



合肥工业大学

HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: <https://zhangshenxing.gitee.io>

第二章 解析函数

- ① 解析函数的概念
- ② 函数解析的充要条件
- ③ 初等函数

第一节 解析函数的概念

- 可导的函数
- 可微的函数
- 解析的函数

由于 \mathbb{C} 和 \mathbb{R} 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义

设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 D , $z_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 称 $f(z)$ 在 D 内可导.

典型例题: 线性函数的不可导性

例

函数 $f(z) = x + 2yi$ 在哪些点处可导?

解

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}. \end{aligned}$$

当 $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时, 上述极限为 2; 当 $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时, 上述极限为 1. 因此该极限不存在, $f(z)$ 处处不可导.

例题: 复变函数的导数

练习

函数 $f(z) = x - yi$ 在哪些点处可导?

答案

处处不可导.

例

求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z. \end{aligned}$$

和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

定理

- $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(cf)' = cf'$;
- $(fg)' = f'g + fg'$, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$;
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z)$;
- $f'(z) = \frac{1}{(f^{-1})'(w)}, w = f(z)$.

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

定义

如果存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $dw = A\Delta z$.

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且

$$dw = f'(z_0)\Delta z, \quad dz = \Delta z. \quad \text{故} \quad dw = f'(z_0) dz, \quad f'(z_0) = \frac{dw}{dz}.$$

练习

单选题: (2021 年 B 卷) 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析是 $f(z)$ 在该点可导的 (A).

- (A) 充分条件 (B) 必要条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

答案

解析要求在 z_0 的一个邻域内都可导才行.

例

研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

解

由于

$$\begin{aligned}\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} \\ &= \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\Delta x - \Delta yi}{\Delta x + \Delta yi},\end{aligned}$$

若 $z = 0$, 则当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时该极限为 0.

若 $z \neq 0$, 则当 $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$ 时该极限为 $\bar{z} + z$; 当 $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时该极限为 $\bar{z} - z$. 因此此时极限不存在.

故 $f(z)$ 仅在 $z = 0$ 处可导, 从而处处不解析.

第二节 函数解析的充要条件

通过对一些简单函数的分析, 我们会发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 x, y, \bar{z} 等内容. 这种现象并不是孤立的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.

设 f 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

由于 $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$, 因此

$$u, v \text{ 可微且 } u_x = v_y = a, v_x = -u_y = b.$$

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$du = u_x dx + u_y dy = u_x dx - v_x dy,$$

$$dv = v_x dx + v_y dy = v_x dx + u_x dy,$$

$$\begin{aligned} df &= d(u + iv) = (u_x + iv_x) dx + (-v_x + iu_x) dy \\ &= (u_x + iv_x) d(x + iy) \\ &= (u_x + iv_x) dz = (v_y - iu_y) dz. \end{aligned}$$

故

$f(z)$ 在 z 处可导, 且 $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$.

由此我们得到

柯西-黎曼方程 (C-R 方程)

$f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u, v 可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$



由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理

- 如果 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 **C-R** 方程, 则 $f(z)$ 在 z 可导.
- 如果 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 上处处连续, 且满足 **C-R** 方程, 则 $f(z)$ 在 D 上可导 (从而解析).

柯西-黎曼方程的 z, \bar{z} 形式 *

注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}, y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$. 如果我们定义 f 对 z 和 \bar{z} 的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

那么 C-R 方程等价于

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{u_x + iv_x + iu_y - v_y}{2} = 0.$$

所以我们可以把 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ 叫做 C-R 方程.

例

(1) 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u = x, v = -y$ 可知

$$u_x = 1,$$

$$u_y = 0,$$

$$v_x = 0,$$

$$v_y = -1.$$

因为 $u_x = 1 \neq v_y = -1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

也可以从 $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$ 看出. 不过这种方法由于课本上没有, 所以考试的时候最好只把它作为一种验算手段.

例 (续)

(2) 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$\begin{aligned}u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\v_x &= y, & v_y &= x.\end{aligned}$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0) = u_x(0) + iv_x(0) = 0.$$

也可从 $f(z) = \frac{z(z + \bar{z})}{2}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{2}$ 看出.

例 (续)

(3) 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$u_x = e^x \cos y,$$

$$u_y = -e^x \sin y,$$

$$v_x = e^x \sin y,$$

$$v_y = e^x \cos y.$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z).$$

实际上, 这个函数就是复变量的指数函数 e^z .

练习

单选题: (2022 年 A 卷) 下面哪个函数在 $z = 0$ 处不可导? (A)

(A) $2x + 3yi$

(B) $2x^2 + 3y^2i$

(C) $e^x \cos y + ie^x \sin y$

(D) $x^2 - xyi$

答案

根据 C-R 方程可知对于 A, $u_x(0) = 2 \neq v_y(0) = 3$. 对于 BD, 各个偏导数在 0 处取值都是 0. C 则是处处都可导.

例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

解

由于

$$u_x = 2x + ay,$$

$$u_y = ax + 2by,$$

$$v_x = 2cx + dy,$$

$$v_y = dx + 2y,$$

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$

$$a = d = 2, \quad b = c = -1,$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2y + i(-2x + 2y) = (2 - 2i)z.$$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明

由于 $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$, 因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数. \square

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件等价:

- $f(z)$ 是一常数,
- $|f(z)|$ 是一常数,
- $\operatorname{Re} f(z)$ 是一常数,
- $v = u^2$,
- $f'(z) = 0$,
- $\arg f(z)$ 是一常数,
- $\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数,
- $u = v^2$.

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x, y) = c_1$ 和曲线族 $v(x, y) = c_2$ 互相正交.

证明

由于 $f'(z) = u_x - iu_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零. 对 $u(x, y) = c_1$ 使用隐函数求导法则得 $u_x dx + u_y dy = 0$, 从而 $(u_x, -u_y)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理 $(v_x, -v_y)$ 是 $v(x, y) = c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0,$$

因此二者正交. □

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性.

这是因为 $df = f'(z_0) dz$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 上述例子是该结论关于 w 复平面上曲线族 $u = c_1, v = c_2$ 的一个特殊情形.

最后我们来看复数在求导中的一个应用.

例

设 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, 则它在除 $z = \pm i$ 外处处解析. 当 $z = x$ 为实数时,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{(n)} &= f^{(n)}(x) = \frac{i}{2} \left[\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right]^{(n)} \\ &= \frac{i}{2} \cdot (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right] \\ &= (-1)^{n+1} n! \operatorname{Im} \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n! \sin[(n+1) \operatorname{arccot} x]}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

第三节 初等函数

- 指数函数
- 对数函数
- 幂函数
- 三角函数和反三角函数

指数函数的性质

指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.

例

函数 $f(z) = e^{z/6}$ 的周期是 $12\pi i$.

解

设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$. 因此存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

从而 $z_1 - z_2 = 12k\pi i$. 所以 $f(z)$ 的周期是 $12\pi i$.

一般地, $\exp(az + b)$ 的周期是 $\frac{2\pi i}{a}$ (或写成 $-\frac{2\pi i}{a}$), $a \neq 0$.

典型例题：对数函数的计算

例

求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解

$$\text{Ln } 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}, \text{ 主值就是 } \ln 2.$$
$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}, \text{主值是 } \pi i.$$

典型例题：对数函数的计算

例

求 $\text{Ln}(-2 + 3i), \text{Ln}(3 - \sqrt{3}i), \text{Ln}(-3)$.

解

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(-2+3i) &= \ln|-2+3i| + i \operatorname{Arg}(-2+3i) \\ &= \frac{1}{2} \ln 13 + \left(-\arctan \frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln}(3 - \sqrt{3}i) &= \ln|3 + \sqrt{3}i| + i \operatorname{Arg}(3 - \sqrt{3}i) \\ &= \ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)i = \ln 2\sqrt{3} + \left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\text{Ln}(-3) = \ln(-3) + i \text{Arg}(-3) = \ln 3 + (2k + 1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

典型例题: 对数函数的计算

例

解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解

由于 $1 + \sqrt{3}i = 2 \exp \frac{\pi i}{3}$, 因此

$$z = \operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right) \pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习

求 $\ln(-1 - \sqrt{3}i) = \underline{\ln 2 - \frac{2\pi i}{3}}$.

设 $z_0 = -x < 0$ 是负实数. 由于

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(-x + yi) = \ln x + \pi, \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi,$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续. 实际上, $\lim_{z \rightarrow 0} \ln z = \infty$.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数, 从而

$$(\ln z)' = \frac{1}{z},$$

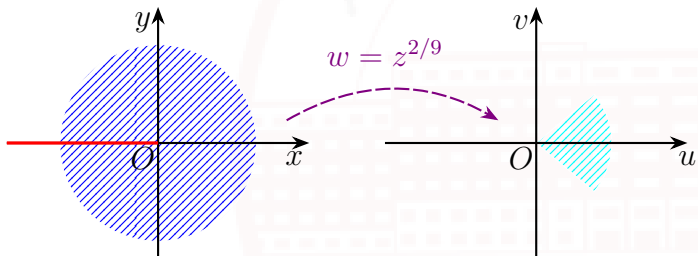
$\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

幂函数的性质: a 为分数时

当 $a = \frac{p}{q}$ 为分数, p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp \left[\frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q} \right], \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 是处处解析的. 事实上它就是 $\sqrt[q]{z^p} = (\sqrt[q]{z})^p$.



幂函数的性质: a 为其他情形

对于其它的 a , z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi ai$ 不可能是 $2\pi i$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 也是处处解析的.

a	z^a 的值	z^a 的解析区域
整数 n	单值	$n \geq 0$ 时处处解析 $n < 0$ 时除零点外解析
分数 p/q	q 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

典型例题：幂函数的计算

例

求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解

$$\begin{aligned} 1^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} \\ &= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \\ i^i &= e^{i \operatorname{Ln} i} = \exp \left[i \cdot \left(2k + \frac{1}{2} \right) \pi i \right] \\ &= \exp \left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

练习

填空题: (2021 年 A 卷) 3^i 的主辐角是 $\ln 3$.

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 y 成立, 我们将其推广到复数情形. 定义余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

那么欧拉恒等式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ 对任意复数 z 均成立.

不难得到

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

其中 $\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cos iy$, $\operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = -i \sin iy$.

当 $y \rightarrow \infty$ 时, $\sin iy = i \operatorname{sh} y$ 和 $\cos iy = \operatorname{ch} y$ 都 $\rightarrow \infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数. 于是我们可类似定义其它三角函数

$$\begin{aligned} \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi, & \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}, z \neq k\pi, \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi, & \csc z &= \frac{1}{\sin z}, z \neq k\pi. \end{aligned}$$

反三角函数和反双曲函数

设 $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值).}$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的.

同理, 我们有:

- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$
- 反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}.$

例题: 解三角函数方程

例

解方程 $\sin z = 2$.

解

由于 $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$, 我们有 $e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$. 于是
 $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$