线性代数

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第二章　等价和秩

第一节　向量组

- 线性组合
- 线性相关和线性无关
- 线性相关和线性无关的性质
- 维数和秩
- 极大线性无关组

我们将一些具有相同维数的向量放在一起称之为**向量组**(可以有重复的)：例如:

- $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,-1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (3,2,1)^{\mathrm{T}}$;
- $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} = (1,1,-1), \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} = (2,1,2), \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} = (3,2,1)$;
- $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 行可以看成 m 个行向量，它们构成一个向量组，叫做 $\boldsymbol{A}$ 的**行向量组**;
- 类似地，$\boldsymbol{A}$ 的列向量构成它的**列向量组**.
- $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{e}_2 = (0,1,\ldots,0)^{\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0,0,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$.

对于标准向量空间 $V=\mathbb{R}^n$, 我们可以将任一 $\boldsymbol{v}\in V$ **唯一**地表达为形式

$$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n,$$

其中

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(0,1,\ldots,0)^{\mathrm{T}},\ldots,\boldsymbol{e}_n=(0,0,\ldots,1)^{\mathrm{T}}.$$

定义

设 V 是线性空间. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\in V$ 满足: 对任意 $\boldsymbol{v}\in V$, 存在唯一的一组数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{v}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 V 的一组**基**.

如何判断一组向量是不是基呢? 这需要线性组合和线性无关的概念.

向量组的线性组合

定义

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 为 n 维向量. 若存在一组数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{\beta} = \lambda_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{\alpha}_m,$$

则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ **线性表示**, 或称 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 的**线性组合**.

例

(1) n 维零向量是任一 n 维向量组的线性组合.

(2) 任意 n 维向量是 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 的线性组合.

(3) $v \in V$ 是它的一组基的线性组合.

(4) 空间中两条不共线的向量的线性组合全体就是过二者的平面.

向量 β 能被向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 当且仅当存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_m\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有解, 其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

定理

向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示, 当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 有解.

线性表示的空间刻画

设向量组 S 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组. 记 V 为向量组 S 能线性表示的向量全体, 则

$$V = \{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

是一个线性空间, 称为 S **生成的空间**. 它是包含 S 中所有向量的最小的线性空间.

这样, $\boldsymbol{\beta}$ 能被 S 线性表示 $\iff \boldsymbol{\beta} \in V$.

定义

(1) 设有两个向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k\}$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k$ 均可以被 S 线性表示, 则称向量组 T 可以被向量组 S 线性表示.

(2) 若向量组 S 和 T 能相互线性表示, 则称 S,T **向量组等价**.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m), \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_k)$. T 能被 S 线性表示, 当且仅当存在 $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_k$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{\beta}_1,\quad \dots,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{\beta}_k,$$

即存在矩阵 $\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

定理

设 S,T 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的列向量组, 且分别生成空间 V,W.

(1) T 可以被 S 线性表示 $\iff W\subseteq V \iff \exists\boldsymbol{X}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

(2) S,T 向量组等价 $\iff W=V \iff \exists\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$.

命题

向量组的等价满足如下性质:

(1) 自反性: $S \sim S$;

(2) 对称性: $S \sim T \implies T \sim S$;

(3) 传递性: $S \sim T, T \sim R \implies S \sim R$.

若矩阵 $\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$ 列等价, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$, 于是二者的列向量组作为向量组等价. 但是反过来不成立. 这是因为列等价的矩阵一定是同型矩阵, 但等价的向量组并不要求向量数量相同. 不过, 同型矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 列向量组等价 $\iff \boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$. 我们稍后证明.

线性相关与线性无关

定义

对于 n 维向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$，若存在一组不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0},$$

则称该向量组线性相关. 否则称该向量组线性无关.

例

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 包含零向量的向量组总是线性相关的.

(2) $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关. 一般地, n 维基本向量组 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ 线性无关.

(3) $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关 $\iff$ $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

(4) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关 $\iff$ $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 对应分量成比例 (共线).

线性无关的等价刻画

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关当且仅当

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0,$$

即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解, 其中 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.

若 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta} \iff \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{0}$. 因此:

定理

(1) 设 V 是 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间, 则以下结论等价:

- $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关;
- $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 只有零解;
- $\exists \boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ 只有唯一解;
- $\forall \boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}$ 只有唯一解.

(2) 向量组 S 是线性空间 V 的一组基 $\iff$ S 线性无关且生成 V.

例：线性无关和线性相关

练习

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}k\\1\\1\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{A\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $k=$ <u>-1</u>.

练习

已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\}$ 线性无关，请问向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 是否线性无关？

答案

线性相关，因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-2\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{0}$.

例：判断线性无关

例

已知向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，证明向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1\}$ 线性无关.

证明

我们可以用定义来直接证明. 设

$$\lambda_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\lambda_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\lambda_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}.$$

那么

$$(\lambda_1+\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(\lambda_1+\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(\lambda_2+\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

由于 $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ 线性无关，因此

$$\lambda_1+\lambda_3=\lambda_1+\lambda_2=\lambda_2+\lambda_3=0,$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. 证毕. $\square$

我们来看另一种证法.

另证

我们有
$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A},$$
其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. 若 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 则
$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\implies\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$
由于 $|\boldsymbol{A}|=2$, $\boldsymbol{A}$ 可逆, 因此 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. □

例：判断线性无关

命题

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，$(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{C}$。$\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解。

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，$(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m)\boldsymbol{C}$。$\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $|\boldsymbol{C}|\neq 0$。

(3) n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $|\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq 0$。

例：判断线性无关

例

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,5,7)^{\mathrm{T}}$ 线性相关. 因为它们构成的 3 阶矩阵行列式为零.

练习

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,t)^{\mathrm{T}}$ 线性相关, 则 $t=$ ___5___.

(2) 若任一 3 维向量都可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a,3,2)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,1)^{\mathrm{T}}$ 线性表示, 则 $a\neq$ ___5___.

线性相关和线性无关的等价刻画

定理

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

证明

若该向量组线性相关, 则存在不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}.$$

设 $\lambda_i \neq 0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_i = -\dfrac{1}{\lambda_i}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由其它向量线性表示.

反之, 若 $\boldsymbol{\alpha}_i = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由其它向量线性表示. 则 $-\boldsymbol{\alpha}_i + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\lambda_j\boldsymbol{\alpha}_j = \mathbf{0}$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关. $\square$

线性相关和线性无关的等价刻画

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关 $\iff$ 其中任一向量不可以由其它向量线性表示.

注意, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关 $\not\Longrightarrow$ 其中任一向量可以由其它向量线性表示.

练习

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 m 个 n 维向量, 则下列结论正确的有 $\underline{\quad 1 \quad}$ 个.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则其中任一向量均可由其余向量线性表示

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关

(3) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 且存在不全为零的 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{m-1}$ 使得 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_{m-1}\boldsymbol{\alpha}_{m-1}=\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示

(4) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性相关

定理

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，且表达形式唯一.

证明

由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m, \boldsymbol{\beta}$ 线性相关，因此存在不全为零的数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, k$ 使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m + k\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

若 $k = 0$，则由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关可知 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0$. 这与 $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, k$ 不全为零矛盾. 因此 $k \neq 0$,

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{1}{k}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m).$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关可知线性组合表达方式唯一. □

线性相关和线性无关的性质

定理

设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m\}, T=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$.

(1) 若向量组 S 线性相关，则 T 也线性相关.

(2) 若向量组 T 线性无关，则 S 也线性无关.

即部分相关 $\Longrightarrow$ 整体相关，整体无关 $\Longrightarrow$ 部分无关.

例

n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s (3\leqslant s\leqslant n)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ (D).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中存在一个向量不能由其余向量线性表示 必要

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任两个向量都线性无关 必要

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中不含零向量 必要

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一个向量都不能由其余向量线性表示

练习

若向量组 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则(C).

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 一定能由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(B) $\boldsymbol{\beta}$ 一定不能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\delta}$ 一定能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

(D) $\boldsymbol{\delta}$ 一定不能由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

例

设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，但不能由向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}\}$ 线性表示. 记 $T=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}\}$，则(B). $\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m, \lambda_m\neq 0$

(A) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 S 线性表示，也不能由 T 线性表示

(B) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由 S 线性表示，但能由 T 线性表示

(C) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由 S 线性表示，也能由 T 线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_m$ 能由 S 线性表示，但不能由 T 线性表示

例

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，证明

(1) α_1 能由 α_2, α_3 线性表示；

(2) α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

证明

(1) 由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关可知 α_2, α_3 线性无关.但是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关，所以 α_1 能由 α_2, α_3 线性表示.

(2) 若 α_4 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，由于 α_1 能由 α_2, α_3 线性表示，于是 α_4 也能由 α_2, α_3 线性表示. 这与 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关矛盾. □

定理

设 $\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},\dots,a_{nj})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta}_j=(a_{1j},\dots,a_{nj},a_{n+1,j})^{\mathrm{T}}$.

(1) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关.

(2) 若向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关.

证明

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m), \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m)$, 则存在 m 维向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解. 而

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}, \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0,$$

因此 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解, $\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性无关. □

即高维相关 $\Longrightarrow$ 低维相关, 低维无关 $\Longrightarrow$ 高维无关.

例：线性相关和线性无关

练习

(1) 判断下列向量组的线性相关性：

(i) $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}},(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},(0,0,0,0)^{\mathrm{T}}$. 相关

(ii) $(a,b,1,0,0)^{\mathrm{T}},(c,d,0,6,0)^{\mathrm{T}},(a,c,0,5,6)^{\mathrm{T}}$. 无关

(iii) $(a,1,0,b,0)^{\mathrm{T}},(c,0,6,d,0)^{\mathrm{T}},(a,0,5,c,6)^{\mathrm{T}}$. 无关

(2) 若 $(1,0,0,2)^{\mathrm{T}},(0,1,5,0)^{\mathrm{T}},(2,1,t+2,4)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，则 $t=$ ___3___.

向量组大小与线性无关的关系

定理

设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 可由 $T=\{\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t\}$ 线性表示.

(1) 若 $s>t$, 则 S 线性相关.　　(2) 若 S 线性无关, 则 $s\leqslant t$.

即多的由少的表示, 多的一定线性相关.

证明

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s), \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\dots,\boldsymbol{\beta}_t)$. 则存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$. 由于 $\boldsymbol{P}$ 行数小于列数, 因此 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\boldsymbol{x}$. 从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, S 线性相关. □

推论

(1) $m>n$ 个 n 维向量一定线性相关.

(2) 任意两个等价的线性无关向量组所含向量的个数相同.

推论和总结

(1) 向量组线性相关 $\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.

(2) 若 S 线性无关, $S \cup \{\beta\}$ 线性相关, 则 β 可以由 S 唯一线性表示.

(3) 部分相关 $\Longrightarrow$ 整体相关, 整体无关 $\Longrightarrow$ 部分无关.

(4) 高维相关 $\Longrightarrow$ 低维相关, 低维无关 $\Longrightarrow$ 高维无关.

(5) 多的由少的表示, 多的一定线性相关.

定义

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是线性空间 V 的一组基, 则称 m 为 V 的**维数**, 记作 $\dim V$.

(2) 设向量组 S 生成空间 V. 称 V 的维数为该向量组的**秩(Rank)**, 记作 $\mathrm{R}(S)$.

由前面的结论可知, V 不同的基向量组的个数总是相同的, 即维数是唯一的.

设 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 生成 V, T 是 V 的一组基. 由于向量组等价 $\Longleftrightarrow$ 生成同一个空间, 因此 S,T 是等价向量组. 由 T 线性无关可知 $\mathrm{R}(S)\leqslant m$.

定理

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_m)$ 的列向量组为 S.

(1) S 线性无关 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{R}(S)=m$ $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解.

(2) S 线性相关 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{R}(S)<m$ $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解.

例: 方阵的列向量组

推论

设方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n)$ 的列向量组为 S.

(1) S 线性无关 $\iff \mathrm{R}(S) = m \iff \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解 $\iff |\boldsymbol{A}| \neq 0$.

(2) S 线性相关 $\iff \mathrm{R}(S) < m \iff \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解 $\iff |\boldsymbol{A}| = 0$.

练习

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 且其行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$. 下列说法正确的是(C).

(A) $\boldsymbol{A}$ 必有一列元素全为零

(B) $\boldsymbol{A}$ 必有两列元素对应成比例

(C) $\boldsymbol{A}$ 必有一个列向量可由其余列向量线性表示

(D) $\boldsymbol{A}$ 中任意列向量均可由其余列向量线性表示

定理

(1) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 则 $\mathrm{R}(S) \leqslant \mathrm{R}(T)$.

(2) 若线性空间 $V \subseteq W$, 则 $\dim V \leqslant \dim W$.

(3) 设向量组 S 可由向量组 T 线性表示, 且 $\mathrm{R}(S) = \mathrm{R}(T)$, 则 S, T 向量组等价.

(4) 若线性空间 $V \subseteq W$ 且 $\dim V = \dim W$, 则 $V = W$.

我们来证明(4). 设 S, T 是 V, W 的一组基. 那么 S, T 大小相同, 且 S 可由 T 线性表示. 设 S, T 分别是 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的列向量组, 那么存在方阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$. 若 $\boldsymbol{P}$ 不可逆, 存在非零向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, S 线性相关, 矛盾!

定理

设 V 是 n 维空间, S 是由其中向量构成向量组. 那么 S 是一组基当且仅当如下任意两条满足 (剩下一条自动成立):

(1) S 大小是 n;　　(2) S 生成 V;　　(3) S 线性无关.

例：向量组的秩

例

若

$$S_1=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\},\quad S_2=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\},\quad S_3=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5\}$$

满足 $\mathrm{R}(S_1)=\mathrm{R}(S_2)=3,\mathrm{R}(S_3)=4$. 证明向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5-\boldsymbol{\alpha}_4\}$ 线性无关.

证明

由 $\mathrm{R}(S_1)=3$ 可知 S_1 线性无关. 由 $\mathrm{R}(S_2)=3$ 可知 S_2 线性相关. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 S_1 线性表示. 于是 S_3 可由 S 线性表示. 显然 S 可由 S_3 线性表示, 因此二者等价, $\mathrm{R}(S)=\mathrm{R}(S_3)=4$. □

练习

判断题: 设 S 和 T 为两个 n 维向量组, 且 $\mathrm{R}(S)=\mathrm{R}(T)$, 则 S 和 T 等价. ✗

如何从一组能生成空间 V 的向量找到 V 的一组基? 我们只需要取极大线性无关组.

定义

设 S 为一个向量组. 若 S 的部分组 $S_0 = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 满足

(1) S_0 线性无关;

(2) S_0 添加 S 中的若干向量得到的向量组均线性相关.

则称 S_0 是 S 的一个**极大线性无关组**.

根据上一节相关结论可知, S 中所有向量均可由 S_0 线性表示. 换言之, S_0 和 S 等价, 它们生成相同的子空间 V, $m = \mathrm{R}(S)$, S_0 是 V 的一组基.

极大线性无关组的定义

定理

S_0 是 S 的极大线性无关组当且仅当

(1) S_0 线性无关;

(2) S 中任意 $m+1$ 个向量线性相关.

证明

若 S_0 是 S 的极大线性无关组, 则 S 中任意 $m+1$ 个向量可由 S_0 线性表示. 从而线性相关.

反之, 若 S 中任意 $m+1$ 个向量线性相关, 则 S 中任意 $s>m$ 个向量线性相关. 于是 S_0 添加 S 中的若干向量得到的向量组均线性相关. □

极大线性无关组的性质

(1) 若 $\mathrm{R}(S)=r$, 则 S 中任意 r 个线性无关的向量构成 S 的一个极大线性无关组.

(2) 只含有零向量的向量组没有极大线性无关组 (空集), 它的秩为 0 (空集生成 0 维空间 $\{\mathbf{0}\}$).

(3) 极大线性无关组一般不是唯一的. 例如

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=(0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=(1,1)^{\mathrm{T}}.$$

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是一个极大线性无关组, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是一个极大线性无关组.

(4) 向量组和它的一个极大线性无关组是等价的, 于是同一向量组的任意两个极大线性无关组等价.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_r),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_r)$ 的列向量组是等价的线性无关组. 我们之前证明过若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 则 $\boldsymbol{P}$ 可逆.

一般地, 若 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m)$ 的列向量组是等价的向量组, 秩为 r. 通过适当的列变换, 可以让 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 列是极大无关组, 后面全是零向量. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_r',\boldsymbol{O})$. 对 $\boldsymbol{B}$ 作类似操作, 则 $\boldsymbol{A}'\overset{c}{\sim}\boldsymbol{B}'$, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}\in M_r$ 使得 $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{P}$. 于是

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & \\ & \boldsymbol{E}\end{pmatrix}\overset{c}{\sim}\boldsymbol{A}.$$

因此**同型矩阵列 (行) 向量组等价 $\Longleftrightarrow$ 列 (行) 等价**.

例：极大线性无关组

例

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&1&-1&4\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的行向量组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}=(1,1,3,1),\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}=(0,1,-1,4),\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}=(0,0,0,5),\ \boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}=(0,0,0,0).$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}$ 的第 1, 2, 4 个分量形成可逆矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&4\\0&0&5\end{pmatrix}$，因此它们线性无关.

它们构成一个极大线性无关组，$\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩是 3. 类似可知，$\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩也是 3.

实际上，任意矩阵的行向量组的秩等于列向量组的秩. 为了说明这一点，我们考虑矩阵的秩.

第二节　矩阵的秩

- 矩阵秩的定义
- 矩阵秩的性质
- 极大线性无关组的计算方法

我们知道, 每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准型 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的秩, 记作 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

称 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组的秩为行秩, 列向量组的秩为列秩.

行秩等于列秩等于秩

$\boldsymbol{A}$ 的行秩和列秩均等于秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

由此可知矩阵的秩是唯一确定的.

对于行阶梯形矩阵, 再实施初等变换使其变为行最简形矩阵或标准型矩阵, 并不会改变它的非零行的个数. 换言之, 行阶梯形矩阵的秩就是非零行的个数.

设 $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换变为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则二者秩相等, 二者的行向量组等价, 从而行秩也相等. 对于 $\boldsymbol{B}$, 它的行秩就是非零行的个数, 也就是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的行秩等于秩. 不难知道 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列秩 $= \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的行秩 $= \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

行阶梯形矩阵的秩

例

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 1\end{pmatrix}$ 的秩.

解

$\boldsymbol{A}$ 是行阶梯形矩阵, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$.

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow[r_3-4r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -11\\ 0 & -1 & -11\end{pmatrix}\xrightarrow[-r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 11\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Longrightarrow \mathrm{R}(\boldsymbol{B})=2.$$

例

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ -1 & a-1 & 1-a\\ 1 & 1 & a^2\\ 1 & 1 & 2a+1\end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$\boldsymbol{A}\underset{r_4-r_1}{\overset{r_2+r_1}{\underset{\widetilde{\quad}}{r_3-r_1}}}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a^2-a\\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}\underset{-\frac{1}{2}r_3}{\overset{r_3-ar_4}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此 $a\neq 0$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$; $a=0$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$.

例：计算矩阵的秩

注意处理带未知数的矩阵时，不宜实施 $\dfrac{1}{a+1}r_2, (a-2)r_3$ 等类似操作，因为其分母或系数可能为零.

练习

求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 & 4 \\ 3 & 2 & m & 7 \end{pmatrix}$ 的秩.

答案

$m \neq -8$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 3$；$m = -8$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 2$.

例：计算矩阵的秩

例

求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$\boldsymbol{A} \xrightarrow[\substack{r_3 - r_1 \\ r_4 - a r_1}]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 - r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 + r_3]{r_4 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -(a+3)(a-1) \end{pmatrix}$$

因此 $a \neq 1, -3$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 4$; $a = -3$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 3$; $a = 1$ 时, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 1$.

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶子式**. 例如 n 阶方阵的余子式是 $n-1$ 阶子式.

定理

设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$, 则存在非零的 r 阶子式, 但所有的 $r+1$ 阶子式都是零.

根据行列式的拉普拉斯展开, 若 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式均为零, 则 $k+1$ 阶子式也都是零. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $s>r$ 阶子式都是零.

推论

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\geqslant r \iff \boldsymbol{A}$ 存在非零 r 阶子式.

(2) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})\leqslant r \iff \boldsymbol{A}$ 所有 $r+1$ 阶子式均为零.

(3) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r \implies \boldsymbol{A}$ 存在 $1,2,\ldots,r$ 阶非零子式.

证明

设 $B = PA$, 其中 P 是初等矩阵.

(1) 若 $P = E(i,j)$, 则 B 的 k 阶子式总等于 A 的某个 k 阶子式, 最多相差 -1.

(2) 若 $P = E(i(a))$, 则 B 的 k 阶子式总等于 A 的某个 k 阶子式或 a 倍.

(3) 若 $P = E(i,j(a))$, 则 B 的 k 阶子式总等于 A 的某个 k 阶子式.

因此若 A 的 k 阶子式都是零, 则 B 的 k 阶子式也都是零.

由于 P^{-1} 也是初等矩阵, 因此反过来也成立. 对于 $B = AP$ 情形同理. 因此, 若 $A \sim B$, 则 A 的 k 阶子式都是零 $\Longleftrightarrow$ B 的 k 阶子式都是零.

对于标准型矩阵, 该定理显然成立. 因此该定理对任意矩阵都成立. □

命题

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$，则 $0 \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant \min(m, n)$.

定义

(1) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = m$，称 $\boldsymbol{A}$ **行满秩**;

(2) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$，称 $\boldsymbol{A}$ **列满秩**;

(3) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = m = n$，称 $\boldsymbol{A}$ **满秩**.

矩阵秩的性质

命题

(1) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=0 \iff \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$;

(3) $\mathrm{R}(k\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}), k\neq 0$;

(4) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B} \iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$;

(5) $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big)$;

(6) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times \ell}=\boldsymbol{O}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$;

(7) $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.
特别地, $\max\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big)\leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

命题

(5) $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}), \mathrm{R}(\boldsymbol{B}))$.

证明

$\boldsymbol{AB}$ 的列向量为 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的线性组合，从而 $\boldsymbol{AB}$ 的列秩 $\leqslant$ $\boldsymbol{A}$ 的列秩，即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. 于是

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

□

若 $\boldsymbol{B}$ 行满秩, 则 $\boldsymbol{B}$ 有 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$ 阶子式非零, 它对应的方阵右乘 $\boldsymbol{A}$ 得到的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 列向量组等价, 从而 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$; 若 $\boldsymbol{B}$ 列满秩, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{BA}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$;

命题

(6) 若 $A_{m\times n}B_{n\times \ell}=O$, 则 $\mathrm{R}(A)+\mathrm{R}(B)\leqslant n$.

证明

我们将会 §2.4 证明空间

$$V=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=0\}$$

的维数是 $n-\mathrm{R}(A)$. 设

$$W=\{By \mid y\in\mathbb{R}^\ell\}$$

是 B 列向量生成的空间, 则 W 的维数是 $\mathrm{R}(B)$. 由 $AB=O$ 可知 $W\subseteq V$, 因此 $\mathrm{R}(B)\leqslant n-\mathrm{R}(A)$. □

命题

(7) $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

特别地, $\max(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$.

证明

设 S, T 分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 列向量组的极大线性无关组, 则 S, T 的大小分别是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. 由于 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $S\cup T$ 向量组等价, 因此

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \mathrm{R}(S\cup T) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B}).$$

由于 $a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}$ 的列向量组可以由 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 的列向量组线性表示, 因此

$$\mathrm{R}(a\boldsymbol{A}+b\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}).$$

□

矩阵秩的性质

另证

由于添加零行或零列不改变秩，因此不妨设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是方阵. 由于

$$a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\begin{pmatrix} a\boldsymbol{E} & \\ & b\boldsymbol{E} \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E})\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

因此 $\mathrm{R}(a\boldsymbol{A} + b\boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) + \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$. □

矩阵秩性质的应用

练习

(1) 设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=$ __2__.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})<\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$, 则 $|\boldsymbol{A}|=$ __0__.

(3) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & t \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{X})=2$, 则 $t=$ __2__.

(4) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} t & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 且存在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $t=$ __4__.

例：矩阵秩性质的应用

例

证明：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

证明

由于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，因此

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n.$$

由于 $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$，因此

$$n=\mathrm{R}(\boldsymbol{E})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).$$

故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$. □

例：矩阵秩性质的应用

伴随矩阵的秩

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，则

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n; \\ 1, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1; \\ 0, & \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2. \end{cases}$$

证明

(1) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n$, $\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = n$.

(2) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ 可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1$. 由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$, $\boldsymbol{A}$ 存在非零的 $n-1$ 子式，从而 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$. 故 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) = 1$.

(3) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 子式均为零，从而 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$. □

例：矩阵秩性质的应用

练习

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(0,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=$ <u>1</u>.

(2) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ 且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*)=1$，则(B).

(A) $a\neq b, a+2b\neq 0$　　(B) $a\neq b, a+2b=0$

(C) $a=b, a\neq 0$　　(D) $a=b=0$

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$ 与 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$(B).

(A) 必有一个等于 0　　(B) 都小于 n

(C) 都等于 n　　(D) 一个小于 n，一个等于 n

例：矩阵秩性质的应用

练习

(4) 设 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵，$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$，则(A).

(A) $t\neq 6$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=1$ (B) $t\neq 6$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=2$

(C) $t=6$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=1$ (D) $t=6$ 时，$\mathrm{R}(\boldsymbol{P})=2$

(5) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，则(A).

(A) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$ (B) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$

(C) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\max\big(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\big)$ (D) $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

答案

存在 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O},\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{O}$，D 错误. 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，C 错误. $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ 行满秩，选 A.

练习

(6) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$, 则(A).

(A) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　(B) 当 $m > n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　(D) 当 $m < n$ 时, 必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(7) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{n\times m}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}, n < m$. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B}) =$ __ n __.

(8) 若 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{pmatrix}$ 等价, 则(B).

(A) $a = -1$　(B) $a \neq -1$　(C) $a \neq 1$　(D) $a = 1$

(9) 设四阶方阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\alpha}_2 + 5\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{0}$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^*) =$ __ 0 __.

定理

若 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$, 则

(1) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价;

(2) $\boldsymbol{A}$ 任意 k 列和 $\boldsymbol{B}$ 对应的 k 列具有相同的线性相关性.

即初等行变换保持行向量组的等价性, 列向量组的线性组合关系.

证明

(1)我们已经证明过. 设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵. 若 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 则 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 反之亦然, 即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0} \iff \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m), \qquad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_m).$$

则对于 $\boldsymbol{x}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0} \iff \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\lambda_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}.$$

□

极大线性无关组和秩的计算方法

(1) 将向量组以列向量形式组成矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_m)$.

(2) 通过初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 变为行阶梯形矩阵.

- 行阶梯形矩阵非零行的行数就是秩 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$;
- 行阶梯形矩阵每个非零行的首个非零元对应的 $\boldsymbol{A}$ 的列向量, 就是极大线性无关组.

(3) 继续化简为行最简形矩阵, 则可将其余向量表示为极大线性无关组的线性组合.

典型例题：求极大线性无关组

例

求下述向量组的秩和一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示：

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

解

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5) = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 3 & 5 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ -11 & 8 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix}$$

续解

$$\underset{r_1 \leftrightarrow r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ -7 & 1 & 3 & 5 & -4 \\ -11 & 8 & 4 & 0 & -11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 36 & -4 & -44 & 3 \\ 0 & 63 & -7 & -77 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -4/9 & -8/9 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1/9 & -11/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 3, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_5$ 是一个极大线性无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = -\frac{4}{9}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{1}{9}\boldsymbol{\alpha}_2, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = -\frac{8}{9}\boldsymbol{\alpha}_1 - \frac{11}{9}\boldsymbol{\alpha}_2.$$

典型例题：求极大线性无关组

练习

求下述矩阵列向量的一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

答案

设 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大线性无关组，且

$$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_5=4\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_4.$$

典型例题：求极大线性无关组

例

假设下述向量组线性相关

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1,2),\ \boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,2,3),\ \boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,3,2,3),\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,3,-1,1,a).$$

求 a，并求它的秩和一个极大无关组，并把其余向量用这个极大无关组线性表示.

解

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&5\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&a-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

因此 $a=4$，秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个极大线性无关组，且 $\boldsymbol{\alpha}_4=5\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$.

例：线性相关与线性无关

练习

(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$, 则二者的(A).

(A) 行向量组等价, 列向量组同相关性

(B) 行向量组同相关性, 列向量组等价

(C) 行向量组未必等价, 列向量组同相关性

(D) 行向量组等价, 列向量组未必同相关性

(2) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times k}, \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$, 则(A).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关

练习

多选题：设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 $n>1$ 阶方阵，以下说法正确的是(ABCD).

(A) 若 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的列向量组线性相关

(B) 若 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的列向量组线性无关

(C) 若 $\boldsymbol{A}^*$ 的某两列向量线性相关，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关

(D) 若 $\boldsymbol{A}^*$ 的某两列向量线性无关，则 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关

第三节　标准正交基

- 向量的内积
- 正交向量组与格拉姆-施密特正交化

引例：更好的基

本节考虑的向量都是实向量.

设向量组 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s\}$ 的秩为 r, 则它们生成的线性空间 V 的维数就是 r. S 的极大无关组 S_0 的大小就是 r, 且 S_0 是 V 的一组基.

有时候我们想更进一步, 就像 $\mathbb{R}^n$ 的基本向量组 $\boldsymbol{e}_1,\dots,\boldsymbol{e}_n$ 一样, 我们希望找到 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 使得

(1) $\boldsymbol{\alpha}_i$ 长度都是 1;

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 两两垂直.

定义

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, 定义**内积**

$$[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n\in\mathbb{R}.$$

内积是数量积的推广, 它满足

(1) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]$;

(2) $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]\geqslant 0$. 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时, $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]=0$;

(3) $[\lambda\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\beta}]=\lambda[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]$;

(4) $[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}]+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$.

这说明内积是一个对称正定双线性型.

定义

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 定义 $\boldsymbol{x}$ 的**长度**或**模**为

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}.$$

当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时, 称 $\boldsymbol{x}$ 为**单位向量**. 对于非零向量 $\boldsymbol{x}$, $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$ 为 $\boldsymbol{x}$ 的**单位化向量**.

我们有 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\iff\|\boldsymbol{x}\|=0\iff[\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}]=0.$

定义

若 $[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=0$, 称 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ **正交**(垂直).

设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. 那么 X 的二次多项式

$$\|X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=[X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}]X^2+2[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]X+[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}]\geqslant 0$$

恒成立. 因此其判别式

$$\Delta=4([\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]^2-\|\boldsymbol{\alpha}\|^2\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|^2)\leqslant 0,$$

于是我们得到柯西-施瓦兹不等式

$$\pm[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|.$$

显然 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时它也成立.

定义

设非零向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\dots,a_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(b_1,\dots,b_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, 定义 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的夹角为

$$\theta=\arccos\frac{[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]}{\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|}\in[0,\pi].$$

注意正交比夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 略微广泛点, 因为零向量与任意向量正交.

若 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 正交, 则

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+\|\boldsymbol{\beta}\|^2+2[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}]=\|\boldsymbol{\alpha}\|^2+\|\boldsymbol{\beta}\|^2,$$

此即勾股定理.

例：正交向量

定义

(1) 若向量组 S 中的向量两两正交且非零，则称 S 为**正交向量组**.

(2) 若向量组 S 中的向量两两正交且均为单位向量，则称 S 为**标准正交向量组**.

例

设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-2,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^3$. 求向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是正交向量组.

解

显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交. 设 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]&=x_1+x_2+x_3=0,\\ [\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]&=x_1-2x_2+x_3=0.\end{aligned}$$

解得 $(x_1,x_2,x_3)=(k,0,-k)$. 故可取 $\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$.

定理

正交向量组必线性无关.

证明

设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是正交向量组, $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r = \mathbf{0}$. 对任意 $1 \leqslant i \leqslant r$,

$$\begin{aligned} 0 = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\alpha}_i] &= [\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_i] \\ &= \lambda_1[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_i] + \cdots + \lambda_r[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\alpha}_i] = \lambda_i[\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i]. \end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 非零, $[\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_i] \neq 0, \lambda_i = 0$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. □

如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是线性空间 V 的一组标准正交基, 则对任意 $\boldsymbol{v} \in V$, 有

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{r} [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\alpha}_i]\boldsymbol{\alpha}_i.$$

定义

若实方阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}A = E$, 则称 A 为**正交阵**.

正交阵满足如下性质:

(1) $A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 是正交阵 $\iff$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 是标准正交向量组.

(2) A 是正交阵 $\iff$ $A^{\mathrm{T}} = A^{-1}$.

(3) A 是正交阵 $\implies$ $|A| = \pm 1$ 且 $A^{\mathrm{T}}, A^{-1}, A^*$ 都是正交阵.

定义

若 P 为正交阵, 称线性变换 $y = Px$ 为**正交变换**.

例如, $\mathbb{R}^2$ 上的正交变换就是绕原点的旋转、反射, 以及它们的复合. 由于

$$[Px, Py] = x^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}Py = x^{\mathrm{T}}y = [x, y],$$

因此**正交变换保持向量的长度和夹角**.

正交化

现在我们来看如何从空间 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 得到一组标准正交基. 令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda\boldsymbol{\beta}_1$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 正交, 则

$$0=[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1]=[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]+\lambda[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1],$$

因此 $\lambda=-\dfrac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}$.

令 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1+\lambda_2\boldsymbol{\beta}_2$, 类似地, 若 $\boldsymbol{\beta}_3$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$ 均正交, 则

$$\lambda_1=-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]},\qquad \lambda_2=-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]},$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2.$$

依次递推下去可得一组正交基.

格拉姆-施密特正交单位化方法

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2 \\
&\vdots \\
\boldsymbol{\beta}_r &= \boldsymbol{\alpha}_r - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1 - \cdots - \frac{[\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}{[\boldsymbol{\beta}_{r-1}, \boldsymbol{\beta}_{r-1}]}\boldsymbol{\beta}_{r-1}
\end{aligned}
$$

则 $\boldsymbol{e}_1 = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}, \ldots, \boldsymbol{e}_r = \dfrac{\boldsymbol{\beta}_r}{\|\boldsymbol{\beta}_r\|}$ 就是 V 的一组标准正交基.

典型例题：格拉姆-施密特正交化

例

将 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$ 正交单位化.

解

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{2}(1,1,0)^{\mathrm{T}}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{[\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2]}{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2]}\boldsymbol{\beta}_2=(1,1,2)^{\mathrm{T}}-(1,1,0)^{\mathrm{T}}-\frac{2}{3/2}(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1)^{\mathrm{T}}=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{\beta}_3}{\|\boldsymbol{\beta}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

第四节　线性方程组

- 齐次线性方程组解的存在性
- 齐次线性方程组解的结构
- 非齐次线性方程组
- 向量组的线性表示

线性方程组是指

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

它的系数形成了一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 称为系数矩阵.

线性方程组等价于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

其中

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

齐次线性方程组非零解的判定

当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 为零向量时，称该线性方程组为齐次的；否则称为非齐次的．齐次线性方程组总有解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$．$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有非零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$．

定理

(1) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有 (无穷多) 非零解 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<n$;

(2) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$.

推论

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵.

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 有 (无穷多) 非零解 $\iff$ $|\boldsymbol{A}|=0$;

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 只有零解 $\iff$ $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

推论

若方程个数小于未知元个数，则齐次线性方程组有非零解.

例：齐次线性方程组非零解的判定

例

假设

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，求 a.

解

此时系数矩阵行列式为零：

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & a & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7a + 21, \quad a = -3.$$

例：齐次线性方程组非零解的判定

例

若下述方程有非零解，求 a.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \\ -x_1 + (a-1)x_2 + (1-a)x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a+1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩小于 3，因此 $a = 0$.

定义

称空间 $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ 的一组基为该齐次线性方程组的**基础解系**.

齐次线性方程组的解

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = r$. 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系包含 $n-r$ 个向量.

证明

通过交换未知元的位置 (相当于交换 $\boldsymbol{A}$ 列的位置), 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 可化为行最简形

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ \hdashline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

续证

方程化为 $(\boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = -\boldsymbol{B} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{C} := \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix}$ 的 $n-r$ 个列向量生成了整个解空间. 由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{C}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{E}_{n-r}) = n-r$, $\boldsymbol{C}$ 列满秩, 因此它的列向量就是一组基础解系. □

推论

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 任意 $n-r$ 个线性无关的解都是一组基础解系.

齐次线性方程组的解法

(1) 将系数矩阵通过初等行变换化为行最简形.

(2) 将矩阵重新写成方程形式 $x_i + \cdots = 0$.

(3) 移项, 使得等式左侧只有阶梯拐角列 i 对应的 $x_i = \cdots$.

(4) 添加 $n-r$ 项 $x_j = x_j$, 使得等式左边凑成 $\boldsymbol{x}$.

(5) 等式右侧是非拐角列 j 对应的 x_j 的组合, 其系数形成的 $n-r$ 个向量就是基础解系.

例

解方程 $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3+x_4=0 \\ 2x_1+4x_2-2x_3-x_4=0 \\ 3x_1+6x_2+2x_3=0 \end{cases}.$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2-1/5x_4=0 \\ x_3+3/10x_4=0 \end{cases}$$

典型例题：求基础解系

续解

将 x_1, x_3 保留在等式左侧，其它项移动到等式右边，并添加 $x_2 = x_2, x_4 = x_4$，得到

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 1/5x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -3/10x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ -3/10 \\ 1 \end{pmatrix},$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ -3/10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{为任意常数.}$$

典型例题：求基础解系

练习

解方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\2&4&3&1&1\\-1&-2&1&3&-3\\0&0&2&5&-2\end{pmatrix}$.

答案

$$\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&0&2\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2-2x_5\\x_2=x_2\\x_3=x_5\\x_4=x_4\\x_5=x_5\end{cases}\Longrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

例：基础解系

例

设 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}, \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-3$, ξ_1,ξ_2,ξ_3 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的三个线性无关的解．则(B)是该方程的一组基础解系．

(A) $\xi_1,-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$

(B) $\xi_1,\xi_1+\xi_2,\xi_1+\xi_2+\xi_3$

(C) ξ_1,ξ_2

(D) $\xi_1,\xi_1-\xi_2-\xi_3,\xi_1+\xi_2+\xi_3$

练习

设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系，则(D)也是该方程的一组基础解系．

(A) 与 ξ_1,ξ_2,ξ_3 等价的一组向量

(B) 与 ξ_1,ξ_2,ξ_3 同秩的一组向量

(C) $\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_3,\xi_3-\xi_1$

(D) $\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$

例：基础解系的应用

例

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$ 且每行元素之和为 0. 则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解为 $\underline{\quad k(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}, k \text{ 为任意常数} \quad}$.

例

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$. 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解为 $\underline{\quad k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}, k_1,\ldots,k_{n-1} \text{ 为任意常数} \quad}$.

练习

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = n-1$, 代数余子式 $A_{11} \neq 0$. 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解为 $\underline{\quad k(A_{11},\ldots,A_{1n})^{\mathrm{T}}, k \text{ 为任意常数} \quad}$.

例

设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s}=\boldsymbol{O}$，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证明

由于 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$ 不超过该方程解空间的维数，即 $n-\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$. □

例

设 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，证明 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

证明

若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$，则 $0=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=[\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Ax}]$. 由内积的正定性可知 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$. 所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}\iff\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$. 二者解空间维数相等. 由于二者列数相同，因此二者秩相同. □

例：基础解系

由此可知

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),$$

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) = \cdots$$

由于

$$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}) \geqslant \mathrm{R}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}),$$

因此这些矩阵的秩都相等. 类似地, 任意多个 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 交错相乘得到的矩阵秩也都等于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

注意, 对于复矩阵这并不成立, 例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = 0.$$

此时有 $\mathrm{R}\left(\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$, 其中 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 表示所有元素取共轭.

例：基础解系

例

若 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $k_1(1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组是(D).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　(C) $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$

练习

若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 且存在 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则(A).

(A) $a=1, |\boldsymbol{B}|=0$　(B) $a=-2, |\boldsymbol{B}|=0$

(C) $a=1, |\boldsymbol{B}|\neq 0$　(D) $a=-2, |\boldsymbol{B}|\neq 0$

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$. 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 若方程有解, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的列向量组等价. 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. 我们称 $m \times (n+1)$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 为**增广矩阵**.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $V = W$, $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的极大无关组. 从而 $\boldsymbol{b}$ 是 S 的线性组合, 也是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合.

定理

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\iff \mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

推论

若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = m$, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 总有解.

非齐次线性方程组解的结构

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解. 设 $\xi_1,\ldots,\xi_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

$k_1,\ldots,k_{n-r}$ 为任意常数.

线性方程组解的判定准则

(1) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解;

(2) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解;

(3) 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

推论

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\iff |\boldsymbol{A}|\neq 0$.

若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解或有无穷多解.

求解非齐次线性方程组的步骤

非齐次线性方程组的解法

(1) 写：写出方程组对应的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$;

(2) 变：通过初等行变换将其化为行最简形;

(3) 判：通过行最简形判定方程是否有解;

(4) 解：若系数矩阵部分零行对应的常数项均为零，则方程有解.

(5) 类似于齐次情形，将矩阵重新写成方程形式、移项、添恒等式，使得等式左边凑成 $\boldsymbol{x}$.

(6) 等式右侧的常数部分是特解，其余是非拐角列 j 对应的 x_j 的组合，其系数形成的 $n-r$ 个向量就是基础解系.

典型例题：解非齐次线性方程组

例

解方程 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

解

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & -1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

于是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 2 < \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$，无解.

典型例题：解非齐次线性方程组

例

解方程 $\begin{cases} x_1 - x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 = \ \ 0 \\ x_1 - x_2 + \ \ x_3 - 3x_4 = \ \ 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$

解

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

于是 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 2 = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$，有解.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + 1/2 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 + 1/2 \\ x_4 = x_4 \end{cases} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

例

已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}.$$

问 a,b 为何值时，

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示；

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不唯一线性表示.

解

即问 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解的情况，其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right)$$

于是可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，故

(1) $b\neq 2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) $a\neq 1, b=2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示;

(3) $a=1, b=2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不唯一线性表示.

例

设 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}$，则（ D ）.

(A) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

练习

设 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}, \mathrm{R}(\boldsymbol{A})=m<n$，则（ C ）.

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量线性无关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于 0

(C) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有无穷多个解

(D) $\boldsymbol{A}\overset{r}{\sim}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{O})$

例

a 为何值时，以下方程 (1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+a)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1+a)x_3=a\end{cases}$$

和之前求带参数矩阵的秩类似，此处不宜实施常数不确定是否非零的第二类初等变换 $\dfrac{1}{a+1}r_2, (a-2)r_3$ 等.

解

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c}1+a & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+a & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+a & a\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1+a & 1 & 3\\ 0 & -a & a & a-3\\ 0 & a & a^2+2a & a^2+a\end{array}\right)$$

续解

$$\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1+a & 1 & 3 \\ 0 & a & -a & 3-a \\ 0 & 0 & a^2+3a & a^2+2a-3 \end{array}\right).$$

(1) 若 $a \neq 0, -3$, 则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$, 方程有唯一解.

(2) 若 $a = 0$, 则 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 1 < \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$, 方程无解.

典型例题: 解非齐次线性方程组

续解

(3) 若 $a=-3$, 则 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$, 方程有无穷多解. 特解为 $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, 基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

k 为任意常数.

由于系数矩阵为 3 阶方阵, 也可以先通过 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 得到唯一解情形.

典型例题：解非齐次线性方程组

练习

a,b 为何值时，以下方程

(1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+2x_4=1 \\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3 \\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5 \end{cases}$$

答案

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right).$$

(1) $a \neq -1$ 时有唯一解；

(2) $a = -1, b \neq 0$ 时无解；

(3) $a = -1, b = 0$ 时有无穷多解，通解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例

设四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}.$$

求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解

由于 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只包含一个向量. 根据解的性质，

$$2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，因此这是它的一个基础解系. 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1+k(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}+k(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}.$$

例：线性方程组解的性质

例

已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解

由题设可知 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只包含一个向量. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 可知 $(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，因此这是它的一个基础解系. 注意到 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，故通解为

$$\boldsymbol{x}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

例：线性方程组解的性质

例

已知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的通解为(B)，k_1, k_2 为任意常数.

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$

(B) $2\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2 + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2)$

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2)$

(D) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2}{2} + k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2)$

练习

已知 $\boldsymbol{\eta}_1 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2 = (-3,2,2)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \end{cases}$ 的两个解向量，则该方程组的通解为 $\underline{\quad (0,1,0)^{\mathrm{T}} + k(-3,1,2)^{\mathrm{T}} \quad}$.

若 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示, 则 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的极大无关组. 从而 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 S 的线性组合, 也是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合.

定理

(1) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示 $\iff$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 有解 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

(2) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价 $\iff$ $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

例

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 等价，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

证明

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & - & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

因此 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = \mathrm{R}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = 2.$ □

线性方程组的应用：最小二乘法

在物理实验中，经常会出现实验数据与预期不符的情况. 例如变量 y 应当为变量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合，即存在 n 维向量 β 使得 $y=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\beta$. 但从实验数据解方程却是无解. 因此我们需要寻找参数 β 使得 $y=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\beta$ 尽可能接近实验数据.

比较常见的是最小二乘法：即寻找参数 β 使得

$$\sum_{i=1}^{k}|y_i-\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\beta|^2=\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\beta\|^2$$

尽可能小，其中 $(\boldsymbol{x}_i,y_i)$ 是实验数据，$\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_k)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}$ 是由行向量 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}$ 构成的 $k\times n$ 矩阵. 注意所有向量 $\boldsymbol{A}\beta$ 形成一个向量空间 V，也就是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量生成的空间. $\boldsymbol{y}$ 距离这个空间的距离 $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\beta\|$ 达到最小时，$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\beta$ 应当和这个空间正交. 于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\beta)=\boldsymbol{0}$，即 β 是方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\beta=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

的解.