复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

课程安排

本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2022 年 11 月 16 日.

课程安排

本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2022 年 11 月 16 日.
课程 QQ 群：(入群答案 **1400261B**)

课程安排

本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2022 年 11 月 16 日.
课程 QQ 群：(入群答案 **1400261B**)

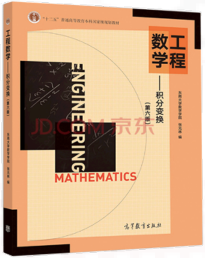
- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2022 年 11 月 16 日.
课程 QQ 群: (入群答案 **1400261B**)

- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

教材:

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》



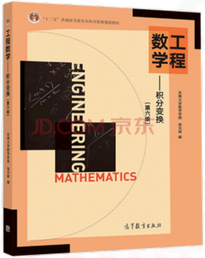
课程安排

本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2022 年 11 月 16 日.
课程 QQ 群：(入群答案 **1400261B**)

- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

教材：

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》



成绩构成：

课程安排

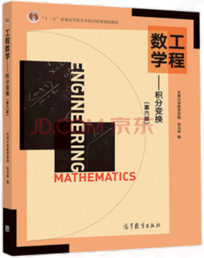
本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2022 年 11 月 16 日.

课程 QQ 群：(入群答案 **1400261B**)

- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

教材:

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》



成绩构成:

- 作业 15%, 每章交一次

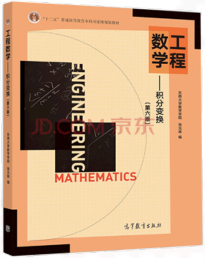
课程安排

本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2022 年 11 月 16 日.
课程 QQ 群：(入群答案 **1400261B**)

- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

教材：

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》



成绩构成：

- 作业 15%, 每章交一次
- 课堂测验 25%, 一共 3 次, 取最高的两次

课程安排

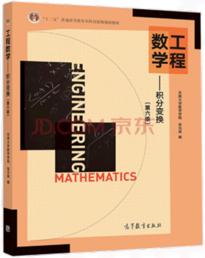
本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2022 年 11 月 16 日.

课程 QQ 群: (入群答案 **1400261B**)

- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

教材:

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》



成绩构成:

- 作业 15%, 每章交一次
- 课堂测验 25%, 一共 3 次, 取最高的两次
- 期末报告 10%

课程安排

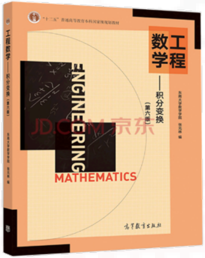
本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2022 年 11 月 16 日.

课程 QQ 群：(入群答案 **1400261B**)

- 003 班 (机器人、自动化) **871140152**
- 004 班 (力学、电气) **871141886**

教材：

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》



成绩构成：

- 作业 15%, 每章交一次
- 课堂测验 25%, 一共 3 次, 取最高的两次
- 期末报告 10%
- 期末考试 50%, 至少 45 分才计算总评

复变函数的应用非常广泛，它包括：

复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……

复变函数的应用

复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……

复变函数的应用

复变函数的应用非常广泛, 它包括:

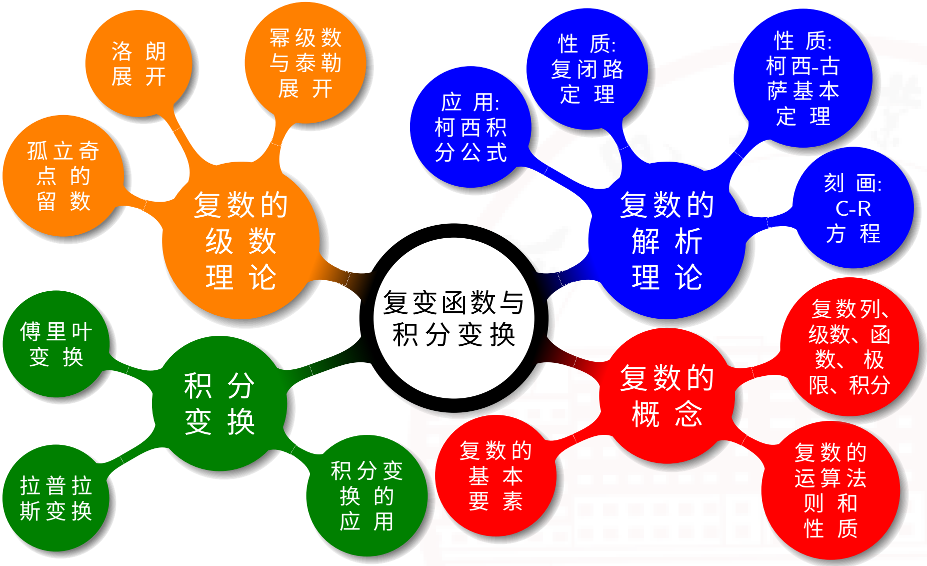
- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

复变函数的应用非常广泛，它包括：

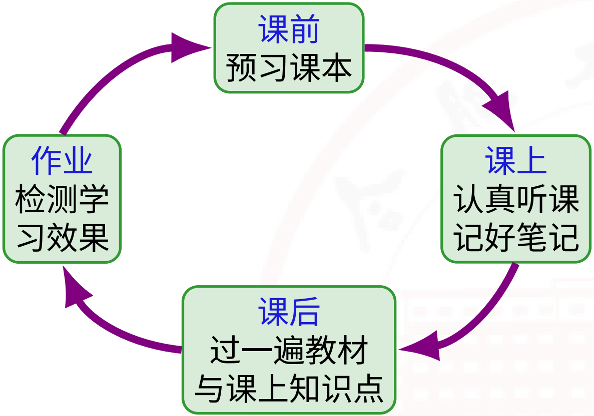
- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

可以说复变函数应用之广，在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.

课程内容


复变函数与积分变换
复数的级数理论
洛朗展开
幂级数与泰勒展开
孤立奇点的留数
复数的解析理论
应用: 柯西积分公式
性质: 复闭路定理
性质: 柯西-古萨基本定理
刻画: C-R方程
复数的概念
复数列、级数、函数、极限、积分
复数的基本要素
复数的运算法则和性质
积分变换
傅里叶变换
拉普拉斯变换
积分变换的应用

课程学习方法



第一章　复数与复变函数

❶ 复数及其代数运算

❷ 复数的三角与指数形式

❸ 复数的乘除、方幂与方根

❹ 曲线和区域

❺ 复变函数

❻ 极限和连续性

复数起源于多项式方程的求根问题.

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$,

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\qquad \Delta=b^2-4c.$$

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=b^2-4c.$$

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\qquad \Delta=b^2-4c.$$

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=b^2-4c.$$

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;
(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=b^2-4c.$$

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;
(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根. 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根, 形式地计算可以发现它们满足原来的方程.

现在我们来考虑一元三次方程.

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望
$$u^3+v^3=20,\quad uv=-2,$$

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望 $$u^3+v^3=20,\quad uv=-2,$$

则 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$.

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望
$$u^3+v^3=20,\quad uv=-2,$$

则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$. 解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}$$

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望 $$u^3+v^3=20,\quad uv=-2,$$

则 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$. 解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望
$$u^3+v^3=20,\quad uv=-2,$$

则 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$. 解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

所以
$$u=1\pm\sqrt{3},\quad v=1\mp\sqrt{3},$$

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望 $$u^3+v^3=20,\quad uv=-2,$$

则 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$. 解得

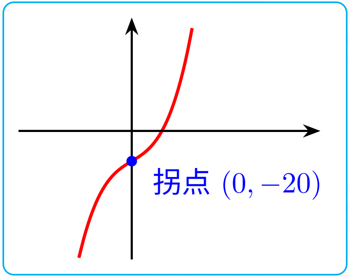
$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

所以 $$u=1\pm\sqrt{3},\quad v=1\mp\sqrt{3},\qquad x=u+v=2.$$

三次方程的根

那么这个方程是不是真的只有 $x = 2$ 这一个解呢?

那么这个方程是不是真的只有 $x=2$ 这一个解呢？这从它的函数图像可以看出.



例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0.$

例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0.$

解

同样地我们有 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解

同样地我们有 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + \dfrac{343}{27} = 0$.

例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解

同样地我们有 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$. 然而这个方程没有实数解.

三次方程的根

非考试内容

例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解

同样地我们有 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$. 然而这个方程没有实数解.

我们可以强行解得

$$u^3 = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}.$$

三次方程的根

续解

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3+2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9+\sqrt{-3}}{6}, \frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

续解

$$u=\sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

$$v=\frac{3-2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9-\sqrt{-3}}{6},\frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

续解

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

$$v = \frac{3 - 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 - \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 + 5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x = u + v = 2, -3, 1.$$

续解

$$u=\sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

$$v=\frac{3-2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9-\sqrt{-3}}{6},\frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x=u+v=2,-3,1.$$

所以我们从一条 "错误的路径" 走到了正确的目的地?

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言, 类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言, 类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

由于 $p=0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形.

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言, 类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

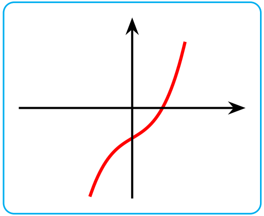
由于 $p=0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言, 类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

由于 $p=0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有 1 个实根.



三次方程的根

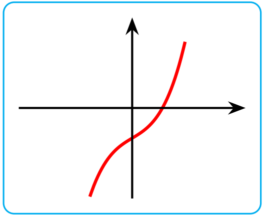
对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言, 类似可得:

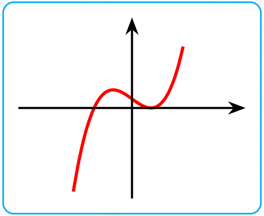
$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

由于 $p=0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有 1 个实根.

(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有 2 个实根 $x=-\sqrt[3]{4q},\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).





三次方程的根

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言，类似可得:

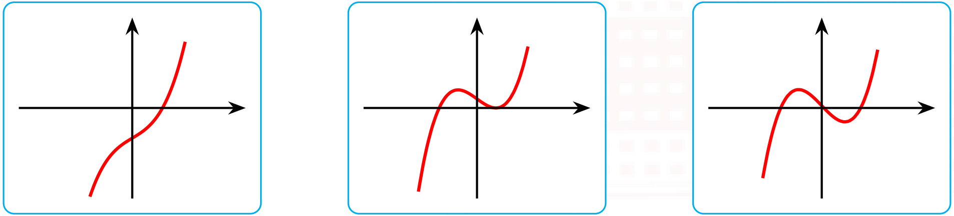
$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

由于 $p=0$ 情形较为简单，所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

(1) 当 $\Delta>0$ 时，有 1 个实根.

(2) 当 $\Delta=0$ 时，有 2 个实根 $x=-\sqrt[3]{4q},\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).

(3) 当 $\Delta<0$ 时，有 3 个实根.



所以我们想要使用求根公式的话, 就必须接受负数开方.

所以我们想要使用求根公式的话, 就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢?

所以我们想要使用求根公式的话, 就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了.

所以我们想要使用求根公式的话，就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时，从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了.

尽管在十六世纪，人们已经得到了三次方程的求根公式，然而对其中出现的虚数，却是难以接受.

所以我们想要使用求根公式的话，就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时，从求根公式一定能得到 3 个实根呢？在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了.

尽管在十六世纪，人们已经得到了三次方程的求根公式，然而对其中出现的虚数，却是难以接受.

> 圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚的 -1 的平方根。
>
> 莱布尼兹 (Leibniz)

所以我们想要使用求根公式的话，就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时，从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了.

尽管在十六世纪，人们已经得到了三次方程的求根公式，然而对其中出现的虚数，却是难以接受.

> 圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚的 -1 的平方根。
>
> 莱布尼兹 (*Leibniz*)

我们将在本节使用更为现代的语言来解释和运用复数.

第一节　复数及其代数运算

- 复数的概念
- 复数的代数运算
- 共轭复数

现在我们来正式介绍复数的概念.

现在我们来正式介绍复数的概念.

定义

固定一个记号 i, 复数就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

复数的定义

现在我们来正式介绍复数的概念.

定义

固定一个记号 i, 复数就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

换言之, 每一个复数可以唯一地表达成 $x + yi$ 这样的形式.

复数的定义

现在我们来正式介绍复数的概念.

定义

固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

换言之, 每一个复数可以唯一地表达成 $x + yi$ 这样的形式. 也就是说, 复数全体构成一个二维实线性空间, 且 $\{1, i\}$ 是一组基.

现在我们来正式介绍复数的概念.

定义

固定一个记号 i, 复数就是形如 $z=x+yi$ 的元素, 其中 x,y 均是实数, 且不同的 (x,y) 对应不同的复数.

换言之, 每一个复数可以唯一地表达成 $x+yi$ 这样的形式. 也就是说, 复数全体构成一个二维实线性空间, 且 $\{1,i\}$ 是一组基.

我们将全体复数记作 $\mathbb{C}$, 全体实数记作 $\mathbb{R}$, 则 $\mathbb{C}=\mathbb{R}+\mathbb{R}i$.

复平面

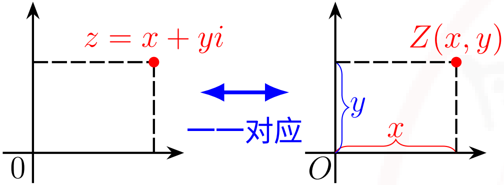
由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基,

复平面

由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.

复平面

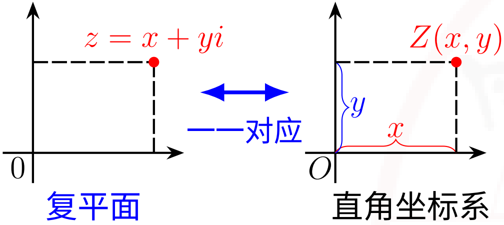
由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



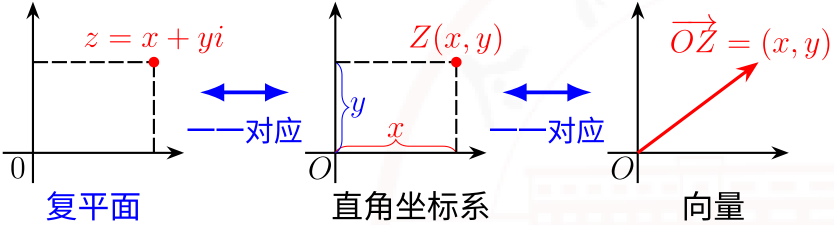
直角坐标系

复平面

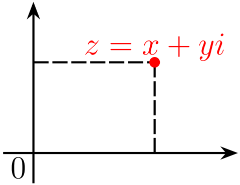
由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.

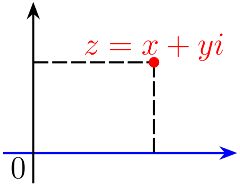


当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数.

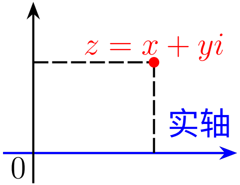


实部和虚部，虚数和纯虚数

当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点.

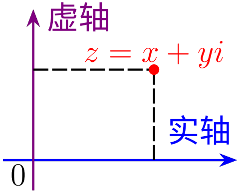


当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数．它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点．因此我们称 x 轴为实轴．



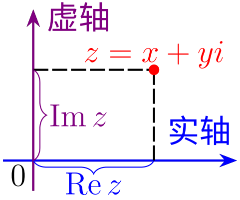
实部和虚部，虚数和纯虚数

当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数．它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点．因此我们称 x 轴为实轴．相应地，称 y 轴为虚轴．



实部和虚部，虚数和纯虚数

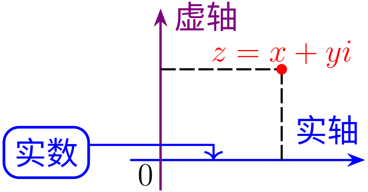
当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数．它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点．因此我们称 x 轴为实轴．相应地，称 y 轴为虚轴．称 $z=x+yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的实部 $\operatorname{Re} z=x$ 和虚部 $\operatorname{Im} z=y$.

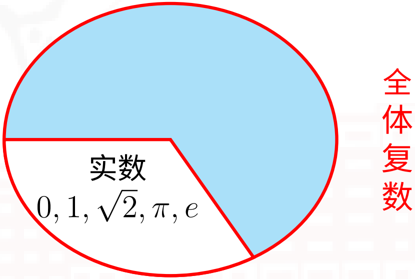


实部和虚部，虚数和纯虚数

当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数．它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点．因此我们称 x 轴为实轴．相应地，称 y 轴为虚轴．称 $z=x+yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的实部 $\operatorname{Re} z=x$ 和虚部 $\operatorname{Im} z=y$．

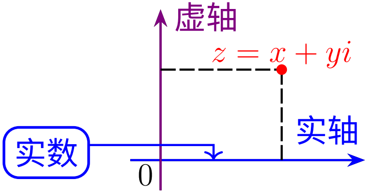
当 $\operatorname{Im} z=0$ 时，z 是实数．

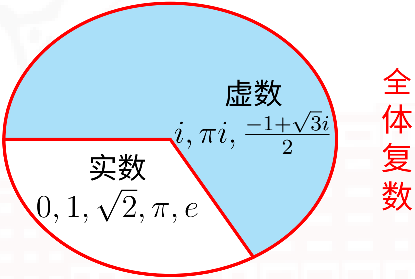




当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们称 x 轴为实轴. 相应地，称 y 轴为虚轴. 称 $z=x+yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的实部 $\operatorname{Re} z=x$ 和虚部 $\operatorname{Im} z=y$.

当 $\operatorname{Im} z=0$ 时，z 是实数. 不是实数的复数是虚数.

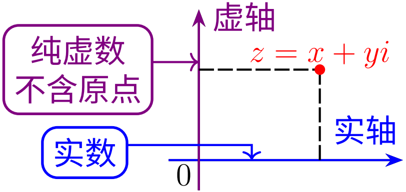


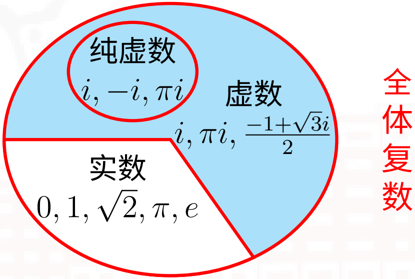


实部和虚部，虚数和纯虚数

当 $y=0$ 时，$z=x$ 就是一个实数．它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点．因此我们称 x 轴为实轴．相应地，称 y 轴为虚轴．称 $z=x+yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的实部 $\operatorname{Re} z=x$ 和虚部 $\operatorname{Im} z=y$.

当 $\operatorname{Im} z=0$ 时，z 是实数．不是实数的复数是虚数．当 $\operatorname{Re} z=0$ 且 $z\neq 0$ 时，称 z 是纯虚数.





典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z=(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:

(1) 实数; (2) 纯虚数.

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时，$z=(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
(1) 实数; (2) 纯虚数.

解

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z=(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
(1) 实数; (2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z = x^2-5x-6=0$, 即 $x=-1$ 或 6.

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时，$z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是:
(1) 实数; (2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6.

(2) $\operatorname{Re} z = x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4.

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z=(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
(1) 实数; (2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z=x^2-5x-6=0$, 即 $x=-1$ 或 6.

(2) $\operatorname{Re} z=x^2-3x-4=0$, 即 $x=-1$ 或 4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z=x^2-5x-6\neq 0$, 因此 $x\neq -1$, $x=4$.

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z=(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
(1) 实数; (2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z=x^2-5x-6=0$, 即 $x=-1$ 或 6.

(2) $\operatorname{Re} z=x^2-3x-4=0$, 即 $x=-1$ 或 4. 但同时要求
$\operatorname{Im} z=x^2-5x-6\neq 0$, 因此 $x\neq -1$, $x=4$.

练习

若 $x^2(1+i)+x(5+4i)+4+3i$ 是纯虚数, 则实数 $x=$______.

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z=(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
(1) 实数; (2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z=x^2-5x-6=0$, 即 $x=-1$ 或 6.

(2) $\operatorname{Re} z=x^2-3x-4=0$, 即 $x=-1$ 或 4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z=x^2-5x-6\neq 0$, 因此 $x\neq -1$, $x=4$.

练习

若 $x^2(1+i)+x(5+4i)+4+3i$ 是纯虚数, 则实数 $x=$ __-4__.

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.

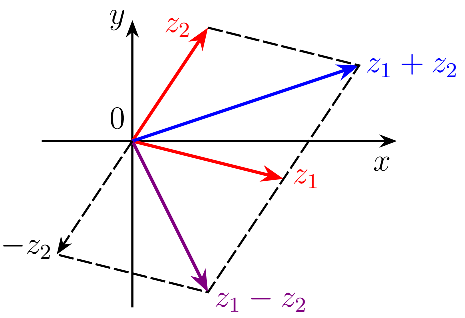
复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.



复数的乘除法

规定 $i \cdot i = -1.$

复数的乘除法

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

复数的乘除法

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

复数的乘除法

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2},$$

复数的乘除法

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

复数的乘除法

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘.

复数的乘除法

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘.

当 $z \neq 0$ 时, 还可以定义 $z^0 = 1, z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

典型例题：常见复数的幂次

例

例

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$

典型例题：常见复数的幂次

例

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

典型例题：常见复数的幂次

例

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1$.

典型例题：常见复数的幂次

例

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+i$,

典型例题：常见复数的幂次

例

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+i$, 则

$$z^2=2i,\quad z^3=-2+2i,\quad z^4=-4,\quad z^8=16=2^4.$$

典型例题：常见复数的幂次

例

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+i$, 则

$$z^2=2i,\quad z^3=-2+2i,\quad z^4=-4,\quad z^8=16=2^4.$$

我们把满足 $z^n=1$ 的复数 z 称为 n 次单位根.

例

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+i$, 则

$$z^2=2i,\quad z^3=-2+2i,\quad z^4=-4,\quad z^8=16=2^4.$$

我们把满足 $z^n=1$ 的复数 z 称为 n 次单位根. 那么 $1,i,-1,-i$ 是 4 次单位根, $1,\omega,\omega^2$ 是 3 次单位根.

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 =$______.

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1+i+i^2+i^3+i^4=$______.

解

根据等比数列求和公式，

$$1+i+i^2+i^3+i^4=\frac{i^5-1}{i-1}$$

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1+i+i^2+i^3+i^4=$ ___1___.

解

根据等比数列求和公式，

$$1+i+i^2+i^3+i^4=\frac{i^5-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1.$$

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1+i+i^2+i^3+i^4=$ ____1____.

解

根据等比数列求和公式，

$$1+i+i^2+i^3+i^4=\frac{i^5-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1.$$

练习（2020 年 A 卷）

化简 $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2020}=$ ______.

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1+i+i^2+i^3+i^4=$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

解

根据等比数列求和公式，

$$1+i+i^2+i^3+i^4=\frac{i^5-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1.$$

练习（2020 年 A 卷）

化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020}=$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

复数域

复数集合全体构成一个域.

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a + 0 = a \times 1 = a$.

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域.

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域:

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任何次数 $n \geqslant 1$ 的复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0) = 0$.

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a+0=a\times 1=a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任何次数 $n\geqslant 1$ 的复系数多项式

$$p(z)=z^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_1z+c_0,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0)=0$. 也就是说复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘积.

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任何次数 $n \geqslant 1$ 的复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0) = 0$. 也就是说复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘积. 我们会在第五章证明该结论.

复数域不是有序域

在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系,

复数域不是有序域

在 $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系，换言之它们是有序域，即存在一个满足下述性质的 $>$:

复数域不是有序域

在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系，换言之它们是有序域，即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则 $a > b$ 或 $b > a$;

复数域不是有序域

在 $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a\neq b$, 则 $a>b$ 或 $b>a$;
- 若 $a>b$, 则对于任意 c, $a+c>b+c$;

复数域不是有序域

在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则 $a > b$ 或 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c, $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

复数域不是有序域

在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则 $a > b$ 或 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c, $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

而 $\mathbb{C}$ 却不是有序域.

复数域不是有序域

在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则 $a > b$ 或 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c, $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

而 $\mathbb{C}$ 却不是有序域. 如果 $i > 0$, 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

复数域不是有序域

在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则 $a > b$ 或 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c, $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

而 $\mathbb{C}$ 却不是有序域. 如果 $i > 0$, 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

于是 $0 > i$, 矛盾! 同理 $i < 0$ 也不可能.

共轭复数

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

共轭复数

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

共轭复数

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 $\bar{z}$. 换言之, $\bar{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- z 是 $\bar{z}$ 的共轭复数.

共轭复数

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- $\overline{\overline{z}}$ 是 z 的共轭复数.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

共轭复数

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

共轭复数

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

例题：共轭复数判断实数

例

设 $z=x+yi$ 且 $y\neq 0,\pm 1$. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

例题：共轭复数判断实数

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即

$$z(1+\overline{z}^2) = \overline{z}(1+z^2), \quad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1) = 0.$$

例题：共轭复数判断实数

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即

$$z(1+\overline{z}^2) = \overline{z}(1+z^2), \quad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1) = 0.$$

由 $y \neq 0$ 可知 $z \neq \overline{z}$.

例题：共轭复数判断实数

例

设 $z=x+yi$ 且 $y\neq 0,\pm 1$. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即

$$z(1+\overline{z}^2)=\overline{z}(1+z^2),\quad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1)=0.$$

由 $y\neq 0$ 可知 $z\neq\overline{z}$. 故上述等式等价于 $z\overline{z}=1$, 即 $x^2+y^2=1$. □

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到.

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$,

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$, 因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}). \qquad \square$$

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数,

例题：复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例题：复数的代数计算

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2+y_2^2}.$$

例

$z=-\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$，求 $\operatorname{Re}z, \operatorname{Im}z$ 以及 $z\overline{z}$.

例题：复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例

$z = -\dfrac{1}{i} - \dfrac{3i}{1-i}$，求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\bar{z}$.

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$$

例题：复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2+y_2^2}.$$

例

$z=-\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\bar{z}$.

解

$$z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=i-\frac{3i-3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$$

例题：复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数，因此在做复数的除法运算时，可以利用下式将其转化为乘法：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2+y_2^2}.$$

例

$z=-\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$，求 $\operatorname{Re}z,\operatorname{Im}z$ 以及 $z\bar{z}$.

解

$$z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=i-\frac{3i-3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$$

因此 $\operatorname{Re}z=\dfrac{3}{2},\quad \operatorname{Im}z=-\dfrac{1}{2},\quad z\bar{z}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}.$

例题：复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$，求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

例题：复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i}$$

例题：复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2}$$

例题：复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2}$$
$$= \frac{(-15-20)+(-20+15)i}{25}$$

例题：复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2} \\ &= \frac{(-15-20)+(-20+15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

例题：复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2} \\ &= \frac{(-15-20)+(-20+15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

因此 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = -\dfrac{7}{5} + \dfrac{1}{5}i.$

第二节　复数的三角与指数形式

- 复数的模和辐角
- 复数的三角形式和指数形式

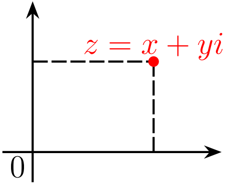
由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式.

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.

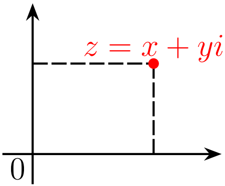
复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式．以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系．



复数的极坐标形式

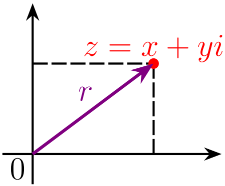
由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



定义

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式．以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系．



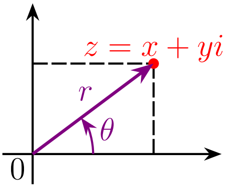
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

定义

- 称 r 为 z 的**模**，记为 $|z| = r$.

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式．以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系．



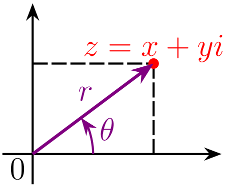
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan\frac{y}{x} \text{ 或 } \arctan\frac{y}{x} \pm \pi$$

定义

- 称 r 为 z 的**模**，记为 $|z| = r$.
- 称 θ 为 z 的**辐角**，记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$.

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.

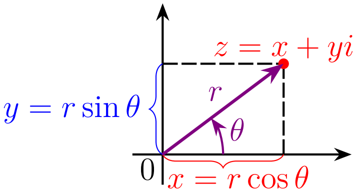


$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \text{ 或 } \arctan \frac{y}{x} \pm \pi$$

定义

- 称 r 为 z 的**模**，记为 $|z| = r$.
- 称 θ 为 z 的**辐角**，记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$. 0 的辐角没有意义.

由平面的极坐标表示，我们可以得到复数的另一种表示方式．以 0 为极点，正实轴为极轴，逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系．



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} \text{ 或 } \arctan\frac{y}{x} \pm \pi$$

定义

- 称 r 为 z 的**模**，记为 $|z| = r$.
- 称 θ 为 z 的**辐角**，记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$. 0 的辐角没有意义.

主辐角

任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.

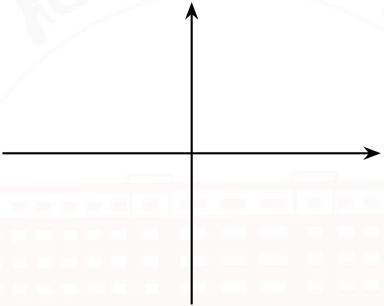
主辐角

任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为主辐角或辐角主值, 记作 $\arg z$.

主辐角

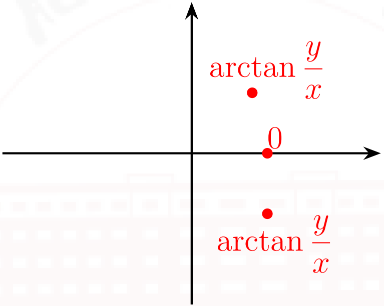
任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为主辐角或辐角主值, 记作 $\arg z$.

$$\arg z = \begin{cases} \\ \end{cases}$$



任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为主辐角或辐角主值, 记作 $\arg z$.

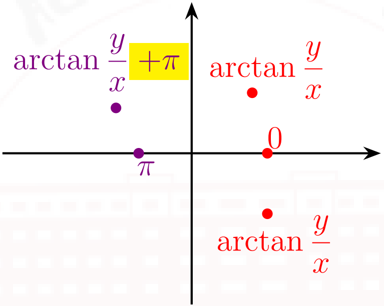
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ & \\ & \end{cases}$$



主辐角

任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为主辐角或辐角主值, 记作 $\arg z$.

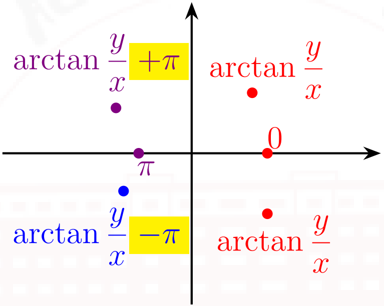
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \end{cases}$$



主辐角

任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为主辐角或辐角主值, 记作 $\arg z$.

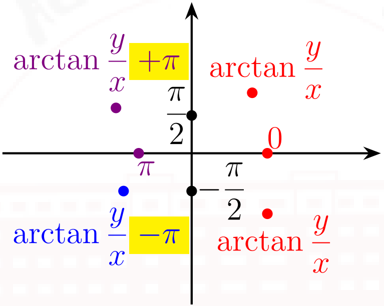
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \end{cases}$$



主辐角

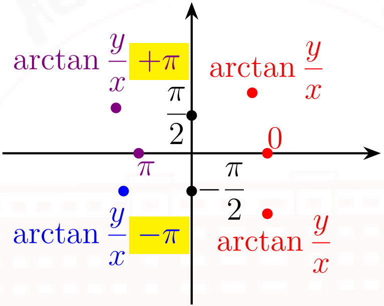
任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**或辐角主值, 记作 $\arg z$.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



任意 $z\neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi,\pi]$ 的那个, 并称之为主辐角或辐角主值, 记作 $\arg z$.

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y\geqslant 0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0;\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0;\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0.\end{cases}$$



那么 $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

复数模的性质

复数的模满足如下性质:

复数模的性质

复数的模满足如下性质:

模的性质汇总

复数模的性质

复数的模满足如下性质:

模的性质汇总

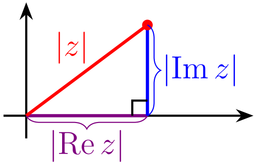
- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;

复数模的性质

复数的模满足如下性质:

模的性质汇总

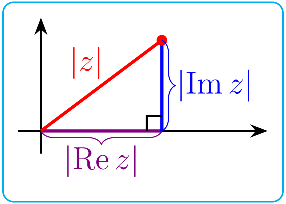
- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;
- $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$;

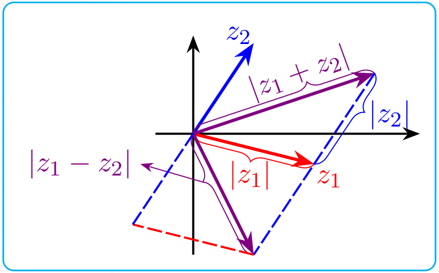


复数的模满足如下性质:

模的性质汇总

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;
- $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$;
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;



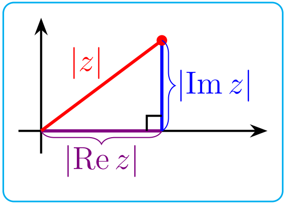


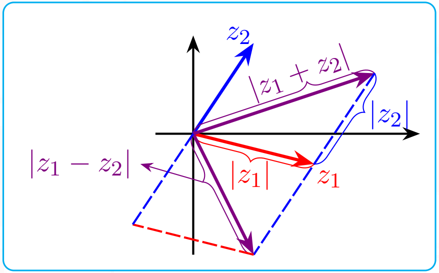
复数模的性质

复数的模满足如下性质:

模的性质汇总

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;
- $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$;
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.





例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2 \cdot \overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2 \cdot \overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

例

证明 (1) $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2 \cdot \overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(2)

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$

□

例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2 \cdot \overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1}\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(2)

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}\end{aligned}$$

□

例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2 \cdot \overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(2)

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})\\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}\\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}).\end{aligned}$$

□

复数的三角形式和指数形式

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

复数的三角形式和指数形式

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ (欧拉恒等式),

复数的三角形式和指数形式

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta).$$

复数的三角形式和指数形式

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.
求复数的三角/指数形式的关键在于计算模和辐角.

例

将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化成三角形式和指数形式.

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.

解

$r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4.$

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化成三角形式和指数形式.

解

$r=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第三象限,

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.

解

$r = |z| = \sqrt{12+4} = 4$. 由于 z 在第三象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化成三角形式和指数形式.

解

$r=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第三象限，因此

$$\arg z=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=4e^{-\frac{5\pi i}{6}}.$$

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+i\cos\dfrac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解

$$z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$$

例

将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解

$$\begin{aligned} z &= \sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right) \end{aligned}$$

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解

$$\begin{aligned} z&=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\\ &=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\\ &=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}=e^{\frac{3\pi i}{10}}. \end{aligned}$$

典型例题：求复数的三角/指数形式

求复数的三角或指数形式时，我们只需要任取一个辐角就可以了，不要求必须是主辐角.

典型例题：求复数的三角/指数形式

求复数的三角或指数形式时，我们只需要任取一个辐角就可以了，不要求必须是主辐角.

练习

将 $z=\sqrt{3}-3i$ 化成三角形式和指数形式.

典型例题：求复数的三角/指数形式

求复数的三角或指数形式时，我们只需要任取一个辐角就可以了，不要求必须是主辐角.

练习

将 $z=\sqrt{3}-3i$ 化成三角形式和指数形式.

答案

$$z=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi i}{3}}.$$

模为 1 的复数

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

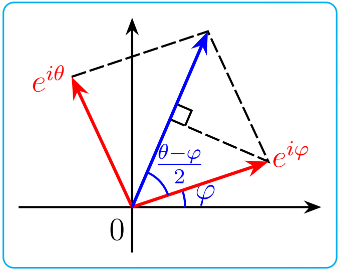
模为 1 的复数

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2\cos\frac{\theta-\varphi}{2} e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$

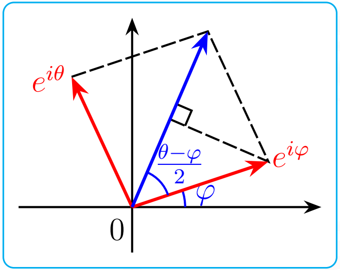
两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$



两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$



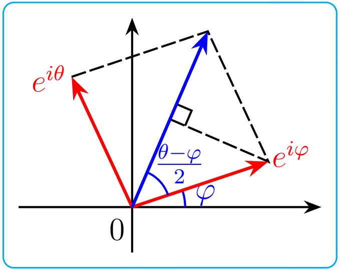
例

$$z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha$$

模为 1 的复数

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$



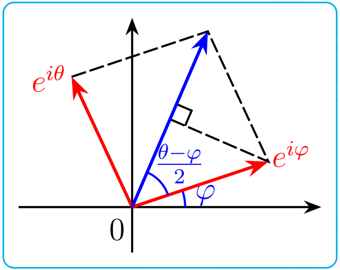
例

$$z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=e^0+e^{(\pi-\alpha)i}$$

模为 1 的复数

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$



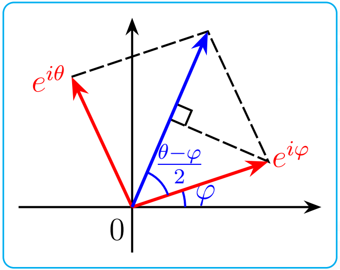
例

$$\begin{aligned}z&=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{0}+e^{(\pi-\alpha)i}\\&=2\cos\frac{\pi-\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}\end{aligned}$$

模为 1 的复数

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$



例

$$\begin{aligned}z&=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=e^0+e^{(\pi-\alpha)i}\\&=2\cos\frac{\pi-\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}.\end{aligned}$$

第三节　复数的乘除、方幂与方根

- 复数的乘除与三角/指数表示
- 复数的乘幂
- 复数的方根

复数的乘除与三角/指数表示

三角/指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

复数的乘除与三角/指数表示

三角/指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_1} \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

换言之,

$$|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

关于多值函数的等式的含义是指: 两边所能取到的值构成的集合相等.

换言之,

$$|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

关于多值函数的等式的含义是指: 两边所能取到的值构成的集合相等. 例如此处关于辐角的等式的含义是:

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \{\theta_1 - \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立.

注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 \pm \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上.

注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 \pm \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上. 例如

$$(-1+i)(-1+i) = 2i,$$

复数的乘除与三角/指数表示

注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 \pm \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上. 例如

$$(-1+i)(-1+i) = 2i,$$

$$\arg(-1+i) + \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2},$$

注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 \pm \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上. 例如

$$(-1+i)(-1+i) = 2i,$$

$$\arg(-1+i) + \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2},$$

$$\arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}.$$

证明

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

复数的乘除与三角/指数表示

证明

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2\Big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\Big]
\end{aligned}
$$

复数的乘除与三角/指数表示

证明

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2\Big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\Big]\\
&= r_1 r_2\Big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\Big]
\end{aligned}
$$

证明

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1 r_2\Big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\Big] \\
&= r_1 r_2\Big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\Big]
\end{aligned}
$$

因此乘法情形得证.

复数的乘除与三角/指数表示

证明

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2\Big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\Big]\\
&= r_1 r_2\Big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\Big]
\end{aligned}
$$

因此乘法情形得证.

设 $\dfrac{z_1}{z_2} = re^{i\theta}$,

证明

$$
\begin{aligned}
z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&= r_1r_2\big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big] \\
&= r_1r_2\big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big]
\end{aligned}
$$

因此乘法情形得证.

设 $\dfrac{z_1}{z_2} = re^{i\theta}$, 则由乘法情形可知

$$rr_2 = r_1, \quad \theta + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1.$$

证明

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1 r_2\Big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\Big]\\
&= r_1 r_2\Big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\Big]
\end{aligned}
$$

因此乘法情形得证.

设 $\dfrac{z_1}{z_2} = re^{i\theta}$, 则由乘法情形可知

$$rr_2 = r_1,\quad \theta + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1.$$

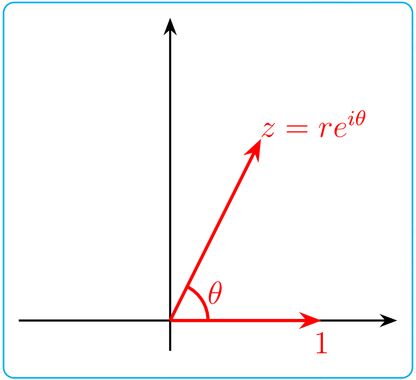
因此 $r = \dfrac{r_1}{r_2}, \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

乘积的几何意义

从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍, 并按逆时针旋转角度 θ.

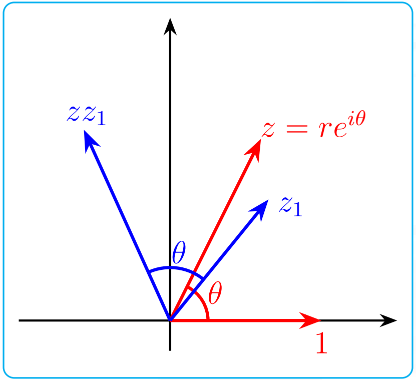
乘积的几何意义

从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍, 并按逆时针旋转角度 θ.



乘积的几何意义

从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍, 并按逆时针旋转角度 θ.



例题：复数解决平面几何问题

例

已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

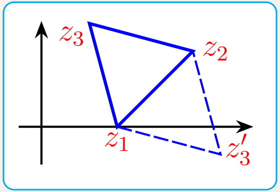
例题：复数解决平面几何问题

例

已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

解

由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$,



续解

因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\exp\left(\pm\frac{\pi i}{3}\right) = (1+i)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

例题：复数解决平面几何问题

续解

因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\exp\left(\pm\frac{\pi i}{3}\right) = (1+i)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i,$$

例题：复数解决平面几何问题

续解

因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\exp\left(\pm\frac{\pi i}{3}\right) = (1+i)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i.$$

复数的乘幂

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \neq 0.$

复数的乘幂

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \neq 0$. 根据复数三角/指数形式的乘法和除法运算法则，我们有

复数的乘幂

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \neq 0$. 根据复数三角/指数形式的乘法和除法运算法则，我们有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

复数的乘幂

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \neq 0$. 根据复数三角/指数形式的乘法和除法运算法则，我们有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地，当 $r = 1$ 时，我们得到棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1, \\
\cos(3\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \\
\cos(4\theta) &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \\
\cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \ \ 2\cos^2\theta - \ \ 1, \\
\cos(3\theta) &= \ \ 4\cos^3\theta - \ \ 3\cos\theta, \\
\cos(4\theta) &= \ \ 8\cos^4\theta - \ \ 8\cos^2\theta + 1, \\
\cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}$$

一般地，可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式，

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= \ \ 2\cos^2\theta - \ \ 1, \\
\cos(3\theta) &= \ \ 4\cos^3\theta - \ \ 3\cos\theta, \\
\cos(4\theta) &= \ \ 8\cos^4\theta - \ \ 8\cos^2\theta + 1, \\
\cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}$$

一般地, 可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式, 这个多项式

$$g_n(T) = 2^{n-1}T^n - n2^{n-3}T^{n-2} + \cdots$$

叫做切比雪夫多项式.

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1, \\ \cos(3\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \\ \cos(4\theta) &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1, \\ \cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.\end{aligned}$$

一般地, 可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式, 这个多项式

$$g_n(T) = 2^{n-1}T^n - n2^{n-3}T^{n-2} + \cdots$$

叫做切比雪夫多项式. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

典型例题：复数乘幂的计算

例

求 $(1+i)^n + (1-i)^n$.

典型例题：复数乘幂的计算

例

求 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

典型例题：复数乘幂的计算

例

求 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, 因此

$$\begin{aligned}&(1+i)^n+(1-i)^n\\ &=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

典型例题：复数乘幂的计算

例

求 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, 因此

$$
\begin{aligned}
&(1+i)^n+(1-i)^n\\
&=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\
&=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

典型例题：复数乘幂的计算

例

求 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，因此

$$\begin{aligned}&(1+i)^n+(1-i)^n\\&=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\&=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.\end{aligned}$$

练习

求 $(\sqrt{3}+i)^{2022}=$__________.

典型例题：复数乘幂的计算

例

求 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，因此

$$\begin{aligned}&(1+i)^n+(1-i)^n\\=&\,2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\=&\,2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.\end{aligned}$$

练习

求 $(\sqrt{3}+i)^{2022}=$ $\underline{\quad -2^{2022} \quad}$.

复数的方根

我们利用复数方幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$.

我们利用复数方幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

复数的方根

我们利用复数方幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

复数的方根

我们利用复数方幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$.

复数的方根

我们利用复数方幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$.

为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为算术根.

我们利用复数方幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$.

为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为算术根.

由于 $n\varphi$ 和 θ 的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

故

$$
\begin{aligned}
w = w_k &= \sqrt[n]{r}\exp\frac{(\theta+2k\pi)i}{n} \\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
w = w_k &= \sqrt[n]{r}\exp\frac{(\theta+2k\pi)i}{n} \\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).
\end{aligned}
$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ 两两不同.

故

$$
\begin{aligned}
w = w_k &= \sqrt[n]{r}\exp\frac{(\theta+2k\pi)i}{n} \\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).
\end{aligned}
$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

故

$$
\begin{aligned}
w = w_k &= \sqrt[n]{r}\exp\frac{(\theta+2k\pi)i}{n} \\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).
\end{aligned}
$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \ldots, n-1$. 故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值.

故

$$w = w_k = \sqrt[n]{r} \exp \frac{(\theta + 2k\pi)i}{n}$$
$$= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right).$$

不难看出，$w_k = w_{k+n}$，而 $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ 两两不同．因此只需取 $k = 0, 1, \ldots, n-1$．故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值．

这些根的模都相等，且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\dfrac{2\pi}{n}$．

故

$$
\begin{aligned}
w = w_k &= \sqrt[n]{r}\exp\frac{(\theta+2k\pi)i}{n}\\
&= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).
\end{aligned}
$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \dots, n-1$. 故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值.

这些根的模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\dfrac{2\pi}{n}$. 因此它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的正接 n 边形的顶点.

典型例题：复数方根的计算

例

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

典型例题：复数方根的计算

例

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$,

典型例题：复数方根的计算

例

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\exp\left(\dfrac{\pi i}{4}\right)$, 因此

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\exp\frac{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)i}{4},\quad k=0,1,2,3.$$

典型例题：复数方根的计算

例

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解

由于 $1+i=\sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$，因此

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\exp\frac{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)i}{4},\quad k=0,1,2,3.$$

所以该方根所有值为

$$w_0=\sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi i}{16}},\quad w_1=\sqrt[8]{2}e^{\frac{9\pi i}{16}},\quad w_2=\sqrt[8]{2}e^{\frac{17\pi i}{16}},\quad w_3=\sqrt[8]{2}e^{\frac{25\pi i}{16}}.$$

典型例题：复数方根的计算

显然

$$w_1 = iw_0, \quad w_2 = -w_0, \quad w_3 = -iw_0.$$

典型例题：复数方根的计算

显然

$$w_1 = iw_0, \quad w_2 = -w_0, \quad w_3 = -iw_0.$$

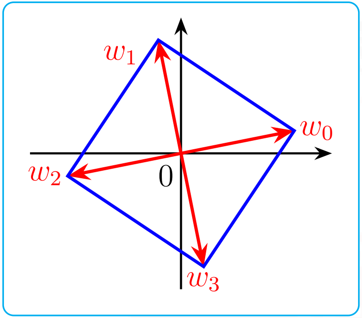
所以 w_0, w_1, w_2, w_3 形成了一个正方形.

典型例题：复数方根的计算

显然

$$w_1 = iw_0, \quad w_2 = -w_0, \quad w_3 = -iw_0.$$

所以 w_0, w_1, w_2, w_3 形成了一个正方形.

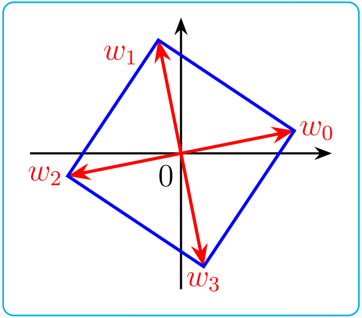


典型例题：复数方根的计算

显然

$$w_1 = iw_0, \quad w_2 = -w_0, \quad w_3 = -iw_0.$$

所以 w_0, w_1, w_2, w_3 形成了一个正方形.



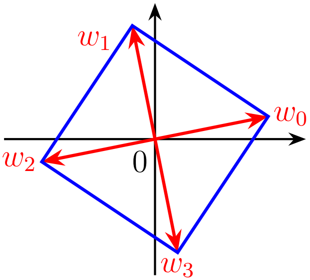
练习

求 $\sqrt[6]{-1} =$ ________________________.

显然

$$w_1 = iw_0, \quad w_2 = -w_0, \quad w_3 = -iw_0.$$

所以 w_0, w_1, w_2, w_3 形成了一个正方形.



练习

求 $\sqrt[6]{-1} =$ $\underline{\pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \pm i, \pm\frac{\sqrt{3}-i}{2}}$.

方幂和方根的辐角等式

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$ 不成立.

方幂和方根的辐角等式

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$ 不成立. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \operatorname{Arg} z = n \arg z + 2nk\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

方幂和方根的辐角等式

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$ 不成立. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \operatorname{Arg} z = n \arg z + 2nk\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Arg} z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

方幂和方根的辐角等式

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$ 不成立. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \operatorname{Arg} z = n \arg z + 2nk\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Arg} z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

其中左边表示 z 的所有 n 次方根的所有辐角.

三次方程的求根问题

现在我们来看三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的根, $p \neq 0$.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设 $\alpha=\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\Delta}}$ 是算术根, $\omega=e^{2\pi i/3}$.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设 $\alpha=\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\Delta}}$ 是算术根, $\omega=e^{2\pi i/3}$. 则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设 $\alpha=\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\Delta}}$ 是算术根, $\omega=e^{2\pi i/3}$. 则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设 $\alpha=\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\Delta}}$ 是算术根, $\omega=e^{2\pi i/3}$. 则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果 $\Delta<0$, 则 $p>0$, u 是虚数且 $v=\overline{u}$.

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设 $\alpha=\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\Delta}}$ 是算术根, $\omega=e^{2\pi i/3}$. 则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果 $\Delta<0$, 则 $p>0$, u 是虚数且 $v=\overline{u}$. 设 u_1,u_2,u_3 是 $\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\Delta}}$ 的所有值,

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$.

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设 $\alpha=\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\Delta}}$ 是算术根, $\omega=e^{2\pi i/3}$. 则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果 $\Delta<0$, 则 $p>0$, u 是虚数且 $v=\overline{u}$. 设 u_1,u_2,u_3 是 $\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{\Delta}}$ 的所有值, 则我们得到 3 个实根

$$x=u_1+\overline{u_1},\ u_2+\overline{u_2},\ u_3+\overline{u_3}.$$

第四节　曲线和区域

- 复数表平面曲线
- 区域的定义
- 区域的特性

典型例题：复数方程表平面图形

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示，这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

典型例题：复数方程表平面图形

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示，这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例

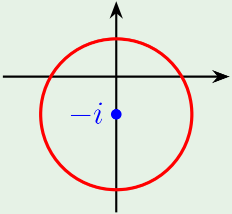
(1) $|z+i|=2.$

典型例题：复数方程表平面图形

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示，这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例

(1) $|z+i|=2$. 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体，即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.



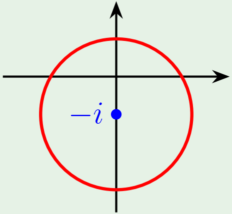
典型例题：复数方程表平面图形

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示，这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例

(1) $|z+i|=2$. 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体，即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.

一般的圆方程为 $|z-z_0|=R$，其中 z_0 是圆心，R 是半径.



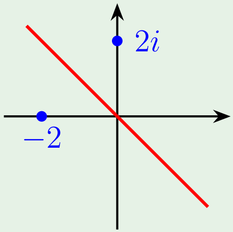
典型例题：复数方程表平面图形

例（续）

(2) $|z-2i|=|z+2|$.

例 (续)

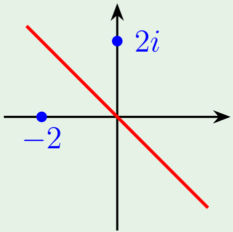
(2) $|z-2i|=|z+2|$. 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点，即二者连线的垂直平分线.



典型例题：复数方程表平面图形

例（续）

(2) $|z-2i|=|z+2|$. 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点，即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 $x+y=0$.



典型例题：复数方程表平面图形

例（续）

(3) $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4.$

例（续）

(3) $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\operatorname{Im}(i+\bar{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

例（续）

(3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$.

典型例题：复数方程表平面图形

例（续）

(3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

例（续）

(3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

(5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$.

典型例题：复数方程表平面图形

例（续）

(3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

(5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

典型例题：复数方程表平面图形

例 (续)

(3) $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.
(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.
(5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

练习

$z^2+\overline{z}^2=1$ 和 $z^2-\overline{z}^2=i$ 分别表示什么图形?

典型例题：复数方程表平面图形

例 (续)

(3) $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.
(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.
(5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

练习

$z^2+\overline{z}^2=1$ 和 $z^2-\overline{z}^2=i$ 分别表示什么图形?

答案

双曲线 $x^2-y^2=\dfrac{1}{2}$ 和双曲线 $xy=\dfrac{1}{4}$.

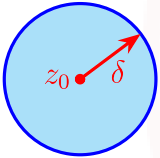
邻域

为了引入极限的概念，我们需要考虑点的邻域.

为了引入极限的概念，我们需要考虑点的邻域．类比于高等数学中的邻域和去心邻域，我们在复变函数中，称开圆盘

$$U(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个 δ-邻域，



邻域

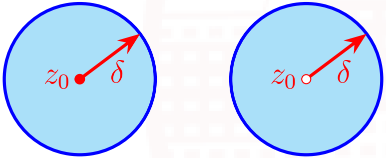
为了引入极限的概念，我们需要考虑点的邻域. 类比于高等数学中的邻域和去心邻域，我们在复变函数中，称开圆盘

$$U(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个 δ-邻域，称去心开圆盘

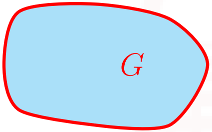
$$\mathring{U}(z_0,\delta)=z:0<|z-z_0|<\delta$$

为 z_0 的一个去心 δ-邻域.



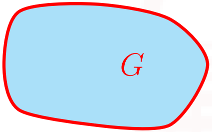
内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$.



内部、外部、边界

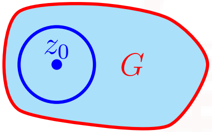
设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:



内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

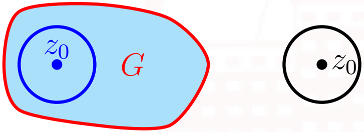


内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

(2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.



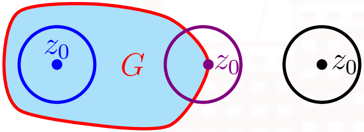
内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

(2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.

(3) 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.



内部、外部、边界

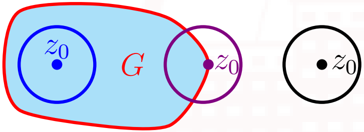
设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

(2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.

(3) 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能.



内部、外部、边界

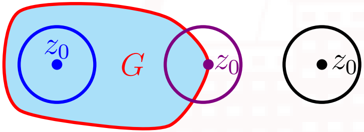
设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

(2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.

(3) 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.



开集和闭集

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.

开集和闭集

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z-z_0|<R,\quad 1<\operatorname{Re} z<3,\quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集.

开集和闭集

如果 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个开集. 例如

$$|z-z_0|<R, \quad 1<\operatorname{Re} z<3, \quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G，称 G 是一个闭集.

如果 G 的所有点都是内点，也就是说，G 的边界点都不属于它，称 G 是一个开集。例如

$$|z-z_0|<R,\quad 1<\operatorname{Re} z<3,\quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集。如果 G 的所有边界点都属于 G，称 G 是一个闭集。这等价于它的补集是开集。

开集和闭集

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

直观上看: 开集往往由 $>, <$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant, \leqslant$ 的不等式给出.

开集和闭集

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z-z_0|<R, \quad 1<\operatorname{Re} z<3, \quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

直观上看: 开集往往由 $>,<$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant,\leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z-z_0|<R, \quad 1<\operatorname{Re} z<3, \quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

直观上看: 开集往往由 $>,<$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant,\leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0,R)$ 中, 则称它是有界的.

开集和闭集

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

直观上看: 开集往往由 $>, <$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant, \leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0, R)$ 中, 则称它是有界的. 否则称它是无界的.

区域和闭区域

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域.

区域和闭区域

定义

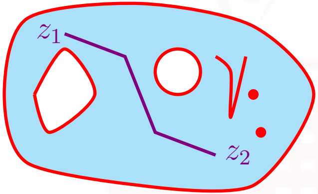
如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个区域. 也就是说, 区域是连通的开集.

区域和闭区域

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域. 也就是说，区域是连通的开集.

观察下侧的图案，青色部分是一个区域 (不包含红色部分).

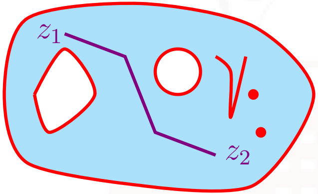


区域和闭区域

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域. 也就是说，区域是连通的开集.

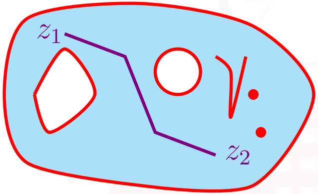
观察下侧的图案，青色部分是一个区域 (不包含红色部分). 红色的线条和点是它的边界.



定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个区域. 也就是说, 区域是连通的开集.

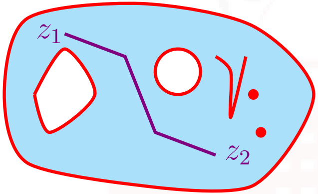
观察下侧的图案, 青色部分是一个区域 (不包含红色部分). 红色的线条和点是它的边界. 区域和它的边界一起构成了闭区域, 记作 $\overline{D}$.



定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域. 也就是说, 区域是连通的开集.

观察下侧的图案, 青色部分是一个区域 (不包含红色部分). 红色的线条和点是它的边界. 区域和它的边界一起构成了闭区域, 记作 $\overline{D}$. 它是一个闭集.



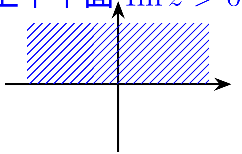
常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

常见区域

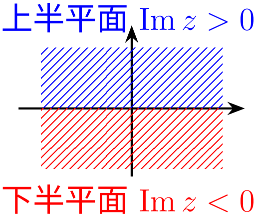
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$



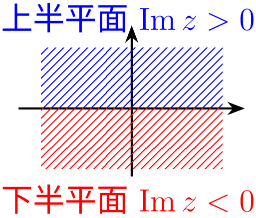
常见区域

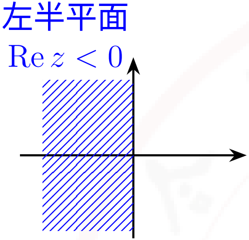
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.



常见区域

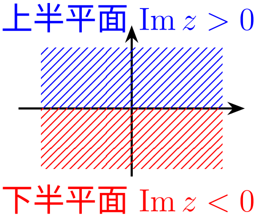
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

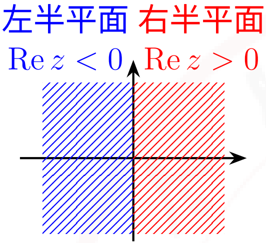




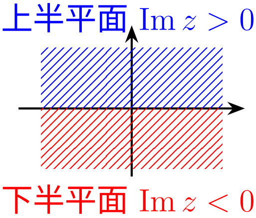
常见区域

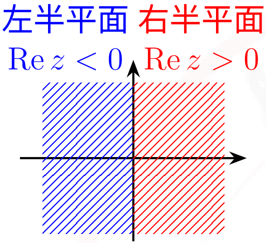
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

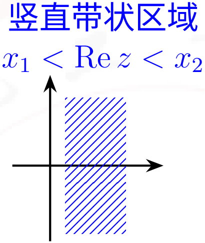




复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.



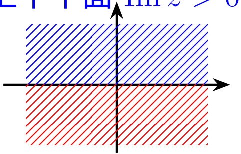




常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

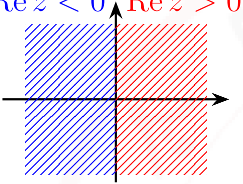
上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$



下半平面 $\operatorname{Im} z < 0$

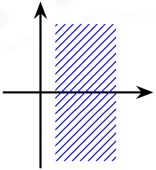
左半平面 右半平面

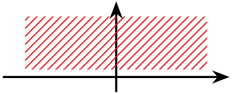
$\operatorname{Re} z < 0$ $\operatorname{Re} z > 0$



竖直带状区域

$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$



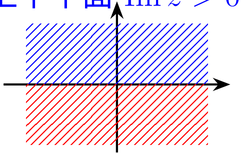


水平带状区域

$y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

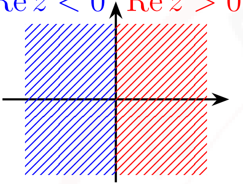
上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$



下半平面 $\operatorname{Im} z < 0$

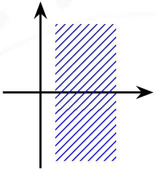
左半平面 右半平面

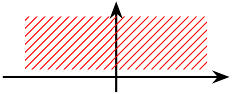
$\operatorname{Re} z < 0$ $\operatorname{Re} z > 0$



竖直带状区域

$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$



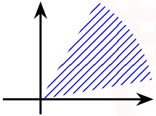


水平带状区域

$y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$

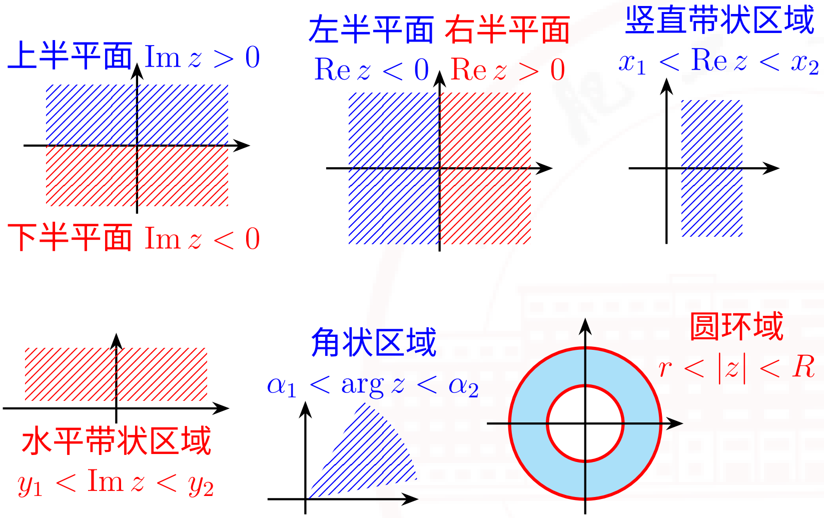
角状区域

$\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$



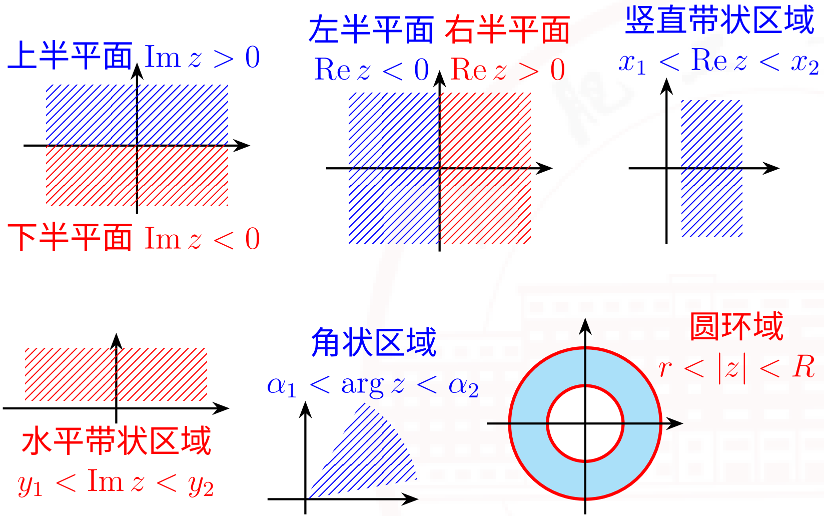
常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.



常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定. 这些区域对应的闭区域是什么?



连续区间、简单曲线和闭路

设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数,

连续区间、简单曲线和闭路

设 $x(t),y(t),t\in[a,b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\quad t\in[a,b]$ 定义了一条连续曲线.

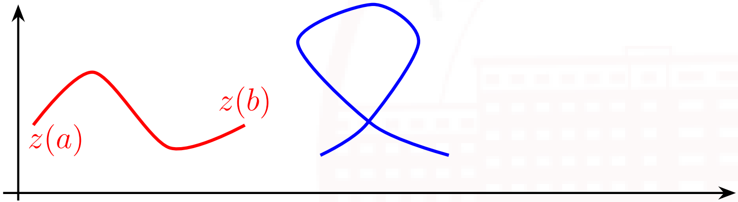
连续区间、简单曲线和闭路

设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$

定义了一条连续曲线. 这也等价于 $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b]$.

设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$ 定义了一条连续曲线. 这也等价于 $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b]$.

如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线.

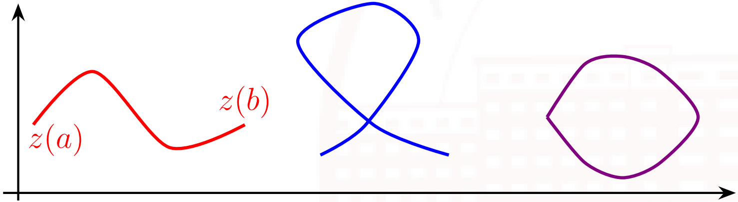


连续区间、简单曲线和闭路

设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$

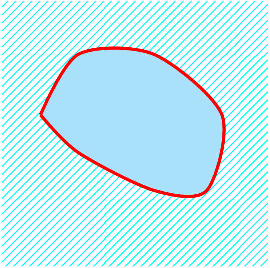
定义了一条连续曲线. 这也等价于 $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b]$.

如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线. 如果还满足两个端点重叠, 即 $z(a) = z(b)$, 则称 C 是简单闭曲线, 也简称为闭路.

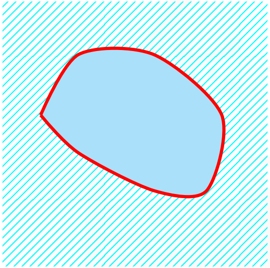


闭路的内部和外部

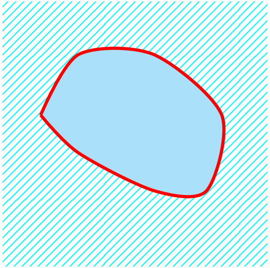
闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界.



闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界. 分别称这两个区域是 C 的内部和外部.



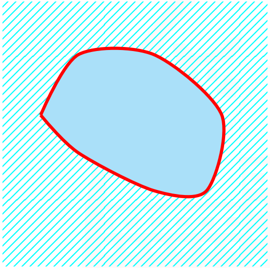
闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界. 分别称这两个区域是 C 的内部和外部. C 是它们的公共边界.



闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界. 分别称这两个区域是 C 的内部和外部. C 是它们的公共边界.

这件事情的严格证明是十分困难的 (Veblen 1905).



单连通域和多连通域

在前面所说的几个区域的例子中，我们在区域中画一条闭路.

单连通域和多连通域

在前面所说的几个区域的例子中，我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内.

在前面所说的几个区域的例子中，我们在区域中画一条闭路．除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内．

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中，则称 D 是单连通域．否则称之为多连通域．

单连通域和多连通域

在前面所说的几个区域的例子中，我们在区域中画一条闭路．除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内．

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中，则称 D 是单连通域．否则称之为多连通域．

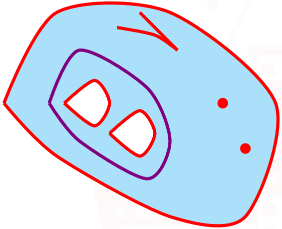
单连通域内的任一闭路可以连续地变形成一个点．

在前面所说的几个区域的例子中，我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内.

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中，则称 D 是单连通域. 否则称之为多连通域.

单连通域内的任一闭路可以连续地变形成一个点.



例题：区域的特性

例

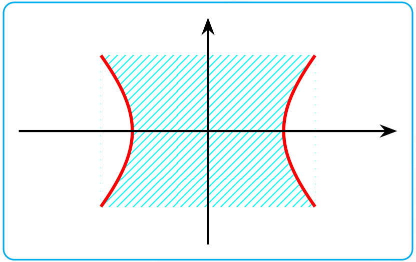
(1) $\mathrm{Re}(z^2) < 1$.

例题：区域的特性

例

(1) $\operatorname{Re}(z^2) < 1.$

设 $z = x + yi$，则 $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1.$

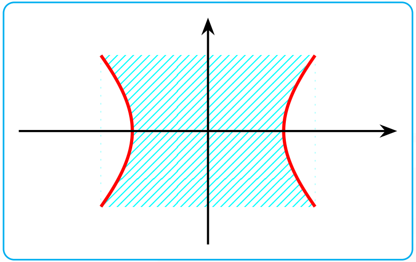


例题：区域的特性

例

(1) $\mathrm{Re}(z^2) < 1$.

设 $z = x + yi$, 则 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$. 这是无界的单连通域.



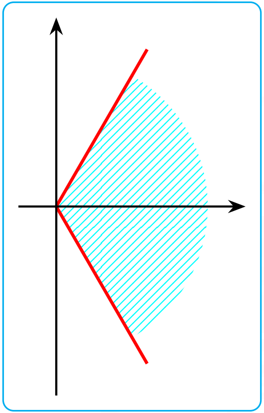
例题：区域的特性

例（续）

(2) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{3}$ (不含原点).

例 (续)

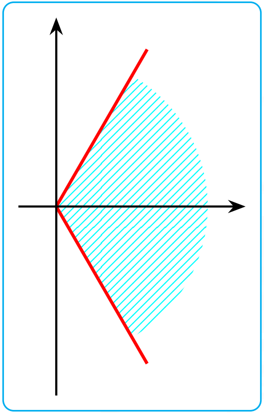
(2) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{3}$ (不含原点). 即角状区域 $-\dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$.



例题：区域的特性

例 (续)

(2) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{3}$ (不含原点). 即角状区域 $-\dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$. 这是无界的单连通域.



例题：区域的特性

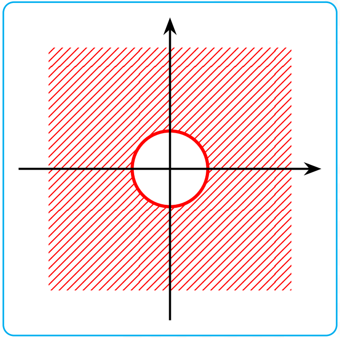
例 (续)

(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3.$

例题：区域的特性

例（续）

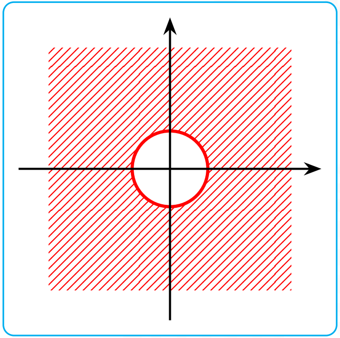
(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \dfrac{1}{3}$.



例题：区域的特性

例（续）

(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \dfrac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.



例题：区域的特性

例 (续)

(4) $|z+1|+|z-1|<4.$

例 (续)

(4) $|z+1|+|z-1|<4.$
表示一个椭圆的内部.

例题：区域的特性

例 (续)

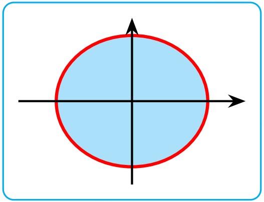
(4) $|z+1|+|z-1|<4$.

表示一个椭圆的内部．这是有界的单连通域．

例 (续)

(4) $|z+1|+|z-1|<4.$

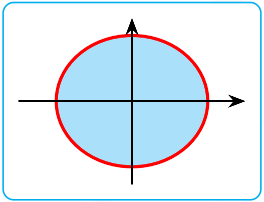
表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.



例（续）

(4) $|z+1|+|z-1|<4.$

表示一个椭圆的内部．这是有界的单连通域．



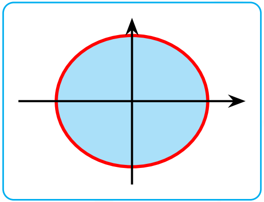
思考

$|z+1|+|z-1|\geqslant 1$ 表示什么集合？

例题：区域的特性

例 (续)

(4) $|z+1|+|z-1|<4$.
表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.



思考

$|z+1|+|z-1|\geqslant 1$ 表示什么集合?

答案

整个复平面.

第五节　复变函数

- 复变函数的定义
- 映照

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f : A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f : A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.

复变函数的定义

所谓的映射, 就是两个集合之间的一种对应 $f : A \to B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个复变函数.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

- 称 A 为函数 f 的定义域.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

- 称 A 为函数 f 的定义域.
- 称 $\{w = f(z) : z \in A\}$ 为它的值域.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

- 称 A 为函数 f 的定义域.
- 称 $\{w = f(z) : z \in A\}$ 为它的值域.

上述函数的定义域和值域分别是什么?

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应。例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究，我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值.

多值复变函数

在复变函数理论中, 我们常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

多值复变函数

在复变函数理论中, 我们常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究，我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数.

多值复变函数

在复变函数理论中, 我们常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是一一对应.

多值复变函数

在复变函数理论中, 我们常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是一一对应.

例

$f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应．例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等．为了方便研究，我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值．这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支．

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支．

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数．如果 f 和 f^{-1} 都是单值的，则称 f 是一一对应．

例

$f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时，f 是一一对应．

多值复变函数

在复变函数理论中, 我们常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是一一对应.

例

$f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时, f 是一一对应.

若无特别声明, 复变函数总是指单值的复变函数.

映照

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来.

映照

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系,

映照

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系, 其中

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

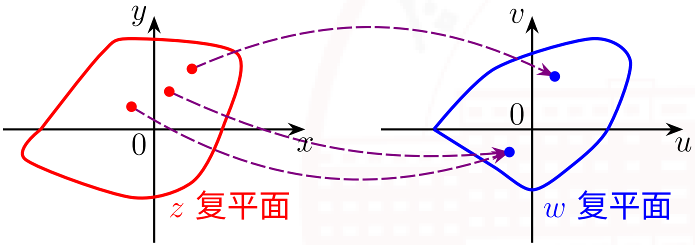
的实部和虚部是两个二元实变函数.

映照

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系, 其中

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

的实部和虚部是两个二元实变函数.



例题：映照

例

函数 $w = \overline{z}$.

例题：映照

例

函数 $w=\overline{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换.

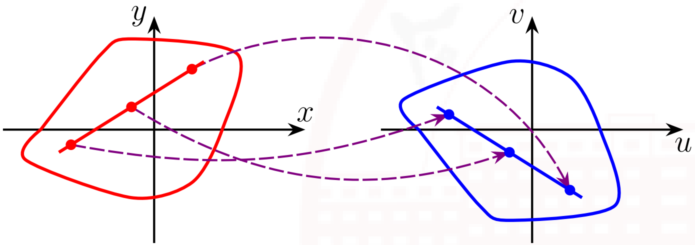
例题：映照

例

函数 $w=\overline{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置，则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域，且 $u=x, v=-y$.

例

函数 $w=\bar{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域, 且 $u=x, v=-y$.



例

函数 $w = az$.

例

函数 $w = az$. 设 $a = re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合.

例题：映照

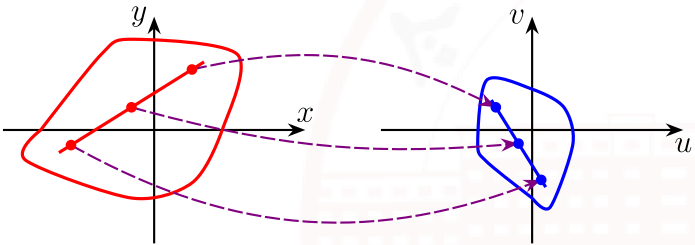
例

函数 $w = az$. 设 $a = re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.

例题：映照

例

函数 $w = az$. 设 $a = re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.



例

函数 $w=z^2$.

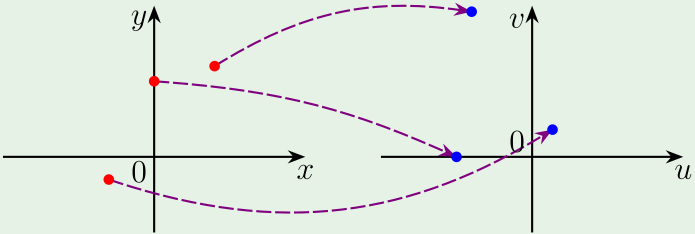
例题：映照

例

函数 $w = z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.

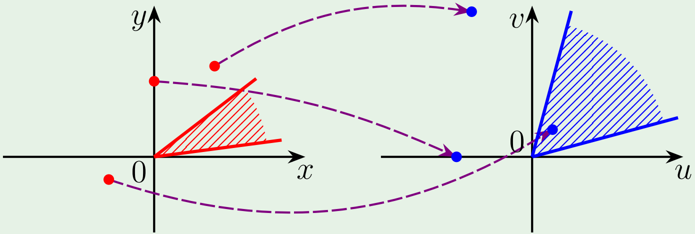
例

函数 $w = z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



例

函数 $w=z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



例 (续)

由于 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$.

例 (续)

由于 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. 因此它把 z 平面上两族分别以直线 $y = \pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2 - y^2 = c_1, \quad 2xy = c_2$$

例题：映照

例（续）

由于 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. 因此它把 z 平面上两族分别以直线 $y = \pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2 - y^2 = c_1, \quad 2xy = c_2$$

分别映射为 w 平面上的两族平行直线

$$u = c_1, \quad v = c_2.$$

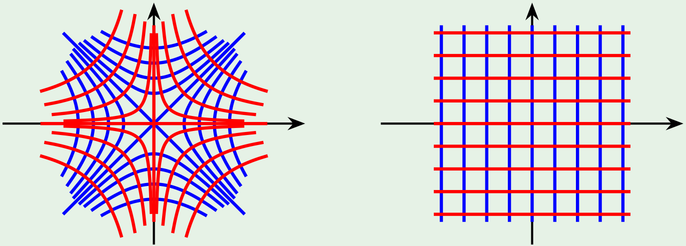
例 (续)

由于 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. 因此它把 z 平面上两族分别以直线 $y = \pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2 - y^2 = c_1, \quad 2xy = c_2$$

分别映射为 w 平面上的两族平行直线

$$u = c_1, \quad v = c_2.$$



例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\dfrac{\pi}{2}$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \dfrac{\pi}{2}$.

解

设 $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$, 则 $w = z^2 = -r^2$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \dfrac{\pi}{2}$.

解

设 $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$，则 $w = z^2 = -r^2$. 因此它的像还是一条线段 $0 < |w| < 4, \arg w = -\pi$.

例题：映照的像

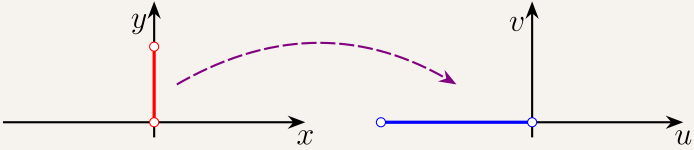
例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\dfrac{\pi}{2}$.

解

设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=ir$，则 $w=z^2=-r^2$. 因此它的像还是一条线段 $0<|w|<4, \arg w=-\pi$.



例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

解

由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

解

由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

因此 $u = x^2 - y^2 = 4, v = 2xy$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

解

由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

因此 $u = x^2 - y^2 = 4, v = 2xy$.

可以说明当 $u = 4$ 时，对任意 v, $u + iv$ 都是该双曲线上某一点的像.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

解

由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

因此 $u = x^2 - y^2 = 4, v = 2xy$.

可以说明当 $u = 4$ 时，对任意 v，$u + iv$ 都是该双曲线上某一点的像．所以这条双曲线的像是直线 $\operatorname{Re} w = 4$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(3) 扇形区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2.$

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(3) 扇形区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2.$

解

设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2 e^{2i\theta}$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(3) 扇形区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2.$

解

设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域 $0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}, 0 < |w| < 4.$

例题：映照的像

例

求圆周 $|z|=2$ 在映照 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

例题：映照的像

例

求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = \dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解

由于 $z = \dfrac{w+1}{w-1}$, $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right| = 2$,

例

求圆周 $|z|=2$ 在映照 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解

由于 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$, $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|=2$, 因此

$$|w+1|=2|w-1|,\quad w\overline{w}+w+\overline{w}+1=4w\overline{w}-4w-4\overline{w}+4,$$

例题：映照的像

例

求圆周 $|z|=2$ 在映照 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解

由于 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$, $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|=2$, 因此

$$|w+1|=2|w-1|,\quad w\overline{w}+w+\overline{w}+1=4w\overline{w}-4w-4\overline{w}+4,$$

$$w\overline{w}-\frac{5}{3}w-\frac{5}{3}\overline{w}+1=0,\quad \left|w-\frac{5}{3}\right|^2=\frac{16}{9},$$

例题：映照的像

例

求圆周 $|z|=2$ 在映照 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解

由于 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$, $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right|=2$, 因此

$$|w+1|=2|w-1|,\quad w\overline{w}+w+\overline{w}+1=4w\overline{w}-4w-4\overline{w}+4,$$

$$w\overline{w}-\frac{5}{3}w-\frac{5}{3}\overline{w}+1=0,\quad \left|w-\frac{5}{3}\right|^2=\frac{16}{9},$$

即 $\left|w-\dfrac{5}{3}\right|=\dfrac{4}{3}$, 是一个圆周.

第六节　极限和连续性

- 无穷远点
- 数列的极限
- 函数的极限
- 函数的连续性

数列极限

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限.

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

定义

数列极限

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

定义

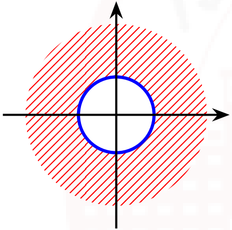
- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall\varepsilon>0, \exists N$ 使得当 $n\geqslant N$ 时 $|z_n-z|<\varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$.
- 如果 $\forall X>0, \exists N$ 使得当 $n\geqslant N$ 时 $|z_n|>X$, 则称 ∞ 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$.

数列极限

如果我们称

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 (去心) 邻域,

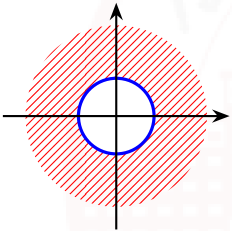


数列极限

如果我们称

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 (去心) 邻域, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 可统一表述为:



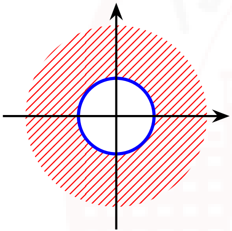
数列极限

如果我们称

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 (去心) 邻域, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 可统一表述为:

对 z 的任意邻域 U, $\exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $z_n \in U$.



复球面

那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢?

复球面

那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢？我们将介绍复球面的概念，它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞.

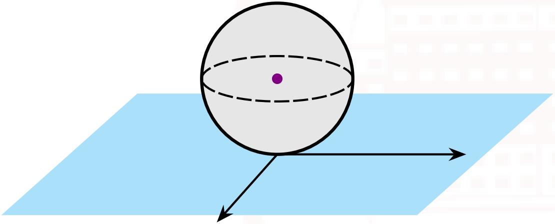
复球面

那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

复球面

那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢？我们将介绍复球面的概念，它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

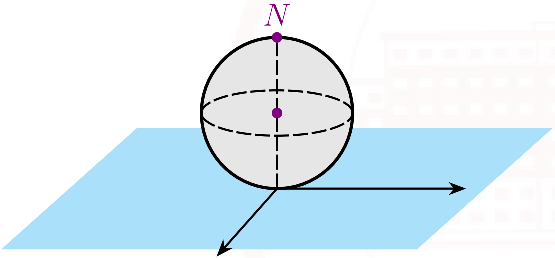
取一个与复平面相切于原点 $z=0$ 的球面.



复球面

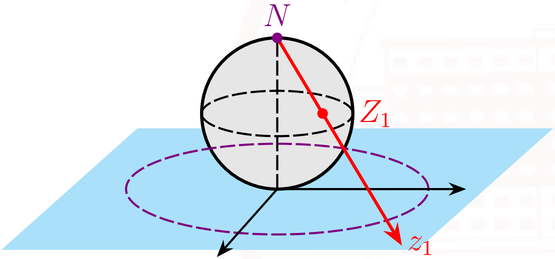
那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

取一个与复平面相切于原点 $z=0$ 的球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于另一点 N, 称之为北极.



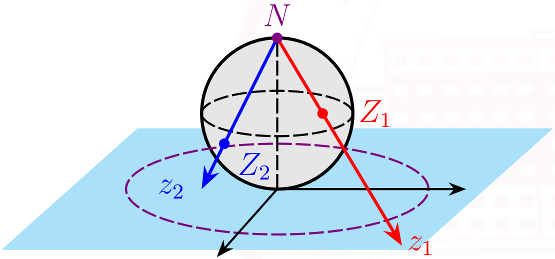
复球面

- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.



复球面

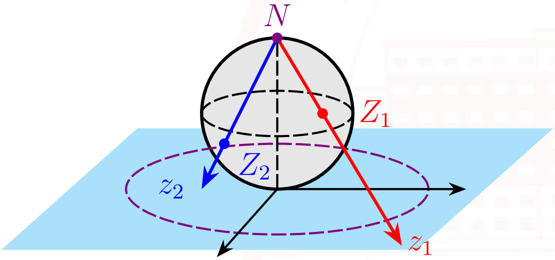
- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.



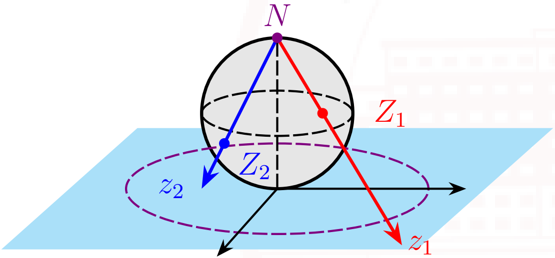
复球面

- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.

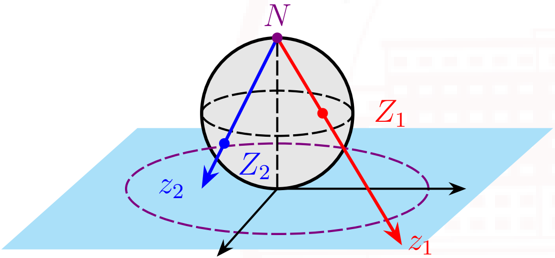
这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.



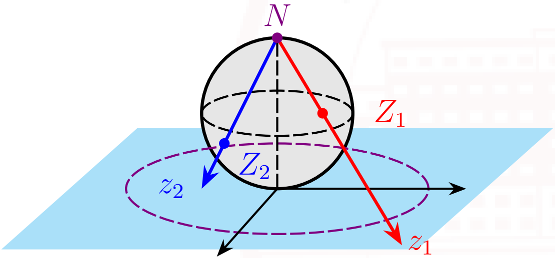
当 $|z|$ 越来越大时，其对应球面上点也越来越接近 N.



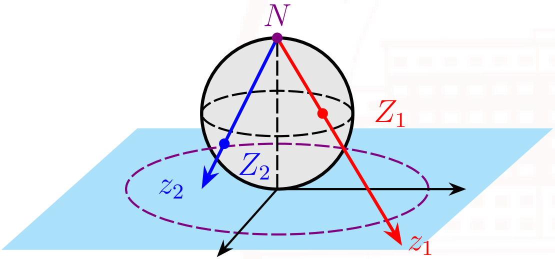
当 $|z|$ 越来越大时，其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点，记作 ∞.



当 $|z|$ 越来越大时，其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点，记作 ∞. 那么扩充复数集合 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应.



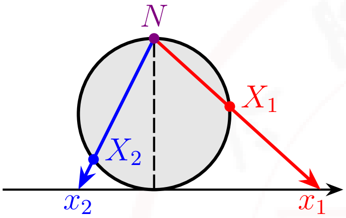
当 $|z|$ 越来越大时，其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点，记作 ∞. 那么扩充复数集合 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应. 称这样的球面为复球面，称包含无穷远点的复平面为扩充复平面(闭复平面).



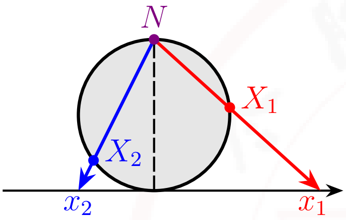
复球面：与实数无穷的联系

它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢?

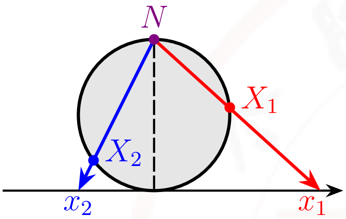
它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应.



它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应．于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞．



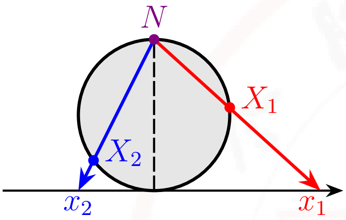
它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞.



朴素地看，复球面上任意一点可以定义邻域的概念.

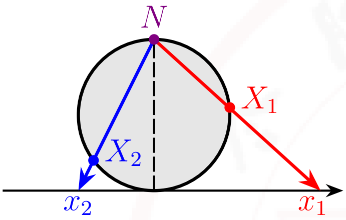
复球面：与实数无穷的联系

它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应．于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞．



朴素地看，复球面上任意一点可以定义邻域的概念．特别地，∞ 的开邻域通过前面所说的对应关系，可以对应到扩充复平面上 ∞ 的一个邻域．

它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应．于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞.



朴素地看，复球面上任意一点可以定义邻域的概念．特别地，∞ 的开邻域通过前面所说的对应关系，可以对应到扩充复平面上 ∞ 的一个邻域．所以在复球面上，我们将普通复数和 ∞ 的开邻域可以视为相同的概念．

数列收敛的等价刻画

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

数列收敛的等价刻画

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

定理

设 $z_n = x_n + y_n i, z = x + yi$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

数列收敛的等价刻画

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

定理

设 $z_n = x_n + y_n i, z = x + yi$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

证明

由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leqslant |z_n - z| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证. □

例题：数列的敛散性

例

设 $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right) e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

例题：数列的敛散性

例

设 $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解

由于

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0.$$

例题：数列的敛散性

例

设 $z_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解

由于

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \to 1, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \to 0.$$

因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = 1$.

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.
如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists\delta>0$ 使得

$$z \in \mathring{U}(z_0,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon),$$

函数的极限

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.
如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists\delta > 0$ 使得

$$z \in \mathring{U}(z_0,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A(z \to z_0)$.

函数的极限

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.
如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists\delta>0$ 使得

$$z \in \mathring{U}(z_0,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A(z \to z_0)$.

此时我们称极限存在.

函数的极限

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.
如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists\delta > 0$ 使得

$$z \in \mathring{U}(z_0,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A(z \to z_0)$.

此时我们称极限存在.
对于 $z_0 = \infty$ 或 $A = \infty$ 的情形, 也可以用上述定义统一描述.

不难看出，变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的：

不难看出, 变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的: 即 $z \to z_0$ 沿任一曲线趋向于 z_0 的极限都是相同的.

与实函数极限之联系

不难看出，变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的：即 $z \to z_0$ 沿任一曲线趋向于 z_0 的极限都是相同的.

定理

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + y_0 i$, $A = u_0 + v_0 i$, 则

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0.$$

与实函数极限之联系

不难看出，变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的：即 $z \to z_0$ 沿任一曲线趋向于 z_0 的极限都是相同的.

定理

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z_0 = x_0 + y_0 i, A = u_0 + v_0 i$, 则

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0.$$

证明

由三角不等式

$$|u - u_0|, |v - v_0| \leqslant |f(z) - A| \leqslant |u - u_0| + |v - v_0|$$

易证. □

极限的四则运算

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

极限的四则运算

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 则

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B$;

极限的四则运算

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} (fg)(z) = AB$;

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} (fg)(z) = AB$;

(3) 当 $B \neq 0$ 时, $\lim\limits_{z\to z_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(z) = \dfrac{A}{B}$.

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} (fg)(z) = AB$;

(3) 当 $B \neq 0$ 时, $\lim\limits_{z\to z_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(z) = \dfrac{A}{B}$.

类似地, 我们也可以使用等价无穷小替换、洛必达法则等。

例题：判断函数极限是否存在

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

例题：判断函数极限是否存在

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

例题：判断函数极限是否存在

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad v(x,y) = 0.$$

例题：判断函数极限是否存在

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时，$u(x, y) \to \pm 1$.

例题：判断函数极限是否存在

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时，$u(x, y) \to \pm 1$. 因此 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x, y)$ 不存在，

例题：判断函数极限是否存在

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时，$u(x, y) \to \pm 1$. 因此 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} u(x, y)$ 不存在，从而 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 不存在. $\square$

函数的连续性

定义

定义

- 如果 $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

函数的连续性

定义

- 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

函数的连续性

定义

- 如果 $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

函数的连续性

定义

- 如果 $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

定理

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

定义

- 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

定理

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

例

设 $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$.

函数的连续性

定义

- 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

定理

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

例

设 $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$. $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x,y)=x^2-y^2$ 处处连续.

函数的连续性

定义

- 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

定理

函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

例

设 $f(z) = \ln(x^2+y^2) + i(x^2-y^2)$. $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x,y) = x^2 - y^2$ 处处连续. 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

连续函数的性质

定理

连续函数的性质

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.

连续函数的性质

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

连续函数的性质

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的,

连续函数的性质

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续,

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续，函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续，则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的，故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续，有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续, 有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

有时候我们会遇到在曲线上连续的函数, 它指的是当 z 沿着该曲线趋向于 z_0 时, $f(z) \to f(z_0)$.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z),g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0)\neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续，函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续，则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z)=z$ 是处处连续的，故多项式函数

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

也处处连续，有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

有时候我们会遇到在曲线上连续的函数，它指的是当 z 沿着该曲线趋向于 z_0 时，$f(z)\to f(z_0)$. 此时它具有类似一元实变量函数的性质.

例题：函数连续性的判定

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

例题：函数连续性的判定

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z_0 = x_0 + iy_0.$

$\square$

例题：函数连续性的判定

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

□

例题：函数连续性的判定

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续.

$\square$

例题：函数连续性的判定

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

$\square$

例题：函数连续性的判定

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z_0=x_0+iy_0$. 那么 $u(x,y),v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

另一种看法是，函数 $g(z)=\overline{z}=x-iy$ 处处连续，

$\square$

例题：函数连续性的判定

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z_0=x_0+iy_0$. 那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

另一种看法是，函数 $g(z)=\overline{z}=x-iy$ 处处连续，从而 $g(f(z))=\overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续. □

注记

可以看出，在极限和连续性上，复变函数和两个二元实函数没有什么差别.

注记

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢?

注记

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法.

注记

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法.

这就导致了复变函数有**导数**, 而不是像多变量实函数只有偏导数.

注记

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法.

这就导致了复变函数有导数, 而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.