第二章　解析函数

2.1　解析函数的概念

作业 1. 判断题: 如果 $f'(z)$ 存在, 那么 $f(z)$ 在 z_0 解析.(　)

作业 2. 判断题: 如果 z_0 是 $f(z)$ 的奇点, 那么 $f(z)$ 在 z_0 不可导.(　)

作业 3. 判断题: 如果 z_0 是 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的奇点, 那么 z_0 也是 $f(z)+g(z)$ 和 $f(z)/g(z)$ 的奇点.(　)

作业 4. 单选题: (2021 年 A 卷) 函数 $f(z)$ 在点 z_0 的邻域内可导是 $f(z)$ 在该邻域内解析的 (　).

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

作业 5. (2021 年 A 卷) 设 $f(z)=\frac{1}{5}z^5-(1+i)z$, 解方程 $f'(z)=0$.

2.2　函数解析的充要条件

作业 6. 判断题: 如果 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 可导 (指偏导数存在), 那么 $f(z)=u+iv$ 亦可导.(　)

作业 7. 单选题: (2021 年 B 卷) 下列函数中, 为解析函数的是 (　).

(A) x^2-y^2-2xyi　　(B) x^2+xyi

(C) $2(x-1)y+i(y^2-x^2+2x)$　　(D) x^3+iy^3

作业 8. 填空题: 函数 $\dfrac{z+1}{z(z^2+1)}$ 的奇点为__________.

作业 9. 填空题: 函数 $\dfrac{z-2}{(z+1)^2(z^2+1)}$ 的奇点为__________.

作业 10. 填空题: (2022 年 A 卷) 如果函数 $f(z)=x^2-2xy-y^2+i(ax^2+bxy+cy^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a+b+c=$__________.

作业 11.　下列函数何处可导? 何处解析?

(1) $f(z)=1/\overline{z}$;
(2) $f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$;
(3) $f(z)=2x^3+3y^3i$;
(4) $f(z)=xy^2+ix^2y$;
(5) $f(z)=e^{x^2+y^2}$;
(6) $f(z)=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$.

作业 12. 指出下列函数 $f(z)$ 的解析区域, 并求出其导数.

(1) $(z-1)^5$;
(2) z^3+2iz;
(3) $\dfrac{1}{z^2-1}$;
(4) $\dfrac{az+b}{cz+d}$ (c,d 不全为零).

作业 13. 设 $my^3+nx^2y+i(x^3+lxy^2)$ 为解析函数, 试确定实数 l,m,n 的值.

2.3 初等函数

作业 14. 选择题: (2021 年 A 卷) 下列式子一定正确的是 ( ).

(A) $\mathrm{Arg}(z^n)=n\,\mathrm{Arg}\,z$
(B) $\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}(z_1)+\mathrm{Arg}(z_2)$
(C) $\mathrm{Ln}\sqrt{z}=\dfrac{1}{2}\mathrm{Ln}\,z$
(D) $\mathrm{Ln}\,z^2=2\,\mathrm{Ln}\,z$

作业 15. 填空题: (2020 年 B 卷) $\ln i=$__________.

作业 16. 填空题: (2021 年 B 卷) 设复数 $z=1^{\sqrt{3}}$, 则 $|z|=$__________.

作业 17. 填空题: (2022 年 A 卷) i^{-i} 的主值是__________.

作业 18. (2020 年 B 卷) 求 $\mathrm{Ln}\,4$ 和 $2\,\mathrm{Ln}\,2$.

作业 19. (2021 年 A 卷) 求 $\sin(1+i)$ 的虚部.

作业 20. (2021 年 B 卷) 求 e^{1-4i} 的主辐角.

作业 21. (2022 年 A 卷) 解方程 $\sin z=2\cos z$.

作业 22. (2022 年 A 卷) 复变函数 $f(z)=\sin z$ 和实变量函数 $g(x)=\sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试列举若干.

作业 23. 下列关系是否正确? 证明或给出反例.

(1) $\overline{e^z}=e^{\overline{z}}$;
(2) $\overline{\cos z}=\cos\overline{z}$;
(3) $\overline{\sin z}=\sin\overline{z}$.

作业 24. 找出下列方程的全部解.

(1) $\sin z=0$;
(2) $\cos z=0$;
(3) $1+e^z=0$;
(4) $\sin z+\cos z=0$.

作业 25. 求 $\mathrm{Ln}(-i),\mathrm{Ln}(-3+4i)$ 和它们的主值.

作业 26. 求 $\exp\left(1-\dfrac{\pi i}{2}\right),\exp\left(\dfrac{1+\pi i}{4}\right),3^i$ 和 $(1+i)^i$ 的值.

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 27. 注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z}, y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\overline{z}$. 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 我们定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

(1) 证明 C-R 方程等价于 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$. 所以我们也可以把 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ 叫做 C-R 方程.

(2) 利用该结论求函数 $f(z) = \overline{z}, z\operatorname{Im} z, e^{z\overline{z}}$ 的可导点和解析点.

作业 28. 仿照复数的指数函数, 我们可以尝试在矩阵上定义指数函数. 设 $A \in M_m(\mathbb{C})$ 是一个 $m \times m$ 的复矩阵, 我们想说明极限

$$e^A := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}A\right)^n$$

存在.

(1) 当 $A = \operatorname{diag}\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ 是一个对角矩阵时, 证明 e^A 存在且

$$e^A = \operatorname{diag}\{e^{a_1}, e^{a_2}, \ldots, e^{a_m}\}.$$

(2) 当

$$A = J_m(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}$$

是 Jordan 块时, 证明 e^A 存在.

(3) 根据每个方阵都可以相似于一些 Jordan 块证明 e^A 总存在.

(4) 当 $A = xE + yJ = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ 时, 证明 $e^A = \begin{pmatrix} e^x\cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & e^x\cos y \end{pmatrix}$.

(5) 证明 $e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots$.

(6) 证明 $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.