 有

$$\left|\sin\frac{\pi}{n} - 0\right| \le \frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{N} = \varepsilon.$$

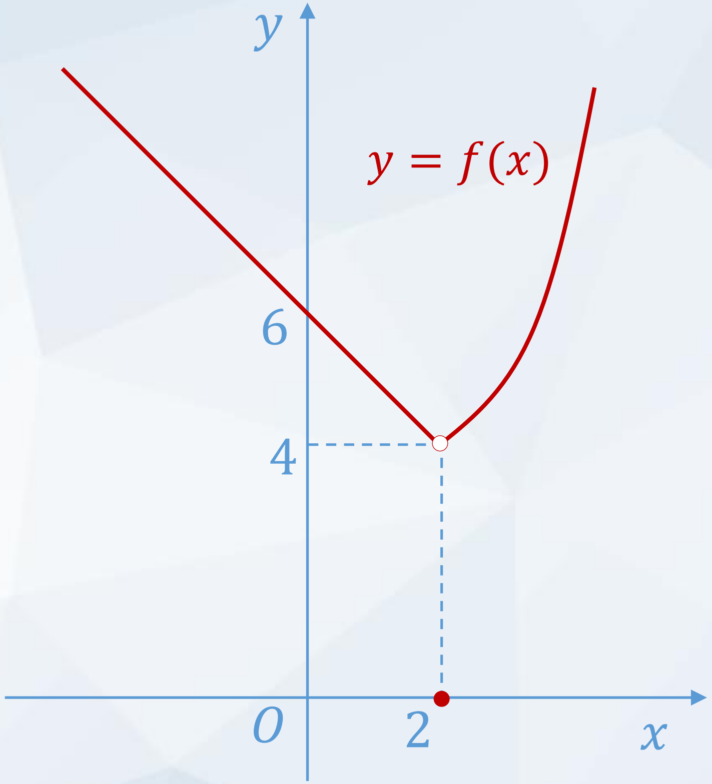
- 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n} = 0$.
- 2. 对于 $\varepsilon = a - b > 0$, $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 于是 $x_n > a - \varepsilon = b$.
- 如果利用2.3节极限的性质, 则更简单.
- 我们有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - a = b - a > 0$. 由极限的保号性可知 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $x_n - a > 0$, 即 $x_n > a$.

- 3. 由于

$$|x_n| - |a| \le |x_n - a|, \qquad |a| - |x_n| \le |x_n - a|,$$

- 因此 $\big||x_n| - |a|\big| \le |x_n - a|$.
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$, 于是 $\big||x_n| - |a|\big| \le |x_n - a| < \varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.
- 反之未必成立, 例如 $x_n = (-1)^n, |x_n| = 1$.
- 这本质上是因为函数 $y = |x|$ 连续.

- 习题2.2
- (A) 1. (1) 见右图.
- (2) $f(2^-)=4, f(2^+)=4$.
- (3) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 存在, 为 4.
- 2. 当 $x<0$ 时, $f(x)=-1$. 因此 $f(0^-)=-1$.
- 当 $x>0$ 时, $f(x)=1$. 因此 $f(0^+)=1$.
- 故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.



- (B) 1. (1) $\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right| = \left|\frac{x^2+4x+4}{x+2}\right| = |x+2|.$
- $\forall \epsilon > 0$, 令 $\delta = \varepsilon$. 当 $0 < |x+2| < \delta$ 时, 有

$$\left|\frac{x^2-4}{x+2}-(-4)\right| = |x+2| < \delta = \varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2} = -4.$

- (2) $\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|\le|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|.$
- $\forall\epsilon>0$, 令 $\delta=\varepsilon$. 当 $0<|x|<\delta$ 时, 有

$$\left|x\sin\frac{1}{x}-0\right|\le|x|<\delta=\varepsilon.$$

- 所以 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0.$
- 注意它和第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$ 的差异.

- (3) 由 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\varepsilon$ 解得 $x>\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}$ 或 $x<0.$
- 由 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>-\varepsilon$ 解得 $x<\frac{1}{e^{-\varepsilon}-1}$ 或 $x>0.$
- $\forall\varepsilon>0$, 令 $X=\max\left\{\frac{1}{e^{\varepsilon}-1},-\frac{1}{e^{-\varepsilon}-1}\right\}>0.$
- 当 $x>X$ 时, 有 $0<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<\varepsilon$. 当 $x<-X$ 时, 有 $-\varepsilon<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)<0.$
- 因此当 $|x|>X$ 时, 有 $\left|\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right|<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=0.$

- (4) 使用定义证明极限的时候，可以适当缩小自变量的范围.
- 对于数列情形，可以不妨设 $n > N_0$，然后在取 N 的时候额外要求 $N \geq N_0$ 即可.
- 对于 $x \to x_0$ 情形，可以不妨设 $-\delta_0 < x - x_0 < \delta_0$，然后在取 δ 的时候额外要求 $\delta \geq \delta_0$ 即可.
- 当 $1 < x < 3$ 时，$\left|x^2 - 4\right| = (x+2)|x-2| \leq 5|x-2|$.
- $\forall \varepsilon > 0$，令 $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{5}, 1\right\}$. 当 $0 < |x-2| < \delta$ 时，有 $1 < x < 3, \left|x^2 -\right.$

- 2. 对于 $\varepsilon = 1 > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.
- 因此 $|f(x)| \leq |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$, 从而有界.
- 习题2.3
- (A) 1. (1) 正确, 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)-f(x)] = \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] - \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在.
- (2) 错误, 例如 $x_0 = 0, f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = -\frac{1}{x}$.
- (3) 错误, 例如 $x_0 = 0, f(x) = 0, g(x) = \frac{1}{x}$.

- 2. (1) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^4 - x^3 + 5x + 6) = (2x^4 - x^3 + 5x + 6)|_{x=1} = 12.$
- (2) 这是 $\frac{0}{0}$ 型不定式.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^3+8} = \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}$$
$$= \lim_{x\to -2}\frac{x-2}{x^2-2x+4}$$
$$= \frac{-2-2}{(-2)^2-2\times(-2)+4} = -\frac{1}{3}.$$

- (3) 虽然这是 $\infty-\infty$ 型不定式，但是我们可以将其通分化为其它形式.

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{3x+2}{x(x^3+2)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x}{x(x^3+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3}{x^3+2}=\frac{x^2-3}{x^3+2}\bigg|_{x=0}=-\frac{3}{2}.$$

- (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=\lim\limits_{t\to 0}(2-t)(1+3t^2)=2.$
- 也可以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)\times\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2}\right)=2\times 1=2.$
- (B) 否. 例如 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，则 $f(x)>0,\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$
- 例如 $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}>0,\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0.$

- 习题2.4
- (A) 1.(1) 错误. 例如 $f(x)=-\frac{1}{(x-x_0)^2}$.
- (2) 错误. 例如 $f(x)=1+|x-x_0|$.
- (3) 错误. 例如 $f(x)=x, g(x)=-x, x\to+\infty$.
- (4) 错误. 例如 $f(x)=0, \forall g, fg=0$.
- (5) 错误. 这二者极限为 1, 都不是无穷小.

- 2. (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\frac{5}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=2.$
- 以后遇到这种有理函数在 $x\to\infty$ 时的极限可以直接写结果.
- (2) $x\to 2$ 时, $x-2\to 0, x^2+4x+1\to 13$, 因此 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x+1}{x-2}=\infty$ 不存在.
- (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2^2}{3^2}+\cdots+\dfrac{2^n}{3^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}}=3.$

- (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$.
- 3. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-4}{x+1}=-\frac{3}{2}\neq 1$, 因此它们不是等价无穷小, 但是是同阶无穷小.
- 4.(1) $1=\lim\limits_{x\to0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to0}\frac{ax+x^2}{3x-x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{a+x}{3-x^2}=\frac{a}{3}$, $a=3$.
- (2) $0=\lim\limits_{x\to0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to0}\frac{ax+x^2}{3x-x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{a+x}{3-x^2}=\frac{a}{3}$, $a=0$.
- (B) 1. $|f(x)|=\left|x^3+1\right|\geq|x|^3-1$. 对于 $\forall M>0$, 若 $|x|>X=\sqrt[3]{M+1}$, 则 $|f(x)|\geq|x|^3-1>X^3-1=M$. 因此 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时是无穷大.
- $|x|>11$ 时, $|f(x)|\geq 11^3-1=1330>1000$.

- 2. 分析: 设 $x=\frac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)M}$, 则 $f(x)=\frac{1}{x}=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi>M, k>\frac{M}{2\pi}-\frac{1}{4}$.
- 解: 对于 $\forall M>0$, 令 $k=\left[\frac{M}{2\pi}\right]+1>\frac{M}{2\pi}, x_M=\frac{1}{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$, 则
- $f(x_M)=\frac{1}{x_M}=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi>2k\pi>M$.
- 因此 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上无界.
- 令 $x_k=\frac{1}{k\pi}, k$ 为正整数, 则 $f(x_k)=0$ 且 $x_k\to 0$. 因此 $f(x)$ 不是 $x\to 0^+$ 时的无穷大.

- 3. 由于 $x \to x_0$ 时, α, β 是无穷小, 从而 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \beta = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha -$

- 习题2.5
- (A) 1. (1)-(5) 是 $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ 或 $0\cdot\infty$ 型不定式. 因此我们总可以用等价无穷小(或等价无穷大)替换.
- (1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$.
- (2) 由于 $\sin x\sim x$, 因此 $\sin\sin x\sim\sin x\sim x$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$.
- (3) $\lim\limits_{x\to -\pi}\frac{\sin x}{x+\pi}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin(y-\pi)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{-\sin y}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1$.

- (4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan\frac{5}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\cdot\tan 5y = \lim\limits_{y\to 0}\frac{5y}{y} = 5.$
- (5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(\cos x-1)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{x^3} = -\frac{1}{2}.$
- (6)-(8) 都是 1^∞ 型不定式, 由于在本节还没有学习连续性, 因此我们直接用第二个重要极限.
- (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x/2}\right)^{(-x/2)\cdot(-2)} = e^{-2}.$
- (7) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+3x} = \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot 3} = e^3.$
- (8) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{-\frac{1}{y}} = e^{-1}.$

- 2.(1) 由于 $0 < x_n < n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 因此由夹逼准则, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
- (2) 2.
- (B) 1. 设 $x_n = n\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}\right)$, 则
- $x_n > n \times n \times \frac{1}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n}, x_n < n \times n \times \frac{1}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}$.
- 而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$, 因此由夹逼准则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

- 2. 由 $\sin 2y = 2\sin y \cos y$ 可知 $\cos y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2y}{\sin y}$. 因此
- $\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdots \cos\frac{x}{2^n} = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}\right) = \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$.
- 于是
  - $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdots \cos\frac{x}{2^n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)} = \frac{\sin x}{x}$.
- 从而原式$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
- 题目中的 $x \neq 0$ 不需要.

- 习题2.6
- (A) 1.(1) 正确. 因为连续函数的差是连续函数.
- (2) 错误. 例如 f 不连续, $g=-f$ 不连续但 $f+g=0$.
- (3) 错误. 例如 $f=0$.
- (4) 错误. 例如 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 在 0 处不连续但是 $|f|=1$.
- (5) 错误. 同上例.
- (6) 错误. 例如 $\dfrac{\sin x}{x}$.

- 2. 由于 $\cos\frac{1}{x}$ 当 $x \neq 0$ 时有界, 因此 $f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(1 + x\cos\frac{1}{x}\right) = 1.$
- 由于 $x \to 0^-$ 时, $\frac{1}{x} \to -\infty, e^{\frac{1}{x}} \to 0$, 因此 $f(0^-) = 1.$
- 由于 $f(0^+) = f(0^-) = f(0) = 1$, 因此 f 在 0 处连续.
- 3.(1) $x^2 + 2x - 3 = 0, x = 1$ 或 -3. 间断点为 $1, -3$.
- $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, 因此 $x = 1$ 是可去间断点, 补充定义 $f(1) = \frac{1}{2}$ 可使之连续.
- $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to -3}\frac{x+1}{x+3} = \infty$, 因此 $x = -3$ 是无穷间断点.

- (2) $x^2-1=0, x=1$ 或 -1. 间断点为 ± 1.
- $x\to 1^+$ 时, $x^2-1\to 0^+, \frac{1}{x^2-1}\to +\infty, \arctan\frac{1}{x^2-1}\to \frac{\pi}{2}$.
- $x\to 1^-$ 时, $x^2-1\to 0^-, \frac{1}{x^2-1}\to -\infty, \arctan\frac{1}{x^2-1}\to -\frac{\pi}{2}$.
- 因此 $x=1$ 是跳跃间断点.
- $x\to (-1)^+$ 时, $x^2-1\to 0^-, \frac{1}{x^2-1}\to -\infty, \arctan\frac{1}{x^2-1}\to -\frac{\pi}{2}$.
- $x\to (-1)^-$ 时, $x^2-1\to 0^+, \frac{1}{x^2-1}\to +\infty, \arctan\frac{1}{x^2-1}\to \frac{\pi}{2}$.
- 因此 $x=-1$ 是跳跃间断点.
- 需要区分正负的最常见的就是 e^x $(x\to\infty)$ 和 $\arctan x$ $(x\to\infty)$.

- (3) 间断点为 0,1.
- $\lim\limits_{x\to1}\frac{|x|}{x}=1$. $x\to1^+$ 时, $\frac{1}{x-1}\to+\infty$, $e^{\frac{1}{x-1}}\to+\infty, f(x)\to+\infty$.
- $x\to1^-$ 时, $\frac{1}{x-1}\to-\infty$, $e^{\frac{1}{x-1}}\to0, f(x)\to1$.
- 因此 $x=1$ 是无穷间断点.
- $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x-1}}=e^{-1}$. $x\to0^+$ 时, $\frac{|x|}{x}\to1, f(x)\to1+e^{-1}$.
- $x\to0^-$ 时, $\frac{|x|}{x}\to-1, f(x)\to-1+e^{-1}$.
- 因此 $x=0$ 是跳跃间断点.

- (4) $\tan x$ 在 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ 处无定义; 在 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 处为 0. 因此间断点为 $\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
- $x \to k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时 $\tan x \to \infty, f(x) \to 0$, 因此 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ 是可去间断点, 补充定义 $f\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$ 可使之连续.
- $x \to k\pi \neq 0$ 时 $\tan x \to 0, f(x) \to \infty$, 因此 $x = k\pi, k \neq 0$ 是无穷间断点.
- $x \to 0$ 时 $f(x) \to 1$, 因此 $x = 0$ 是可去间断点, 补充定义 $f(0) = 1$ 可使之连续.
- 4.(1) $1 + 2\sin 2x$ 在 $\frac{\pi}{3}$ 处连续, 取值为 $1 + 2\sin\frac{2\pi}{3} = 1 + \sqrt{3}$.
- 由于 $\ln x$ 在其定义域连续, 因此该极限为 $\ln\left(1 + \sqrt{3}\right)$.

- (2) 令 $y=\frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{y\to0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{y}-\sqrt{\frac{1}{y}}}-\sqrt{\frac{1}{y}}\right)$$

$$=\lim_{y\to0^+}\frac{\sqrt{1-\sqrt{y}}-1}{\sqrt{y}}$$

$$=\lim_{y\to0^+}\frac{-1}{\sqrt{1-\sqrt{y}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

- (3) 原极限 $= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{4}.$$

- (4) 原极限 $= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{2+x}\right)^{2x}$

$$= e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{2+x}-1\right)2x} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2+x}} = e^2.$$

- 5. 由于函数 $f(x) = e^x - 3x$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0) = 1 > 0, f(1) = e - 3 < 0$, 因此由零点定理, f 在 $(0,1)$ 内存在实根.
- 6. 设 $F(x) = f(x) - x$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $F(0) = f(0) < 0, F(1) = f(1) - 1 > 0$, 因此由零点定理, $\exists \xi \in (0,1)$ 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$.
- (B) 1. 显然 f 在 $x \neq 0$ 处均连续. 由于 $f(0^+) = f(0) = a$,
- $f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-e^{\sin x}}{\arctan\frac{x}{2}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-\sin x}{\frac{x}{2}} = -2$, 因此 $a = -2$.

- 2. (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2+1}-1\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x+1)x}{x^2+1}} = e^3.$
- (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n+1}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+x}{n+1}-1\right)n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(x-1)n}{n+1}} = e^{x-1}.$
- 3. $9 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}-1\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax}{x-a}} = e^{2a}, a = \ln 3.$

- 4. 补充定义 $f(a)=f(a^+), f(b)=f(b^-)$, 则 f 在 $[a,b]$ 内连续, 从而在 $[a,b]$ 上有界, 证毕.
- 5. 设 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$, 则 f 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续且 $f(1)=n-1>0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots+\frac{1}{2}-1=-\left(\frac{1}{2}\right)^n<0$.
- 由零点定理, f 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 内有实根.
- 6. 不妨设 $f(x_k)=\max\{f(x_1),\ldots,f(x_n)\}, f(x_m)=\min\{f(x_1),\ldots,f(x_n)\}$.
- 如果所有 $f(x_i)$ 均相等, 则取 $\xi=x_1$ 即可.
- 如果 $f(x_i)$ 不全相等, 则 $k\neq m, f(x_k)>\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]>f(x_m)$.
- 由介值定理, 存在 ξ 介于 x_k, x_m 之间, 满足 $f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]$.

- 总复习题二
- 1.(1) ① 必要, 充分. ② 必要, 充分. ③ 充分必要 (充要)
- (2) 1. 它的奇子数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} \to 1$, 偶子数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$.
- (3) 由于 $1-\cos xf(x) \sim \frac{1}{2}\left(xf(x)\right)^2, \left(e^{x^2}-1\right)f(x) \sim x^2 f(x)$, 因此
- $1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2}=\frac{f(0)}{2}$, $f(0)=2$.
- 2.(1) 有限项不影响极限, 因此 AB 错误.
- $a_n c_n$ 是 $0\cdot\infty$ 型不定式, 极限可能存在, 例如 $a_n=\frac{1}{n}, c_n=n$.
- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}=\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 存在, 矛盾. 因此选 D.

- (2) $f(x) = (e^{x\ln 2} - 1) + (e^{x\ln 3} - 1) \sim x\ln 2 + x\ln 3 = x\ln 6$ 和 x 同阶不等价，因此选D.
- (3) $\ln^{\alpha}(1+2x) \sim (2x)^{\alpha} = o(x)$, $\alpha > 1$.
- $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \left(\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 2^{-\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{2}{\alpha}} = o(x), \frac{2}{\alpha} > 1, \alpha < 2$. 因此选B.
- (4) $1 - \cos\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x$, 因此 $f(0^+) = \frac{1}{2a} = f(0^-) = b, ab = \frac{1}{2}$, 选A.
- 3. 设 $\forall n, |x_n| < M$. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N, |y_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. 因此 $|x_n y_n| < \varepsilon$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.
- 4. 对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N > 0$ 使得 $\forall n > N, |y_n - x_n| < \varepsilon$.
- 由于 $x_n \le a \le y_n$, 因此 $0 \le a - x_n \le y_n - x_n < \varepsilon, 0 \le y_n - a \le y_n - x_n < \varepsilon$, 从而 $|x_n - a| < \varepsilon, |y_n - a| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

- 5.(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{e^x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}} = e.$

- (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{\ln(1+2x^3)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\dfrac{1}{2x^3}$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot(\cos x-1)}{x^3}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{8}.$$

- (3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x - x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(e^{-x}-1)(1+\cos x)}$

$$=\left[\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{(e^{-x}-1)(1+\cos x)}\right]-\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(e^{-x}-1)(1+\cos x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{(-x)\cdot 2}-\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(-x)\cdot 2}=-\frac{3}{2}.$$

- (4) 由于 $\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1=\frac{x^2}{x^2+(b-a)x-ab}-1=\frac{(a-b)x+ab}{x^2+(b-a)x-ab}$,
- 因此 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)^x=e^{\lim_{x\to\infty}x\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]}$
- $=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{x[(a-b)x+ab]}{x^2+(b-a)x-ab}}=e^{a-b}$.
- 6. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$. 首先显然要区分 $x\to 0^{\pm}$.

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{2}{x}}+1}\right)e^{-\frac{1}{x}}=0,\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=1,$
- $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1.$
- $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=2,\ \lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{-x}=-1,$
- $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1.$ 因此 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1.$

- 7. 由于该极限是 1^{∞} 型不定式，因此 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$ 等价于

$$1=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}-1\right)\frac{1}{\sin kx}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\tan x}{(1+\tan x)\sin kx}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{kx}=-\frac{2}{k}.$$

- 因此 $k=-2$.

- 8. $0=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt{y^2+y+1}-a-by}{y}$. 于是

$$\lim_{y\to 0}\left(\sqrt{y^2+y+1}-a-by\right)=\left(\lim_{y\to 0}y\right)\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y^2+y+1}-a-by}{y}\right)=0,$$

- $a=1$.

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y^2+y+1}-1-by}{y}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{y^2+y+1-(1+by)^2}{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{y^2+y+1}+1+by}\\
&= \lim_{y\to 0}\frac{(1-b^2)y^2+(1-2b)y}{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{y^2+y+1}+1+by}\\
&= \frac{1-2b}{2}.
\end{aligned}
$$

- 因此 $b=\frac{1}{2}$.
- 一般地，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ux+v}-x-\frac{u}{2}\right)=0$.

- 9. 这种一般都是用夹逼准则.
- (1) 由 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$ 可知

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \le \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\right) \le n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

- 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$ 以及夹逼准则可知

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = 1.$$

- (2) 由 $\frac{k}{n^2+n+n} \le \frac{k}{n^2+n+k} \le \frac{k}{n^2+n}$ 可知

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2+2n}=\frac{n+1}{2n+4}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}\le\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{2}.$$

- 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+4}=\frac{1}{2}$ 以及夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}=\frac{1}{2}$.
- 为什么我们这么估计? 因为分母中 n^2 是主要项, k 相比它都很小, 所以把 k 放缩掉. 但是分子中的 k 本身就是主要项, 不可放缩掉.

- 10. 容易看出当 $x_n > 0$ 时 $x_{n+1} > 0$. 由于 $x_1 = a > 0$, 因此所有的 $x_n > 0$, 从而 $x_{n+1} \geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a} = \sqrt{a}$.
- 于是 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} - x_n\right) = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0, \forall n \geq 2$.
- 因此 $x_2, x_3, \ldots$ 是有界单减数列, 从而极限存在.
- 设极限为 A. 在递推公式两边同时取极限可得 $A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right), A^2 = a$.
- 由于 $x_{n+1} \geq \sqrt{a}, \forall n \geq 1$, 因此 $A \geq \sqrt{a}$, 从而 $A = \sqrt{a}$.

- 11. $e^{\sin x}-e^{\tan x}=\left(e^{\sin x-\tan x}-1\right)e^{\tan x}\sim e^{\sin x-\tan x}-1.$
- 由于 $e^{x}-1\sim x$, 故

$$\mathrm{e}^{\sin x-\tan x}-1\sim\sin x-\tan x=(\cos x-1)\tan x$$

$$\sim-\frac{1}{2}x^{2}\cdot x=-\frac{1}{2}x^{3}.$$

- 因此 $n=3$.

- 12. 求极限得
- $f(x)=\begin{cases}-1, & |x|<1;\\ 0, & x=1;\\ -1, & x=-1;\\ x, & |x|>1.\end{cases}=\begin{cases}-1, & x\in[-1,1);\\ 0, & x=1;\\ x, & |x|>1.\end{cases}$
- 当 $x=-1$ 时，由于 $f\left((-1)^-\right)=f\left((-1)^+\right)=f(-1)=-1$，因此 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续.
- 当 $x=1$ 时，由于 $f(1^-)=-1, f(1^+)=1$，因此 1 是跳跃间断点.
- 事实上 $f(x)=x-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，所以课上已经讲过.

- 13. $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$.
- 当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，f 无定义. 由于 $x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^{+}$ 时，$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\to 0^{+}$，$\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\to+\infty$，$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^{+}} f(x)$ 不存在，因此 $\frac{\pi}{4}$ 是无穷间断点.
- 当 $x=\frac{3\pi}{4}$ 时，f 无定义.
- $x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{+}$ 时，$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\to-\infty$，$\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\to 0$，$f(x)\to 1$.
- $x\to\left(\frac{3\pi}{4}\right)^{-}$ 时，$\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\to+\infty$，$\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\to 0$，$f(x)\to 1$.
- 因此 $\frac{3\pi}{4}$ 是可去间断点，补充定义 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=1$ 可使之在该处连续.

- 14. 设 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$.
- 当 $x>1$ 时, $f(x)-x^3=ax^2+bx+c\geq-|ax^2+bx+c|\geq-|ax^2|-|bx^2|-|cx^2|=-(|a|+|b|+|c|)x^2, f(x)\geq x^2[x-(|a|+|b|+|c|)]$.
- 因此对任意 $\alpha>\max\{1,|a|+|b|+|c|\}$, 有 $f(\alpha)>0$.
- 当 $x<-1$ 时, $f(x)-x^3=ax^2+bx+c\leq|ax^2+bx+c|\leq|ax^2|+|bx^2|+|cx^2|=(|a|+|b|+|c|)x^2, f(x)\leq x^2[x+(|a|+|b|+|c|)]$.
- 因此对任意 $\beta<\min\{-1,-|a|-|b|-|c|\}$, 有 $f(\beta)<0$.
- 由于 f 是连续函数, 由介值定理, 存在 $x\in(\beta,\alpha)$ 使得 $f(x)=0$.
- 另证. 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$ 可知存在 $X>0$ 使得当 $|x|\geq X$ 时, $\left|\frac{f(x)}{x^3}-1\right|<\frac{1}{2}, \frac{f(x)}{x^3}>\frac{1}{2}>0$. 故 $f(X)>0, f(-X)<0$.

- 15. 令 $F(x)=(p+q)f(x)-pf(a)-qf(b)$.
- 则 $F(a)=q[f(a)-f(b)], F(b)=-p[f(a)-f(b)]$.
- 如果 $f(a)=f(b)$, 则取 $\xi=a$ 即可.
- 如果 $f(a)\neq f(b), F(a)F(b)=-pq[f(a)-f(b)]^2<0$, 从而由零点定理知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F(\xi)=0, pf(a)+qf(b)=(p+q)f(\xi)$.
- 另证. 如果 $f(a)=f(b)$, 则取 $\xi=a$ 即可.
- 如果 $f(a)\neq f(b)$, 不妨设 $f(a)<f(b)$, 则 $f(a)<\frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}<f(b)$.
- 从而由介值定理知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}$.