

第一章 复数与复变函数

复数的产生源于对数学中代数方程求解的需求. 复数的概念最初由意大利数学家卡尔达诺在求解三次方程时提出. 复数的引入, 使得数学体系得以扩展, 解决了许多实数范围内无法解决的问题.

复数不仅在数学领域如几何、分析、表示论、动力系统等发挥着重要作用, 还在物理、工程、信息学、电子学等领域有着广泛应用. 它不仅丰富了数学的内容, 也为科学和技术的发展提供了有力的数学工具.

本章中我们将学习复数、复变函数的基本概念, 以及复数列和复变函数的极限. 我们将从一元三次方程求解问题出发, 逐步展示引入复数的必要性. 然后介绍复数的运算规则, 并展示复数的三角形式和指数形式在运算中所起的关键作用. 最后, 我们引入复变函数、复数列以及极限的概念, 并将之与实数情形进行对比.

1.1 复数及其代数运算

1.1.1 复数的产生

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$, 配方可得

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

(1) 当 $\Delta > 0$ 时, 有两个不同的实根;

(2) 当 $\Delta = 0$ 时, 有一个二重¹的实根;

(3) 当 $\Delta < 0$ 时, 无实根.

可以看出, 在一元二次方程中, 我们可以舍去包含负数开平方的解. 然而在一元三次方程中, 即便只考虑实数根也会不可避免地引入负数开平方.

例 1.1 解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

我们将使用由希皮奥内·德尔·费罗²最先发现, 并由吉罗拉莫·卡尔达诺³最先公开的解法.

解 设 $x = u + v$, 则

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + 6(u + v) - 20 = 0.$$

我们希望

$$u^3 + v^3 = 20, \quad uv = -2,$$

则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 - 20X - 8 = 0$. 解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$

所以 $u = 1 \pm \sqrt{3}, v = 1 \mp \sqrt{3}, x = u + v = 2$.

那么这个方程是不是真的只有 $x = 2$ 这一个实数解呢? 由其导数 $3x^2 + 6 > 0$ 可知其单调递增, 因此确实只有一个实数解.

例 1.2 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解 同样地我们有 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程

$$X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0.$$

然而这个方程没有实数解.

我们可以强行解得

$$u^3 = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3},$$

¹如果 x_0 是多项式方程 $f(x) = 0$ 的根, 则 $x - x_0$ 是 $f(x)$ 的因式, 即存在多项式 $g(x)$ 使得 $f(x) = (x - x_0)g(x)$. 如果 $(x - x_0)^k$ 是 $f(x)$ 的因式, 但 $(x - x_0)^{k+1}$ 不是, 则称 x_0 是 k 重根.

²Scipione del Ferro (1465–1526), 意大利数学家, 1496 年至 1526 年任博洛尼亚大学 (Università di Bologna) 代数学和几何学教授. 费罗发现了该方法后, 并没有发表他的结果, 因为当时人们常把他们的发现保密, 而向对手们提出挑战 [Kli90].

³Girolamo Cardano (1501–1576), 意大利数学家、物理学家、天文学家、哲学家, 十六世纪人文主义代表人物, 是古典概率论的创始人 [Car43, Car63].

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地,

$$v = \frac{3 - 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 - \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 + 5\sqrt{-3}}{6},$$

从而 $x = u + v = 2, -3, 1$.

对于一般的三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 而言, 类似可得:⁴

$$x = u - \frac{p}{3u}, \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

通过分析函数图像的极值点可以知道:

- (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 有 1 个实根.
- (2) 当 $\Delta \leq 0$ 时, 有 3 个实根 (含重根情形).

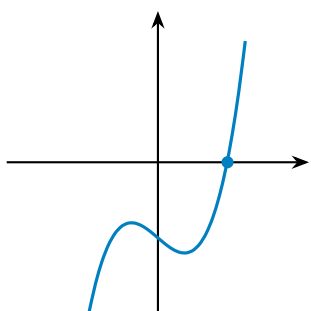


图 1.1 $\Delta > 0$

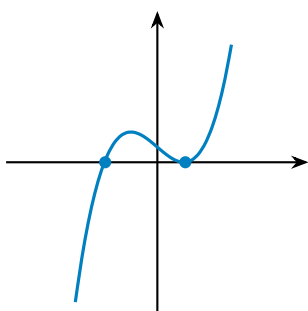


图 1.2 $\Delta = 0$

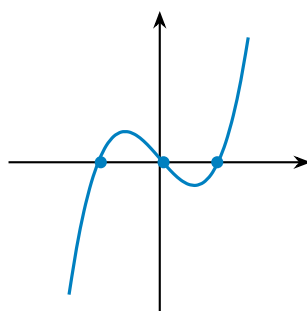


图 1.3 $\Delta < 0$

所以我们想要使用一元三次方程求根公式的话, 就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 在学习了本章内容之后就可以回答这个问题了.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受. 戈特弗里德·威廉·莱布尼茨⁵对此有如下评论: 圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根.

⁴一般 n 次多项式的判别式定义为

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2,$$

其中 x_1, \dots, x_n 表示其所有 (复数) 根. 三次多项式的判别式应当是 -108Δ , 这里为了运算方便取作如此形式.

⁵Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), 德国哲学家、数学家, 微积分的发现者之一. 他所发明的微积分系列记号也是现今使用最为广泛的记号.

1.1.2 复数的概念

现在我们来正式介绍复数的概念. 由于方程 $x^2 = -1$ 在复数范围内有两个不同的根, 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们引入抽象符号 i 来表示其中一个根.

定义 1.1

固定一个记号 i , **复数** 就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

分别称 x, y 为 z 的**实部**和**虚部**, 并记作 $\operatorname{Re} z = x, \operatorname{Im} z = y$.

本书中, 我们将不言自明地使用 x, y, x_1, y_1, \dots 等记号表示实数. 复数 $x + yi$ 也可表达为形式 $x + iy$.

记号 i 被称为**虚数单位**, 它最先是由莱昂哈德·欧拉⁶引入并使用. 将全体复数记作 \mathbb{C} , 全体实数记作 \mathbb{R} ⁷. 由于实数 x 可以自然地看成复数 $x + 0i$, 在此观点下, 我们有 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. 我们简记 $x + 0i = x, 0 + yi = yi$.

由定义可知, 每一个复数都可以唯一地表达成 $x + yi$ 这样的形式. 于是复数全体和平面上的点可以建立一一对应. 将建立起这种对应的平面称为**复平面**, 将复平面的 x 和 y 轴分别称为**实轴**和**虚轴**. 当 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, $z = x$ 是实数, 它落在实轴上. 称不是实数的复数是**虚数**. 当 $\operatorname{Re} z = 0$ 且 $z \neq 0$ 时, 称 $z = yi \neq 0$ 是**纯虚数**.

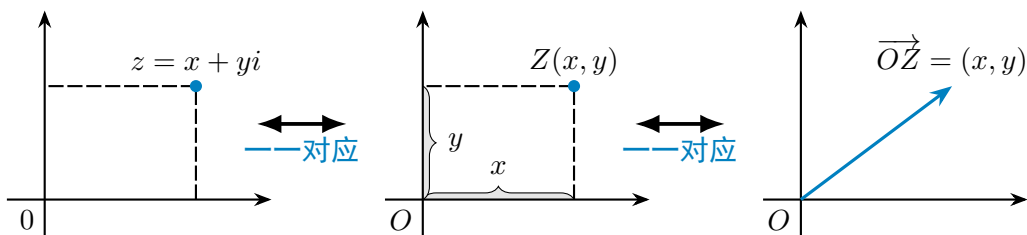


图 1.4 复数、平面上的点、平面向量一一对应

例 1.3 实数 x 取何值时, $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是:

(i) 实数; (ii) 纯虚数.

解 (i) $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .

(ii) $\operatorname{Re} z = x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4 . 但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq -1$. 故 $x = 4$.

⁶Leonhard Euler (1707–1783), 瑞士数学家、自然科学家, 18 世纪数学界最杰出的人物之一. 他是数学史上最多产的数学家, 研究涉及数学各个分支.

⁷全体复数、实数、有理数、整数、自然数构成的集合分别记作 $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$, 整数集合记号来自其德语 Zahlen, 其余来自它们的英文名称 complex number, real number, rational number, natural number. 这些符号的叫做空心体, 手写时, 可在普通字母格式上添加一条竖线 (对于 \mathbb{Z} 是斜线) 来区分. 有些文献使用黑粗体字母 $\mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, \mathbf{Z}, \mathbf{N}$ 来表示这些集合.

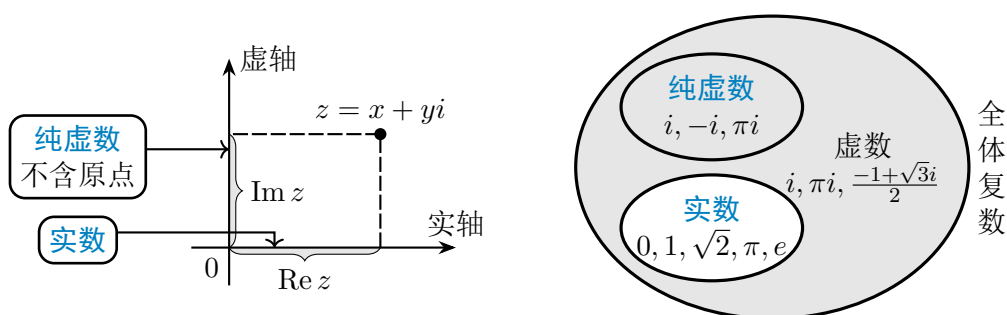


图 1.5 实数、纯虚数、复数和复平面的关系

练习 1.1 若 $x^2(1+i) + x(5+4i) + 4+3i$ 是纯虚数, 则实数 $x =$ _____.

1.1.3 复数的代数运算

1. 四则运算

设 $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$. 由向量的加减法可自然定义出复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

显然, 复数的加法满足交换律和结合律.

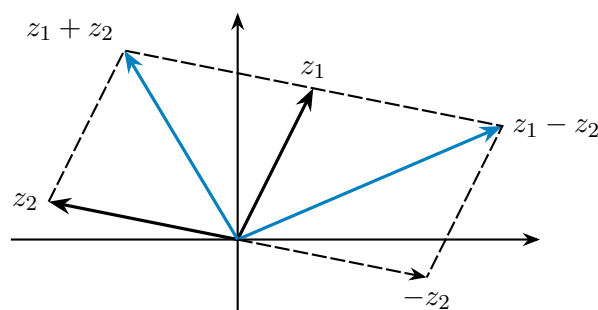


图 1.6 复数的加法和减法

规定 $i \cdot i = -1$. 我们希望 \mathbb{C} 上的运算满足乘法分配律, 那么复数的乘法应当定义为

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) \\ &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2i + y_1i \cdot x_2 + y_1i \cdot y_2i \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i. \end{aligned}$$

容易证明, 复数的乘法满足交换律、结合律和分配律.

当 $z \neq 0$ 时, 可以发现

$$(x + yi) \cdot \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = 1.$$

从而除法定义为

$$\frac{z_1}{z_2} = (x_1 + y_1 i) \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

对于正整数 n , 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘. 当 $z \neq 0$ 时, 还可以定义

$$z^0 = 1, \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}.$$

2. 单位根

例 1.4 (i) 容易知道 $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. 一般地, 对于整数 n ,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(ii) 令 $\omega = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$, 则

$$\omega^2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i), \quad \omega^3 = 1.$$

(iii) 令 $z = 1 + i$, 则

$$z^2 = 2i, \quad z^3 = -2 + 2i, \quad z^4 = -4, \quad z^8 = 16 = 2^4.$$

对于正整数 n , 将满足 $z^n = 1$ 的复数 z 称为 n 次单位根. 那么 $1, i, -1, -i$ 是 4 次单位根, $1, \omega, \omega^2$ 是 3 次单位根, $(1 + i)/\sqrt{2}$ 是 8 次单位根.


实数范围内的诸多代数恒等式在复数情形也是成立, 例如

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, & \text{若 } q \neq 1; \\ n + 1, & \text{若 } q = 1. \end{cases}$$

例 1.5 化简 $1 + i + i^2 + i^3 + i^4$.

解 根据等比数列求和公式,

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \frac{i^5 - 1}{i - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1.$$

 **练习 1.2** 化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 复数域的性质(选读内容)

若集合 F 带有元素 $0, 1$ 以及四则运算⁸, 且

⁸即有运算 $+$ 和 \times , 且对任意 $a \in S$, 存在 $b \in S$ 使得 $a + b = b + a = 0$; 对任意非零 $a \in F$, 存在 $c \in F$ 使得 $a \times c = c \times a = 1$.

- 满足加法交换、结合律, 乘法交换、结合、分配律⁹;
- 对任意 $a \in F$, $a + 0 = a \times 1 = a$,

则称 F 构成一个域. 有理数全体 \mathbb{Q} , 实数全体 \mathbb{R} , 复数全体 \mathbb{C} 均构成域.

与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任意 $n \geq 1$ 个复数 c_0, c_1, \dots, c_{n-1} , 复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0,$$

总存在复数 z_0 使得 $p(z_0) = 0$. 由此归纳可知, 复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘积. 我们会在第五章证明该结论.

在 \mathbb{Q}, \mathbb{R} 上可以定义出一个“好的”大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则要么 $a > b$, 要么 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c , $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

而 \mathbb{C} 却不是有序域. 这是因为: 如果 $i > 0$, 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

于是 $0 > i$, 矛盾! 同理 $i < 0$ 也不可能.

1.1.4 共轭复数

定义 1.2

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 \bar{z} . 换言之, $\overline{x + yi} = x - yi$.

练习 1.3 z 关于虚轴的对称点是_____.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

- (1) z 是 \bar{z} 的共轭复数, 即 $\bar{\bar{z}} = z$.
- (2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
- (3) $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
- (4) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$.
- (5) $z = \bar{z}$ 当且仅当 z 是实数; $z = -\bar{z}$ 当且仅当 z 是纯虚数或 $z = 0$.

(2)表明共轭运算和四则运算交换. (4)表明了复数 z 的实部 x 和虚部 y 可以用 z, \bar{z} 表出. 这意味着使用共轭复数进行计算和证明, 往往比直接使用 x, y 表达的形式更简单.

⁹即对任意 $a, b, c \in F$, 有 $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $ab = ba$, $a(bc) = (ab)c$, $a(b + c) = ab + ac$.

例 1.6 证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部来证明. 但利用共轭复数可以更简单地证明它.

证明 根据共轭复数的性质(1)和(2),

$$\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2.$$

于是由共轭复数的性质(4)可得

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$

例 1.7 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明 由于 $y \neq \pm 1$, 因此 $z \neq \pm i, 1+z^2 \neq 0$. 由共轭复数的性质(5)可知, $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即 $z(1+\overline{z}^2) = \overline{z}(1+z^2)$. 化简可知其等价于

$$(z - \overline{z})(z\overline{z} - 1) = 0.$$

由 $y \neq 0$ 可知 $z \neq \overline{z}$. 故上述等式等价于 $z\overline{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$.

练习 1.4 将 $(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$ 表达为两个多项式的平方和.

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例 1.8 设 $z_1 = 10 - 5i, z_2 = 4 + 3i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{10 - 5i}{4 + 3i} = \frac{(10 - 5i)(4 - 3i)}{4^2 + 3^2} \\ &= \frac{(40 - 15) + (-20 - 30)i}{25} = 1 - 2i, \end{aligned}$$

因此 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = 1 + 2i$.

练习 1.5 计算 $\frac{2-3i}{2-i} =$ _____.

1.2 复数的三角与指数形式

1.2.1 复数的模和辐角

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系. 设复数 $z = x + yi$ 对应点的极坐标为 (r, θ) . 由极坐标和直角坐标的转化关系可知:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \theta &= \arctan \frac{y}{x} + k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

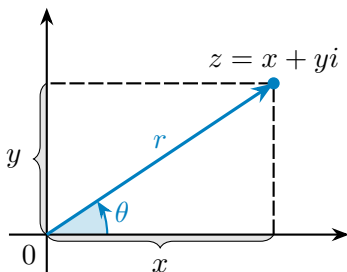


图 1.7 复数的模和辐角

定义 1.3

- 称 r 为 z 的**模**, 记为 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 称 θ 为 z 的**辐角**, 记为 $\text{Arg } z = \theta$. 约定 0 的辐角没有意义.

任意非零复数 z 的辐角有无穷多个. 这是因为若 θ 是 z 的辐角, 则 $\theta + 2k\pi$ 也是 z 的辐角, 其中 k 是任意整数. 我们固定选择 $\text{Arg } z$ 中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**辐角主值**¹⁰, 记作 $\arg z$. 那么 $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 根据 z 所处的位置, 我们有

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

¹⁰部分文献选择位于 $[0, 2\pi)$ 的辐角作为辐角主值. 由于这会导致后续对数函数主值在正实轴上不解析, 因此本书选择位于 $(-\pi, \pi]$ 的辐角作为辐角主值.

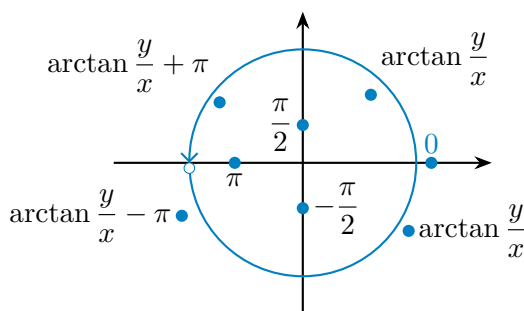


图 1.8 辐角主值与复数位置的关系

练习 1.6 $\arg \bar{z} = -\arg z$ 是否对于非零复数都成立?

复数的模满足如下性质:

(1) $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$;

(2) $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;

(3) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

(4) $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$. 这些性质可通过图 1.9 使用几何方式证明, 也可利用代数方法直接证明.

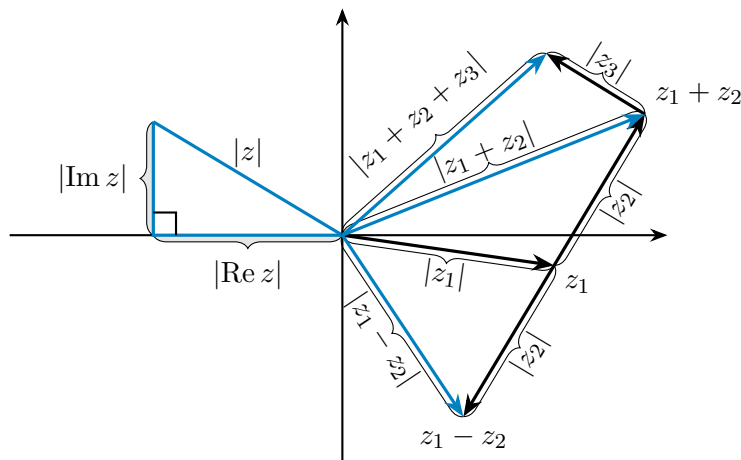


图 1.9 复数模的不等式关系

例 1.9 证明 (i) $|z_1 z_2| = |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

(ii) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.

(iii) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

证明 (i) 根据复数模的性质(1),

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2.$$

由于复数模总是非负实数, 因此 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 将 z_2 换成 \bar{z}_2 得到

$$|z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |\bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

(ii) 因为

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2, \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) &= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2, \end{aligned}$$

而 $\overline{z_1 \bar{z}_2} = \bar{z}_1 z_2$, 所以两式相等.

(iii) 根据 (i), 我们有

$$||z_1| - |z_2||^2 = |z_1|^2 - 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 - 2|z_1 \bar{z}_2| + |z_2|^2.$$

由于

$$|z_1 \bar{z}_2| = |-z_1 \bar{z}_2| \geq \operatorname{Re}(-z_1 \bar{z}_2) = -\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2),$$

因此

$$||z_1| - |z_2||^2 \leq |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2.$$

而复数模总是非负实数, 所以 $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

✎ **练习 1.7** 什么时候 $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ 成立?

1.2.2 复数的三角形式和指数形式

由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可得

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

我们把这种形式称为**复数的三角形式**. 定义 $e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$, 则上述形式可改写为**复数的指数形式**¹¹

$$z = r e^{i\theta}.$$

这两种形式是等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式. 指数形式也可写作 $z = r \exp(i\theta)$. 求复数的三角和指数形式的关键在于计算模和辐角.

例 1.10 将 $z = -2 - \sqrt{12}i$ 化成三角形式和指数形式.

解 显然 $|z| = \sqrt{4 + 12} = 4$. 由于 z 在第三象限, 由**公式 (1.1)**可知

$$\arg z = \arctan \frac{-\sqrt{12}}{-2} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

¹¹ $e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$ 被称为**欧拉恒等式**, 我们会在第二章说明为何如此定义.

因此 z 的三角形形式和指数形式为

$$z = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4e^{-\frac{2\pi i}{3}}.$$

例 1.11 设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. 将 $z = \sin \theta - i \cos \theta$ 化成三角形形式和指数形式.

解 显然 $|z| = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1$. 由于 z 在第四象限, 由公式 (1.1) 可知

$$\arg z = \arctan\left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) = -\arctan \cot \theta = -\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \theta - \frac{\pi}{2}.$$

因此 z 的三角形形式和指数形式为

$$z = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}.$$

另解 利用三角函数间的等式关系得到

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \\ -\cos \theta &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

因此 z 的三角形形式和指数形式为

$$z = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}.$$

求复数的三角或指数形式时, 只需要任取一个辐角就可以了, 不要求必须是辐角主值.

练习 1.8 将 $z = \sqrt{3} - 3i$ 化成三角形形式和指数形式.

例 1.12 设 $z = e^{i\theta}$, 其中 $-\pi < \theta < \pi$. 求 $1 + z$ 的三角形形式和指数形式.

解 我们有

$$1 + z = (1 + \cos \theta) + i \sin \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2i \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}\right).$$

由 $-\pi < \theta < \pi$ 可知 $\cos \frac{\theta}{2} > 0$. 因此 $1 + z$ 的三角形形式和指数形式为

$$1 + z = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}\right) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}.$$

两个模相等的复数之和的三角和指数形式形式较为简单:

$$re^{i\theta} + re^{i\varphi} = 2r \cos \frac{\theta - \varphi}{2} e^{\frac{\theta + \varphi}{2}i}.$$

从图 1.10 可以很容易得到该等式. 注意 $\cos \frac{\theta - \varphi}{2} < 0$ 时, 这离指数形式还差一步变形.

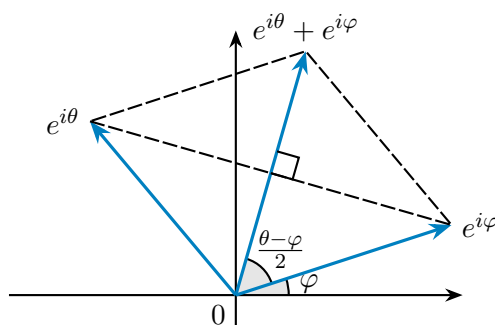


图 1.10 模相等的复数之和

1.3 复数的乘除、乘幂和方根

三角形形式和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

1.3.1 复数的乘除与三角形形式和指数形式

定理 1.1

设复数 $z_1, z_2 \neq 0$ 的三角形形式为

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

若表达为指数形式, 上述等式变为

$$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

该定理表明:¹²,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

¹²多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等. 例如此处关于辐角的等式的含义是:

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 \mid \theta_1 \in \text{Arg } z_1, \theta_2 \in \text{Arg } z_2\}.$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \{\theta_1 - \theta_2 \mid \theta_1 \in \text{Arg } z_1, \theta_2 \in \text{Arg } z_2\}.$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

注意上述等式中 Arg 不能换成 \arg , 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立. 事实上, 当且仅当等式右侧落在区间 $(-\pi, \pi]$ 内时才成立, 否则等式两侧会相差 $\pm 2\pi$. 例如 $z_1 = z_2 = e^{0.99\pi i}$, $z_1 z_2 = e^{1.98\pi i}$,

$$\arg z_1 + \arg z_2 = 0.99\pi + 0.99\pi = 1.98\pi, \quad \arg(z_1 z_2) = -0.02\pi.$$

证明 根据和差的正弦、余弦公式可知

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

因此乘法情形得证.

设 $\frac{z_1}{z_2} = r e^{i\theta}$, 则由乘法情形可知 $r r_2 = r_1$ 且 $\theta + \theta_2$ 是 z_1 的辐角. 因此 $r = \frac{r_1}{r_2}$, θ 可取 $\theta_1 - \theta_2$.

1.3.2 复数乘法的几何意义

从该定理可以看出, 乘以复数 $z = r e^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍, 并沿逆时针旋转角度 θ .

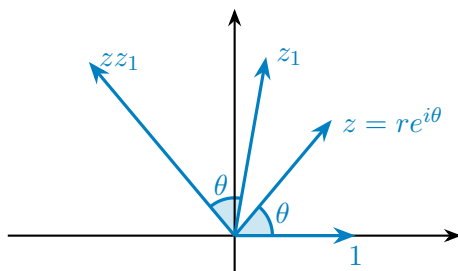
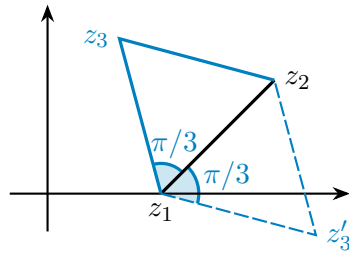


图 1.11 复数乘法的几何意义

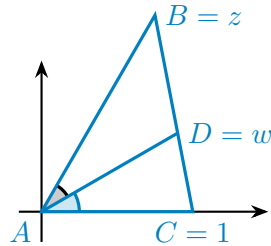
例 1.13 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.



解 由于 $\overrightarrow{Z_1 Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1 Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 因此

$$\begin{aligned} z_3 - z_1 &= (z_2 - z_1) \exp\left(\pm \frac{\pi i}{3}\right) = (1+i) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i, \\ z_3 &= \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

例 1.14 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 证明 $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$.



证明 不妨设 $A=0, B=z, C=1, D=w$, 设

$$\lambda = \frac{DC}{BC} = \frac{w-1}{z-1} \in (0, 1).$$

那么

$$w = 1 + \lambda(z-1) = \lambda z + (1-\lambda).$$

由于 $\angle BAD = \angle DAC$, 根据复数乘法的几何意义, $\frac{z-0}{w-0}$ 是 $\frac{w-0}{1-0}$ 的正实数倍, 即

$$\frac{w^2}{z} = \lambda^2 z + 2\lambda(1-\lambda) + \frac{(1-\lambda)^2}{z} \in \mathbb{R},$$

于是

$$\lambda^2 z + \frac{(1-\lambda)^2}{z} = \lambda^2 \bar{z} + \frac{(1-\lambda)^2}{\bar{z}}, \quad (\lambda^2 |z|^2 - (1-\lambda)^2)(z - \bar{z}) = 0.$$

显然 $z \neq \bar{z}$. 又因为 $0 < \lambda < 1$, 故

$$\frac{AB}{AC} = |z| = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{BC-DC}{DC} = \frac{DB}{DC}.$$

1.3.3 复数的乘幂

设 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \neq 0$. 根据复数三角和指数形式的乘法和除法运算法则, 我们有

定理 1.2

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地, 当 $r = 1$ 时, 我们得到棣莫弗公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2 \theta - 1,$$

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta,$$

$$\cos(4\theta) = 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1,$$

$$\cos(5\theta) = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta.$$

一般地, 可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos \theta$ 的 n 次多项式, 这个多项式

$$g_n(T) = 2^{n-1}T^n - n2^{n-3}T^{n-2} + \dots$$

叫做切比雪夫多项式. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

例 1.15 求 $(1+i)^n + (1-i)^n$.

解 由于

$$1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad 1-i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

因此

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}.$$

练习 1.9 化简 $(\sqrt{3}+i)^{2022} = \underline{\hspace{2cm}}$.

1.3.4 复数的方根

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$. 为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为算术根.

由于 $n\varphi$ 和 θ 的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

故 $w = w_k = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right)$. 不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 w_0, w_1, \dots, w_{n-1} 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \dots, n-1$.

定理 1.3

任意一个非零复数 z 的 n 次方根有 n 个值:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

这些根的模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\frac{2\pi}{n}$. 因此它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点.

例 1.16 求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解 由于

$$1+i = \sqrt{2} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right),$$

因此

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2} \exp \frac{(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)i}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

于是该方根全部值为

$$w_0 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{\pi i}{16}}, \quad w_1 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{9\pi i}{16}}, \quad w_2 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{17\pi i}{16}}, \quad w_3 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{25\pi i}{16}}.$$

显然 $w_{k+1} = iw_k$, 所以 w_0, w_1, w_2, w_3 形成了一个正方形.

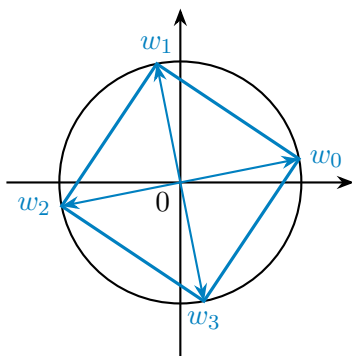


图 1.12 $\sqrt[4]{1+i}$ 的所有值

练习 1.10 计算 $\sqrt[6]{-1} =$ _____.

注意当 $|n| \geq 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$ 不成立. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \operatorname{Arg} z = n \arg z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Arg} z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

其中左边表示 z 的所有 n 次方根的所有辐角¹³.

1.3.5 应用: 实系数三次方程根的情况

现在我们来看三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的根, $p \neq 0$. 回顾求根公式:

$$x = u + v, \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, \quad uv = -\frac{p}{3}, \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

(1) 如果 $\Delta > 0$, 设 $\omega = e^{2\pi i/3}$, 设实数 α 满足

$$\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta},$$

则

$$u = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \quad x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, \alpha\omega - \frac{p}{3\alpha}\omega^2, \alpha\omega^2 - \frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果 $\Delta \leq 0$, 则 $p < 0$, $|u|^2 = -\frac{p}{3} > 0$. 从而 $v = \bar{u}$. 设

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = u_1, u_2, u_3,$$

则我们得到 3 个实根

$$x = u_1 + \bar{u}_1, u_2 + \bar{u}_2, u_3 + \bar{u}_3.$$

不难验证, 若有重根则 $\Delta = 0$.

¹³此即多值函数复合的含义.

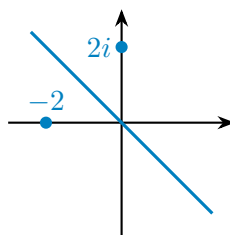
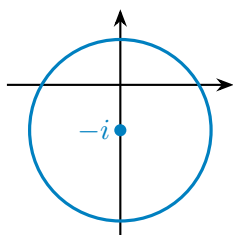
1.4 曲线和区域

1.4.1 复数表平面曲线


很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例 1.17

- (1) $|z + i| = 2$. 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆. 一般的圆方程为 $|z - z_0| = R$, 其中 z_0 是圆心, R 是半径.



- (2) $|z - 2i| = |z + 2|$. 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 $x + y = 0$.
- (3) $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 4$. 设 $z = x + yi$, 则 $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 1 - y = 4$, 因此 $y = -3$.
- (4) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$.
- 当 $2a > |z_1 - z_2|$ 时, 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆;
 - 当 $2a = |z_1 - z_2|$ 时, 该方程表示连接 z_1, z_2 的线段;
 - 当 $2a < |z_1 - z_2|$ 时, 该方程表示空集.
- (5) $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$.
- 当 $2a < |z_1 - z_2|$ 时, 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支;
 - 当 $2a = |z_1 - z_2|$ 时, 该方程表示以 z_2 为起点, 与 z_2, z_1 连线反向的射线;
 - 当 $2a > |z_1 - z_2|$ 时, 该方程表示空集.

 **练习 1.11** $z^2 + \bar{z}^2 = 1$ 和 $z^2 - \bar{z}^2 = i$ 分别表示什么图形?

1.4.2 区域和闭区域

为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域. 类比于高等数学中的邻域和去心邻域, 我们在复变函数中, 称开圆盘

$$U(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

为 z_0 的一个 δ 邻域, 称去心开圆盘

$$\overset{\circ}{U}(z_0, \delta) = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

为 z_0 的一个去心 δ 邻域.



图 1.13 邻域和去心邻域

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

- (1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
- (2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.
- (3) 如果 z_0 的任何一个邻域 U , 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

显然内点都属于 G , 外点都不属于 G , 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.

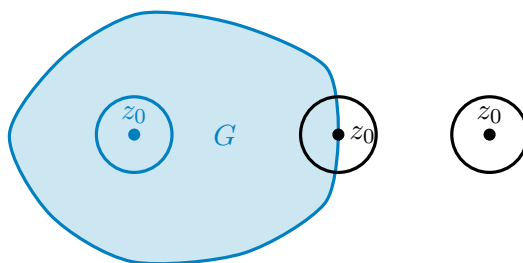


图 1.14 点与集合的位置关系

定义 1.4

- (1) 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.
- (2) 如果 G 的所有边界点都属于 G , 称 G 是一个闭集.

例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集¹⁴. G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集. 直观上看: 开集往往由 $>, <$ 的不等式给出, 闭集往往由 \geq, \leq 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0, R)$ 中, 则称它是有界的. 否则称它是无界的.

定义 1.5

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个区域. 也就是说, 区域是连通的开集.

区域和它的边界一起构成了闭区域, 记作 \bar{D} . 它是一个闭集.

观察下方的图案, 阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接, 因此它是一个区域. 这些线条和点构成了它的边界.

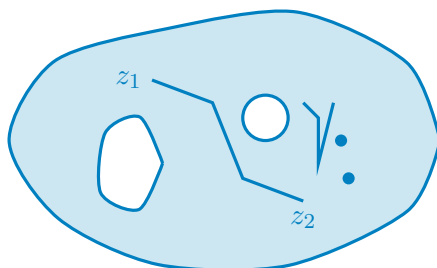



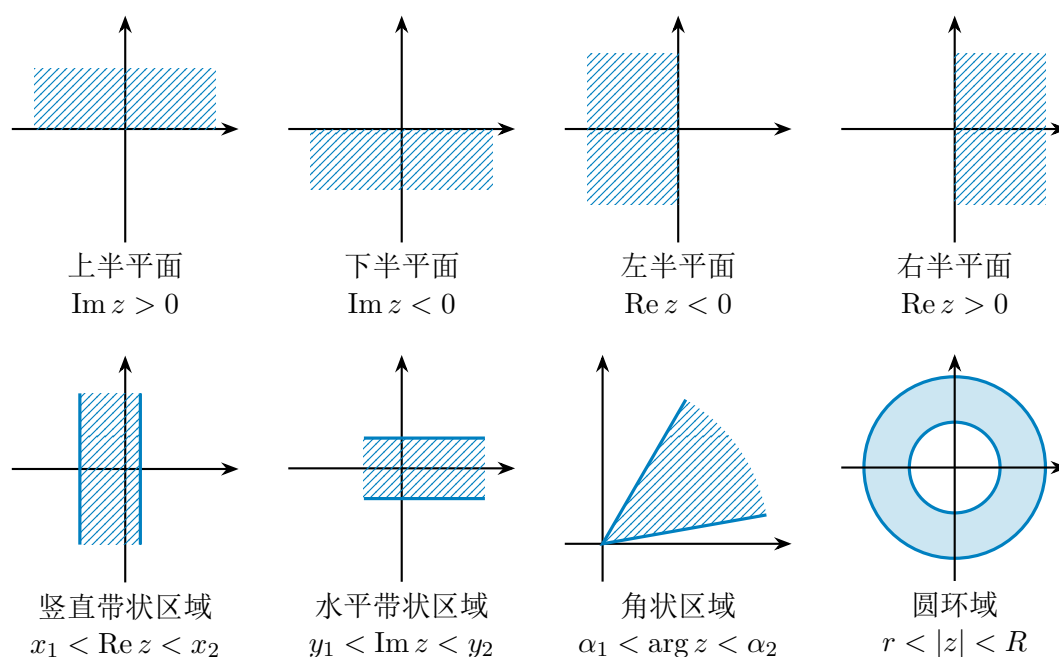
图 1.15 区域和它的边界

数学中边界的概念与日常所说的边界是两码事. 例如区域 $|z| > 1$ 的边界是 $|z| = 1$, 其闭区域是 $|z| \geq 1$.

很多区域可以由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

 **练习 1.12** 下方区域对应的闭区域是什么?

¹⁴最后一个集合不包括原点



1.4.3 区域的特性

设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

定义了一条连续曲线. 这也等价于 $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$. 如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线. 如果还满足两个端点重叠, 即 $z(a) = z(b)$, 则称 C 是简单闭曲线或闭路.

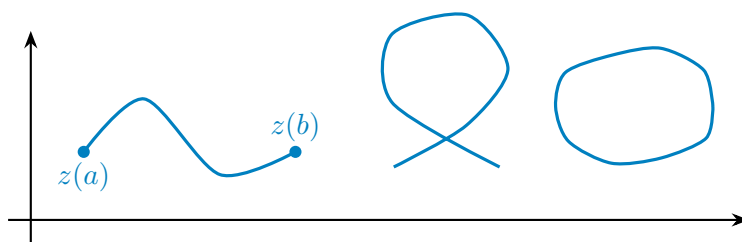


图 1.16 简单曲线、非简单曲线、闭路

闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界. 分别称这两个区域是 C 的内部和外部. C 是它们的公共边界.¹⁵

¹⁵B. Bolzano 最早明确陈述了这个定理, 并指出它是需要证明的. 1893 年, C. Jordan 首次给出了证明, 其中

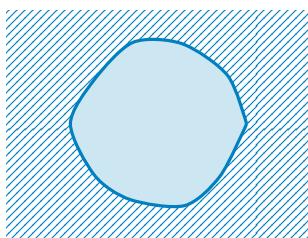


图 1.17 闭路的内部和外部

在前面所说的几个常见区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外, 闭路的内部仍然包含在这个区域内.

定义 1.6

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中, 则称 D 是单连通区域. 否则称之为多连通区域.

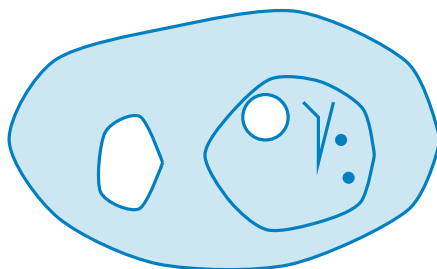


图 1.18 多连通区域

单连通区域内的任一闭路可以“连续地变形”成一个点.¹⁶ 这也等价于: 设 ℓ_0, ℓ_1 是从 A 到 B 的两条连续曲线, 则 ℓ_0 可以连续地变形为 ℓ_1 且保持端点不动.¹⁷

例 1.18

- (1) $\operatorname{Re}(z^2) \leq 1$. 设 $z = x + yi$, 则 $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 \leq 1$. 这是无界的单连通闭区域.
- (2) $\arg z \neq \pi$. 即角状区域 $-\pi < \arg z < \pi$. 这是无界的单连通区域.
- (3) $\left| \frac{1}{z} \right| \leq 3$. 即 $|z| \geq \frac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.

假设了该定理对于简单多边形成立 (这个情形并不难证明). 不少数学家认为第一个给出完备证明的是美国数学家 O. Veblen(1905).

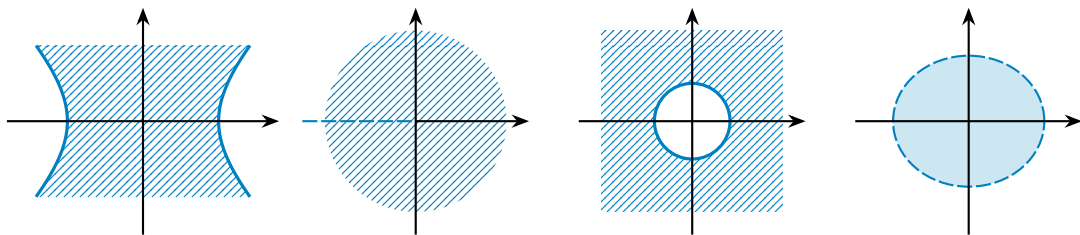
¹⁶不妨设 $\ell: z = x(t) + iy(t), t \in [0, 1]$ 是闭路. 如果存在连续函数 $X, Y: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 使得对 $0 \leq s < 1$ $\ell_s: z = X(s, t) + iY(s, t), t \in [0, 1]$ 都是闭路, 且 $\ell_0 = \ell, \ell_1 = a + bi$, 则称闭路 ℓ 可以连续地变形为点 $a + bi$.

¹⁷不妨设 $\ell_0: z = x_0(t) + iy_0(t), \ell_1: z = x_1(t) + iy_1(t), t \in [0, 1]$. 如果存在连续函数 $X, Y: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$\ell_0: z = X(0, t) + iY(0, t), \quad \ell_1: z = X(1, t) + iY(1, t),$$

则称 ℓ_0 可以连续地变形为 ℓ_1 且保持端点不动.

(4) $|z+1| + |z-1| < 4$. 表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通区域.



练习 1.13 $|z+1| + |z-1| \geq 1$ 表示什么集合?

1.5 复变函数

1.5.1 复变函数的定义

所谓的映射, 就是两个集合之间的一种对应 $f: A \rightarrow B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个复变函数.

例 1.19 $f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n$ ($n \neq 0$ 为整数), $\frac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义 1.7

- 称 A 为函数 f 的定义域.
- 称 $\{w = f(z) \mid z \in A\}$ 为它的值域.¹⁸

练习 1.14 上述函数的定义域和值域分别是什么?

在复变函数理论中, 常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z, \sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z , 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样便得到了这个多值函数的一个单值分支.

例 1.20 $\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是一一对应.

¹⁸值域和陪域 B 往往不相同. 在高等数学中的函数陪域总可选为 \mathbb{R} , 本课程中复变函数陪域总可选为 \mathbb{C} . 尽管在某些情形下不同陪域的函数视为不同, 但在高等数学和本课程中, 不考虑陪域是否相同, 只要定义域和对应关系相同, 就视为同一函数.

例 1.21 $f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时, f 是一一对应.

若无特别声明, 本书中复变函数总是指单值的复变函数.

1.5.2 映照

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系, 其中

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

的实部和虚部是两个二元实变函数.

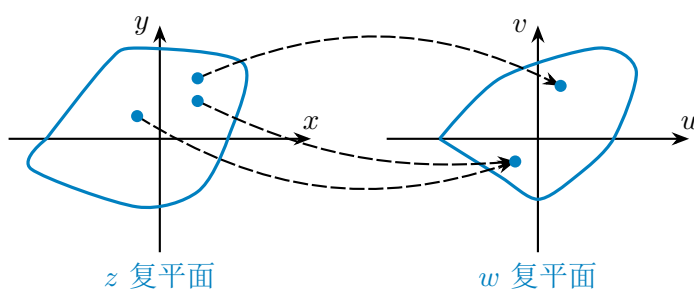
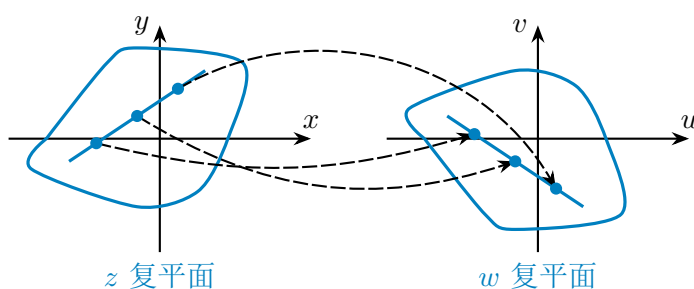
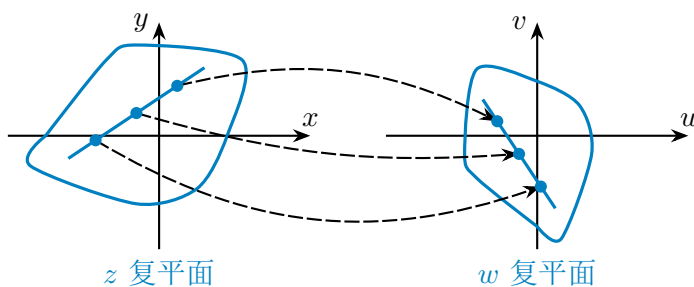


图 1.19 映照

例 1.22 函数 $w = \bar{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域, 且 $u = x, v = -y$.

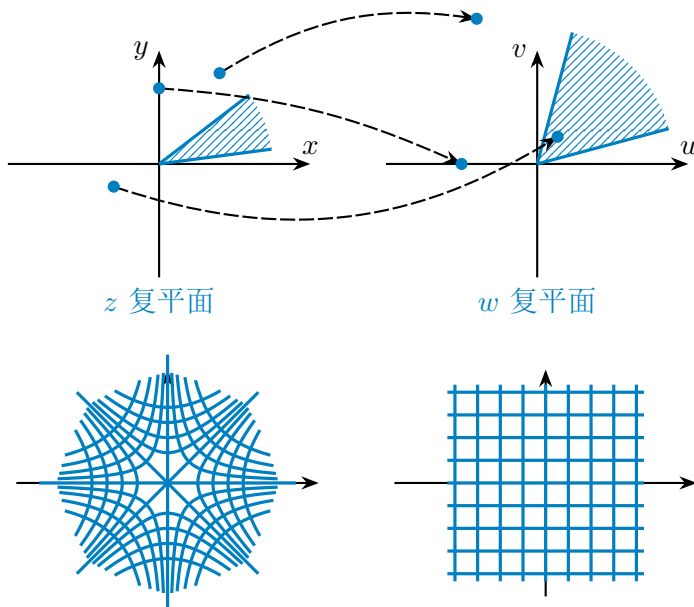


例 1.23 函数 $w = az$. 设 $a = re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.



例 1.24 函数 $w = z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.

由于 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. 因此它把 z 复平面上两族分别以直线 $y = \pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线 $x^2 - y^2 = c_1, 2xy = c_2$ 分别映射为 w 复平面上的两族平行直线 $u = c_1, v = c_2$.



例 1.25 求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

- (1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \frac{\pi}{2}$.
- (2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.
- (3) 扇形区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2$.

解

- (1) 设 $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$, 则 $w = z^2 = -r^2$. 因此它的像还是一条线段 $0 < |w| < 4, \arg w = -\pi$.

(2) 由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

因此 $u = x^2 - y^2 = 4, v = 2xy$. 由于任何复数均存在平方根, 存在 $z = x + yi$ 使得 $f(z) = 4 + iv$, 其中 $x^2 - y^2 = 4$. 因此这条双曲线的像的确是直线 $\operatorname{Re} w = 4$.¹⁹

(3) 设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2 e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域 $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}, 0 < |w| < 4$.

例 1.26 求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = \frac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解 由于 $z = \frac{w+1}{w-1}, \left| \frac{w+1}{w-1} \right| = 2$, 因此

$$|w+1| = 2|w-1|, \quad w\bar{w} + w + \bar{w} + 1 = 4w\bar{w} - 4w - 4\bar{w} + 4,$$

$$w\bar{w} - \frac{5}{3}w - \frac{5}{3}\bar{w} + 1 = 0, \quad \left| w - \frac{5}{3} \right|^2 = \frac{16}{9},$$

即 $\left| w - \frac{5}{3} \right| = \frac{4}{3}$, 是一个圆周.

1.6 极限和连续性

1.6.1 无穷远点

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限.

1. 数列极限

先来看数列极限的定义.

定义 1.8

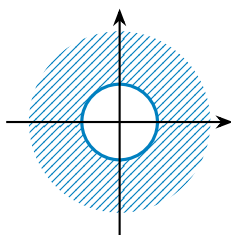
设 $\{z_n\}_{n \geq 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.

如果 $\forall X > 0, \exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $|z_n| > X$, 则记 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$. 如果称

$$\overset{\circ}{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > X\}$$

为 ∞ 的 (去心) X 邻域, 那么上述定义可统一表述为:

¹⁹在很多教材或习题册中, 往往会忽略检查所给的集合中的每个元素都有原像.

图 1.20 ∞ 的 (去心) 邻域**定义 1.9**

$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 是指: 对 z 的任意 δ 邻域 U , $\exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $z_n \in U$.²⁰

2. 复球面和扩充复平面

那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞ . 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

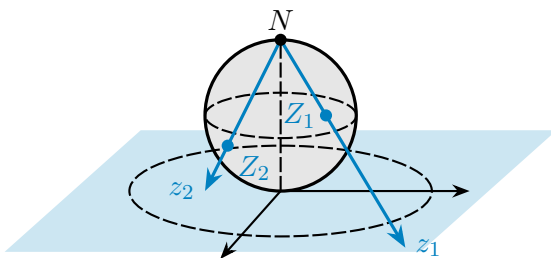


图 1.21 复球面和复平面

取一个与复平面相切于原点 $z = 0$ 的球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于另一点 N , 称之为北极.

- 对于平面上的任意一点 z , 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z .
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z , 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.

这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.

当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N . 如果我们在复平面上添加一个额外的"点"——无穷远点, 记作 ∞ . 那么扩充复数集合 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上

²⁰一般地, 一个点的邻域是指包含它的任意一个开集. 可以说明, 把这里的任意 δ 邻域换成任意邻域, 并不会改变定义, 因为包含 z 的开集一定包含一个 z 的 δ 邻域.

的点一一对应. 称这样的球面为复球面, 称包含无穷远点的复平面为扩充复平面或闭复平面.

它和实数列极限符号中的 ∞ 有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数列极限符号中的 ∞ 在复球面上就是 ∞ .

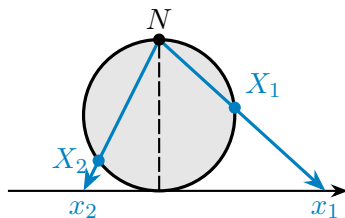


图 1.22 圆周和实轴

朴素地看, 复球面上任意一点可以定义 δ 邻域为与其距离小于 δ 的所有点. 特别地, ∞ 的邻域通过前面所说的对应关系, 可以对应到扩充复平面上 ∞ 的一个邻域. 所以在复球面上, 我们将普通复数和 ∞ 的邻域可以视为相同的概念.

1.6.2 数列的极限

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

定理 1.4

设 $z_n = x_n + y_n i, z = x + y i$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

证明 由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证.

由此可知极限的四则运算法则对于数列也是成立的.

定理 1.5

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z, \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$, 则

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n w_n = zw$;
- (3) 当 $w \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}$.

例 1.27 设 $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解 由于

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \rightarrow 1, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow 0.$$

因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$.

1.6.3 函数的极限

定义 1.10

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义. 如果存在复数 A , 使得对 A 的任意邻域 $U(A, \varepsilon)$, $\exists \delta > 0$ 使得

$$z \in \dot{U}(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(A, \varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \rightarrow A (z \rightarrow z_0)$.

此时我们称极限存在.

上述定义中的 z_0 和 A 可换成 ∞ , 从而得到 $z \rightarrow \infty$ 的极限定义, 以及 $\lim f(z) = \infty$ 的含义.

不难看出, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的: 即 $z \rightarrow z_0$ 沿任一曲线趋向于 z_0 的极限都是相同的.

定理 1.6

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + y_0 i$, $A = u_0 + v_0 i$, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

证明 由三角不等式

$$|u - u_0|, |v - v_0| \leq |f(z) - A| \leq |u - u_0| + |v - v_0|$$

易证.

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理 1.7

设 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, 则

- (1) $\lim_{z \rightarrow z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B$;
- (2) $\lim_{z \rightarrow z_0} (fg)(z) = AB$;
- (3) 当 $B \neq 0$ 时, $\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{A}{B}$.

在学习了复变函数的导数后, 我们也可以使用等价无穷小替换、洛必达法则等工具来计算极限.

例 1.28 证明: 当 $z \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明 令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时, $u(x, y) \rightarrow \pm 1$. 因此 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y)$ 不存在, 从而 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在.

1.6.4 函数的连续性**定义 1.11**

- 如果 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

定理 1.8

函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

例 1.29 设 $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x, y) = x^2 - y^2$ 处处连续. 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

定理 1.9

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

也处处连续, 有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

例 1.30 证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明 设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x, y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

另证 函数 $g(z) = \bar{z} = x - iy$ 处处连续, 从而 $g(f(z)) = \overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续.

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 \mathbb{C} 是一个域, 上面可以做除法. 这就导致了复变函数有导数, 而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将逐步揭开它的神秘面纱.

作业

一、判断题.

1. z 是实数当且仅当 $z = \bar{z}$. ()
2. z 是纯虚数当且仅当 $z = -\bar{z}$. ()
3. z 是实数当且仅当 $\arg z = 0, \pi$. ()
4. z 是纯虚数当且仅当 $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$. ()
5. 若 $f(z)$ 在 z_0 处连续, $g(z)$ 在 z_0 处不连续, 则 $(f+g)(z)$ 在 z_0 一定不连续. ()

二、选择题.

1. 选择合适的选项填入下方的括号中.

- (1) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$ 是().
 - (2) $|z+i| = |z-i|$ 是().
 - (3) $||z+i| - |z-i|| = 1$ 是().
 - (4) $|z| + |z-2i| = 2$ 是().
 - (5) $\operatorname{Re}(i\bar{z}) = 3$ 是().
 - (6) $z\bar{z} - (2+i)z - (2-i)\bar{z} = 4$ 是().
 - (7) $z = 1+it, -1 \leq t \leq 1$ 是().
 - (8) $z = i + 2e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 是().
- (A) 直线 (B) 圆周 (C) 不是圆的椭圆 (D) 双曲线
(E) 双曲线的一支 (F) 抛物线 (G) 一个点 (H) 一条线段

2. 选择合适的选项填入下方的括号中.

- (1) $z\bar{z} - (2+i)z - (2-i)\bar{z} \leq 4$ 是().
- (2) $-1 < \arg z < \pi - 1$ 的().
- (3) $1 < |z| < 2$ 是().
- (4) $0 < \operatorname{Re} z < 1$ 是().
- (5) $\operatorname{Im} z \leq 0, \operatorname{Re} z \geq 0$ 是().
- (6) $|z-1| < |z+3|$ 是().
- (7) $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 2$ 是().
- (8) $\arg z < \frac{3\pi}{4}$ 是().

- (A) 有界单连通区域 (B) 有界多连通区域
(C) 无界单连通区域 (D) 无界多连通区域

(E) 有界单连通闭区域

(F) 有界多连通闭区域

(G) 无界单连通闭区域

(H) 无界多连通闭区域

三、填空题.

1. 如果 x, y 是实数且 $\frac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$, 那么 $x+y =$ _____.
2. 设 $z = -i$, 则 $1+z+z^2+z^3+z^4 =$ _____.
3. 化简 $(-1+i)^{10} - (-1-i)^{10} =$ _____.
4. 化简 $i^{2022} - (-i)^{2022} =$ _____.
5. 化简 $\frac{(1+i)^{101}}{(1-i)^{99}} =$ _____.
6. $\left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^{2021}$ 的模是_____.
7. 2^{-i} 的辐角主值是_____.
8. $-1-i$ 的辐角主值是_____.
9. $2023-i$ 绕 0 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到的复数是_____.
10. 区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$ 在映射 $w = z^3$ 下的像是_____.
11. 已知映射 $w = z^3$, 则 $z = \sqrt{3}+i$ 在 w 复平面上的像是_____.
12. 极限 $\lim_{z \rightarrow 1+i} (1+z^2+2z^4) =$ _____.

四、计算题.

1. $z_1 = -z, z_2 = \bar{z}, z_3 = -\bar{z}$ 在复平面上对应的点分别与 z 在复平面上对应的点是什么关系?
2. 已知点 z_1, z_2, z_3 不共线. 点 $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$ 和 $\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$ 表示什么点?
3. 求下列复数 z 的实部与虚部, 共轭复数, 模和辐角主值:
 - (1) $\frac{5+i}{2+3i}$; (2) $\frac{3i}{1-i} - \frac{1}{i}$; (3) $\frac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$; (4) $i^8 - 4i^{21} + i$.
4. 求下列复数 z 的三角和指数形式:
 - (1) i ; (2) $1+i\sqrt{3}$; (3) $3-\sqrt{3}i$; (4) $\frac{2i}{1-i}$;
 - (5) $\overline{\left(\frac{4+3i}{1+2i}\right)}$; (6) $\frac{3+i}{i} - \frac{10i}{3-i}$; (7) $\frac{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5}{(\cos \varphi - i \sin \varphi)^3}$.
5. 计算
 - (1) $(\sqrt{3}-i)^5$; (2) $(1+i)^6$; (3) $\sqrt[3]{-8}$;
 - (4) $\sqrt[4]{-2+2i}$; (5) $\sqrt[4]{-2}$; (6) $(1-i)^{1/3}$.
6. 用复参数方程表示连接 $-1+i$ 与 $1-4i$ 的直线段.
7. 用复参数方程表示以 z_0 为圆心, R 为半径的圆周.

8. 讨论极限 $\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$ 是否存在. 若存在请求出具体的值, 若不存在请证明.

9. 下列数列 $\{z_n\}$ 是否收敛? 如果收敛, 求出它们的极限:

$$(1) z_n = \frac{1+ni}{1-ni}; \quad (2) z_n = \left(1 + \frac{i}{2}\right)^n; \quad (3) z_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1};$$

$$(4) z_n = \frac{(3+2i)^n}{(3+4i)^n}; \quad (5) z_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) e^{-\frac{n\pi i}{2}}.$$

五、证明题.

1. 证明: 当 $|z| = 1 > |w|$ 时, $\left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right| = 1$.

2. 证明: 如果复数 $a+ib$ 是实系数方程

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

的根, 则 $a-ib$ 也是它的根.

3. 设 $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$. 证明: $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ 并说明这些等式的几何意义.

4. 设 $z = e^{it}$, 证明:

$$(1) z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos nt; \quad (2) z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin nt.$$

扩展阅读

一、我们知道, 对于任意两个集合 A, B , 我们可以定义 $A \rightarrow B$ 的映射. 在数学中, 很多对象是带有“结构”的集合, 例如实线性空间 V 是一个拥有如下结构:

$$\text{零元 } 0 \in V; \quad \text{加法 } v_1 + v_2 \in V; \quad \text{数乘 } \lambda v,$$

且满足一些特定性质的集合. 如果 A, B 具有同一种结构, 映射 $f: A \rightarrow B$ “保持”了这些结构, 则我们称 f 是同态. 例如实线性空间之间的同态就是指一个映射 $f: V \rightarrow W$, 使得

$$f(0) = 0; \quad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2); \quad f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

再比如域是带有如下结构:

$$\text{零元 } 0; \quad \text{幺元 } 1; \quad \text{加法}; \quad \text{减法}; \quad \text{乘法}; \quad \text{除法},$$

且满足特定性质的集合 (交换律分配律之类的). 所以域之间的同态就是指一个 $f: F \rightarrow K$, 使得

- $f(0) = 0, \quad f(1) = 1;$
- $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(x - y) = f(x) - f(y);$
- $f(xy) = f(x)f(y), \quad f(x/y) = f(x)/f(y).$

如果一个同态是双射 (一一对应), 则称之为同构.

1. 设 $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ 是有理数域之间的同构, 证明 f 只能是恒等映射.
2. 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是实数域之间的连续的同构, 证明 f 只能是恒等映射.
3. 设 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 是复数域之间的连续的同构, 证明 f 只能是恒等映射或复共轭.
4. 如果 $F = \mathbb{R} + \mathbb{R}t$ 是一个真包含 \mathbb{R} 的域, 证明 F 同构于 \mathbb{C} .
5. 设

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$$

其中 $E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$. 证明 F 是一个域且同构于 \mathbb{C} .

6. 从 (5) 中可以看出, 复数 $z_0 = x_0 + y_0i = re^{i\theta}$ 对应的矩阵 $x_0E + y_0J$ 所对应的线性变换, 将平面向量旋转 θ 并将模长放缩至 r 倍.

二、满足 $z^n = 1$ 的复数 z 被称为 n 次单位根. 不难看出 $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, k = 0, 1, \dots, n-1$. 单位根在代数, 几何和组合中有着丰富的应用. 我们来看一个例子. 设集合 $A = \{1, 2, \dots, 2026\}$.

1. 集合 A 有多少个子集? 试着将 A 的每一个子集与

$$N(x) = \prod_{a=1}^{2026} (1 + x^a)$$

的展开式中的每一项建立一个一一对应.

2. 设 $S \subseteq A$. 定义

$$f(S) = \prod_{a \in S} x^a = x^{\sum_{a \in S} a}.$$

证明所有的 S 对应的 $f(S)$ 之和就是 $N(x)$.

3. 证明 $N(x)$ 的展开式合并同类项后 x^k 的系数就是 A 的那些满足元素之和是 k 的子集的个数.
4. 现在我们想知道 A 有多少个子集满足元素之和是 5 的倍数. 令 x 是 5 次单位根, 则 $N(x)$ 可以表为

$$N(x) = N_0 + N_1x + N_2x^2 + N_3x^3 + N_4x^4,$$

那么 N_0 就是元素之和是 5 的倍数的集合个数.

5. 当 $x = 1$ 时, 显然 $N(1) = 2^{2026}$. 当 $x \neq 1$ 是 5 次单位根时, $1, x, x^2, x^3, x^4$ 是方程 $X^5 - 1 = 0$ 的所有根, 所以 $2, 1+x, 1+x^2, 1+x^3, 1+x^4$ 是方程 $(X-1)^5 - 1 = 0$ 的所有根. 由韦达定理可知

$$(1+x^0)(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4) = 2.$$

由此证明

$$N(x) = 2^{405}(1+x).$$

6. 计算 $N(1) + N(e^{2\pi i/5}) + N(e^{4\pi i/5}) + N(e^{6\pi i/5}) + N(e^{8\pi i/5})$. 由此得到 $N_0 = \frac{2^{2026} - 2^{406}}{5}$.
7. 想一想, N_1, N_2, N_3, N_4 分别是多少?

更多细节可见: <https://www.bilibili.com/video/BV1R34y1W7Xn/>

练习答案

1.1 -4.

1.2 1.

1.3 $-\bar{z}$.

1.4 $(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2$ 或 $(x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2$.

1.5 $\frac{5}{7-4i}$.

1.6 仅当 z 不是负实数和 0 时它才成立.

1.7 z_1, \dots, z_n 中的非零元辐角相等.

1.8 $z = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) = 2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{3}}$, 写成 $\frac{5\pi}{3}$ 也可以.

1.9 -2^{2022} .

1.10 $\pm \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \pm i, \pm \frac{\sqrt{3}-i}{2}$.

1.11 双曲线 $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ 和双曲线 $xy = \frac{1}{4}$.

1.12

- (1) 上半平面对应的闭区域为 $\operatorname{Im} z \geq 0$.
- (2) 下半平面对应的闭区域为 $\operatorname{Im} z \leq 0$.
- (3) 左半平面对应的闭区域为 $\operatorname{Re} z \leq 0$.
- (4) 右半平面对应的闭区域为 $\operatorname{Re} z \geq 0$.
- (5) 竖直带状区域对应的闭区域为 $x_1 \leq \operatorname{Re} z \leq x_2$.
- (6) 水平带状区域对应的闭区域为 $y_1 \leq \operatorname{Im} z \leq y_2$.
- (7) 角状区域对应的闭区域为 $\alpha_1 \leq \arg z \leq \alpha_2$ 以及原点. 如果 $\alpha_1 = -\pi, \alpha_2 = \pi$, 则为 \mathbb{C} .
- (8) 圆环域对应的闭区域为 $r \leq |z| \leq R$.

1.13 整个复平面.

1.14

- (1) $\operatorname{Re} z$ 的定义域为 \mathbb{C} , 值域为 \mathbb{R} .
- (2) $\arg z$ 的定义域为 $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$, 值域为 $(-\pi, \pi]$.
- (3) $|z|$ 的定义域为 \mathbb{C} , 值域为 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
- (4) 当 $n > 0$ 时, z^n 的定义域为 \mathbb{C} , 值域为 \mathbb{C} . 当 $n < 0$ 时, z^n 的定义域为 $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$, 值域为 $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$.
- (5) $\frac{z+1}{z^2+1}$ 的定义域为 $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq \pm i\}$, 值域为 \mathbb{C} .

参考文献

- [Car43] 吉罗拉莫·卡尔达诺, 王宪生译. 我的生平. 浙江大学出版社, 2021.
译自: Girolamo Cardano, *De Vita Propria*, Paris, 1643.
- [Car63] Gerolamo Cardano, Sydney Henry Gould (Translator), *The Book on Games of Chance*, Dover Publications, 2015.
译自: Gerolamo Cardano, *Liber de Zudo Aleae*, Paris, 1663.
- [Kli90] 莫里斯·克莱因, 张理京, 张锦炎, 江泽涵译. 古今数学思想 (第一册). 上海科学技术出版社, 2013.
译自: Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, NY, 1990.

索引