2022 年合肥工业大学试卷（A）

2022~2023 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\mathrm{i}^{-\mathrm{i}}$ 的主值是________________.

2. 设 $z=-\mathrm{i}$, 则 $1+z+z^2+z^3+z^4=$________________.

3. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 则积分 $\oint_C\left(\dfrac{\overline{z}}{z}\right)\mathrm{d}z=$________________.

4. 设 a,b,c 为实数. 如果函数 $f(z)=x^2-2xy-y^2+\mathrm{i}(ax^2+bxy+cy^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a+b+c=$________________.

5. 函数 $\sin t+\mathrm{j}\cos t$ 的傅里叶变换为________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 方程 $\big||z+\mathrm{i}|-|z-\mathrm{i}|\big|=1$ 表示的曲线是 (　　).

A. 直线　　B. 不是圆的椭圆　　C. 双曲线　　D. 圆周

2. 不等式 $-1\leqslant\arg z\leqslant\pi-1$ (包括 0) 确定是的 (　　).

A. 有界多连通闭区域　　B. 有界单连通区域

C. 无界多连通区域　　D. 无界单连通闭区域

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mathrm{i}z)^n$ 的收敛半径是 (　　).

A. i　　B. $-\mathrm{i}$　　C. 1　　D. $+\infty$

4. 下面哪个函数在 $z=0$ 处不可导? (　　)

A. $2x+3y\mathrm{i}$　　B. $2x^2+3y^2\mathrm{i}$　　C. $x^2-xy\mathrm{i}$　　D. $\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$

5. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, $g(z)$ 的一阶零点, 则 z_0 是 $f(z)^3g(z)^2$ 的 (　　).

A. 一阶极点　　B. 一阶零点　　C. 可去奇点　　D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z=\dfrac{3+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}-\dfrac{10\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}$, 求 z 的模和辐角.

2. (6 分) 解方程 $\sin z=2\cos z$.

3. (6 分) 设 C 为从 i 到 $\mathrm{i}-\pi$ 再到 $-\pi$ 的折线, 求 $\displaystyle\int_C\cos^2 z\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z-3|=4$, 求 $\oint_C \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $v(x,y)=x^3+y^3-axy(x+y)$ 是调和函数，求参数 a 以及解析函数 $f(z)$ 使得 $v(x,y)$ 是它的虚部.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<1$; (2) $1<|z|<+\infty$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 求 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z^2-\pi^2)}$ 在有限复平面内的奇点和相应的留数.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+2y(t)=\sin t, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

9. (3 分) 复变函数 $f(z)=\sin z$ 和实变量函数 $g(x)=\sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试列举一二.

2022 年合肥工业大学考试参考答案（A）

2022～2023 学年第一学期　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad e^{\pi/2} \quad}$, **2.** $\underline{\quad 1 \quad}$, **3.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **4.** $\underline{\quad 2 \quad}$, **5.** $\underline{\quad 2\pi j\delta(\omega+1) \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 **A, B, C, D** 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	C	D	C	A	A

三、解答题

1. （6 分）【解】

由于 $z = -3i + 1 - i(3+i) = 2 - 6i$, ······(2 分)

因此 $|z| = 2\sqrt{10}$, ······(2 分)

$\operatorname{Arg} z = 2k\pi - \arctan 3, \quad k \in \mathbb{Z}.$ ······(2 分, 只有主值得 1 分)

2. （6 分）【解】

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 2\cdot\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$e^{iz}-e^{-iz} = 2i(e^{iz}+e^{-iz}),$$

$$e^{2iz} = \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)^2}{5}, \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$2iz = \operatorname{Ln}\frac{(1+2i)^2}{5} = (2\arctan 2 + 2k\pi)i, \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$z = \arctan 2 + k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots(2\text{ 分, 只有主值得 1 分})$$

另解: 设 $z_0 = \arctan 2$, 则

$$\tan z = \tan z_0, \quad \sin z\cos z_0 = \sin z_0 \cos z, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\sin(z - z_0) = 0, \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$z = z_0 + k\pi = \arctan 2 + k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots(2\text{ 分, 只有主值得 1 分})$$

其它答案: $z = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{4}{3} + k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

3. （6 分）【解】

由于 $\cos^2 z$ 解析, 且 ······(1 分)

$$\int \cos^2 z\,dz = \int \frac{1+\cos(2z)}{2}\,dz \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$= \frac{z}{2} + \frac{\sin(2z)}{4} + C, \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C \cos^2 z\,\mathrm{d}z &= \left(\frac{z}{2}+\frac{\sin(2z)}{4}\right)\Bigg|_{\mathrm{i}}^{-\pi} && \cdots\cdots(1\text{ 分})\\ &= -\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\mathrm{i}}{2}+\frac{\sin(2\mathrm{i})}{4}\right) && \cdots\cdots(1\text{ 分})\\ &= -\frac{\pi}{2}+\frac{(\mathrm{e}^{-2}-4-\mathrm{e}^{2})\mathrm{i}}{8}. && \cdots\cdots(1\text{ 分})\end{aligned}$$

4. （10 分）【解】

由于 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}$ 在 $|z-3|\leqslant 4$ 内的奇点为 $\pi, 2\pi$, ⋯⋯(3 分)

因此

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\big(\mathrm{Res}[f(z),\pi]+\mathrm{Res}[f(z),2\pi]\big) && \cdots\cdots(2\text{ 分})\\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z-2\pi}\bigg|_{z=\pi}+\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z-\pi}\bigg|_{z=2\pi}\right) && \cdots\cdots(2\text{ 分})\\ &= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right)=4\mathrm{i}. && \cdots\cdots(3\text{ 分})\end{aligned}$$

5. （10 分）【解】

由 $\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=6x-2ay+6y-2ax=0$ 可知 $a=3$. ⋯⋯(3 分)

由

$$\begin{aligned}f'(z) &= v_y+\mathrm{i}v_x && \cdots\cdots(2\text{ 分})\\ &= (3y^2-3x^2-6xy)+\mathrm{i}(3x^2-6xy-3y^2) && \cdots\cdots(2\text{ 分})\\ &= 3(\mathrm{i}-1)(x+\mathrm{i}y)^2=3(\mathrm{i}-1)z^2 && \cdots\cdots(1\text{ 分})\end{aligned}$$

可知 $f(z)=(\mathrm{i}-1)z^3+C,\quad C\in\mathbb{R}$. ⋯⋯(2 分, 没有常数项得 1 分)

其它解法: 由 $u_x=v_y=3y^2-3x^2-6xy$ 得 $u=3xy^2-x^3-3x^2y+\psi(y)$. ⋯⋯(2 分)

由 $u_y=-v_x=-(3x^2-6xy-3y^2)$ 得 $\psi'(y)=3y^2$,

$\psi(y)=y^3+C$, ⋯⋯(3 分, 没有常数项得 2 分)

$$\begin{aligned}f(z) &= u+\mathrm{i}v\\ &= 3xy^2-x^3-3x^2y+y^3+C+\mathrm{i}(x^3+y^3-3xy^2-3x^2y)\\ &= (\mathrm{i}-1)z^3+C,\quad C\in\mathbb{R}. && \cdots\cdots(2\text{ 分})\end{aligned}$$

6. （10 分）【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 1, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n, \qquad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{z-1+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}=-\frac{1}{1-z}+2\left(\frac{1}{1-z}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n. \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}, \quad \cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-2\left(\frac{1}{z-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\left(\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-n)z^{-n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-n+1)z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)z^{-n}. \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

7. （10 分）【解】

由于 0 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\cdots\cdots\cdots$(1 分)

由于 $\pm\pi$ 是分母的一阶零点, 因此它们是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots\cdots$(1 分)

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\left(\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\right)'\Bigg|_{z=0} \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=\frac{-\sin z\cdot(z^2-\pi^2)-\cos z\cdot 2z}{(z^2-\pi^2)^2}\Bigg|_{z=0}=0, \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z),\pi]=\frac{\cos z}{z^2(z+\pi)}\Bigg|_{z=\pi}=-\frac{1}{2\pi^3}, \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-\pi]=\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}\Bigg|_{z=-\pi}=\frac{1}{2\pi^3}. \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

8. （9 分）【解】

设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-2, \quad \cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 2 + 2Y = \mathscr{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2+2} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+2)} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+2}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2}\right] = \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin(\sqrt{2}t). \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

9. （3 分）【解】

例如 (每项 1 分)

- $f'(z) = \cos z, g'(x) = \cos x.$ ······(1 分)
- $\sin z$ 处处可导, $\sin x$ 处处可导. ······(1 分)
- 麦克劳林展开的系数相同. ······(1 分)
- $\sin z$ 无界, $\sin x$ 有界. ······(1 分)

2022 年合肥工业大学试卷（B）

2022～2023 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的辐角主值是________________.

2. $\mathrm{i}^{2022}-(-\mathrm{i})^{2022}=$________________.

3. 如果函数 $f(z)=\mathrm{e}^{ax}(\cos y-\mathrm{i}\sin y)$ 在复平面上处处解析, 则实数 $a=$________________.

4. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 则积分 $\oint_C\left(\frac{1+z+z^2}{z^3}\right)\mathrm{d}z=$________________.

5. 函数 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}$ 的傅里叶变换为________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 不等式 $1<|z|<2$ 确定是的 (　　).

A. 有界多连通区域　B. 有界单连通区域　C. 无界多连通区域　D. 无界单连通区域

2. 方程 $|z+\mathrm{i}|=|z-\mathrm{i}|$ 表示的曲线是 (　　).

A. 直线　B. 不是圆的椭圆　C. 双曲线　D. 圆周

3. 幂级数在其收敛圆周上 (　　).

A. 一定处处绝对收敛　B. 一定处处条件收敛

C. 一定有发散的点　D. 可能处处收敛也可能有发散的点

4. 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处可导的充要条件是 (　　).

A. u,v 均在 (x_0,y_0) 处连续

B. u,v 均在 (x_0,y_0) 处有偏导数

C. u,v 均在 (x_0,y_0) 处可微

D. u,v 均在 (x_0,y_0) 处可微且满足 C-R 方程

5. $z=\pi$ 是函数 $\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$ 的 (　　).

A. 一阶极点　B. 一阶零点　C. 可去奇点　D. 本性奇点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$, 求 z 的模和辐角.

2. (6 分) 求 $\sqrt[3]{-8}$.

3. (7 分) 设 C 是从 i 到 $2+\mathrm{i}$ 的直线, 求 $\displaystyle\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$.

4. (7 分) 求 $\displaystyle\int_{-\pi\mathrm{i}}^{\pi\mathrm{i}} (\mathrm{e}^z+1)\,\mathrm{d}z$.

5. (7 分) 求 $\displaystyle\int_0^{\pi} (z+\cos 2z)\,\mathrm{d}z$.

6. (7 分) 设 C 为正向圆周 $|z|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{z-6}{z^2+9}\,\mathrm{d}z$.

7. (8 分) 已知 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数, 其中 $u(x,y)=x^2+axy-y^2, v=2x^2-2y^2+2xy$ 且 a 是实数. 求参数 a 以及解析函数 $f'(z)$, 其中 $f'(z)$ 需要写成 z 的表达式.

8. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{2}{z(z+2)}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<2$; (2) $2<|z|<+\infty$

内的洛朗级数展开式.

9. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+2y'(t)=8\mathrm{e}^{2t}, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

10. (3 分) 复积分的计算方法或公式有哪些? 请给出至少三条.

2022 年合肥工业大学考试参考答案（B）

2022~2023 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad 2\pi/3 \quad}$, **2.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **3.** $\underline{\quad -1 \quad}$, **4.** $\underline{\quad 2\pi i \quad}$, **5.** $\underline{\quad 2\pi\delta(\omega-1) \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里：

题号	1	2	3	4	5
答案	A	A	D	D	A

三、解答题

1.（6 分）【解】 由于 $z = \dfrac{(2+i)(1+2i)}{5} = i$, ······(2 分)

因此 $|z| = 1$, ······(2 分)

$\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. ······(2 分, 只有主值得 1 分)

2.（6 分）【解】 由于 $-8 = 8e^{\pi i}$, ······(2 分)

因此

$$\sqrt[3]{-8} = 2e^{\frac{1}{3}(\pi i + 2k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2 \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

即

$$2e^{\frac{\pi i}{3}} = 1 + \sqrt{3}i, \quad 2e^{\pi i} = -2, \quad 2e^{\frac{5\pi i}{3}} = 1 - \sqrt{3}i. \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

3.（7 分）【解】

直线 C 的方程为 $z = t + i, 0 \leqslant t \leqslant 2$. ······(2 分)

因此 $dz = dt, \overline{z} = t - i$. ······(2 分)

$$\int \overline{z}\,dz = \int_0^2 (t - i)\,dt \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} - it\right)\Big|_0^2 = 2 - 2i. \quad \cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

4.（7 分）【解】 由于 $e^z + 1$ 处处解析, 因此 ······(2 分)

$$\int_{-\pi i}^{\pi i} (e^z + 1)\,dz = (e^z + z)\Big|_{-\pi i}^{\pi i} \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$= (e^{\pi i} + \pi i) - (e^{-\pi i} - \pi i) \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i. \quad \cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

5. （7 分）【解】 由于 $z+\cos 2z$ 处处解析, 因此 ……………………………(2 分)

$$\int_0^{\pi}(z+\cos 2z)\,\mathrm{d}z=\left(\frac{z^2}{2}+\frac{\sin 2z}{2}\right)\Big|_0^{\pi} \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\frac{\sin 2\pi}{2} \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=\frac{\pi^2}{2}. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

6. （7 分）【解】

由于 $f(z)=\dfrac{z-6}{z^2+9}$ 在 $|z|\leqslant 4$ 内的奇点为 $\pm 3\mathrm{i}$, ……………………………(2 分)

因此

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\big(\mathrm{Res}[f(z),3\mathrm{i}]+\mathrm{Res}[f(z),-3\mathrm{i}]\big) \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{z-6}{z+3\mathrm{i}}\Big|_{z=3\mathrm{i}}+\frac{z-6}{z-3\mathrm{i}}\Big|_{z=-3\mathrm{i}}\right) \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=2\pi\mathrm{i}\left(\frac{3\mathrm{i}-6}{6\mathrm{i}}+\frac{-3\mathrm{i}-6}{-6\mathrm{i}}\right)=2\pi\mathrm{i} \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

7. （8 分）【解】

由 $u_x=2x+ay=v_y=-4y+2x$ 可知 $a=-4$. ……………………………(2 分)

由

$$f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=(-4y+2x)+\mathrm{i}(4x+2y) \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=(2+4\mathrm{i})z. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

8. （10 分）【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 $0,2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1)

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2} \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

(2)

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{2}{z}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分}) \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{2}{z}\Big)^n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分}) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{z^n}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})
\end{aligned}$$

9. （9 分）【解】

设 $\mathscr{L}[y] = Y$, 则

$$\mathscr{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 2 + 2sY = \mathscr{L}[8\mathrm{e}^{2t}] = \frac{8}{s-2}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+2s)} = \frac{2}{s(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = \mathrm{e}^{2t} - 1. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})
\end{aligned}$$

10. （3 分）【解】例如

- 列出参数方程 $z = z(t)$ 并将积分表达为 t 的积分形式;
- 单连通区域内解析函数的积分可以用原函数计算;
- 利用柯西-古萨定理;
- 利用复合闭路定理;
- 利用柯西积分公式;
- 利用高阶导数的柯西积分公式;
- 利用留数;
- 利用长大不等式.

2023 年合肥工业大学试卷（A）

2023～2024 学年第一学期　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $2^{-\mathrm{i}}$ 的辐角主值是________________.

2. $2023-\mathrm{i}$ 绕 0 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到的复数是________________.

3. 如果函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+5)\sin z}$ 可以在圆环域 $0<|z|<R$ 内作洛朗展开, 则 R 的最大值为________________.

4. 设 $f(z)=\mathrm{e}^{z}-|z|\cos z$, 则 $\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z=$________________.

5. 函数 $f(t)=\cos(3t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=$________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在下面哪个区域内有原函数? (　　)

A. $0<|z|<1$　　B. $\mathrm{Re}\,z>0$

C. $|z-1|>2$　　D. $|z+1|+|z-1|>4$

2. 设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=4}\dfrac{\sin\zeta-\cos\zeta}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 则 $f'(\pi)=$(　　)

A. 0　　B. $2\pi\mathrm{i}$　　C. $-2\pi\mathrm{i}$　　D. $\pi\mathrm{i}$

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^{n}}z^{n}$ 的收敛半径是 (　　).

A. 0　　B. $+\infty$　　C. e　　D. 1

4. 下面哪个函数不能作为解析函数的虚部? (　　)

A. $2x+3y$　　B. $2x^2+3y^2$　　C. x^2-xy-y^2　　D. $\mathrm{e}^{x}\cos y$

5. $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{(\mathrm{e}^{z}-1)^2z^3}{\sin z^8}$ 的 (　　).

A. 一阶极点　　B. 本性奇点　　C. 可去奇点　　D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 计算 $(-1+\mathrm{i})^{10}-(-1-\mathrm{i})^{10}$.

2. (6 分) 解方程 $\cos z=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

3. (6 分) 设 C 为有向曲线 $z(t)=\sin t+\mathrm{i}t, 0\leqslant t\leqslant \pi$, 求 $\displaystyle\int_C z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z-1|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $u(x,y)=x^3+ax^2y+bxy^2-3y^3$ 是调和函数，求参数 a,b 以及 $v(x,y)$ 使得 $v(0,0)=0$ 且 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{z}{z^2-3z+2}$ 在圆环域

(1) $|z|>2$;　　　(2) $0<|z-2|<1$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 设 $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z-\pi\mathrm{i})(z-2\pi\mathrm{i})^2}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点以及 $\displaystyle\oint_{|z|=8} f(z)\,\mathrm{d}z$.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+4y(t)=3\cos t, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

9. (3 分) 复变函数 $f(z)=\mathrm{e}^z$ 和实变量函数 $g(x)=\mathrm{e}^x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试举出三点.

2023 年合肥工业大学考试参考答案（A）

2023～2024 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad -\ln 2 \quad}$, **2.** $\underline{\quad 1+2023\mathrm{i} \quad}$, **3.** $\underline{\quad \pi \quad}$, **4.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **5.** $\underline{\quad \pi[\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)] \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里：

题号	1	2	3	4	5
答案	B	C	C	B	D

三、解答题

1. （6 分）【解】由于

$$-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{4}}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$(-1+\mathrm{i})^{10}=32\mathrm{e}^{\frac{30\pi\mathrm{i}}{4}}=-32\mathrm{i}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$(-1-\mathrm{i})^{10}=32\mathrm{e}^{-\frac{30\pi\mathrm{i}}{4}}=32\mathrm{i}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

故

$$(-1+\mathrm{i})^{10}-(-1-\mathrm{i})^{10}=-64\mathrm{i}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

也可以直接计算 $(-1+\mathrm{i})^2=-2\mathrm{i}$ 得到 $(-1+\mathrm{i})^{10}=-32\mathrm{i}$.

2. （6 分）【解】由

$$\cos z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

整理得到

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+1=0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\frac{1}{2}\Big[\frac{3\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\Big(\frac{3\sqrt{2}}{2}\Big)^2-4}\Big]=\sqrt{2}\text{ 或}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$iz=\mathrm{Ln}\,\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2+2k\pi\mathrm{i}\text{ 或 }\mathrm{Ln}\,\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{2}\ln 2+2k\pi\mathrm{i},$$

$$z = 2k\pi \pm \frac{\ln 2}{2}\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)$$

其它解法: 由 $\cos z = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ 得

$$\sin z = \sqrt{1-\cos^2 z} = \pm\frac{\sqrt{2}i}{4}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\ 分)$$

因此

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z = \sqrt{2} \text{ 或} \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

下同.

3. （6 分）【解】 由于 $z\mathrm{e}^z$ 解析, 且 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

$$\int z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = (z-1)\mathrm{e}^z + C, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)$$

而曲线 C 的起点是 0, 终点是 $\pi\mathrm{i}$, 因此

$$\begin{aligned}\int_C z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z &= (z-1)\mathrm{e}^z\Big|_0^{\pi\mathrm{i}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)\\ &= (\pi\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} - (-1) = 2 - \pi\mathrm{i}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)\end{aligned}$$

4. （10 分）【解】 由于 $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}$ 在 $|z-1| \leqslant 4$ 内的奇点为 $\pm i$, 因此 $\cdots$ (2 分)

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\big[\mathrm{Res}[f(z), -\mathrm{i}] + \mathrm{Res}[f(z), -2\mathrm{i}]\big] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)\\ &= 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\sin z}{z+\mathrm{i}}\bigg|_{z=i} + \frac{\sin z}{z-\mathrm{i}}\bigg|_{z=-\mathrm{i}}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)\\ &= 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\sin i}{2\mathrm{i}} + \frac{\sin(-\mathrm{i})}{-2\mathrm{i}}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)\\ &= 2\pi\sin i = \pi\mathrm{i}\big(e - \frac{1}{e}\big). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)\end{aligned}$$

5. （10 分）【解】 由

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6x + 2ay + 2bx - 18y = 0$$

可知 $a = 9, b = -3$. 由 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (3 分)

$$\begin{aligned}f'(z) &= u_x - \mathrm{i}u_y \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)\\ &= (3x^2 + 18xy - 3y^2) - \mathrm{i}(9x^2 - 6xy - 9y^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\ 分)\\ &= (3-9i)(x+\mathrm{i}y)^2 = (3-9i)z^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)\end{aligned}$$

可知

$$f(z) = (1-3\mathrm{i})z^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\ 分)$$

由 $v(0,0)=0, f(0)=0$ 可知 $C=0$,

$$v=-3x^3+3x^2y+9xy^2-y^3. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

其它解法: 由 $u_x=v_y=3x^2+18xy-3y^2$ 得

$$v=3x^2y+9xy^2-y^3+\psi(x). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

由 $v_x=-u_y=-(9x^2-6xy-9y^2)$ 得

$$\psi'(x)=-9x^2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\psi(x)=-3x^3+C, \quad v=-3x^3+3x^2y+9xy^2-y^3+C. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

由 $v(0,0)=0$ 可知 $C=0$,

$$v=-3x^3+3x^2y+9xy^2-y^3. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

6.（10 分）【解】由于 $f(z)$ 的奇点是 $1,2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^n}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1+(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{2}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

7.（10 分）【解】由于 $\pi\mathrm{i}$ 是分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots\cdots$ (1 分)
由于 $2\pi\mathrm{i}$ 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

$$\mathrm{Res}[f(z),\pi\mathrm{i}]=\left.\frac{\mathrm{e}^z}{(z-2\pi\mathrm{i})^2}\right|_{z=\pi\mathrm{i}}=\frac{1}{\pi^2}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z),2\pi\mathrm{i}]=\left(\frac{\mathrm{e}^z}{z-\pi\mathrm{i}}\right)'\bigg|_{z=2\pi\mathrm{i}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$=\frac{\mathrm{e}^z(z-\pi\mathrm{i}-1)}{(z-\pi\mathrm{i})^2}\bigg|_{z=2\pi\mathrm{i}}=\frac{1-\pi\mathrm{i}}{\pi^2}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\oint_{|z|=8} f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\big[\operatorname{Res}[f(z),\pi\mathrm{i}]+\operatorname{Res}[f(z),2\pi\mathrm{i}]\big]=2+\frac{4}{\pi}\mathrm{i}. \quad \cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

8. （9 分）【解】 设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-s-2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y-s-2+4Y=3\mathscr{L}[\cos t]=\frac{3s}{s^2+1}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$Y(s)=\frac{s+2}{s^2+4}+\frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{s^3+2s^2+4s+2}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

$$=\frac{2}{s^2+4}+\frac{s}{s^2+1}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]=\sin 2t+\cos t. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

9. （3 分）【解】 例如 (每项 1 分)

- $f'(z)=\mathrm{e}^z, g'(x)=\mathrm{e}^x$. ………………………………(1 分)
- e^z 处处可导, e^x 处处可导. ………………………………(1 分)
- 麦克劳林展开的系数相同. ………………………………(1 分)
- e^z 无界, e^x 无界. ………………………………(1 分)
- e^z 是周期的, e^x 不是. ………………………………(1 分)

2023 年合肥工业大学试卷（B）

2023～2024 学年第一学期　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $-1-\mathrm{i}$ 的辐角主值是________________.

2. $\dfrac{(1+\mathrm{i})^3}{(1-\mathrm{i})^3}=$________________.

3. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+5)(z-3)}$ 在 $z_0=0$ 处展开的幂级数的收敛半径是________________.

4. 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z+\mathrm{i})^{2023}}$, 则 $\displaystyle\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z=$________________.

5. 常值函数 $F(\omega)=2$ 的傅里叶逆变换为 $f(t)=$________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 区域 $0<\mathrm{Re}\,z<1$ 是 (　　)

A. 有界单连通区域　B. 无界单连通区域　C. 有界多连通区域　D. 无界多连通区域

2. 设 $f(z)=\displaystyle\oint_{|\zeta|=2}\frac{\zeta^3+3\zeta}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$, 则 $f'(\mathrm{i})=$(　　)

A. 0　B. $3\mathrm{i}$　C. $-3\mathrm{i}$　D. $2\mathrm{i}$

3. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1+\mathrm{i})^n}$ 的收敛半径是 (　　).

A. 0　B. $+\infty$　C. $\sqrt{2}$　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. 下面哪个函数不是调和函数? (　　)

A. $3x-y$　B. x^2-y^2　C. $\ln(x^2+y^2)$　D. $\sin x\cos y$

5. $z=\pi$ 是函数 $f(z)=\dfrac{z-\pi}{(\sin z)^3}$ 的 (　　).

A. 一阶极点　B. 本性奇点　C. 可去奇点　D. 二阶极点

三、解答题

1. (6 分) 求 $z=\dfrac{5+\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$ 的模和辐角.

2. (6 分) 求 $\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$.

3. (6 分) 设 C 为从 $1+\mathrm{i}$ 到 $1-\mathrm{i}$ 的直线, 求 $\displaystyle\int_C (3z^2+1)\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z+1|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z+2z}{(z+\pi)^2}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $v(x,y)=x^2+4xy+ay^2$ 是调和函数，求参数 a 以及解析函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$, 使得 v 是 $f(z)$ 的虚部.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域

(1) $|z-1|>1$;　　(2) $0<|z-2|<1$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)^2}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点以及 $\displaystyle\oint_{|z|=3} f(z)\,\mathrm{d}z$.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)-4y(t)=3\mathrm{e}^t, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1. \end{cases}$$

9. (3 分) 谈一谈复变函数在一点处连续、可导与解析之间的联系.

2023 年合肥工业大学考试参考答案（B）

2023～2024 学年第一学期　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $-\frac{3}{4}\pi$, **2.** $-\mathrm{i}$, **3.** 3, **4.** 0, **5.** $2\delta(t)$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 **A, B, C, D** 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	B	A	C	D	D

三、解答题

1.（6 分）【解】 由于

$$z=\frac{5+\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}=\frac{(5+\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{13}=\frac{13-13\mathrm{i}}{13}=1-\mathrm{i}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$|z|=\sqrt{2}, \quad \operatorname{Arg} z=2k\pi-\frac{1}{4}\pi, \quad k\in\mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (\text{各 2 分, 没有 } k \text{ 减 1 分})$$

2.（6 分）【解】 由于

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=\ln 2+\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{i}, k\in\mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots (\text{实部虚部各 2 分, 没有 } k \text{ 减 1 分})$$

3.（6 分）【解】 由于 $3z^2+1$ 解析，且 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

$$\int(3z^2+1)\,\mathrm{d}z=z^3+z+C, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C(3z^2+1)\,\mathrm{d}z&=(z^3+z)\Big|_{1+\mathrm{i}}^{1-\mathrm{i}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\\&=(1-\mathrm{i})^3-(1+\mathrm{i})^3+(1-\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})\\&=-6i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\end{aligned}$$

4. （10 分）【解】 由于 $f(z)=\dfrac{\sin z+2z}{(z+\pi)^2}$ 在 $|z+1|\leqslant 4$ 内的奇点为 $-\pi$, ⋯⋯⋯ (2 分)
因此

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),-\pi] \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= 2\pi\mathrm{i}(\sin z+2z)'\Big|_{z=-\pi} \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= 2\pi\mathrm{i}[\cos(-\pi)+2] \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= 2\pi\mathrm{i}. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

5. （10 分）【解】 由

$$\Delta v = v_{xx}+v_{yy} = 2+2a = 0 \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

可知 $a=-1$. ⋯⋯⋯ (1 分)
由

$$f'(z) = v_y + \mathrm{i}v_x \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= (4x-2y)+\mathrm{i}(2x+4y) \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$= (4+2\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) = (4+2\mathrm{i})z \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

可知

$$f(z) = (2+\mathrm{i})z^2 + C, \quad C\in\mathbb{R}. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分, 没有 } C \text{ 减一分})$$

其它解法: 由 $u_x = v_y = 4x-2y$ 得

$$u = 2x^2-2xy+\psi(y). \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

由 $u_y=-v_x=-(2x+4y)$ 得

$$\psi'(y) = -4y, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$\psi(y) = -2y^2+C, \quad u = 2x^2-2xy-2y^2+C. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$
$$f(z) = 2x^2-2xy-2y^2+C+\mathrm{i}(x^2+4xy-y^2) = (2+\mathrm{i})z^2+C. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

6. （10 分）【解】由于 $f(z)$ 的奇点是 $1,2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{3}{z-2}-\frac{2}{z-1}=-\frac{2}{z-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(z-1)^n}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1+(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{3}{z-2}-\frac{2}{z-1}=\frac{3}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}2(-1)^n(z-2)^n. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

7. （10 分）【解】由于 -1 是分母的一阶零点, 因此它们是 $f(z)$ 的一阶极点. ····(1 分)
由于 -2 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. ························(1 分)

$$\operatorname{Res}[f(z),-1]=\left.\frac{1}{(z+2)^2}\right|_{z=-1}=1, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),-2]&=\left.\left(\frac{1}{z+1}\right)'\right|_{z=-2} && \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &=-\left.\frac{1}{(z+1)^2}\right|_{z=-2}=-1, && \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\end{aligned}$$

$$\oint_{|z|=3}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\big[\operatorname{Res}[f(z),\pi\mathrm{i}]+\operatorname{Res}[f(z),2\pi\mathrm{i}]\big]=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

8. （9 分）【解】设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-1, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y-1-4Y=3\mathscr{L}[\mathrm{e}^t]=\frac{3}{s-1}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{1}{s^2-4}+\frac{3}{(s-1)(s^2-4)}=\frac{s+2}{(s-1)(s^2-4)}\\ &=\frac{1}{(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s-1}, && \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ y(t)&=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]=\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^t. && \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\end{aligned}$$

9. （3 分）【解】言之成理即可。

- 解析蕴含可导，但反过来不对。 ························ (1 分)
- $f(z)$ 需要在 z_0 的一个邻域内都可导才解析。 ························(1 分)
- 可导蕴含连续，但反过来不对。 ························ (1 分)

2024 年合肥工业大学试卷（A）

2024~2025 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\omega = \dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 则 $\omega + \omega^2 =$________________.

2. 对数函数主值 $\ln(-\mathrm{i}) =$________________.

3. 设 C 为正向圆周 $|z-1|=1$, 则积分 $\oint_C \overline{z}\,\mathrm{d}z =$________________.

4. 函数 $f(z) = \tan z$ 在 $z = \dfrac{\pi}{2}$ 处的留数等于________________.

5. 常值函数 $f(t) = -2$ 的傅里叶变换为 $F(\omega) =$________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 集合 $|z-1| \geqslant |z-\mathrm{i}|$ 是 (　　).

A. 有界单连通区域　　B. 无界单连通闭区域
C. 有界多连通区域　　D. 无界多连通闭区域

2. 下面哪个数不是纯虚数?(　　)

A. $\ln(-1)$　　B. $\cos i$　　C. $\sin i$　　D. $\sqrt{-\pi}$ 主值

3. 设有向曲线 $C: z(t) = \sin 2t + 2\mathrm{i}\cos t, t \in [0, \pi]$, 则积分 $\int_C z\,\mathrm{d}z$ 等于 (　　)

A. 0　　B. $-2\mathrm{i}$　　C. $-4\mathrm{i}$　　D. $4\mathrm{i}$

4. 函数 $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2-z-2}$ 不能在 (　　) 内作洛朗展开.

A. $0<|z|<2$　　B. $2<|z|<4$　　C. $0<|z+1|<2$　　D. $1<|z+1|<3$

5. $z=0$ 是函数 $f(z) = \dfrac{z\sin z^3}{\ln(1-z^4)}$ 的 (　　).

A. 一阶极点　　B. 本性奇点　　C. 可去奇点　　D. 四阶极点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z = \sqrt{2}(1-\mathrm{i})$. 计算 z^5.

2. (6 分) 解方程 $\sin z = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. (6 分) 设 C 为从 1 到 $1+\mathrm{i}$ 再到 i 的折线段, 求 $\int_C (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\oint_C \dfrac{\cos z}{z^2(z+\mathrm{i})}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $v(x,y)=x^2+xy+ay^2-2y$ 是调和函数，求参数 a 以及 $u(x,y)$ 使得 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是解析函数且满足 $f(0)=0$.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2+3z+2}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<1$;　　(2) $|z+1|>1$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 设 $f(z)=\dfrac{z^2-\pi^2}{z\sin z}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点和类型, 求出极点的阶, 并计算 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为正向圆周 $|z-6|=4$.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)-4y(t)=\mathrm{e}^{3t}, \\ y(0)=1, \quad y'(0)=-1. \end{cases}$$

9. (3 分) 复变函数 $f(z)=\sin z$ 和实变量函数 $g(x)=\sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试举出三点.

2024 年合肥工业大学考试参考答案（A）

2024～2025 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad -1 \quad}$, **2.** $\underline{\quad -\frac{\pi i}{2} \quad}$, **3.** $\underline{\quad 2\pi i \quad}$, **4.** $\underline{\quad -1 \quad}$, **5.** $\underline{\quad -4\pi\delta(\omega) \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 **A, B, C, D** 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	B	B	A	A	C

三、解答题

1. （**6** 分）【解】由于

$$z = 2e^{-\frac{\pi i}{4}}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$z^5 = 2^5 e^{-\frac{5\pi i}{4}} = -16\sqrt{2} + 16\sqrt{2}i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4\text{ 分})$$

也可直接计算得到.

2. （**6** 分）【解】由

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

整理得到

$$e^{2iz} - \frac{4\sqrt{3}}{3} i e^{iz} - 1 = 0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$e^{iz} = \frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} i \pm \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} i\right)^2 + 4}\right) = \sqrt{3}i \text{ 或} \frac{\sqrt{3}}{3} i, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$iz = \mathrm{Ln}(\sqrt{3}i) = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i \text{ 或 } \mathrm{Ln}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{2}\ln 3 + \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i,$$

$$z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\ln 3}{2} i, k \in \mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

另解: 由于

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} i, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z = \sqrt{3}i \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{3} i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

其余相同.

3. （6 分）【解】 分段计算. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

第一段 $C_1 : z = 1 + \mathrm{i}t, t \in [0, 1]$, $\mathrm{d}z = i\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = 1 + t$, 因此 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

$$\int_{C_1} (\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (1+t)\mathrm{i}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\mathrm{i}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

第二段 $C_2 : z = 1 + \mathrm{i} - t, t \in [0, 1]$, $\mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = 2 - t$, 因此 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

$$\int_{C_2} (\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \big(-(2-t)\big)\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

因此

$$\int_{C} (\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z)\,\mathrm{d}z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

4. （10 分）【解】 $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2(z+\mathrm{i})}$ 在 $|z| \leqslant 2$ 内的奇点为 $0, -\mathrm{i}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2 分)

$$\mathrm{Res}[f, 0] = \left(\frac{\cos z}{z+\mathrm{i}}\right)'\bigg|_{z=0} = \frac{-(z+\mathrm{i})\sin z - \cos z}{(z+\mathrm{i})^2}\bigg|_{z=0} = 1, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\mathrm{Res}[f, -\mathrm{i}] = \frac{\cos z}{z^2}\bigg|_{z=-\mathrm{i}} = -\cos i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

故

$$\begin{aligned}
\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{i}\big[\mathrm{Res}[f(z), 0] + \mathrm{Res}[f(z), -\mathrm{i}]\big] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})\\
&= 2\pi\mathrm{i}(1 - \cos i) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})\\
&= (2 - e - \frac{1}{e})\pi\mathrm{i}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})
\end{aligned}$$

5. （10 分）【解】 由

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 2 + 2a = 0$$

可知 $a = -1$. 由 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (3 分)

$$\begin{aligned}
f'(z) &= v_y + \mathrm{i}v_x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})\\
&= (x - 2y - 2) + \mathrm{i}(2x + y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})\\
&= (1 + 2\mathrm{i})(x + y\mathrm{i}) - 2 = (1 + 2\mathrm{i})z - 2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})
\end{aligned}$$

可知

$$f(z) = \frac{1+2\mathrm{i}}{2}z^2 - 2z + C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0$,

$$u = \frac{x^2 - y^2}{2} - 2xy - 2x. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

其它解法: 由 $u_x = v_y = x - 2y - 2$ 得

$$u = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - 2x + \psi(y). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

由 $u_y = -v_x = -(2x + y)$ 得

$$\psi'(x) = -y, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\psi(x) = -\frac{1}{2}y^2 + C, \quad u = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - 2x - \frac{1}{2}y^2 + C. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

由 $f(0) = 0$ 可知 $C = 0$,

$$u = \frac{1}{2}x^2 - 2xy - 2x - \frac{1}{2}y^2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

6. （10 分）【解】由于 $f(z)$ 的奇点是 $-1, -2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{3}{z+2} - \frac{2}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{3}{2^{n+1}} - 2\Big)z^n. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z+1)^n}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{3}{z+2} - \frac{2}{z+1} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z+1)^n} - \frac{2}{z+1} = \frac{1}{z+1} + 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(z+1)^n}. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

7. （10 分）【解】由于 0 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

由于 $\pm\pi$ 是分子分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的可去极点. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

对于整数 $k \neq 0, \pm 1$, $k\pi$ 是分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

$$\operatorname{Res}[f(z), \pi] = 0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z), 2\pi] = \frac{z^2 - \pi^2}{\sin z + z\cos z}\bigg|_{z=2\pi} = \frac{3}{2}\pi, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z), 3\pi] = \frac{z^2 - \pi^2}{\sin z + z\cos z}\bigg|_{z=3\pi} = -\frac{8}{3}\pi, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\oint_{|z-6|=4} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\Big[\mathrm{Res}[f(z),\pi] + \mathrm{Res}[f(z),2\pi] + \mathrm{Res}[f(z),3\pi]\Big] = -\frac{7}{3}\pi^2 i. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

8.（9 分）【解】 设 $\mathscr{L}[y] = Y$, 则

$$\mathscr{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - s + 1, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - s + 1 - 4Y = \mathscr{L}[\mathrm{e}^{3t}] = \frac{1}{s-3}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2-4}\left(s - 1 + \frac{1}{s-3}\right) \\ &= \frac{s-2}{(s+2)(s-3)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-3} + \frac{4}{s+2}\right), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \\ y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s-3} + \frac{4}{s+2}\right)\right] = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{3t} + \frac{4}{5}\mathrm{e}^{-2t}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分}) \end{aligned}$$

9.（3 分）【解】 每项 1 分, 例如

- 导数形式相同;
- 一个有界一个无界;
- 都是奇函数;
- 麦克劳林展开的系数相同;
- 都是处处可导;
- 都是周期函数.