



### 3.3 高阶导数

- 沿直线运动的物体的速度  $v(t)$  是位置函数  $s(t)$  对时间  $t$  的变化率, 即  $v(t) = s'(t)$ . 而加速度  $a(t)$  是速度  $v(t)$  对时间  $t$  的变化率, 即这种导数称为  $s(t)$  对  $t$  的二阶导数.
- **例** 一物体沿单位圆逆时针匀速运动, 其位置函数为  $(s_1, s_2) = (\cos t, \sin t)$ , 则速度为  $(v_1, v_2) = (-\sin t, \cos t)$ , 加速度为  $(a_1, a_2) = (-\cos t, -\sin t)$ , 因此该物体受力  $F = ma = (-m \cos t, -m \sin t)$ , 该力为指向圆心的大小固定的力, 被称为**向心力**.
- 对导函数再讨论其可导性或再求导数, 甚至可以对导函数的导函数继续讨论下去, 则就是本节所要介绍的高阶导数.



- **定义** 如果函数  $y = f(x)$  的导函数  $f'(x)$  在点  $x$  处可导, 就称  $y = f(x)$  在  $x$  处**二阶可导**.  $f'(x)$  在点  $x$  处的导数称为函数  $y = f(x)$  在  $x$  点处的**二阶导数**, 记作  $f''(x)$ ,  $y''$ ,  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  或  $\frac{d^2 f}{dx^2}$ , 即

$$f''(x) = [f'(x)]' \text{ 或 } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right).$$

- 此处的分母表示  $(dx)^2$ , 即  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \left( \frac{d}{dx} \right)^2 y$ .
- 极限形式为  $f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$ .
- 类似地, 我们可以定义**三阶导数**  $f'''(x)$ ,  $y'''$ ,  $\frac{d^3 y}{dx^3}$  或  $\frac{d^3 f}{dx^3}$ , **四阶导数**  $f^{(4)}(x)$ ,  $y^{(4)}$ ,  $\frac{d^4 y}{dx^4}$  或  $\frac{d^4 f}{dx^4}$  等等.



- 一般地,  $y = f(x)$  的  $(n-1)$  阶导数的导数称为  $f(x)$  的  $n$  阶导数, 记作  $f^{(n)}(x)$ ,  $y^{(n)}$ ,  $\frac{d^n y}{dx^n}$  或  $\frac{d^n f}{dx^n}$ , 即

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]' \quad \text{或} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right).$$

- 二阶及二阶以上的导数称为高阶导数,  $f'(x)$  称为一阶导数. 有时候为了方便也称  $f(x)$  为零阶导数, 即  $f^0(x) = f(x)$ .
- 注意, 低阶导数存在不能推出更高阶的导数存在.
- 例如  $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$  在  $x = 0$  处可导, 但导函数  $f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$  在  $x = 0$  处不可导, 即  $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$  在  $x = 0$  处不是二阶可导的. 实际上  $x^{n+\frac{2}{3}}$  在  $x = 0$  处  $n$  阶可导但不是  $(n+1)$  阶可导.



- 一般函数的高阶导数难以求得, 我们本节主要介绍三种情形的高阶导数.
- (1) 多项式/幂函数/对数函数
- 例 求  $y = 2x^3 - x^2 + 5x + 1$  的各阶导数.
- 解  $y' = 6x^2 - 2x + 5, y'' = 12x - 2, y''' = 12$ .
- 当  $n \geq 4$  时,  $y^{(n)} = 0$ .
- 从这个例子中可以看出, 多项式函数任意阶可导, 且每次求导后仍然为多项式, 次数降低一次直至为 0.
- 一般地, 若  $y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  ( $a_m \neq 0$ ), 则

$$y^{(n)} = \begin{cases} a_m m(m-1) \cdots (m-n+1) x^{m-n} + \cdots + a_n n!, & n < m, \\ a_m m!, & n = m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$



- **例** 求  $y = x^\mu$  ( $\mu$  为常数)的各阶导数.
- **解**  $y' = \mu x^{\mu-1}$ ,  $y'' = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$ , ...
- 一般地,  $y^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$
- 如果  $\mu$  是正整数则情形同多项式, 上式亦成立.
- 特别地, 我们有  $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$
- **结论**  $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ . 如果  $F'(x) = f(x)$ , 则  $F^{(n)} = f^{(n-1)}$ .
- $[f(x+C)]^{(n)} = f^{(n)}(x+C)$ ,  $f(\lambda x)^{(n)} = \lambda^n f^{(n)}(\lambda x)$ .



- 由此可知

$$\left[ \frac{1}{(x+C)^2} \right]^{(n)} = - \left( \frac{1}{x+C} \right)^{(n+1)} = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x+C)^{n+2}},$$

$$[\ln|x+C|]^{(n)} = \left( \frac{1}{x+C} \right)^{(n-1)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x+C)^n}.$$

- 这意味着特别地,

$$[\ln(C+x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x+C)^n}, \quad [\ln(C-x)]^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x-C)^n}.$$



- 求一个函数的  $n$  阶导数时, 可以先求一阶导数、二阶导数、三阶导数, 根据其中的规律, 归纳得到函数的  $n$  阶导数. 这种求函数  $n$  阶导数的方法我们称为**直接法**.
- 利用直接法可以求一些简单函数的高阶导数. 对于复杂的函数, 用直接法很难求出  $n$  阶导数. 下面介绍间接法, 为此先介绍**高阶导数的运算法则**.

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}, \quad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad (\text{莱布尼兹公式}).$$

- 特别地,

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'', \quad (uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + v'''.$$



- 利用高阶导数运算法则, 以及常用高阶导数公式, 通过适当的函数变形求出函数  $n$  阶导数的方法称为**间接法**.
- **例** 函数  $y = \ln(1 - 2x)$  在点  $x = 0$  处的  $n$  阶导数  $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .
- **解** 由于  $y = \ln 2 + \ln \left(\frac{1}{2} - x\right) = \ln 2 + \ln \left|x - \frac{1}{2}\right|$ , 因此

$$y^{(n)} = \left[ \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| \right]^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^n},$$

$$y^{(n)}(0) = -2^n (n-1)!.$$





• 例 设  $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ , 则  $y^{(99)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

• 解 由于  $y = \frac{1}{2} [\ln(1-x) - \ln(1+x)] = \frac{1}{2} [\ln|x-1| - \ln|x+1|]$ , 因此

$$\begin{aligned} y^{(99)} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(-1)^{100} 98!}{(x-1)^{99}} - \frac{(-1)^{100} 98!}{(x+1)^{99}} \right] \\ &= \frac{98!}{2} \left[ \frac{1}{(x-1)^{99}} - \frac{1}{(x+1)^{99}} \right], \\ y^{(99)}(0) &= -98!. \end{aligned}$$



- 例 求  $y = \frac{x}{1-x^2}$  的各阶导数.
- 解 由于  $y = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$ , 因此

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{x-1} \right)^{(n)} + \left( \frac{1}{x+1} \right)^{(n)} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1} n!}{2} \left[ \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$



- 例 求  $y = \frac{1}{x^2-1}$  的各阶导数.
- 解 由于  $y = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$ , 因此

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{x-1} \right)^{(n)} - \left( \frac{1}{x+1} \right)^{(n)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2} \left[ \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right]. \end{aligned}$$



- 对于一般的有理函数, 我们是不是可以类似地求得任意阶导数呢?
- 实际上是可以的, 但一般的情形过于复杂, 我们只考虑  $g(x)$  可以分解为一些一次多项式的乘积的情形.

- 对于非零多项式  $f(x), g(x)$ , 存在多项式  $q(x), r(x)$  使得

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \deg r < \deg g.$$

- 这被称为多项式的带余除法. 如此, 有理函数  $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$ , 其中多项式  $q(x)$  的各阶导数容易求得, 而  $\frac{r(x)}{g(x)}$  可以表为一些形如  $\frac{a}{(x+b)^k}$  的有理函数之和, 从而可以求得它的导数.



• 例 设  $y = \frac{x^5}{(x-1)^2(x+1)}$ . 由于

$$y = x^2 + x + 2 + \frac{2x^2 - x - 2}{(x-1)^2(x+1)} = x^2 + x + 2 + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{7}{4(x-1)} - \frac{1}{2(x-1)^2},$$

因此  $n \geq 3$  时,

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x+1} \right)^{(n)} + \frac{7}{4} \left( \frac{1}{x-1} \right)^{(n)} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} \right)^{(n+1)} \\ &= \frac{1}{4} \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{7}{4} \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{2} \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{(x-1)^{n+2}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{4} \left[ \frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{7(x-1) - 2(n+1)}{(x-1)^{n+2}} \right]. \end{aligned}$$



• 例 设  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , 求  $y^{(n)}$ .

• 解

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(\frac{1}{2} - n\right) x^{-\frac{1}{2}-n} \\ &= \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1)}{2^n x^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n! x^{n+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

• 因此我们有  $(\sqrt{x})^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{2^{2n-1} (n-1)! x^{n-\frac{1}{2}}}.$



• 例 设  $y = \arctan x$ , 求  $y^{(n)}(0)$ , 其中  $n > 1$ .

• 解 由于  $y' = \frac{1}{1+x^2}$ , 因此  $(1+x^2)y' = 1$ .

• 两边同时对  $x$  求  $(n-1)$  阶导数, 则

$$(1+x^2)y^{(n)} + 2(n-1)xy^{(n-1)} + (n-1)(n-2)y^{(n-2)} = 0.$$

• 令  $x = 0$ , 则  $y^{(n)} = -(n-1)(n-2)y^{(n-2)}$ .

• 由于  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ , 因此

$$y^{(n)} = \begin{cases} (-1)^m (2m)!, & n = 2m + 1, \\ 0, & n = 2m, \end{cases} \quad m = 1, 2, \dots$$



- 我们可以归纳求得它的高阶导数. 设  $t = \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - y$ , 则

$$y = \frac{\pi}{2} - t, \quad \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{1+x^2} = -\sin^2 t.$$

- 于是

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \sin^2 t,$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2 \sin t \cos t \cdot (-\sin^2 t) = -\sin 2t \sin^2 t,$$

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{dy''}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -(2 \cos 2t \sin^2 t + 2 \sin 2t \sin t \cos t) \cdot (-\sin^2 t) \\ &= 2(\cos 2t \sin t + \sin 2t \cos t) \cdot \sin^3 t = 2 \sin 3t \sin^3 t. \end{aligned}$$





- 我们猜测

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} (n-1)! \sin(nt) \sin^n t.$$

- 若上式对  $n$  成立, 则

$$\begin{aligned} y^{(n+1)} &= \frac{dy^{(n)}}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= (-1)^{n+1} (n-1)! [n \cos(nt) \sin^n t + \sin(nt) \cdot n \sin^{n-1} t \cos t] \cdot (-\sin^2 t) \\ &= (-1)^{n+2} n! \sin(n+1)t \sin^{n+1} t. \end{aligned}$$

- 由归纳法可知

$$y^{(n)} = (-1)^{n+1} (n-1)! \sin(nt) \sin^n t = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)! \sin(n \operatorname{arccot} x)}{(x^2 + 1)^{\frac{n}{2}}}.$$



- (2) 指数函数

- 例 求  $y = e^{\lambda x}$  ( $\lambda$  为常数)的各阶导数.

- 解  $y' = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $y'' = \lambda f'(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ .

- 归纳可知  $y^{(n)} = (e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$ . 特别地,  $(e^x)^{(n)} = e^x$ .

- 例 求  $y = xe^x$  的各阶导数.

- 解  $y' = x' \cdot e^x + xe^x = (1 + x)e^x$ ,

- $y'' = (1 + x)' \cdot e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$ .

- 归纳可知  $y^{(n)} = (x + n)e^x$ .



- 例 求  $y = x^2 e^{-x}$  的 10 阶导数.
- 解 由莱布尼兹公式,

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= (x^2 e^{-x})^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^2)^{(k)} (e^{-x})^{(10-k)} \\ &= x^2 (e^{-x})^{(10)} + C_{10}^1 \cdot 2x (e^{-x})^{(9)} + C_{10}^2 \cdot 2 (e^{-x})^{(8)} \\ &= x^2 e^{-x} - 20x e^{-x} + 90 e^{-x} = (x^2 - 20x + 90) e^{-x}. \end{aligned}$$



- 一般地, 如果  $P(x)$  是多项式,  $P(x)e^{\lambda x}$  的各阶导数仍然为  $Q(x)e^{\lambda x}$  这种形式, 其中  $Q(x)$  是与  $P(x)$  同次数的多项式.
- 例如由莱布尼兹公式有

$$(xe^{\lambda x})^{(n)} = x\lambda^n e^{\lambda x} + C_n^1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} = \lambda^n \left( x + \frac{n}{\lambda} \right) e^{\lambda x},$$

$$\begin{aligned} (x^2 e^{\lambda x})^{(n)} &= x^2 \lambda^n e^{\lambda x} + C_n^1 \cdot 2x \cdot \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + C_n^2 \cdot 2 \cdot \lambda^{n-2} e^{\lambda x} \\ &= \lambda^n \left( x^2 + \frac{2n}{\lambda} + \frac{n(n-1)}{\lambda^2} \right) e^{\lambda x}. \end{aligned}$$



- (3) 三角函数

- 例 求  $y = \sin \omega x$  ( $\omega$  为常数) 的各阶导数.

- 解  $y' = \omega \cos \omega x = \omega \sin \left( \omega x + \frac{\pi}{2} \right),$  (奇变偶不变, 符号看象限)

$$y'' = \omega^2 \cos \left( \omega x + \frac{\pi}{2} \right) = \omega^2 \sin \left( \omega x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y''' = \omega^3 \cos \left( \omega x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \omega^3 \sin \left( \omega x + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right),$$

$$y^{(n)} = \omega^n \sin \left( \omega x + \frac{n\pi}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- 同理  $(\cos \omega x)^{(n)} = \omega^n \cos \left( \omega x + \frac{n\pi}{2} \right), n = 0, 1, 2, \dots$



• 例 求  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$  的 10 阶导数.

• 解 由于

$$\begin{aligned} y &= \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 + \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 2x) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4x}{4}, \end{aligned}$$

• 因此  $y^{(10)} = \frac{1}{4} \cdot 4^{10} \cos \left( 4x + 10 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = -4^9 \cos 4x.$



- 另解 由于
$$\begin{aligned}y' &= 4 \sin^3 x \cos x - 4 \cos^3 x \sin x \\&= 4 \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) \\&= -2 \sin 2x \cos 2x = -\sin 4x,\end{aligned}$$

因此  $y^{(10)} = -(\sin 4x)^{(9)} = -4^9 \sin\left(4x + 9 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = -4^9 \cos 4x$ .

- 例 求  $y = \sin x \sin 3x$  的 20 阶导数.

- 解 由于  $y = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$ , 因此

$$\begin{aligned}y^{(20)} &= \frac{1}{2} \cdot \left[ 2^{20} \cos\left(2x + 20 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - 4^{20} \cos\left(4x + 20 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right] \\&= 2^{19} \cos 2x - 2^{39} \cos 4x.\end{aligned}$$



- 一般地, 由  $\sin \omega x$  和  $\cos \omega x$  构成的多项式, 总可以通过积化和差最终化为若干这种形式的三角函数的线性组合.
- 例 求  $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$  的各阶导数.
- 解 由于

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x) \sin 3x = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin 4x + \sin 2x}{2} - \frac{\sin 5x + \sin x}{2} \right] \\ &= \frac{1}{4}(-\sin x + \sin 2x + \sin 4x - \sin 5x), \end{aligned}$$

- 因此

$$y^{(n)} = \frac{1}{4} \left[ -\sin \left( x + \frac{n\pi}{2} \right) + 2^n \sin \left( 2x + \frac{n\pi}{2} \right) + 4^n \sin \left( 4x + \frac{n\pi}{2} \right) - 5^n \sin \left( 5x + \frac{n\pi}{2} \right) \right].$$





- 对于指数函数和三角函数的乘积, 例如  $y = e^x \cos x$  的各阶导数应该怎么求呢?
- 归纳可知

$$y^{(4k)} = (-4)^k e^x \cos x, \quad y^{(4k+1)} = (-4)^k e^x (\cos x - \sin x),$$

$$y^{(4k+2)} = -2(-4)^k e^x \sin x, \quad y^{(4k+3)} = -2(-4)^k e^x \cos x,$$

- 我们可以将其改写为  $y^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}} e^x \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$ .
- 一般地,  $(e^{\lambda x} \cos \omega x)^{(n)} = (\lambda^2 + \omega^2)^{\frac{n}{2}} e^{\lambda x} \cos(\omega x + n\theta)$ , 其中  $\theta$  是点  $(\lambda, \omega)$  的辐角.



### • 常用高阶导数公式

$$(x^\mu)^{(n)} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}, \quad (x^n)^{(n)} = n!.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}, \quad [\ln |x|]^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{x^n}.$$

$$(e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$$

$$(\sin \omega x)^{(n)} = \omega^n \sin\left(\omega x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad (\cos \omega x)^{(n)} = \omega^n \cos\left(\omega x + \frac{n\pi}{2}\right).$$