



合肥工业大学

HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: <https://zhangshenxing.gitee.io>

第一章 复数与复变函数

① 复数及其代数运算

第一节 复数及其代数运算

- 复数的概念
- 复数的代数运算
- 共轭复数

现在我们来正式介绍复数的概念. 因此引入一个记号 i 来表示 $x^2 = -1$ 的一个根.

现在我们来正式介绍复数的概念. 因此引入一个记号 i 来表示 $x^2 = -1$ 的一个根.

定义

固定一个记号 i , **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

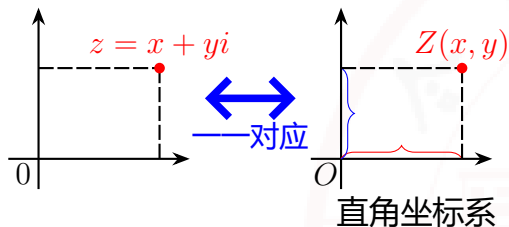
现在我们来正式介绍复数的概念. 因此引入一个记号 i 来表示 $x^2 = -1$ 的一个根.

定义

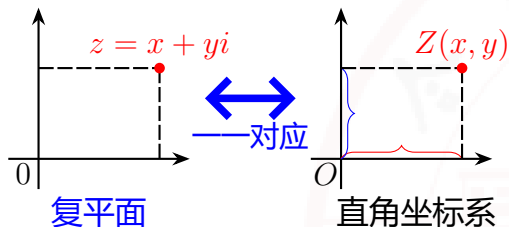
固定一个记号 i , **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

换言之, 每一个复数可以唯一地表达成 $x + yi$ 这样的形式.

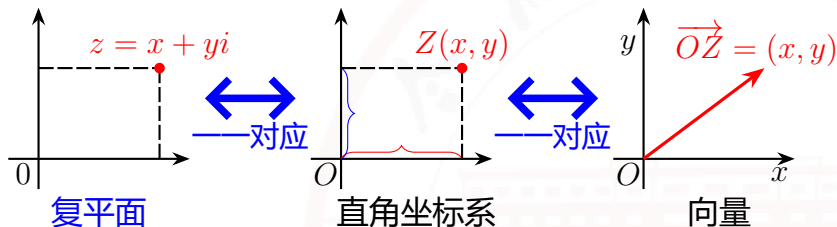
由于 \mathbb{C} 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



由于 \mathbb{C} 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.

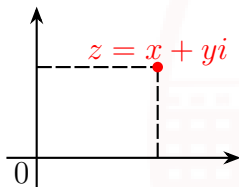


由于 \mathbb{C} 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



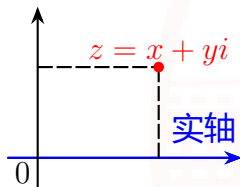
实部和虚部, 虚数和纯虚数

当 $y = 0$ 时, $z = x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点.



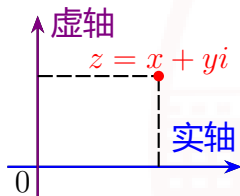
实部和虚部, 虚数和纯虚数

当 $y = 0$ 时, $z = x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们将直线 $y = 0$ 称为**实轴**.



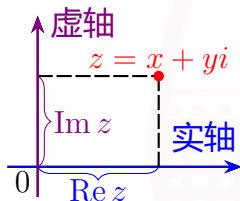
实部和虚部, 虚数和纯虚数

当 $y = 0$ 时, $z = x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们将直线 $y = 0$ 称为**实轴**. 相应地, 直线 $x = 0$ 被称为**虚轴**.



实部和虚部, 虚数和纯虚数

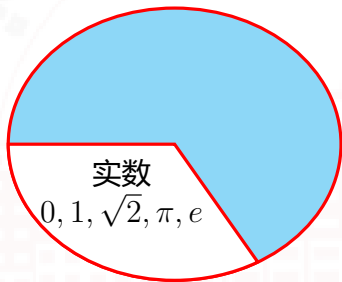
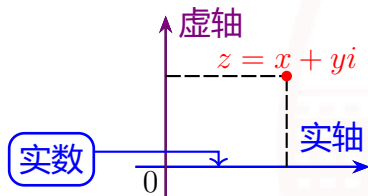
当 $y = 0$ 时, $z = x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们将直线 $y = 0$ 称为**实轴**. 相应地, 直线 $x = 0$ 被称为**虚轴**. 我们称 $z = x + yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的**实部** $\operatorname{Re} z = x$ 和**虚部** $\operatorname{Im} z = y$.



实部和虚部, 虚数和纯虚数

当 $y = 0$ 时, $z = x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们将直线 $y = 0$ 称为**实轴**. 相应地, 直线 $x = 0$ 被称为**虚轴**. 我们称 $z = x + yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的**实部** $\operatorname{Re} z = x$ 和**虚部** $\operatorname{Im} z = y$.

当 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, z 是实数.

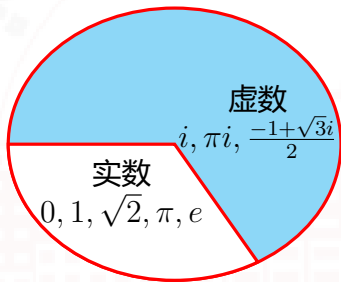
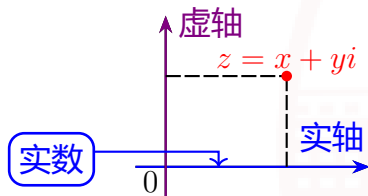


全体复数

实部和虚部, 虚数和纯虚数

当 $y = 0$ 时, $z = x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们将直线 $y = 0$ 称为**实轴**. 相应地, 直线 $x = 0$ 被称为**虚轴**. 我们称 $z = x + yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的**实部** $\operatorname{Re} z = x$ 和**虚部** $\operatorname{Im} z = y$.

当 $\text{Im } z = 0$ 时, z 是实数. 不是实数的复数是虚数.

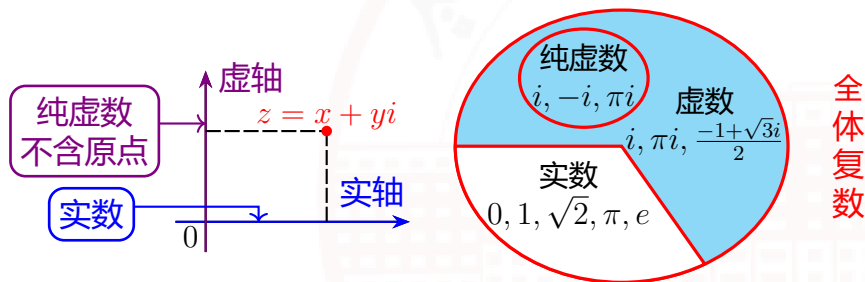


全体复数

实部和虚部, 虚数和纯虚数

当 $y = 0$ 时, $z = x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们将直线 $y = 0$ 称为**实轴**. 相应地, 直线 $x = 0$ 被称为**虚轴**. 我们称 $z = x + yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的**实部** $\operatorname{Re} z = x$ 和**虚部** $\operatorname{Im} z = y$.

当 $\text{Im } z = 0$ 时, z 是实数. 不是实数的复数是虚数. 当 $\text{Re } z = 0$ 且 $z \neq 0$ 时, 称 z 是纯虚数.



典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是: (1) 实数;
(2) 纯虚数.

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是: (1) 实数;
(2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是: (1) 实数;
(2) 纯虚数.

解

- (1) $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .
(2) $\operatorname{Re} z = x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4 .

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是: (1) 实数;
(2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .

(2) $\operatorname{Re} z = x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4 .

但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq -1, x = 4$.

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是: (1) 实数;
(2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .

(2) $\operatorname{Re} z = x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4 .

但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq -1$, $x = 4$.

练习

若 $x^2(1+i) + x(5+4i) + 4+3i$ 是纯虚数, 则实数 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是: (1) 实数;
(2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .

(2) $\operatorname{Re} z = x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4 .

但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq -1$, $x = 4$.

练习

若 $x^2(1+i) + x(5+4i) + 4+3i$ 是纯虚数, 则实数 $x = \underline{-4}$.

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$.

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$. 由 \mathbb{C} 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$. 由 \mathbb{C} 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$. 由 \mathbb{C} 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$. 由 \mathbb{C} 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量 \overrightarrow{OZ} 的加减法是一致的.

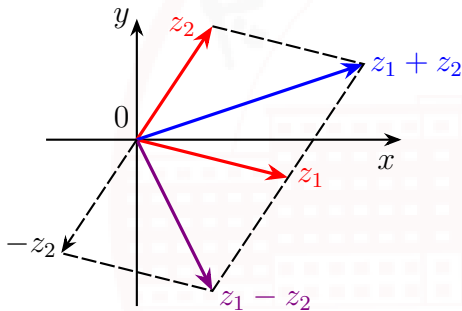
复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$. 由 \mathbb{C} 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量 \overrightarrow{OZ} 的加减法是一致的.



规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

,

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

对于正整数 n , 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘.

规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

对于正整数 n , 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘.

当 $z \neq 0$ 时, 还可以定义 $z^0 = 1, z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

例

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. 一般地, 对于整数 n ,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

例

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. 一般地, 对于整数 n ,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(2) 令 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$.

典型例题: 常见复数的幂次

例

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. 一般地, 对于整数 n ,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(2) 令 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$.

(3) 令 $z = 1 + i$,

典型例题: 常见复数的幂次

例

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. 一般地, 对于整数 n ,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(2) 令 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$.

(3) 令 $z = 1 + i$, 则

$$z^2 = 2i, \quad z^3 = -2 + 2i, \quad z^4 = -4, \quad z^8 = 16 = 2^4.$$

例

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. 一般地, 对于整数 n ,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(2) 令 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$.

(3) 令 $z = 1 + i$, 则

$$z^2 = 2i, \quad z^3 = -2 + 2i, \quad z^4 = -4, \quad z^8 = 16 = 2^4.$$

我们把满足 $z^n = 1$ 的复数 z 称为 n 次单位根.

典型例题: 常见复数的幂次

例

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. 一般地, 对于整数 n ,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(2) 令 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$.

(3) 令 $z = 1 + i$, 则

$$z^2 = 2i, \quad z^3 = -2 + 2i, \quad z^4 = -4, \quad z^8 = 16 = 2^4.$$

我们把满足 $z^n = 1$ 的复数 z 称为 n 次单位根. 那么 $1, i, -1, -i$ 是 4 次单位根, $1, \omega, \omega^2$ 是 3 次单位根.

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 =$.

解

根据等比数列求和公式,

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \frac{i^5 - 1}{i - 1}$$

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \underline{\quad 1 \quad}$.

解

根据等比数列求和公式，

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \frac{i^5 - 1}{i - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1.$$

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \underline{\quad 1 \quad}$.

解

根据等比数列求和公式,

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \frac{i^5 - 1}{i - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1.$$

练习 (2020 年 A 卷)

化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020} = \underline{\quad \quad \quad}$.

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \underline{1}$.

解

根据等比数列求和公式,

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \frac{i^5 - 1}{i - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1.$$

练习 (2020 年 A 卷)

化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020} = \underline{1}$.

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a , $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 \mathbb{Q} , 实数全体 \mathbb{R} 也构成域, 它们是 \mathbb{C} 的子域.

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a , $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 \mathbb{Q} , 实数全体 \mathbb{R} 也构成域, 它们是 \mathbb{C} 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域.

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a , $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 \mathbb{Q} , 实数全体 \mathbb{R} 也构成域, 它们是 \mathbb{C} 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域. 也就是说, 对于任何一个非常数的复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1z + c_0, \quad n \geq 1,$$

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a , $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 \mathbb{Q} , 实数全体 \mathbb{R} 也构成域, 它们是 \mathbb{C} 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域. 也就是说, 对于任何一个非常数的复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1z + c_0, \quad n \geq 1,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0) = 0$.

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a , $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 \mathbb{Q} , 实数全体 \mathbb{R} 也构成域, 它们是 \mathbb{C} 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域. 也就是说, 对于任何一个非常数的复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1z + c_0, \quad n \geq 1,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0) = 0$. 我们会在第五章证明该结论.

在 \mathbb{Q}, \mathbb{R} 上可以定义出一个好的大小关系,

在 \mathbb{Q}, \mathbb{R} 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则 $a > b$ 或 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c , $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

在 \mathbb{Q}, \mathbb{R} 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则 $a > b$ 或 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c , $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

而 \mathbb{C} 却不是有序域.

在 \mathbb{Q}, \mathbb{R} 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则 $a > b$ 或 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c , $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

而 \mathbb{C} 却不是有序域. 如果 $i > 0$, 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

在 \mathbb{Q}, \mathbb{R} 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则 $a > b$ 或 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c , $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

而 \mathbb{C} 却不是有序域. 如果 $i > 0$, 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

于是 $0 > i$, 矛盾! 同理 $i < 0$ 也不可能.

复数也有其它的构造方式, 例如

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$$

复数也有其它的构造方式, 例如

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$$

其中 $E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$.

复数也有其它的构造方式, 例如

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$$

其中 $E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$.

此时自然地有加法、乘法 (满足交换律)、取逆等运算, 从而这个集合构成一个域.

复数也有其它的构造方式, 例如

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$$

其中 $E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$.

此时自然地有加法、乘法 (满足交换律)、取逆等运算, 从而这个集合构成一个域. 由于 $J^2 = -E$, 所以 J 实际上就相当于虚数单位, 这个域就是我们前面定义的复数域 \mathbb{C} .

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 \bar{z} . 换言之, $\bar{z} = x - yi$.

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 \bar{z} . 换言之, $\bar{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** \bar{z} . 换言之, $\bar{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- z 是 \bar{z} 的共轭复数.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的**共轭复数** \bar{z} . 换言之, $\bar{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- z 是 \bar{z} 的共轭复数.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.
- $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.

例题：共轭复数判断实数

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

例题：共轭复数判断实数

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$



例题：共轭复数判断实数

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

即

$$z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2), \quad (z-\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0.$$



例题：共轭复数判断实数

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

即

$$z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2), \quad (z-\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0.$$

由 $y \neq 0$ 可知 $z \neq \bar{z}$.



例题：共轭复数判断实数

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

即

$$z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2), \quad (z-\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0.$$

由 $y \neq 0$ 可知 $z \neq \bar{z}$. 故上述等式等价于 $z\bar{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$. □

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到.

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它. 由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$,

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它. 由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$, 因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$



例题: 复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数,

例题: 复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例题: 复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}, \text{ 求 } \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \text{ 以及 } z\bar{z}.$$

例题: 复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}, \text{ 求 } \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \text{ 以及 } z\bar{z}.$$

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$$

例题: 复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}, \text{ 求 } \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \text{ 以及 } z\bar{z}.$$

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

例题: 复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}, \text{ 求 } \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \text{ 以及 } z\bar{z}.$$

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

$$\text{因此 } \operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad z\bar{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

例题: 复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

例题: 复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i}$$

例题: 复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2}$$

例题: 复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2} \\ &= \frac{(-15-20)+(-20+15)i}{25}\end{aligned}$$

例题: 复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

例题: 复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i$, $z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

因此 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$.