中国科学技术大学

学士学位论文

论文题目：局部类域论

Local Class Field Theory

作者姓名：张 神星

学科专业：基础与应用数学

导师姓名：欧阳毅 教授

完成时间：2010 年6 月

摘要

局部类域论的理论核心是对于局部域K，研究其Abel扩域与K 的乘法群K^* 的子群之间的对应关系. 这适应于剩余域有限的情形, 也适应于剩余域拟有限的情形.

本文是基于Jean-Pierre Serre 的Local Fields 一书所作的笔记. 在本文中, 我们将给出剩余域拟有限的局部域 K 的局部类域论, 并得到分别与Kummer 理论和Artin-Schreier 理论对应的局部符号$(a,b)_v$ 和$[a,b)_v$. 在此基础上我们最终得到局部域的存在性定理, 并得到了与$\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$ 相关的某些性质. 这为整体类域论的研究提供了基础.

关键字: 局部域 类域论 局部符号 存在性定理

Abstract

The essential part of local class field theory is, for a local field K, to study the correspondence of abelian extensions of K and subgroups of the multiplicative group K^* of K. This is applicable to the case of finite residue field, as well as to the case of quasi-finite residue field.

This paper is a note that is based on the book *Local Fields* written by Jean-Pierre Serre. In this paper, we shall establish the local class field theory of the local field K with quasi-finite residue field, and we shall obtain local symbols $(a, b)_v$ and $[a, b)_v$, which is corresponding to the Kummer theory and the Artin-Schreier theory respectively. On the base of that we get the existence theorem of local fields and some properties about $\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$. This also provides some foundation of the global class field theory.

Keyword: Local Field; Class Field Theory; Local Symbol; Existence Theorem

致谢

首先要感谢我在中国科技大学的本科四年时间里, 所有给予我帮助的老师和同学们, 和其他所有关心我的人. 感谢我的朋友们, 你们在我需要帮助的时候给予了我无数的帮助.

感谢欧阳毅老师这一年多来对我的教导, 支持和鼓励. 在这一年多的时间里, 我从您那里学会了很多很多东西, 不仅仅是在一个个学习的疑惑上, 更重要的是您教育了我如何学习, 如何看待和思考问题, 我从您那里学到的东西将使我受用终身. 感谢讨论班的成员们, 和你们的讨论我获益匪浅.

感谢养育我的的父母, 是你们把我养育成人, 不论何时你们都在默默支持着我, 没有你们就不会有我, 也不会有我的现在, 我的所有成绩都属于你们.

谨以此文献给我敬爱的父母!

目　录

第一章　局部域的Brauer群

在本章中, K 为离散赋值v 的完备域, A 为v 的离散赋值环, $\bar{K}$ 为剩余域.

§1.1　非分歧分裂域的存在性

对于任意的域K, 它的Brauer 群是指$H^2(K_s/K) = H^2(\mathrm{Gal}(K_s/K), K_s^*)$, 其中$K_s$ 是K 的可分闭包.

定理1.1. *假设剩余域$\bar{K}$ 是完全域. 则K 的Brauer 群B_K 中的每个元素都在K 的某个有限非分歧扩张中分裂.*

证明. 令K_{nr} 为K 的极大非分歧扩张, 它的Brauer群为0 ([1], Chap. X, §7, example b)). 对于任意$a \in B_K$, a 在K_{nr} 中的像是0; 而K_{nr} 作为K 的所有有限非分歧扩张K' 的直并,典范同态$\varinjlim B_{K'} \to B_K$ 是同构, 因此a 在某个B'_K 中的像是0 . □

推论1.2. K *的Brauer群可以等同于*$H^2(K_{nr}/K)$.

下面我们来介绍非分歧分裂域的存在性的另一种证明. 令L 是中心为K 的可除代数, $\dim_K D = n^2$. 令$\nu : D^* \to K^*$ 为缩减范数([2], Chap.IX, §2, prop. 6). 对于任意$x \in D^*$, 令

$$v'(x) = v(\nu(x)), \quad v'(0) = +\infty.$$

则映射$v' : D^* \to \mathbb{Z}$ 是同态, 且当$x \in K^*$ 时, $v'(x) = nv(x)$. 于是$v'(D^*)$ 是$\mathbb{Z}$ 的子群, 令d 是该子群的正的生成元, 设

$$w = \frac{1}{d}v'.$$

则映射$w : D^* \to \mathbb{Z}$ 是满同态.

命题1.3. *a*)　*对任意*$x \in K^*$, $w(x) = (n/d)v(x)$.
b)　$w(x+y) \geq \inf(w(x), w(y)), w(xy) = w(x) + w(y)$.

证明. $a)$ 和$w(xy) = w(x) + w(y)$ 是显然的.对于D 的子域$L \supset K$ 中的元素x, $\nu(x)$ 是$N_{L/K}(x)$的幂(只需说明对L 是D 的极大子域情形, 此时由定义$\nu(x) = N_{L/K}(x)^n$(参见Bourbaki, *Alg.*, Chap. VIII)). 设离散赋值v 在L 上的提升是v_L, 则w 在L 上的限制是v_L 的倍数. 令$L = K(y/x)$, 则由$v_L(1 + y/x) \geq \inf(v_L(1), v_L(y/x))$, 我们得到$w(1 + y/x) \geq \inf(w(1), w(y/x))$. 两边同时加上$w(x)$, 得到$w(x + y) \geq \inf(w(x), w(y))$. □

引理1.4. *假设$\bar{K}$ 是完全域, $n \geq 2$. 存在D 的子域$L \supseteq K$, 使得L 在K 上非分歧且异于K.*

证明. 如果这样的L 不存在, 则对于D 的所有包含K 的子域L, 均有剩余域$\bar{L} = \bar{K}$, 否则L 必然包含一个非分歧且异于K的扩张([1], Chap.III, §6, th.3 cor.3). 记A 为K 的离散赋值环, $B = \{x \in D | w(x) \geq 0\}$. 令$\pi \in D, w(\pi) = 1$, 并令$b \in B$, 则对于域$L = K(b)$, 于是存在$a \in A$, 使得$a$ 和b 在$\bar{L} = \bar{K}$ 中的像相同, 即

$$b = a + \pi b_1, \quad \text{其中 } b_1 \in B.$$

同理, 对于b_1 也有类似的结论. 对于任意正整数n, 这样一直做下去, 我们均可以得到

$$b = a + \pi a_1 + \cdots + \pi^{n-1} a_{n-1} + \pi^n b_n, \quad \text{其中 } a_i \in A, b_n \in B.$$

于是我们可知b 在$K(\pi)$ 的闭包里. 而$K(\pi)$ 作为D 的子(向量)空间是闭的, 于是$b \in K(\pi)$. 由于对于任意的$x \in D$, 当m 充分大时有$\pi^m x \in B \subseteq K(\pi)$, 于是$x \in K(\pi)$, $D = K(\pi)$, 从而D 是交换的,这与$n \geq 2$矛盾! □

命题1.5. *假设$\bar{K}$ 是完全域. 则存在D 的极大子域在K 上非分歧.*

证明. 对n 归纳. 当$n = 1$ 是显然. 对于$n \geq 2$, 由引理1.4 可知存在D 的子域K' 在K 上非分歧, 且$K' \neq K$. 设D' 为K 在D' 上的中心化子, 则D' 是中心K' 的可除代数(参见Boubaki, *Alg.*, Chap. VIII, §10, th.2), 且$\dim_{K'} D' < n^2$. 由归纳假设, 存在D 的极大子域L 在K' 上非分歧,且有

$$\begin{aligned}[L : K]^2 = [L : K']^2 [K' : K]^2 = [D' : K'][K' : K]^2 = [D' : K][K' : K] \\ = [D : K].\end{aligned}$$

于是L 是D 的极大子域. □

由于可除代数在其极大子域上分裂, 定理1.1 实际上说的就是该命题.

§1.2 Brauer群的确定

从现在起, 我们总假设$\bar{K}$ 是完全域.

命题1.6. *B_K 是它的子群$H^2(L/K)$ 的并, 其中L 取遍K 的有限非分歧伽罗瓦扩张.*

证明. 由于这些扩张一一对应于$\bar{K}$ 的有限伽罗瓦扩张$\bar{L} \subseteq \bar{K}_{nr}$, 而且这些$\bar{L}$ 的并是$\bar{K}_{nr}$, 因此这些L 的并是K_{nr}, 于是便得到该结论([1], Chap.III, §5, th.3 cor.3). □

令

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Gal}(\bar{L}/\bar{K}).$$

记U_L 为L 对应的离散赋值环中那些可逆元构成的乘法群, 记U_L^n 为U_L 中那些满足$v(1-a) \geq n$ 的a 构成的群.

引理1.7. *对任意的$q \geq 1$, $H^q(\mathfrak{g}, U_L^1) = 0$.*

我们知道$U_L^1 \supseteq U_L^2 \supseteq \cdots \supseteq U_L^n \supseteq \cdots$. 由于商群$U_L^n/U_L^{n+1}$ 作为$\mathfrak{g}$ 模同构于加法群$\bar{L}$, 因此它们的上同调是0, 再由如下的引理我们便可得到该结论.

引理1.8. *设$\mathfrak{g}$ 是有限群, $M = M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$ 是$\mathfrak{g}$ 模序列. 假设M 在由M_n 定义的拓扑下是完备的, 且是Hausdorff的. 对于一个固定的$q \geq 0$, 若$H^q(\mathfrak{g}, M_n/M_{n+1}) = 0, \forall n \geq 1$, 则$H^q(\mathfrak{g}, M) = 0$.*

证明. 令$\varphi(g_1, \cdots, g_q)$ 是$\mathfrak{g}$ 的q-闭上链. 由于$H^q(\mathfrak{g}, M_1/M_2) = 0$, 因此存在一个$\mathfrak{g}$ 到M_2 的q-闭上链φ_1, 使得φ 与φ_1 在$H^q(\mathfrak{g}, M_1)$ 中的像相同, 即存在一个$\psi_1 \in H^{q-1}(\mathfrak{g}, M_1)$ 使得$\varphi - \varphi_1 = \delta\psi_1$. 类似地做下去,我们可以得到一列$(\varphi_n, \psi_n)$, 使得

$$\begin{array}{rcl} \varphi - \varphi_1 & = & \delta\psi_1 \\ & \vdots & \\ \varphi_n - \varphi_{n+1} & = & \delta\psi_{n+1} \\ & \vdots & \end{array}$$

其中$\psi_n \in H^{q-1}(\mathfrak{g}, M_n)$, φ_n 是$\mathfrak{g}$ 到M_{n+1} 的q-闭上链. 令$\psi = \psi_1 + \cdots + \psi_n + \cdots$, 由$M$ 的性质知该级数收敛, 且$\psi \in H^{q-1}(\mathfrak{g}, M)$, $\varphi = \delta\psi$, 于是φ 是q-上边界. 因此$H^q(\mathfrak{g}, M) = 0$. □

考虑正合列

$$0 \longrightarrow U_L \longrightarrow L^* \xrightarrow{v} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

其中v 表示K 的离散赋值在L 上的提升. 由它的分歧指数为1 可知该正合列是$\mathfrak{g}$ 模的分裂的正合列. 实际上, 选择$\pi \in K$ 使得$v(\pi) = 1$ 即可得到L^* 与$U_L \times \mathbb{Z}$ 的$\mathfrak{g}$ 模同构.于是我们得到分裂的阿贝尔群正合列

$$0 \longrightarrow H^q(\mathfrak{g}, U_L) \longrightarrow H^q(L/K) \longrightarrow H^q(\mathfrak{g}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0, \qquad q \geq 0.$$

考虑$\mathfrak{g}$ 模的正合列

$$0 \longrightarrow U_L^1 \longrightarrow U_L \longrightarrow \bar{L}^* \longrightarrow 0.$$

由于$H^q(\mathfrak{g}, U_L^1) = 0, \forall q \geq 1$, 我们有

$$H^q(\mathfrak{g}, U_L) = H^q(\mathfrak{g}, \bar{L}^*) = H^q(\bar{L}/\bar{K}), \qquad q \geq 1.$$

综上所述,我们得到:

命题1.9. *设L/K 是有限非分歧伽罗瓦扩张, $\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(L/K)$. 则有分裂的正合列*

$$0 \longrightarrow H^q(\bar{L}/\bar{K}) \longrightarrow H^q(L/K) \longrightarrow H^q(\mathfrak{g}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0, \qquad q \geq 1.$$

对L 取正向极限, 我们得到:

推论1.10. *令$\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(K_{nr}/K)$. 则有分裂的正合列*

$$0 \longrightarrow H^q(\quad /\bar{K}) \longrightarrow H^q(K_{nr}/K) \longrightarrow H^q(\mathfrak{g}, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0, \qquad q \geq 1.$$

这里$\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(K_{nr}/K) = \mathrm{Gal}(\bar{K}_{nr}/\bar{K})$.

令$q=2$, 考虑正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

由于$\mathbb{Q}$ 的上同调是平凡的, 因此我们得到同构

$$\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Z}).$$

此处$\mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 表示$\mathfrak{g}$ 到$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的所有连续的同态, 记为$X(\mathfrak{g})$ 并称为$\mathfrak{g}$ 的特征群. 最后我们得到如下定理:

定理1.11. *设K 为离散赋值的完备域, 剩余域$\bar{K}$ 是完全域. 令*

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(K_{nr}/K) = \mathrm{Gal}(\bar{K}_{nr}/\bar{K}),$$

令$X(\mathfrak{g})$ 为它的特征群. 则我们有分裂的正合列

$$0 \to B_{\bar{K}} \to B_K \to X(\mathfrak{g}) \to 0.$$

第二章　局部类域论

一般的局部类域论总是在剩余域$\bar{K}$ 有限的完备域K 上考虑, 而实际上这个条件可以减弱至$\bar{K}$ 是拟有限的情形, 我们将在该框架内考虑问题.

§2.1　群$\hat{\mathbb{Z}}$及其上同调

记$\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 它是紧全不连通群, 且$\hat{\mathbb{Z}} = \prod \mathbb{Z}_p$ (p 取遍所有素数). 记$\mathfrak{g} = \hat{\mathbb{Z}}$, $\mathfrak{g}_n = n\hat{\mathbb{Z}}$, 则$\mathfrak{g} = \varprojlim \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_n$, 且$\mathfrak{g}_n$ 是$\mathfrak{g}$ 的全部子群. 令A 为连续的$\mathfrak{g}$模, 即$A = \cup A^{\mathfrak{g}_n}$, 其中$A_n^{\mathfrak{g}}$ 是$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_n$ 模. 则$\hat{\mathbb{Z}}$ 的生成元$1 \in \hat{\mathbb{Z}}$ 定义了A 的一个自同构F, 且对任意$a \in A$, 存在正整数n 使得$F^n a = a$, A 的上同调群定义为

$$H^q(\mathfrak{g}, A) = \varinjlim H^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_n, A^{\mathfrak{g}_n}). \tag{2.1}$$

显然有$H^0(\mathfrak{g}, A) = A^{\mathfrak{g}}$. 对于$H^1$, 我们有:

命题2.1. 令$A' = \{a \in A | \exists n \in \mathbb{Z}_+, (1 + F + \cdots + F^{n-1})a = 0\}$. 则

$$H^1(\mathfrak{g}, A) = A'/(F-1)A.$$

(该同构将每个1-闭上链$\varphi : \mathfrak{g} \to A$ 映为$\varphi(1)$ 在$A'/(F-1)A$ 中的像.)

证明. 我们知道$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_n$ 是n 阶循环群, 于是

$$H^1(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_n, A^{\mathfrak{g}_n}) = A'_n/(F-1)A^{\mathfrak{g}_n},$$

其中$A'_n = \{a \in A | (1+F+\cdots+F^{n-1})a = 0\}$, 根据(2.1) 取逆向极限即可. □

注记. 命题2.1中的A' 包含A 的扭子群A_f. 实际上, 对于任意$a \in A_f$, 存在正整数n 和m 使得$na = 0$, $F^m a = a$, 于是

$$(1 + F + \cdots + F^{mn-1})a = nF^m a = 0),$$

因此有$a \in A'$.

推论2.2. $\mathfrak{g}$ 的特征群$X(\mathfrak{g})$ 可等同于$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

证明. 由命题2.1 可知, $X(\mathfrak{g}) = H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. □

命题2.3. *若A 是可除群或扭群,则$H^2(\mathfrak{g}, A) = 0$.*

证明. 当A 是有限群时, $H^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_n, A^{\mathfrak{g}_n}) = A^{\mathfrak{g}}/N_n A^{\mathfrak{g}_n}$, 其中$N_n = 1 + F + \cdots + F^{n-1}$. 令$m$ 为正整数, 容易验证同态

$$A^{\mathfrak{g}}/N_n A^{\mathfrak{g}_n} \to A^{\mathfrak{g}}/N_{nm} A^{\mathfrak{g}_{nm}}$$

可由乘以m 诱导出. 当m 是$\#A$ 的倍数时, 该同态为0,因此

$$H^q(\mathfrak{g}, A) = \varinjlim H^q(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_n, A^{\mathfrak{g}_n}) = 0.$$

当A 为扭群时, 我们可以选择A_α 使得$A = \varinjlim A_\alpha$, 其中A_α 有限且被$\mathfrak{g}$ 固定, 于是$H^2(\mathfrak{g}, A) = H^2(\mathfrak{g}, A_\alpha) = 0$.

当A 为可除群时, 记${}_nA = \{a \in A | na = 0\}$, 则正合列

$$0 \longrightarrow {}_nA \longrightarrow A \xrightarrow{n} A \longrightarrow 0$$

诱导了上同调的正合列

$$H^2(\mathfrak{g}, {}_nA) \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}, A) \xrightarrow{n} H^2(\mathfrak{g}, A).$$

由于$H^2(\mathfrak{g}, {}_nA) = 0$, 因此在$H^2(\mathfrak{g}, A)$ 中乘n 是内射. 但它是扭群, 于是$H^2(\mathfrak{g}, A) = 0$. □

§2.2　拟有限域

令$\mathfrak{g}$ 是任意紧全不连通群, $s \in \mathfrak{g}$. 则存在唯一的同态

$$f_s : \hat{\mathbb{Z}} \to \mathfrak{g}$$

使得$f_s(1) = s$. 若$\mathfrak{g}$ 中运算为乘法, 我们将$f_s(v)$ 写作s^v, $v \in \hat{\mathbb{Z}}$.

令k_s 为域k 的代数闭包, $F \in \mathrm{Gal}(k_s/k)$. 则如下条件满足时, 称$F$ 给出了k 的一个拟有限域结构:

1) k 是完全域.

2) 映射$v \mapsto F^v$ 是$\hat{\mathbb{Z}}$ 到群$\mathrm{Gal}(k_s/k)$ 的同构.

此时F 为$\mathrm{Gal}(k_s/k)$ 的一个自由生成元. 由伽罗瓦理论可知, k_s/k 的有限扩张均为循环扩张.

例2.4. *有限域必为拟有限域. 令$\#k = q$, 取$F(x) = x^q$ 即可(参见Boubaki,* Alg.*, Chap. V, §11).*

我们显然有:

命题2.5. *设k 为拟有限域, F 为它的伽罗瓦群的自由生成元. 令k'/k 为n 次扩张, 并令$F' = F^n$. 则$F' = \mathrm{Gal}(k_s/k')$, 且$F'$ 给出了k' 的一个拟有限域结构.*

命题2.6. *设k 为拟有限域, F 为的伽罗瓦群$\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ 的自由生成元.*

a) 若$w \in k_s^*$ 是单位根, 则存在$y \in k_s^*$ 使得$w = y^{F-1}$.

b) 若$\mathrm{char}\ k \neq 0$, 则同态$F - 1 : k_s \to k_s$ 是满射.

证明. 我们知道$H^1(\mathfrak{g}, k_s^*) = 0$ (Hibert 90), 令$A = k_s^*$, 则由命题2.1知$A' = (F-1)A$, 由于w 是扭元素, 因此$w \in A'$, 即有a). 同理,对于b)有$H^1(\mathfrak{g}, k_s) = 0$([1], Chap.X, §1, prop.1), 此时由假设有$A = A'$. □

命题2.7. *拟有限域的Brauer群是0.*

证明. 令$\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(k_s/k)$, 则由$k_s$ 代数闭知$\mathfrak{g}$模k_s^* 是可除的, 由2.3知$H^2(\mathfrak{g}, k_s^*) = 0$. □

推论2.8. *若k' 是拟有限域k 的有限扩张, 则范映射$N : k'^* \to k^*$ 是满射.*

证明. 由于k'/k 是循环扩张, 因此$H^2(k'/k)$ 同构于$k^*/N(k'^*)$, 再利用命题2.7即可. □

§2.3 Brauer群

设K 是离散赋值v 的完备域, 剩余域$\bar{K}$ 拟有限.令

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Gal}(K_{nr}/K) = \mathrm{Gal}(\bar{K}_{nr}/\bar{K})$$

且设$\mathfrak{g}$ 的自由生成元F 给出了$\bar{K}$ 的拟有限域结构.

由定理1.11, 存在正合列

$$0 \to B_{\bar{K}} \to B_K \to X(\mathfrak{g}) \to 0$$

其中$X(\mathfrak{g})$ 是群$\mathfrak{g}$ 的特征群, 而由推论2.2知$X(\mathfrak{g})$ 可等同于$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, 于是我们得到同态$\mathrm{inv}_K : B_K \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

命题2.9. *群同态$\mathrm{inv}_K : B_K \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是同构.*

证明. 这有上述正合列及$B_{\bar{K}} = 0$ (命题2.7) 得到. □

现在我们将给出inv_K 详细的描述, 考虑如下的同构:

$$B_K \xleftarrow{\alpha} H^2(\mathfrak{g}, K_{nr}^*) \xrightarrow{\beta} H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Z}) \xleftarrow{\delta} H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

其中α 是典范内射, β 由离散赋值$v : K_{nr}^* \to \mathbb{Z}$ 诱导, δ 是短正合列$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的连接映射, 而γ 将$\mathfrak{g}$ 的特征χ 映为$\chi(F) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. 则

$$\mathrm{inv}_K = \gamma \circ \delta^{-1} \circ \beta \circ \alpha^{-1}.$$

命题2.10. *设L/K 是n 次扩张, 令$\mathrm{Res}_{K/L} : B_K \to B_L$ 为典范同态, 则*

$$\mathrm{inv}_L \circ \mathrm{Res}_{K/L} = n \cdot \mathrm{inv}_K.$$

也就是说下图交换:

$$\begin{array}{ccc} B_K & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n} \\ B_L & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \end{array}$$

证明. 我们首先考虑两种特殊情形:

a) L/K 不分歧.

此时$K_{nr} = L_{nr}$, 令$\mathfrak{g}_n = \mathrm{Gal}(K_{nr}/L) = \mathrm{Gal}(\bar{K}_{nr}/\bar{L})$, 它是$\mathfrak{g}$ 唯一指标为n 的子群.考虑图表

$$\begin{CD}
B_K @<{\alpha}<< H^2(\mathfrak{g}, K_{nr}^*) @>{\beta}>> H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Z}) @<{\delta}<< H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) @>{\gamma}>> \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
@V{\mathrm{Res}}VV @V{\mathrm{Res}}VV @V{\mathrm{Res}}VV @V{\mathrm{Res}}VV @V{n}VV \\
B_L @<{\alpha'}<< H^2(\mathfrak{g}_n, K_{nr}^*) @>{\beta'}>> H^2(\mathfrak{g}_n, \mathbb{Z}) @<{\delta'}<< H^1(\mathfrak{g}_n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) @>{\gamma'}>> \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.
\end{CD}$$

我们来说明它是交换的, 左边三个方形的交换性是显然的. 考虑最后一个方形

$$\begin{CD}
H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) @>{\gamma}>> \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
@V{\mathrm{Res}}VV @V{n}VV \\
H^1(\mathfrak{g}_n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) @>{\gamma'}>> \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.
\end{CD}$$

若$\chi \in H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, 则

$$\gamma'(\mathrm{Res}(\chi)) = \chi(F^n) = n\chi(F).$$

b) L/K 完全分歧(即$\bar{L} = \bar{K}$).

此时扩张K_{nr}/K 与L/K 线性不交, 且$L_{nr} = K_{nr}L$. 二者的对应的群$\mathfrak{g}$ 是一样的. 考虑图表

$$\begin{CD}
B_K @<{\alpha}<< H^2(\mathfrak{g}, K_{nr}^*) @>{\beta}>> H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Z}) @<{\delta}<< H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) @>{\gamma}>> \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
@V{\mathrm{Res}}VV @V{i}VV @V{n}VV @V{n}VV @V{n}VV \\
B_L @<{\alpha'}<< H^2(\mathfrak{g}, L_{nr}^*) @>{\beta'}>> H^2(\mathfrak{g}, \mathbb{Z}) @<{\delta'}<< H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) @>{\gamma'}>> \mathbb{Q}/\mathbb{Z},
\end{CD}$$

其中i 由$K_{nr}^* \hookrightarrow L_{nr}^*$ 诱导. 由于K_{nr} 的离散赋值v 在L_{nr} 上的提升w 的分歧指数为n, 于是我们得到第二个方形的交换性. 其余的交换性是显然的.

现在我们考虑一般情形, 此时存在中间域K' 使得L/K' 完全分歧, K'/K 不分歧([1], Chap.III, §5, th.3 cor.3). 而K'/K 有限, $\bar{K}'/\bar{K}$ 有限, 于是$\bar{K}'$ 拟有限. 再根据前两种特殊情形即可得到该结论. □

推论2.11. *在命题2.10的假设前提下,* B_K *中的元素*a *被*L *分裂当且仅当*$na = 0$.

证明. 实际上, a 被L 分裂即$\mathrm{Res}_{K/L}(a)=0$, 也就是说$0=\mathrm{inv}_L\circ\mathrm{Res}_{K/L}(a)=\mathrm{inv}_K(na)$, 即$na=0$. □

推论2.12. *假设L/K 是伽罗瓦扩张, 则同构$\mathrm{inv}_K: B_K\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 将B_K 的子群$H^2(L/K)$ 映为$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的子群$(1/n)\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.*

证明. 显然. □

§2.4 类形式

沿用§3中关于K 的假设, 本节中我们将给出一个与K 相关的类形式, 并接我们将不加证明地给出一些与类形式有关的结论, 具体证明可以参考[1], Chap. XI.

设K_s 为K 的一个可分闭包, 令X 为K_s 的所有有限子扩张. 令$G=\mathrm{Gal}(K_s/K)$, $G_E=\mathrm{Gal}(K_s/E)$. 对于任意$E\in X$, 它的剩余域$\bar{E}$ 是$\bar{K}$ 的有限扩张, 因此有一个典范的拟有限域结构, 而且我们有同构(命题2.9):

$$\mathrm{inv}_E: B_E\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

定理2.13. *$(G,\{G_E\}_{E\in X},K_s^*)$ 和inv_E 是一个类形式.*

证明. 我们需要验证如下公理:

I. 对任意的伽罗瓦扩张F/E, $H^1(F/E)=0$.

此即Hilbert 90.

II a). inv_E 是内射. 若F/E 是伽罗瓦扩张, inv_E 将$H^2(F/E)$ 映为$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 唯一的阶为$[F:E]$ 的子群.

此即推论2.12.

II b). 若E'/E 是任一扩张, 则

$$\mathrm{inv}_{E'}\circ\mathrm{Res}_{E/E'}=[E':E]\cdot\mathrm{inv}_E.$$

此即命题2.10. □

现在我们可以利用各种与类形式相关的结论. 令F/E 是一个伽罗瓦扩张(我们总假设$E,F\in X$), 由II a), 则存在唯一的元素

$$u_{F/E}\in H^2(F/E)$$

使得$\mathrm{inv}_E(u_{F/E}) = 1/n$, 其中$n = [F : E]$. 称该元素为扩张$F/E$ 的基本类.

命题2.14. *对任意的n, 与$u_{F/E}$ 做杯乘积定义了同构*

$$\hat{H}^n(\mathrm{Gal}(F/E), \mathbb{Z}) \to \hat{H}^{n+2}(\mathrm{Gal}(F/E), F^*).$$

证明. 此即Tate 定理([1], Chap. XI, th.1). □

取$n = -2$, 则$\hat{H}^{-2}(\mathrm{Gal}(F/E), \mathbb{Z}) = \mathrm{Gal}(F/E)^{ab}$ (即$\mathrm{Gal}(F/E)$ 的极大阿贝尔商群). 于是我们得到:

推论2.15. *与$u_{F/E}$ 做杯乘积定义了同构*

$$\theta_{F/E} : \mathrm{Gal}(F/E)^{ab} \to E^*/NF^* \quad (N\text{表示}F/E\text{的范}).$$

特别地,当F/E 是阿贝尔扩张时, $(E^* : NF^*) = [F : E]$.

反之:

命题2.16. *若F/E 是有限可分扩张, 则$[E^* : NF^*]$ 有限, 且整除$[F : E]$. 而且它们相等当且仅当F/E 是阿贝尔扩张.*

由上面的推论知

$$\theta_{F/E} : \mathrm{Gal}(F/E)^{ab} \to E^*/NF^*$$

是同构, 我们称$\omega = \theta_{F/E}^{-1}$ 为互反同构. 若$x \in E^*$ 在E^*/NF^* 的像为$\bar{x}$, 则令

$$(x, F/E) = \omega(\bar{x}),$$

它是$\mathrm{Gal}(F/E)^{ab}$ 中的元素, 称为范剩余符号. 特别地, 当F/E 是阿贝尔扩张时, $(x, F/E) \in \mathrm{Gal}(F/E)$. 我们有

$$\begin{aligned} (xx', F/E) &= (x, F/E)(x', F/E) \\ (x, F/E) &= 1 \text{ 当且仅当 } x \in NF^*. \end{aligned}$$

命题2.17. *令$\chi \in \mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(F/E), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, 令$\delta$ 是正合列*

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$$

的连接映射, $\bar{a}$ 是a 在E^*/NF^* 中的像, $\delta\chi \in H^2(\mathrm{Gal}(F/E), \mathbb{Z})$. 则

$$\chi((x, F/E)) = \mathrm{inv}_E(\bar{a} \cdot \delta\chi)$$

其中$\bar{a} \cdot \delta\chi \in H^2(F/E)$ 是$\bar{a}$ 和$\delta\chi$ 的杯乘积.

互反同构的函子性质由如下三条命题刻画:

命题2.18. *考虑扩张$F \supset E' \supset E$, F/E 是伽罗瓦扩张. 则群*$\mathrm{Gal}(F/E')$*是*$\mathrm{Gal}(F/E)$ *的子群.*
a) 若$x \in E'^*$, $y \in N_{E'/E(x)}$, 则$(x, F/E') \in \mathrm{Gal}(F/E')^{ab}$ 在$\mathrm{Gal}(F/E)^{ab}$ 中的像等于$(y, F/E)$.
*b) 若$x \in E^*$, 则$(x, F/E) \in \mathrm{Gal}(F/E)^{ab}$ 在$\mathrm{Gal}(F/E')^{ab}$ 中的像在Ver (即度为1 时的*Res*)作用下等于$(x, F/E')$.*

命题2.19. *若F/E 是伽罗瓦扩张, $s \in \mathrm{Gal}(F/E)$, 则对任意$x \in E^*$, 有*

$$(sx, sF/sE) = s \circ (x, F/E) \circ s^{-1}.$$

命题2.20. *考虑扩张$F \supset E' \supset E$, 其中F/E 和F'/E 是阿贝尔扩张. 若$x \in E^*$, 则$(x, F'/E)$ 在$\mathrm{Gal}(F/E)^{ab}$ 中的像等于$(x, F/E)$.*

对于任意的域K, 它的范群是指$N_{L/K}L^*$, 其中L 是K 的有限扩张. 由于命题2.20, 我们可以在F/E 是无限伽罗瓦扩张情形下定义$(x, F/E)$. 当F是E 的极大阿贝尔扩张E^{ab} 时, 记$(x, */E) = (x, E^{ab}/E)$, 它是伽罗瓦群$\mathfrak{U}_E = \mathrm{Gal}(E^{ab}/E)$ 中的元素. 互反同构使得我们可以将$\mathfrak{U}_E$ 与E^* 看成是同一个拓扑群, 其中E^* 的Hausdorff拓扑定义为: 对任意$a \in E^*$, 它的所有范群的陪集构成的它的邻域基, 称该拓扑为范拓扑. 在§3.4中, 我们将在$\bar{K}$ 有限的情形下确定它的拓扑.

命题2.21. *设L/K 是非分歧扩张. 若我们将*$\mathrm{Gal}(L/K)$ *与*$\mathrm{Gal}(\bar{L}/\bar{K})$*等同起来, 则*

$$(x, L/K) = F_K^{v(x)},$$

其中F_K 是$\mathrm{Gal}(\bar{L}/\bar{K})$ *的典范生成元, v 是K 的离散赋值.*

证明. 设χ 是$\mathrm{Gal}(L/K)$ 的一个特征, 由命题2.17 并参见§2.3, 我们有

$$\begin{aligned}
\chi((x, L/K)) &= \mathrm{inv}_K(x \cdot \delta\chi) \\
&= \gamma\delta^{-1}\beta(x \cdot \delta\chi) \\
&= \gamma\delta^{-1}(v(x) \cdot \delta\chi) \\
&= \gamma(v(x) \cdot \chi) \\
&= v(x)\chi(F) \\
&= \chi(F^{v(x)}).
\end{aligned}$$

由χ 的任意性知原命题得证. □

推论2.22. *设F/E 是阿贝尔扩张, $G = \mathrm{Gal}(F/E)$. 令$U_E \subset E^*$ 是E 的单位群, 则互反同构$E^* \to G$ 将U_E 映为G 的惯性群.*

这里, 惯性群是指$\mathrm{Gal}(F/E')$, 其中E'/E 是F/E 的极大非分歧子扩张.

证明. 令T 是G 的惯性群, 令E' 为对应的子扩张. 则扩张E'/E 是非分歧的,利用前述的命题, 我们看到U_E 平凡地映到G/T 中, 即U_E 的像包含在T 中. 反之, 令$t \in T$, $a \in E^*$ 使得$(a, F/E) = t$. 设$f = [E' : E]$, 由于$(a, F/E)$ 在E' 上的作用是平凡的, 因此f 整除$v(a)$, 令$b \in F^*$, 使得b 在F 上的离散赋值等于$v(a)/f$, 则$v(N(b)) = v(a)$. 令$u = a \cdot N(b)^{-1}$, 则$u \in U_E$, 且$(u, F/E) = (a, F/E) = t$. 从而U_E 映为T. □

第三章　局部符号和存在性定理

在本章中, 我们将引入两个局部符号(a,b) 和$[a,b)$, 并最终证明局部类域论中的一个重要定理: 存在性定理.

§3.1　局部符号的一般概念

令K 是一个域, K_s 是它的可分闭包, 并令$G = \mathrm{Gal}(K_s/K)$. 若$\chi \in H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是G 的一个特征, 则$\delta\chi \in H^2(G,\mathbb{Z})$, 其中$\delta$ 是正合列$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ 的连接映射. 若$b \in K^*$, 则杯乘积$\bar{b} \cdot \delta\chi$ 是K 的Brauer 群B_K 中的元素. 我们将它记为(χ, b). 我们显然有:

命题3.1.
a) $(\chi + \chi', b) = (\chi, b) + (\chi', b)$.
b) $(\chi, bb') = (\chi, b) + (\chi, b')$.

我们考虑G 的一个特征χ. 令H_χ 为它的核, L_χ 为它对应的K 的扩张, 则它是n 次循环扩张, 其中n 为χ 的阶. 选择$s \in G$ 使得$\chi(s) = 1/n$, 则我们有:

命题3.2. *令$b \in K^*$, 则$b \mapsto (\chi, b)$ 诱导了K^*/NL_χ^* 到B_K 的一个同构.*

推论3.3. *$(\chi, b) = 0$ 当且仅当b 是某个扩张L_χ/K 的范.*

推论3.4. *B_K 中的元素可以写成(χ, b) 当且仅当它被L_χ 分裂.*

现在我们来考虑局部域的情形. 设K 是离散赋值v 的完备域, 剩余域$\bar{K}$ 拟有限. 在前一章我们定义了同构

$$\mathrm{inv}_K : B_K \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

令

$$(\chi, b)_v = \mathrm{inv}_K(\chi, b)$$

它是$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中的元素. 由命题2.17 有:

命题3.5. *设$s_b = (b, */K) \in G^{ab}$ 是范剩余符号. 则*

$$(\chi, b)_v = \chi(s_b).$$

推论3.6. 若χ 是一个特征且满足$(\chi, b)_v = 0$ 对任意$b \in K^*$ 成立, 则$\chi = 0$.

证明. 实际上, 我们有$\chi(s_b) = 0$, 而所有的s_b 在G^{ab} 中稠密, 因此$\chi = 0$. □

§3.2 符号(a, b)

令n 是一个正整数, 本节中我们总假设$\mathrm{char}K \nmid n$, 且K 包含n 次单位根群μ_n.

设$a \in K^*$, 在K_s 中找一个根α 使得$\alpha^n = a$, 则$s(\alpha)/\alpha$ 不依赖于α 的选择, 于是我们可以定义$\varphi_a : G \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\varphi_a(s) = s(\alpha)/\alpha$. 选择一个$n$ 次本原单位根w, 则我们可以将μ_n 和$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 等同起来. 令

$$\chi_a(s) = \frac{1}{n}\varphi_a(s)$$

则我们得到一个G 到$(1/n)\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的同态, 即G 的一个特征. 考虑G 模的正合列

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow K_s^* \xrightarrow{u} K_s^* \longrightarrow 0$$

其中$u(x) = x^n$. 根据Hilbert 90, 我们得到同构

$$K^*/K^{*n} \to \mathrm{Hom}(G, \mu_n)$$

它将a 映为χ_a. 设$b \in K^*$, 令

$$(a, b) = (\chi_a, b)$$

它是B_K 中阶为n 的因子的元素.

命题3.7.

a) $(aa', b) = (a, b) + (a', b)$.

b) $(a, bb') = (a, b) + (a, b')$.

c) $(a, b) = 0$ 当且仅当b 是扩张$K(a^{1/n})/K$ 的范.

d) $a \in K^*, x \in K$ 满足$x^n - a \neq 0$, 则$(a, x^n - a) = 0$. 特别地, $(a, -a) = 0, (a, 1 - a) = 0$.

e) $(a, b) + (b, a) = 0$.

证明. a) 和b) 由命题3.1 得到. c) 由推论3.3 得到. 对于d), 我们首先有

$$x^n - a = \prod_{i=0}^{n-1}(x - w^i\alpha), \qquad \alpha^n = a.$$

设$K(\alpha)/K$ 是m 次扩张, $d = n/m$, 则d 是满足$a = y^d$ 在K 中有解的n 的最大的因子. 此时, $x - w^i\alpha$ 的共轭是$x - w^j\alpha$, $j \equiv i \mod d$. 因此

$$x^n - a = \prod_{i=0}^{d-1} N(x - w^i\alpha)$$

于是$x^n - a$ 是$K(\alpha)/K$ 的一个范. 令$x = 0, 1$ 便得到$(a, -a) = (a, 1-a) = 0$. 最后, e)由

$$\begin{aligned} 0 = (ab, -ab) &= (a, -ab) + (b, -ab) \\ &= (a, -a) + (a, b) + (b, a) + (b, -b) \\ &= (a, b) + (b, a) \end{aligned}$$

得到. □

现在我们来考虑局部域的情形. 假设K 是离散赋值v 的完备域, 剩余域$\bar{K}$ 拟有限. 若$a, b \in K^*$, 则$n \cdot \mathrm{inv}(a, b) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 于是可以定义

$$(a, b)_v = w^{n \cdot \mathrm{inv}(a,b)}.$$

它是一个n 次单位根.

命题3.8. 若$\alpha \in K_s^*$ 是a 的一个n 次单位根, $s_b = (b, */K)$, 则

$$(a, b)_v = s_b(\alpha)/\alpha.$$

证明. 实际上

$$\begin{aligned} (a, b)_v &= w^{n \cdot \mathrm{inv}(a,b)} = w^{n \cdot \mathrm{inv}(\chi_a, b)} \\ &= w^{n\chi_a(s_b)} \quad \text{由命题3.5}, \\ &= w^{\varphi_a(s_b)} = s_b(\alpha)/\alpha. \end{aligned}$$

□

由该定理, 我们得到:

推论3.9. *符号$(a,b)_v$ 不依赖于单位根w 的选择.*

命题3.10.

a) $(aa',b)_v=(a,b)_v\cdot(a',b)_v$.

b) $(a,bb')_v=(a,b)_v\cdot(a,b')_v$.

c) $(a,b)_v=1$ *当且仅当b 是扩张$K(a^{1/n})/K$ 的范.*

d) $(a,-a)_v=1,(a,1-a)_v=1$.

e) $(a,b)_v(b,a)_v=1$.

f) *若$(a,b)_v=1$ 对任意$b\in K^*$ 成立, 则$a\in K^{*n}$.*

证明. 由命题3.7 和推论3.6 即可得到. □

推论3.11. *若$b\in K^*$ 在每个K 的次数整除n 的循环扩张中都是范, 则$b\in K^{*n}$.*

证明. 由前面的命题的c), 我们有$(a,b)=1$ 对任意a 成立, 于是由e) 有$(b,a)=1$, 再由f) 即可. □

§3.3　符号$[a,b)$

本节中我们总假设char$K=p\neq 0$. 令$\wp(x)=x^p-x$, 则它是K 的加法群的自同态. 设$a\in K$, 在K_s 中找一个根α 使得$\wp(\alpha)=a$, 则$s(\alpha)-\alpha$ 不依赖于α 的选择, 于是我们可以定义$\varphi_a:G\to\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\varphi_a(s)=s(\alpha)-\alpha$.令

$$\chi_a(s)=\frac{1}{p}\varphi_a(s)$$

则我们得到一个G 到$(1/n)\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 的同态, 即G 的一个特征. 考虑G 模的正合列

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\longrightarrow K_s\xrightarrow{\wp}K_s\longrightarrow 0.$$

由于$H^1(G,K_s)=0$ ([1], Chap.X, §1, prop.1), 我们得到同构

$$K/\wp(K)\to\mathrm{Hom}(G,\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

它将a 映为χ_a. 设$b \in K^*$, 令

$$(a, b) = (\chi_a, b)$$

它是B_K 中的元素, 且$p[a, b) = 0$.

命题3.12.
a) $[a + a', b) = [a, b) + [a', b)$.
b) $[a, bb') = [a, b) + [a, b')$.
c) $[a, b) = 0$ 当且仅当b 是扩张$K(\alpha)/K$ 的范, 其中$\wp(\alpha) = a$.
d) $[a, a) = 0$, $\forall a \in K^*$.

证明. a) 和b) 由命题3.1 得到. c) 由推论3.3 得到. 对于d), 当$a \in \wp(K)$ 时是显然的. 否则$K(\alpha)/K$ 是p 次扩张,且α 的共轭是$\alpha + i, i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. 由于

$$\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - p + 1) = \alpha^p - \alpha = a$$

于是a 是$K(\alpha)/K$ 中α 的范, 因此由c) 有$[a, a) = 0$. □

现在我们来考虑形式幂级数$K = k((t))$ 的情形, $\mathrm{char} k = p \neq 0$. 若$\omega = f\ dt$ 是K 的一个微分形式, 称t^{-1} 的系数为ω 的留数,记做$\mathrm{Res}(\omega)$. 显然它不依赖于t 的选择.

命题3.13. 令$K = k((t))$, 其中k 是特征$p \neq 0$ 的完全域. 若$a \in K$, $b \in K^*$, 令$c = \mathrm{Res}(a\ db/b) \in k$. 则

$$[a, b) = [c, t) \in B_K.$$

证明. 由于两边都是双线性的, 因此只需对$b = t$ 的情形证明该命题即可. 我们将$a = \sum a_n t^n$ 分为三部分$a_0, \sum_{n<0} a_n t^n, \sum_{n>0} a_n t^n$ 来证.

情形1). $a \in k$. 则$\mathrm{Res}(a\ dt/t) = a$, 显然.

情形2). $a = ut^{-n}$, $u \in k, n > 0$. 则$\mathrm{Res}(a\ dt/t) = 0$. 我们对$n$ 归纳来证$[a, t) = 0$.

当$p \nmid n$ 时,

$$-n[ut^{-n}, t) = [ut^{-n}, t^{-n}) = [ut^{-n}, ut^{-n}) - [ut^{-n}, u).$$

而由命题3.12, $[ut^{-n}, ut^{-n}) = 0$, 而u 是p 次幂, 因此$[ut^{-n}, u) = 0$. 而$p \nmid n$, 于是$[ut^{-n}, t) = 0$.

当$n = mp$ 时, 令$u = v^p$, 于是

$$ut^{-n} = \wp(vt^{-m}) + vt^{-m}.$$

由归纳假设, $[ut^{-n}, t) = [vt^{-m}, t) = 0$.

情形3). $a = \sum_{n>0} a_n t^n$. 则$\mathrm{Res}(a\ dt/t) = a$, 而$a = -\wp(a')$, 于是$[a, t) = 0$, 其中

$$a' = a + a^p + a^{p^2} \cdots .$$

$\square$

假设k 是拟有限域, 令

$$[a, b)_v = p \cdot \mathrm{inv}[a, b) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

命题3.14. 若$\alpha \in K_s^*$ 是方程$\wp(\alpha) = a$ 的一个根, $s_b = (b, */K)$, 则

$$[a, b)_v = s_b(\alpha) - \alpha.$$

证明. 这由命题3.5 直接得到. $\square$

命题3.15.

a) $[a + a', b)_v = [a, b)_v + [a', b)_v$.

b) $[a, bb')_v = (a, b)_v + (a, b')_v$.

c) $[a, b)_v = 0$ 当且仅当b 是扩张$K(\alpha)/K$ 的范, 其中$\wp(\alpha) = a$.

d) $[a, a)_v = 0, \forall a \in K^*$.

e) 若$[a, b)_v = 0$ 对任意$b \in K^*$ 成立, 则$a \in \wp(K)$.

证明. 由命题3.12 和推论3.6 即可得到. $\square$

引理3.16. 令k 是拟有限域, $\mathrm{char} k \neq 0$. 给定$x \in k$, 令$y \in k_s$ 满足$\wp(y) = x$, 令$z = Fy - y$, 则$z \in \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 不依赖于y 的选择. 令$S(x) = z$, 则S 在商群上定义了同构$k/\wp(k) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

证明. 只有$k/\wp(k) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是满射需要验证, 其他都是显然的. 而满射由命题2.6 b) 得到. $\square$

例3.17. 若k 是有限域, $\#k = q = p^f$, 则

$$S(x) = x^{p^{f-1}} + x^{p^{p-2}} + \cdots + x^p + x.$$

实际上,

$$\begin{aligned} S(x) &= Fy - y = y^{p^f} - y \\ &= (y^{p^f} - y^{p^{f-1}}) + \cdots + (y^p - y) \\ &= x^{p^{f-1}} + x^{p^{p-2}} + \cdots + x^p + x. \end{aligned}$$

命题3.18. 设$K = k((t))$, 其中k 是特征p 的拟有限域. 若$a \in K, b \in K^*$, 则

$$[a, b)_v = S(\mathrm{Res}(adb/b)).$$

证明. 根据命题3.13, 我们只需考虑$a \in k, b = t$ 的情形, 此时我们需要说明$[a,t)_v = S(a)$. 设$\alpha \in k_s$ 满足$\wp(\alpha) = a$, $k' = k(\alpha)$, $K' = k'((t))$. 则K'/K 是非分歧扩张, 由命题2.21, $(t, K'/K) = F$, 即$\mathrm{Gal}(K'/K) = \mathrm{Gal}(k'/k)$ 的自由生成元. 再由命题3.14, $[a,t)_v = F\alpha - \alpha = S(a)$. □

命题3.19. 设$K = k((t))$, 其中k 是特征p 的拟有限域. 若$b \in K^*$ 在每个K 的p 次循环扩张中都是范, 则$b \in K^{*p}$.

证明. 由题设知$[a,b)_v = 0, \forall a \in K$. 若$b$ 不是一个p 次幂, 则微分形式db/b 不为0. 对于任意$c \in k$, 我们可以选择a 使得$a\ db/b = c\ dt/t$. 由命题3.18, 我们有$S(c) = 0$, 这与$S : k/\wp(k) \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是满射矛盾! □

§3.4 存在性定理

设K 是离散赋值v 的完备域, 剩余域$\bar{K}$ 有限. 由于K 的任意范群都是指标有限的开子群, 因此它们都是闭子群. 反之,我们有:

定理3.20. K^* 的任意有限指标的闭子群都是范群.

在证明这个定理之前, 我们先来看上一章中的类形式满足的三个条件:
I. 对任意有限扩张L/K, $N_{L/K} : L^* \to K^*$ 有闭像和紧核.

实际上, K 的任意紧子集都包含在有限多个U_K 的陪集中, 而$N_{L/K}^{-1}(U_K) = U_L$ 是紧集.

II. 对任意的素数p, 存在域K_p 满足: 若$K \supset K_p$, 则K 映到自身的映射$\varphi_p : x \mapsto x^p$ 的核是紧的, 且包含K 的泛范群D_K.

此处, K 的泛范群D_K 是指K 的全部范群的交. 当$p \neq \mathrm{char}K$ 时, 我们取K_p 为K 添加上所有的p次单位根得到的域. 若$K \supset K_p$, 则φ_p 的核是p 阶循环群, 因此是紧的. 若$x \in D_K$, 则由推论3.11 知$x \in K^{*p}$.

当$p = \mathrm{char}K$ 时, 取$K_p = K$. 则φ_p 的核是$\{1\}$. 若$x \in D_K$, 则由命题3.19 知$x \in K^{*p}$.

III. 存在K^* 的紧子群U_K, 使得K^* 的任意包含U_K 的有限指标闭子群都是范群.

取U_K 为K^* 的单位群, 则K^* 的包含U_K 的有限指标闭子群都是某个$n\mathbb{Z}$ 在K 的离散赋值v_K 下的原像, 命题2.21 表明这些群都是K 的某个非分歧扩张的范群.

引理3.21. *设K'/K 是任意扩张, K''/K 是其中最大的阿贝尔子扩张, 则*

$$N_{K'/K}K'^* = N_{K''/K}K''^*$$

证明. 令L/K 是包含K'/K 的伽罗瓦扩张, $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. 令$H = \mathrm{Gal}(L/K')$, 则L/K'' 的伽罗瓦群是$G' \cdot H$. 这里G' 表示G 的交换子群, 以下类似.

令$a \in N_{K''/K}K''^*$, 则在$G/(G' \cdot H)$ 中$(a, K''/K) = 1$, 即G/G' 中的元素$(a, L/K)$ 落在同态$H/H' \to G/G'$ 的像中. 由命题2.18 a) 及$K'^* \to H/H'$ 是满射知存在$a' \in K'^*$ 使得

$$(N_{K'/K}a', L/K) = (a, L/K).$$

于是存在$a'' \in L^*$, $N_{L/K}a'' = N_{K'/K}a' - a$, 于是

$$a = N_{K'/K}(a' - N_{L/K'}a''),$$

这表明$N_{K''/K}K''^* \subset N_{K'/K}K'^*$. 另外一边的包含是显然的. □

当L/K 是阿贝尔扩张时, 令$I_L = N_{L/K}L^*$.

命题3.22. 映射$L \to I_L$ 是K 的所有阿贝尔扩张和范群间的双射, 而且对应关系是反包含的, 且满足

$$I_{L\cdot L'} = I_L \cap I_{L'}, \qquad I_{L\cap L'} = I_L + I_{L'}.$$

而且K^* 的任意包含某个范群的子群都是范群.

证明. 若L, L' 均为阿贝尔扩张, 则$L \cdot L'$ 也是, 且$I_{L\cdot L'} \subset I_L \cap I_{L'}$. 反之, 若$a \in I_L \cap I_{L'}$, 则$(a, L\cdot L'/K)$ 在$\mathrm{Gal}(L/K)$ 和$\mathrm{Gal}(L'/K)$ 中的像为0, 因此它本身也是0, 即$a \in I_{L\cdot L'}$. 若$I_L \supset I_{L'}$, 则$I_{L\cdot L'} = I_L$, $[L\cdot L' : K] = [L : K]$, $L' \subset L$. 于是便得到该命题. □

命题3.23. 对任意扩张L/K, 我们有$N^*_{L/K} D_L = D_K$. 此处D_K 表示泛范群.

证明. $N^*_{L/K} D_L \subset D_K$ 是显然的. 反之, 若$a \in D_K$, 令L' 是L 的扩张, 令

$$F(L') = N_{L'/L} L'^* \cap N^{-1}_{L/K}(a).$$

则$F(L')$ 是紧集. 而由于$a \in D_K$, 存在$b' \in L^*$ 使得$Nb' = a$, 于是b' 在L^* 中的像属于$F(L')$, 因此该集合非空. 由于L' 变化时, $F(L')$ 形成$F(L)$ 的正向递减非空紧集子空间列, 因此交非空. 若$b \in \cap F(L')$, 则$b \in D_L$, $N_{L/K}(b) = a$. □

命题3.24. 对任意域K, D_K 可除且等于$\cap n \cdot K^*$.

证明. 令$a \in K^*$, L 是K 的包含K_p 的扩张, 记

$$H(L) = \{b \in K^* | pb = a, b \in N_{L/K} L^*\},$$

它是K^* 的紧子集. 我们断言它非空. 实际上, 由前面的命题, $a = N_{L/K}x, x \in D_L$,于是由条件II., $x = py, y \in L^*$, 取$b = N_{L/K}y$ 即可. 类似上一个命题的证明可知$H(L)$ 的交非空, 且若b 在其中, 我们有$pb = a, b \in D_K$. 因此D_K 可除且$D_K \subset \bigcap n \cdot K^*$. 反之, 若$a \in \bigcap n \cdot K^*$, $n = [L : K]$, 则$a = nb, b \in K^*$, $a = N_{L:K} b$, 因此$a \in D_K$. □

定理*3.20* 的证明. 设I 是一个有限指标的闭子群, $n = (K^* : I)$, 则$n \cdot K^* \subset I$. 由命题3.24, $D_K \subset I$. 若N 取遍所有范群, 则

$$\bigcap (N \cap U_K) = D_K \cap U_K \subset I.$$

而$N\cap U_K$ 紧, I 开, 因此存在N 使得$N\cap U_K\subset I$. 我们得到

$$N\cap(U_K+(N\cap I))\subset I.$$

$N\cap I$ 是指标有限的闭集, 因此$U_K+(N\cap I)$ 也是, 而且包含U_K. 由条件III. 知它是一个范群, 再由命题3.22 知$N\cap(U_K+(N\cap I))$ 是范群, 于是I 也是. □

推论3.25.
a) K^* 的泛范群是$\{1\}$.
b) 若记$\mathfrak{I}_K$ 为极大阿贝尔扩张K^{ab}/K 的惯性群, 则互反同构$U_k\to\mathfrak{I}_K$ 是拓扑群间的同构.
c) 对于$\mathfrak{U}=\mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$, 我们有交换图表:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U_K \arrow[r] \arrow[d, "\omega_T"] & K^* \arrow[r] \arrow[d, "\omega"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}_K \arrow[r] & \mathfrak{U}_K \arrow[r] & \hat{\mathbb{Z}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中ω 是互反映射$x\to(x,*/K)$, ω_T 是$b)$ 中定义的同构.

证明. 设$\pi\in K$ 的离散赋值为1, 令$V_{m,n}$ 为K 中由π^m 和U_k^n 生成的子群. 这些群都是指标有限的闭集, 且交为$\{1\}$. 于是由命题3.20 得到a). 注意到U_K 的拓扑由它的指标有限的闭集定义, 而且在该拓扑下是紧的, 于是得到b). 最后, 由b) 和$\mathfrak{U}_K/\mathfrak{I}_K=\hat{\mathbb{Z}}$ 得到c). □

参考文献

[1] Jean-Pierre Serre, *Local Fields*, Springer, 1979.

[2] Andre Weil, *Basic Number Theory*, Springer, 1974.