复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

第三章　复变函数的积分

1. 复变函数积分的概念
2. 柯西-古萨基本定理和复合闭路定理
3. 原函数和不定积分
4. 柯西积分公式
5. 解析函数与调和函数的关系

第一节　复变函数积分的概念

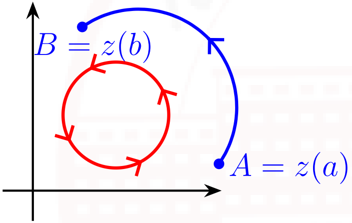
- 复变函数积分的定义
- 复变函数积分的计算法

有向曲线

设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z = z(t), a \leqslant t \leqslant b$ 除去有限个点之外都有非零导数.

固定它的一个方向, 称为正方向, 则我们得到一条有向曲线. 和这条曲线方向相反的记作 C^-, 它的方向被称为该曲线负方向.

对于闭路, 它的正方向总是指逆时针方向, 负方向总是指顺时针方向. 以后我们不加说明的话默认是正方向.



复变函数积分的定义

所谓的复变函数积分，本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数 $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 定义在区域 D 内，有向曲线 C 包含在 D 中. 形式地展开

$$f(z)\,\mathrm{d}z = (u+iv)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i(u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x).$$

定义

如果下述右侧两个线积分均存在，则定义

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\int_C (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y)$$

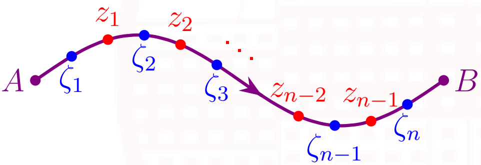
为函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分.

复变函数积分的定义

当然, 我们也可以像线积分那样通过分割来定义. 在曲线 C 上依次选择分点 $z_0 = A, z_1, \dots, z_n = B$. 然后在每一段弧上任取 $\zeta_k \in \overparen{z_{k-1}z_k}$ 并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

然后称 $n \to \infty$, 分割的弧长 $\to 0$ 时 S_n 的极限为复变函数积分. 这二者是等价的.



如果 C 是闭曲线, 则该积分记为 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$. 此时该积分不依赖端点的选取.

如果 C 是实轴上的区间 $[a,b]$ 且此时 $f(z)=u(x)$, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$$

就是黎曼积分.

根据线积分的存在性条件可知:

定理

如果 $f(z)$ 是 D 内连续函数, C 是光滑曲线, 则 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 总存在.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设 $C: z(t)=x(t)+iy(t), a \leqslant t \leqslant b$ 是一条光滑有向曲线, 正方向为 t 增加的方向. 那么 $\mathrm{d}z=z'(t)\,\mathrm{d}t$,

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b f(z)z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

如果 C 的正方向是 t 减少的方向, 则需要交换右侧积分的上下限.

如果 C 是逐段光滑的, 则相应的积分就是各段的积分之和. 以后我们只考虑逐段光滑曲线上的连续函数的积分.

典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

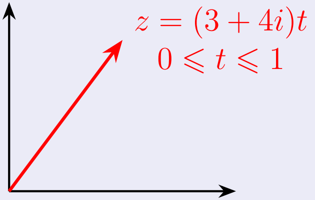
例

求 $\int_C z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 $3+4i$ 的直线段.

解

由于 $z=(3+4i)t, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 因此

$$\begin{aligned}
\int_C z\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 (3+4i)t \cdot (3+4i)\,\mathrm{d}t \\
&= (3+4i)^2 \int_0^1 t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}(3+4i)^2 = -\frac{7}{2} + 12i.
\end{aligned}$$

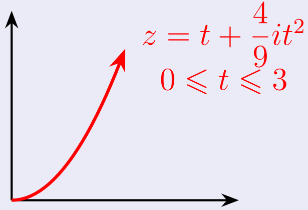


例

求 $\displaystyle\int_C z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是抛物线 $y=\dfrac{4}{9}x^2$ 上从原点到点 $3+4i$ 的曲线段.

解

由于 $z=t+\dfrac{4}{9}it^2, 0\leqslant t\leqslant 3$, 因此



$$
\begin{aligned}
\int_C z\,\mathrm{d}z &= \int_0^3\left(t+\frac{4}{9}it^2\right)\cdot\left(1+\frac{8}{9}it\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^3\left(t+\frac{4}{3}it^2-\frac{32}{81}t^3\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \left(\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{9}it^3-\frac{8}{81}t^4\right)\Bigg|_0^3 = -\frac{7}{2}+12i.
\end{aligned}
$$

典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

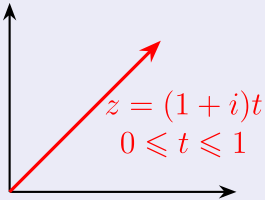
例

求 $\int_C \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 $1+i$ 的直线段.

解

由于 $z=(1+i)t, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 因此 $\operatorname{Re} z = t$,

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 t \cdot (1+i)\,\mathrm{d}t \\ &= (1+i)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1+i}{2}.\end{aligned}$$



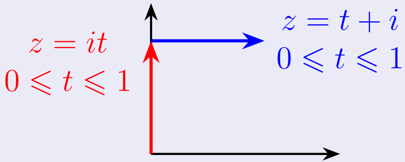
例

求 $\int_C \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 i 再到 $1+i$ 的折线段.

解

第一段 $z = it, 0 \leqslant t \leqslant 1, \operatorname{Re} z = 0,$
第二段 $z = t + i,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ \operatorname{Re} z = t.$ 因此

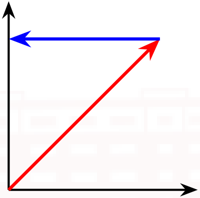
$$\int_C \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z = \int_0^1 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$



可以看出, 即便起点和终点相同, 沿不同路径 $f(z)=\operatorname{Re} z$ 的积分也可能不同. 而 $f(z)=z$ 的积分则只和起点和终点位置有关, 与路径无关. 原因在于 $f(z)=z$ 是处处解析的, 我们以后会详加解释.

练习

求 $\displaystyle\int_C \operatorname{Im} z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点沿 $y=x$ 到点 $1+i$ 再到 i 的折线段.



答案

$$-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}.$$

例题: 计算复变函数沿圆周的积分

例

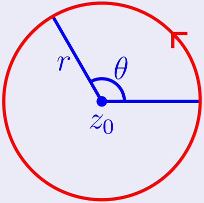
求 $\oint_{|z-z_0|=r} \dfrac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$, 其中 n 为整数.

解

$C: |z-z_0| = r$ 的参数方程为 $z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 于是 $\mathrm{d}z = ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$,

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} i(re^{i\theta})^{-n}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= ir^{-n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$



当 $n = 0$ 时, 该积分值为 $2\pi i$.

当 $n \neq 0$ 时, 该积分值 $= \dfrac{ir^{-n}}{-in}e^{-in\theta}\Big|_0^{2\pi} = 0$.

例题: 计算复变函数沿圆周的积分

所以

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0; \\ 0, & n\neq 0. \end{cases}$$

这个积分以后经常用到, 它的特点是与积分圆周的圆心和半径都无关.

积分的性质

定理

(1) $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z.$

(2) $\displaystyle\int_C kf(z)\,\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$

(3) $\displaystyle\int_C [f(z)\pm g(z)]\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\,\mathrm{d}z.$

线性性质

(4) (长大不等式) 设 C 的长度为 L, $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)| \leqslant M$, 则

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \leqslant ML.$$

证明

我们来证明下(4). 由

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)\Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta s_k \leqslant M\sum_{k=1}^{n}\Delta s_k$$

可知

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \leqslant ML. \qquad \square$$

长大不等式常常用于证明等式: 估算一个积分和一个具体的数值之差不超过任意给定的 ε, 从而得到二者相等.

例

设 $f(z)$ 在 $z \neq a$ 处连续，且 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$，则

$$\lim_{r\to 0}\oint_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i k.$$

证明

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z-a| < \delta$ 时，$|(z-a)f(z)-k| \leqslant \varepsilon$. 当 $0 < r < \delta$ 时，

$$\left|\oint_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}z - 2\pi i k\right| = \left|\oint_{|z-a|=r}\left[f(z)-\frac{k}{z-a}\right]\mathrm{d}z\right|$$

$$= \left|\oint_{|z-a|=r}\frac{(z-a)f(z)-k}{z-a}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r = 2\pi\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，因此命题得证. □

第二节　柯西-古萨基本定理和复合闭路定理

- 柯西-古萨基本定理
- 复合闭路定理

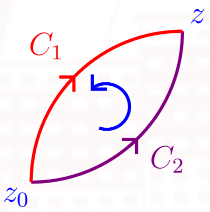
积分路径无关与闭路积分

观察下方的两条曲线 C_1, C_2. 设 $C = C_1^- + C_2$. 可以看出

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \iff$$

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

所以 $f(z)$ 的积分只与起点终点有关 $\iff$ $f(z)$ 绕任意闭路的积分为零.



上一节中我们计算了 $f(z) = z, \operatorname{Re} z, \dfrac{1}{z-z_0}$ 的积分. 其中

- $f(z) = z$ 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \dfrac{1}{z-z_0}$ 有奇点 z_0, 沿绕 z_0 闭路的积分非零;
- $f(z) = \operatorname{Re} z$ 处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分非零).

由此可见函数沿闭路积分为零, 与函数在闭路内部是否解析有关.

柯西-古萨基本定理: 推导

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D} = D \cup C$ 上解析, 即存在区域 $B \supseteq \overline{D}$ 使得 $f(z)$ 在 B 上解析. 为了简便假设 $f'(z)$ 连续, 则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_C (u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y) + i\oint_C (v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y).$$

由格林公式和 C-R 方程可知

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\iint_D (v_x + u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\iint_D (u_x - v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

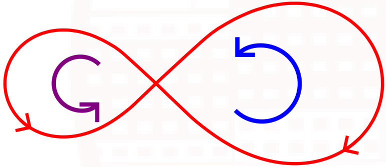
柯西-古萨基本定理

设 $f(z)$ 在闭路 C 上连续, C 内部解析, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

推论

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条闭合曲线 (可以不是闭路), 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

这是因为即使不是简单曲线也可以拆分为一些简单曲线.



典型例题: 柯西-古萨基本定理计算积分

例

求 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} \mathrm{d}z.$

解

由于 $\frac{1}{2z-3}$ 在 $|z| \leqslant 1$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} \mathrm{d}z = 0.$$

练习

求 $\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z^2+z} \mathrm{d}z = \underline{\quad 0 \quad}.$

例题: 柯西-古萨基本定理计算积分

例

求 $\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z$.

解

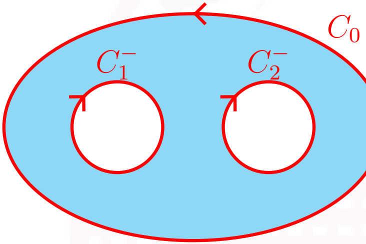
注意到 $\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right)$. 由于 $\frac{1}{z}, \frac{1}{z+i}$ 在 $|z-i| \leqslant \frac{1}{2}$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+i}\,\mathrm{d}z = 0,$$

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z = -\pi i.$$

多连通域边界与复合闭路

设 $C_0, C_1, \dots, C_n$ 是 $n+1$ 条简单闭曲线, $C_1, \dots, C_n$ 每一条都包含在其它闭路的外部, 而且它们都包含在 C_0 的内部. 这样它们围成了一个多连通区域 D, 它的边界称为一个复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$. 沿着 C 前进的点, D 总在它的左侧, 所以这就是它的正方向.



复合闭路定理

设 $f(z)$ 在复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 及其所围成的多连通区域内解析, 则

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

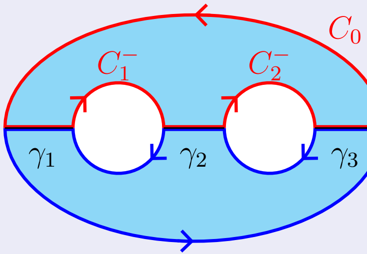
复合闭路定理

证明

以曲线 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$ 把 $C_0, C_1, \dots, C_n$ 连接起来, 则它们把区域 D 分成了两个单连通域 D_1, D_2. 对 D_1 和 D_2 的边界应用柯西积分定理并相加, 则 γ_i 对应的部分正好相互抵消, 因此

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z - \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \cdots - \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

于是定理得证. □



例题：复合闭路定理的应用

例

证明对于任意闭路 C，$\int_C (z-a)^n \, \mathrm{d}z = 0$，$n \neq -1$ 为整数.

证明

当 $n \geqslant 0$ 时，$(z-a)^n$ 处处解析，因此 $\int_C (z-a)^n \, \mathrm{d}z = 0$.

当 $n \leqslant -2$ 时，如果 a 不在 C 的内部，则 $(z-a)^n$ 在 C 及其内部解析. 由柯西积分定理，$\int_C (z-a)^n \, \mathrm{d}z = 0$.

如果 a 在 C 的内部，则在 C 的内部取一个以 a 为圆心的圆周 C_1. 由复合闭路定理以及上一节的结论

$$\int_C (z-a)^n \, \mathrm{d}z = \int_{C_1} (z-a)^n \, \mathrm{d}z = 0.$$

□

例题: 复合闭路定理的应用

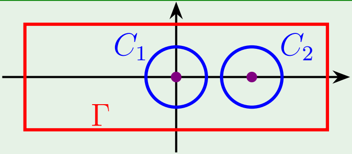
同理可知, 当 a 在 C 的内部时,

$$\int_C \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i.$$

例题: 复合闭路定理的应用

例

求 $\displaystyle\int_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$, 其中 Γ 是由 $2\pm i, -2\pm i$ 形成的矩形闭路.



解

函数 $\dfrac{2z-1}{z^2-z}$ 在 Γ 内有两个奇点 $z=0,1$. 设 C_1, C_2 如图所示, 由复合闭路定理

$$\oint_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$$
$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z$$
$$= 2\pi i + 0 + 0 + 2\pi i = 4\pi i.$$

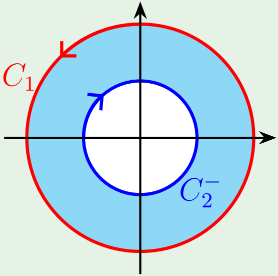
例题: 复合闭路定理的应用

例

求 $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z$, 其中

$$\Gamma = C_1 + C_2^-,$$

$$C_1 : |z| = 2, C_2 : |z| = 1.$$



解

函数 $\frac{e^z}{z}$ 在 C_1, C_2 围城的圆环域内解析.

由复合闭路定理可知 $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} \mathrm{d}z = 0.$

第三节　原函数和不定积分

- 原函数
- 牛顿-莱布尼兹定理

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条起于 z_0 终于 z 的曲线. 由柯西-古萨基本定理可知, 积分 $\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 与路径无关, 只与 z_0, z 有关. 因此我们也将其记为 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$.

对于任意固定的 $z_0 \in D$, 函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

定义了一个单值函数.

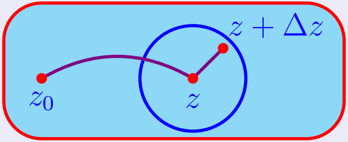
定理

$F(z)$ 是 D 内的解析函数, 且 $F'(z) = f(z)$.

原函数的存在性

证明

以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K，取 $|\Delta z|$ 小于 K 的半径. 那么



$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

容易知道

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,\mathrm{d}\zeta=f(z)\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta=f(z)\Delta z.$$

我们需要比较上述两个积分，其中 z 到 $z+\Delta z$ 取直线.

续证

由于 $f(z)$ 解析, 因此连续. $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得当 $|\zeta-z|<\delta$ 时, z 落在 K 中且 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. 当 $|\Delta z|<\delta$ 时, 由长大不等式

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right|=\left|\int_z^{z+\Delta z}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\Delta z}\,\mathrm{d}\zeta\right|$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\cdot|\Delta z|=\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 因此

$$f(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=F'(z).$$

□

牛顿-莱布尼兹定理

设 $f(z)$ 在单连通区域 D 上解析，z_1 至 z_2 的积分路径落在 D 内，则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_1) - F(z_2), \quad \text{其中} \quad F'(z) = f(z).$$

如果 D 上的解析函数 $G(z)$ 满足 $G'(z) = f(z)$，则称 $G(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数．由于导函数为 0 的解析函数只能是常值函数，因此 $G(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z + C$．我们称之为 $f(z)$ 的不定积分，记为 $\int f(z)\,\mathrm{d}z$．

复变函数和实变函数的牛顿-莱布尼兹定理的差异在哪呢？复变情形要求是单连通区域上解析函数，实变情形要求是闭区间上连续函数．

典型例题: 利用原函数求积分

例

求 $\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} z\,\mathrm{d}z$.

解

由于 $f(z)=z$ 处处解析, 且 $\displaystyle\int z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2+C$, 因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1}=\frac{1}{2}(z_1^2-z_0^2).$$

因此之前的例子中 $\displaystyle\int_0^{3+4i} z\,\mathrm{d}z=-\frac{7}{2}+12i$, 而无论从 0 到 $3+4i$ 的路径如何.

典型例题: 利用原函数求积分

例

求 $\displaystyle\int_0^{\pi i} z\cos z^2\,\mathrm{d}z$.

解

由于 $f(z)=z\cos z^2$ 处处解析, 且

$$\int z\cos z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int\cos z^2\,\mathrm{d}z^2=\frac{1}{2}\sin z^2+C,$$

因此

$$\int_0^{\pi i} z\cos z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\sin z^2\Big|_0^{\pi i}=-\frac{1}{2}\sin\pi^2.$$

这里我们使用了凑微分法.

典型例题: 利用原函数求积分

例

求 $\displaystyle\int_0^i z\cos z\,\mathrm{d}z$.

解

由于 $f(z)=z\cos z$ 处处解析, 且

$$\begin{aligned}\int z\cos z\,\mathrm{d}z &= \int z\,\mathrm{d}(\sin z) = z\sin z - \int \sin z\,\mathrm{d}z \\ &= z\sin z + \cos z + C,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^i z\cos z\,\mathrm{d}z &= (z\sin z + \cos z)\Big|_0^i \\ &= i\sin i + \cos i - 1 = e^{-1} - 1.\end{aligned}$$

这里我们使用了分部积分法.

典型例题: 利用原函数求积分

例

求 $\displaystyle\int_1^{1+i} ze^z\,\mathrm{d}z.$

解

由于 $f(z)=ze^z$ 处处解析, 且

$$\int ze^z\,\mathrm{d}z=\int z\,\mathrm{d}e^z=ze^z-\int e^z\,\mathrm{d}z=(z-1)e^z+c,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_1^{1+i} ze^z\,\mathrm{d}z&=(z-1)e^z\Big|_1^{1+i}\\&=ie^{1+i}=e(-\sin 1+i\cos 1).\end{aligned}$$

典型例题: 利用原函数求积分

练习

求 $\int_0^1 z\sin z\,\mathrm{d}z$.

答案

$\sin 1 - \cos 1$.

典型例题: 利用原函数求积分

例

设 C 为沿着 $|z|=1$ 从 1 到 i 的逆时针圆弧, 求 $\displaystyle\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z$.

解

函数 $f(z)=\dfrac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在 $\operatorname{Re} z \leqslant -1$ 外的单连通区域解析.

$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z = \int \ln(z+1)\,\mathrm{d}[\ln(z+1)] = \frac{1}{2}\ln^2(z+1)+c.$$

因此

$$\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\ln^2(z+1)\Big|_1^i = \frac{1}{2}\left[\ln^2(1+i)-\ln^2 2\right]$$

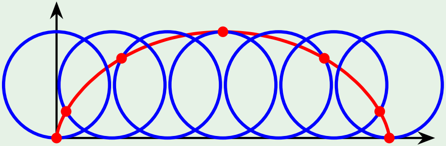
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i\right)^2-\ln^2 2\right] = -\frac{\pi^2}{32}-\frac{3}{8}\ln^2 2+\frac{\pi\ln 2}{8}i.$$

典型例题: 利用原函数求积分

例

求 $\int_C (2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是连接 0 到 $2\pi a$ 的摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1-\cos\theta), \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$



解

由于 $f(z) = 2z^2+8z+1$ 处处解析, 因此

$$\int_C (2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi a} (2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z$$

$$= \left(\frac{2}{3}z^3+4z^2+z\right)\Big|_0^{2\pi a} = \frac{16}{3}\pi^3a^3+16\pi^2a^2+2\pi a.$$

第四节　柯西积分公式

- 柯西积分公式
- 高阶导数的柯西积分公式

柯西积分定理是解析函数理论的基础，但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式

设

- 函数 $f(z)$ 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析,
- $z_0 \in D$,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z.$$

如果 $z_0 \notin D$，由柯西-古萨基本定理，右侧的积分是 0.

柯西积分公式: 注记

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设 $z = z_0 + Re^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z = iRe^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) \,\mathrm{d}\theta.$$

证明

由连续性可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| \leqslant \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. 设 $\Gamma : |z - z_0| = \delta$. 由复合闭路定理和长大不等式

$$\begin{aligned}
\left|\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0)\right| &= \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0)\right| \\
&= \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}\cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon.
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知 $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$. □

典型例题: 柯西积分公式的应用

求积分 $\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z$ 时, 如果 $g(z)$ 在 C 内部只有一个奇点 z_0, 且 $(z-z_0)g(z)$ 解析, 那么我们就可以使用柯西积分公式来计算该积分.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$.

解

函数 $\sin z$ 处处解析. 取 $f(z)=\sin z$, $z_0=0$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z=2\pi i\sin z\big|_{z=0}=0.$$

典型例题: 柯西积分公式的应用

例

求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \mathrm{d}z.$

解

由于函数 e^z 处处解析，取 $f(z)=e^z, z_0=1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \mathrm{d}z = 2\pi i e^z\big|_{z=1} = 2\pi e i.$$

练习

求 $\oint_{|z|=2\pi} \frac{\cos z}{z-\pi} \mathrm{d}z = \underline{-2\pi i}.$

典型例题：柯西积分公式的应用

例

设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=\sqrt{3}}\dfrac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,d\zeta$，求 $f'(1+i)$.

解

当 $|z|<\sqrt{3}$ 时，取 $g(\zeta)=3\zeta^2+7\zeta+1, \zeta_0=z$ 并应用柯西积分公式得

$$f(z)=\oint_{|\zeta|=\sqrt{3}}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,d\zeta$$
$$=2\pi i(3\zeta^2+7\zeta+1)\big|_{\zeta=z}=2\pi i(3z^2+7z+1).$$

因此
$$f'(z)=2\pi i(6z+7),$$
$$f'(1+i)=2\pi i(13+6i)=-12\pi+26\pi i.$$

注意当 $|z|>\sqrt{3}$ 时，$f(z)\equiv 0$.

典型例题: 柯西积分公式的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z.$

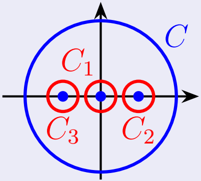
解

被积函数的奇点为 $0, \pm 1$. 设 C_1, C_2, C_3 分别为绕 $0, 1, -1$ 的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i \left[\frac{e^z}{z^2-1}\bigg|_{z=0} + \frac{e^z}{z(z+1)}\bigg|_{z=1} + \frac{e^z}{z(z-1)}\bigg|_{z=-1} \right]$$

$$= 2\pi i \left(-1 + \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = \pi i(e + e^{-1} - 2).$$



解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

柯西积分公式

设函数 $f(z)$ 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析, 则对任意 $z_0 \in D$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z.$$

类似于实变函数的泰勒展开, 我们推测解析函数也有泰勒展开

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + \cdots$$

这样由 $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} \,\mathrm{d}z$ 的性质可知右侧应当为 $f^{(n)}(z_0)$.

高阶导数的柯西积分公式

证明

先证明 $n=1$ 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离. 当 $|h|<\delta$ 时, $z_0+h\in D$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,\quad f(z_0+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0-h}\,\mathrm{d}z.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z.$$

当 $h\to 0$ 时, 左边的极限是 $f'(z_0)$. 因此我们只需要证明右边的极限等于 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z$.

续证

二者之差 $= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)|\leqslant M$. 注意到 $z\in C$, $|z-z_0|\geqslant\delta$, $|z-z_0-h|\geqslant\delta-|h|$. 由长大不等式,

$$\left|\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)}\cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h\to 0$ 时, 它的极限为 0, 因此 $n=1$ 情形得证.

对于一般的 n, 我们通过归纳法将 $f^{(n)}(z_0)$ 和 $f^{(n)}(z_0+h)$ 表达为积分形式. 然后利用长大不等式证明 $h\to 0$ 时, $\dfrac{f^{(n)}(z_0+h)-f^{(n)}(z_0)}{h}$ 趋于积分公式右侧. 具体过程省略. □

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的，而是用高阶导数来计算积分的.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z.$

解

由于 $\cos(\pi z)$ 在 $|z|<2$ 处处解析，因此由柯西积分公式，

$$\oint_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{4!}[\cos(\pi z)]^{(4)}\Big|_{z=1}$$
$$=\frac{2\pi i}{24}\cdot\pi^4\cos\pi=-\frac{\pi^5 i}{12}.$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \,\mathrm{d}z.$

解

$\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 $|z|<2$ 的奇点为 $z=\pm i$. 取 C_1, C_2 为以 $i, -i$ 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理,

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \,\mathrm{d}z.$$

续解

由柯西积分公式，

$$\oint_{C_1}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{1}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i}$$
$$=2\pi i\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}-\frac{2e^z}{(z+i)^3}\right]\Bigg|_{z=i}=\frac{(1-i)e^i\pi}{2}.$$

类似地，$\displaystyle\oint_{C_2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{-(1+i)e^{-i}\pi}{2}$. 故

$$\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z=\frac{(1-i)e^i\pi}{2}+\frac{-(1+i)e^{-i}\pi}{2}$$
$$=\pi i(\sin 1-\cos 1).$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\oint_{|z|=1} z^n e^z \,\mathrm{d}z$, 其中 n 是整数.

解

当 $n \geqslant 0$ 时, $z^n e^z$ 处处解析. 由柯西-古萨基本定理,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \,\mathrm{d}z = 0.$$

当 $n \leqslant -1$ 时, e^z 处处解析. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(-n-1)!}(e^z)^{(-n-1)}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(-n-1)!}.$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\displaystyle\oint_{|z-3|=2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z$ 和 $\displaystyle\oint_{|z-1|=2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z.$

解

(1) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-3|<2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z^3}\right)'\bigg|_{z=2}=-\frac{3\pi i}{8}.$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解

(2) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-1|<3$ 的奇点为 $z=0,2$. 取 C_1,C_2 分别为以 0 和 2 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式,

$$\oint_{|z-1|=3}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right]''\bigg|_{z=0}+\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z^3}\right)'\bigg|_{z=2}=0.$$

练习

$\displaystyle\oint_{|z-2i|=3}\frac{1}{z^2(z-i)}\,\mathrm{d}z=$ ___0___.

莫累拉定理

例 (莫累拉定理)

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内连续，且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$，则 $f(z)$ 在 D 内解析.

该定理可视作柯西-古萨基本定理的逆定理.

证明

由题设可知 $f(z)$ 的积分与路径无关. 固定 $z_0 \in D$，则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

定义了 D 内的一个函数. 类似于原函数的证明可知 $F'(z) = f(z)$. 故 $f(z)$ 作为解析函数 $F(z)$ 的导数也是解析的. □

解析函数与实函数的差异

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数 $f(z)$ 只要在区域 D 中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在 D 中解析. 这一点与实变量函数有本质的区别.

同时我们也可以看出, 如果一个二元实函数 $u(x, y)$ 是一个解析函数的实部或虚部, 则 u 也是具有任意阶偏导数. 这便引出了调和函数的概念.

第五节　解析函数与调和函数的关系

- 调和函数
- 共轭调和函数

调和函数是一类重要的二元实变函数，它和解析函数有着紧密的联系. 为了简便，我们用 u_{xx}, u_{yy} 来表示二阶偏导数.

定义

如果二元实变函数 $u(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数，且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

则称 $u(x,y)$ 是 D 内的**调和函数**.

解析函数与调和函数的联系

定理

区域 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数.

证明

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, 则 u, v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_x.$$

由于 $f(z)$ 存在各阶导数, 因此 u_x, u_y, v_x, v_y 存在连续偏导数. 由 C-R 方程 $u_x = v_y, u_y = -v_x$, 从而

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0.$$

□

反过来，调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢？对于单连通的情形，答案是肯定的.

如果 $u+iv$ 是区域 D 内的解析函数，则我们称 v 是 u 的**共轭调和函数**. 换言之 $u_x = v_y, u_y = -v_x$. 显然 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

定理

设 $u(x,y)$ 是单连通域 D 内的调和函数，则线积分

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y + C$$

是 u 的共轭调和函数.

由此可知，调和函数总具有任意阶连续偏导数.

如果 D 是多连通区域, 则未必存在共轭调和函数. 例如 $\ln(x^2+y^2)$ 是复平面去掉原点上的调和函数, 但它并不是某个解析函数的实部. 事实上, 它是 $2\,\mathrm{Ln}\,z$ 的实部.

在实际计算中, 我们一般不用线积分来得到共轭调和函数, 而是采用下述两种办法:

偏积分法

通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y = -v_x$ 中解出 $\psi(x)$.

不定积分法

对 $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ 求不定积分得到 $f(z)$.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

例

证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 是调和函数，并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解

由 $u_x=-6xy, u_y=3y^2-3x^2$ 可知 $u_{xx}+u_{yy}=-6y+6y=0$，故 u 是调和函数.

由 $v_y=u_x=-6xy$ 得 $v=-3xy^2+\psi(x)$. 由 $v_x=-u_y=3x^2-3y^2$ 得 $\psi'(x)=3x^2$, $\psi(x)=x^3+C$. 故 $v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$,

$$\begin{aligned} f(z)&=u+iv=y^3-3x^2y+i(-3xy^2+x^3+C)\\ &=i(x+iy)^3+iC=i(z^3+C). \end{aligned}$$

也可由 $f'(z)=u_x-iu_y=3iz^2$ 得 $f(z)=iz^3+C$.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

例

求解析函数 $f(z)$ 使得它的虚部为

$$v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y.$$

解

由 $u_x = v_y = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1$ 得

$$u = e^x(x\cos y - y\sin y) + x + \psi(y).$$

由 $u_y = -v_x = -e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) - 1$ 得

$$\psi'(y) = -1, \quad \psi(y) = -y + C.$$

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

续解

故
$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv \\ &= e^x(x\cos y - y\sin y) + x - y + C \\ &\quad + i\Big[e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y\Big] \\ &= ze^z + (1+i)z + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

也可由
$$\begin{aligned} f'(z) &= v_y + iv_x \\ &= e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1 \\ &\quad + i\Big[e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1\Big] \\ &= (z+1)e^z + 1 + i. \end{aligned}$$

得 $f(z) = ze^z + (1+i)z + C$.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

练习

证明 $u(x,y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

答案

$v(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + C.$