不同椭圆曲线的二次扭之比较

张神星

2022年 L-函数及相关主题研讨会
福建　漳州

2022年8月8日

背景

给一个数域上的椭圆曲线 E/K, 我们关心它的二次扭族

$$E^{\chi}/K, \qquad \text{其中 } \chi: G_K \to \{\pm 1\}$$

的各种算术量: Mordell-Weil 秩、Ш 群、Selmer 群等等。

背景

多大程度能决定

给一个数域上的椭圆曲线 E/K, 我们关心它的二次扭族

$$E^{\chi}/K, \qquad \text{其中 } \chi: G_K \to \{\pm 1\}$$

的各种算术量: Mordell-Weil 秩、Ш 群、Selmer 群等等。

Zarhin 问道:

给定阿贝尔簇 $A_1, A_2/K$, 如果对于任意有限扩张 F/K, 均有 $\mathrm{rank}(A_1/F) = \mathrm{rank}(A_2/F)$, 那么是否一定有 A_1 和 A_2 同源?

Zarhin 问道:

给定阿贝尔簇 $A_1, A_2/K$, 如果对于任意有限扩张 F/K, 均有 $\mathrm{rank}(A_1/F) = \mathrm{rank}(A_2/F)$, 那么是否一定有 A_1 和 A_2 同源?

Mazur & Rubin: 或许我可以试试 Selmer 秩.

给定数域上椭圆曲线 $E_1, E_2/K$, 如果有

- G_K 模同构 $E_1[m] \cong E_2[m], m = \begin{cases} p^{k+1}, & p \leqslant 3 \\ p^k, & p > 3 \end{cases}$
- 相同的potential乘性约化素位集合 S
- $\forall \mathrm{l} \in S, (E_1[m]/K\_\mathrm{l})^{\circ} \cong (E_2[m]/K\_\mathrm{l})^{\circ}$
- 一个分歧条件

则 $\mathrm{Sel}_{p^k}(E_1/F) \cong \mathrm{Sel}_{p^k}(E_2/F)$.

Zarhin 问道:

给定阿贝尔簇 $A_1, A_2/K$, 如果对于任意有限扩张 F/K, 均有 $\mathrm{rank}(A_1/F) = \mathrm{rank}(A_2/F)$, 那么是否一定有 A_1 和 A_2 同源?

Mazur & Rubin: 或许我可以试试 Selmer 秩.

给定数域上椭圆曲线 $E_1, E_2/K$, 如果有

- G_K 模同构 $E_1[m] \cong E_2[m], m = \begin{cases} p^{k+1}, & p \leqslant 3 \\ p^k, & p > 3 \end{cases}$
- 相同的potential乘性约化素位集合 S
- $\forall \mathfrak{l} \in S, (E_1[m]/K\_\mathfrak{l})^\circ \cong (E_2[m]/K\_\mathfrak{l})^\circ$
- 一个分歧条件

则 $\mathrm{Sel}_{p^k}(E_1/F) \cong \mathrm{Sel}_{p^k}(E_2/F)$.

存在不同源的 E_1, E_2 满足这个条件

Zarhin 问道:

给定阿贝尔簇 $A_1, A_2/K$, 如果对于任意有限扩张 F/K, 均有 $\operatorname{rank}(A_1/F) = \operatorname{rank}(A_2/F)$, 那么是否一定有 A_1 和 A_2 同源?

Mazur & Rubin: 或许我可以试试 Selmer 秩.

给定数域上椭圆曲线 $E_1, E_2/K$, 如果有

- G_K 模同构 $E_1[m] \cong E_2[m], m = \begin{cases} p^{k+1}, & p \leqslant 3 \\ p^k, & p > 3 \end{cases}$
- 相同的potential乘性约化素位集合 S
- $\forall \mathrm{l} \in S, (E_1[m]/K\_\mathrm{l})^\circ \cong (E_2[m]/K\_\mathrm{l})^\circ$
- 一个分歧条件

则 $\mathrm{Sel}_{p^k}(E_1/F) \cong \mathrm{Sel}_{p^k}(E_2/F)$. → 存在不同源的 E_1, E_2 满足这个条件

Chiu: 如果

$$\mathrm{Sel}_p(E_1/F) \cong \mathrm{Sel}_p(E_2/F)$$

对所有的 F 和几乎所有 p 成立, 那么 E_1 和 E_2 确实同源.

主要结论

我们想构造一些 E_1, E_2 使得对很多 n, $E_1^{(n)}$ 和 $E_2^{(n)}$ 有类似的算术性质.

我们想构造一些 E_1, E_2 使得对很多 n, $E_1^{(n)}$ 和 $E_2^{(n)}$ 有类似的算术性质.

记号

- $E_1: y^2 = x(x - e_1)(x + e_2)$, $\qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0$,
- $E_2: y^2 = x\left(x - e_1 a^2\right)\left(x + e_2 b^2\right)$,

$e_1 a^2 + e_2 b^2 + e_3 c^2 = 0, 2 \nmid abc$,

我们想构造一些 E_1, E_2 使得对很多 n, $E_1^{(n)}$ 和 $E_2^{(n)}$ 有类似的算术性质.

记号

- $E_1: y^2 = x(x-e_1)(x+e_2), \qquad e_1+e_2+e_3=0,$
- $E_2: y^2 = x\left(x-e_1a^2\right)\left(x+e_2b^2\right),$

$e_1a^2+e_2b^2+e_3c^2=0, 2\nmid abc,$

$$\boxed{\begin{gathered}\text{此时 } E_1[4]\cong E_2[4] \\ \mathrm{Sel}_2\left(E_1^{(n)}\right)\cong \mathrm{Sel}_2\left(E_2^{(n)}\right)\end{gathered}}$$

我们想构造一些 E_1, E_2 使得对很多 n, $E_1^{(n)}$ 和 $E_2^{(n)}$ 有类似的算术性质.

记号

- $E_1: y^2 = x(x-e_1)(x+e_2), \qquad e_1+e_2+e_3=0,$
- $E_2: y^2 = x\left(x-e_1a^2\right)\left(x+e_2b^2\right),$ $e_1a^2+e_2b^2+e_3c^2=0, 2 \nmid abc,$

此时 $E_1[4] \cong E_2[4]$
$\mathrm{Sel}_2\left(E_1^{(n)}\right) \cong \mathrm{Sel}_2\left(E_2^{(n)}\right)$

- 假设 n 与 $2e_1e_2e_3abc$ 互素, $\left(\frac{p}{q}\right)=1, \forall p \mid n, \forall 2 \neq q \mid e_1e_2e_3abc.$
- 假设 $\mathrm{Sel}_2(E_1/\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Sel}_2(E_2/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ 是最小的.

如果下述三种情况之一成立:

1. n 的素因子都模 8 余 1,
2. e_1, e_2 是奇数, $2\|e_3$,
3. $2\|e_1, 2\|e_2, 4 \mid e_3$, 再加一些模 4 余 1 的条件.

如果下述三种情况之一成立:

1. n 的素因子都模 8 余 1,
2. e_1, e_2 是奇数, $2 \| e_3$,
3. $2\|e_1, 2\|e_2, 4 \mid e_3$, 再加一些模 4 余 1 的条件.

奇同余椭圆曲线
$e_1 = e_2 = 1, e_3 = -2$

偶同余椭圆曲线
$e_1 = e_2 = 2, e_3 = -4$

如果下述三种情况之一成立:

1. n 的素因子都模 8 余 1,
2. e_1, e_2 是奇数, $2\|e_3$,
3. $2\|e_1, 2\|e_2, 4 \mid e_3$, 再加一些模 4 余 1 的条件.

奇同余椭圆曲线
$e_1 = e_2 = 1, e_3 = -2$

偶同余椭圆曲线
$e_1 = e_2 = 2, e_3 = -4$

则下述等价

- $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}\left(E_1^{(n)}/\mathbb{Q}\right) = 0, Ш\left(E_1^{(n)}/\mathbb{Q}\right)[2^\infty] \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2t}$;
- $\operatorname{rank}_{\mathbb{Z}}\left(E_2^{(n)}/\mathbb{Q}\right) = 0, Ш\left(E_2^{(n)}/\mathbb{Q}\right)[2^\infty] \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2t}$.

证明方法

- 证明所使用的方法仍然是传统的 2-下降法.

- 证明所使用的方法仍然是传统的 2-下降法.
- 首先注意到 $\mathrm{Sel}_2(E_i/\mathbb{Q})$ 极小蕴含 $E = E_1, E_2, E_1^{(n)}, E_2^{(n)}$ 没有 4 阶有理点.

- 证明所使用的方法仍然是传统的 2-下降法.
- 首先注意到 $\mathrm{Sel}_2(E_i/\mathbb{Q})$ 极小蕴含 $E = E_1, E_2, E_1^{(n)}, E_2^{(n)}$ 没有 4 阶有理点.
- 由正合列

$$0 \to \frac{E(\mathbb{Q})}{2E(\mathbb{Q})} \to \mathrm{Sel}_2(E) \to Ш(E/\mathbb{Q})[2] \to 0$$

可知 $E[2] \subseteq \mathrm{Sel}_2(E)$.

- 经典的下降理论告诉我们, $\mathrm{Sel}_2(E)$ 可以表为

$$\left\{\Lambda=(d_1,d_2,d_3)\in\left(\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 2}\right)^3:\ D_\Lambda\left(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}\right)\neq\emptyset,\ d_1d_2d_3\equiv 1 \bmod \mathbb{Q}^{\times 2}\right\},$$

其中齐性空间
$$D_\Lambda=\begin{cases} H_1: & e_1t^2+d_2u_2^2-d_3u_3^2=0,\\ H_2: & e_2t^2+d_3u_3^2-d_1u_1^2=0,\\ H_3: & e_3t^2+d_1u_1^2-d_2u_2^2=0.\end{cases}$$

- 经典的下降理论告诉我们, $\mathrm{Sel}_2(E)$ 可以表为

$$\left\{\Lambda = (d_1, d_2, d_3) \in \left(\mathbb{Q}^\times/\mathbb{Q}^{\times 2}\right)^3 \colon D_\Lambda\left(\mathbb{A}_\mathbb{Q}\right) \neq \emptyset, d_1 d_2 d_3 \equiv 1 \bmod \mathbb{Q}^{\times 2}\right\},$$

其中齐性空间
$$D_\Lambda = \begin{cases} H_1\colon & e_1 t^2 + d_2 u_2^2 - d_3 u_3^2 = 0, \\ H_2\colon & e_2 t^2 + d_3 u_3^2 - d_1 u_1^2 = 0, \\ H_3\colon & e_3 t^2 + d_1 u_1^2 - d_2 u_2^2 = 0. \end{cases}$$

- 那么 $E[2] \subseteq \mathrm{Sel}_2(E)$ 对应到

$$(1,1,1),\ (-e_3, -e_1 e_3, e_1),\ (-e_2 e_3, e_3, -e_2),\ (e_2, -e_1, -e_1 e_2).$$

- $\boldsymbol{p \nmid 2e_1e_2e_3n}$

  由下降法一般结论, 此时 $D_{\Lambda}^{(n)}(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset \Leftrightarrow \ p \nmid d_1d_2d_3.$

  故可不妨设 $d_i \mid 2e_1e_2e_3n$ 且无平方因子.

- $\boldsymbol{p \nmid 2e_1e_2e_3n}$

  由下降法一般结论, 此时 $D_\Lambda^{(n)}(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset \iff p \nmid d_1d_2d_3$.

  故可不妨设 $d_i \mid 2e_1e_2e_3n$ 且无平方因子.

- $\boldsymbol{p = \infty}$

  很容易证明 $D_\Lambda^{(n)}(\mathbb{R}) \neq \emptyset \iff \begin{cases} d_1 > 0, & 若\ e_2 > 0, e_3 < 0; \\ d_2 > 0, & 若\ e_3 > 0, e_1 < 0; \\ d_3 > 0, & 若\ e_1 > 0, e_2 < 0. \end{cases}$

- $\boldsymbol{p \mid n (\Longrightarrow p \nmid e_1 e_2 e_3)}$

$D_\Lambda^{(n)}(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \left(\frac{d_1}{p}\right) = \left(\frac{d_2}{p}\right) = \left(\frac{d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \nmid d_1 d_2 d_3 \\ \left(\frac{-e_2 e_3 d_1}{p}\right) = \left(\frac{e_3 n/d_2}{p}\right) = \left(\frac{e_2 n/d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \nmid d_1, p \mid d_2, p \mid d_3; \\ \left(\frac{-e_3 n/d_1}{p}\right) = \left(\frac{-e_3 e_1 d_2}{p}\right) = \left(\frac{e_1 n/d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \mid d_1, p \nmid d_2, p \mid d_3; \\ \left(\frac{e_2 n/d_1}{p}\right) = \left(\frac{-e_1 n/d_2}{p}\right) = \left(\frac{-e_1 e_2 d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \mid d_1, p \mid d_2, p \nmid d_3; \end{cases}$$

$$D_\Lambda = \begin{cases} H_1: & e_1t^2 + d_2u_2^2 - d_3u_3^2 = 0, \\ H_2: & e_2t^2 + d_3u_3^2 - d_1u_1^2 = 0, \\ H_3: & e_3t^2 + d_1u_1^2 - d_2u_2^2 = 0. \end{cases}$$

- $\boldsymbol{p \mid n (\Longrightarrow p \nmid e_1e_2e_3)}$

$D_\Lambda^{(n)}(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \left(\frac{d_1}{p}\right) = \left(\frac{d_2}{p}\right) = \left(\frac{d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \nmid d_1d_2d_3 \\ \left(\frac{-e_2e_3d_1}{p}\right) = \left(\frac{e_3n/d_2}{p}\right) = \left(\frac{e_2n/d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \nmid d_1, p \mid d_2, p \mid d_3; \\ \left(\frac{-e_3n/d_1}{p}\right) = \left(\frac{-e_3e_1d_2}{p}\right) = \left(\frac{e_1n/d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \mid d_1, p \nmid d_2, p \mid d_3; \\ \left(\frac{e_2n/d_1}{p}\right) = \left(\frac{-e_1n/d_2}{p}\right) = \left(\frac{-e_1e_2d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \mid d_1, p \mid d_2, p \nmid d_3; \end{cases}$$

$$D_\Lambda = \begin{cases} H_1: & e_1 t^2 + d_2 u_2^2 - d_3 u_3^2 = 0, \\ H_2: & e_2 t^2 + d_3 u_3^2 - d_1 u_1^2 = 0, \\ H_3: & e_3 t^2 + d_1 u_1^2 - d_2 u_2^2 = 0. \end{cases}$$

- $p \mid n (\Longrightarrow p \nmid e_1 e_2 e_3)$

$$D_\Lambda^{(n)}(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset \Longleftrightarrow$$

第一种情形是显然的, 后面的情形可以通过加上一个 $E[2]$ 对应的齐性空间化为第一种情形

$$\begin{cases} \left(\frac{d_1}{p}\right) = \left(\frac{d_2}{p}\right) = \left(\frac{d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \nmid d_1 d_2 d_3 \\ \left(\frac{-e_2 e_3 d_1}{p}\right) = \left(\frac{e_3 n/d_2}{p}\right) = \left(\frac{e_2 n/d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \nmid d_1, p \mid d_2, p \mid d_3; \\ \left(\frac{-e_3 n/d_1}{p}\right) = \left(\frac{-e_3 e_1 d_2}{p}\right) = \left(\frac{e_1 n/d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \mid d_1, p \nmid d_2, p \mid d_3; \\ \left(\frac{e_2 n/d_1}{p}\right) = \left(\frac{-e_1 n/d_2}{p}\right) = \left(\frac{-e_1 e_2 d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \mid d_1, p \mid d_2, p \nmid d_3; \end{cases}$$

令

$$d_1 = p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k} \bullet \widetilde{d_1}, \qquad x_i = v_{p_i}(d_1)$$

$$d_2 = p_1^{y_1} \cdots p_k^{y_k} \bullet \widetilde{d_2}, \qquad y_i = v_{p_i}(d_2)$$

$$d_3 = p_1^{z_1} \cdots p_k^{z_k} \bullet \widetilde{d_3}, \qquad z_i = v_{p_i}(d_3)$$

其中 $\widetilde{d_i} \mid 2e_1e_2e_3$ 且无平方因子.

令

$$d_1 = p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k} \bullet \widetilde{d_1}, \qquad x_i = v_{p_i}(d_1)$$

$$d_2 = p_1^{y_1} \cdots p_k^{y_k} \bullet \widetilde{d_2}, \qquad y_i = v_{p_i}(d_2)$$

$$d_3 = p_1^{z_1} \cdots p_k^{z_k} \bullet \widetilde{d_3}, \qquad z_i = v_{p_i}(d_3)$$

其中 $\widetilde{d_i} \mid 2e_1e_2e_3$ 且无平方因子.

设 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{F}_2^k$ 等等, 则

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{0}, \qquad \widetilde{d_1}\widetilde{d_2}\widetilde{d_3} \in \mathbb{Q}^{\times 2}.$$

- 设 $\widetilde{\Lambda} = \left(\widetilde{d_1}, \widetilde{d_2}, \widetilde{d_3}\right)$. 我们对比 $D_{\Lambda}^{(n)}(\mathbb{Q}_v)$ 和 $D_{\widetilde{\Lambda}}^{(1)}(\mathbb{Q}_v)$ 的可解性. (假设 n 素因子都 $\equiv 1 \bmod 8$)

计算 Selmer 群: 比较 $\mathrm{Sel}_2'(E^{(n)})$ 与 $\mathrm{Sel}_2'(E)$

$\boxed{\text{用于计算 } \mathrm{Sel}_2(E^{(n)})}$

- 设 $\widetilde{\Lambda} = (\widetilde{d_1}, \widetilde{d_2}, \widetilde{d_3})$. 我们对比 $D_{\Lambda}^{(n)}(\mathbb{Q}_v)$ 和 $D_{\widetilde{\Lambda}}^{(1)}(\mathbb{Q}_v)$ 的可解性. (假设 n 素因子都 $\equiv 1 \bmod 8$)

$\boxed{\text{用于计算 } \mathrm{Sel}_2(E)}$

$\boxed{\text{用于计算 } \mathrm{Sel}_2(E^{(n)})}$

- 设 $\widetilde{\Lambda} = (\widetilde{d_1}, \widetilde{d_2}, \widetilde{d_3})$. 我们对比 $D_{\Lambda}^{(n)}(\mathbb{Q}_v)$ 和 $D_{\widetilde{\Lambda}}^{(1)}(\mathbb{Q}_v)$ 的可解性. (假设 n 素因子都 $\equiv 1 \bmod 8$)

$\boxed{\text{用于计算 } \mathrm{Sel}_2(E)}$

- $v = \infty$, 由 d_i 和 $\widetilde{d_i}$ 符号相同知二者可解性相同.

计算 Selmer 群: 比较 $\mathrm{Sel}_2'(E^{(n)})$ 与 $\mathrm{Sel}_2'(E)$

$\boxed{\text{用于计算 } \mathrm{Sel}_2(E^{(n)})}$

- 设 $\tilde{\Lambda} = (\widetilde{d_1}, \widetilde{d_2}, \widetilde{d_3})$. 我们对比 $D_{\Lambda}^{(n)}(\mathbb{Q}_v)$ 和 $D_{\tilde{\Lambda}}^{(1)}(\mathbb{Q}_v)$ 的可解性. (假设 n 素因子都 $\equiv 1 \bmod 8$)

$\boxed{\text{用于计算 } \mathrm{Sel}_2(E)}$

- $v = \infty$, 由 d_i 和 $\widetilde{d_i}$ 符号相同知二者可解性相同.
- $v = q \mid 2e_1e_2e_3$, 由 $n, d_i/\widetilde{d_i}$ 是 $\mathbb{Q}_q$ 中平方知二者可解性相同.

由于我们假设 $\mathrm{Sel}_2(E) = E[2]$ 极小, $\tilde{\Lambda} \in E[2]$.

如果 $\tilde{\Lambda} = (-e_3, -e_1e_3, e_1)$,(其它情形类似) 则

$$\Lambda \bullet (-e_3 n, -e_1e_3, e_1 n) = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{1-x_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{y_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{1-z_i} \right).$$

计算 Selmer 群: 比较 $\mathrm{Sel}_2'(E^{(n)})$ 与 $\mathrm{Sel}_2'(E)$

用于计算 $\mathrm{Sel}_2(E^{(n)})$

- 设 $\widetilde{\Lambda} = (\widetilde{d_1}, \widetilde{d_2}, \widetilde{d_3})$. 我们对比 $D_\Lambda^{(n)}(\mathbb{Q}_v)$ 和 $D_{\widetilde{\Lambda}}^{(1)}(\mathbb{Q}_v)$ 的可解性. (假设 n 素因子都 $\equiv 1 \bmod 8$)

用于计算 $\mathrm{Sel}_2(E)$

- $v = \infty$, 由 d_i 和 $\widetilde{d_i}$ 符号相同知二者可解性相同.
- $v = q \mid 2e_1e_2e_3$, 由 $n, d_i/\widetilde{d_i}$ 是 $\mathbb{Q}_q$ 中平方知二者可解性相同.

  由于我们假设 $\mathrm{Sel}_2(E) = E[2]$ 极小, $\widetilde{\Lambda} \in E[2]$.

  如果 $\widetilde{\Lambda} = (-e_3, -e_1e_3, e_1)$,(其它情形类似) 则

$$\Lambda \bullet (-e_3 n, -e_1 e_3, e_1 n) = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{1-x_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{y_i}, \prod_{i=1}^{k} p_i^{1-z_i} \right).$$

- 因此 $\mathrm{Sel}_2'(E^{(n)}) = \mathrm{Sel}_2(E^{(n)})/E[2]$ 中每个元素都有唯一代表元 (d_1, d_2, d_3) 满足 $0 < d_i \mid n$.

- 加上在 $v \mid n$ 处的可解性条件(一堆剩余符号条件), 我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Sel}_2'(E^{(n)}) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix}\mathbf{A}+\mathbf{D}_{-e_3} & \mathbf{D}_{-e_2e_3}\\ \mathbf{D}_{-e_1e_3} & \mathbf{A}+\mathbf{D}_{e_3}\end{pmatrix}\\ (d_1,d_2,d_3) &\longmapsto \qquad\qquad \begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{y}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \left(\left[p_j, -n\right]_{p_i}\right)_{i,j} \in M_k(\mathbb{F}_2), \qquad \mathbf{D}_u = \mathrm{diag}\left(\left[\frac{u}{p_1}\right], \dots, \left[\frac{u}{p_k}\right]\right).$$

- 加上在 $v \mid n$ 处的可解性条件(一堆剩余符号条件), 我们得到

Monsky 矩阵

$$\mathrm{Sel}_2'(E^{(n)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{D}_{-e_3} & \mathbf{D}_{-e_2e_3} \\ \mathbf{D}_{-e_1e_3} & \mathbf{A}+\mathbf{D}_{e_3} \end{pmatrix}$$

$$(d_1, d_2, d_3) \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

加性勒让德符号
事实上 $\mathbf{D}_u = \mathbf{0}$

希尔伯特符号

$$\mathbf{A} = \left(\left[p_j, -n\right]_{p_i}\right)_{i,j} \in M_k(\mathbb{F}_2), \qquad \mathbf{D}_u = \mathrm{diag}\left(\left[\frac{u}{p_1}\right], \dots, \left[\frac{u}{p_k}\right]\right).$$

计算 Selmer 群: 得到 $\mathrm{Sel}_2'(E^{(n)})$

- 加上在 $v \mid n$ 处的可解性条件(一堆剩余符号条件), 我们得到

Monsky 矩阵

$$\mathrm{Sel}_2'(E^{(n)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{D}_{-e_3} & \mathbf{D}_{-e_2e_3} \\ \mathbf{D}_{-e_1e_3} & \mathbf{A}+\mathbf{D}_{e_3} \end{pmatrix}$$

$$(d_1, d_2, d_3) \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}$$

加性勒让德符号
事实上 $\mathbf{D}_u = \mathbf{0}$

希尔伯特符号

$$\mathbf{A} = \left(\left[p_j, -n\right]_{p_i}\right)_{i,j} \in M_k(\mathbb{F}_2), \qquad \mathbf{D}_u = \mathrm{diag}\left(\left[\frac{u}{p_1}\right], \dots, \left[\frac{u}{p_k}\right]\right).$$

- 特别地, $\mathrm{Sel}_2'\left(E_1^{(n)}\right) \cong \mathrm{Sel}_2'\left(E_2^{(n)}\right)$.

$E_1: (e_1, e_2, e_3)$
$E_2: (e_1a^2, e_2b^2, e_3c^2)$

- Cassels 在 $\mathbb{F}_2$ 线性空间 $\mathrm{Sel}_2'(E^{(n)})$ 上定义了一个反对称双线性型:

- Cassels 在 $\mathbb{F}_2$ 线性空间 $\mathrm{Sel}_2'(E^{(n)})$ 上定义了一个反对称双线性型:
- 对于 Λ, Λ', 选择 $P = (P_v)_v \in D_\Lambda(\mathbb{A}_\mathbb{Q}), Q_i \in H_i(\mathbb{Q})$. 令 L_i 为定义了 H_i 在 Q_i 处切平面的线性型, 定义

$$\langle \Lambda, \Lambda' \rangle = \sum_v \langle \Lambda, \Lambda' \rangle_v \,, \qquad \text{其中 } \langle \Lambda, \Lambda' \rangle_v = \sum_{i=1}^{3} \left[L_i(P_v), d_i' \right]_v .$$

- 它不依赖 P 和 Q_i 的选择.

- Cassels 在 $\mathbb{F}_2$ 线性空间 $\mathrm{Sel}_2'(E^{(n)})$ 上定义了一个反对称双线性型:
- 对于 Λ, Λ', 选择 $P = (P_v)_v \in D_\Lambda(\mathbb{A}_\mathbb{Q}), Q_i \in H_i(\mathbb{Q})$. 令 L_i 为定义了 H_i 在 Q_i 处切平面的线性型, 定义

$$\langle \Lambda, \Lambda' \rangle = \sum_v \langle \Lambda, \Lambda' \rangle_v , \qquad \text{其中 } \langle \Lambda, \Lambda' \rangle_v = \sum_{i=1}^{3} \left[L_i(P_v), d_i' \right]_v .$$

- 它不依赖 P 和 Q_i 的选择.

引理(Cassels1998) 如果 $p \nmid 2\infty$, H_i 和 L_i 的系数均是 p 进整数, 且模 p 后, $\overline{D}_\Lambda$ 仍定义了一条亏格 1 的曲线并带有切平面 $\overline{L}_i = 0$, 则 $\langle \Lambda, \Lambda' \rangle_p = 0$.

计算 Cassels 配对: 约化到 Cassels 配对非退化

- 由正合列

$$0 \longrightarrow E[2] \longrightarrow E[4] \stackrel{\times 2}{\longrightarrow} E[2] \longrightarrow 0$$

- 得长正合列

$$0 \longrightarrow E[2] \longrightarrow \mathrm{Sel}_2(E) \longrightarrow \mathrm{Sel}_4(E) \longrightarrow \mathrm{Im}\,\mathrm{Sel}_4(E) \longrightarrow 0.$$

计算 Cassels 配对: 约化到 Cassels 配对非退化

- 由正合列

$$0 \longrightarrow E[2] \longrightarrow E[4] \xrightarrow{\times 2} E[2] \longrightarrow 0$$

- 得长正合列

$$0 \longrightarrow E[2] \longrightarrow \mathrm{Sel}_2(E) \longrightarrow \mathrm{Sel}_4(E) \longrightarrow \mathrm{Im}\,\mathrm{Sel}_4(E) \longrightarrow 0.$$

- 而 Cassels 配对的核是 $\frac{\mathrm{Im}\,\mathrm{Sel}_4(E)}{E[2]}$, 因此 Cassels 配对非退化等价于

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}(E/\mathbb{Q}) = 0, \qquad Ш(E/\mathbb{Q})[2^\infty] \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2t}.$$

- 回忆

  $E_1^{(n)}: ny^2 = x(x - e_1)(x + e_2),\qquad E_2^{(n)}: ny^2 = x\left(x - e_1a^2\right)\left(x + e_2b^2\right)$

  其中 $e_1a^2 + e_2b^2 + e_3c^2 = 0, a, b, c$ 是互素的奇数.

计算 Cassels 配对: 比较局部符号

- 回忆

  $E_1^{(n)}: ny^2 = x(x - e_1)(x + e_2)$, $\quad E_2^{(n)}: ny^2 = x\left(x - e_1 a^2\right)\left(x + e_2 b^2\right)$

  其中 $e_1 a^2 + e_2 b^2 + e_3 c^2 = 0, a, b, c$ 是互素的奇数.

- 首先 $\mathrm{Sel}_2'\left(E_1^{(n)}\right) \cong \mathrm{Sel}_2'\left(E_2^{(n)}\right)$. 我们分别用正体和花体来表示 $E_1^{(n)}$ 和 $E_2^{(n)}$ 对应的记号.

- 回忆

  $E_1^{(n)}: ny^2 = x(x - e_1)(x + e_2)$, $E_2^{(n)}: ny^2 = x\left(x - e_1 a^2\right)\left(x + e_2 b^2\right)$

  其中 $e_1 a^2 + e_2 b^2 + e_3 c^2 = 0, a, b, c$ 是互素的奇数.

- 首先 $\mathrm{Sel}_2'\left(E_1^{(n)}\right) \cong \mathrm{Sel}_2'\left(E_2^{(n)}\right)$. 我们分别用正体和花体来表示 $E_1^{(n)}$ 和 $E_2^{(n)}$ 对应的记号.

- 设 $\Lambda = (d_1, d_2, d_3), \Lambda' = (d_1', d_2', d_3') \in \mathrm{Sel}_2'\left(E_i^{(n)}\right)$.

- 若能证明 $\left[L_i(P_v), d_i'\right]_v = \left[\mathcal{L}_i(\mathcal{P}_v), d_i'\right]_v$, 则对应的 Cassels 配对就同构了.

计算 Cassels 配对: 比较局部符号

- 回忆

  $E_1^{(n)}: ny^2 = x(x - e_1)(x + e_2)$, $\quad E_2^{(n)}: ny^2 = x\left(x - e_1a^2\right)\left(x + e_2b^2\right)$

  其中 $e_1a^2 + e_2b^2 + e_3c^2 = 0$, a, b, c 是互素的奇数.

- 首先 $\mathrm{Sel}_2'\left(E_1^{(n)}\right) \cong \mathrm{Sel}_2'\left(E_2^{(n)}\right)$. 我们分别用正体和花体来表示 $E_1^{(n)}$ 和 $E_2^{(n)}$ 对应的记号.

- 设 $\Lambda = (d_1, d_2, d_3), \Lambda' = (d_1', d_2', d_3') \in \mathrm{Sel}_2'\left(E_i^{(n)}\right)$.

- 若能证明 $\left[L_i(P_v), d_i'\right]_v = \left[\mathcal{L}_i(\mathcal{P}_v), d_i'\right]_v$, 则对应的 Cassels 配对就同构了.

- 在多数情形这不难证明, 我们仅说明相对复杂的一种情形.

- $\boldsymbol{v = p \mid n, p \nmid d_1, p \mid d_2, p \mid d_3}$

设 $Q_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in H_i(\mathbb{Q})$. 选取

$P_p = (1,0,u,v) \in D_\Lambda(\mathbb{Q}_p)$, $\mathcal{P}_p = (1,0,cu,bv) \in \mathcal{D}_\Lambda(\mathbb{Q}_p)$

计算 Cassels 配对: 比较局部符号(续)

- $\boldsymbol{v = p \mid n, p \nmid d_1, p \mid d_2, p \mid d_3}$

设 $Q_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in H_i(\mathbb{Q})$. 选取

$P_p = (1,0,u,v) \in D_\Lambda(\mathbb{Q}_p), \mathcal{P}_p = (1,0,cu,bv) \in \mathcal{D}_\Lambda(\mathbb{Q}_p)$

$L_1(P_p) = e_1 n\alpha_1 - d_3\gamma_1 v + d_2\beta_1 u$

$\mathcal{L}_1(\mathcal{P}_p) = ae_1 n\alpha_1 - bd_3\gamma_1 v + cd_2\beta_1 u$

- $\boldsymbol{v = p \mid n, p \nmid d_1, p \mid d_2, p \mid d_3}$

设 $Q_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in H_i(\mathbb{Q})$. 选取

$P_p = (1,0,u,v) \in D_\Lambda(\mathbb{Q}_p), \mathcal{P}_p = (1,0,cu,bv) \in \mathcal{D}_\Lambda(\mathbb{Q}_p)$

$L_1(P_p) = e_1 n\alpha_1 - d_3\gamma_1 v + d_2\beta_1 u$

$\mathcal{L}_1(\mathcal{P}_p) = ae_1 n\alpha_1 - bd_3\gamma_1 v + cd_2\beta_1 u$

利用 $e_1a^2 + e_2b^2 + e_3c^2 = 0$

$$L_1(P_p)\mathcal{L}_1(\mathcal{P}_p) = \frac{1}{2}(a+b)(a+c)(b+c)\left(\frac{e_1 n\alpha_1}{b+c} + \frac{d_2\beta_1 u}{a+b} - \frac{d_3\gamma_1 v}{a+c}\right)^2$$

- $v = p \mid n, p \nmid d_1, p \mid d_2, p \mid d_3$

设 $Q_i = (\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \in H_i(\mathbb{Q})$. 选取

$P_p = (1,0,u,v) \in D_\Lambda(\mathbb{Q}_p)$, $\mathcal{P}_p = (1,0,cu,bv) \in \mathcal{D}_\Lambda(\mathbb{Q}_p)$

$L_1(P_p) = e_1 n\alpha_1 - d_3\gamma_1 v + d_2\beta_1 u$

$\mathcal{L}_1(\mathcal{P}_p) = ae_1 n\alpha_1 - bd_3\gamma_1 v + cd_2\beta_1 u$

利用 $e_1a^2 + e_2b^2 + e_3c^2 = 0$

$$L_1(P_p)\mathcal{L}_1(\mathcal{P}_p) = \frac{1}{2}(a+b)(a+c)(b+c)\left(\frac{e_1n\alpha_1}{b+c} + \frac{d_2\beta_1 u}{a+b} - \frac{d_3\gamma_1 v}{a+c}\right)^2$$

引理 若 $a \equiv b \equiv c \equiv 1 \bmod 4$, 则 $(a+b)(b+c)(c+a)/8 \equiv 1 \bmod 4$ 是模 $p \mid n$ 的二次剩余.

计算 Cassels 配对: 其它情形

- 对于一些特殊的 (e_1, e_2, e_3), 我们不需要 $p \equiv 1 \bmod 8, \forall p \mid n$ 这么强的条件.

计算 Cassels 配对: 其它情形

- 对于一些特殊的 (e_1, e_2, e_3), 我们不需要 $p \equiv 1 \bmod 8, \forall p \mid n$ 这么强的条件.
- 例如 e_1, e_2 是奇数, $2 \| e_3$ (如奇数同余椭圆曲线情形), 此时需要对 $v = 2$ 情形进行单独处理, 最后也可以得到该结论.

- 对于一些特殊的 (e_1, e_2, e_3), 我们不需要 $p \equiv 1 \bmod 8, \forall p \mid n$ 这么强的条件.
- 例如 e_1, e_2 是奇数, $2 \| e_3$ (如奇数同余椭圆曲线情形), 此时需要对 $v = 2$ 情形进行单独处理, 最后也可以得到该结论.
- 例如 $2 \| e_1, 2 \| e_2, 4 \mid e_3$ (如偶数同余椭圆曲线情形), 此时除了需要对 $v = 2$ 情形进行单独处理, 还需要考虑齐性空间在 $v = \infty$ 的解的问题.