线性代数

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第二章　矩阵及其运算

第一节　矩阵的线性运算和乘法

- 矩阵和线性变换
- 矩阵的线性运算
- 矩阵的乘法
- 矩阵的幂

我们已经在上一章知道了什么是矩阵和方阵. 为了研究一般的线性方程组的解, 我们需要考虑一般的矩阵. 分别用记号

- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 表示 m 行 n 列的矩阵全体;
- $M_n(\mathbb{R})$ 表示 n 阶方阵全体.

这里我们没有特别强调矩阵元素的取值范围.

- 如果矩阵元素都是实数, 则称其为实矩阵、实方阵，对应集合记作 $M_{m\times n}(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{R})$.
- 如果矩阵元素都是复数, 则称其为复矩阵、复方阵，对应集合记作 $M_{m\times n}(\mathbb{C}), M_n(\mathbb{C})$.

特殊矩阵

元素全为零的矩阵为零矩阵 $\boldsymbol{O} \in M_{m\times n}$. 方阵中

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n$$

分别为上三角阵, 下三角阵和对角阵. 为书写方便, 对角阵也可记作

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

$$\boldsymbol{E}_n = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1) \in M_n$$

为单位阵.

我们在第一章中说过, 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{cases}$$

的系数矩阵是一个 $m \times n$ 矩阵. 如果我们把 $x_1, \ldots, x_n$ 看作自变量, $y_1, \ldots, y_m$ 看作因变量, 那么上述关系就给出了一个映射.

为了描述这个映射，我们引入向量的概念. 将只有一行的矩阵

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_{1\times n}$$

称为 n 维行矩阵或行向量. 只有一列的矩阵

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}$$

称为 n 维列矩阵或列向量. 为了书写方便，可以把列向量写成

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}.$$

当我们不特别指明时，向量指的就是列向量.

令 $\mathbb{R}^n$ 表示所有 n 维列向量形成的集合. 例如 $\mathbb{R}^2$ 就是平面直角坐标系里的点, 而 $\mathbb{R}^3$ 则表示空间中的点.

类似于二维和三维向量的情形, 我们可以在 $\mathbb{R}^n$ 上定义加法和数乘:

(1) $(a_1,\dots,a_n)^{\mathrm{T}}+(b_1,\dots,b_n)^{\mathrm{T}}=(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)^{\mathrm{T}}$;

(2) $\lambda(a_1,\dots,a_n)^{\mathrm{T}}=(\lambda a_1,\dots,\lambda a_n)^{\mathrm{T}}$.

将 $\mathbb{R}$ 均换成 $\mathbb{C}$, 则可以得到 $\mathbb{C}^n$ 上的加法和数乘. $\mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{C}^n$ 上的加法和数乘满足:

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) $\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}$;

(3) 零向量 $\mathbf{0}=(0,\dots,0)$ 满足 $\mathbf{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(4) 对任意 $\boldsymbol{\alpha}$, 存在 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. 称 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量;

(5) $1\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(6) $(k\ell)\boldsymbol{\alpha}=k(\ell)\boldsymbol{\alpha}$;

(7) $(k+\ell)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+\ell\boldsymbol{\alpha}$;

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

定义

如果映射 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 满足

(1) $f(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha})+f(\boldsymbol{\beta}), \forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^n$;

(2) $f(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda f(\boldsymbol{\alpha}), \forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^n$,

称 f 是一个线性变换.

对于线性变换 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, 记

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix},\quad f\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix},\cdots,f\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}.$$

线性变换和矩阵

根据线性变换的性质,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

它的系数形成了一个矩阵

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} = \left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

线性变换 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 全体和 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 之间是一一对应的.

将 $\mathbb{R}$ 换成 $\mathbb{C}$ 也有类似结论, 之后不再赘述.

如何用矩阵表示平面 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转？设 $A(x_1, x_2)$ 是平面上的一个点，沿着原点逆时针旋转角度 θ 变成 $B(y_1, y_2)$. 利用极坐标将 A 表示为

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\alpha, \\ x_2 = \rho\sin\alpha, \end{cases}$$

那么

$$\begin{cases} y_1 = \rho\cos(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = (\cos\theta)x_1 - (\sin\theta)x_2, \\ y_2 = \rho\sin(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) = (\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_2. \end{cases}$$

因此上述旋转变换 $\mathscr{A}$ 对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

线性变换的例子

- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 表示各个分量分别放大 λ_i 倍的线性变换.
- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示平面中沿着直线 $x_1 = x_2$ 翻转.
- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 表示三维空间中沿着直线 $x_1 = x_2 = x_3$ 旋转 $\dfrac{2\pi}{3}$.
- 想一想: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 表示什么线性变换?

矩阵的加法

给定两个线性变换 $f, g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, 定义

$$(f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}).$$

由此得到对应的矩阵的加法:

定义

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times n}$. 定义

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

只有同型矩阵(行列数都相同的矩阵) 才能相加. 矩阵的加法满足:

(1) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$.

加法和行列式不交换

注意两个方阵的和的行列式 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$ 一般不等于各自行列式的和 $|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}, |\boldsymbol{A}|=2, |\boldsymbol{B}|=1.$ 计算 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$.

解

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}| &= \begin{vmatrix} a_1+b_1 & 2c_1 & 2d_1 \\ a_2+b_2 & 2c_2 & 2d_2 \\ a_3+b_3 & 2c_3 & 2d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 2c_1 & 2d_1 \\ a_2 & 2c_2 & 2d_2 \\ a_3 & 2c_3 & 2d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & 2c_1 & 2d_1 \\ b_2 & 2c_2 & 2d_2 \\ b_3 & 2c_3 & 2d_3 \end{vmatrix} \\
&= 4|\boldsymbol{A}|+4|\boldsymbol{B}| = 12.
\end{aligned}
$$

给定一个线性变换 $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ 和一个数 $\lambda \in \mathbb{C}$, 定义

$$(\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda(f(\boldsymbol{x})).$$

由此得到对应的矩阵的数乘:

定义

数 λ 和矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 的数乘定义为

$$\lambda\boldsymbol{A} = (\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

列矩阵的加法和数乘就是其对应的列向量的加法和数乘. 数乘矩阵满足:

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A} = \lambda(\mu\boldsymbol{A}) = \mu(\lambda\boldsymbol{A})$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{A}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A} + \lambda\boldsymbol{B}$;

(4) $1\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, 0\cdot\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}, \lambda\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}$.

负矩阵和减法

-1 与 $\boldsymbol{A}$ 的数乘称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵

$$-\boldsymbol{A} = (-a_{ij})_{m\times n}.$$

那么矩阵的减法就是

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B}) = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}.$$

想一想: $|\lambda\boldsymbol{A}| = \lambda|\boldsymbol{A}|$? × 如果 $\boldsymbol{A} \in M_n$, 则 $|\lambda\boldsymbol{A}| = \lambda^n|\boldsymbol{A}|$.

矩阵线性运算的应用：图像处理

一张图片由一些像素构成，上图包含 512×341 个像素．在 RGB 颜色模式下，每个像素包含红绿蓝三个通道，每个通道为一个 $0 \sim 255$ 之间的数，数值越高对应颜色越饱满．如果三个通道相同，图片就是一张灰色的图 (无色彩)．此时图片对应一个 512×341 的矩阵 $\boldsymbol{A}$．

想一想：如何将这个图像变亮？

矩阵线性运算的应用：图像处理

$\Longrightarrow$

我们只需要增加每个元素的值，例如

$$\boldsymbol{A}+\begin{pmatrix} 50 & 50 & \cdots & 50 \\ 50 & 50 & \cdots & 50 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 50 & 50 & \cdots & 50 \end{pmatrix}, \qquad 1.5\boldsymbol{A}.$$

如何让图像反色?

$\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 255 & 255 & \cdots & 255 \\ 255 & 255 & \cdots & 255 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 255 & 255 & \cdots & 255 \end{pmatrix} - \boldsymbol{A}.$$

线性变换的复合

设线性映射

$$f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m,\quad g:\mathbb{C}^p\to\mathbb{C}^n,\quad h=f\circ g:\mathbb{C}^p\to\mathbb{C}^m$$

对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p},\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times p}$. 如何用 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 来表示 $\boldsymbol{C}$ 呢?

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_p)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{C}^p$, 那么

$$g(\boldsymbol{x})=(y_1,\ldots,y_n)^{\mathrm{T}},\quad y_k=\sum_{j=1}^{p}b_{kj}x_j.$$

$$f(g(\boldsymbol{x}))=(z_1,\ldots,z_m)^{\mathrm{T}},\quad z_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}y_k=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\sum_{j=1}^{p}b_{kj}x_j=\sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\Big)x_j.$$

$$\Longrightarrow\ \boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times p},\qquad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

我们把它定义为矩阵的乘法 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

定义

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. 定义矩阵的乘法为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times p}$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数才能相乘.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} =? \times.$$

设 $\boldsymbol{A}=(a_1,\ldots,a_n)$ 是 n 维行向量, $\boldsymbol{B}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量. $\boldsymbol{AB},\boldsymbol{BA}=?$

$$\boldsymbol{AB}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\qquad \boldsymbol{BA}=(b_ia_j)_{n\times n}\in M_n.$$

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. $\boldsymbol{AB}$ 的 (i,j) 元其实就是 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行对应的行向量和 $\boldsymbol{B}$ 第 j 列对应的列向量相乘得到的数 (1 阶方阵):

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\end{pmatrix}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_p)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_p\\ \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_p\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\beta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_m\boldsymbol{\beta}_p\end{pmatrix}.$$

例

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 0\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 1 & 5 & 0\\ 1 & -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 9 & -1\\ 6 & 23 & 3\end{pmatrix}.$$

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 如果我们令

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1},$$

那么上述方程等价于矩阵方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. 对应的齐次方程为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.

矩阵乘法的性质

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应的线性变换就是

$$f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

由此可知矩阵乘法满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C})$;

(2) $\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = (\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$;

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$;

(4) 如果 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{A}$.

(5) 如果 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 则 $\boldsymbol{O}_{p\times m}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}_{p\times n}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{O}_{n\times p} = \boldsymbol{O}_{m\times p}$.

矩阵乘法无交换律和消去律

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 AB 为 A 左乘 B, 或者 B 右乘 A. 如果 $AB = BA$, 则称 A, B 是可交换的. 此时 A, B 必为同阶方阵. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法也没有消去律: $AB = O$ 推不出 $A = O$ 或 $B = O$. 例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = O_2.$$

由此可知: $AC = BC$ 推不出 $A = B$.

练习

设 A, B 为 $n > 1$ 阶方阵, 则 $A + AB =$(C)

(A) $A(1 + B)$ (B) $(E + B)A$ (C) $A(E + B)$ (D) 以上都不对

例：与给定矩阵可交换

例

求与矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

解

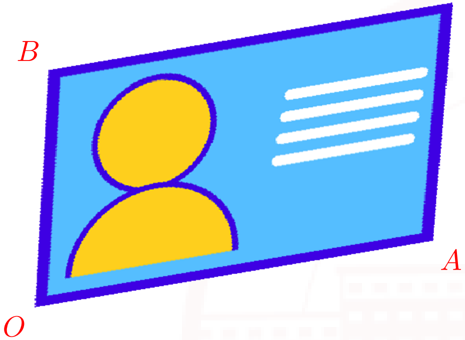
设 $\boldsymbol{B}=(a_{ij})_{3\times3}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0&a_{11}&a_{12}\\0&a_{21}&a_{22}\\0&a_{31}&a_{32}\end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow\ a_{11}=a_{21}=a_{31}=a_{32}=0,\quad a_{11}=a_{22}=a_{33},\quad a_{23}=a_{12},$$

即 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\&a_{11}&a_{12}\\&&a_{11}\end{pmatrix}.$

某位同学拍身份证照片拍成了下图的样子，如何能否修复好呢？



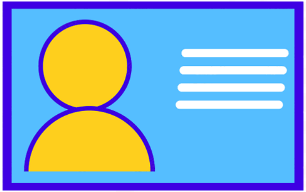
以左下角为原点，通过测量发现 A 坐标为 $(521, 88)$，B 坐标为 $(19, 311)$.

经过查询知道身份证长宽比为 $85.6 : 54$. 令 $A' = (427, 0), B' = (270, 0)$. 我们希望找到一个线性变换，将 A, B 变为 A', B'.

设该线性变换对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，那么

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 521 & 19 \\ 88 & 311 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 427 & 0 \\ 0 & 270 \end{pmatrix},\qquad \text{即} \qquad \begin{cases} 521a+88b=427, \\ 19a+311b=0, \\ 511c+88d=0, \\ 19c+311d=270. \end{cases}$$

解得 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0.828 & -0.051 \\ -0.148 & 0.877 \end{pmatrix}$.



定义

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵, 定义 $\boldsymbol{A}$ 的幂

$$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}_n, \quad \boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{A}}_{k \text{ 个}}.$$

矩阵幂满足如下性质 (k, ℓ 为正整数):

(1) $\boldsymbol{A}^{k+\ell} = \boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{A}^\ell$;

(2) $\boldsymbol{A}^{k\ell} = (\boldsymbol{A}^k)^\ell$.

注意 $(\boldsymbol{AB})^k$ 一般不等于 $\boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{B}^k$. 想一想下面的等式成立吗?

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2?$$

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{B}^2?$$

例

设 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2),$$

$$\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^3, \cdots, \lambda_n^3),$$

递推下去可知

$$\boldsymbol{A}^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k).$$

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ & \lambda^2 & 2\lambda\\ & & \lambda^2\end{pmatrix}.$$

续解

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ & \lambda^2 & 2\lambda \\ & & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ & & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

归纳可知

$$A^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ & & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

另解

设 $\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ & 0 & 1\\ & & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{N}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{N}^3=\boldsymbol{O}$. 由于 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{N}$ 且 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 可交换，因此

$$\boldsymbol{A}^k=(\lambda E+\boldsymbol{N})^k=\lambda^k\boldsymbol{E}+\mathrm{C}_k^1\lambda^{k-1}\boldsymbol{N}+\mathrm{C}_k^2\lambda^{k-2}\boldsymbol{N}^2$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dfrac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ & & \lambda^k\end{pmatrix}.$$

例：矩阵的幂

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

解

注意到 $\boldsymbol{A}$ 对应平面 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换是逆时针旋转 θ, 所以 $\boldsymbol{A}^k$ 就是逆时针旋转 $n\theta$, 对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}.$$

例：矩阵的幂

例

设 $\boldsymbol{A}=(1,2,3), \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$. 求 $(\boldsymbol{BA})^k$.

解

注意到 $\boldsymbol{AB}=3$, 因此

$$(\boldsymbol{BA})^k=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{k-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\cdots 3^{k-1}\cdot\boldsymbol{A}=3^{k-1}\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-3^{k-1} & -2\cdot 3^{k-1} & -3^k\\ 2\cdot 3^{k-1} & 4\cdot 3^{k-1} & 2\cdot 3^k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

练习

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$. 求 $\boldsymbol{A}^k$.

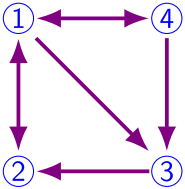
答案

注意到 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,2,3)$, 因此 $\boldsymbol{A}^k=14^{k-1}\boldsymbol{A}$.

想一想：$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$ 能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 或 $-\boldsymbol{E}$ 吗?

矩阵幂的应用：换乘

网上订票系统里记录了所有能直飞的航班线路. 对于不能直达的城市, 该怎么确定是否有换乘方案呢? 例如 4 个城市之间的航线如图所示:



$$\Longleftrightarrow \text{邻接矩阵 } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵中 $a_{ij} = 1$ 表示从 i 到 j 有直飞航线.

那么 $\boldsymbol{A}^2$ 的 (i,j) 元

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik}a_{kj}$$

就是从 i 到 j 换乘一次的方案数. 例如从①$\Longrightarrow$③:

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 $b_{23}=1$, 因此可通过②$\Longrightarrow$①$\Longrightarrow$③换乘一次到达.

想一想：如何从③到达④?

第二节　矩阵的运算：转置和行列式

- 矩阵的转置
- 方阵的行列式

矩阵转置的定义

上一章我们已经说过, 如果 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$, 称

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的转置, 它是 $n \times m$ 矩阵. 例如行向量的转置是列向量, 方阵的转置还是方阵, 上三角阵的转置是下三角阵. 矩阵的转置满足如下性质:

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

两边取转置得到

$$(b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = (c_1, c_2, c_3).$$

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}|$.

这题当然可以直接硬算，不过我们可以利用一点小技巧:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)\boldsymbol{E}.$$

因此 $|\boldsymbol{A}|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ (因为一定有 a^4 项).

定义

- 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为对称阵;
- 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称阵.

例如 $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 是对称阵. 对角矩阵都是对称阵.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是反对称阵. 反对称阵的对角线均为 0.

例

证明: 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 都是对称阵, 则 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$.

证明

由题设可知 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{BA}.$$

□

想一想: 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{AB}$ 中有一个对称阵和两个反对称阵呢?

练习

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, (A) 一定是对称阵?

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ (B) $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ (C) $\boldsymbol{A}^2$ (D) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{A}$

一般地, 如果 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 是 m 阶对称阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是 n 阶对称阵.

任一方阵可表为对称阵与反对称阵之和

例

证明：任一方阵均可写成一对称阵和一反对称阵之和.

证明

$$A = \frac{A + A^{\mathrm{T}}}{2} + \frac{A - A^{\mathrm{T}}}{2}. \qquad \square$$

想一想：如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，那么 $f(x)$ 一定可以表示成一个偶函数和一个奇函数之和.

方阵的行列式我们已在上一章详细研究过. 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$, 称 $\boldsymbol{A}$ 为退化矩阵, 否则称为非退化矩阵. 行列式满足如下性质:

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$;

(2) $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵;

(3) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}|$.

我们来证明 $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|$. 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}), \boldsymbol{B} = (b_{ij})$,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{nn} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|.$$

经过变换 $c_{n+j} + b_{1j}c_1 + \cdots + b_{nj}, j = 1, \ldots, n$ 得到 $D = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{ik}$. 换言之 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$. 再进行变换 $r_i \leftrightarrow r_{n+j}, j = 1, \ldots, n$ 得到

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = (-1)^n |-\boldsymbol{E}| \cdot |\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{AB}|.$$

练习

设 $\boldsymbol{A}$ 为 5 阶方阵, $|\boldsymbol{A}| = -1$, 则 $|2\boldsymbol{A}| = \underline{\ -32\ }$, $||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}| = \underline{\ 1\ }$.

练习

设 $\alpha = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\alpha$, 则 $|5\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}^3| = \underline{\ -75\ }$.

练习

$$\begin{vmatrix} 2\sin a\cos a & \sin a\cos b + \cos a\sin b & \sin a\cos c + \cos a\sin c \\ \sin b\cos a + \cos b\sin a & 2\sin b\cos b & \sin b\cos c + \cos b\sin c \\ \sin c\cos a + \cos c\sin a & \sin c\cos b + \cos c\sin b & 2\sin c\cos c \end{vmatrix} = \underline{\ 0\ }.$$

答案

注意到

$$\begin{pmatrix} 2\sin a\cos a & \sin a\cos b+\cos a\sin b & \sin a\cos c+\cos a\sin c \\ \sin b\cos a+\cos b\sin a & 2\sin b\cos b & \sin b\cos c+\cos b\sin c \\ \sin c\cos a+\cos c\sin a & \sin c\cos b+\cos c\sin b & 2\sin c\cos c \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin a & \cos a & 0 \\ \sin b & \cos b & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{A}\in M_{m\times n}, \boldsymbol{B}\in M_{n\times m}$. 如果 $m>n$, 那么

$$|\boldsymbol{AB}|=\left|(\boldsymbol{A},\boldsymbol{O}_{m\times(m-n)})\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O}_{(m-n)\times m} \end{pmatrix}\right|=0=|\boldsymbol{BA}|.$$

第三节　逆矩阵

- 方阵的伴随矩阵
- 逆矩阵的定义和形式
- 逆矩阵的性质
- 逆矩阵的应用

伴随矩阵

定义

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$. 由 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式形成的矩阵

$$\boldsymbol{A}^* = (A_{ji}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{21} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{21} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

注意, 伴随矩阵的 (i,j) 元是代数余子式 A_{ji} 而不是 A_{ij}.

例

如果 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

伴随矩阵的性质

伴随矩阵满足如下重要性质:

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}|E_n.$

这是因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{21} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{21} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

的 (i,j) 元是

$$a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}|, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

伴随矩阵的性质

(2) $(k\boldsymbol{A})^* = k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$.

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$.

(4) $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

如果 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, 显然 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$. 如果 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 但 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{O}$, 那么

$$\boldsymbol{A}^* \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \boldsymbol{O}_{n\times 1}.$$

所以以 $\boldsymbol{A}^*$ 为系数的齐次线性方程组有非零解, 从而 $|\boldsymbol{A}^*| = 0$.

如果 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, 由 $|\boldsymbol{A}^*| \cdot |\boldsymbol{A}| = ||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n| = |\boldsymbol{A}|^n$ 可得.

例

设非零 $n \geqslant 3$ 实方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足对任意 i, j, $a_{ij} = A_{ij}$. 求 $|\boldsymbol{A}|$.

解

由题设可知 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$. 因此 $|\boldsymbol{A}^*| = |\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}|^{n-1}$, 从而 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 或 1.

如果 $|\boldsymbol{A}| = 0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}.$$

而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 个对角元为

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \geqslant 0.$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 所有元素均为零, 矛盾! 因此 $|\boldsymbol{A}| = 1$.

给定一个线性变换 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$, 如果线性变换 $g:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^n$ 满足

$$(gf)(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u},\forall\boldsymbol{u}\in\mathbb{C}^n,\quad (fg)(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{v},\forall\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^m,$$

则称 g 是 f 的逆.

设 f,g 对应的矩阵分别是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 则

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}_m,\quad \boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n.$$

注意到 $m\neq n$ 时上述等式不可能成立, 因为 $m>n$ 时, 通过补零列可知 $|\boldsymbol{AB}|=0$; $m<n$ 时 $|\boldsymbol{BA}|=0$. 因此线性变换的逆只可能在 $m=n$ 时存在.

由此得到对应的矩阵的逆的定义:

定义

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵. 若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}_n,$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 它的逆矩阵唯一吗?

设 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}'$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵, 则

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}_n, \quad \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n.$$

于是

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}'.$$

因此若逆矩阵存在必唯一.

(2) 任何非零矩阵都有逆吗?

设 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$a + c = 1, \quad 2a + 2c = 0.$$

这不可能, 因此 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 不可逆. 实际上从 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ 可知

$$|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = 1.$$

所以退化矩阵都是不可逆的.

(3) 那非退化矩阵都可逆吗?

注意到

$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

因此如果 A 非退化, 则

$$A \cdot \frac{A^*}{|A|} = \frac{A^*}{|A|} \cdot A = E,$$

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}.$$

逆矩阵存在性的刻画

定理

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. 此时 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}$.

推论

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵. 如果 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$ (或 $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}$), 则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

证明

如果 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $|\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| = 1$, $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{B}.$$

□

例

证明 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵.

解

由于 $|\boldsymbol{A}|=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 由于 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，因此

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

注意到 $\boldsymbol{A}$ 对应的是平面上沿原点逆时针旋转 θ，因此 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 对应的是平面上沿原点逆时针旋转 $-\theta$.

例

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\-1&3&4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-1&-3&5\\1&5&11\end{pmatrix}$ 是否可逆？若可逆求其逆矩阵.

解

由于 $|\boldsymbol{A}|=10$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 计算其代数余子式为

$$A_{11}=7,\ A_{12}=1,\ A_{13}=1,\ A_{21}=-5,\ A_{22}=5$$

$$A_{23}=-5,\ A_{31}=-3,\ A_{32}=1,\ A_{33}=1.$$

因此 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{10}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}7&-5&-3\\1&5&1\\1&-5&1\end{pmatrix}$. 由于 $|\boldsymbol{B}|=0$, 因此 $\boldsymbol{B}$ 不可逆.

例：计算逆矩阵

例

设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

则

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}).$$

逆矩阵通常采用下述方法计算:

(1) 利用公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$, 适用于 $2,3$ 阶方阵, 或用于抽象分析.

(2) 寻找方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$, 适用于抽象矩阵求逆.

(3) 利用矩阵的初等变换求逆矩阵, 该方法我们会在之后的学习中接触到.

例

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵且满足 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}$.

解

(1) 由于 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$, 因此 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=2\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}}{2}$.

(2) 由于 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E})=-2\boldsymbol{E}$, 因此 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=-\dfrac{\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}}{2}$.

方阵的多项式

设
$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$
是一个多项式. 定义
$$f(\boldsymbol{A}) = a_m \boldsymbol{A}^m + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{E}.$$
例如,

(1) 若 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, 则 $f(\boldsymbol{A}) = \mathrm{diag}\big(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\big)$.

(2) $f(\boldsymbol{PAP}^{-1}) = \boldsymbol{P} f(\boldsymbol{A}) \boldsymbol{P}^{-1}$.

若 $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$, 我们想求 $(\boldsymbol{A} - \alpha \boldsymbol{E})^{-1}$. 那么
$$f(\boldsymbol{A}) - f(\alpha)\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{E})\boldsymbol{B} = -f(\alpha)\boldsymbol{E}.$$
从而当 $f(\alpha) \neq 0$ 时, $(\boldsymbol{A} - \alpha\boldsymbol{E})^{-1} = -\dfrac{\boldsymbol{B}}{f(\alpha)}$.

例：计算逆矩阵

想一想：如果 $\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，如何求 $(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E})^{-1}$？

(1) 待定系数设 $(\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E})(a\boldsymbol{A}^2+b\boldsymbol{A}+c\boldsymbol{E})=\boldsymbol{E}$，然后使得两边相减是 $\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E}$ 的倍数.

(2) 通过 $\boldsymbol{A}^6=(\boldsymbol{A}^3)^2$ 得到 $\boldsymbol{A}^2$ 满足的方程.

例

多选题：若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同阶方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则（ AC ）.

(A) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$

(B) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{CB}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$

(C) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

(D) 若 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

例

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{E}$, 则 (D).

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{E}$　(B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{E}$　(C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{E}$　(D) $\boldsymbol{CAB}=\boldsymbol{E}$

想一想 $\boldsymbol{B}^{-1}=?$

练习

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1&3\\4&a&7\\3&-1&4\end{pmatrix}$, 且存在两个不等的 3×2 矩阵 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$, 则 $a=\underline{-3}$.

练习

设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3-2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$, 且 $|\boldsymbol{A}|=2$, 则 $|(\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{E})^{-1}|=\underline{-2}$.

逆矩阵满足如下性质:

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

- $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$;
- 若 $\lambda\neq 0$, 则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 也可逆, 且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$;
- $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆, 且 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;
- $|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 也可逆, 且

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

一般地

$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}.$$

注意矩阵不能相除 $\dfrac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{B}}$, 因为一般 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$.

注意一般地, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1} \neq \boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$. 例如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 均可逆, 但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 不可逆.

伴随矩阵的性质

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{*}=(\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$.

证明

由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$, 因此 $\boldsymbol{A}^{*}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$. 于是

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^{*}=|\boldsymbol{A}^{-1}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|},\quad (\boldsymbol{A}^{*})^{-1}=(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}.$$

□

例

设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵, $|\boldsymbol{A}| = \frac{1}{2}$. 求 $|(2\boldsymbol{A})^{-1} - (2\boldsymbol{A})^*|$.

解

$$(2\boldsymbol{A})^{-1} - (2\boldsymbol{A})^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1} - 2^2\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^* - 4\boldsymbol{A}^* = -3\boldsymbol{A}^*,$$

因此

$$\left|(2\boldsymbol{A})^{-1} - (2\boldsymbol{A})^*\right| = -27|\boldsymbol{A}^*| = -27|\boldsymbol{A}|^2 = -\frac{27}{4}.$$

例：解矩阵方程

如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 可逆，下述矩阵方程可以由逆矩阵表出：

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C} \implies \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$;

(2) $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C} \implies \boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}$;

(3) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \implies \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$.

例

设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解

由题设得 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}$. 注意到

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=-1\neq 0,\quad (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}.$$

也可由 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}+2(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}$ 计算得到.

练习

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = 6\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. 如果 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7})$, 求 $\boldsymbol{B}$.

答案

右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得到 $\boldsymbol{B} = 6(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{E})^{-1} = \mathrm{diag}(6, 2, 1)$.
也可以左乘 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得到

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{A} = 6\boldsymbol{E} - 6(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}),$$

$$\boldsymbol{B} = 6(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1} - 6\boldsymbol{E} = \mathrm{diag}(6, 2, 1).$$

例：解矩阵方程

例

解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1} + 2\boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

解

注意到 $|\boldsymbol{A}| = 4$. 两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 得到 $4\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E} + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，因此

$$\boldsymbol{X} = (4\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

练习

解矩阵方程 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}-8\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-2&4\\0&0&1\end{pmatrix}$.

答案

两边同时左乘 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 得到

$$-2\boldsymbol{X}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-8\boldsymbol{E},\quad (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=4\boldsymbol{E},$$

$$\boldsymbol{X}=4(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=4\begin{pmatrix}2&2&-2\\0&-1&4\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=4\begin{pmatrix}2&4&-6\\0&-4&8\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

例

设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\Lambda$, 求 $\boldsymbol{A}^n$.

解

$$|\boldsymbol{P}|=2,\ \boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-1\\-1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1},$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}\cdot\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\Lambda^n\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

我们会在后面学习到该技巧来计算一般方阵的幂次.

如果 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 则

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{b}$$

因此

$$x_i=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\sum_{k=1}^{n}A_{ki}b_k.$$

此即克拉默法则.

容易知道, 2 阶方阵满足 $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$.
如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \geqslant 3$ 阶非退化方阵, 则

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = |\boldsymbol{A}^*|(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = |\boldsymbol{A}|^{n-1}\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $n \geqslant 3$ 阶退化方阵, 我们会在后面证明 $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{O}$. 因此

伴随矩阵的性质

(6) $(\boldsymbol{A}^*)^* = \begin{cases} \boldsymbol{A}, & n = 2; \\ |\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}, & n \geqslant 3. \end{cases}$

练习

单选题：设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，如果 (D), 则 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

(A) $\boldsymbol{A}$ 可逆　　(B) $|\boldsymbol{A}|=0$

(C) $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素均为 0　　(D) 存在某个正整数 m 使得 $\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{O}$

练习

若 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，则下面命题正确的有__1__个.

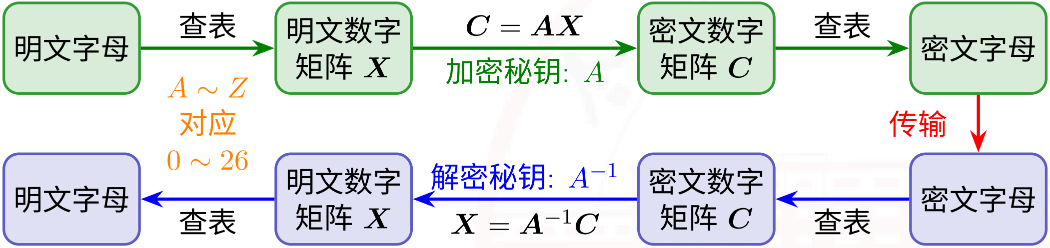
(1) $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$

(2) $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$

(3) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$

逆矩阵的应用：通信加密

1929 年，希尔通过线性变换对信息进行加密和解密处理，提出了密码史上具有重要地位的希尔密码系统.



例

设接受收到的密文字母为 “WBIZTNWJBRFSGNZ”，加密密钥为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$.

请用希尔密码系统解密密文.

解

密文对应的数字为

$$22,1,8,25,19,13,22,9,1,17,5,18,6,13,25.$$

由于密钥是 3 阶方阵，所以将上述数字按 3 个一列写成

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}22&25&22&17&6\\1&19&9&5&13\\8&13&1&18&25\end{pmatrix}.$$

续解

解密密钥为 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，因此

$$A^{-1}C=\begin{pmatrix}-7 & 6 & 8 & -13 & -12\\ 34 & -1 & 25 & 6 & -39\\ -13 & 7 & -12 & 6 & 32\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}19 & 6 & 8 & 13 & 14\\ 8 & 25 & 25 & 6 & 13\\ 13 & 7 & 14 & 6 & 6\end{pmatrix}.$$

查表得到明文：*TINGZHI ZONGGONG*.

第四节　分块矩阵

- 分块矩阵的定义和运算
- 特殊分块矩阵

有时为了研究矩阵和其部分元素形成的矩阵的联系，需要使用分块法将其进行拆分:

定义

用若干条横线和竖线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分成许多小矩阵，每个小矩阵成为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的矩阵称为分块矩阵.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{O}_{m\times n} & \boldsymbol{E}_m \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}_{n\times m} \end{pmatrix}$$

就是一个分块矩阵.

如果分块矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 同型，且每个对应分块也同型，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 就是对应分块相加形成的分块矩阵：

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

数 λ 和分块矩阵的数乘，就是 λ 和对应分块数乘形成的分块矩阵：

$$\lambda \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \lambda\boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的运算：乘法

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{r1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rt},\end{pmatrix}$$

且 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 的列数和 $\boldsymbol{B}_{jk}$ 的行数相同, 则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{sr}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{r}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}.$$

简单来说就是, 如果对应的分块能做相应运算, 则分块矩阵的运算就如同把这些分块视作数一样运算.

设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr} \end{pmatrix},$$

则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

如果方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_m\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m$ 都是方阵, 称 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角阵. 记作 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m)$.

分块对角阵具有如下性质:

(1) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1|\cdots|\boldsymbol{A}_m|$;

(2) $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_m$ 均可逆, 此时 $\boldsymbol{A}^{-1}=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1^{-1},\ldots,\boldsymbol{A}_m^{-1})$.

(3) $\boldsymbol{A}^k=\operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1^k,\ldots,\boldsymbol{A}_m^k)$.

例

求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

设 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}_2^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$.

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^{-1},\boldsymbol{A}_2^{-1})=\begin{pmatrix}1&-1&&\\-1&2&&\\&&\frac{1}{2}&0\\&&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

例

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆，求 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

由 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \neq 0$ 可知该方阵可逆. 设

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{A}_4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}.$$

例：分块三角阵的逆

续解

则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{O}, \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{E}.$$

于是

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{O}, \boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{B}^{-1}.$$

再由 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{O}$ 可得

$$\boldsymbol{A}_3 = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_1 = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

故

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

例：分块方阵的伴随

练习

设 A, B 为同阶方阵, $C = \begin{pmatrix} & A \\ B & \end{pmatrix}$, 则 $C^* =$(D).

(A) $\begin{pmatrix} & A^* \\ B^* & \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} & B^* \\ A^* & \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} & |B|A^* \\ |A|B^* & \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} & |A|B^* \\ |B|A^* & \end{pmatrix}$

第五节　矩阵的初等变换

- 初等变换和行最简形矩阵
- 初等矩阵
- 矩阵等价

我们在第一章中利用了如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换

(1) 互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$;

(2) 一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i;

(3) j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$.

实际上它也可以用来解线性方程组. 例如

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

右侧矩阵被称为增广矩阵.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{r_2-3r_1}{\underset{r_3-2r_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{array}\right) \overset{-\frac{1}{5}r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \overset{r_3+3r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

经过若干次初等变换，增广矩阵变为行阶梯形矩阵.

增广矩阵化为行最简形

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{r_1-3r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

再经过若干次初等变换, 增广矩阵变为行最简形矩阵.

线性方程组的初等变换 $\Longleftrightarrow$ 增广矩阵的初等行变换

定义

矩阵的初等行 (列) 变换包括:

(1) 对换变换: 互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$;

(2) 数乘变换: 一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i;

(3) 倍加变换: j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$.

这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆是 $r_i \leftrightarrow r_j$;

(2) kr_i 的逆是 $\frac{1}{k}r_i$;

(3) $r_i + kr_j$ 的逆是 $r_i - kr_j$.

行阶梯形矩阵

定义

满足下述条件的矩阵称为行阶梯形矩阵:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 若 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 存在正整数

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_\ell, j \leqslant m$$

使得 $a_{1,k_1}, \ldots, a_{\ell,k_\ell}$ 均非零; $j < k_i$ 或 $i > \ell$ 时 $a_{ij} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times$$

任何矩阵都可通过初等行变换化为行阶梯形.

行最简形矩阵

定义

满足下述条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

(1) 每个非零行的第一个非零元是 1;

(2) 每个非零行的第一个非零元所在列其它元素均为 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任何矩阵都可通过初等行变换化为行最简形.

例

用初等行变换将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -9 & 3\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ -2 & -3 & 9 & 6\end{pmatrix}$

解

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -9 & 3\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ -2 & -3 & 9 & 6\end{pmatrix} \overset{r_3+2r_1}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 3 & -9 & 3\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ 0 & 3 & -9 & 12\end{pmatrix} \overset{r_3-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 3 & -9 & 3\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1-3r_2}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -9\\ 0 & 1 & -3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

单位阵 $\boldsymbol{E}$ 经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 和 $c_i \leftrightarrow c_j$ 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i,j)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\
\end{array}.$$

(2) kr_i, kc_i 都对应初等矩阵

$$\boldsymbol{E}(i(k)) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & \ddots &&&&& \\ && 1 &&&& \\ &&& k &&& \\ &&&& 1 && \\ &&&&& \ddots & \\ &&&&&& 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow & \\ \text{第 } i \text{ 列} & \end{array}$$

(3) $r_i + kr_j, c_j + kc_i$ 都对应初等矩阵

$$
\boldsymbol{E}(i,j(k)) =
\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
& \ddots & & & & & \\
& & 1 & & k & & \\
& & & \ddots & & & \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{cc}
\uparrow & \uparrow \\
\text{第 } i \text{ 列} & \text{第 } j \text{ 列}
\end{array}
\end{array}
$$

我们来看

$$\boldsymbol{E}(1,3)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&8&9\\4&5&6\\1&2&3\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i,j)$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 $r_i\leftrightarrow r_j$.

$$\boldsymbol{E}(2(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&k&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4k&5k&6k\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 kr_i.

$$\boldsymbol{E}(3,1(k))\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7+k&8+2k&9+3k\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{E}(i,j(k))$ 左乘在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上, 即对 $\boldsymbol{A}$ 实施 r_i+kr_j.

从分块矩阵乘法

$$E(i,j)A = E(i,j)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_j\\ \vdots\\ \alpha_i\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

可以看出确实如此.

同理，初等矩阵右乘矩阵 A 等同于对 A 实施对应的初等列变换.

定理

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$.

(1) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等行变换, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘对应的 m 阶初等矩阵.

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 实施一次初等列变换, 相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘对应的 n 阶初等矩阵.

即左行右列.

例：初等矩阵与初等变换

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}+2a_{11} & a_{33}+2a_{13} & a_{32}+2a_{12} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 那么 $\boldsymbol{B}=$(C)

(A) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$ (B) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3$ (C) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1$ (D) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$

例：初等矩阵与初等变换

例

设 A 为 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得到 C. 求满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q.

解

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 因此

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于初等变换都是可逆，因此初等矩阵也都是可逆的：

(1) $\boldsymbol{E}(i,j)\boldsymbol{E}(i,j) = \boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j)^{-1} = \boldsymbol{E}(i,j)$;

(2) $\boldsymbol{E}(i(k))\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k})) = \boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i(k))^{-1} = \boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))$;

(3) $\boldsymbol{E}(i,j(k))\boldsymbol{E}(i,j(-k)) = \boldsymbol{E} \implies \boldsymbol{E}(i,j(k))^{-1} = \boldsymbol{E}(i,j(-k))$.

例

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{AB}^{-1} =$ ____ $\boldsymbol{E}(i,j)$ ____

练习

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{13} & -a_{11}+a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & -a_{21}+a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & -a_{31}+a_{32} & a_{31} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{A}$ 可逆. 那么 $\boldsymbol{B}^{-1}=$(B)

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ (B) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$ (C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}^{-1}$ (D) $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}$

例

设 $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, 求 $P_1P_2P_3$ 和 $(P_1P_2P_3)^{-1}$.

这题可以直接计算，也可以利用初等矩阵对应的变换来看.

解

P_1P_2 就是对 P_1 实施初等列变换 $c_1 + ac_4$，即 $P_1P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

续解

同理 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

反过来，$\boldsymbol{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$,

$$(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3)^{-1} = \boldsymbol{P}_3^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

练习

将可逆方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 $\boldsymbol{B}$, 则对 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 实施初等变换 (D) 可得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(A) $r_2 + 2r_1$ (B) $r_2 - 2r_1$ (C) $c_1 + 2c_2$ (D) $c_1 - 2c_2$

如果 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$, 那么存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$. 即 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 所以这种方法可用来解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵.

特别地, $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}) \overset{r}{\sim} (\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1})$ 可用来帮助计算矩阵的逆. 类似地 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B}\end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{X}\end{pmatrix}$ 可用来解 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, 其中 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵.

练习

求 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的逆.

解

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-r_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

续解

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_1-r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

练习

若 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $AX = A + X$, 求 X.

解

由题设知 $(A - E)X = A$, $X = (A - E)^{-1}A$.

$$(A - E, A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

续解

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-4&3&-2&-3&3\end{pmatrix}\underset{-r_3}{\overset{r_3+4r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}\overset{r_1-2r_2}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&-2&2&6\\0&1&0&2&0&-3\\0&0&1&2&-1&-3\end{pmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-2&2&6\\2&0&-3\\2&-1&-3\end{pmatrix}.$

练习

(1) 设 A 是 3 阶方阵，存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$，则

$P^{-1}A^*P =$ $\underline{\quad \mathrm{diag}(6,3,2) \quad}$.

(2) 设 A 是 3 阶方阵，存在可逆阵 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 使得 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

若 $Q = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$，则 $Q^{-1}AQ =$ $\underline{\quad \mathrm{diag}(1,3,2) \quad}$.

(3) 设 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = E$，则以下说法正确的有 $\underline{\quad 4 \quad}$ 个.

(I) A 等价于 E;　　(II) A 等价于 B;

(III) A 可经过有限次初等行变换化为 B;　　(IV) $AB = BA$.

练习

设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix},$$

$$P_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\qquad P_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

若 A 可逆, 则 $B^{-1}=$(C).

(A) $A^{-1}P_1P_2$ (B) $P_1A^{-1}P_2$ (C) $P_1P_2A^{-1}$ (D) $P_2A^{-1}P_1$

矩阵等价的定义

定义

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换变为 $\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 行等价, 记作$\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$.

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等列变换变为 $\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 列等价, 记作$\boldsymbol{A} \overset{c}{\sim} \boldsymbol{B}$.

(3) 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 $\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 列等价, 记作$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

每个矩阵都可以通过初等行变换变为行最简形矩阵. 对于可逆方阵 $\boldsymbol{P}$, 由于初等矩阵都是可逆的, 因此它对应的行最简形矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 也是可逆的. 于是 $\boldsymbol{Q}$ 没有零行, 它只能是 $\boldsymbol{E}$. 换言之, 可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积. 所以 $\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \boldsymbol{B}$ 等价于存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$.

定理

(1) $A \overset{r}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P 使得 $B = PA$.

(2) $A \overset{c}{\sim} B$ 当且仅当存在可逆矩阵 Q 使得 $B = AQ$.

(3) $A \sim B$ 当且仅当存在可逆矩阵 P, Q 使得 $B = PAQ$.

由此可知

命题

矩阵的行等价、列等价、等价均满足

(1) 自反性: $A \sim A$;

(2) 对称性: $A \sim B \implies B \sim A$;

(3) 传递性: $A \sim B, B \sim C \implies A \sim C$.

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等列变换将其变为标准型 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 例如:

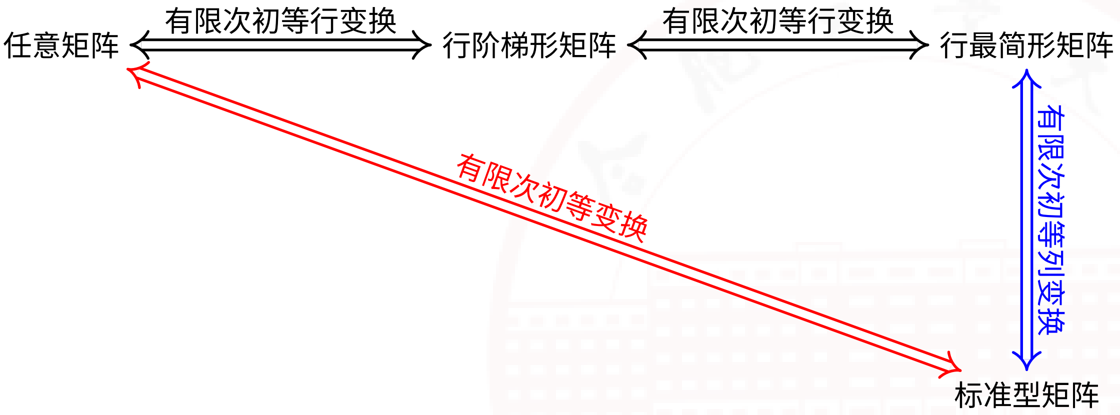
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{c_4+9c_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4-4c_2}{\overset{c_3+3c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的等价也叫做相抵，上述标准型也叫作相抵标准型. 我们会看到不同的 r 对应的相抵标准型不等价. 所以相抵标准型相当于在每一个等价类中找到了一个具有代表性的矩阵.

命题

方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当它的标准型为 $\boldsymbol{E}_n$.

矩阵的变换关系


任意矩阵
有限次初等行变换
行阶梯形矩阵
有限次初等行变换
行最简形矩阵
有限次初等变换
有限次初等列变换
标准型矩阵

例：初等变换

例

将矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 表示成有限个初等阵的乘积.

解

$$\boldsymbol{A}\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\overset{r_3-2r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\underset{-r_3}{\overset{-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因此 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

第六节　矩阵的秩

- 矩阵秩的定义
- 矩阵秩与子式
- 矩阵秩的性质

上一节中我们说每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都等价于某个标准型 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**, 记作 $R(\boldsymbol{A})$.

第一个问题是, 秩是唯一的吗? 如果两个 $m \times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}, \quad (r > s)$$

则存在可逆的方阵 $\boldsymbol{P} \in M_m, \boldsymbol{Q} \in M_n$ 使得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_2 \\ \boldsymbol{P}_3 & \boldsymbol{P}_4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{Q}_2 \\ \boldsymbol{Q}_3 & \boldsymbol{Q}_4 \end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{P}_1 \in M_s, \boldsymbol{Q}_1 \in M_r$. 则

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{Q}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{P}_3 & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

由于 $r > s$, 因此 $\boldsymbol{Q}_1$ 的最后 $r - s$ 列为零, $\boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{O}$. 从而

$$|\boldsymbol{Q}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{Q}_3 & \boldsymbol{Q}_4 \end{vmatrix} = |\boldsymbol{Q}_1| \cdot |\boldsymbol{Q}_4| = 0.$$

矛盾! 因此不同的标准型之间不等价, 也就是说矩阵的秩是唯一的.

对于行阶梯形矩阵，再实施初等变换使其变为行最简形矩阵或标准型矩阵，并不会改变它的非零行的个数．换言之，行阶梯形矩阵的秩就是非零行的个数．

例

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0&3&-2\\0&3&1&-2&5\\0&0&0&4&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}$ 的秩.

解

$\boldsymbol{A}$ 是行阶梯形矩阵，因此 $R(\boldsymbol{A})=3$.

$$\boldsymbol{B}\underset{r_4-4r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-11\\0&-1&-11\end{pmatrix}\underset{-r_2}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&11\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow R(\boldsymbol{B})=2.$$

例

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a+1 \end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$\boldsymbol{A}\overset{\substack{r_2+r_1\\ r_3-r_1}}{\underset{r_4-r_1}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}\overset{r_3-ar_4}{\underset{-\frac{1}{2}r_3}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}\overset{r_4-r_3}{\sim}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\overset{r_3-ar_4}{\underset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此 $a\neq 0$ 时, $R(\boldsymbol{A})=3$; $a=0$ 时, $R(\boldsymbol{A})=2$.

例：计算矩阵的秩

练习

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&3\\2&1&-6&4\\3&2&m&7\end{pmatrix}$ 的秩.

答案

$m\neq-8$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$; $m=-8$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$.

例：计算矩阵的秩

例

求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$\boldsymbol{A} \underset{\substack{r_3-r_1 \\ r_4-ar_1}}{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_4 \\ r_2-r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \underset{r_4+r_3}{\overset{r_4+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -(a+3)(a-1) \end{pmatrix}$$

因此 $a\neq 1,-3$ 时，$R(\boldsymbol{A})=4$; $a=-3$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$; $a=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=1$.

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式. 例如 n 阶方阵的余子式是 $n-1$ 阶子式.

定理

设 $R(\boldsymbol{A})=r$, 则存在非零的 r 阶子式, 但所有的 $r+1$ 阶子式都是零.

根据行列式的拉普拉斯展开, 如果 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式均为零, 则 $k+1$ 阶子式也都是零. 因此 $\boldsymbol{A}$ 的任意 $s>r$ 阶子式都是零.

推论

(1) $R(\boldsymbol{A})\geqslant r \iff \boldsymbol{A}$ 存在非零 r 阶子式.

(2) $R(\boldsymbol{A})\leqslant r \iff \boldsymbol{A}$ 所有 $r+1$ 阶子式均为零.

(3) $R(\boldsymbol{A})=r \implies \boldsymbol{A}$ 存在 $1,2,\ldots,r$ 阶非零子式.

证明

设 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{P}$ 是初等矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j)$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式, 最多相差 -1.

(2) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式或 a 倍.

(3) 若 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}(i,j(a))$, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\boldsymbol{A}$ 的某个 k 阶子式.

因此如果 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都是零, 则 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式也都是零.

由于 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 也是初等矩阵, 因此反过来也成立. 对于 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 情形同理. 因此, 如果 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式都是零 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶子式都是零.

对于标准型矩阵, 该定理显然成立. 因此该定理对任意矩阵都成立. □

命题

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 则 $0 \leqslant R(\boldsymbol{A}) \leqslant \min(m, n)$.

定义

(1) 若 $R(\boldsymbol{A}) = m$, 称 $\boldsymbol{A}$ 行满秩;

(2) 若 $R(\boldsymbol{A}) = n$, 称 $\boldsymbol{A}$ 列满秩;

(3) 若 $R(\boldsymbol{A}) = m = n$, 称 $\boldsymbol{A}$ 满秩.

矩阵秩的性质

命题

(1) $R(\boldsymbol{A})=0 \iff \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\iff R(\boldsymbol{A})=n$;

(3) $R(k\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}), k\neq 0$;

(4) $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B} \iff R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$;

(5) $R(\boldsymbol{AB})\leqslant \min\big(R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\big)$;

(6) 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times \ell}=\boldsymbol{O}$, 则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$;

(7) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$;

(8) $\max\big(R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\big)\leqslant R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

命题

(5) $R(\boldsymbol{AB}) \leqslant \min(R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B}))$.

证明

(5) 设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}'\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{Q}'$, 其中 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}', \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}'$ 均可逆. 那么

$$R(\boldsymbol{AB}) = R(\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}\boldsymbol{QP}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_s & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}).$$

注意到右侧矩阵除前 r 行 s 列外均为零. 因此它的秩不超过 $\min(r, s)$. □

如果 $\boldsymbol{B}$ 行满秩, 则 $R(\boldsymbol{AB}) = R(\boldsymbol{A})$; 如果 $\boldsymbol{B}$ 列满秩, 则 $R(\boldsymbol{BA}) = R(\boldsymbol{A})$;

命题

(6) 若 $A_{m\times n}B_{n\times \ell}=O$, 则 $R(A)+R(B)\leqslant n$.

证明

(6) 设 $A=P'\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q, B=P\begin{pmatrix}E_s & O\\ O & O\end{pmatrix}Q'$, 其中 P,P',Q,Q' 均可逆. 那么

$$AB=O \implies \begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix}E_s & O\\ O & O\end{pmatrix}=O.$$

设 $QP=\begin{pmatrix}C_1 & C_2\\ C_3 & C_4\end{pmatrix}$ 其中 C_1 为 $(n-s)\times s$. 由于 QP 的前 r 行 s 列均为零, 因此若 $r+s>n$, 则 $C_1=O$ 且 C_3 的第一行为零, $|QP|=\pm|C_2|\cdot|C_3|=0$, 矛盾! □

命题

(7) $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

证明

(7) 由于添加零行或零列不改变秩，因此不妨设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都是方阵. 由于

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{O})\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

因此 $R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \leqslant R\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}=R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$. □

命题

(8) $\max(R(\boldsymbol{A}), R(\boldsymbol{B})) \leqslant R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leqslant R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$.

证明

(8) 不妨设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是方阵, 那么

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{O} \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{E}, \boldsymbol{E}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

因此 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}), R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leqslant R \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \\ & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B})$. □

练习

(1) 设 $R(\boldsymbol{A})=2, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $R(\boldsymbol{AB})=\underline{\quad 2 \quad}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵且 $R(\boldsymbol{AB})<R(\boldsymbol{B})$, 则 $|\boldsymbol{A}|=\underline{\quad 0 \quad}$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & t \end{pmatrix}, \boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 且 $R(\boldsymbol{X})=2$, 则 $t=\underline{\quad 2 \quad}$.

(4) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} t & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 且存在非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则 $t=\underline{\quad 4 \quad}$.

例：矩阵秩性质的应用

例

证明：若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

证明

由于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，因此 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\leqslant n$. 由于 $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$，因此 $n=R(\boldsymbol{E})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$. 故 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$. □

例：矩阵秩性质的应用

例

证明：设 A 是 n 阶方阵，则

$$R(\boldsymbol{A}^*) = \begin{cases} n, & R(\boldsymbol{A}) = n; \\ 1, & R(\boldsymbol{A}) = n-1; \\ 0, & R(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2. \end{cases}$$

证明

(1) 若 $R(\boldsymbol{A}) = n$, $\boldsymbol{A}$ 可逆，从而 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆，$R(\boldsymbol{A}^*) = n$.

(2) 若 $R(\boldsymbol{A}) = n-1$, 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$ 可知 $R(\boldsymbol{A}^*) \leqslant 1$. 由于 $R(\boldsymbol{A}) = n-1$, $\boldsymbol{A}$ 存在非零的 $n-1$ 子式，从而 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{O}$. 故 $R(\boldsymbol{A}^*) = 1$.

(3) 若 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant n-2$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$ 子式均为零，从而 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{O}$. □

例：矩阵秩性质的应用

练习

(1) 设 $\alpha=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}}, \beta=(0,1,0,2)^{\mathrm{T}}$, 则 $R(\alpha\beta^{\mathrm{T}})=$ <u>1</u>.

(2) 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ 且 $R(\boldsymbol{A}^*)=1$, 则 (B).

(A) $a\neq b, a+2b\neq 0$　　(B) $a\neq b, a+2b=0$

(C) $a=b, a\neq 0$　　(D) $a=b=0$

(3) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵, 则 (A).

(A) $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{A})$　　(B) $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=R(\boldsymbol{A})$

(C) $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\max(R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B}))$　　(D) $R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$

答案

存在 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}, \boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{O}$, D 错误. 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$, C 错误. $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$ 行满秩, 选 A.

练习

(4) 设 $\boldsymbol{P}$ 为 3 阶非零矩阵，$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{PQ} = \boldsymbol{O}$，则 (A).

(A) $t \neq 6$ 时，$R(\boldsymbol{P}) = 1$　(B) $t \neq 6$ 时，$R(\boldsymbol{P}) = 2$

(C) $t = 6$ 时，$R(\boldsymbol{P}) = 1$　(D) $t = 6$ 时，$R(\boldsymbol{P}) = 2$

(5) 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶非零矩阵，且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$，则 $R(\boldsymbol{A})$ 与 $R(\boldsymbol{B})$(B).

(A) 必有一个等于 0　(B) 都小于 n

(C) 都等于 n　(D) 一个小于 n，一个等于 n

(6) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, \boldsymbol{B} \in M_{n\times m}$，则 (A).

(A) 当 $m > n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　(B) 当 $m > n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

(C) 当 $m < n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| = 0$　(D) 当 $m < n$ 时，必有 $|\boldsymbol{AB}| \neq 0$

例：矩阵秩性质的应用

练习

(7) 设 $\boldsymbol{A} \in M_{n\times m}, \boldsymbol{B} \in M_{m\times n}, n < m$. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$, 则 $R(\boldsymbol{B}) = \underline{\quad n \quad}$.

(8) 若 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a+2 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ a+3 & a+6 & a+4 \end{pmatrix}$ 等价, 则 (B).

(A) $a = -1$ (B) $a \neq -1$ (C) $a \neq 1$ (D) $a = 1$

(9) 设四阶方阵 $\boldsymbol{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 满足 $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = \boldsymbol{0}, \alpha_2 + 5\alpha_4 = \boldsymbol{0}$, 则 $R(\boldsymbol{A}^*) = \underline{\quad 0 \quad}$.