

# 复变函数与积分变换

张神星

合肥工业大学

2022 年秋季学期

## 第四章 级数

**1, 3, 4, 6, 8, 11, 12, 15, 16, 19**

### 1 复数项级数

### 2 幂级数

### 3 泰勒级数

### 4 洛朗级数

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

## 定义

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

## 定义

- 设  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  是一个复数列.

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

## 定义

- 设  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  是一个复数列. 表达式  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  称为复数项**无穷级数**.



复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

## 定义

- 设  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  是一个复数列. 表达式  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  称为复数项**无穷级数**.
- 称

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

为该级数的**部分和**.

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

## 定义

- 设  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  是一个复数列. 表达式  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  称为复数项**无穷级数**.
- 称

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

为该级数的**部分和**.

- 如果部分和数列  $\{s_n\}_{n \geq 1}$  极限存在, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  **收敛**, 并记  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  为它的**和**.

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

## 定义

- 设  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  是一个复数列. 表达式  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  称为复数项**无穷级数**.
- 称

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

为该级数的**部分和**.

- 如果部分和数列  $\{s_n\}_{n \geq 1}$  极限存在, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  **收敛**, 并记  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  为它的**和**. 否则称之**发散**.

## 定理

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi \text{ 当且仅当 } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b.$$

# 复数项级数敛散性的判定

## 定理

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi \text{ 当且仅当 } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b.$$

## 证明.

设  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  的部分和为  $\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ , 设  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  的部分和为  $\tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ ,

# 复数项级数敛散性的判定

## 定理

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi \text{ 当且仅当 } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b.$$

## 证明.

设  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  的部分和为  $\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ , 设  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  的部分和为  $\tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  的部分和为

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + i\tau_n.$$

# 复数项级数敛散性的判定

## 定理

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi \text{ 当且仅当 } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b.$$

## 证明.

设  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  的部分和为  $\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ , 设  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  的部分和为  $\tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  的部分和为

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + i\tau_n.$$

由复数项级数的敛散性判定条件可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a + bi \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = b.$$

# 复数项级数敛散性的判定

## 定理

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi \text{ 当且仅当 } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b.$$

## 证明.

设  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  的部分和为  $\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ , 设  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  的部分和为  $\tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  的部分和为

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + i\tau_n.$$

由复数项级数的敛散性判定条件可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a + bi \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = b.$$

由此命题得证. 



如果  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛,

如果  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛, 从而

$$x_n, y_n \rightarrow 0,$$

如果  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛, 从而

$$x_n, y_n \rightarrow 0, z_n = x_n + iy_n \rightarrow 0.$$

如果  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛, 从而

$x_n, y_n \rightarrow 0, z_n = x_n + iy_n \rightarrow 0$ . 因此  $z_n \rightarrow 0$  是  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  收敛的必要条件.

# 复数项级数敛散性的判定

如果  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛, 从而  $x_n, y_n \rightarrow 0$ ,  $z_n = x_n + iy_n \rightarrow 0$ . 因此  $z_n \rightarrow 0$  是  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  收敛的必要条件.

## 定理

如果实数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots$$

收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  也收敛, 且  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ .

证明.

因为  $|x_n|, |y_n| \leq |z_n|$ , 由比较判别法可知实数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  绝对收敛, 从而收敛.

证明.

因为  $|x_n|, |y_n| \leq |z_n|$ , 由比较判别法可知实数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  绝对收敛, 从而收敛. 故  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  也收敛.

# 复数项级数敛散性的判定

证明.

因为  $|x_n|, |y_n| \leq |z_n|$ , 由比较判别法可知实数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  绝对收敛, 从而收敛. 故  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  也收敛.

由三角不等式可知

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$



# 复数项级数敛散性的判定

证明.

因为  $|x_n|, |y_n| \leq |z_n|$ , 由比较判别法可知实数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  绝对收敛, 从而收敛. 故  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  也收敛.

由三角不等式可知

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

两边同时取极限即得级数的不等式关系

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|,$$

# 复数项级数敛散性的判定

证明.

因为  $|x_n|, |y_n| \leq |z_n|$ , 由比较判别法可知实数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  绝对收敛, 从而收敛. 故  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  也收敛.

由三角不等式可知

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

两边同时取极限即得级数的不等式关系

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|,$$

其中第二个等式是因为绝对值函数  $|z|$  连续. ■

## 定义

## 定义

**1** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  绝对收敛.

## 定义

- 1 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  绝对收敛.
- 2 称收敛但不绝对收敛的级数条件收敛.

## 定义

- 1 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  绝对收敛.
- 2 称收敛但不绝对收敛的级数条件收敛.

## 定理

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

## 定义

- 1 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  绝对收敛.
- 2 称收敛但不绝对收敛的级数条件收敛.

## 定理

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

## 证明.

必要性由前一定理的证明已经知道,

## 定义

- 1 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  绝对收敛.
- 2 称收敛但不绝对收敛的级数条件收敛.

## 定理

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

## 证明.

必要性由前一定理的证明已经知道, 充分性由  $|z_n| \leq |x_n| + |y_n|$  可得. ■



# 绝对收敛和条件收敛

	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛
$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散
$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 条件收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛
$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性, 且不改变其和.

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性, 且不改变其和.

一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和, 但如果重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性, 且不改变其和.

一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和, 但如果重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

## 思考

什么时候  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ ?

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性, 且不改变其和.

一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和, 但如果重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

## 思考

什么时候  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ ?

## 答案.

当且仅当非零的  $z_n$  的辐角全都相同时成立.

## 例题：判断级数的敛散性

例

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i^n}{n}$  发散、条件收敛、还是绝对收敛？

## 例题：判断级数的敛散性

例

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i^n}{n}$  发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

由于实部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{2}{8} + \cdots$$

发散, 所以该级数发散.

## 例题: 判断级数的敛散性

例

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i^n}{n}$  发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解.

由于实部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{2}{8} + \cdots$$

发散, 所以该级数发散.

事实上, 它的虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

是条件收敛的.



## 例题：判断级数的敛散性

例

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{2^n} \right]$  发散、条件收敛、还是绝对收敛？

## 例题：判断级数的敛散性

例

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{2^n} \right]$  发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

因为实部级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  条件收敛,

## 例题：判断级数的敛散性

例

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{2^n} \right]$  发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.


因为实部级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  条件收敛, 虚部级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  绝对收敛,

## 例题：判断级数的敛散性

例

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{2^n} \right]$  发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.


因为实部级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  条件收敛, 虚部级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  绝对收敛, 所以该级数条件收敛. 

## 例题：判断级数的敛散性

例

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{2^n} \right]$  发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

因为实部级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  条件收敛, 虚部级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  绝对收敛, 所以该级数条件收敛. 

例

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$  发散、条件收敛、还是绝对收敛？

## 例题：复数项级数敛散性

解.

因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

## 例题: 复数项级数敛散性

解.

因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

均条件收敛,

## 例题：复数项级数敛散性

解.

因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

均条件收敛, 所以原级数条件收敛.



## 例题: 复数项级数敛散性 \*

对  $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$  逐项积分可得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

## 例题: 复数项级数敛散性 \*

对  $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$  逐项积分可得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

可以证明  $x = 1$  时该级数的余项趋于 0, 因此

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

## 例题: 复数项级数敛散性 \*

对  $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$  逐项积分可得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

可以证明  $x = 1$  时该级数的余项趋于 0, 因此

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

同理

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(1+x)|_{x=1} = \ln 2.$$

## 例题: 复数项级数敛散性 \*

对  $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$  逐项积分可得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

可以证明  $x = 1$  时该级数的余项趋于 0, 因此

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

同理

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(1+x)|_{x=1} = \ln 2.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi i}{4}.$$

## 例题: 复数项级数敛散性 \*

对  $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$  逐项积分可得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

可以证明  $x = 1$  时该级数的余项趋于 0, 因此

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

同理

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln(1+x)|_{x=1} = \ln 2.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi i}{4}.$$

事实上, 左侧是复变函数  $-\ln(1+z)$  在  $z = -i$  处的泰勒级数.

## 例题：判断级数的敛散性

例

级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}$  发散、条件收敛、还是绝对收敛？

## 例题：判断级数的敛散性

例

级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}$  发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

因为  $\left| \frac{(8i)^n}{n!} \right| = \frac{8^n}{n!}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!} = e^8$  收敛, 所以该级数绝对收敛. ■

## 例题：判断级数的敛散性

例

级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}$  发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

因为  $\left| \frac{(8i)^n}{n!} \right| = \frac{8^n}{n!}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!} = e^8$  收敛, 所以该级数绝对收敛. ■

实际上, 它的实部和虚部级数分别为

$$1 - \frac{8^2}{2!} + \frac{8^4}{4!} - \frac{8^6}{6!} + \cdots = \cos 8, \quad 8 - \frac{8^3}{3!} + \frac{8^5}{5!} - \frac{8^7}{7!} + \cdots = \sin 8,$$



## 例题: 判断级数的敛散性

例

级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}$  发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解.

因为  $\left| \frac{(8i)^n}{n!} \right| = \frac{8^n}{n!}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!} = e^8$  收敛, 所以该级数绝对收敛. ■

实际上, 它的实部和虚部级数分别为

$$1 - \frac{8^2}{2!} + \frac{8^4}{4!} - \frac{8^6}{6!} + \cdots = \cos 8, \quad 8 - \frac{8^3}{3!} + \frac{8^5}{5!} - \frac{8^7}{7!} + \cdots = \sin 8,$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!} = \cos 8 + i \sin 8 = e^{8i}.$$

## 级数敛散性判别法

对于正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , 我们有若干判别法来判断它的敛散性.  
由此可得: 设

# 级数敛散性判别法

对于正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , 我们有若干判别法来判断它的敛散性.

由此可得: 设

1 达朗贝尔判别法 (比值法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$  (假设存在);

## 级数敛散性判别法

对于正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , 我们有若干判别法来判断它的敛散性.

由此可得: 设

- 1 达朗贝尔判别法 (比值法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$  (假设存在);
- 2 柯西判别法 (根式法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (假设存在);

# 级数敛散性判别法

对于正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , 我们有若干判别法来判断它的敛散性.

由此可得: 设

- 1 达朗贝尔判别法 (比值法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$  (假设存在);
- 2 柯西判别法 (根式法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (假设存在);
- 3 柯西-Hadamard 判别法:  $\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (所有子数列中极限的最大值).

# 级数敛散性判别法

对于正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , 我们有若干判别法来判断它的敛散性.

由此可得: 设

1 达朗贝尔判别法 (比值法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$  (假设存在);

2 柯西判别法 (根式法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (假设存在);

3 柯西-Hadamard 判别法:  $\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (所有子数列中极限的最大值).

则当  $\lambda < 1$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  绝对收敛;

# 级数敛散性判别法

对于正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , 我们有若干判别法来判断它的敛散性.

由此可得: 设

1 达朗贝尔判别法 (比值法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$  (假设存在);

2 柯西判别法 (根式法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (假设存在);

3 柯西-Hadamard 判别法:  $\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (所有子数列中极限的最大值).

则当  $\lambda < 1$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  绝对收敛; 当  $\lambda > 1$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  发散.

# 级数敛散性判别法

对于正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , 我们有若干判别法来判断它的敛散性.

由此可得: 设

1 达朗贝尔判别法 (比值法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$  (假设存在);

2 柯西判别法 (根式法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (假设存在);

3 柯西-Hadamard 判别法:  $\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (所有子数列中极限的最大值).

则当  $\lambda < 1$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  绝对收敛; 当  $\lambda > 1$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  发散. 其证明主要是通过将该级数与相应的等比级数做比较得到.



## 级数敛散性判别法

对于正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , 我们有若干判别法来判断它的敛散性.

由此可得: 设

- 1 达朗贝尔判别法 (比值法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$  (假设存在);
- 2 柯西判别法 (根式法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (假设存在);
- 3 柯西-Hadamard 判别法:  $\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (所有子数列中极限的最大值).

则当  $\lambda < 1$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  绝对收敛; 当  $\lambda > 1$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  发散. 其证明主要是通过将该级数与相应的等比级数做比较得到. 如果  $\lambda = 1$ , 则无法使用该方法判断.

# 级数敛散性判别法

对于正项级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ , 我们有若干判别法来判断它的敛散性.

由此可得: 设

- 1 达朗贝尔判别法 (比值法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$  (假设存在);
- 2 柯西判别法 (根式法):  $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (假设存在);
- 3 柯西-Hadamard 判别法:  $\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$  (所有子数列中极限的最大值).

则当  $\lambda < 1$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  绝对收敛; 当  $\lambda > 1$  时,  $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$  发散. 其证明主要是通过将该级数与相应的等比级数做比较得到. 如果  $\lambda = 1$ , 则无法使用该方法判断.

另解.

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{8}{n+1} \right| = 0$ , 所以该级数绝对收敛. ■

1 复数项级数

2 幂级数

3 泰勒级数

4 洛朗级数

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

## 定义

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

## 定义

- 设  $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$  是一个复变函数列, 其中每一项都在区域  $D$  上有定义.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

## 定义

- 设  $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$  是一个复变函数列, 其中每一项都在区域  $D$  上有定义. 表达式  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  称为复变函数项级数.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

## 定义

- 设  $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$  是一个复变函数列, 其中每一项都在区域  $D$  上有定义. 表达式  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  称为复变函数项级数.
- 对于  $z_0 \in D$ , 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  在  $z_0$  处收敛, 相应级数的值称为它的和.



复变函数级数与实变函数级数也是类似的.

## 定义

- 设  $\{f_n(z)\}_{n \geq 1}$  是一个复变函数列, 其中每一项都在区域  $D$  上有定义. 表达式  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  称为复变函数项级数.
- 对于  $z_0 \in D$ , 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$  收敛, 则称  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  在  $z_0$  处收敛, 相应级数的值称为它的和.
- 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$  在  $D$  上处处收敛, 则它的和是一个函数, 称为和函数.

## 定义

称形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$  的函数项级数为**幂级数**.

## 定义

称形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的函数项级数为**幂级数**.

我们只需要考虑  $a=0$  情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

## 定义

称形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的函数项级数为**幂级数**.

我们只需要考虑  $a=0$  情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数, 我们也有阿贝尔定理.

## 定义

称形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的函数项级数为**幂级数**.

我们只需要考虑  $a=0$  情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数, 我们也有阿贝尔定理.

## 定理 (阿贝尔定理)

## 定义

称形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的函数项级数为**幂级数**.

我们只需要考虑  $a=0$  情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数, 我们也有阿贝尔定理.

## 定理 (阿贝尔定理)

- 1** 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在  $z_0 \neq 0$  处收敛, 那么对任意  $|z| < |z_0|$  的  $z$ , 该级数必绝对收敛.

## 定义

称形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的函数项级数为**幂级数**.

我们只需要考虑  $a=0$  情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数, 我们也有阿贝尔定理.

## 定理 (阿贝尔定理)

- 1 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在  $z_0 \neq 0$  处收敛, 那么对任意  $|z| < |z_0|$  的  $z$ , 该级数必绝对收敛.
- 2 如果  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  在  $z_0 \neq 0$  处发散, 那么对任意  $|z| > |z_0|$  的  $z$ , 该级数必发散.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域.



从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的**确界原理**: 实数集的子集  $S$  若有上界, 则一定有最小的上界, 即**上确界**  $\sup S$ .

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的**确界原理**: 实数集的子集  $S$  若有上界, 则一定有最小的上界, 即**上确界**  $\sup S$ . 没有上确界时记  $\sup S = +\infty$ .

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的**确界原理**: 实数集的子集  $S$  若有上界, 则一定有最小的上界, 即**上确界**  $\sup S$ . 没有上确界时记  $\sup S = +\infty$ .

设

$$R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛} \right\}.$$

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的**确界原理**: 实数集的子集  $S$  若有上界, 则一定有最小的上界, 即**上确界**  $\sup S$ . 没有上确界时记  $\sup S = +\infty$ .

设

$$R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛} \right\}.$$

- 如果  $R = +\infty$ , 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的**确界原理**: 实数集的子集  $S$  若有上界, 则一定有最小的上界, 即**上确界**  $\sup S$ . 没有上确界时记  $\sup S = +\infty$ .

设

$$R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛} \right\}.$$

- 如果  $R = +\infty$ , 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.
- 如果  $0 < R < +\infty$ , 那么该幂级数在  $|z| < R$  上绝对收敛, 在  $|z| > R$  上发散.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的**确界原理**: 实数集的子集  $S$  若有上界, 则一定有最小的上界, 即**上确界**  $\sup S$ . 没有上确界时记  $\sup S = +\infty$ .

设

$$R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛} \right\}.$$

- 如果  $R = +\infty$ , 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.
- 如果  $0 < R < +\infty$ , 那么该幂级数在  $|z| < R$  上绝对收敛, 在  $|z| > R$  上发散.
- 如果  $R = 0$ , 那么该幂级数仅在  $z = 0$  处收敛, 对任意  $z \neq 0$  都发散.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的**确界原理**: 实数集的子集  $S$  若有上界, 则一定有最小的上界, 即**上确界**  $\sup S$ . 没有上确界时记  $\sup S = +\infty$ .

设

$$R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛} \right\}.$$

- 如果  $R = +\infty$ , 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.
- 如果  $0 < R < +\infty$ , 那么该幂级数在  $|z| < R$  上绝对收敛, 在  $|z| > R$  上发散.
- 如果  $R = 0$ , 那么该幂级数仅在  $z = 0$  处收敛, 对任意  $z \neq 0$  都发散.

我们称  $R$  为该幂级数的**收敛半径**.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的**确界原理**: 实数集的子集  $S$  若有上界, 则一定有最小的上界, 即**上确界**  $\sup S$ . 没有上确界时记  $\sup S = +\infty$ .

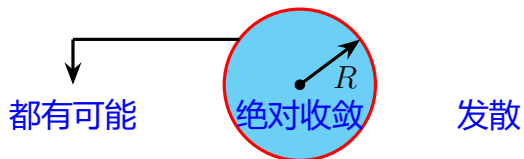
设

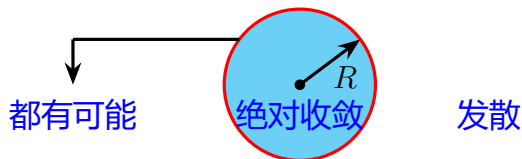
$$R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛} \right\}.$$

- 如果  $R = +\infty$ , 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.
- 如果  $0 < R < +\infty$ , 那么该幂级数在  $|z| < R$  上绝对收敛, 在  $|z| > R$  上发散.
- 如果  $R = 0$ , 那么该幂级数仅在  $z = 0$  处收敛, 对任意  $z \neq 0$  都发散.

我们称  $R$  为该幂级数的**收敛半径**. 这也等同于实幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| z^n$  的收敛半径.

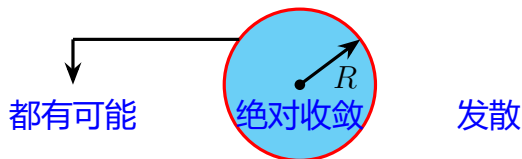






证明.

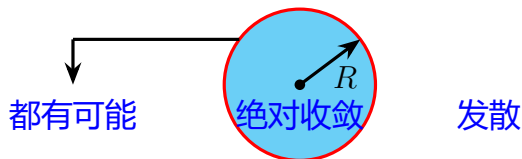
2 可由 1 的逆否命题得到.



证明.

**2**可由**1**的逆否命题得到.

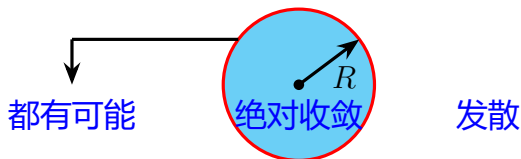
我们来证明**1**. 因为级数收敛, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$ .



证明.

**2**可由**1**的逆否命题得到.

我们来证明**1**. 因为级数收敛, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$ . 于是存在  $M$  使得  $|c_n z_0^n| < M$ .

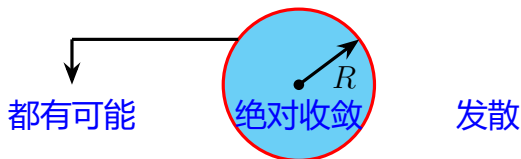


证明.

**2**可由**1**的逆否命题得到.

我们来证明**1**. 因为级数收敛, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$ . 于是存在  $M$  使得  $|c_n z_0^n| < M$ . 如果  $|z| < |z_0|$ , 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$$

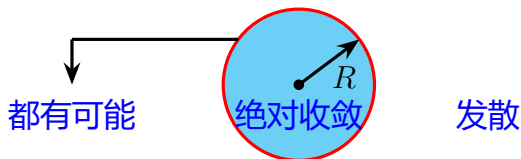


证明.

**2**可由**1**的逆否命题得到.

我们来证明**1**. 因为级数收敛, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$ . 于是存在  $M$  使得  $|c_n z_0^n| < M$ . 如果  $|z| < |z_0|$ , 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = \frac{M}{1 - |z/z_0|}.$$



证明.

**2**可由**1**的逆否命题得到.

我们来证明**1**. 因为级数收敛, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$ . 于是存在  $M$  使得  $|c_n z_0^n| < M$ . 如果  $|z| < |z_0|$ , 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = \frac{M}{1 - |z/z_0|}.$$

所以级数在  $z$  处绝对收敛.

## 例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$  的收敛半径与和函数.



## 例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$  的收敛半径与和函数.

解.

如果幂级数收敛, 则由  $z^n \rightarrow 0$  可知  $|z| < 1$ .

## 例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$  的收敛半径与和函数.

解.

如果幂级数收敛, 则由  $z^n \rightarrow 0$  可知  $|z| < 1$ . 当  $|z| < 1$  时, 和函数为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

## 例题: 收敛半径的计算


例

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$  的收敛半径与和函数.

解.

如果幂级数收敛, 则由  $z^n \rightarrow 0$  可知  $|z| < 1$ . 当  $|z| < 1$  时, 和函数为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

因此收敛半径为 1. 

由正项级数的相应判别法容易得到公式  $R = \frac{1}{r}$ , 其中

由正项级数的相应判别法容易得到公式  $R = \frac{1}{r}$ , 其中

**1** 达朗贝尔公式 (比值法):  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$  (假设存在);

由正项级数的相应判别法容易得到公式  $R = \frac{1}{r}$ , 其中

1 达朗贝尔公式 (比值法):  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$  (假设存在);

2 柯西公式 (根式法):  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  (假设存在);

由正项级数的相应判别法容易得到公式  $R = \frac{1}{r}$ , 其中

1 达朗贝尔公式 (比值法):  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$  (假设存在);

2 柯西公式 (根式法):  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  (假设存在);

3 柯西-Hadamard 公式:  $r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ .

由正项级数的相应判别法容易得到公式  $R = \frac{1}{r}$ , 其中

1 达朗贝尔公式 (比值法):  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$  (假设存在);

2 柯西公式 (根式法):  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$  (假设存在);

3 柯西-Hadamard 公式:  $r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ .

如果  $r = 0$  或  $+\infty$ , 则  $R = +\infty$  或  $0$ .



## 例题：收敛半径的计算

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$  的收敛半径, 并讨论  $z = 0, 2$  的情形.

## 例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$  的收敛半径, 并讨论  $z=0, 2$  的情形.

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$  可知收敛半径为 1.

## 例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$  的收敛半径, 并讨论  $z=0, 2$  的情形.

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$  可知收敛半径为 1.

当  $z=2$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.

## 例题: 收敛半径的计算


例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$  的收敛半径, 并讨论  $z=0, 2$  的情形.

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$  可知收敛半径为 1.

当  $z=2$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.

当  $z=0$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  收敛. 

## 例题: 收敛半径的计算


例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$  的收敛半径, 并讨论  $z=0, 2$  的情形.

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$  可知收敛半径为 1.

当  $z=2$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.

当  $z=0$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  收敛. 

事实上, 收敛圆周上既可能处处收敛, 也可能处处发散, 也可能既有收敛的点也有发散的点.

## 例题：收敛半径的计算

例

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in)z^n$  的收敛半径.

## 例题：收敛半径的计算

例

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$  的收敛半径.

解.

我们有  $c_n = \cos(in) = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$ .

## 例题: 收敛半径的计算


例

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in)z^n$  的收敛半径.

解.

我们有  $c_n = \cos(in) = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$ . 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} + e^{-n-1}}{e^n + e^{-n}} = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2n-2}}{1 + e^{-2n}} = e$$

可知收敛半径为  $\frac{1}{e}$ . 



## 例题：收敛半径的计算

例

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$  的收敛半径.

## 例题: 收敛半径的计算


例

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$  的收敛半径.

解.

由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = |1+i| = \sqrt{2}$$

可知收敛半径为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 

## 例题：收敛半径的计算 \*

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$  的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形, 其中  $p \in \mathbb{R}$ .

## 例题: 收敛半径的计算 \*

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$  的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形, 其中  $p \in \mathbb{R}$ .

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = 1$  可知收敛半径为 1.

## 例题: 收敛半径的计算 \*

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$  的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形, 其中  $p \in \mathbb{R}$ .

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = 1$  可知收敛半径为 1. 设  $|z| = 1$ .

## 例题: 收敛半径的计算 \*

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$  的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形, 其中  $p \in \mathbb{R}$ .

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = 1$  可知收敛半径为 1. 设  $|z| = 1$ .

■ 若  $p > 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛,

## 例题: 收敛半径的计算 \*

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$  的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形, 其中  $p \in \mathbb{R}$ .

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = 1$  可知收敛半径为 1. 设  $|z| = 1$ .

■ 若  $p > 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛, 原级数在收敛圆周上处处绝对收敛.

## 例题: 收敛半径的计算 \*

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$  的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形, 其中  $p \in \mathbb{R}$ .

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = 1$  可知收敛半径为 1. 设  $|z| = 1$ .

- 若  $p > 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛, 原级数在收敛圆周上处处绝对收敛.
- 若  $p \leq 0$ ,  $\left| \frac{z^n}{n^p} \right| = \frac{1}{n^p} \not\rightarrow 0$ ,



## 例题: 收敛半径的计算 \*

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$  的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形, 其中  $p \in \mathbb{R}$ .

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = 1$  可知收敛半径为 1. 设  $|z| = 1$ .

- 若  $p > 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛, 原级数在收敛圆周上处处绝对收敛.
- 若  $p \leq 0$ ,  $\left| \frac{z^n}{n^p} \right| = \frac{1}{n^p} \not\rightarrow 0$ , 原级数在收敛圆周上处处发散.

## 例题: 收敛半径的计算 \*

回忆狄利克雷判别法: 若  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  部分和有界, 实数项数列  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  单调趋于 0, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

## 例题: 收敛半径的计算 \*

回忆狄利克雷判别法: 若  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  部分和有界, 实数项数列  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  单调趋于 0, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

续解.

## 例题: 收敛半径的计算 \*

回忆狄利克雷判别法: 若  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  部分和有界, 实数项数列  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  单调趋于 0, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

续解.

■ 若  $0 < p \leq 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  发散,

## 例题: 收敛半径的计算 \*

回忆狄利克雷判别法: 若  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  部分和有界, 实数项数列  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  单调趋于 0, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

续解.

■ 若  $0 < p \leq 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  发散, 而在收敛圆周上其它点  $z \neq 1$  处,

$$|z + z^2 + \cdots + z^n| = \left| \frac{z(1 - z^n)}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|}$$

有界, 数列  $\{n^{-p}\}_{n \geq 1}$  单调趋于 0,

## 例题: 收敛半径的计算 \*

回忆狄利克雷判别法: 若  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  部分和有界, 实数项数列  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  单调趋于 0, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

续解.

■ 若  $0 < p \leq 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  发散, 而在收敛圆周上其它点  $z \neq 1$  处,

$$|z + z^2 + \cdots + z^n| = \left| \frac{z(1 - z^n)}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|}$$

有界, 数列  $\{n^{-p}\}_{n \geq 1}$  单调趋于 0, 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$  收敛.

## 例题: 收敛半径的计算 \*

回忆狄利克雷判别法: 若  $\{a_n\}_{n \geq 1}$  部分和有界, 实数项数列  $\{b_n\}_{n \geq 1}$  单调趋于 0, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  收敛.

续解.

■ 若  $0 < p \leq 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  发散, 而在收敛圆周上其它点  $z \neq 1$  处,

$$|z + z^2 + \cdots + z^n| = \left| \frac{z(1 - z^n)}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|}$$

有界, 数列  $\{n^{-p}\}_{n \geq 1}$  单调趋于 0, 因此  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$  收敛. 故该级数在  $z = 1$  发散, 在收敛圆周上其它点收敛. ■

## 定理

设幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R_1, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, |z| < R_2.$$



## 定理

设幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R_1, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, |z| < R_2.$$

那么当  $|z| < R = \min\{R_1, R_2\}$  时,

$$(f \pm g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, \quad (fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

## 定理

设幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R_1, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, |z| < R_2.$$

那么当  $|z| < R = \min\{R_1, R_2\}$  时,

$$(f \pm g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, \quad (fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

注意当  $R_1 = R_2$  时,  $f \pm g$  或  $fg$  的收敛半径可以比  $f, g$  的大.

## 定理

设幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R_1, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, |z| < R_2.$$

那么当  $|z| < R = \min\{R_1, R_2\}$  时,

$$(f \pm g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, \quad (fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

注意当  $R_1 = R_2$  时,  $f \pm g$  或  $fg$  的收敛半径可以比  $f, g$  的大.  
在某些情形下, 我们只关心  $fg$  的某一幂次系数,

## 定理

设幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R_1, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, |z| < R_2.$$

那么当  $|z| < R = \min\{R_1, R_2\}$  时,

$$(f \pm g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, \quad (fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

注意当  $R_1 = R_2$  时,  $f \pm g$  或  $fg$  的收敛半径可以比  $f, g$  的大.  
在某些情形下, 我们只关心  $fg$  的某一幂次系数, 此时我们便可以用上述表达式来计算特定幂次系数.

## 定理

设幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R,$$

设函数  $\varphi(z)$  在  $|z| < r$  上解析且  $|\varphi(z)| < R$ ,

## 定理

设幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R,$$

设函数  $\varphi(z)$  在  $|z| < r$  上解析且  $|\varphi(z)| < R$ , 那么当  $|z| < r$  时,

$$f[\varphi(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\varphi(z)]^n.$$

## 定理

设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径为  $R$ , 则在  $|z| < R$  上:

## 定理

设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径为  $R$ , 则在  $|z| < R$  上:

1 它的和函数  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  解析,



## 定理

设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径为  $R$ , 则在  $|z| < R$  上:

1 它的和函数  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  解析,

2  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ ,

## 定理

设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径为  $R$ , 则在  $|z| < R$  上:

1 它的和函数  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  解析,

2  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ ,

3  $\int_0^z f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}.$

## 定理

设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  的收敛半径为  $R$ , 则在  $|z| < R$  上:

1 它的和函数  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  解析,

2  $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$ ,

3  $\int_0^z f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$ .

也就是说, 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析, 且可以逐项求导, 逐项积分.

由于和函数在  $|z| > R$  上没有定义, 因此在  $|z| = R$  上处处不解析.

由于和函数在  $|z| > R$  上没有定义, 因此在  $|z| = R$  上处处不解析.

如果函数  $g(z)$  在该幂级数收敛的点处和  $f(z)$  均相同, 则  $g(z)$  也**一定在收敛圆周上有奇点**.

由于和函数在  $|z| > R$  上没有定义, 因此在  $|z| = R$  上处处不解析.

如果函数  $g(z)$  在该幂级数收敛的点处和  $f(z)$  均相同, 则  $g(z)$  也**一定在收敛圆周上有奇点**. 这是因为一旦  $g(z)$  在收敛圆周上处处解析, 该和函数就可以在一个半径更大的圆域上作泰勒展开.

## 例题：幂级数展开

例

把函数  $\frac{1}{z-b}$  表成形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的幂级数, 其中  $a \neq b$ .

## 例题：幂级数展开

例

把函数  $\frac{1}{z-b}$  表成形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的幂级数, 其中  $a \neq b$ .

解.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a) - (b-a)}$$



## 例题：幂级数展开

例

把函数  $\frac{1}{z-b}$  表成形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的幂级数, 其中  $a \neq b$ .

解.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a) - (b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{b-a}}.$$

## 例题: 幂级数展开

例

把函数  $\frac{1}{z-b}$  表成形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的幂级数, 其中  $a \neq b$ .

解.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a) - (b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{b-a}}.$$

当  $|z-a| < |b-a|$  时,

## 例题：幂级数展开

例

把函数  $\frac{1}{z-b}$  表成形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的幂级数, 其中  $a \neq b$ .

解.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a) - (b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{b-a}}.$$

当  $|z-a| < |b-a|$  时,  $\frac{1}{z-b} = \frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{b-a} \right)^n,$

## 例题：幂级数展开

例

把函数  $\frac{1}{z-b}$  表成形如  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$  的幂级数, 其中  $a \neq b$ .

解.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a) - (b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{b-a}}.$$

当  $|z-a| < |b-a|$  时,  $\frac{1}{z-b} = \frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z-a}{b-a} \right)^n$ , 即

$$\frac{1}{z-b} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}, \quad |z-a| < |b-a|.$$

## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1}$  的收敛半径与和函数.

## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1}$  的收敛半径与和函数.

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1} = 2$  可知收敛半径为  $\frac{1}{2}$ .

## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1}$  的收敛半径与和函数.

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1} = 2$  可知收敛半径为  $\frac{1}{2}$ . 当  $|z| < \frac{1}{2}$  时,  $|2z| < 1$ .

## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1}$  的收敛半径与和函数.

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1} = 2$  可知收敛半径为  $\frac{1}{2}$ . 当  $|z| < \frac{1}{2}$  时,  $|2z| < 1$ . 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$$



## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1}$  的收敛半径与和函数.

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1} = 2$  可知收敛半径为  $\frac{1}{2}$ . 当  $|z| < \frac{1}{2}$  时,  $|2z| < 1$ . 从而

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \\ &= \frac{2}{1 - 2z} - \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{(1 - 2z)(1 - z)}. \end{aligned}$$

## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$  的收敛半径与和函数.

## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$  的收敛半径与和函数.

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$  可知收敛半径为 1.

## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$  的收敛半径与和函数.

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$  可知收敛半径为 1. 当  $|z| < 1$  时,

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$  的收敛半径与和函数.

解.

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$  可知收敛半径为 1. 当  $|z| < 1$  时,

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \left( -\frac{1}{z-1} \right)' = \frac{1}{(z-1)^2}, \quad |z| < 1. \quad \blacksquare$$

### 练习

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  的和函数.

### 练习

求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$  的和函数.

答案.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln(1 - z), \quad |z| < 1.$$

例

求  $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz.$



## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz.$$

注意这里并不能逐项积分, 因为该级数并不是幂级数, 它的和函数不解析.

## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz.$$

注意这里并不能逐项积分, 因为该级数并不是幂级数, 它的和函数不解析.

解.

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  在  $|z| < 1$  收敛,

## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz.$$

注意这里并不能逐项积分, 因为该级数并不是幂级数, 它的和函数不解析.

解.

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  在  $|z| < 1$  收敛, 它的和函数解析.

## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz.$$

注意这里并不能逐项积分, 因为该级数并不是幂级数, 它的和函数不解析.

解.

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  在  $|z| < 1$  收敛, 它的和函数解析. 因此

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z} dz + \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz$$

## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz.$$

注意这里并不能逐项积分, 因为该级数并不是幂级数, 它的和函数不解析.

解.

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  在  $|z| < 1$  收敛, 它的和函数解析. 因此

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz &= \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z} dz + \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz \\ &= 2\pi i + 0 = 2\pi i. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

另解.

当  $|z| < \frac{1}{2}$  时,  $\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$  收敛且

$$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{z^{-1}}{1-z} = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}.$$

## 典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

另解.

当  $|z| < \frac{1}{2}$  时,  $\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$  收敛且

$$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{z^{-1}}{1-z} = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}.$$

当  $|z| < \frac{1}{2}$  时,  $|2z| < 1$ .

另解.

当  $|z| < \frac{1}{2}$  时,  $\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$  收敛且

$$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{z^{-1}}{1-z} = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}.$$

当  $|z| < \frac{1}{2}$  时,  $|2z| < 1$ . 故

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \right) dz = 2\pi i. \quad \blacksquare$$



1 复数项级数

2 幂级数

3 泰勒级数

4 洛朗级数

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在 $\text{泰勒级数}$ 展开?

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在**泰勒级数**展开?

在实变函数中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在**泰勒级数**展开?

在实变函数中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在**泰勒级数**展开?

在实变函数中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它处处可导, 但是它在 0 处的各阶导数都是 0.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在**泰勒级数**展开?

在实变函数中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它处处可导, 但是它在 0 处的各阶导数都是 0. 因此它的泰勒级数是 0, 余项恒为  $f(x)$ .

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在**泰勒级数**展开?

在实变函数中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它处处可导, 但是它在 0 处的各阶导数都是 0. 因此它的泰勒级数是 0, 余项恒为  $f(x)$ . 所以它的麦克劳林级数除 0 外均不收敛到原函数.



而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的区间也很难从函数本身读出.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的区间也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的区间也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

这可以从  $x = -1$  是奇点看出.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的区间也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

这可以从  $x = -1$  是奇点看出. 而

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad |x| < 1$$

却并没有奇点.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的区间也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

这可以从  $x = -1$  是奇点看出. 而

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad |x| < 1$$

却并没有奇点. 为什么它的麦克劳林级数成立的开区间也是  $(-1, 1)$ ?

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的区间也很难从函数本身读出. 例如

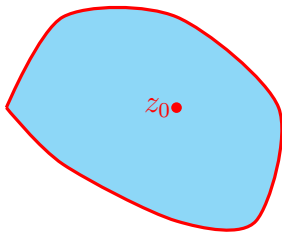
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

这可以从  $x = -1$  是奇点看出. 而

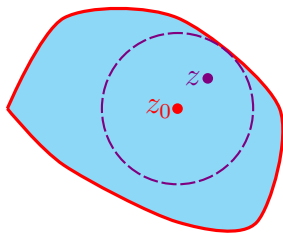
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad |x| < 1$$

却并没有奇点. 为什么它的麦克劳林级数成立的开区间也是  $(-1, 1)$ ? 这个问题在本节可以得到回答.

设函数  $f(z)$  在区域  $D$  解析,  $z_0 \in D$ .

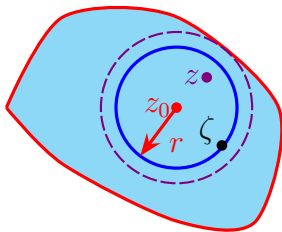


设函数  $f(z)$  在区域  $D$  解析,  $z_0 \in D$ . 设  $|z - z_0|$  小于  $z_0$  到  $D$  边界的距离  $d$ , 则存在  $|z - z_0| < r < d$ .



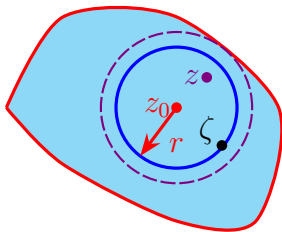


设函数  $f(z)$  在区域  $D$  解析,  $z_0 \in D$ . 设  $|z - z_0|$  小于  $z_0$  到  $D$  边界的距离  $d$ , 则存在  $|z - z_0| < r < d$ . 设  $K : |\zeta - z_0| = r$ , 则  $K$  和它的内部包含在  $D$  中.



设函数  $f(z)$  在区域  $D$  解析,  $z_0 \in D$ . 设  $|z - z_0|$  小于  $z_0$  到  $D$  边界的距离  $d$ , 则存在  $|z - z_0| < r < d$ . 设  $K: |\zeta - z_0| = r$ , 则  $K$  和它的内部包含在  $D$  中. 由于  $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$ , 因此

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$



故

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

故

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_K f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

故

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_K f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n + R_N(z), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_K f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n + R_N(z), \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + R_N(z),
 \end{aligned}$$

其中

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K f(\zeta) \left[ \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] d\zeta.$$

由于  $f(\zeta)$  在  $D \supseteq K$  上解析, 从而在  $K$  上连续且有界.

由于  $f(\zeta)$  在  $D \supseteq K$  上解析, 从而在  $K$  上连续且有界. 设  $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K$ ,



由于  $f(\zeta)$  在  $D \supseteq K$  上解析, 从而在  $K$  上连续且有界. 设  $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K$ , 那么

$$|R_N(z)| \leq \frac{M}{2\pi} \oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| ds$$

由于  $f(\zeta)$  在  $D \supseteq K$  上解析, 从而在  $K$  上连续且有界. 设  $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K$ , 那么

$$\begin{aligned} |R_N(z)| &\leq \frac{M}{2\pi} \oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| ds \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \oint_K \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{1}{\zeta - z} \cdot \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^N \right| ds \end{aligned}$$

由于  $f(\zeta)$  在  $D \supseteq K$  上解析, 从而在  $K$  上连续且有界. 设  $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K$ , 那么

$$\begin{aligned} |R_N(z)| &\leq \frac{M}{2\pi} \oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| ds \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \oint_K \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{1}{\zeta - z} \cdot \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^N \right| ds \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{r - |z - z_0|} \cdot \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^N \cdot 2\pi r \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

由于  $f(\zeta)$  在  $D \supseteq K$  上解析, 从而在  $K$  上连续且有界. 设  $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K$ , 那么

$$\begin{aligned} |R_N(z)| &\leq \frac{M}{2\pi} \oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| ds \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \oint_K \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{1}{\zeta - z} \cdot \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^N \right| ds \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{r - |z - z_0|} \cdot \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^N \cdot 2\pi r \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < d.$$

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此解析函数的泰勒展开成立的圆域不包含奇点.

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此解析函数的泰勒展开成立的圆域不包含奇点. 由此可知, 解析函数在  $z_0$  处泰勒展开成立的圆域的最大半径是  $z_0$  到最近奇点的距离.

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此解析函数的泰勒展开成立的圆域不包含奇点. 由此可知, 解析函数在  $z_0$  处泰勒展开成立的圆域的最大半径是  $z_0$  到最近奇点的距离.

需要注意的是, 泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的.

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此解析函数的泰勒展开成立的圆域不包含奇点. 由此可知, 解析函数在  $z_0$  处泰勒展开成立的圆域的最大半径是  $z_0$  到最近奇点的距离.

需要注意的是, 泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的. 而且泰勒展开等式也可能在这个圆域之外的点成立.



由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此解析函数的泰勒展开成立的圆域不包含奇点. 由此可知, 解析函数在  $z_0$  处泰勒展开成立的圆域的最大半径是  $z_0$  到最近奇点的距离.

需要注意的是, 泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的. 而且泰勒展开等式也可能在这个圆域之外的点成立. 例如

$$f(z) = \begin{cases} e^z, & z \neq 1; \\ 0, & z = 1 \end{cases}$$

的麦克劳林展开为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1.$$

现在我们来考虑  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ .

现在我们来分析  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ . 它的奇点为  $\pm i$ , 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1.

现在我们来分析  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ . 它的奇点为  $\pm i$ , 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  的麦克劳林展开成立的开区间是  $(-1, 1)$ .

现在我们来分析  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ . 它的奇点为  $\pm i$ , 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  的麦克劳林展开成立的开区间是  $(-1, 1)$ .

若  $f(z)$  在  $z_0$  附近展开为  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ ,

现在我们来分析  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ . 它的奇点为  $\pm i$ , 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  的麦克劳林展开成立的开区间是  $(-1, 1)$ .

若  $f(z)$  在  $z_0$  附近展开为  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ , 则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!c_k}{(k-n)!} (z-z_0)^{k-n} \Big|_{z=z_0} = n!c_n.$$

现在我们来分析  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ . 它的奇点为  $\pm i$ , 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  的麦克劳林展开成立的开区间是  $(-1, 1)$ .

若  $f(z)$  在  $z_0$  附近展开为  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ , 则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!c_k}{(k-n)!}(z-z_0)^{k-n} \Big|_{z=z_0} = n!c_n.$$

所以解析函数的幂级数展开是唯一的.

现在我们来分析  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ . 它的奇点为  $\pm i$ , 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  的麦克劳林展开成立的开区间是  $(-1, 1)$ .

若  $f(z)$  在  $z_0$  附近展开为  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ , 则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!c_k}{(k-n)!} (z-z_0)^{k-n} \Big|_{z=z_0} = n!c_n.$$

所以解析函数的幂级数展开是唯一的. 因此解析函数的泰勒展开不仅可以直接求出各阶导数得到, 也可以利用幂级数的运算法则得到.



例

由于  $(e^z)^{(n)}(0) = e^z|_{z=0} = 1,$

例

由于  $(e^z)^{(n)}(0) = e^z|_{z=0} = 1$ , 因此

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z.$$

例

由于  $(e^z)^{(n)}(0) = e^z|_{z=0} = 1$ , 因此

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z.$$

例

由于

$$(\cos z)^{(n)} = \cos \left( z + \frac{n\pi}{2} \right),$$

例

由于  $(e^z)^{(n)}(0) = e^z|_{z=0} = 1$ , 因此

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z.$$

例

由于

$$\begin{aligned} (\cos z)^{(n)} &= \cos \left( z + \frac{n\pi}{2} \right), \\ (\cos z)^{(2n+1)}(0) &= 0, \quad (\cos z)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \end{aligned}$$

## 典型例题: 泰勒展开的计算

例

由于  $(e^z)^{(n)}(0) = e^z|_{z=0} = 1$ , 因此

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z.$$

例

由于

$$\begin{aligned} (\cos z)^{(n)} &= \cos \left( z + \frac{n\pi}{2} \right), \\ (\cos z)^{(2n+1)}(0) &= 0, \quad (\cos z)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \end{aligned}$$

因此

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z.$$

例

由  $e^z$  的泰勒展开可得

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

例

由  $e^z$  的泰勒展开可得

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n - (-iz)^n}{2i \cdot n!}$$

例

由  $e^z$  的泰勒展开可得

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n - (-iz)^n}{2i \cdot n!} \\ &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots\end{aligned}$$



例

由  $e^z$  的泰勒展开可得

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n - (-iz)^n}{2i \cdot n!} \\ &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z.\end{aligned}$$

例

函数  $f(z) = (1+z)^\alpha$  的主值为  $\exp[\alpha \ln(1+z)]$ .

### 例

函数  $f(z) = (1+z)^\alpha$  的主值为  $\exp[\alpha \ln(1+z)]$ . 它在去掉射线  $z = x \leq -1$  的区域内解析.

### 例

函数  $f(z) = (1+z)^\alpha$  的主值为  $\exp[\alpha \ln(1+z)]$ . 它在去掉射线  $z = x \leq -1$  的区域内解析. 由于

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \exp[(\alpha-n)\ln(1+z)] \Big|_{z=0}$$

### 例

函数  $f(z) = (1+z)^\alpha$  的主值为  $\exp[\alpha \ln(1+z)]$ . 它在去掉射线  $z = x \leq -1$  的区域内解析. 由于

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \exp[(\alpha-n)\ln(1+z)] \Big|_{z=0} \\ &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1). \end{aligned}$$

### 例

函数  $f(z) = (1+z)^\alpha$  的主值为  $\exp[\alpha \ln(1+z)]$ . 它在去掉射线  $z = x \leq -1$  的区域内解析. 由于

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \exp[(\alpha-n)\ln(1+z)] \Big|_{z=0} \\ &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} (1+z)^\alpha &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

例

将  $\frac{1}{(1+z)^2}$  展开成  $z$  的幂级数.

## 典型例题: 泰勒展开的计算

例

将  $\frac{1}{(1+z)^2}$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\frac{1}{(1+z)^2}$  的奇点为  $z = -1$ , 因此它在  $|z| < 1$  内解析.



## 典型例题: 泰勒展开的计算

例

将  $\frac{1}{(1+z)^2}$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\frac{1}{(1+z)^2}$  的奇点为  $z = -1$ , 因此它在  $|z| < 1$  内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

## 典型例题: 泰勒展开的计算

例

将  $\frac{1}{(1+z)^2}$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\frac{1}{(1+z)^2}$  的奇点为  $z = -1$ , 因此它在  $|z| < 1$  内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

因此

$$\frac{1}{(1+z)^2} = - \left( \frac{1}{1+z} \right)'$$

## 典型例题: 泰勒展开的计算

例

将  $\frac{1}{(1+z)^2}$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\frac{1}{(1+z)^2}$  的奇点为  $z = -1$ , 因此它在  $|z| < 1$  内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

因此

$$\frac{1}{(1+z)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1}$$

## 典型例题: 泰勒展开的计算

例

将  $\frac{1}{(1+z)^2}$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\frac{1}{(1+z)^2}$  的奇点为  $z = -1$ , 因此它在  $|z| < 1$  内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+z)^2} &= -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n, \quad |z| < 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例

将对数函数的主值  $\ln(1 + z)$  展开成  $z$  的幂级数.

例

将对数函数的主值  $\ln(1+z)$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\ln(1+z)$  在去掉射线  $z = x \leq -1$  的区域内解析,

例

将对数函数的主值  $\ln(1+z)$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\ln(1+z)$  在去掉射线  $z = x \leq -1$  的区域内解析, 因此它在  $|z| < 1$  内解析.

### 例

将对数函数的主值  $\ln(1+z)$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\ln(1+z)$  在去掉射线  $z = x \leq -1$  的区域内解析, 因此它在  $|z| < 1$  内解析. 此时

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$



### 例

将对数函数的主值  $\ln(1+z)$  展开成  $z$  的幂级数.

### 解.

由于  $\ln(1+z)$  在去掉射线  $z = x \leq -1$  的区域内解析, 因此它在  $|z| < 1$  内解析. 此时

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

逐项积分得到

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+\zeta} d\zeta$$

### 例

将对数函数的主值  $\ln(1+z)$  展开成  $z$  的幂级数.

### 解.

由于  $\ln(1+z)$  在去掉射线  $z = x \leq -1$  的区域内解析, 因此它在  $|z| < 1$  内解析. 此时

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

逐项积分得到

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+\zeta} d\zeta = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n d\zeta$$

## 典型例题: 泰勒展开的计算

### 例

将对数函数的主值  $\ln(1+z)$  展开成  $z$  的幂级数.

### 解.

由于  $\ln(1+z)$  在去掉射线  $z = x \leq -1$  的区域内解析, 因此它在  $|z| < 1$  内解析. 此时

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

逐项积分得到

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= \int_0^z \frac{1}{1+\zeta} d\zeta = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

## 典型例题: 泰勒展开的计算

### 例

将对数函数的主值  $\ln(1+z)$  展开成  $z$  的幂级数.

### 解.

由于  $\ln(1+z)$  在去掉射线  $z = x \leq -1$  的区域内解析, 因此它在  $|z| < 1$  内解析. 此时

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

逐项积分得到

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= \int_0^z \frac{1}{1+\zeta} d\zeta = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \quad |z| < 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例

将  $\frac{1}{3z-2}$  展开成  $z$  的幂级数.

## 典型例题: 泰勒展开的计算

例

将  $\frac{1}{3z-2}$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\frac{1}{3z-2}$  的奇点为  $z = \frac{2}{3}$ , 因此它在  $|z| < \frac{2}{3}$  内解析.

## 典型例题: 泰勒展开的计算

例

将  $\frac{1}{3z-2}$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\frac{1}{3z-2}$  的奇点为  $z = \frac{2}{3}$ , 因此它在  $|z| < \frac{2}{3}$  内解析. 此时

$$\frac{1}{3z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-3z/2}$$

## 典型例题: 泰勒展开的计算

例

将  $\frac{1}{3z-2}$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\frac{1}{3z-2}$  的奇点为  $z = \frac{2}{3}$ , 因此它在  $|z| < \frac{2}{3}$  内解析. 此时

$$\frac{1}{3z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-3z/2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3z}{2}\right)^n$$



## 典型例题: 泰勒展开的计算

例

将  $\frac{1}{3z-2}$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\frac{1}{3z-2}$  的奇点为  $z = \frac{2}{3}$ , 因此它在  $|z| < \frac{2}{3}$  内解析. 此时

$$\begin{aligned}\frac{1}{3z-2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-3z/2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3z}{2}\right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} z^n, \quad |z| < \frac{2}{3}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

例

将  $\frac{e^z}{1+z}$  展开成  $z$  的幂级数.

## 典型例题: 泰勒展开的计算

例

将  $\frac{e^z}{1+z}$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\frac{e^z}{1+z}$  的奇点为  $-1$ , 因此它在  $|z| < 1$  内解析.

## 典型例题: 泰勒展开的计算

例

将  $\frac{e^z}{1+z}$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\frac{e^z}{1+z}$  的奇点为  $-1$ , 因此它在  $|z| < 1$  内解析. 此时由

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

## 典型例题: 泰勒展开的计算

例

将  $\frac{e^z}{1+z}$  展开成  $z$  的幂级数.

解.

由于  $\frac{e^z}{1+z}$  的奇点为  $-1$ , 因此它在  $|z| < 1$  内解析. 此时由

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

得

$$\frac{e^z}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \right] z^n = 1 + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 + \cdots, \quad |z| < 1. \quad \blacksquare$$

### 练习

将  $\cos^2 z$  展开成  $z$  的幂级数.

## 典型例题: 泰勒展开的计算

### 练习

将  $\cos^2 z$  展开成  $z$  的幂级数.

答案.

$$\begin{aligned}\cos^2 z &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2z) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^n, \quad \forall z.\end{aligned}$$

## 典型例题: 泰勒展开的计算

### 练习

将  $\cos^2 z$  展开成  $z$  的幂级数.

答案.

$$\begin{aligned}\cos^2 z &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2z) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^n, \quad \forall z.\end{aligned}$$

### 思考

奇函数和偶函数的麦克劳林展开有什么特点?



## 典型例题: 泰勒展开的计算

### 练习

将  $\cos^2 z$  展开成  $z$  的幂级数.

答案.

$$\begin{aligned}\cos^2 z &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2z) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^n, \quad \forall z.\end{aligned}$$

### 思考

奇函数和偶函数的麦克劳林展开有什么特点?

答案.

奇函数 (偶函数) 的麦克劳林展开只有奇数次项 (偶数次项).

1 复数项级数

2 幂级数

3 泰勒级数

4 洛朗级数

如果解析函数  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 那么在  $z_0$  处可以展开成泰勒级数.

如果解析函数  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 那么在  $z_0$  处可以展开成泰勒级数. 如果  $f(z)$  在  $z_0$  处不解析呢?

如果解析函数  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 那么在  $z_0$  处可以展开成泰勒级数. 如果  $f(z)$  在  $z_0$  处不解析呢? 此时  $f(z)$  一定不能展开成  $z - z_0$  的幂级数,

如果解析函数  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 那么在  $z_0$  处可以展开成泰勒级数. 如果  $f(z)$  在  $z_0$  处不解析呢? 此时  $f(z)$  一定不能展开成  $z - z_0$  的幂级数, 然而它却可能可以展开为**双边幂级数**

如果解析函数  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 那么在  $z_0$  处可以展开成泰勒级数. 如果  $f(z)$  在  $z_0$  处不解析呢? 此时  $f(z)$  一定不能展开成  $z - z_0$  的幂级数, 然而它却可能可以展开为**双边幂级数**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

如果解析函数  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 那么在  $z_0$  处可以展开成泰勒级数. 如果  $f(z)$  在  $z_0$  处不解析呢? 此时  $f(z)$  一定不能展开成  $z - z_0$  的幂级数, 然而它却可能可以展开为**双边幂级数**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用, 我们对它的敛散性作如下定义:



如果解析函数  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 那么在  $z_0$  处可以展开成泰勒级数. 如果  $f(z)$  在  $z_0$  处不解析呢? 此时  $f(z)$  一定不能展开成  $z - z_0$  的幂级数, 然而它却可能可以展开为**双边幂级数**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用, 我们对它的敛散性作如下定义:

## 定义

如果双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分作为函数项级数都收敛, 则我们称这个双边幂级数**收敛**.

如果解析函数  $f(z)$  在  $z_0$  处解析, 那么在  $z_0$  处可以展开成泰勒级数. 如果  $f(z)$  在  $z_0$  处不解析呢? 此时  $f(z)$  一定不能展开成  $z - z_0$  的幂级数, 然而它却可能可以展开为**双边幂级数**

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用, 我们对它的敛散性作如下定义:

## 定义

如果双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分作为函数项级数都收敛, 则我们称这个双边幂级数**收敛**. 否则我们称之为**发散**.

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和

$$s_n(z) = \sum_{k=-n}^n c_k (z - z_0)^k,$$

形成的数列的极限来定义.

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和

$$s_n(z) = \sum_{k=-n}^n c_k (z - z_0)^k,$$

形成的数列的极限来定义. 例如双边幂级数

$$\cdots + z^{-2} + z^{-1} - 1 - z - z^2 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和

$$s_n(z) = \sum_{k=-n}^n c_k (z - z_0)^k,$$

形成的数列的极限来定义. 例如双边幂级数

$$\cdots + z^{-2} + z^{-1} - 1 - z - z^2 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

当  $z = -1$  时,

$$s_n(-1) = -1 + \sum_{k=1}^n [(-1)^{-k} - (-1)^k] = -1$$

收敛,

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和

$$s_n(z) = \sum_{k=-n}^n c_k (z - z_0)^k,$$

形成的数列的极限来定义. 例如双边幂级数

$$\cdots + z^{-2} + z^{-1} - 1 - z - z^2 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

当  $z = -1$  时,

$$s_n(-1) = -1 + \sum_{k=1}^n [(-1)^{-k} - (-1)^k] = -1$$

收敛, 但这个双边幂级数在  $z = -1$  并不收敛.

## 双边幂级数的收敛域

设  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  的收敛半径为  $R_2$ , 则它在  $|z - z_0| < R_2$  内收敛, 在  $|z - z_0| > R_2$  内发散.

## 双边幂级数的收敛域

设  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  的收敛半径为  $R_2$ , 则它在  $|z - z_0| < R_2$  内收敛, 在  $|z - z_0| > R_2$  内发散.

对于负幂次部分, 令  $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ , 那么负幂次部分是  $\zeta$  的一个幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$ .



## 双边幂级数的收敛域

设  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  的收敛半径为  $R_2$ , 则它在  $|z - z_0| < R_2$  内收敛, 在  $|z - z_0| > R_2$  内发散.

对于负幂次部分, 令  $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ , 那么负幂次部分是  $\zeta$  的一个幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$ . 设该幂级数的收敛半径为  $R$ , 则它在  $|\zeta| < R$  内收敛, 在  $|\zeta| > R$  内发散.

## 双边幂级数的收敛域

设  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  的收敛半径为  $R_2$ , 则它在  $|z - z_0| < R_2$  内收敛, 在  $|z - z_0| > R_2$  内发散.

对于负幂次部分, 令  $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ , 那么负幂次部分是  $\zeta$  的一个幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$ . 设该幂级数的收敛半径为  $R$ , 则它在  $|\zeta| < R$  内收敛, 在  $|\zeta| > R$  内发散. 设  $R_1 := \frac{1}{R}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$  在  $|z - z_0| > R_1$  内收敛, 在  $|z - z_0| < R_1$  内发散.

## 双边幂级数的收敛域

设  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  的收敛半径为  $R_2$ , 则它在  $|z - z_0| < R_2$  内收敛, 在  $|z - z_0| > R_2$  内发散.

对于负幂次部分, 令  $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ , 那么负幂次部分是  $\zeta$  的一个幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$ . 设该幂级数的收敛半径为  $R$ , 则它在  $|\zeta| < R$  内收敛, 在  $|\zeta| > R$  内发散. 设  $R_1 := \frac{1}{R}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$  在  $|z - z_0| > R_1$  内收敛, 在  $|z - z_0| < R_1$  内发散.

**1** 如果  $R_1 > R_2$ , 则该双边幂级数处处不收敛.

## 双边幂级数的收敛域

设  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  的收敛半径为  $R_2$ , 则它在  $|z - z_0| < R_2$  内收敛, 在  $|z - z_0| > R_2$  内发散.

对于负幂次部分, 令  $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ , 那么负幂次部分是  $\zeta$  的一个幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$ . 设该幂级数的收敛半径为  $R$ , 则它在  $|\zeta| < R$  内收敛, 在  $|\zeta| > R$  内发散. 设  $R_1 := \frac{1}{R}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$  在  $|z - z_0| > R_1$  内收敛, 在  $|z - z_0| < R_1$  内发散.

**1** 如果  $R_1 > R_2$ , 则该双边幂级数处处不收敛.

**2** 如果  $R_1 = R_2$ , 则该双边幂级数只在圆周  $|z - z_0| = R_1$  上可能有收敛的点.

## 双边幂级数的收敛域

设  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  的收敛半径为  $R_2$ , 则它在  $|z - z_0| < R_2$  内收敛, 在  $|z - z_0| > R_2$  内发散.

对于负幂次部分, 令  $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ , 那么负幂次部分是  $\zeta$  的一个幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$ . 设该幂级数的收敛半径为  $R$ , 则它在  $|\zeta| < R$  内收敛, 在  $|\zeta| > R$  内发散. 设  $R_1 := \frac{1}{R}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$  在  $|z - z_0| > R_1$  内收敛, 在  $|z - z_0| < R_1$  内发散.

**1** 如果  $R_1 > R_2$ , 则该双边幂级数处处不收敛.

**2** 如果  $R_1 = R_2$ , 则该双边幂级数只在圆周  $|z - z_0| = R_1$  上可能有收敛的点. 此时没有收敛域.

## 双边幂级数的收敛域

设  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$  的收敛半径为  $R_2$ , 则它在  $|z - z_0| < R_2$  内收敛, 在  $|z - z_0| > R_2$  内发散.

对于负幂次部分, 令  $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ , 那么负幂次部分是  $\zeta$  的一个幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$ . 设该幂级数的收敛半径为  $R$ , 则它在  $|\zeta| < R$  内收敛, 在  $|\zeta| > R$  内发散. 设  $R_1 := \frac{1}{R}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}$  在  $|z - z_0| > R_1$  内收敛, 在  $|z - z_0| < R_1$  内发散.

- 1 如果  $R_1 > R_2$ , 则该双边幂级数处处不收敛.
- 2 如果  $R_1 = R_2$ , 则该双边幂级数只在圆周  $|z - z_0| = R_1$  上可能有收敛的点. 此时没有收敛域.
- 3 如果  $R_1 < R_2$ , 则该双边幂级数在  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内收敛, 在  $|z - z_0| < R_1$  或  $> R_2$  内发散, 在圆周  $|z - z_0| = R_1$  或  $R_2$  上既可能发散也可能收敛.

因此双边幂级数的收敛域为圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .

因此双边幂级数的收敛域为圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛,



因此双边幂级数的收敛域为圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分.

因此双边幂级数的收敛域为圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

因此双边幂级数的收敛域为圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

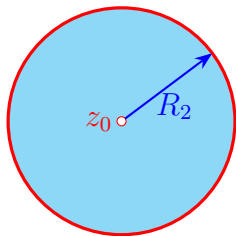
当  $R_1 = 0$  或  $R_2 = +\infty$  时, 圆环域的形状会有所不同.

## 双边幂级数的收敛域

因此双边幂级数的收敛域为圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

当  $R_1 = 0$  或  $R_2 = +\infty$  时, 圆环域的形状会有所不同.



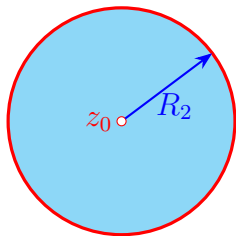
$$0 < |z - z_0| < R_2$$

## 双边幂级数的收敛域

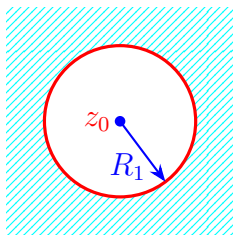
因此双边幂级数的收敛域为圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

当  $R_1 = 0$  或  $R_2 = +\infty$  时, 圆环域的形状会有所不同.



$$0 < |z - z_0| < R_2$$



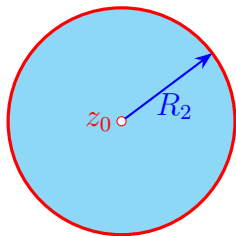
$$R_1 < |z - z_0| < +\infty$$

## 双边幂级数的收敛域

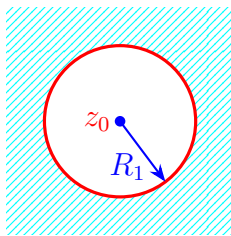
因此双边幂级数的收敛域为圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

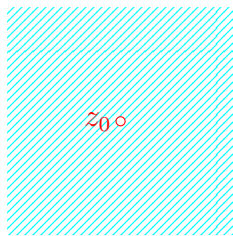
当  $R_1 = 0$  或  $R_2 = +\infty$  时, 圆环域的形状会有所不同.



$$0 < |z - z_0| < R_2$$



$$R_1 < |z - z_0| < +\infty$$



$$0 < |z - z_0| < +\infty$$

## 例题: 双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$  的收敛域与和函数, 其中  $a, b$  为非零复数.

## 例题: 双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$  的收敛域与和函数, 其中  $a, b$  为非零复数.

解.

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$  的收敛半径为  $|b|$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} (az)^n$  的收敛半径为  $\frac{1}{|a|}$ ,



## 例题: 双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$  的收敛域与和函数, 其中  $a, b$  为非零复数.

解.

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$  的收敛半径为  $|b|$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} (az)^n$  的收敛半径为  $\frac{1}{|a|}$ , 因此该双边幂级数的收敛域为  $|a| < |z| < |b|$ .

## 例题: 双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$  的收敛域与和函数, 其中  $a, b$  为非零复数.

解.

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$  的收敛半径为  $|b|$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} (az)^n$  的收敛半径为  $\frac{1}{|a|}$ , 因此该双边幂级数的收敛域为  $|a| < |z| < |b|$ .  
当  $|b| < |a|$  时, 没有收敛域.

## 例题: 双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$  的收敛域与和函数, 其中  $a, b$  为非零复数.

解.

由于  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n}$  的收敛半径为  $|b|$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} (az)^n$  的收敛半径为  $\frac{1}{|a|}$ , 因此该双边幂级数的收敛域为  $|a| < |z| < |b|$ .

当  $|b| < |a|$  时, 没有收敛域. 当  $|a| < |z| < |b|$  时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n} = \frac{a/z}{1 - a/z} + \frac{1}{1 - z/b} = \frac{(a - b)z}{(z - a)(z - b)}.$$

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为洛朗级数.

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为洛朗级数.

例如  $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$  在  $z = 0, 1$  以外解析.

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为洛朗级数.

例如  $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$  在  $z = 0, 1$  以外解析. 在圆环域  $0 < |z| < 1$  内,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为洛朗级数.

例如  $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$  在  $z = 0, 1$  以外解析. 在圆环域  $0 < |z| < 1$  内,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

在圆环域  $0 < |z-1| < 1$  内,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z-1} + 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \cdots$$

现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到洛朗展开式.

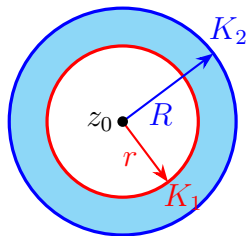


现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到洛朗展开式. 设  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内处处解析.

现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到洛朗展开式. 设  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内处处解析. 设

$$K_1 : |z - z_0| = r, \quad K_2 : |z - z_0| = R, \quad R_1 < r < R < R_2.$$

是该圆环域内的两个圆周.

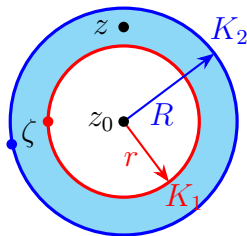


现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到洛朗展开式. 设  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内处处解析. 设

$$K_1 : |z - z_0| = r, \quad K_2 : |z - z_0| = R, \quad R_1 < r < R < R_2.$$

是该圆环域内的两个圆周. 对于  $r < |z - z_0| < R$ , 由柯西积分公式,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$



和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式.

和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于  $\zeta \in K_1$ , 由于  $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ ,

和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于  $\zeta \in K_1$ , 由于  $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ , 因此

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}},$$

和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于  $\zeta \in K_1$ , 由于  $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$ , 因此

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}},$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta.$$

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta.$$



令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta.$$

由于  $f(\zeta)$  在  $D \supseteq K_1$  上解析, 从而在  $K_1$  上连续且有界.

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta.$$

由于  $f(\zeta)$  在  $D \supseteq K_1$  上解析, 从而在  $K_1$  上连续且有界. 设  $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K_1$ ,

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta.$$

由于  $f(\zeta)$  在  $D \supseteq K_1$  上解析, 从而在  $K_1$  上连续且有界. 设  $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K_1$ , 那么

$$|R_N(z)| \leq \frac{M}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right| ds$$

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta.$$

由于  $f(\zeta)$  在  $D \supseteq K_1$  上解析, 从而在  $K_1$  上连续且有界. 设  $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K_1$ , 那么

$$\begin{aligned} |R_N(z)| &\leq \frac{M}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right| ds \\ &= \frac{M}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \frac{1}{\zeta - z} \cdot \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{N-1} \right| ds \end{aligned}$$

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta.$$

由于  $f(\zeta)$  在  $D \supseteq K_1$  上解析, 从而在  $K_1$  上连续且有界. 设  $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K_1$ , 那么

$$\begin{aligned} |R_N(z)| &\leq \frac{M}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right| ds \\ &= \frac{M}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \frac{1}{\zeta - z} \cdot \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{N-1} \right| ds \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{|z - z_0| - r} \cdot \left[ \frac{r}{|z - z_0|} \right]^{N-1} \cdot 2\pi r \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right] (z - z_0)^{-n},$$

其中  $r < |z - z_0| < R$ .

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right] (z - z_0)^{-n},$$

其中  $r < |z - z_0| < R$ . 由复合闭路定理,  $K_1, K_2$  可以换成任意一条在圆环域内绕  $z_0$  的闭路  $C$ .

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right] (z - z_0)^{-n},$$

其中  $r < |z - z_0| < R$ . 由复合闭路定理,  $K_1, K_2$  可以换成任意一条在圆环域内绕  $z_0$  的闭路  $C$ . 从而我们得到  $f(z)$  在以  $z_0$  为圆心的圆环域的洛朗展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n,$$

其中  $R_1 < |z - z_0| < R_2$ .



我们称  $f(z)$  洛朗展开的正幂次部分为它的解析部分, 负幂次部分为它的主要部分.

我们称  $f(z)$  洛朗展开的正幂次部分为它的解析部分, 负幂次部分为它的主要部分.

设在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内的解析函数  $f(z)$  可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

我们称  $f(z)$  洛朗展开的正幂次部分为它的解析部分, 负幂次部分为它的主要部分.

设在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内的解析函数  $f(z)$  可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

则

$$\oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta = 2\pi i c_n.$$

我们称  $f(z)$  洛朗展开的正幂次部分为它的**解析部分**, 负幂次部分为它的**主要部分**.

设在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内的解析函数  $f(z)$  可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

则

$$\oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta = 2\pi i c_n.$$

因此  $f(z)$  在圆环域内的**双边幂级数展开是唯一的**, 它就是洛朗级数.

如果  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数没有负幂次项.

如果  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数.

如果  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 且在圆环域上等于  $f(z)$ .

如果  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 且在圆环域上等于  $f(z)$ .

反过来, 如果  $f(z)$  在  $|z - z_0| < R_2$  内解析,



如果  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 且在圆环域上等于  $f(z)$ .

反过来, 如果  $f(z)$  在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 则  $f(z)$  可以展开为泰勒级数.

如果  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 且在圆环域上等于  $f(z)$ .

反过来, 如果  $f(z)$  在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 则  $f(z)$  可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

如果  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 且在圆环域上等于  $f(z)$ .

反过来, 如果  $f(z)$  在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 则  $f(z)$  可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知,  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当  $f(z)$  (或适当延拓) 在  $|z - z_0| \leq R_1$  内有奇点 (未必是  $z_0$ ).

如果  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 且在圆环域上等于  $f(z)$ .

反过来, 如果  $f(z)$  在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 则  $f(z)$  可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知,  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当  $f(z)$  (或适当延拓) 在  $|z - z_0| \leq R_1$  内有奇点 (未必是  $z_0$ ). 例如

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

如果  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 且在圆环域上等于  $f(z)$ .

反过来, 如果  $f(z)$  在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 则  $f(z)$  可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知,  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当  $f(z)$  (或适当延拓) 在  $|z - z_0| \leq R_1$  内有奇点 (未必是  $z_0$ ). 例如

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

如果  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 且在圆环域上等于  $f(z)$ .

反过来, 如果  $f(z)$  在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 则  $f(z)$  可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知,  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当  $f(z)$  (或适当延拓) 在  $|z - z_0| \leq R_1$  内有奇点 (未必是  $z_0$ ). 例如

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

可以看出, 右侧是一个幂级数, 所以它在  $z = 0$  处也解析.

如果  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 且在圆环域上等于  $f(z)$ .

反过来, 如果  $f(z)$  在  $|z - z_0| < R_2$  内解析, 则  $f(z)$  可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知,  $f(z)$  在圆环域  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当  $f(z)$  (或适当延拓) 在  $|z - z_0| \leq R_1$  内有奇点 (未必是  $z_0$ ). 例如

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

可以看出, 右侧是一个幂级数, 所以它在  $z = 0$  处也解析. 如果我们补充定义  $f(0) = 1$ , 则  $f(z)$  处处解析.

例

将  $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$  展开为以 0 为中心的洛朗级数.



## 典型例题: 求洛朗级数

例

将  $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$  展开为以 0 为中心的洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点,  $f(z)$  在  $0 < |z| < +\infty$  内解析.

## 典型例题: 求洛朗级数

例

将  $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$  展开为以 0 为中心的洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点,  $f(z)$  在  $0 < |z| < +\infty$  内解析. 我们有

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} d\zeta,$$

其中  $C$  为圆环域内的闭路.

## 典型例题: 求洛朗级数

例

将  $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$  展开为以 0 为中心的洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点,  $f(z)$  在  $0 < |z| < +\infty$  内解析. 我们有

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} d\zeta,$$

其中  $C$  为圆环域内的闭路. 当  $n \leq -3$  时, 被积函数处处解析, 因此由柯西-古萨基本定理,  $c_n = 0$ .

## 典型例题: 求洛朗级数

例

将  $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$  展开为以 0 为中心的洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点,  $f(z)$  在  $0 < |z| < +\infty$  内解析. 我们有

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} d\zeta,$$

其中  $C$  为圆环域内的闭路. 当  $n \leq -3$  时, 被积函数处处解析, 因此由柯西-古萨基本定理,  $c_n = 0$ . 当  $n \geq -2$  时, 由柯西积分公式

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} d\zeta = \frac{1}{(n+2)!} (e^z)^{(n+2)}|_{z=0} = \frac{1}{(n+2)!}.$$

## 典型例题: 求洛朗级数

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

## 典型例题: 求洛朗级数

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

实际上, 由洛朗级数的唯一性, 我们可以直接从  $e^z$  的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数.

## 典型例题: 求洛朗级数

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

实际上, 由洛朗级数的唯一性, 我们可以直接从  $e^z$  的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数. 这种做法会简便得多.

## 典型例题: 求洛朗级数

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

实际上, 由洛朗级数的唯一性, 我们可以直接从  $e^z$  的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数. 这种做法会简便得多. 因此我们一般**不用直接法**, 而是**用双边幂级数的代数、求导、求积分运算**来得到洛朗级数.



## 典型例题: 求洛朗级数

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

实际上, 由洛朗级数的唯一性, 我们可以直接从  $e^z$  的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数. 这种做法会简便得多. 因此我们一般不用直接法, 而是用双边幂级数的代数、求导、求积分运算来得到洛朗级数.

另解.

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right)$$

## 典型例题: 求洛朗级数

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

实际上, 由洛朗级数的唯一性, 我们可以直接从  $e^z$  的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数. 这种做法会简便得多. 因此我们一般**不用直接法**, 而是**用双边幂级数的代数、求导、求积分运算**来得到洛朗级数.

另解.

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n. \quad \blacksquare$$

例

在下列圆环域中把  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  展开为洛朗级数.

例

在下列圆环域中把  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  展开为洛朗级数.

(1)  $0 < |z| < 1$ , (2)  $1 < |z| < 2$ , (3)  $2 < |z| < +\infty$ .

### 例

在下列圆环域中把  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  展开为洛朗级数.

(1)  $0 < |z| < 1$ , (2)  $1 < |z| < 2$ , (3)  $2 < |z| < +\infty$ .

### 解.

由于  $f(z)$  的奇点为  $z = 1, 2$ , 因此在这些圆环域内  $f(z)$  都可以展开为洛朗级数.

### 例

在下列圆环域中把  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  展开为洛朗级数.

(1)  $0 < |z| < 1$ , (2)  $1 < |z| < 2$ , (3)  $2 < |z| < +\infty$ .

### 解.

由于  $f(z)$  的奇点为  $z = 1, 2$ , 因此在这些圆环域内  $f(z)$  都可以展开为洛朗级数. (1) 由于  $|z| < 1, |z/2| < 1$ ,

### 例

在下列圆环域中把  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  展开为洛朗级数.

(1)  $0 < |z| < 1$ , (2)  $1 < |z| < 2$ , (3)  $2 < |z| < +\infty$ .

### 解.

由于  $f(z)$  的奇点为  $z = 1, 2$ , 因此在这些圆环域内  $f(z)$  都可以展开为洛朗级数. (1) 由于  $|z| < 1, |z/2| < 1$ , 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

### 例

在下列圆环域中把  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  展开为洛朗级数.

(1)  $0 < |z| < 1$ , (2)  $1 < |z| < 2$ , (3)  $2 < |z| < +\infty$ .

### 解.

由于  $f(z)$  的奇点为  $z = 1, 2$ , 因此在这些圆环域内  $f(z)$  都可以展开为洛朗级数. (1) 由于  $|z| < 1, |z/2| < 1$ , 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2}$$



### 例

在下列圆环域中把  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  展开为洛朗级数.

(1)  $0 < |z| < 1$ , (2)  $1 < |z| < 2$ , (3)  $2 < |z| < +\infty$ .

解.

由于  $f(z)$  的奇点为  $z = 1, 2$ , 因此在这些圆环域内  $f(z)$  都可以展开为洛朗级数. (1) 由于  $|z| < 1, |z/2| < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \end{aligned}$$

### 例

在下列圆环域中把  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  展开为洛朗级数.

(1)  $0 < |z| < 1$ , (2)  $1 < |z| < 2$ , (3)  $2 < |z| < +\infty$ .

解.

由于  $f(z)$  的奇点为  $z = 1, 2$ , 因此在这些圆环域内  $f(z)$  都可以展开为洛朗级数. (1) 由于  $|z| < 1, |z/2| < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \end{aligned}$$

## 例

在下列圆环域中把  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  展开为洛朗级数.

(1)  $0 < |z| < 1$ , (2)  $1 < |z| < 2$ , (3)  $2 < |z| < +\infty$ .

解.

由于  $f(z)$  的奇点为  $z = 1, 2$ , 因此在这些圆环域内  $f(z)$  都可以展开为洛朗级数. (1) 由于  $|z| < 1, |z/2| < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \cdots \end{aligned}$$

## 典型例题: 求洛朗展开

续解.

(2) 由于  $\left| \frac{1}{z} \right| < 1, \left| \frac{z}{2} \right| < 1,$

续解.

(2) 由于  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$ , 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

## 典型例题: 求洛朗展开

续解.

(2) 由于  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$ , 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2}$$

续解.

(2) 由于  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n \end{aligned}$$

续解.

(2) 由于  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \end{aligned}$$



续解.

(2) 由于  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \\ &= \cdots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \cdots \end{aligned}$$

## 典型例题: 求洛朗展开

续解.

(3) 由于  $\left| \frac{1}{z} \right| < 1, \left| \frac{2}{z} \right| < 1,$

续解.

(3) 由于  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$ , 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

续解.

(3) 由于  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$ , 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z}$$

续解.

(3) 由于  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n \end{aligned}$$

续解.

(3) 由于  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) z^{-n-1} \end{aligned}$$

续解.

(3) 由于  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) z^{-n-1} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots \quad \blacksquare \end{aligned}$$

续解.

(3) 由于  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) z^{-n-1} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots \quad \blacksquare \end{aligned}$$

同一个函数在不同的圆环域内有不同的洛朗展开, 这和洛朗展开的唯一性并不矛盾.



续解.

(3) 由于  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$ , 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) z^{-n-1} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots \quad \blacksquare \end{aligned}$$

同一个函数在不同的圆环域内有不同的洛朗展开, 这和洛朗展开的唯一性并不矛盾. 因为洛朗展开的唯一性是指在固定的一个圆环域上.

例

将  $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$  在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

例

将  $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$  在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点,  $f(z)$  在  $0 < |z-2| < 2$  内解析.

例

将  $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$  在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点,  $f(z)$  在  $0 < |z-2| < 2$  内解析.

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{2+z-2}$$

例

将  $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$  在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点,  $f(z)$  在  $0 < |z-2| < 2$  内解析.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{2+z-2} \\ &= \frac{1}{2(z-2)} \cdot \frac{1}{1+(z-2)/2} \end{aligned}$$

## 典型例题: 求洛朗展开

例

将  $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$  在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点,  $f(z)$  在  $0 < |z-2| < 2$  内解析.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{2+z-2} \\ &= \frac{1}{2(z-2)} \cdot \frac{1}{1+(z-2)/2} = \frac{1}{2(z-2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{2}\right)^n \end{aligned}$$

## 典型例题: 求洛朗展开

例

将  $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$  在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点,  $f(z)$  在  $0 < |z-2| < 2$  内解析.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{2+z-2} \\ &= \frac{1}{2(z-2)} \cdot \frac{1}{1+(z-2)/2} = \frac{1}{2(z-2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2(z-2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} (z-2)^n, \quad 0 < |z-2| < 2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

### 练习

将  $z^3 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$  在  $0 < |z| < +\infty$  内展开成洛朗级数.



### 练习

将  $z^3 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$  在  $0 < |z| < +\infty$  内展开成洛朗级数.

### 答案.

$$\begin{aligned} z^3 \exp\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)! z^n} + \frac{1}{6} + \frac{z}{2} + z^2 + z^3 \\ &= \cdots + \frac{1}{24z} + \frac{1}{6} + \frac{z}{2} + z^2 + z^3, \quad 0 < |z| < +\infty. \end{aligned}$$

注意到当  $n = -1$  时，洛朗级数的系数

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta,$$

注意到当  $n = -1$  时, 洛朗级数的系数

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分,

## 例题：洛朗展开的应用

注意到当  $n = -1$  时，洛朗级数的系数

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分，它就是所谓的**留数**。

## 例题：洛朗展开的应用

注意到当  $n = -1$  时，洛朗级数的系数

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分，它就是所谓的**留数**。

例

求  $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)^2} dz.$

## 例题: 洛朗展开的应用

注意到当  $n = -1$  时, 洛朗级数的系数

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分, 它就是所谓的**留数**.

例

求  $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)^2} dz.$

解.

注意到闭路  $|z| = 3$  落在  $1 < |z| < +\infty$  内.

## 例题: 洛朗展开的应用

注意到当  $n = -1$  时, 洛朗级数的系数

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分, 它就是所谓的**留数**.

例

求  $\oint_{|z|=3} \frac{1}{z(z+1)^2} dz.$

解.

注意到闭路  $|z| = 3$  落在  $1 < |z| < +\infty$  内. 我们在这个圆环域内求  $f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2}$  的洛朗展开.

续解.

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z+1} \right]'$$



## 例题：洛朗展开的应用

续解.

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z+1} \right]' = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+1/z} \right]'$$

续解.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z+1} \right]' = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+1/z} \right]' \\ &= -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} \cdot \left( 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots \right) \right]' \end{aligned}$$

续解.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z+1} \right]' = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+1/z} \right]' \\ &= -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} \cdot \left( 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots \right) \right]' \\ &= -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right]' \end{aligned}$$

续解.

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z+1} \right]' = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+1/z} \right]' \\&= -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} \cdot \left( 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots \right) \right]' \\&= -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right]' \\&= -\frac{1}{z} \left[ -\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} - \frac{3}{z^4} + \cdots \right]\end{aligned}$$

续解.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z+1} \right]' = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+1/z} \right]' \\ &= -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} \cdot \left( 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots \right) \right]' \\ &= -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right]' \\ &= -\frac{1}{z} \left[ -\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} - \frac{3}{z^4} + \cdots \right] = \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^4} + \cdots \end{aligned}$$

续解.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z+1} \right]' = -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+1/z} \right]' \\ &= -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} \cdot \left( 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots \right) \right]' \\ &= -\frac{1}{z} \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots \right]' \\ &= -\frac{1}{z} \left[ -\frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^3} - \frac{3}{z^4} + \cdots \right] = \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^4} + \cdots \end{aligned}$$

故

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1} = 0.$$

例

求  $\oint_{|z|=2} \frac{z \exp(1/z)}{1-z} dz.$

例

求  $\oint_{|z|=2} \frac{z \exp(1/z)}{1-z} dz$ .

解.

注意到闭路  $|z| = 2$  落在  $1 < |z| < +\infty$  内.



例

求  $\oint_{|z|=2} \frac{z \exp(1/z)}{1-z} dz$ .

解.

注意到闭路  $|z| = 2$  落在  $1 < |z| < +\infty$  内. 我们在这个圆环域内求被积函数  $f(z)$  的洛朗展开.

例

求  $\oint_{|z|=2} \frac{z \exp(1/z)}{1-z} dz$ .

解.

注意到闭路  $|z|=2$  落在  $1 < |z| < +\infty$  内. 我们在这个圆环域内求被积函数  $f(z)$  的洛朗展开.

$$f(z) = -\frac{\exp(1/z)}{1-1/z}$$

例

求  $\oint_{|z|=2} \frac{z \exp(1/z)}{1-z} dz$ .

解.

注意到闭路  $|z| = 2$  落在  $1 < |z| < +\infty$  内. 我们在这个圆环域内求被积函数  $f(z)$  的洛朗展开.

$$f(z) = -\frac{\exp(1/z)}{1-1/z} = -\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots\right)$$

例

求  $\oint_{|z|=2} \frac{z \exp(1/z)}{1-z} dz$ .

解.

注意到闭路  $|z|=2$  落在  $1 < |z| < +\infty$  内. 我们在这个圆环域内求被积函数  $f(z)$  的洛朗展开.

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{\exp(1/z)}{1-1/z} = -\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots\right) \\ &= -\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{5}{2z^2} + \cdots\right) \end{aligned}$$

例

求  $\oint_{|z|=2} \frac{z \exp(1/z)}{1-z} dz$ .

解.

注意到闭路  $|z|=2$  落在  $1 < |z| < +\infty$  内. 我们在这个圆环域内求被积函数  $f(z)$  的洛朗展开.

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{\exp(1/z)}{1-1/z} = -\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots\right) \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \cdots\right) \\ &= -\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{5}{2z^2} + \cdots\right) \end{aligned}$$

故

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1} = -4\pi i.$$