

# 2022 年 合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

2022~2023 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

## 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1.  $i^{-i}$  的主值是\_\_\_\_\_.
2. 设  $z = -i$ , 则  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 =$ \_\_\_\_\_.
3. 设  $C$  为正向圆周  $|z| = 2$ , 则积分  $\oint_C \left( \frac{\bar{z}}{z} \right) dz =$ \_\_\_\_\_.
4. 设  $a, b, c$  为实数. 如果函数  $f(z) = x^2 - 2xy - y^2 + i(ax^2 + bxy + cy^2)$  在复平面上处处解析, 则  $a + b + c =$ \_\_\_\_\_.
5. 函数  $\sin t + j \cos t$  的傅里叶变换为\_\_\_\_\_.

## 二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 方程  $||z + i| - |z - i|| = 1$  表示的曲线是 ( ).  
A. 直线                      B. 不是圆的椭圆              C. 双曲线                      D. 圆周
2. 不等式  $-1 \leq \arg z \leq \pi - 1$  确定的是的 ( ).  
A. 有界多连通闭区域                      B. 有界单连通区域  
C. 无界多连通区域                      D. 无界单连通闭区域
3. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (iz)^n$  的收敛半径是 ( ).  
A.  $i$                       B.  $-i$                       C. 1                      D.  $+\infty$
4. 下面哪个函数在  $z = 0$  处不可导? ( )  
A.  $2x + 3yi$                       B.  $2x^2 + 3y^2i$                       C.  $x^2 - xyi$                       D.  $e^x \cos y + ie^x \sin y$
5. 如果  $z_0$  是  $f(z)$  的一阶极点,  $g(z)$  的一阶零点, 则  $z_0$  是  $f(z)^3 g(z)^2$  的 ( ).  
A. 一阶极点                      B. 一阶零点                      C. 可去奇点                      D. 三阶极点

## 三、解答题

1. (6 分) 设  $z = \frac{3+i}{i} - \frac{10i}{3-i}$ , 求  $z$  的模和辐角.
2. (6 分) 解方程  $\sin z = 2 \cos z$ .
3. (6 分) 设  $C$  为从  $i$  到  $i - \pi$  再到  $-\pi$  的折线, 求  $\int_C \cos^2 z dz$ .

4. (10 分) 设  $C$  为正向圆周  $|z - 3| = 4$ , 求  $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2} dz$ .
5. (10 分) 假设  $v(x, y) = x^3 + y^3 - axy(x + y)$  是调和函数, 求参数  $a$  以及解析函数  $f(z)$  使得  $v(x, y)$  是它的虚部.
6. (10 分) 确定函数  $f(z) = \frac{z + 1}{(z - 1)^2}$  在圆环域  
 (1)  $0 < |z| < 1$ ; (2)  $1 < |z| < +\infty$   
 内的洛朗级数展开式.
7. (10 分) 求  $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z^2 - \pi^2)}$  在有限复平面内的奇点和相应的留数.
8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题
- $$\begin{cases} y''(t) + 2y(t) = \sin t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$
9. (3 分) 复变函数  $f(z) = \sin z$  和实变量函数  $g(x) = \sin x$  的性质有什么相似和不同之处? 试列举一二.

# 2022 年合肥工业大学考试参考答案 (A)

2022 ~ 2023 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

## 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1.  $e^{\pi/2}$ , 2. 1, 3. 0, 4. 2, 5.  $2\pi j\delta(\omega + 1)$ .

## 二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	C	D	C	A	A

## 三、解答题

### 1. (6 分) 【解】

由于  $z = -3i + 1 - i(3 + i) = 2 - 6i$ , ..... (2 分)

因此  $|z| = 2\sqrt{10}$ , ..... (2 分)

$\text{Arg } z = 2k\pi - \arctan 3, k \in \mathbb{Z}$ . ..... (2 分, 只有主值得 1 分)

### 2. (6 分) 【解】

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i(e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$e^{2iz} = \frac{1 + 2i}{1 - 2i} = \frac{(1 + 2i)^2}{5}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$2iz = \text{Ln} \frac{(1 + 2i)^2}{5} = (2 \arctan 2 + 2k\pi)i, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$z = \arctan 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分, 只有主值得 1 分})$$

其它答案:  $z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{4}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

### 3. (6 分) 【解】

由于  $\cos^2 z$  解析, 且 ..... (1 分)

$$\int \cos^2 z \, dz = \int \frac{1 + \cos(2z)}{2} \, dz \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{z}{2} + \frac{\sin(2z)}{4} + C, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C \cos^2 z \, dz &= \left[ \frac{z}{2} + \frac{\sin(2z)}{4} \right] \Big|_i^{-\pi} \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \left[ \frac{i}{2} + \frac{\sin(2i)}{4} \right] \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{(e^{-2} - 4 - e^2)i}{8}. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})\end{aligned}$$

4. (10 分) 【解】

由于  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2}$  在  $|z - 3| \leq 4$  内的奇点为  $\pi, 2\pi$ ,  $\dots\dots\dots$  (3 分)  
因此

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) \, dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), \pi] + \operatorname{Res}[f(z), 2\pi]] \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 2\pi i \left[ \frac{e^{iz}}{z - 2\pi} \Big|_{z=\pi} + \frac{e^{iz}}{z - \pi} \Big|_{z=2\pi} \right] \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 2\pi i \left[ \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right] = 4i. \dots\dots\dots (3 \text{ 分})\end{aligned}$$

5. (10 分) 【解】

由  $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 6x - 2ay + 6y - 2ax = 0$  可知  $a = 3$ .  $\dots\dots\dots$  (3 分)  
由

$$\begin{aligned}f'(z) &= v_y + iv_x \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= (3y^2 - 3x^2 - 6xy) + i(3x^2 - 6xy - 3y^2) \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 3(i - 1)(x + iy)^2 = 3(i - 1)z^2 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})\end{aligned}$$

可知  $f(z) = (i - 1)z^3 + C, C \in \mathbb{R}$ .  $\dots\dots\dots$  (2 分, 没有常数项得 1 分)

其它解法: 由  $u_x = v_y = 3y^2 - 3x^2 - 6xy$  得  $u = 3xy^2 - x^3 - 3x^2y + \psi(y)$ .  $\dots\dots\dots$  (2 分)

由  $u_y = -v_x = -(3x^2 - 6xy - 3y^2)$  得  $\psi'(y) = 3y^2$ ,

$\psi(y) = y^3 + C$ ,  $\dots\dots\dots$  (3 分, 没有常数项得 2 分)

$$\begin{aligned}f(z) &= u + iv \\ &= 3xy^2 - x^3 - 3x^2y + y^3 + C + i(x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y) \\ &= (i - 1)z^3 + C, C \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

6. (10 分) 【解】

由于  $f(z)$  的奇点是 1, 因此  $f(z)$  在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{z-1+2}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} = -\frac{1}{1-z} + 2\left(\frac{1}{1-z}\right)' \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分}) \\&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \\&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)z^n. \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}, \quad \dots\dots\dots(1 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z-1} - 2\left(\frac{1}{z-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\right)' \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分}) \\&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-n)z^{-n-1} \\&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-n+1)z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)z^{-n}. \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})\end{aligned}$$

**7. (10 分)【解】**

由于 0 是分母的二阶零点, 因此它是  $f(z)$  的二阶极点.  $\dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

由于  $\pm\pi$  是分母的一阶零点, 因此它们是  $f(z)$  的一阶极点.  $\dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \left(\frac{\cos z}{z^2 - \pi^2}\right)' \Big|_{z=0} \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$= \frac{-\sin z \cdot (z^2 - \pi^2) - \cos z \cdot 2z}{(z^2 - \pi^2)^2} \Big|_{z=0} = 0, \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z), \pi] = \frac{\cos z}{z^2(z+\pi)} \Big|_{z=\pi} = -\frac{1}{2\pi^3}, \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z), -\pi] = \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)} \Big|_{z=-\pi} = \frac{1}{2\pi^3}. \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

**8. (9 分)【解】**

设  $\mathcal{L}[y] = Y$ , 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y - 2, \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2 Y - 2 + 2Y = \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 2} + \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 2)} = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2 + 2} \right] = \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(\sqrt{2}t). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

**9. (3 分) 【解】**

例如 (每项 1 分)

- $f'(z) = \cos z, g'(x) = \cos x.$        $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- $\sin z$  处处可导,  $\sin x$  处处可导.       $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- 麦克劳林展开的系数相同.       $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- $\sin z$  无界,  $\sin x$  有界.       $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

# 2022 年 合 肥 工 业 大 学 试 卷 (B)

2022 ~ 2023 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

## 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1.  $-1 + \sqrt{3}i$  的辐角主值是\_\_\_\_\_.
2.  $i^{2022} - (-i)^{2022} =$ \_\_\_\_\_.
3. 如果函数  $f(z) = e^{ax}(\cos y - i \sin y)$  在复平面上处处解析, 则实数  $a =$ \_\_\_\_\_.
4. 设  $C$  为正向圆周  $|z| = 1$ , 则积分  $\oint_C \left( \frac{1+z+z^2}{z^3} \right) dz =$ \_\_\_\_\_.
5. 函数  $e^{jt}$  的傅里叶变换为\_\_\_\_\_.

## 二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 不等式  $1 < |z| < 2$  确定的是 ( ).  
A. 有界多连通区域    B. 有界单连通区域    C. 无界多连通区域    D. 无界单连通区域
2. 方程  $|z+i| = |z-i|$  表示的曲线是 ( ).  
A. 直线    B. 不是圆的椭圆    C. 双曲线    D. 圆周
3. 幂级数在其收敛圆周上 ( ).  
A. 一定处处绝对收敛    B. 一定处处条件收敛  
C. 一定有发散的点    D. 可能处处收敛也可能有发散的点
4. 函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  在  $z_0 = x_0 + iy_0$  处可导的充要条件是 ( ).  
A.  $u, v$  均在  $(x_0, y_0)$  处连续  
B.  $u, v$  均在  $(x_0, y_0)$  处有偏导数  
C.  $u, v$  均在  $(x_0, y_0)$  处可微  
D.  $u, v$  均在  $(x_0, y_0)$  处可微且满足 C-R 方程
5.  $z = \pi$  是函数  $\frac{\sin z}{(z - \pi)^2}$  的 ( ).  
A. 一阶极点    B. 一阶零点    C. 可去奇点    D. 本性奇点

## 三、解答题

1. (6 分) 设  $z = \frac{2+i}{1-2i}$ , 求  $z$  的模和辐角.
2. (6 分) 求  $\sqrt[3]{-8}$ .

3. (7 分) 设  $C$  是从  $i$  到  $2+i$  的直线, 求  $\int_C \bar{z} dz$ .

4. (7 分) 求  $\int_{-\pi i}^{\pi i} (e^z + 1) dz$ .

5. (7 分) 求  $\int_0^\pi (z + \cos 2z) dz$ .

6. (7 分) 设  $C$  为正向圆周  $|z| = 4$ , 求  $\oint_C \frac{z-6}{z^2+9} dz$ .

7. (8 分) 已知  $f(z) = u + iv$  是解析函数, 其中  $u(x, y) = x^2 + axy - y^2$ ,  $v = 2x^2 - 2y^2 + 2xy$  且  $a$  是实数. 求参数  $a$  以及解析函数  $f'(z)$ , 其中  $f'(z)$  需要写成  $z$  的表达式.

8. (10 分) 确定函数  $f(z) = \frac{2}{z(z+2)}$  在圆环域

(1)  $0 < |z| < 2$ ;      (2)  $2 < |z| < +\infty$

内的洛朗级数展开式.

9. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = 8e^{2t}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

10. (3 分) 复积分的计算方法或公式有哪些? 请给出至少三条.



# 2022 年合肥工业大学考试参考答案 (B)

2022 ~ 2023 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

## 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1.  $\frac{2\pi}{3}$ , 2. 0, 3. -1, 4.  $2\pi i$ , 5.  $2\pi\delta(\omega - 1)$ .

## 二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	A	A	D	D	A

## 三、解答题

1. (6 分) 【解】由于  $z = \frac{(2+i)(1+2i)}{5} = i$ , ..... (2 分)

因此  $|z| = 1$ , ..... (2 分)

$\text{Arg } z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . ..... (2 分, 只有主值得 1 分)

2. (6 分) 【解】由于  $-8 = 8e^{\pi i}$ , ..... (2 分)

因此

$$\sqrt[3]{-8} = 2e^{\frac{1}{3}(\pi i + 2k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2 \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

即

$$2e^{\frac{\pi i}{3}} = 1 + \sqrt{3}i, \quad 2e^{\pi i} = -2, \quad 2e^{\frac{5\pi i}{3}} = 1 - \sqrt{3}i. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

3. (7 分) 【解】

直线  $C$  的方程为  $z = t + i, 0 \leq t \leq 2$ . ..... (2 分)

因此  $dz = dt, \bar{z} = t - i$ . ..... (2 分)

$$\int \bar{z} dz = \int_0^2 (t - i) dt \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \left( \frac{t^2}{2} - it \right) \Big|_0^2 = 2 - 2i. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

4. (7 分) 【解】由于  $e^z + 1$  处处解析, 因此 ..... (2 分)

$$\int_{-\pi i}^{\pi i} (e^z + 1) dz = (e^z + z) \Big|_{-\pi i}^{\pi i} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (e^{\pi i} + \pi i) - (e^{-\pi i} - \pi i) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

5. (7 分) 【解】 由于  $z + \cos 2z$  处处解析, 因此 ..... (2 分)

$$\int_0^\pi (z + \cos 2z) dz = \left( \frac{z^2}{2} + \frac{\sin 2z}{2} \right) \Big|_0^\pi \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \frac{\sin 2\pi}{2} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi^2}{2}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

6. (7 分) 【解】

由于  $f(z) = \frac{z-6}{z^2+9}$  在  $|z| \leq 4$  内的奇点为  $\pm 3i$ , ..... (2 分)

因此

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}[f(z), 3i] + \text{Res}[f(z), -3i]] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i \left[ \frac{z-6}{z+3i} \Big|_{z=3i} + \frac{z-6}{z-3i} \Big|_{z=-3i} \right] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i \left( \frac{3i-6}{6i} + \frac{-3i-6}{-6i} \right) = 2\pi i \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

7. (8 分) 【解】

由  $u_x = 2x + ay = v_y = -4y + 2x$  可知  $a = -4$ . ..... (2 分)

由

$$f'(z) = u_x + iv_x \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (-4y + 2x) + i(4x + 2y) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (2 + 4i)z. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

8. (10 分) 【解】

由于  $f(z)$  的奇点是 0, 2, 因此  $f(z)$  在这两个圆环域内都解析.

(1)

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} z^n. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

(2)

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{z}} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z}\right)^n \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{z^{n+1}} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{z^n}. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

9. (9 分)【解】

设  $\mathcal{L}[y] = Y$ , 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2, \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 2 + 2sY = \mathcal{L}[8e^{2t}] = \frac{8}{s-2}, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+2s)} = \frac{2}{s(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s}, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = e^{2t} - 1. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

10. (3 分)【解】例如

- 列出参数方程  $z = z(t)$  并将积分表达为  $t$  的积分形式;
- 单连通区域内解析函数的积分可以用原函数计算;
- 利用柯西-古萨基本定理;
- 利用复合闭路定理;
- 利用柯西积分公式;
- 利用高阶导数的柯西积分公式;
- 利用留数;
- 利用长大不等式.

# 2023 年 合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

2023 ~ 2024 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

## 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1.  $2^{-i}$  的辐角主值是\_\_\_\_\_.
2.  $2023 - i$  绕 0 逆时针旋转  $\frac{\pi}{2}$  后得到的复数是\_\_\_\_\_.
3. 如果函数  $f(z) = \frac{1}{(z+5)\sin z}$  可以在圆环域  $0 < |z| < R$  内作洛朗展开, 则  $R$  的最大值为\_\_\_\_\_.
4. 设  $f(z) = e^z - |z| \cos z$ , 则  $\oint_{|z|=1} f(z) dz =$ \_\_\_\_\_.
5. 函数  $f(t) = \cos(3t)$  的傅里叶变换为  $F(\omega) =$ \_\_\_\_\_.

## 二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 函数  $f(z) = \frac{1}{z}$  在下面哪个区域内有原函数? ( )  
A.  $0 < |z| < 1$  B.  $\operatorname{Re} z > 0$   
C.  $|z-1| > 2$  D.  $|z+1| + |z-1| > 4$
2. 设  $f(z) = \oint_{|\zeta|=4} \frac{\sin \zeta - \cos \zeta}{\zeta - z} d\zeta$ , 则  $f'(\pi) =$  ( )  
A. 0 B.  $2\pi i$  C.  $-2\pi i$  D.  $\pi i$
3. 幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$  的收敛半径是 ( ).  
A. 0 B.  $+\infty$  C.  $e$  D. 1
4. 下面哪个函数不能作为解析函数的虚部? ( )  
A.  $2x + 3y$  B.  $2x^2 + 3y^2$  C.  $x^2 - xy - y^2$  D.  $e^x \cos y$
5.  $z=0$  是函数  $f(z) = \frac{(e^z - 1)^2 z^3}{\sin z^8}$  的 ( ).  
A. 一阶极点 B. 本性奇点 C. 可去奇点 D. 三阶极点

## 三、解答题

1. (6 分) 计算  $(-1+i)^{10} - (-1-i)^{10}$ .
2. (6 分) 解方程  $\cos z = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ .

3. (6 分) 设  $C$  为有向曲线  $z(t) = \sin t + it, 0 \leq t \leq \pi$ , 求  $\int_C z e^z dz$ .
4. (10 分) 设  $C$  为正向圆周  $|z - 1| = 4$ , 求  $\oint_C \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz$ .
5. (10 分) 假设  $u(x, y) = x^3 + ax^2y + bxy^2 - 3y^3$  是调和函数, 求参数  $a, b$  以及  $v(x, y)$  使得  $v(0, 0) = 0$  且  $f(z) = u + iv$  是解析函数.
6. (10 分) 确定函数  $f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$  在圆环域  
 (1)  $|z| > 2$ ; (2)  $0 < |z - 2| < 1$   
 内的洛朗级数展开式.
7. (10 分) 设  $f(z) = \frac{e^z}{(z - \pi i)(z - 2\pi i)^2}$ . 求  $f(z)$  在有限复平面内的奇点以及  $\oint_{|z|=8} f(z) dz$ .
8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题
- $$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 3 \cos t, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$
9. (3 分) 复变函数  $f(z) = e^z$  和实变量函数  $g(x) = e^x$  的性质有什么相似和不同之处? 试举出三点.

# 2023 年合肥工业大学考试参考答案 (A)

2023 ~ 2024 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

## 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1.  $-\ln 2$ , 2.  $1 + 2023i$ , 3.  $\pi$ , 4.  $0$ , 5.  $\pi[\delta(t+3) + \delta(t-3)]$ .

## 二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	B	C	C	B	D

## 三、解答题

1. (6 分) 【解】由于

$$-1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$(-1 + i)^{10} = 32e^{\frac{30\pi i}{4}} = -32i, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$(-1 - i)^{10} = 32e^{-\frac{30\pi i}{4}} = 32i, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

故

$$(-1 + i)^{10} - (-1 - i)^{10} = -64i. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

也可以直接计算  $(-1 + i)^2 = -2i$  得到  $(-1 + i)^{10} = -32i$ .

2. (6 分) 【解】由

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

整理得到

$$e^{2iz} - \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{iz} + 1 = 0, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$e^{iz} = \frac{1}{2} \left[ \frac{3\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4} \right] = \sqrt{2} \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$iz = \operatorname{Ln} \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 + 2k\pi i \text{ 或 } \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \ln 2 + 2k\pi i,$$

$$z = 2k\pi \pm \frac{\ln 2}{2}i, k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

3. (6 分) 【解】 由于  $ze^z$  解析, 且  $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\int ze^z dz = (z-1)e^z + C, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

而曲线  $C$  的起点是 0, 终点是  $\pi i$ , 因此

$$\int_C ze^z dz = (z-1)e^z \Big|_0^{\pi i} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= (\pi i - 1)e^{\pi i} - (-1) = 2 - \pi i. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

4. (10 分) 【解】 由于  $f(z) = \frac{\sin z}{(z+i)(z-i)}$  在  $|z-1| \leq 4$  内的奇点为  $\pm i$ , 因此  $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}[f(z), -i] + \text{Res}[f(z), 2i]] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i \left[ \frac{\sin z}{z+i} \Big|_{z=-i} + \frac{\sin z}{z-i} \Big|_{z=2i} \right] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i \left[ \frac{\sin i}{2i} + \frac{\sin(-i)}{-2i} \right] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi \sin i = \pi i \left( e - \frac{1}{e} \right). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

5. (10 分) 【解】 由

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6x + 2ay + 2bx - 18y = 0$$

可知  $a = 9, b = -3$ . 由  $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

$$f'(z) = u_x - iu_y \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (3x^2 + 18xy - 3y^2) - i(9x^2 - 6xy - 9y^2) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (3 - 9i)(x + iy)^2 = (3 - 9i)z^2 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

可知

$$f(z) = (1 - 3i)z^3 + C, C \in \mathbb{R}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

由  $v(0, 0) = 0, f(0) = 0$  可知  $C = 0$ ,

$$v = -3x^3 + 3x^2y + 9xy^2 - y^3. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

其它解法: 由  $u_x = v_y = 3x^2 + 18xy - 3y^2$  得

$$v = 3x^2y + 9xy^2 - y^3 + \psi(x). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由  $v_x = -u_y = -(9x^2 - 6xy - 9y^2)$  得

$$\psi'(x) = -9x^2, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\psi(x) = -3x^3 + C, \quad v = -3x^3 + 3x^2y + 9xy^2 - y^3 + C. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由  $v(0, 0) = 0$  可知  $C = 0$ ,

$$v = -3x^3 + 3x^2y + 9xy^2 - y^3. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

**6. (10 分) 【解】** 由于  $f(z)$  的奇点是 1, 2, 因此  $f(z)$  在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^n}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{2}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

**7. (10 分) 【解】** 由于  $\pi i$  是分母的一阶零点, 因此它是  $f(z)$  的一阶极点.  $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

由于  $2\pi i$  是分母的二阶零点, 因此它是  $f(z)$  的二阶极点.  $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\text{Res}[f(z), \pi i] = \left. \frac{e^z}{(z-2\pi i)^2} \right|_{z=\pi i} = \frac{1}{\pi^2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{Res}[f(z), 2\pi i] = \left( \frac{e^z}{z-\pi i} \right)' \Big|_{z=2\pi i} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{e^z(z-\pi i-1)}{(z-\pi i)^2} \Big|_{z=2\pi i} = \frac{1-\pi i}{\pi^2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\oint_{|z|=8} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}[f(z), \pi i] + \text{Res}[f(z), 2\pi i]] = 2 + \frac{4}{\pi} i. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$



8. (9 分) 【解】 设  $\mathcal{L}[y] = Y$ , 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y - s - 2, \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2 Y - s - 2 + 4Y = 3\mathcal{L}[\cos t] = \frac{3s}{s^2 + 1}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+2}{s^2+4} + \frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{s^3+2s^2+4s+2}{(s^2+1)(s^2+4)} \\ &= \frac{2}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+1}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \sin 2t + \cos t. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

9. (3 分) 【解】 例如 (每项 1 分)

- $f'(z) = e^z, g'(x) = e^x$ .  $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- $e^z$  处处可导,  $e^x$  处处可导.  $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- 麦克劳林展开的系数相同.  $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- $e^z$  无界,  $e^x$  无界.  $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- $e^z$  是周期的,  $e^x$  不是.  $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$