复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

第一章　复数与复变函数

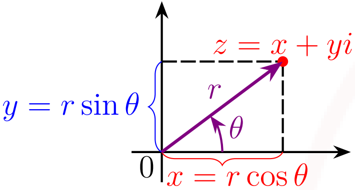
❶ 复数的三角与指数形式

第一节　复数的三角与指数形式

- 复数的模和辐角
- 复数的三角形式和指数形式

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{y}{x} \text{ 或 } \arctan\frac{y}{x} \pm \pi$$

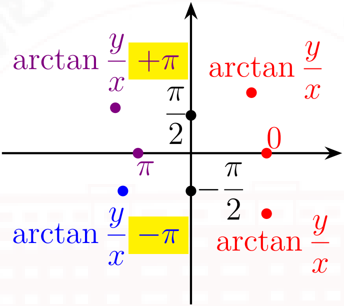
定义

- 称 r 为 z 的**模**, 记为 $|z| = r$.
- 称 θ 为 z 的**辐角**, 记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$. **0 的辐角没有意义**.

主辐角

任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个．我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个，并称之为**主辐角**或辐角主值，记作 $\arg z$.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



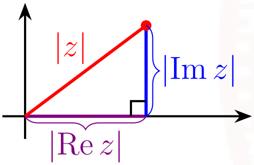
那么 $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

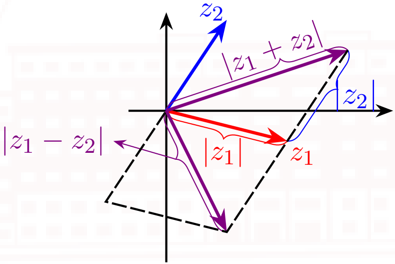
复数模的性质

复数的模满足如下性质:

模的性质汇总

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;
- $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$;
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.





例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1|\cdot|z_2|$;
(2) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2\cdot\overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2} = |z_1|^2\cdot|z_2|^2,$$

所以 $|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$. 因此 $|z_1\overline{z_2}| = |z_1|\cdot|\overline{z_2}| = |z_1|\cdot|z_2|$.
(2)

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})\\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}\\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).\end{aligned}$$

□

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$ (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化成三角形式和指数形式.

解

$r=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第三象限，因此

$$\arg z=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=4\exp\left(-\frac{5\pi i}{6}\right).$$

典型例题：求复数的三角/指数形式

例

将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解

$$\begin{aligned} z&=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\\ &=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\\ &=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}=\exp\left(\frac{3\pi i}{10}\right). \end{aligned}$$

典型例题：求复数的三角/指数形式

求复数的三角或指数形式时，我们只需要任取一个辐角就可以了，不要求必须是主辐角.

练习

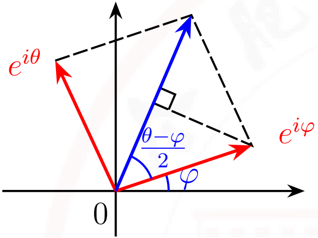
将 $z=\sqrt{3}-3i$ 化成三角形式和指数形式.

答案

$$z=2\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]=2\sqrt{3}\exp\left(\frac{5\pi i}{3}\right).$$

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta}+e^{i\varphi}=2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$



例

$$\begin{aligned}z&=1-\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{0}+e^{(\pi-\alpha)i}\\&=2\cos\frac{\pi-\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{\frac{\pi-\alpha}{2}i}.\end{aligned}$$