数学（下）课件备注

张神星

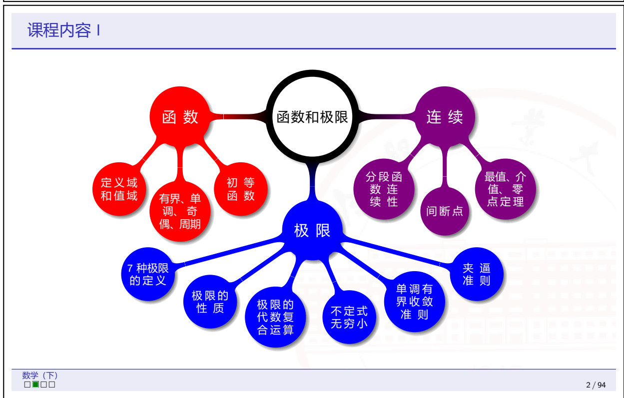
2023 年 3 月 4 日

课件可在该网站向下翻到教学一栏处下载.

期中考试安排在第 11 周.

作业/期中/期末/课堂测验的占比分别为 15%, 25%, 50%, 10%. 其中课堂测验分为 3 次, 每次 10 道选择题, 最后选得分最高的两次平均数作为最终得分.

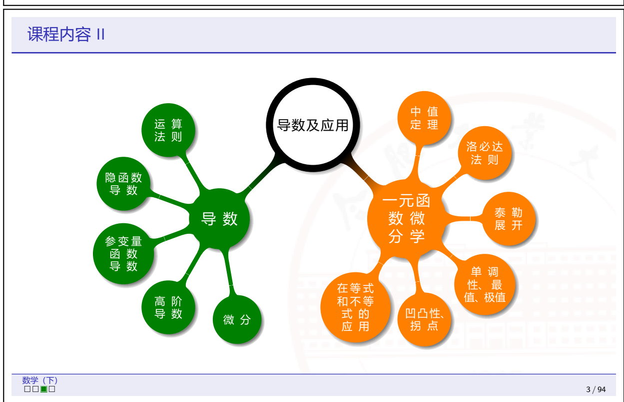
作业每章结束时交一次, 但最好平时上完一节就完成相应节的习题, 不要一次性堆到最后.



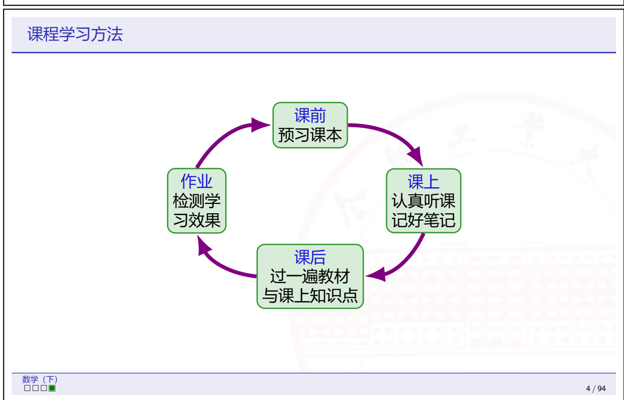
函数一章是基础知识, 主要是在回顾高中的内容基础上, 略作扩充和一般化.

极限是核心内容之一.

连续需要基于极限概念.



各章节的主要内容和关系.



每节的作业整体难度不大, 有余力的尽量都做一遍, 以巩固自己学习到的内容.

第一章　函数

第一章内容主要是回顾函数的基础概念, 函数的表达和构造方式, 函数的特征, 常见函数, 以及常用的等式不等式技巧等.

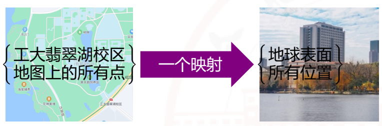
第一节　函数的概念

第一节内容主要是回顾函数的基础概念, 函数的表达和构造方式.

映射的引入

高中时, 我们已经知道什么是集合了. 在数学中, 我们往往关心的不仅是单个的对象, 更关心对象之间的联系. 这就引出了映射的概念.

映射, 英文为 map, 也就是地图:



地图的特点是什么? 每个地图上的点都对应真实世界唯一的一个位置.

我倾向于从映射的角度来介绍函数.

映射的定义

用数学语言将其重新表述:

定义

给定集合 A, B. 若 $\forall a \in A, \exists! b \in B$ 与之对应, 则称这个对应关系为 A 到 B 的一个映射 $f : A \to B$. 记作 $b = f(a)$ 或 $a \xmapsto{f} b$.

这里

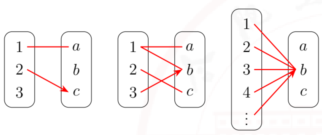
- $\forall$ 表示任意 (Any);
- $\exists$ 表示存在 (exists);
- $\exists!$ 表示存在唯一.

通常可用 f, g, h, φ, ψ 等字母来表示映射.

这些记号在高等数学课程中经常见到, $\forall, \exists$ 分别是各自首字母倒过来.

映射的特点

映射由出发的集合, 到达的集合, 对应关系三个部分组成, 缺一不可. 下述对应是映射吗?



不是　　不是　　是

互动: 为什么不是映射?

映射的个数

非考试内容

例

集合 $A=\{1,2,3\}$ 到集合 $B=\{1,2\}$ 的映射有多少个?

解

设 $f:A\to B$ 是一个映射. 对于 $\forall a\in A, f(a)\in B$ 有 2 种选法, 因此一共有

$$2\times 2\times 2=2^3=8$$

种选法, 即一共有 8 个映射.

将有限集合 S 中元素的个数记为 $|S|$. 那么有限集合 A 到 B 之间的映射一共有 $|B|^{|A|}$ 个.

提问: 出发的集合能不能是空集?

当 $A=\emptyset, |A|=0$ 时, $|B|^{|A|}=1$. 所以我们认为从空集到其它集合的映射是有一个的.

函数的定义

定义

*函数*是数的集合之间的映射:

$$数的集合\ D \xrightarrow{映射} 数的集合\ Y$$

这里的 "数" 就是指我们所学过的所有数, 也就是下列集合中的元素:

(1) 自然数集合 $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\dots\}$,

(2) 整数集合 $\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\dots\}$,

(3) 有理数集合 $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\,a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\right\}$,

(4) 实数集合 $\mathbb{R}$ 和复数集合 $\mathbb{C}$.

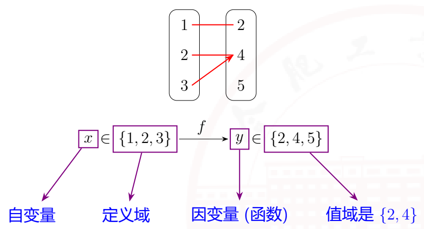
在高等数学中, 我们只考虑**实数集合 $\mathbb{R}$ 的子集**, 即 $D,Y\subseteq\mathbb{R}$.

例

汽车离出发点的距离 $s\in[0,+\infty)$ 是出发的时间 $t\in[0,+\infty)$ 的函数.

介绍一下空心体字母的写法.

函数的要素



函数的定义域

我们常常也用因变量来记相应的函数, 即 y 是 x 的一个函数.

定义

函数 $f:D\to Y$ 的*定义域*是指集合 D.

函数的定义域通常分为两种情形:

(1) 根据函数有意义的范围来确定定义域 (自然定义域).
例如 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, 定义域为 $(1,+\infty)$.

(2) 直接在函数定义中给出了自变量的范围 (不超出自然定义域的范围).
例如 $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

(3) 还有一种情形是根据函数的实际意义来确定的.
例如球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 是半径的函数, 定义域是 $(0,+\infty)$.

函数定义域的约束条件

常见函数的定义域通常由下述条件所约束:

(1) 分母不等于零;

(2) (偶数次) 根号下要 $\geqslant 0$, 注意奇数次根号下没有限制;

(3) $\ln, \log_a$ 内要 >0;

(4) $\arcsin, \arccos$ 内范围为 $[-1,1]$, 注意 $\arctan$ 内没有限制.

典型例题: 求函数定义域

例

(2022 年期中) 求函数 $f(x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域.

解

由 $x^2-1>0$ 可知 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. 由于 $\arctan\dfrac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 因此 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

练习

填空题: 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\ln x}-1}+\arcsin x$ 的定义域是 $\underline{\ (0,1]\ }$.

函数的值域

定义

函数 $f:D\to Y$ 的靶集是指集合 Y.

适当地放大函数的靶集不会影响到函数对应, 所以我们总可以将 $\mathbb{R}$ 作为靶集.

定义

函数 $f:D\to\mathbb{R}$ 的值域是指集合 $\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

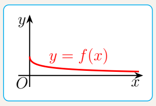
例题: 求函数的值域

例

求 $f(x)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)^2}$ 的值域.

解

由于 $x\geqslant 0$, $\sqrt{x}+\sqrt{2}\in[\sqrt{2},+\infty)$. 因此 $(\sqrt{x}+\sqrt{2})^2\in[2,+\infty)$, 从而 $f(x)$ 的值域是 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.



例题: 求函数定义域和值域

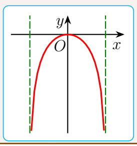
例

求 $y=\ln(1-x^2)$ 的定义域和值域.

解

定义域为 $\{x\in\mathbb{R}\mid 1-x^2>0\}=(-1,1)$.

当 $x\in(-1,1)$ 时, $x^2\in[0,1)$, $1-x^2\in(0,1]$, 因此 $y=\ln(1-x^2)\in(-\infty,0]$, 即值域为 $(-\infty,0]$.



例题: 求抽象函数定义域

例

设 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$. 求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域, 其中 $a>0$.

解

由题意可知 $x+a,x-a\in[-1,1]$, 即

$$-a-1\leqslant x\leqslant 1-a,\quad a-1\leqslant x\leqslant a+1.$$

- 当 $0<a<1$ 时, $1-a>a-1$. 此时定义域为 $[a-1,1-a]$.
- 当 $a=1$ 时, $x=0$. 此时定义域为 $\{0\}$.
- 当 $a>1$ 时, $1-a<a-1$. 此时定义域为 $\emptyset$.

相同的函数

我们称定义域相等，且对应法则相同的两个函数为同一函数.

例

(1) $f_1(x)=\ln\frac{1}{x}$ 和 $f_2(x)=-\ln x$ 是同一函数，因为二者的定义域都是 $(0,+\infty)$，且对应关系相同.

(2) $f_1(x)=\frac{1}{x}, x\in(0,+\infty)$ 和 $f_2(x)=\frac{1}{x}$ 是不同的函数. 因为 f_2 的定义域是 $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(3) $y=x^2, x\in[0,+\infty)$ 与 $s=t^2, t\in[0,+\infty)$ 是同一函数. 函数与变量所用的符号没有关系，这便是函数的变量无关性.

练习

判断题：$y=\frac{x^2}{x}$ 和 $y=x$ 是同一函数. (×)

例题：解函数方程

例

已知函数 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}$. 求 $f(x)$.

通过给定条件来求解函数，这种问题被称为函数方程.

解

令 $x=\frac{1}{t}$，则 $2f\left(\frac{1}{t}\right)+f(t)=3t$. 联立

$$\begin{cases}2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x}\\ 2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=3x\end{cases}\quad \text{可得}\quad f(x)=\frac{2}{x}-x.$$

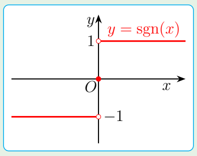
分段函数

有时候，一个函数需要分情形来表达，这就是所谓的分段函数.

例

符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$.

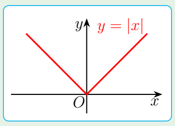


在画函数图像时，用实心圆点表示包含该点，用空心圆表示不包含该点.

分段函数

例

绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0.\end{cases}$

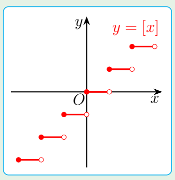


定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$.

分段函数

例

取整函数 $y=[x]$ 表示不超过 x 的最大的整数.



定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为整数集 $\mathbb{Z}$.

分段函数

分段函数只是一种简便称呼，并不是严格的数学概念.

例

$f(x)=\begin{cases}2, & x=0\\ 3, & x=1\\ 5, & x=2\end{cases}$ 也是一种分段函数.
定义域 $\{0,1,2\}$，值域 $\{2,3,5\}$.
我们也可以把它写成 $f(x)=1+2^x, x\in\{0,1,2\}$.

多值函数和隐函数

有些情形下，一个自变量 x 对应不止一个值 y，这时候按照定义它不是函数，但一般为了简便称之为多值函数. 这种情况常常发生在从一个方程 $F(x,y)=0$ 中求解 $y=f(x)$. 从这种方式得到的函数或多值函数被称为隐函数.

例

(1) $x^2+y^2=1$. 每个 $x\in(-1,1)$ 有两个 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 与之对应.
(2) $e^y+y=x$. 由于 e^y+y 关于 y 是单调递增函数，因此对于 $\forall x\in(-\infty,+\infty), \exists! y$ 满足该方程. 所以该方程定义了函数 $y=f(x)$，定义域和值域均为 $(-\infty,+\infty)$.

多值函数的单值分支

如果对每个 x 选取固定的一个值与之对应，则可称之为该多值函数的一个单值分支.

例

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 是 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ 的两个单值分支.
(2) 设 $\sin y=x$，则 y 是 $x\in[-1,1]$ 的多值函数. 对任意整数 k，

$$y=2k\pi+\arcsin x,\qquad y=(2k+1)\pi-\arcsin x$$

都是它的单值分支.

函数和隐函数的图像 非考试内容

定义

称集合 $G_F=\{(x,y)\mid F(x,y)=0\}$ 为方程 $F(x,y)=0$ 的图像.

当 $(a,b)\in G_F$ 时，$F(a,b)=0$，因此

$$F[(a+u)-u,b]=0,\qquad (a+u,b)\in G_F(x-u,y).$$

也就是说，$F(x-u,y)=0$ 的图像为 G_F 向右移动距离 u.

隐函数的图像 非考试内容

隐函数图像的变换

(1) $F(x-u,y)=0$ 的图像为 G_F 向右移动距离 u.
(2) $F(x,y-u)=0$ 的图像为 G_F 向上移动距离 u.
(3) $F\left(\frac{x}{u},y\right)=0$ 的图像为 G_F 沿 x 轴放缩 u 倍.
(4) $F\left(x,\frac{y}{u}\right)=0$ 的图像为 G_F 沿 y 轴放缩 u 倍.
(5) $F(-x,y)=0$ 的图像与 G_F 关于 y 轴对称.
(6) $F(x,-y)=0$ 的图像与 G_F 关于 x 轴对称.
(7) $F(-x,-y)=0$ 的图像与 G_F 关于原点中心对称.
(8) $F(y,x)=0$ 的图像与 G_F 关于 $y=x$ 轴对称.

函数的图像

非考试内容

令 $F(x,y)=y-f(x)$, 则 G_F 就是函数 $y=f(x)$ 的图像.

函数图像的变换

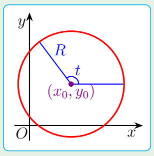
(1) $f(x-u)$ 的图像为 $f(x)$ 的图像向右移动距离 u.
(2) $f(x)+u$ 的图像为 $f(x)$ 的图像向上移动距离 u.
(3) $f\left(\dfrac{x}{u}\right)$ 的图像为 $f(x)$ 的图像沿 x 轴放缩 u 倍.
(4) $uf(x)$ 的图像为 $f(x)$ 的图像沿 y 轴放缩 u 倍.
(5) $f(-x)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.
(6) $-f(x)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像关于 x 轴对称.
(7) $-f(-x)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像关于原点中心对称.

圆的参变量方程

例

设 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2>0$, 则

$$\begin{cases} x=x_0+R\cos t, \\ y=y_0+R\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi).$$



定义

我们称 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$ $t\in D$ *这种形式定义的方程 (或函数) 为参变量方程(参变量函数).*

椭圆的参变量方程

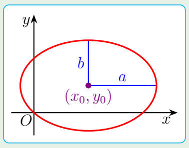
例

椭圆

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1, \quad a,b>0$$

满足参变量方程

$$\begin{cases} x=x_0+a\cos t, \\ y=y_0+b\sin t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi).$$



双曲线的参变量方程

例

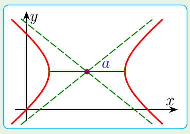
双曲线

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1, \quad a,b>0$$

满足参变量方程

$$\begin{cases} x=x_0+a\csc t, \\ y=y_0+b\cot t, \end{cases} \quad t\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi).$$

因为 $\csc^2 t-\cot^2 t=1$.



函数的限制

定义

设 $f(x)$ 是一个函数. 对于定义域 D 的子集 X, 可以定义一个新的函数为 $f|_X$, 定义域为 X 且对应法则和 f 相同, 称之为 f 在 X 上的限制. 显然, 当 $X\neq D$ 时 f 和 $f|_X$ 是不同的函数.

例

$f(x)=\cos\pi x$ 在整数集 $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}$ 上的限制为

$$f|_{\mathbb{Z}}(n)=\begin{cases} -1, & n \text{ 是奇数} \\ 1, & n \text{ 是偶数} \end{cases}=(-1)^n.$$

例

设 $y_1=x, y_2=(\sqrt{x})^2$, 则 y_2 的定义域为 $[0,+\infty)$, 且 $\forall x>0, y_1=y_2$. 因此 $y_2=y_1|_{[0,+\infty)}$.

复合函数

定义

对于函数 $f: A \to B, g: B \to C$, 对应 $x \mapsto g[f(x)]$ 定义了函数 $h: A \to C$, 称为函数 g 和 f 的复合. 记作 $h = g \circ f$, 即

$$g \circ f : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

为便于理解, 可用同一记号来表示 f 的因变量和 g 的自变量.

例

(1) $f(x) = x^2, g(y) = \sin y$, 则

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sin(x^2).$$

(2) $f(x) = \sqrt{x}, g(y) = \sqrt{1-y}$, 则

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = \sqrt{1-\sqrt{x}}.$$

它的定义域为 $[0,1]$, 值域为 $[0,1]$.

例题: 求复合函数

例

设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x > 1, \\ x^2, & x \leqslant 1, \end{cases}$, $\varphi(x) = x - 1$. 求 $f[\varphi(x)]$ 和 $\varphi[f(x)]$.

分析

求分段函数的复合的做法一般是直接将里面的函数代入到分段函数定义中, 然后求出自变量的范围.

例题: 求复合函数

解

$$\begin{aligned} f[\varphi(x)] &= \begin{cases} \varphi(x)+1, & \varphi(x) > 1 \\ \varphi(x)^2, & \varphi(x) \leqslant 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x-1+1, & x-1 > 1 \\ (x-1)^2, & x-1 \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} x, & x > 2, \\ (x-1)^2, & x \leqslant 2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\varphi[f(x)] = f(x) - 1 = \begin{cases} x, & x > 1, \\ x^2 - 1, & x \leqslant 1. \end{cases}$$

例题: 求复合函数

例

设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解

当 $|x| \leqslant 1$ 时, $f(x) = 1, f[f(x)] = 1$. 当 $|x| > 1$ 时, $f(x) = 0, f[f(x)] = 1$. 故 $f[f(x)] = 1$.

例

设 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$, $\varphi(x) = 1 - \ln x$. 求 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

解

由 $\varphi(x) = 1 - \ln x \in (0,1]$ 可得 $0 \leqslant \ln x < 1$, $1 \leqslant x < e$, 即 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $[1, e)$.

例题: 求复合函数

例

设 $f(x) = e^{x^2}, f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geqslant 0$. 求 $\varphi(x)$ 的定义域.

分析

我们先解出 $\varphi(x)$ 再计算它的定义域.

解

由于 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi(x)^2} = 1 - x$, 因此

$$\varphi(x)^2 = \ln(1-x), \quad \varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}.$$

于是 $\ln(1-x) \geqslant 0$, 即 $1 - x \geqslant 1, x \leqslant 0$. $\varphi(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0]$.

多重复合函数

对于两个以上的函数, 我们也可以进行复合.

例

(1)

$$y=\sin u,\quad u=\sqrt{v},\quad v=e^x+1$$

的复合是 $y=\sin(\sqrt{e^x+1})$.

(2) 函数 $y=2^{\arctan(x^2+1)}$ 可以分解为下述三个函数的复合

$$y=2^u,\quad u=\arctan v,\quad v=x^2+1.$$

这种分解在进行复杂求导时是十分必要的.

反函数

定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 Y. 若函数 $u=g(v)$ 的定义域为 Y, 且

$$\forall x\in D, g[f(x)]=x,\quad \forall y\in Y, f[g(y)]=y,$$

则称 g 是 f 的反函数, 并记做 $g=f^{-1}$ 或 $x=f^{-1}(y)$.

可以看出, 反函数就是把每个元素的像打回到原来的元素. 反函数不一定存在. 例如 $y=x^2$ 没有反函数, 因为 -1 和 1 的像相同. 但是 $y=x^2, x\in[0,+\infty)$ 有反函数 $x=\sqrt{y}$.

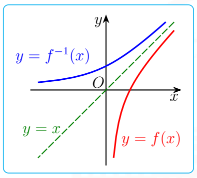
反函数存在当且仅当不同的自变量具有不同的函数值, 即:

$$x_1\neq x_2 \implies f(x_1)\neq f(x_2).$$

此时 $f: D\to Y$ 是一一对应.

反函数

由于 (a,b) 在 f 的图像上当且仅当 $b=f(a)$, 这等价于 $a=f^{-1}(b)$, 即 (b,a) 在 f^{-1} 的图像上. 故反函数和原函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.



若 f 的图像关于直线 $y=x$ 翻转后仍然是一个函数的图像, 那么 f 存在反函数.

例题: 求反函数

例

求函数 $y=\sqrt{\pi+4\arcsin x}$ 的反函数.

分析

求反函数的时候, 不要忘了反函数的定义域为原函数的值域.

解

$$\pi+4\arcsin x=y^2,\quad \arcsin x=\frac{y^2-\pi}{4},\quad x=\sin\left(\frac{y^2-\pi}{4}\right).$$

因为 $\pi+4\arcsin x\geqslant 0, \arcsin x\geqslant -\frac{\pi}{4}$, 所以 $x\in[-\frac{\sqrt{2}}{2},1]$. 于是

$$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right],\quad \pi+4\arcsin x\in[0,3\pi],\quad y\in[0,\sqrt{3\pi}].$$

因此题设函数的反函数为 $y=\sin\left(\frac{x^2-\pi}{4}\right), x\in[0,\sqrt{3\pi}]$.

例题: 求反函数

例

求函数 $y=\begin{cases}x, & x<1,\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4,\\ 2^x, & x>4\end{cases}$ 的反函数.

分析

求分段函数反函数时, 需要先确定每一分段对应的函数的值域.

解

- 当 $x<1$ 时, $y=x\in(-\infty,1), x=y$;
- 当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时, $y=x^2\in[1,16], x=\sqrt{y}$;
- 当 $x>4$ 时, $y=2^x\in(16,+\infty), x=\log_2 y$.

例题: 求反函数

续解

因此该函数存在反函数

$$y=\begin{cases}x, & x<1,\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16,\\ \log_2 x, & x>16.\end{cases}$$

第二节　函数的几种特征

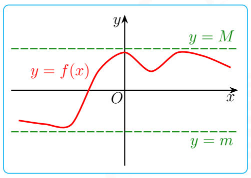
- 有界性
- 单调性
- 奇偶性
- 周期性

有界和无界

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果 $f(x)$ 的值域包含在一个有限区间 $[m,M]$ 内, 则称 $f(x)$ 有界. 否则称 $f(x)$ 无界.

$f(x)$ 有界等价于: $\exists M>0$ 使得 $\forall x\in D, |f(x)|\leqslant M$.



有界性的证明

判断有界或无界的方法是:

有界性和无界性的证明

(1) 有界: 找到 M 使得 $\forall x\in D, |f(x)|\leqslant M$.
(2) 无界: $\forall M>0$, 构造 $x_M\in D$ 使得 $|f(x_M)|\geqslant M$. 实际上只需对任意充分大的正整数 M, 构造这样的 x_M.

例

$f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}, x\in(1,+\infty)$. 对任意正整数 M, 令

$$x_M=\sqrt{1+\frac{1}{M}}\in(1,+\infty),$$

则 $f(x_M)=M$. 因此 $f(x)$ 无界.

若 f 的限制 $f|_X$ 有界 (或无界), 则称 f 在 X 上有界 (或无界).

上确界和下确界

非考试内容

有时候函数只在一边是有界的.

定义

(1) 若 $\exists M$ 使得 $\forall x\in D, f(x)\leqslant M$, 则称 $f(x)$ 上有界.
(2) 若 $\exists m$ 使得 $\forall x\in D, f(x)\geqslant m$, 则称 $f(x)$ 下有界.

显然函数的上下界是不唯一的, 且 $f(x)$ 有界 $\iff$ $f(x)$ 上有界且下有界.

定义

(1) 在函数 $f(x)$ 所有的上界中, 存在一个最小的上界, 称之为上确界 $\sup f$. 若 $f(x)$ 无上界, 记 $\sup f=+\infty$.
(2) 在函数 $f(x)$ 所有的下界中, 存在一个最大的下界, 称之为下确界 $\inf f$. 若 $f(x)$ 无下界, 记 $\inf f=-\infty$.

注意, 上确界不等于最大值, 因为这个上确界不一定能取到. 但如果存在最大值, 则二者是相等的. 下确界与最小值的关系类似.

单调函数

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D.

(1) 若 $\forall x_1 < x_2 \in D$, 有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, 则称 f 单调不减.

(2) 若 $\forall x_1 < x_2 \in D$, 有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, 则称 f 单调不增.

(3) 若 $\forall x_1 < x_2 \in D$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 f 单调递增. 单调

(4) 若 $\forall x_1 < x_2 \in D$, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 f 单调递减. 函数

某些教材则分别称这些概念为单调递增、单调递减、严格单调递增、严格单调递减, 注意甄别.

单调函数的运算

非考试内容

单调函数的复合和四则运算有下述结论.

结论

(1) 以下命题等价:
- $f(x)$ 单调递增;
- $-f(x)$ 单调递减;
- $f(-x)$ 单调递减;
- $-f(-x)$ 单调递增.

(2) 设 f_1, f_2 单调递增, g_1, g_2 单调递减, 则
- $f_1 + f_2, f_1 \circ f_2, g_1 \circ g_2$ 单调递增;
- $f_1 \circ g_1, g_1 \circ f_1, g_1 + g_2$ 单调递减;
- 若 f_1, f_2 恒大于零, 则 $f_1 f_2$ 单调递增.

单调函数的反函数

定理

若 $f(x)$ 是单调函数, 则 $f(x)$ 有反函数, 且它的单调性和 $f(x)$ 相同.

分析

要说明一个函数有反函数, 只需要说明 $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.

证明

我们只证明单调递增情形, 单调递减情形类似.

$$x_1 \neq x_2 \in D \implies \begin{cases} x_1 < x_2 \\ \text{或 } x_1 > x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} f(x_1) < f(x_2) \\ \text{或 } f(x_1) > f(x_2) \end{cases} \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

因此 f 是单射, 故 f 有反函数.

设 $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$. 若 $x_1 \geqslant x_2$, 则 $f(x_1) \geqslant f(x_2), y_1 \geqslant y_2$, 矛盾! 所以 $x_1 = f^{-1}(y_1) < x_2 = f^{-1}(y_2)$, 故 f^{-1} 单调递增. □

函数在区间上的单调性

很多时候, 函数虽然在整个定义域上不单调, 但在一段区间 $I \subseteq D$ 上是单调的.

例

(1) $\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增, 且值域为 $[-1, 1]$. 因此存在单调递增的反函数

$$\arcsin x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(2) e^{-x} 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递减, 且值域为 $(0, +\infty)$. 因此存在单调递减的反函数

$$-\ln x : (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty).$$

奇函数和偶函数

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.

(1) 若 $\forall x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是偶函数.

(2) 若 $\forall x \in D$, 有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 是奇函数.

例

(1) x^n (n 是偶数), $\cos x$, $|x|$, 1 是偶函数.

(2) x^n (n 是奇数), $\sin x$, $\operatorname{sgn} x$, $e^x - e^{-x}$ 是奇函数.

结论

偶函数的图像关于 y 轴轴对称, 奇函数的图像关于原点中心对称.

例题: 奇函数和偶函数

例

设 $a>0, a\neq 1, f(x)=\log_a\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, 则

$$\frac{x-1}{x+1}>0, \qquad x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).$$

因此它的定义域关于原点对称. 由于

$$f(-x)=\log_a\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)=\log_a\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\log_a\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-f(x),$$

因此 $f(x)$ 是奇函数.

例题: 奇函数和偶函数

例

设 $a>0, a\neq 1, f(x)=\frac{1-a^x}{1+a^x}$, 则它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由于

$$f(-x)=\frac{1-a^{-x}}{1+a^{-x}}=\frac{a^x-1}{a^x+1}=-f(x),$$

因此 $f(x)$ 是奇函数. 事实上它是上一例子的反函数.

思考

设 $[x]$ 是取整函数, 函数 $f(x)=[x]+\frac{1}{2}$ 的奇偶性是怎样的?

答案

$f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数.

奇函数和偶函数的运算

非考试内容

结论

设 f, f_1, f_2 是奇函数, g, g_1, g_2 是偶函数.

(1) 设 $I\subseteq D_f$ 关于原点对称, 则 $f|_I$ 是奇函数, $g|_I$ 是偶函数.
(2) 如果 f 有反函数, 则 f^{-1} 也是奇函数.
(3) g 不存在反函数 (除非定义域是 0).
(4) $f_1f_2, g_1g_2, g\circ f$ 是偶函数.
(5) $fg, f_1\circ f_2$ 是奇函数.
(6) 设 h 是任一函数, 则 $h\circ g$ 是偶函数.

函数可分解为奇函数与偶函数之和

非考试内容

结论

若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称, 则 $f(x)$ 可以唯一地表示成一个偶函数和一个奇函数之和.

证明

设 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 其中 $f_1(x)$ 是偶函数, $f_2(x)$ 是奇函数. 那么 $\forall x\in D$,

$$f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)-f_2(x).$$

从而

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}, \qquad f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

唯一性得证.

反过来, 这样的 $f_1(x), f_2(x)$ 的定义域和 $f(x)$ 的定义域相同, 且分别是偶函数和奇函数, 于是存在性得证. □

周期函数

定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若 $\exists T\neq 0$ 使得 $\forall x\in D$, 有 $x+T\in D$ 和 $f(x+T)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 是周期函数, T 是它的一个周期.

周期函数的图像可以由它在任意一段长为 $|T|$ 的区间上的图像水平逐段平移得到.

例

(1) $y=\sin(\omega x), \omega\neq 0$ 是周期函数, 周期为 $\frac{2k\pi}{\omega}, k\in\mathbb{Z}$.
(2) 常数函数 $y=C$. 任意非零实数都是它的周期.

若 T 是 $f(x)$ 的一个周期, 则显然 $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, \dots$ 都是它的周期. 对于很多周期函数而言, 存在最小的一个正周期, 称之为最小正周期, 简称为它的周期.

周期函数的性质

非考试内容

例

狄利克雷函数是指

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$$

不难看出, 任意有理数都是它的周期.

结论

设 f 是周期函数, g 是任一函数.

(1) $g\circ f$ 是周期函数.

(2) f 不是单调函数.

(3) f 不存在反函数.

(4) 如果 f 在一段长为周期的区间上有界, 则 f 是有界函数.

例题: 函数的特征

例

函数 $f(x)=|x\cos x|e^{\cos x}$ 在 $\mathbb{R}$ 上是 (D).

(A) 有界函数 (B) 单调函数 (C) 周期函数 (D) 偶函数

解

由于 $|x\cos x|$ 和 $e^{\cos x}$ 都是偶函数, 因此 $f(x)$ 是偶函数, 选 D.

对于任意正整数 M,

$$f(2M\pi)=2M\pi e>M,$$

所以 $f(x)$ 无界.

由于

$$f(0)=0,\quad f(\pi)=\frac{\pi}{e},\quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0,$$

因此 $f(x)$ 不单调.

若 $T>0$ 是 $f(x)$ 的周期, 则由 $x\in[0,T)$ 时, $f(x)\leqslant Te$ 可知 $f(x)$ 有界, 矛盾!

第三节 初等函数

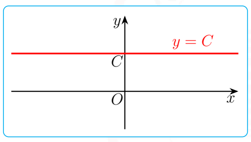
- 基本初等函数
- 初等函数

常数函数

定义

常数函数: $y=C, x\in(-\infty,+\infty)$.

- 值域为 $\{C\}$.
- 有界, 周期 (无最小正周期), 偶函数.
- 当 $C=0$ 时, 它也是奇函数.
- 图像是过点 $(0,C)$ 且平行于 x 轴的直线.

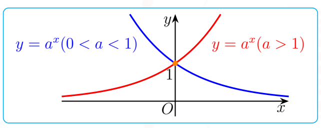


指数函数

定义

指数函数: $y=a^x(a>0,a\neq 1), x\in(-\infty,+\infty)$.

- 值域为 $(0,+\infty)$.
- 图像过点 $(0,1)$.
- 当 $a>1$ 时, 它单调递增; 当 $0<a<1$ 时, 它单调递减.
- $y=a^x$ 的图像和 $y=(1/a)^x$ 的图像关于 y 轴对称.
- 当 $a=1$ 时, 它退化为常数函数 $y=1$.
- 直线 $y=0$ 是它唯一的渐近线.

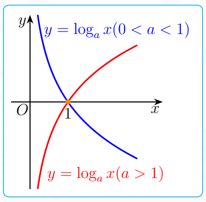


对数函数

定义

对数函数: $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1, x \in (0, +\infty)$.

- 对数函数和指数函数互为反函数.
- 值域为 $(-\infty, +\infty)$.
- 图像过点 $(1, 0)$.
- 当 $a > 1$ 时, 它单调递增;
- 当 $0 < a < 1$ 时, 它单调递减.
- 直线 $x = 0$ 是它唯一的渐近线.
- $y = \log_a x$ 的图像和 $y = \log_{1/a} x$ 的图像关于 x 轴对称.



- 称 $\lg x = \log_{10} x$ 为常用对数, $\ln x = \log_e x$ 为自然对数, 其中无理数 $e = 2.71828\cdots$ 被称为自然对数的底.

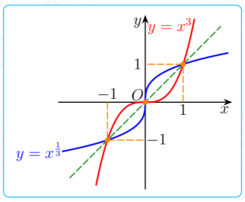
幂函数: 正有理幂次 $\frac{p}{q}$, p, q 奇

定义

幂函数: $y = x^\mu (\mu \neq 0)$.

根据 μ 的不同, 它的定义域和性质也有所不同.
当 μ 是有理数时, 我们可将其表为 $\mu = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 为互质的整数.

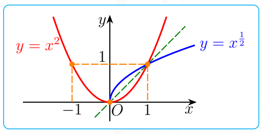
(1) 当 $\mu > 0, p, q$ 为奇数时,
- 定义域和值域为 $(-\infty, +\infty)$.
- 奇函数, 图像过点 $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$.
- $y = x^\mu$ 与 $y = x^{\frac{1}{\mu}}$ 互为反函数.



幂函数: 正有理幂次 $\frac{p}{q}$, p, q 一奇一偶

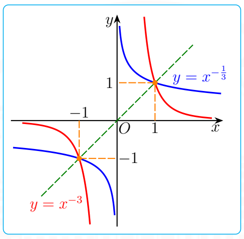
(2) 当 $\mu > 0$, p 偶 q 奇时,
- 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$.
- 偶函数, 图像过点 $(0, 0), (\pm 1, 1)$.

(3) 当 $\mu > 0$, p 奇 q 偶时,
- 定义域和值域为 $[0, +\infty)$.
- 图像过点 $(0, 0), (1, 1)$.
- $y = x^\mu$ 与 $y = x^{\frac{1}{\mu}}$ 在 $(0, +\infty)$ 的限制互为反函数.



幂函数: 负有理幂次 $\frac{p}{q}$, p, q 奇

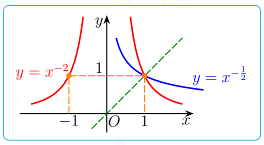
(4) 当 $\mu < 0, p, q$ 为奇数时,
- 定义域和值域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
- 奇函数, 图像过点 $(1, 1), (-1, -1)$.
- 有两条渐近线 $x = 0, y = 0$.
- $y = x^\mu$ 与 $y = x^{\frac{1}{\mu}}$ 互为反函数.



幂函数: 负有理幂次 $\frac{p}{q}$, p, q 一奇一偶

(5) 当 $\mu < 0, p$ 偶 q 奇时,
- 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$.
- 偶函数, 图像过点 $(\pm 1, 1)$, 有两条渐近线 $x = 0, y = 0$.

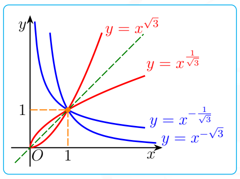
(6) 当 $\mu < 0, p$ 奇 q 偶时,
- 定义域和值域为 $(0, +\infty)$.
- 图像过点 $(1, 1)$, 有两条渐近线 $x = 0, y = 0$.
- 此时 $y = x^\mu$ 与 $y = x^{\frac{1}{\mu}}$ 在 $(0, +\infty)$ 的限制互为反函数.



幂函数: 无理幂次

(7) 当 μ 为无理数时, $y=x^\mu$ 定义为 $y=e^{\mu\ln x}$,

- 定义域和值域为 $(0,+\infty)$.
- 图像过点 $(1,1)$.
- $\mu<0$ 时有两条渐近线 $x=0, y=0$.
- 此时 $y=x^\mu$ 与 $y=x^{\frac{1}{\mu}}$ 互为反函数.



幂函数性质总结

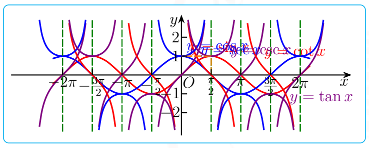
总结

$x>0$ 时幂函数 $y=x^\mu$ 总有定义且 $y=e^{\mu\ln x}$, 图像经过 $(1,1)$, 且 $y=x^\mu|_{(0,+\infty)}$ 和 $y=x^{\frac{1}{\mu}}|_{(0,+\infty)}$ 互为反函数. $\mu<0$ 时有两条渐近线 $x=0, y=0$.

$\mu=\frac{p}{q}$	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$	值域
$\mu>0$, q 奇, p 奇	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$(-\infty,+\infty)$
$\mu>0$, q 奇, p 偶	$\searrow$	0	$\nearrow$	$[0,+\infty)$
$\mu>0$, q 偶	无定义	0	$\nearrow$	$[0,+\infty)$
$\mu>0$ 为无理数	无定义	0	$\nearrow$	$(0,+\infty)$
$\mu<0$, q 奇, p 奇	$\searrow$	无定义	$\searrow$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
$\mu<0$, q 奇, p 偶	$\nearrow$	无定义	$\searrow$	$(0,+\infty)$
$\mu<0$, q 偶	无定义	无定义	$\searrow$	$(0,+\infty)$
$\mu<0$ 为无理数	无定义	无定义	$\searrow$	$(0,+\infty)$

三角函数

三角函数	定义域	值域	有界性	周期	奇偶性
正弦 $\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	有界	2π	奇函数
余弦 $\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	有界	2π	偶函数
正切 $\tan x$	$x\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, k\in\mathbb{Z}$	$(-\infty,+\infty)$	无界	π	奇函数
余切 $\cot x$	$x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$	$(-\infty,+\infty)$	无界	π	奇函数
正割 $\sec x$	$x\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, k\in\mathbb{Z}$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	无界	2π	偶函数
余割 $\csc x$	$x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$	$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$	无界	2π	奇函数

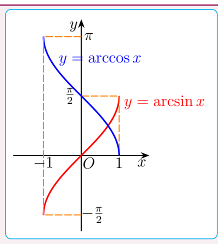


反三角函数

定义

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$.
定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
有界、单调递增奇函数.

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x$.
定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $[0,\pi]$.
有界、单调递减函数.



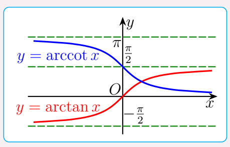
二者满足等式 $\arcsin x+\arccos x=\pi/2$.

反三角函数

定义

(1) 反正切函数 $y=\arctan x$. 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. 有界、单调递增奇函数. 有两条渐近线 $y=\pm\pi/2$.

(2) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$. 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $(0,\pi)$. 有界、单调递减函数. 有两条渐近线 $y=0,\pi$.



二者满足等式 $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\pi/2$.

初等函数

定义

由基本初等函数进行有限次的四则运算和有限次的复合运算所得到的函数被称为*初等函数*.

例

- $y=\dfrac{x^2}{x-1}$;
- $y=\sin(2x+1)$;
- $y=|x|=\sqrt{x^2}$.
- $y=\operatorname{sgn}x, y=[x]$ 不是初等函数.

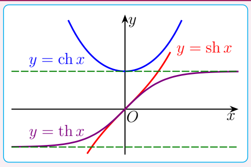
下面介绍两类在工程上常用的初等函数.

双曲函数

定义

定义*双曲正弦/余弦/正切函数*为

- $\operatorname{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$,
- $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,
- $\operatorname{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.



- $\operatorname{sh}x$ 值域为 $\mathbb{R}$, 是单调递增奇函数.
- $\operatorname{ch}x$ 值域为 $[1,+\infty)$, 是偶函数, 且在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.
- $\operatorname{th}x$ 值域为 $(-1,1)$, 是单调递增奇函数, 有两条渐近线 $y=\pm1$.

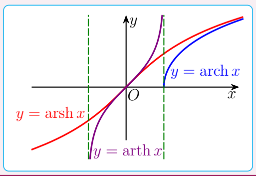
两端固定自然垂下的铁链的形状是双曲余弦函数的图像.

反双曲函数

定义

定义*反双曲正弦/余弦/正切函数*为

- $\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,
- $\operatorname{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,
- $\operatorname{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.



- $\operatorname{arsh}x$ 定义域和值域为 $\mathbb{R}$, 是单调递增奇函数.
- $\operatorname{arch}x$ 定义域为 $[1,+\infty)$, 值域为 $[0,+\infty)$, 是单调递增函数.
- $\operatorname{arth}x$ 定义域为 $(-1,1)$, 值域为 $\mathbb{R}$, 是单调递增奇函数, 有两条渐近线 $x=\pm1$.

双曲函数与三角函数

非考试内容

双曲函数有着类似三角函数的性质:

- $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$,
- $\operatorname{sh}(2x)=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x, \operatorname{ch}(2x)=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x$,
- $\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$,
- $\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$,
- $\operatorname{th}(x\pm y)=\dfrac{\operatorname{th}x\pm\operatorname{th}y}{1\pm\operatorname{th}x\operatorname{th}y}$.

其根本原因在于复数域上的欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$. 可以看出 (形式上):

$$\operatorname{ch}(ix)=\cos x,\quad \operatorname{sh}(ix)=i\sin x.$$

第四节　一些常用不等式和等式

- 三角函数的基本不等式
- 算术不等式
- 三角函数有关等式
- 其它常见公式

三角函数的基本不等式

三角函数的基本不等式

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\sin x < x < \tan x$.

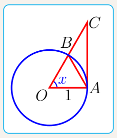
证明

作半径为 1 的圆，如图所示．由

$$\triangle OAB \text{ 的面积} < \text{扇形 } OAB \text{ 的面积} < \text{直角 } \triangle OAC \text{ 的面积}$$

可知

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x.$$



从而命题得证．□

三角函数的基本不等式

结论

$$\sin x \begin{cases} < x, & x > 0, \\ = x, & x = 0, \\ > x, & x < 0. \end{cases}$$ 从而有 $|\sin x| \leqslant |x|$.

证明

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，由前一结论有 $\sin x < x$．当 $x \geqslant \frac{\pi}{2}$ 时，

$$\sin x \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant x.$$

故 $f(x) = x - \sin x > 0, \forall x > 0$.

注意到 $f(x)$ 是奇函数，因此 $x < 0$ 时，$f(x) = -f(-x) < 0$. □

均值不等式

均值不等式

对任意 n 个正数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，有

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

等式成立当且仅当所有 a_i 均相等．

其中不等式的左侧被称为几何平均数，右侧被称为算术平均数．

均值不等式

证明

我们用数学归纳法来证明．$n = 1$ 时显然成立．假设对于 $n - 1 \geqslant 1$ 个数成立．我们不妨设 $a_n \geqslant a_i, 1 \leqslant i \leqslant n$.

令 $x = \dfrac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}$，则由归纳假设 $x^{n-1} \geqslant a_1 \cdots a_{n-1}$．由于 $a_n \geqslant x$，故

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n &= \left(\frac{(n-1)x + a_n}{n}\right)^n = \left(x + \frac{a_n - x}{n}\right)^n \\ &\geqslant x^n + \mathrm{C}_n^1 x^{n-1}\left(\frac{a_n - x}{n}\right) = x^{n-1} a_n \\ &\geqslant a_1 \cdots a_{n-1} a_n.\end{aligned}$$

从而命题对 n 成立．等式成立当且仅当 $a_n = x = \sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_{n-1}}$．由归纳假设可知此时所有 a_i 均相等．□

柯西不等式

定理

对任意 $2n$ 个实数 $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$，有

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2.$$

等号成立当且仅当 b_i 全为零或者 $\dfrac{a_1}{b_1} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$.

证明

若 b_i 全为 0，显然成立．假设 b_i 不全为零，由于

$$\sum_{i=1}^n (b_i x - a_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \geqslant 0$$

恒成立，因此它的判别式 $\Delta \leqslant 0$，于是得到柯西不等式．等式成立即 $\Delta = 0$，这等价于该方程有解 x，于是 $a_i = x b_i$. □

柯西不等式

推论

对任意 n 个正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 有

$$\underbrace{\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}}}_{\text{平方平均数}} \geqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geqslant \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}}_{\text{调和平均数}}.$$

证明

令 $a_i = x_i, b_i = 1$ 可得第一个不等式. 令 $a_i = \sqrt{x_i}, b_i = \dfrac{1}{\sqrt{x_i}}$ 可得第二个不等式. □

积化和差与和差化积公式

积化和差公式

- $\sin x \sin y = -\dfrac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$,
- $\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$,
- $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$.

和差化积公式

- $\sin x \pm \sin y = 2\sin\dfrac{x \pm y}{2}\cos\dfrac{x \mp y}{2}$,
- $\cos x + \cos y = 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$,
- $\cos x - \cos y = -2\sin\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$.

倍角公式与万能公式

倍角公式

- $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$,
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$,
- $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.

万能公式

令 $t = \tan\dfrac{x}{2}$, 则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

万能公式可将 x 的三角函数转化为 $\tan\dfrac{x}{2}$ 的有理函数.

数列求和公式

等差数列求和公式

设 $x_n = an + b$, 则

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{n(x_1+x_n)}{2} = a\frac{n(n+1)}{2} + bn.$$

等比数列求和公式

设 $x_n = x_1 q^{n-1}$, 则

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \begin{cases} \dfrac{x_1 q^{n-1}}{q-1}, & q \neq 1, \\ n x_1, & q = 1. \end{cases}$$

由此可知

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}).$$

自然数的幂次和

自然数的幂次和

- $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,
- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,
- $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

数列求和拆分技巧

例

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+3)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right).$$

例

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{2}=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}-\sqrt{2}-1}{2}.$$

二项式展开

二项式展开

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^k y^{n-k},\qquad \text{其中 } \mathrm{C}_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

令 $x=y=1$, 则

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k=2^n.$$

令 $x=-1, y=1$, 则

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_n^0-\mathrm{C}_n^1+\cdots+(-1)^n\mathrm{C}_n^n=0.$$

第五节　极坐标简介

- 极坐标系
- 极坐标方程

极坐标系

在平面直角坐标系中, 我们想要表示一个圆心在原点的圆, 可以用参数方程

$$\begin{cases}x=x_0+R\cos\theta,\\ y=y_0+R\sin\theta,\end{cases}\qquad \theta\in[0,2\pi)$$

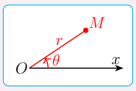
来表示. 这就引出了用于表达这类曲线更为简便的极坐标的概念.

定义

在平面内取一个定点 O (极点), 引一条射线 Ox (极轴), 再选定一个长度单位和角度的正方向 (通常取逆时针方向), 所建立的坐标系称为极坐标系.

对于平面内任意一点 M,

- M 的极径是指线段 OM 的长度 r,
- M 的极角是指从 Ox 到 OM 的角度 θ,
- M 的极坐标是指有序对 (r,θ).



极坐标的性质

建立极坐标系后, 对于给定的 r 和 θ, 就可以在平面内确定唯一一点 M.

反过来, 给定平面内一点 M, 也可以找到它的极坐标 (r,θ). 但和直角坐标系不同的是, 平面内任意一点的极坐标可以有无数种表示.

例

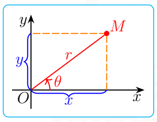
(1) 对任意的 θ, $(0,\theta)$ 均表示极点 O.

(2) (r,θ) 和 $(r,\theta+2k\pi)$ 总表示同一点, $k\in\mathbb{Z}$. 若我们限定 $\theta\in[0,2\pi)$ 或 $\theta\in(-\pi,\pi]$, 则除极点外的每一点均有唯一的极坐标.

极坐标和直角坐标的转换

极坐标系和直角坐标系的转换关系

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}, \cos\theta = \frac{x}{r}.$$



实际中我们常用 $\tan\theta = \frac{y}{x}$ 并根据点所处的象限来确定 θ.

例题：极坐标的计算

例

(1) 将 M 的极坐标 $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ 化为直角坐标.

(2) 将 M 的直角坐标 $(-1, 1)$ 化为极坐标.

解

(1)

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = 3, \qquad y = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1.$$

因此 M 的直角坐标为 $(3, 1)$.

(2) $r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$, $\tan\theta = -1$, θ 可以选择为 $\frac{3\pi}{4}$. 因此 M 的极坐标为 $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

例题：求极坐标方程

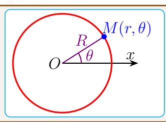
类似于直角坐标系，我们可以用 r 和 θ 的方程来表示平面上的图形. 求曲线的极坐标方程也和直角坐标系类似.

例

求圆心在极点 O，半径为 R 的圆的极坐标方程.

解

设 $M(r, \theta)$ 为圆上任意一点，因为圆心在极点 O，所以 $r = OM = R$. 反之，极径为 R 的点都落在圆上. 因此该圆的极坐标方程为 $r = R$.



另解

圆的直角坐标方程为 $x^2+y^2=R^2$. 这等价于 $r = \sqrt{x^2+y^2} = R$. 此即该圆的极坐标方程.

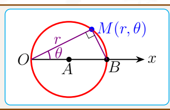
例题：求极坐标方程

例

求圆心为 $A(R, 0)$，半径为 R 的圆的极坐标方程.

解

设 $M(r, \theta)$ 为圆上任意一点. 由图可知 $OM \perp BM$，从而 $r = OM = 2R\cos\theta$. 所以极坐标方程为 $r = 2R\cos\theta$.



另解

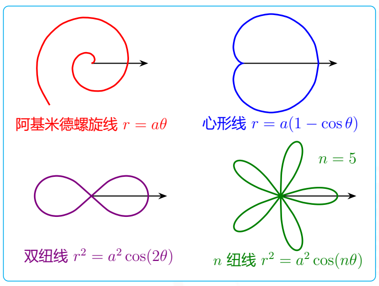
圆的直角坐标方程为 $(x-R)^2+y^2=R^2$. 这等价于

$$r^2 = x^2+y^2 = 2Rx = 2Rr\cos\theta,$$

从而该圆的极坐标方程为 $r = 2R\cos\theta$.

常见极坐标曲线

其它常见的极坐标方程及其曲线有：$(a > 0)$



例题: 求直角坐标方程

例

(1) 将直角坐标方程 $x=1$ 表示的直线用极坐标方程表示.
(2) 将极坐标方程 $r=4\sin\theta$ 表示的曲线用直角坐标方程表示.

解

(1) 由 $x=r\cos\theta=1$ 可知极坐标方程为 $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$.

(2) 由 $y=r\sin\theta=\dfrac{r^2}{4}$ 可知 $x^2+y^2=r^2=4y$, 即 $x^2+y^2=4y$.

对于极坐标方程 $r=\rho(\theta)$, 我们总可以将其对应的直角坐标系的参数方程表为

$$\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta, \\ y=\rho(\theta)\sin\theta. \end{cases}$$