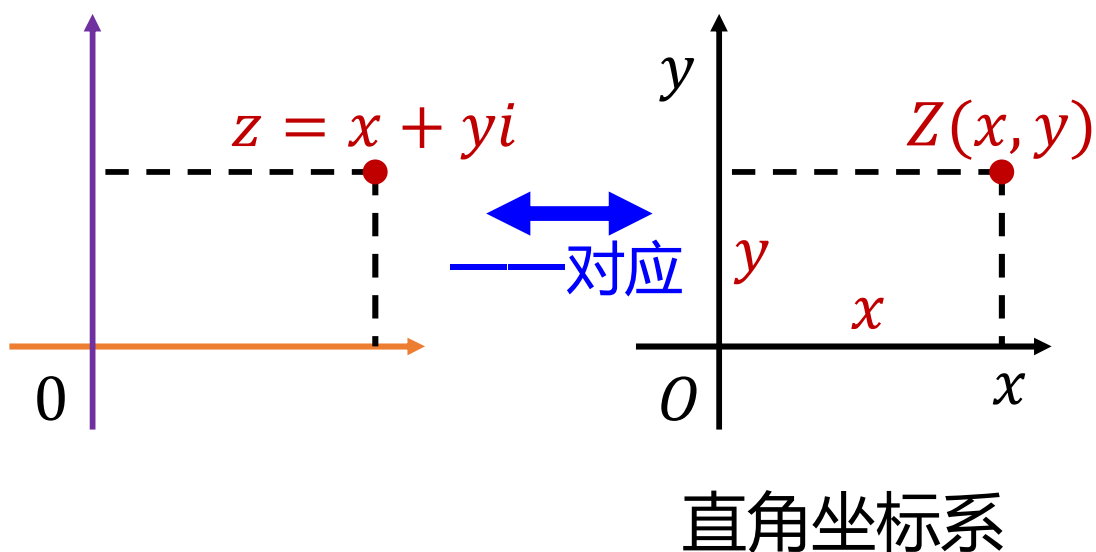


1.2 复数的几何表示

- 由于 \mathbb{C} 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.

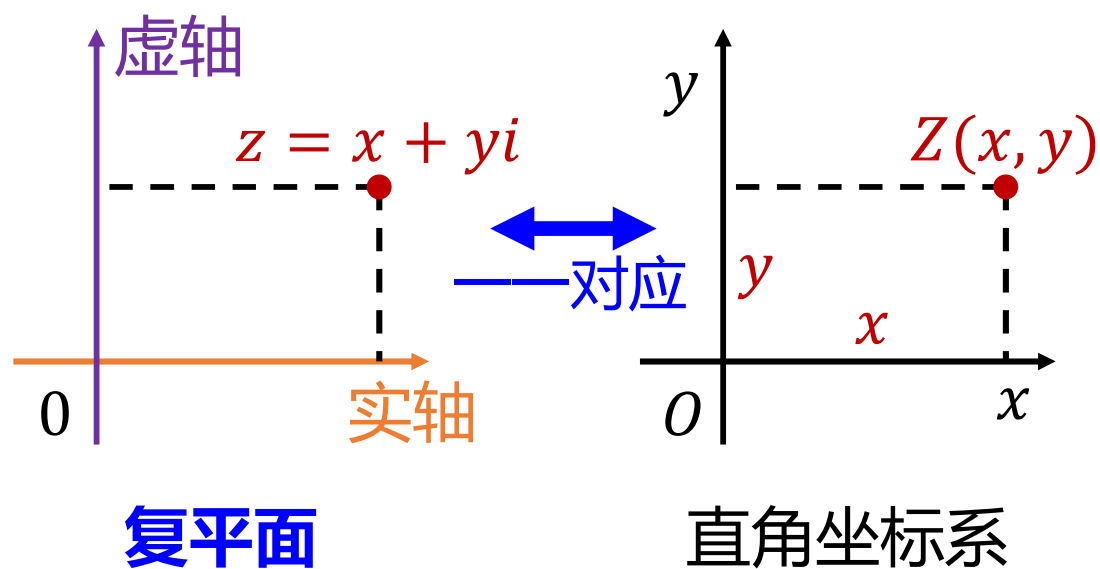
复平面

- 由于 \mathbb{C} 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



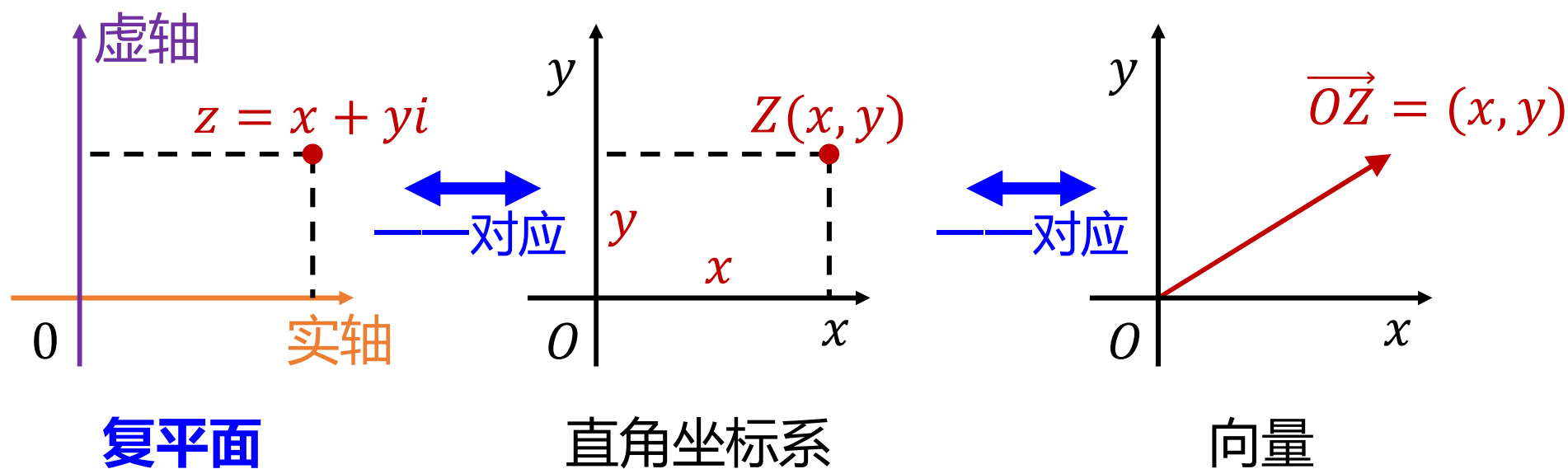
复平面

- 由于 \mathbb{C} 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



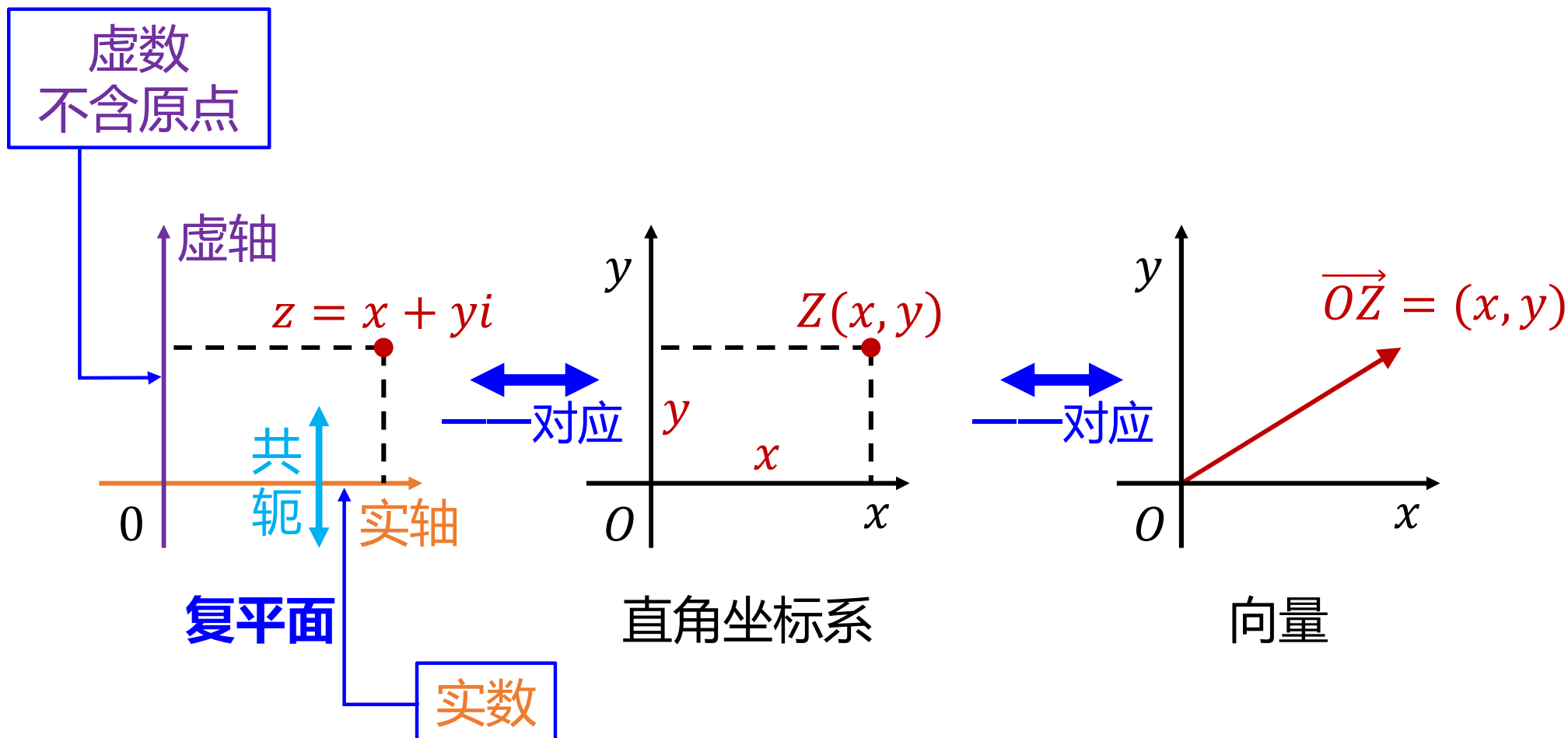
复平面

- 由于 \mathbb{C} 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



复平面

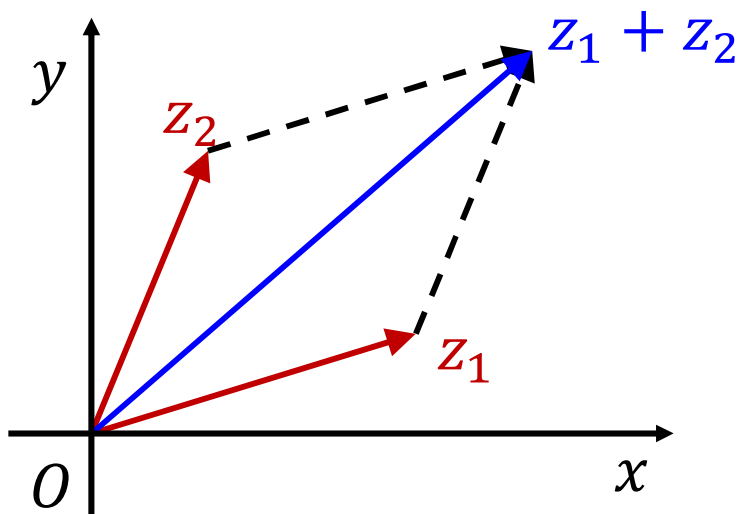
- 由于 \mathbb{C} 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



- 在这种对应关系下, 复数的加减法与其对应的向量 \overrightarrow{OZ} 的加减法是一致的.

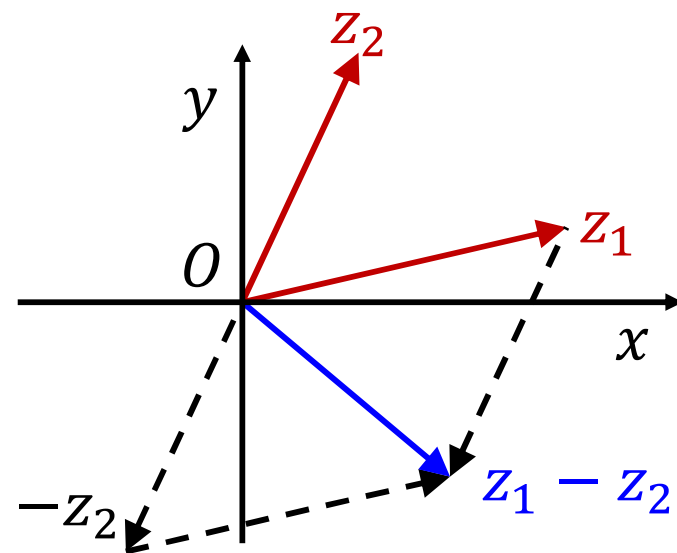
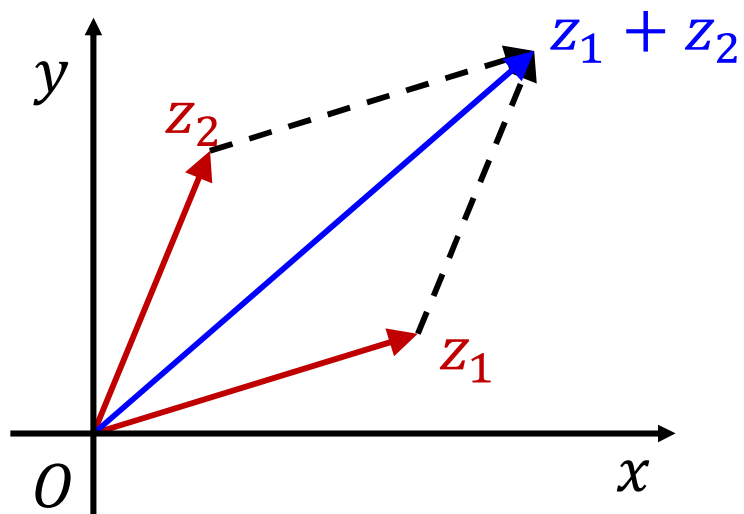
加减法一致

- 在这种对应关系下, 复数的加减法与其对应的向量 \overrightarrow{OZ} 的加减法是一致的.



加减法一致

- 在这种对应关系下, 复数的加减法与其对应的向量 \overrightarrow{OZ} 的加减法是一致的.



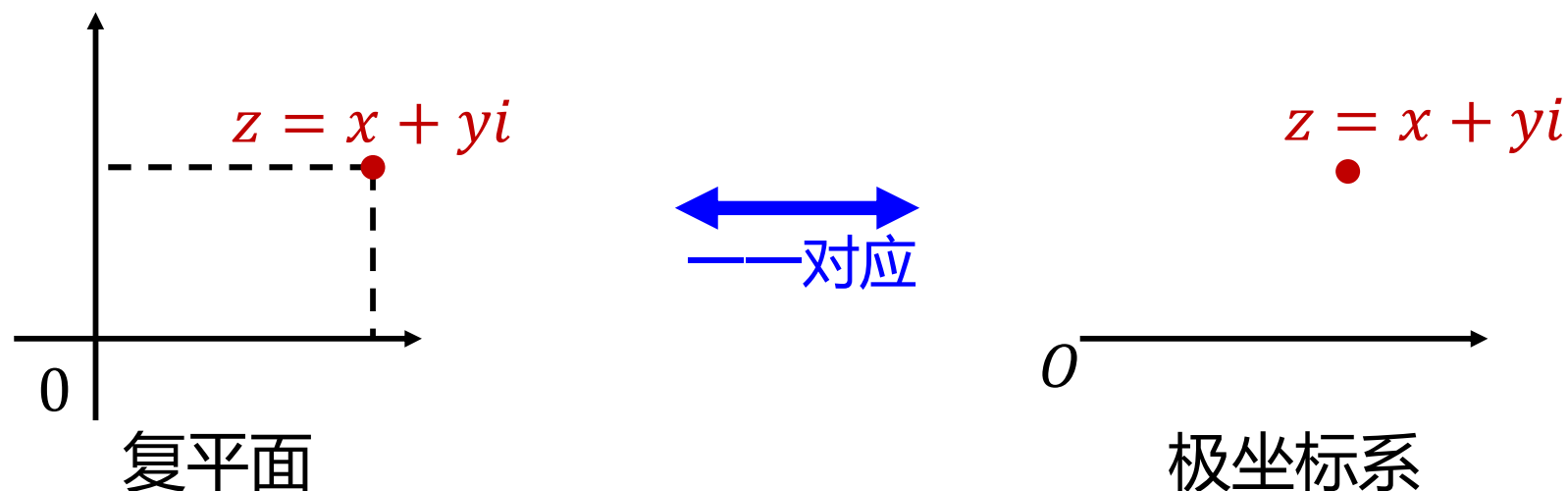
- 由平面的极坐标表示, 可以得到复数的另一种表示方式.

复数的极坐标形式

- 由平面的极坐标表示, 可以得到复数的另一种表示方式.
- 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.

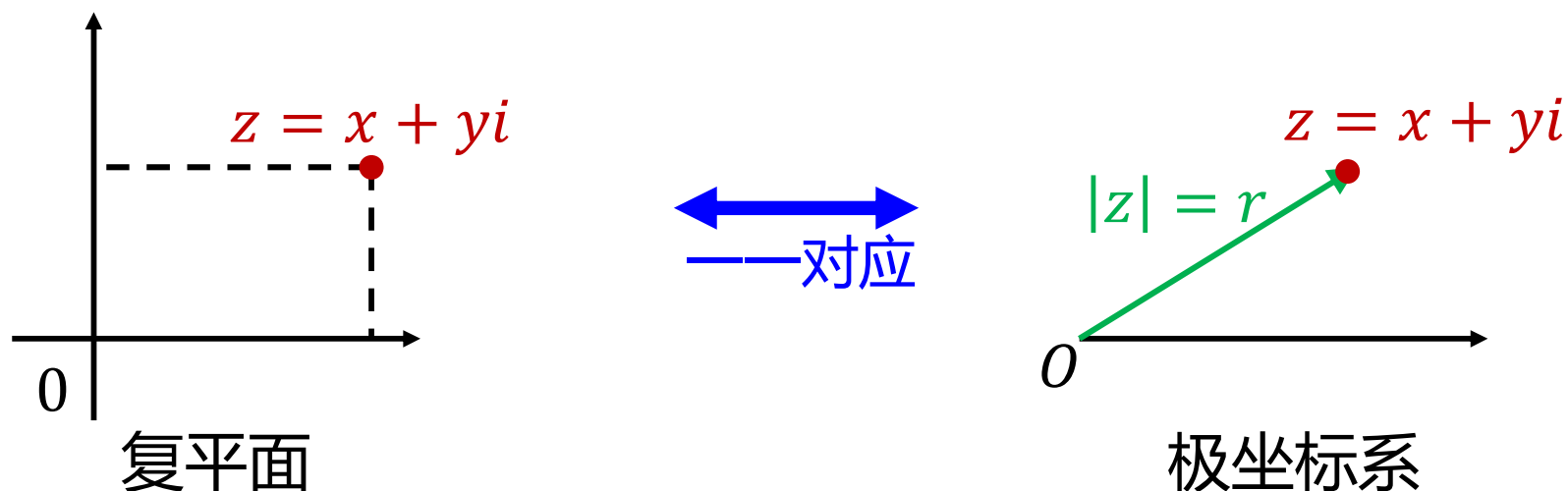
复数的极坐标形式

- 由平面的极坐标表示, 可以得到复数的另一种表示方式.
- 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



复数的极坐标形式

- 由平面的极坐标表示, 可以得到复数的另一种表示方式.
- 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.

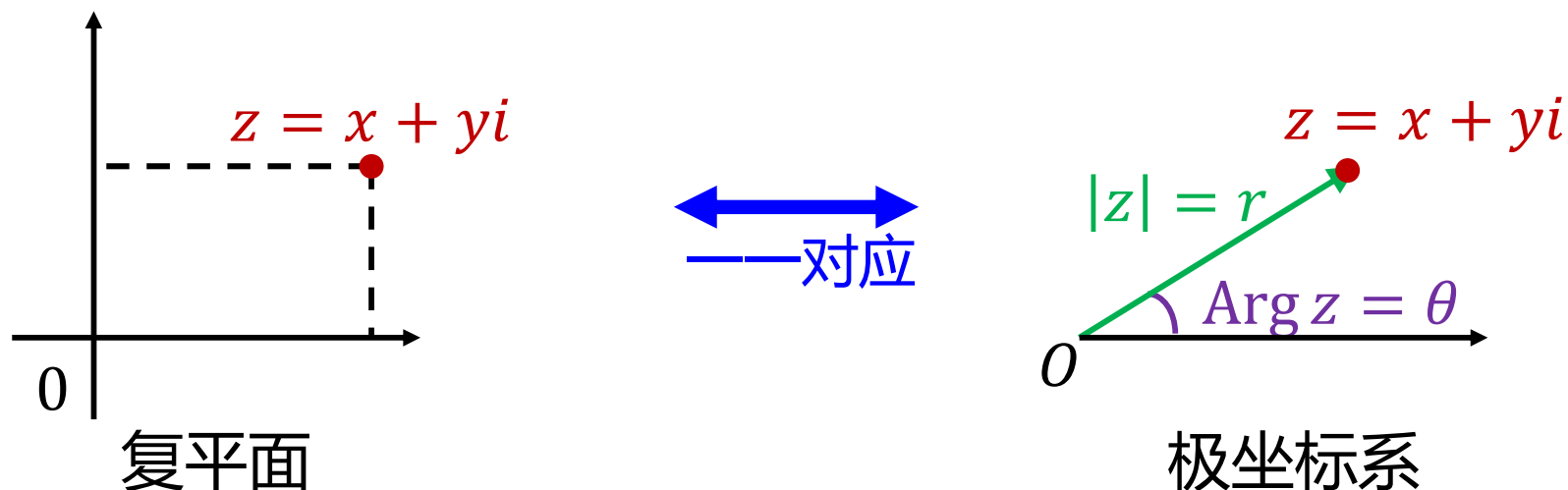


定义

称 r 为 z 的**模**, 记为 $|z| = r$.

复数的极坐标形式

- 由平面的极坐标表示, 可以得到复数的另一种表示方式.
- 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



定义

称 r 为 z 的**模**, 记为 $|z| = r$.

称 θ 为 z 的**辐角**, 记为 $\text{Arg } z = \theta$. 0 的辐角没有意义.

极坐标和直角坐标的对应

- 由极坐标和直角坐标的对应可知

极坐标和直角坐标的对应

- 由极坐标和直角坐标的对应可知

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta,$$

极坐标和直角坐标的对应

- 由极坐标和直角坐标的对应可知

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

极坐标和直角坐标的对应

- 由极坐标和直角坐标的对应可知

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + (2k + 1)\pi, & x < 0, \\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y < 0, \\ \text{任意/无意义}, & x = y = 0. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

极坐标和直角坐标的对应

- 由极坐标和直角坐标的对应可知

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + (2k+1)\pi, & x < 0, \\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y < 0, \\ \text{任意/无意义}, & x = y = 0. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\arctan t : (-\infty, +\infty) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.

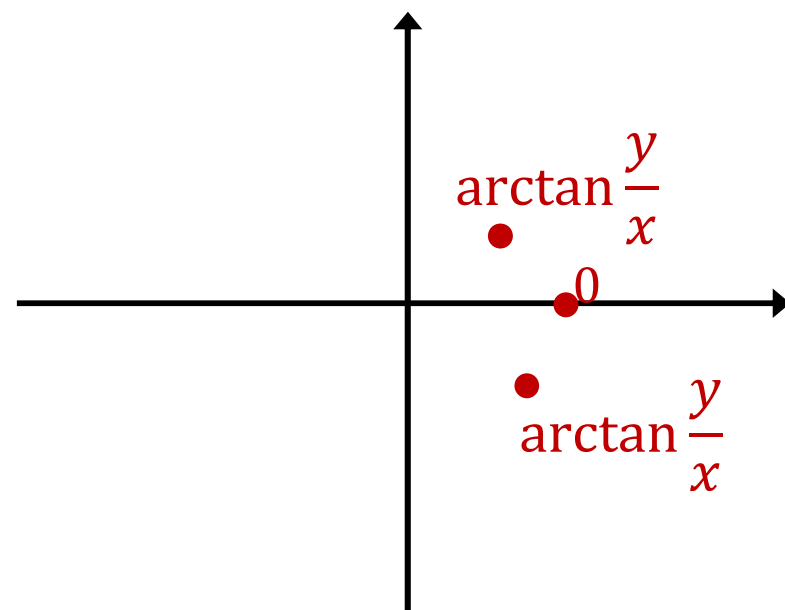
主辐角

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.
- 固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 **$\arg z$** .

主辐角

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.
- 固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 **$\arg z$** .

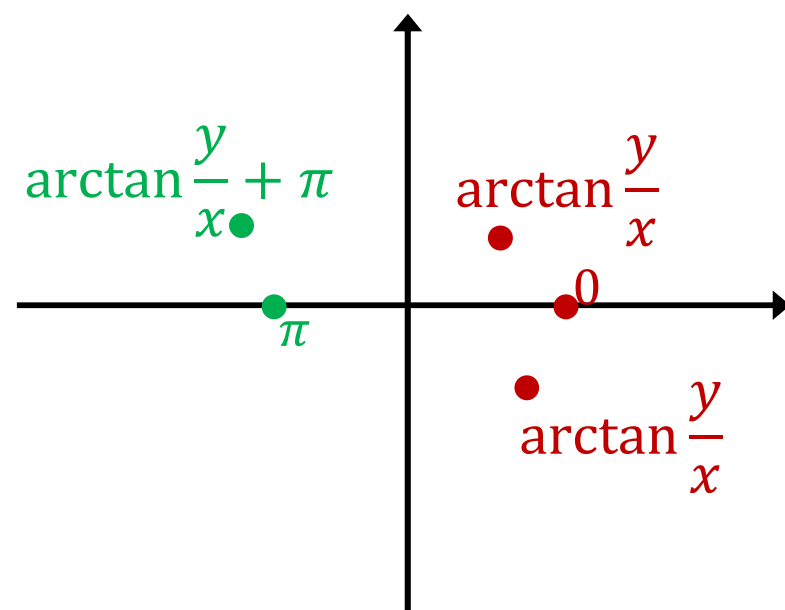
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \end{cases}$$



主辐角

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.
- 固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 **$\arg z$** .

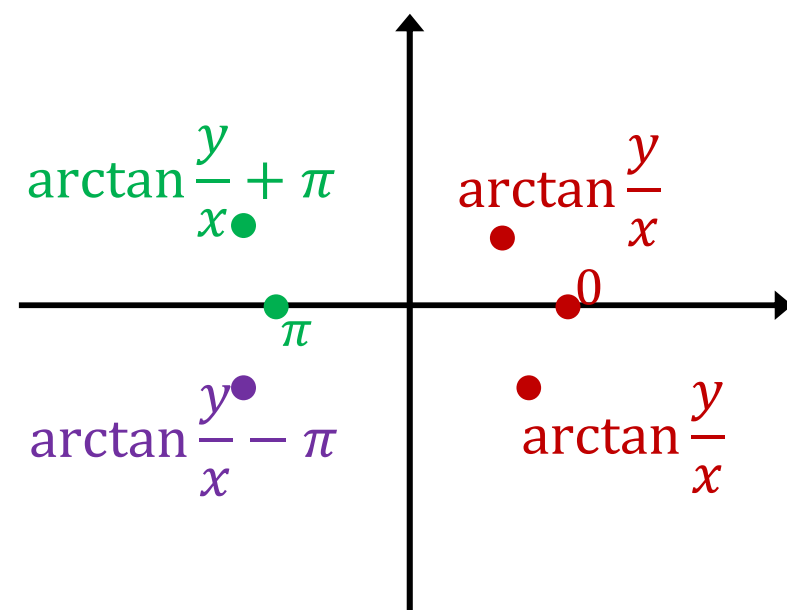
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0, \end{cases}$$



主辐角

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.
- 固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 **$\arg z$** .

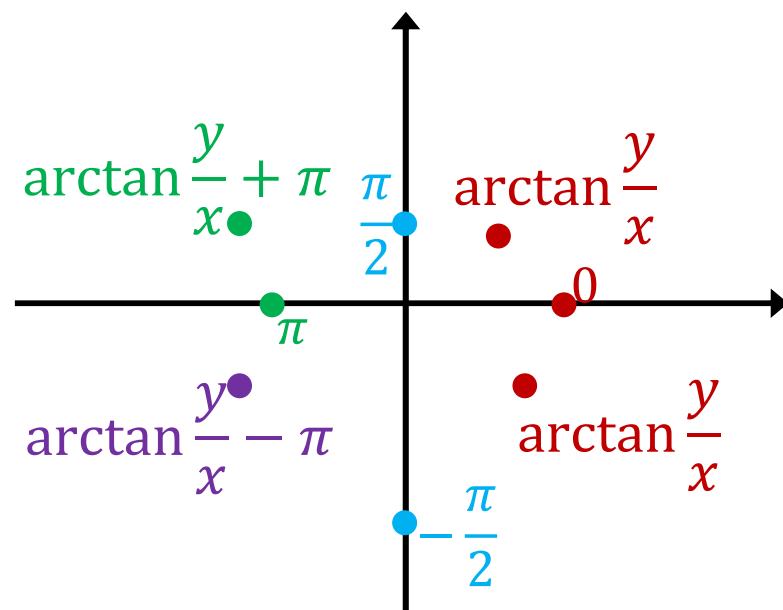
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0, \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \end{cases}$$



主辐角

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.
- 固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 **$\arg z$** .

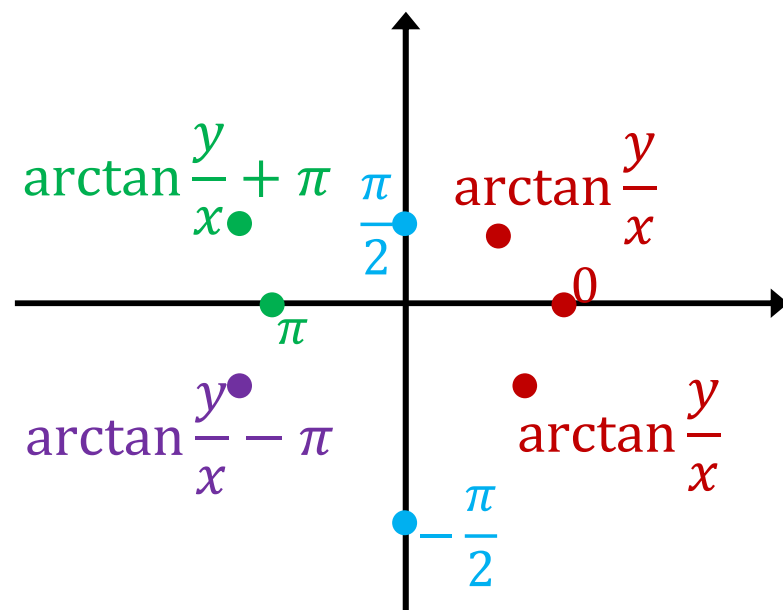
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0, \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



主辐角

- 任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个.
- 固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**, 记作 **$\arg z$** .

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0, \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



- z 是实数 $\Leftrightarrow \arg z = 0, \pi$ 或 $z = 0$
- z 是纯虚数 $\Leftrightarrow \arg z = \pm \frac{\pi}{2}$

结论

- $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$

结论

- $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z|$

结论

- $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

结论

- $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$

结论

- $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$
 - $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$
 - $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 - $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$
- 这些不等式可以用三角不等式证明,

结论

- $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$
 - $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$
 - $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
 - $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$
- 这些不等式可以用三角不等式证明, 也可以用代数方法证明, 例如:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 \bar{z}_2| = (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.

- 证明 (1) 由于

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.

- 证明 (1) 由于

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

- 所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.

- 证明 (1) 由于

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

- 所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- 同理 $|z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.

- 证明 (1) 由于

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

- 所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- 同理 $|z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.

- 证明 (1) 由于

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

- 所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- 同理 $|z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$
$$= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$$

典型例题：共轭复数解决模的等式

- 例 证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$.

- 证明 (1) 由于

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

- 所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- 同理 $|z_1 \bar{z}_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- (2) $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$
$$= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2).$$

复数的三角形式和指数形式

- 由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可得复数的**三角形式**

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

复数的三角形式和指数形式

- 由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可得复数的**三角形式**

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

- 再由欧拉恒等式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

复数的三角形式和指数形式

- 由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可得复数的**三角形式**

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

- 再由欧拉恒等式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 可得复数的**指数形式**

$$z = r e^{i\theta} = r \exp(i\theta)$$

复数的三角形式和指数形式

- 由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可得复数的**三角形式**

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

- 再由欧拉恒等式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 可得复数的**指数形式**

$$z = r e^{i\theta} = r \exp(i\theta)$$

- 三角形式和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

复数的三角形式和指数形式

- 由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可得复数的**三角形式**

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

- 再由欧拉恒等式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 可得复数的**指数形式**

$$z = r e^{i\theta} = r \exp(i\theta)$$

- 三角形式和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.
- 目前我们尚未解释 e^z 的含义, 也没有证明欧拉恒等式, 所以我们只把它当做三角表示的一种等价写法.

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

证明 $z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

证明 $z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$
 $= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \sin \theta_1 \sin \theta_2)$
 $+ i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)]$

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

证明

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \sin \theta_1 \sin \theta_2) \\ &\quad + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned}$$

- 换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 .$$

- 换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 .$$

- 第二个等式含义如下: 如果我们把它们都看成集合, 那么

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \text{Arg } z_1, \theta_2 \in \text{Arg } z_2\}.$$

- 换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 .$$

- 第二个等式含义如下: 如果我们把它们都看成集合, 那么

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \text{Arg } z_1, \theta_2 \in \text{Arg } z_2\}.$$

- 注意 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ 不一定成立.

- 换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 .$$

- 第二个等式含义如下: 如果我们把它们都看成集合, 那么

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \text{Arg } z_1, \theta_2 \in \text{Arg } z_2\}.$$

- 注意 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ 不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 + \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上.

- 换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

- 第二个等式含义如下: 如果我们把它们都看成集合, 那么

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \text{Arg } z_1, \theta_2 \in \text{Arg } z_2\}.$$

- 注意 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ 不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 + \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上.
- 例如 $(-1 + i)(-1 + i) = -2i$,

- 换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2.$$

- 第二个等式含义如下: 如果我们把它们都看成集合, 那么

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \text{Arg } z_1, \theta_2 \in \text{Arg } z_2\}.$$

- 注意 $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ 不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 + \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上.

- 例如 $(-1 + i)(-1 + i) = -2i$,

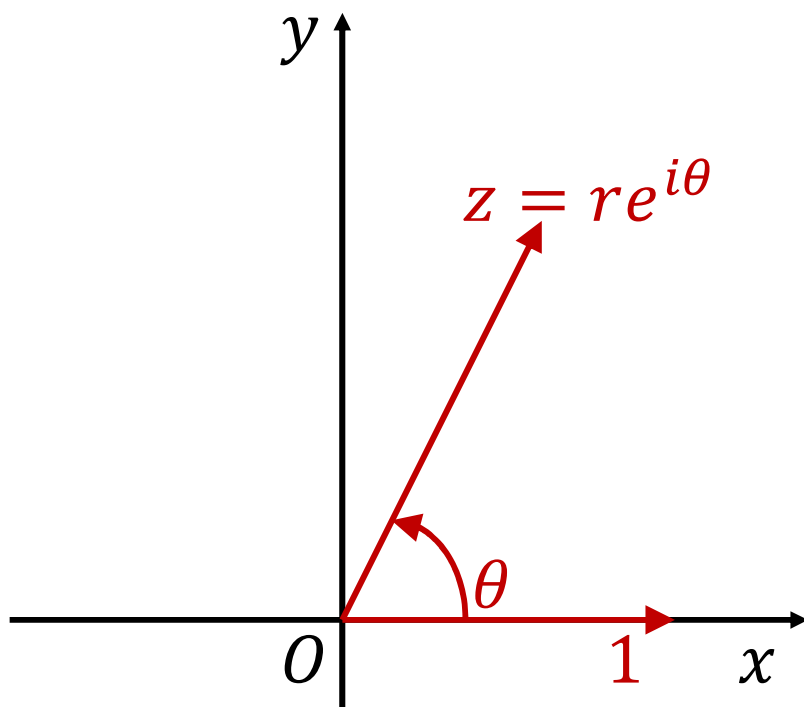
$$\arg(-1 + i) + \arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2},$$

$$\arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}.$$

- 从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模长放大 r 倍, 并按逆时针旋转角度 θ .

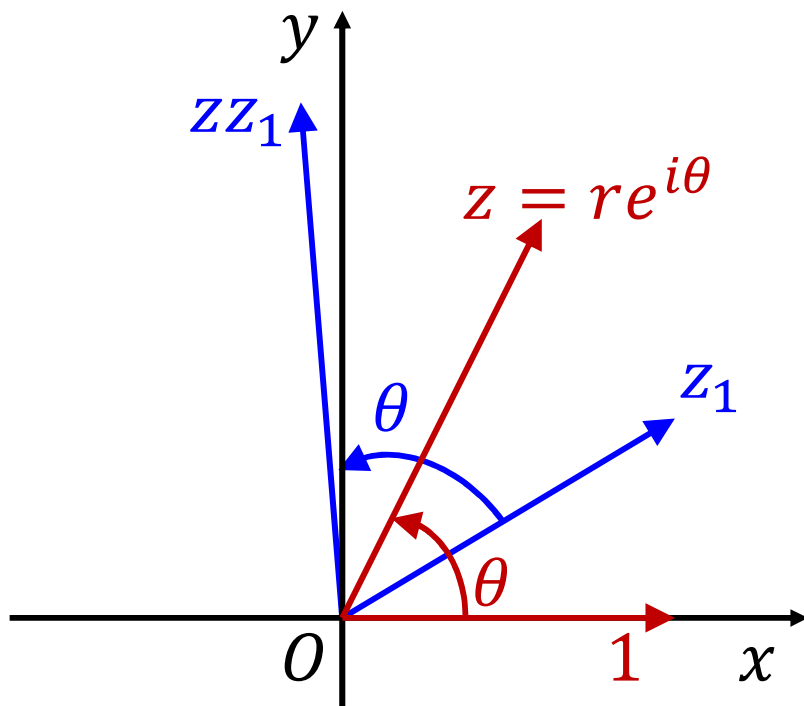
乘积的几何意义

- 从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模长放大 r 倍, 并按逆时针旋转角度 θ .



乘积的几何意义

- 从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模长放大 r 倍, 并按逆时针旋转角度 θ .



定理

设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

$$\text{则 } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

$$\text{则 } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

$$\text{换言之, } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

$$\text{则 } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

$$\text{换言之, } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \text{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2.$$

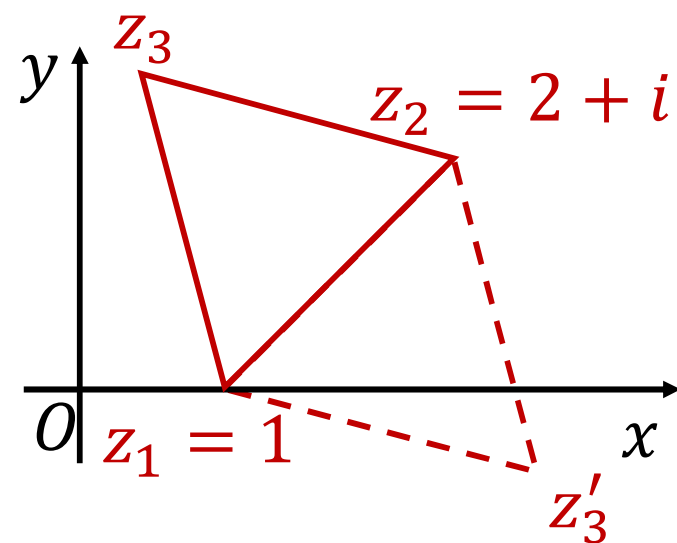
- **证明** 设 $\frac{z_1}{z_2} = r e^{i\theta}$, 那么由乘法可知 $rr_2 = r_1$ 和 $\theta + \text{Arg } z_2 = \text{Arg } z_1$.

例题: 复数解决平面几何问题

- 例 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

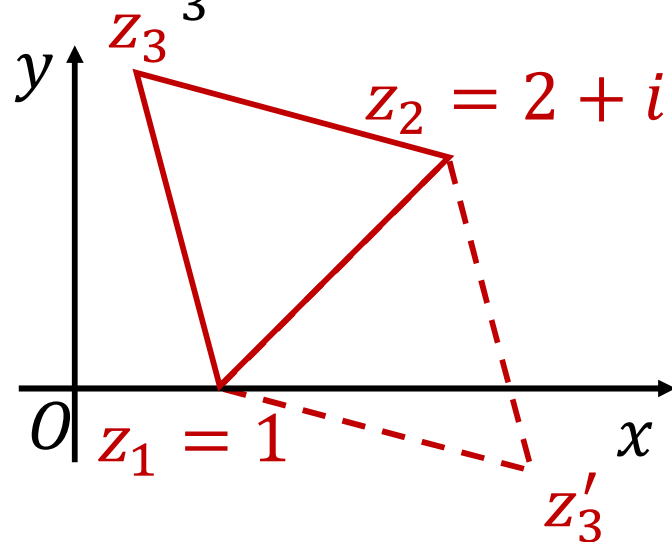
例题: 复数解决平面几何问题

- 例 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.



例题: 复数解决平面几何问题

- **例** 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.
- **解** 由于 $\overrightarrow{z_1 z_3}$ 为 $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 因此

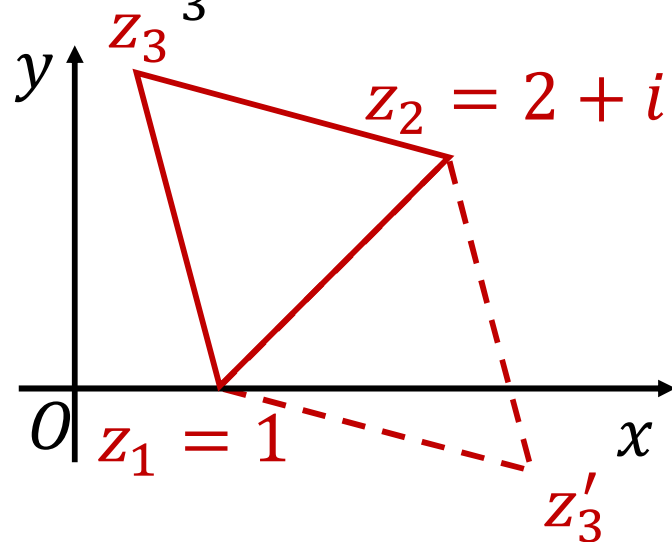


例题: 复数解决平面几何问题

- **例** 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

- **解** 由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\pm\frac{\pi i}{3}}$$



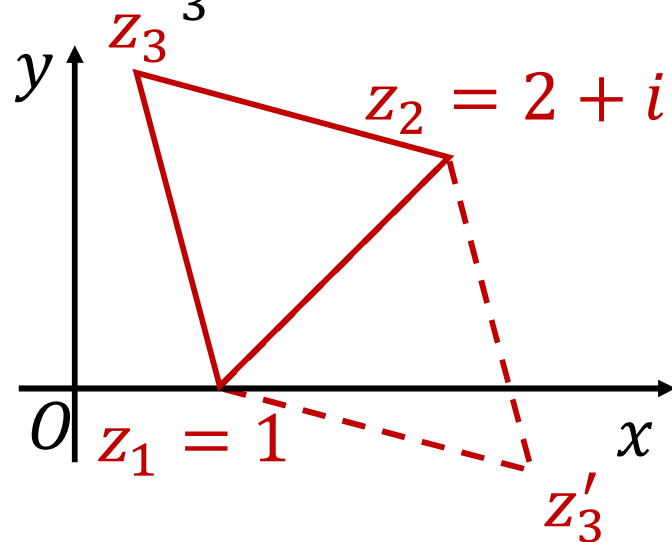
例题: 复数解决平面几何问题

- **例** 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

- **解** 由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\pm \frac{\pi i}{3}}$$

$$= (1 + i) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

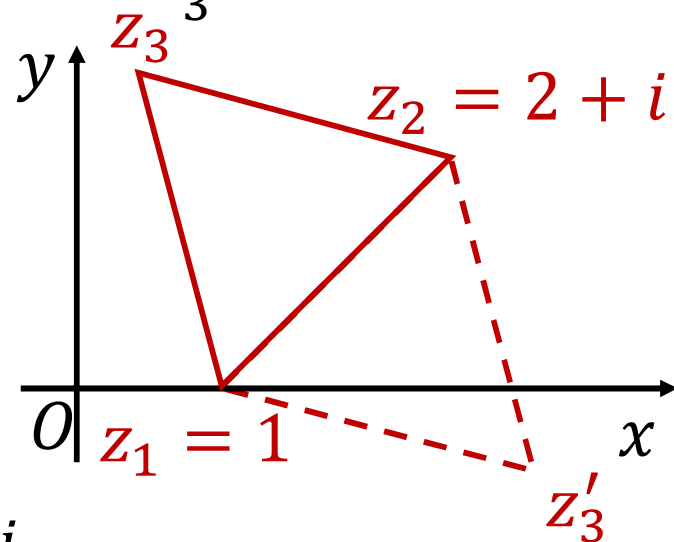


例题: 复数解决平面几何问题

- **例** 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

- **解** 由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 因此

$$\begin{aligned} z_3 - z_1 &= (z_2 - z_1)e^{\pm \frac{\pi i}{3}} \\ &= (1 + i) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i \quad \text{或} \quad \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} i, \end{aligned}$$



例题: 复数解决平面几何问题

- **例** 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

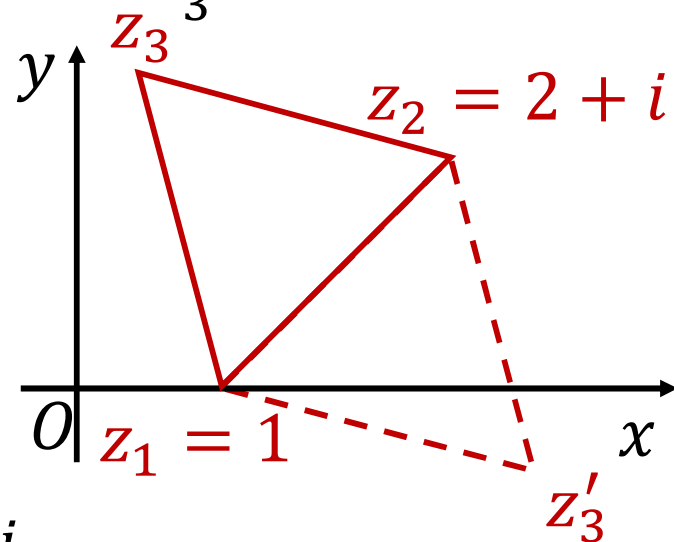
- **解** 由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\pm \frac{\pi i}{3}}$$

$$= (1 + i) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

$$= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i \quad \text{或} \quad \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} i,$$

$$z_3 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} i \quad \text{或} \quad \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} i.$$



例题: 求复数的三角/指数形式

- 我们可以根据实际需要选择复数的合适形式.

例题: 求复数的三角/指数形式

- 我们可以根据实际需要选择复数的合适形式.
- 例 将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.

例题: 求复数的三角/指数形式

- 我们可以根据实际需要选择复数的合适形式.
- 例 将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.
- 解 $r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4.$

例题：求复数的三角/指数形式

- 我们可以根据实际需要选择复数的合适形式.
- **例** 将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.
- **解** $r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$.
- 由于 z 在第三象限,

$$\arg z = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi.$$

例题：求复数的三角/指数形式

- 我们可以根据实际需要选择复数的合适形式.
- **例** 将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.
- **解** $r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$.
- 由于 z 在第三象限,

$$\arg z = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5}{6}\pi.$$

- 故

$$z = 4 \left[\cos \left(-\frac{5}{6}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{5}{6}\pi \right) \right] = 4 \exp \left(-\frac{5\pi i}{6} \right).$$

例题: 求复数的三角/指数形式

- 例 将 $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

例题: 求复数的三角/指数形式

- 例 将 $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.
- 解

$$z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} = \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

例题：求复数的三角/指数形式

- 例 将 $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

- 解

$$z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} = \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

- 练习 将 $z = \sqrt{3} - 3i$ 化成三角形式和指数形式.

例题：求复数的三角/指数形式

- 例 将 $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

- 解

$$z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} = \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

- 练习 将 $z = \sqrt{3} - 3i$ 化成三角形式和指数形式.

- 答案

$$z = 2\sqrt{3} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] = 2\sqrt{3} e^{-\frac{\pi i}{3}}.$$

例题: 求复数的三角/指数形式

- 例 将 $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$) 化成三角形式和指数形式, 并求出它的主辐角.

例题: 求复数的三角/指数形式

- 例 将 $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$) 化成三角形式和指数形式, 并求出它的主辐角.

- 解

$$z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + i \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

例题：求复数的三角/指数形式

- 例 将 $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$) 化成三角形式和指数形式, 并求出它的主辐角.

- 解

$$\begin{aligned} z &= 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + i \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \right) \end{aligned}$$

例题：求复数的三角/指数形式

- 例 将 $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$) 化成三角形式和指数形式, 并求出它的主辐角.

- 解

$$\begin{aligned} z &= 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + i \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\pi - \alpha}{2} + i \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot e^{\frac{\pi - \alpha}{2} i}, \end{aligned}$$

例题：求复数的三角/指数形式

- 例 将 $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq \pi$) 化成三角形式和指数形式, 并求出它的主辐角.

- 解

$$\begin{aligned} z &= 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + i \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \\ &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + i \cos \frac{\alpha}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{\pi - \alpha}{2} + i \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot e^{\frac{\pi - \alpha}{2} i}, \\ \arg z &= \frac{\pi - \alpha}{2}. \end{aligned}$$

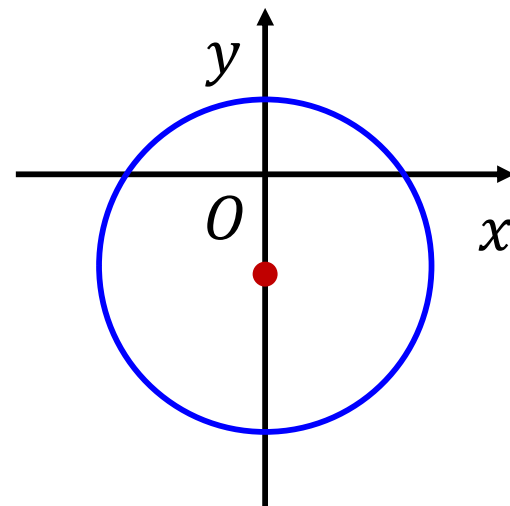
- 很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

- 很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.
- 例 (1) $|z + i| = 2$.

- 很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.
- 例 (1) $|z + i| = 2$.
- 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.

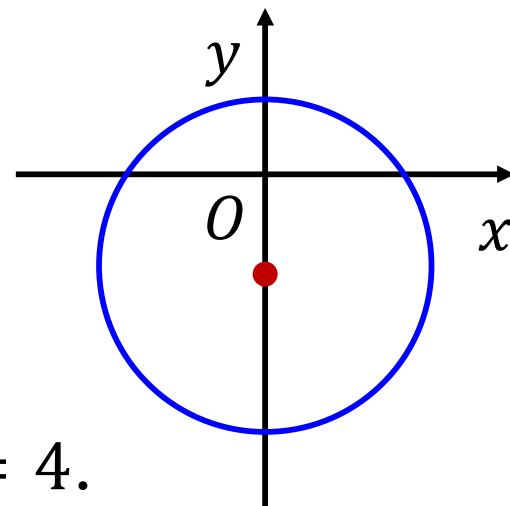
复数方程表平面图形

- 很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.
- 例 (1) $|z + i| = 2$.
- 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.



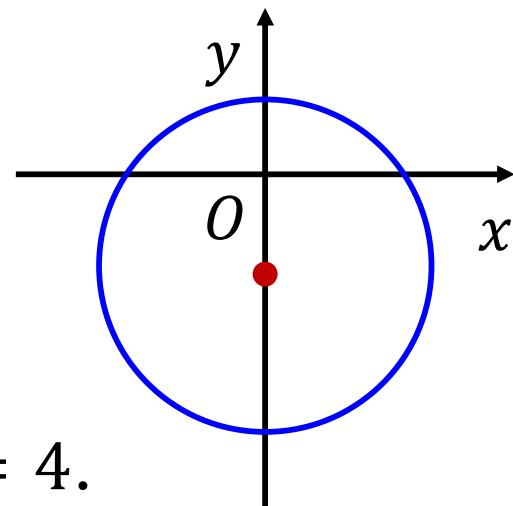
复数方程表平面图形

- 很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.
- 例 (1) $|z + i| = 2$.
- 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.
- 设 $z = x + yi$, 则方程为 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$.



复数方程表平面图形

- 很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.
- 例 (1) $|z + i| = 2$.
- 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.
- 设 $z = x + yi$, 则方程为 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$.
- 一般的圆方程为 $|z - z_0| = R$, 其中 z_0 是圆心, R 是半径.

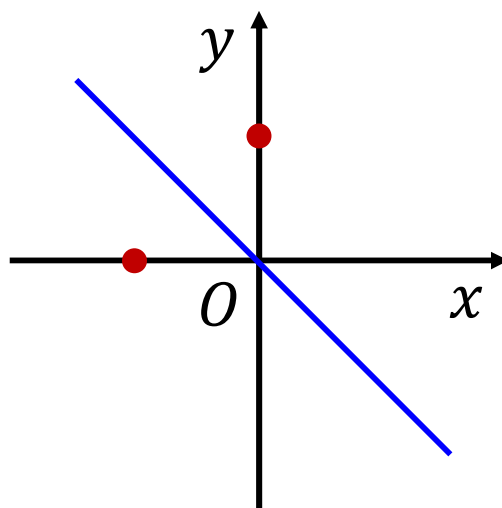


- (2) $|z - 2i| = |z + 2|$.

- (2) $|z - 2i| = |z + 2|$.
- 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线.

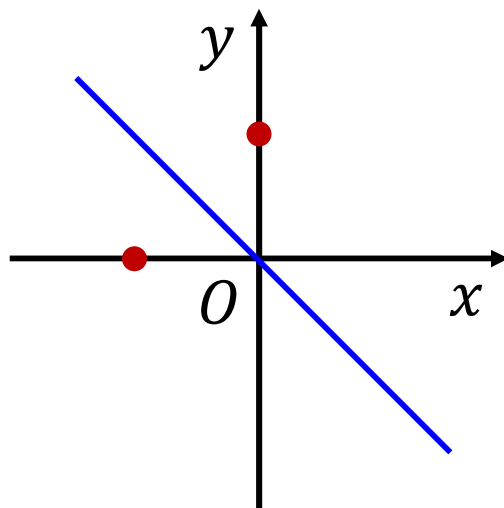
复数方程表平面图形

- (2) $|z - 2i| = |z + 2|$.
- 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线.



复数方程表平面图形

- (2) $|z - 2i| = |z + 2|$.
- 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线.
- 两边同时平方化简可得 $z + i\bar{z} = 0$ 或 $x + y = 0$.



- (3) $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 4.$

- (3) $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 4$.
- 设 $z = x + yi$, 则 $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 1 - y = 4$, 因此 $y = -3$.

复数方程表平面图形

- (3) $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 4$.
- 设 $z = x + yi$, 则 $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 1 - y = 4$, 因此 $y = -3$.
- (4) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$.
- 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

复数方程表平面图形

- (3) $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 4$.
- 设 $z = x + yi$, 则 $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 1 - y = 4$, 因此 $y = -3$.
- (4) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$.
- 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.
- (5) $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$.
- 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

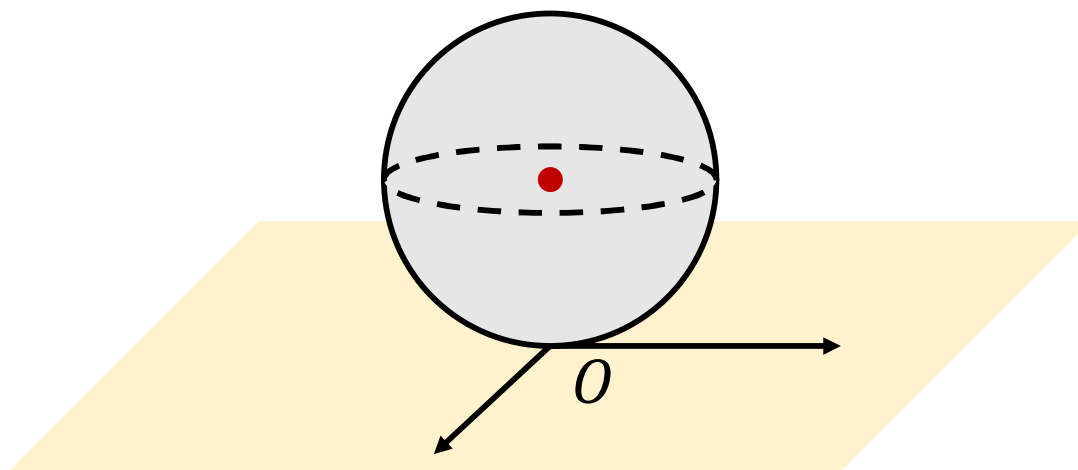
复数方程表平面图形

- (3) $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 4$.
- 设 $z = x + yi$, 则 $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 1 - y = 4$, 因此 $y = -3$.
- (4) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$.
- 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.
- (5) $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$.
- 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.
- 类似地, 含 z 的不等式往往表示一个区域, 例如 $|z - i| < 2$ 表示一个开圆盘.

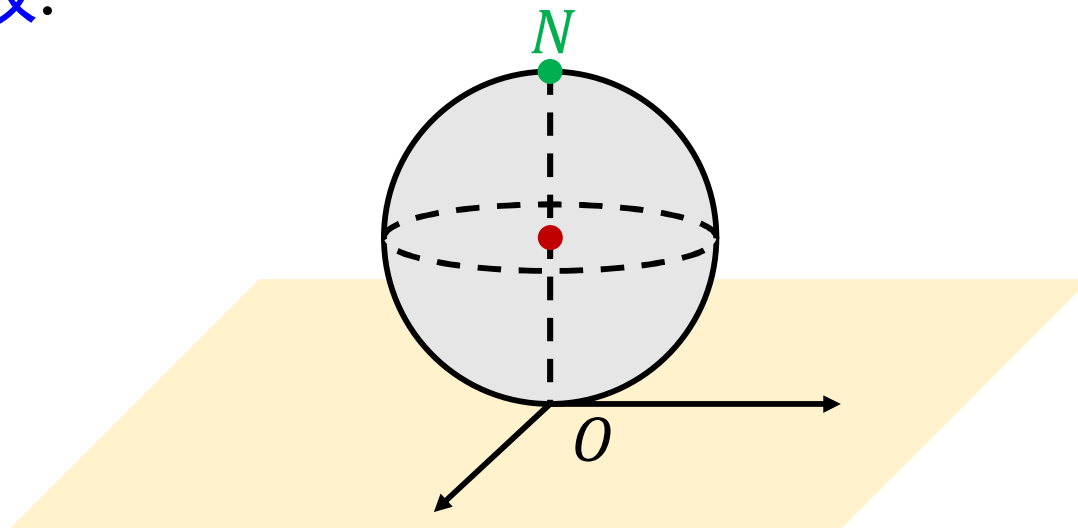
- 我们给出复数的一种几何表示使得其自然包含无穷远点 ∞ .

- 我们给出复数的一种几何表示使得其自然包含无穷远点 ∞ .
- 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

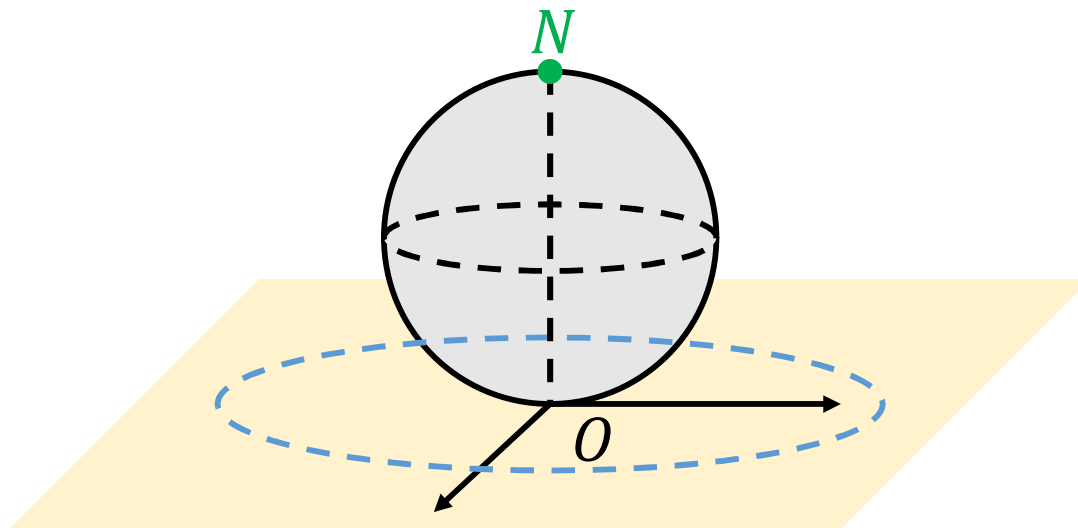
- 我们给出复数的一种几何表示使得其自然包含无穷远点 ∞ .
- 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.
- 取一个与复平面相切于原点 $z = 0$ 的球面.



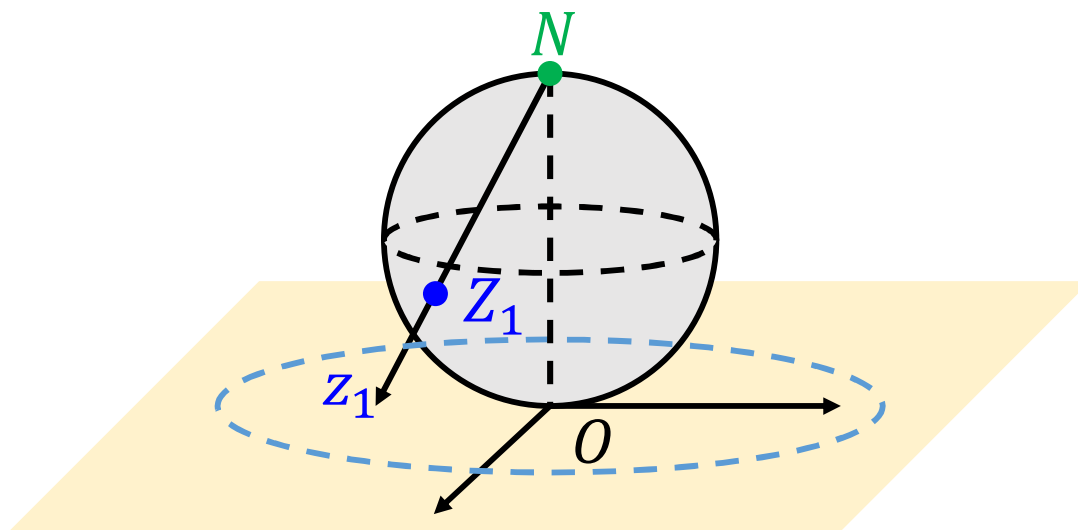
- 我们给出复数的一种几何表示使得其自然包含无穷远点 ∞ .
- 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.
- 取一个与复平面相切于原点 $z = 0$ 的球面.
- 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于另一点 N , 称之为**北极**.



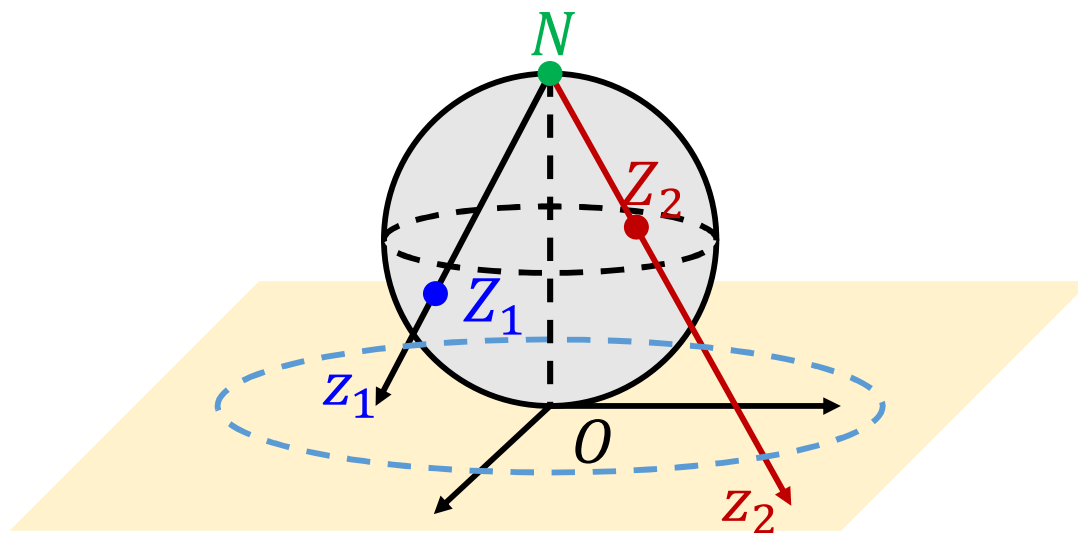
- 对于平面上的任意一点 z , 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z .



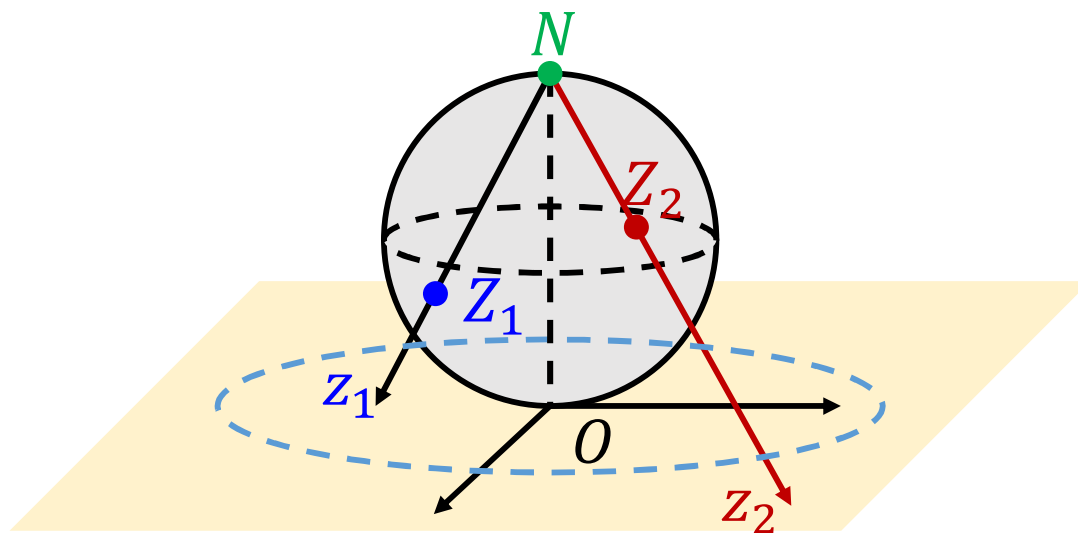
- 对于平面上的任意一点 z , 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z .



- 对于平面上的任意一点 z , 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z .
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z , 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.

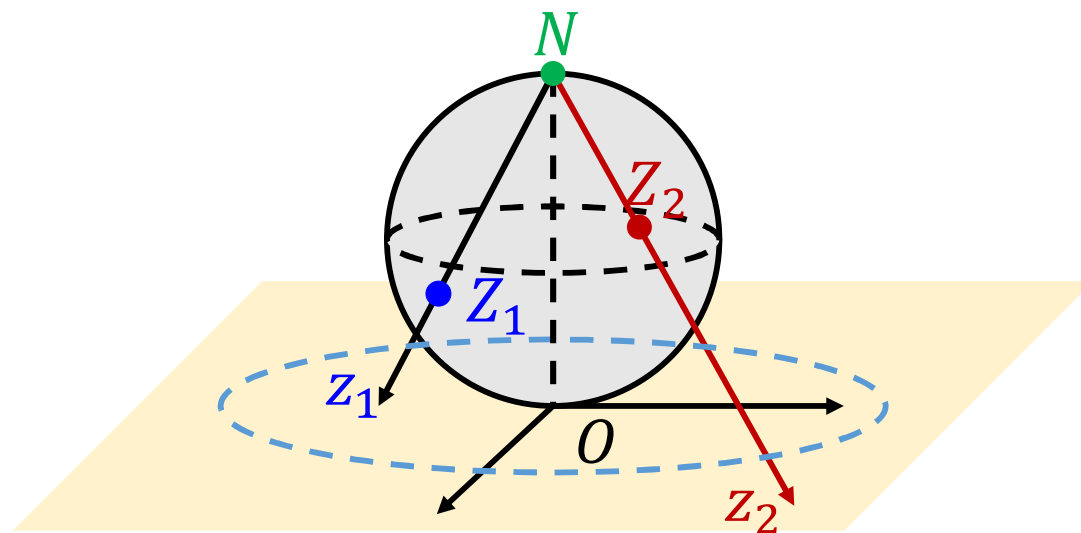


- 对于平面上的任意一点 z , 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z .
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z , 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.
- 这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.



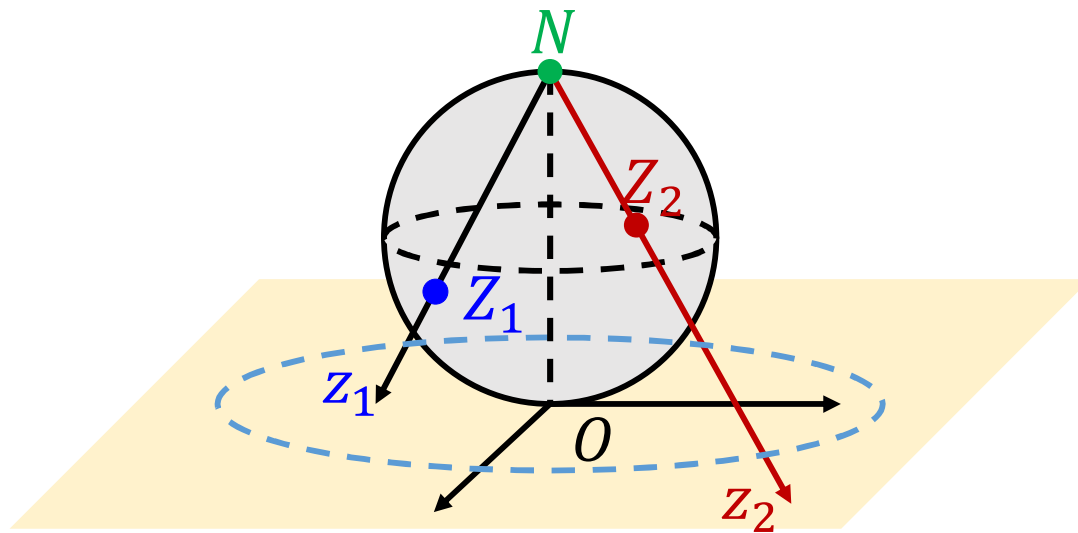
复球面: 无穷远点

- 当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N .



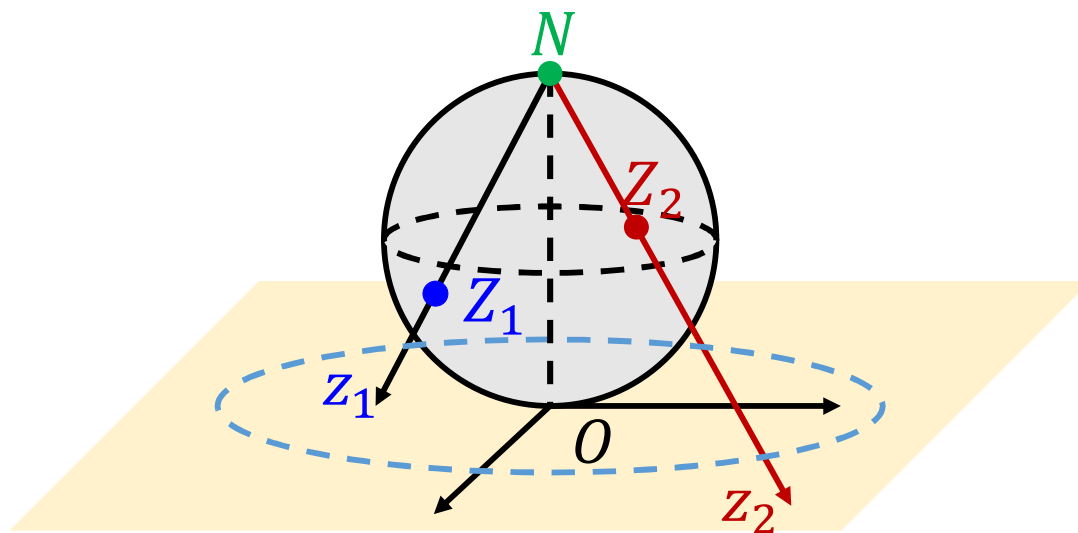
复球面: 无穷远点

- 当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N .
- 如果我们在复平面上添加一个额外的"点"——**无穷远点**, 记作 ∞ .



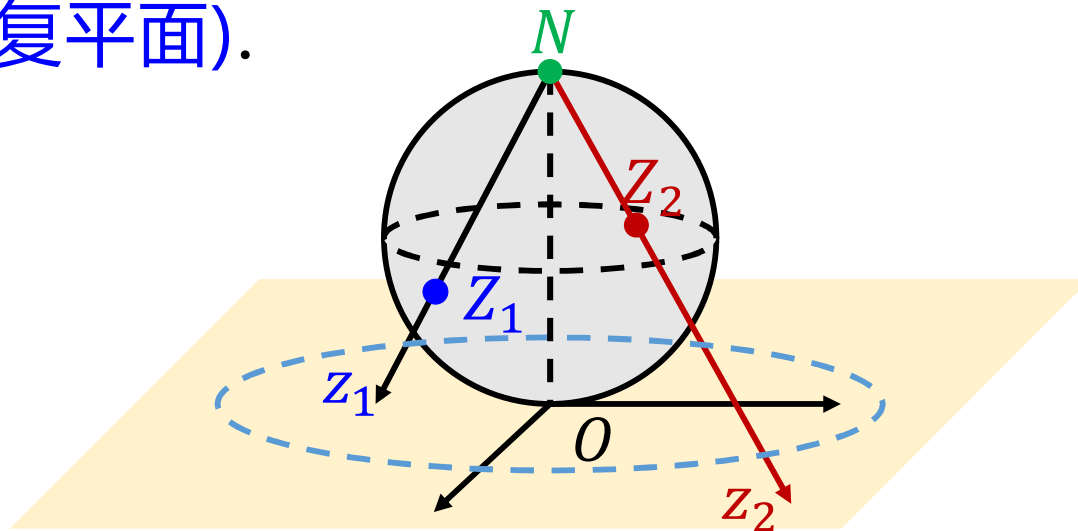
复球面: 无穷远点

- 当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N .
- 如果我们在复平面上添加一个额外的"点"——**无穷远点**, 记作 ∞ .
- 那么**扩充复数集合** $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应.



复球面: 无穷远点

- 当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N .
- 如果我们在复平面上添加一个额外的"点"——**无穷远点**, 记作 ∞ .
- 那么**扩充复数集合** $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应.
- 称这样的球面为**复球面**, 称包含无穷远点的复平面为**扩充复平面(闭复平面)**.

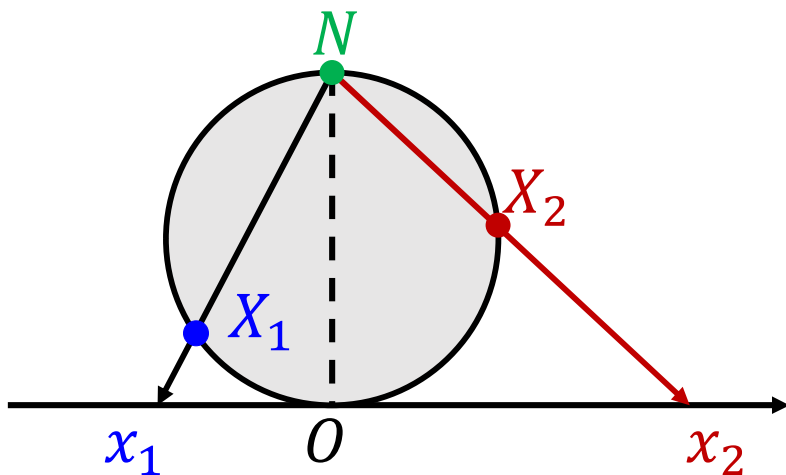


复球面: 与实数无穷的联系

- 它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢?

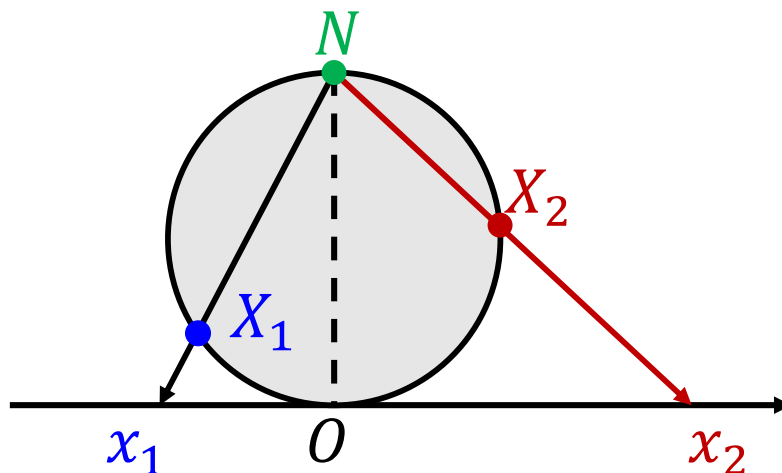
复球面: 与实数无穷的联系

- 它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢?
- 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应.



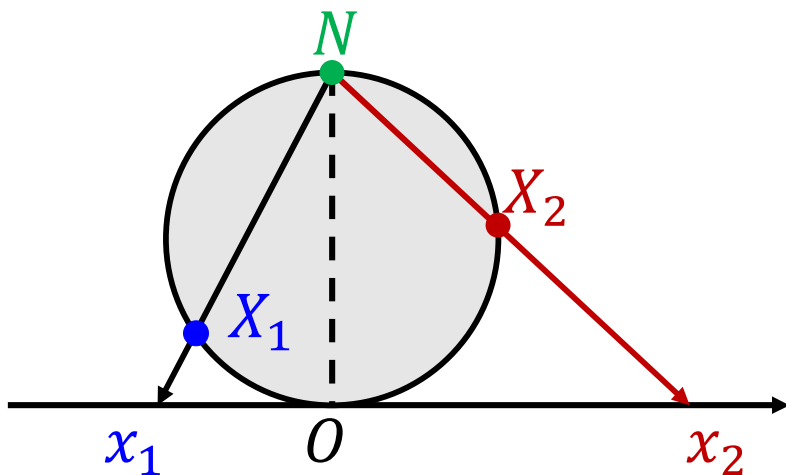
复球面: 与实数无穷的联系

- 它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢?
- 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应.
- 同样的, 当 $|x|$ 越来越大时, 其对应圆周上点也越来越接近 N .



复球面: 与实数无穷的联系

- 它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢?
- 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应.
- 同样的, 当 $|x|$ 越来越大时, 其对应圆周上点也越来越接近 N .
- 所以实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上或扩充复平面上就是 ∞ , 只是在实数时我们往往还关心它的符号, 所以区分正负.



∞ 的性质

- ∞ 的实部、虚部和辐角无意义, 规定 $|\infty| = +\infty$.

∞ 的性质

- ∞ 的实部、虚部和辐角无意义, 规定 $|\infty| = +\infty$.
- 约定

$$z + \infty = \infty + z = \infty \quad (z \neq \infty)$$

$$z - \infty = \infty - z = \infty \quad (z \neq \infty)$$

∞ 的性质

- ∞ 的实部、虚部和辐角无意义, 规定 $|\infty| = +\infty$.
- 约定

$$z + \infty = \infty + z = \infty \quad (z \neq \infty)$$

$$z - \infty = \infty - z = \infty \quad (z \neq \infty)$$

$$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty \quad (z \neq 0)$$

$$\frac{z}{\infty} = 0, \quad \frac{\infty}{z} = \infty \quad (z \neq 0), \quad \frac{z}{0} = \infty \quad (z \neq 0)$$