



复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

第二章 解析函数

- 1 解析函数的概念
- 2 函数解析的充要条件
- 3 初等函数

第一节 解析函数的概念

- ■可导的函数
- ■可微的函数
- 解析的函数

复变函数的导数

由于 $\mathbb C$ 和 $\mathbb R$ 一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分。

定义

设 w = f(z) 的定义域是区域 $D, z_0 \in D$. 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 f(z) 在 z_0 可导. 这个极限值称为 f(z) 在 z_0 的导数, 记作

$$f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果 f(z) 在区域 D 内处处可导, 称 f(z) 在 D 内可导.

例

函数 f(z) = x + 2yi 在哪些点处可导?

解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}.$$

当 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ 时, 上式 $\to 2$; 当 $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ 时, 上式 $\to 1$. 因此该极限不存在, f(z) 处处不可导.

例题: 复变函数的导数

练习

函数 f(z) = x - yi 在哪些点处可导?

答案

处处不可导.

例

 $\overline{\mathbf{x}} f(z) = z^2$ 的导数.

解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

定理

- (c)' = 0, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$, (cf)' = cf';
- $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g fg'}{g^2};$
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z);$
- $g'(z) = \frac{1}{f'(w)}, g = f^{-1}, w = g(z).$

可导蕴含连续

定理

若 f(z) 在 z_0 可导, 则 f(z) 在 z_0 连续.

证明

该定理的证明和实变量情形完全相同. 设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z$$

$$= f'(z_0) \cdot 0 = 0.$$

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似。

定义

如果存在常数 A 使得函数 w = f(z) 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 f(z) 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 f(z) 在 z_0 的微分, 记作 $\mathrm{d} w = A\Delta z$.

和一元实变函数情形一样,复变函数的可微和可导是等价的,且 $dw = f'(z_0)\Delta z$, $dz = \Delta z$. 故 $dw = f'(z_0)\,dz$, $f'(z_0) = \frac{dw}{dz}$.

定义

- 若函数 f(z) 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 f(z) 在 z_0 解析.
- 若 f(z) 在区域 D 内处处解析, 则称 f(z) 在 D 内解析, 或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.
- <math><math>f(z) 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 f(z) 的一个奇点.

由于区域 D 是一个开集, 其中的任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 的邻域. 所以 f(z) 在 D 内解析和在 D 内可导是等价的.

如果 f(z) 在 z_0 解析, 则 f(z) 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 f(z) 解析点全体是一个开集.

解析函数

练习

单选题: (2021 年 B 卷) 函数 f(z) 在点 z_0 处解析是 f(z) 在该点可导的(A).

(A) 充分条件

(B) 必要条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件

答案

解析要求在 20 的一个邻域内都可导才行.

例

研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

解

由于

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\overline{z} + \overline{\Delta z}) - z\overline{z}}{\Delta z}$$
$$= \overline{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\Delta x - \Delta yi}{\Delta x + \Delta yi},$$

若 z=0, 则当 $\Delta z \rightarrow 0$ 时该极限为 0.

若 $z \neq 0$, 则当 $\Delta y = 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ 时该极限为 $\overline{z} + z$; 当 $\Delta x = 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ 时该极限为 $\overline{z} - z$. 因此此时极限不存在.

 $\Delta y \rightarrow 0$ 的 该做帐例 z = z. 因此此的极帐不得任故 f(z) 仅在 z = 0 处可导, 从而处处不解析.

第二节 函数解析的充要条件

- 柯西-黎曼方程
- 柯西-黎曼方程的应用

可导函数的特点

通过对一些简单函数的分析,我们会发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式,而不解析的往往包含 x,y,\overline{z} 等内容。这种现象并不是孤立的。我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系。

为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.

可导的等价刻画: 形式推导

设
$$f$$
 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

由于
$$o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$$
, 因此

$$u, v$$
 可微且 $u_x = v_y = a, v_x = -u_y = b.$

可导的等价刻画: 形式推导

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$du = u_x dx + u_y dy = u_x dx - v_x dy,$$

$$dv = v_x dx + v_y dy = v_x dx + u_x dy,$$

$$df = d(u + iv) = (u_x + iv_x) dx + (-v_x + iu_x) dy$$

$$= (u_x + iv_x) d(x + iy)$$

$$= (u_x + iv_x) dz = (v_y - iu_y) dz.$$

故

$$f(z)$$
 在 z 处可导, 且 $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$.

可导的等价刻画: 柯西-黎曼方程

由此我们得到

柯西-黎曼方程 (C-R 方程)

 $\overline{f(z)}$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u,v 可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$





可导的充分性条件

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理

- 如果 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 f(z) 在 z 可导.
- 如果 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 上处处连续, 且满足 C-R 方程, 则 f(z) 在 D 上可导 (从而解析).

例

(1) 函数 $f(z) = \overline{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $\overline{u} = x, v = -y$ 可知

$$u_x = 1,$$
 $u_y = 0,$ $v_x = 0,$ $v_y = -1.$

因为 $u_x = 1 \neq v_y = -1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

例 (续)

(2) 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$u_x = 2x,$$
 $u_y = 0,$ $v_x = y,$ $v_y = x.$

由 2x = x, 0 = -y 可知只有 x = y = 0, z = 0 满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0) = u_x(0) + iv_x(0) = 0.$$

例 (续)

(3) 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$u_x = e^x \cos y,$$
 $u_y = -e^x \sin y,$
 $v_x = e^x \sin y,$ $v_y = e^x \cos y.$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z).$$

实际上,这个函数就是复变量的指数函数 e^z .

练习

单选题: (2022 年 A 卷) 下面哪个函数在 z=0 处不可导? (A)

(A)
$$2x + 3yi$$
 (B) $2x^2 + 3y^2i$

(C) $e^x \cos y + ie^x \sin y$ (D) $x^2 - xyi$

答案

根据 C-R 方程可知对于 A, $u_x(0) = 2 \neq v_y(0) = 3$. 对于 BD, 各个偏导数在 0 处取值都是 0. C则是处处都可导.

例

设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 f'(z).

$$u_x = 2x + ay,$$
 $u_y = ax + 2by,$
 $v_x = 2cx + dy,$ $v_y = dx + 2y,$

因此
$$2x + ay = dx + 2y$$
, $ax + 2by = -(2cx + dy)$, $a = d = 2$. $b = c = -1$.

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2y + i(-2x + 2y) = (2 - 2i)z.$$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 则 f(z) 在 D 内是一常数.

证明

由于
$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$$
, 因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数.

类似地可以证明, 若 f(z) 在 D 内解析, 则下述条件等价:

- f(z) 是一常数,
- | *f*(*z*)| 是一常数,
- Re f(z) 是一常数,
- $v = u^2$,

- f'(z) = 0,
- arg f(z) 是一常数,
- $\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数,
- $u = v^2$.

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明

由于 $f'(z) = u_x - iu_y$, 因此 u_x, u_y 不全为零. 对 $u(x,y) = c_1$ 使用隐函数求导法则得 $u_x dx + u_y dy = 0$, 从而 $(u_x, -u_y)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理 $(v_x, -v_y)$ 是 $v(x,y) = c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0,$$

因此二者正交.

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角 性.

这是因为 $df = f'(z_0) dz$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为 中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 上述例子是该结论关于 w 复平面上曲线族 $u=c_1,v=c_2$ 的一个特殊情形.

最后我们来看复数在求导中的一个应用.

□章 解析函数 ▶2 函数解析的充要条件 ▶B 柯西-黎曼方程的应用 #∩∩∩∩#∩∩∩∩∩■∩

例

设 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, 则它在除 $z = \pm i$ 外处处解析. 当 z = x 为实数 时

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{i}{2} \left[\frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right]^{(n)}$$

$$= \frac{i}{2} \cdot (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right]$$

$$= (-1)^{n+1} n! \operatorname{Im} \frac{1}{(x+i)^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n n! \sin[(n+1) \operatorname{arccot} x]}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

第三节 初等函数

- ■指数函数
- ■对数函数
- ■幂函数
- 三角函数和反三角函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

- (1) $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$ (欧拉恒等式);
- (2) $\exp z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);
- (3) $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ (级数定义);
- (4) $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z=x\in\mathbb{R}$ 时, $\exp z=e^x$ (e^x 的解析延拓).

有些人会从 e^x , $\cos x$, $\sin x$ 的泰勒展开

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们在学习了幂级数之后就可知(1)和(3)是等价的.

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^{\infty}$$
 型不定式)
$$= \exp \left[\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2} \left(\frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.$$

不妨设
$$n > |z|$$
, 这样 $1 + \frac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n \to \infty} n \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} n \arctan\frac{y}{n+x} = \lim_{n \to \infty} \frac{ny}{n+x} = y.$$

故 $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$.

指数函数 定义指数函数

 $\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$

我们已知 $\exp z$ 是一个处处解析的函数, 且 $(\exp z)' = \exp z$. 不 难看出

- $\exp z \neq 0$:
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$, $\mathbb{P} \exp z$ **周期为** $2\pi i$;
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$;
- $\exp z_1 = \exp z_2$ **当且仅当** $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

为了方便,我们也记 $e^z = \exp z$.

指数函数的性质

指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z=c$ 映为圆周族 $|w|=e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z=c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w=c$.

例

函数 $f(z) = e^{z/6}$ 的周期是 $12\pi i$.

解

设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$. 因此存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

从而 $z_1 - z_2 = 12k\pi i$. 所以 f(z) 的周期是 $12\pi i$.

一般地, $\exp(az+b)$ 的周期是 $\frac{2\pi i}{a}$ (或写成 $-\frac{2\pi i}{a}$), $a\neq 0$.

对数函数定义为指数函数的反函数. 设 $z \neq 0$, 满足方程 $e^w = z$ 的 w = f(z) 被称为对数函数, 记作 $w = \operatorname{Ln} z$.

为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 Arg z 和 arg z.

对数函数及其主值

设
$$e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$$
, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对数函数

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数

(2) 定义对数函数主值

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

对于每一个 k, $\ln z + 2k\pi i$ 都给出了 $\ln z$ 的一个单值分支. 特别地. 当 z = x > 0 是正实数时. $\ln z$ 就是实变的对数函数.

例

 $\overline{\mathbf{x}} \operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln} (-1)$ 以及它们的主值.

解

- (1) $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$, 主值就是 $\ln 2$.
- (2) $\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}, \text{ £d} \neq \pi i.$

例

求 $\operatorname{Ln}(-2+3i), \operatorname{Ln}(3-\sqrt{3}i), \operatorname{Ln}(-3).$

解

(1)
$$\operatorname{Ln}(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i\operatorname{Arg}(-2+3i)$$

= $\frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i$, $k \in \mathbb{Z}$.

(2)
$$\operatorname{Ln}(3 - \sqrt{3}i) = \ln |3 + \sqrt{3}i| + i \operatorname{Arg}(3 - \sqrt{3}i)$$

= $\ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)i = \ln 2\sqrt{3} + \left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$

(3)
$$\operatorname{Ln}(-3) = \ln(-3) + i \operatorname{Arg}(-3) = \ln 3 + (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

例

解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解

由于
$$1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$$
, 因此

$$z = \text{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{ln} z + \operatorname{Ln} 1 = \operatorname{ln} z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及主辐角的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

而当 $|n| \ge 2$ 时, $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$ 不成立. 以上等式换成 $\ln z$ 均不一定成立.

设
$$z_0 = -x < 0$$
 是负实数. 由于

$$\lim_{y \to 0^+} \ln(-x + yi) = \ln x + \pi, \quad \lim_{y \to 0^-} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi,$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续. 实际上, $\lim_{z \to 0} \ln z = \infty$.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数, 从而

$$(\ln z)' = \frac{1}{z},$$

ln z 在除负实轴和零处的区域解析.

幂函数

 $\overline{(1)}$ 设 $a \neq 0$, $z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp[a \ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 它的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln |z| + ia \arg z).$$

当 $a \ge 0$ 是非负实数时, 我们约定 $0^a = 0$.

幂函数的性质: a 为整数时

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为 $e^{2ak\pi i}=1$, 所以 $w=z^a$ 是单值的. 此时 z^a 就是我们之前定义的乘幂.

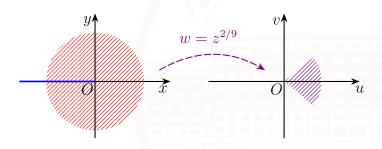
当 a 是非负整数时, z^a 在复平面上解析; 当 a 是负整数时, z^a 在 $\mathbb{C}-\{0\}$ 上解析.

幂函数的性质: a 为分数时

当 $a=\frac{p}{q}$ 为分数, p,q 为互质的整数且 q>1 时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left[\frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q}\right], \quad k = 0, 1, \dots, q - 1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w=\exp(a\ln z)$ 是处处解析的. 事实上它就是 $\sqrt[q]{z^p}=(\sqrt[q]{z})^p$.



幂函数的性质: a 为其他情形

对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi ai$ 不可能是 $2\pi i$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 也是处处解析的.

a	z^a 的值	z^a 的解析区域
整数 n	单值	$n \geqslant 0$ 时处处解析 $n < 0$ 时除零点外解析
分数 p/q	<i>q</i> 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

典型例题: 幂函数的计算

例

求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i .

解

(1)
$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

(2)
$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = \exp\left[i \cdot \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i\right] = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right),$$
 $k \in \mathbb{Z}.$

练习

填空题: (2021 年 A 卷) 3ⁱ 的主辐角是 ln 3.

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^{a} = e^{a \ln z} \cdot 1^{a} = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

对于整数 n, 我们总有 $(z^a)^n=z^{an}$. 这里换成主值也成立. 而 $z^a\cdot z^b=z^{a+b}$ 仅对主值总成立.

我们来看 $\operatorname{Ln} z^a = a \operatorname{Ln} z$ 何时成立. 由于

$$\operatorname{Ln} z^{a} = \operatorname{Ln} e^{a \operatorname{Ln} z} = a \operatorname{Ln} z + 2\ell \pi i$$
$$= a \operatorname{ln} z + (ak + \ell) \cdot 2\pi i, \quad k, \ell \in \mathbb{Z},$$
$$a \operatorname{Ln} z = a \operatorname{ln} z + (ak) \cdot 2\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

因此当且仅当 $a = \pm \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}$ 时, $\operatorname{Ln} z^a = a \operatorname{Ln} z$ 成立. 对于除此之外的 a. 该式子均不成立.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是不同的. 因为后者在 $a \notin \mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆, 以后我们总默认 e^a 表示指数函数 $\exp a$.

三角函数的定义

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 y 成立, 我们将其推广到复数情形.

余弦和正弦函数

定义余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

那么欧拉恒等式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ 对任意复数 z 均成立.

三角函数的性质

不难得到

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

其中
$$\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cos iy$$
, $\operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = -i\sin iy$.

当 $y \to \infty$ 时, $\sin iy = i \sin y$ 和 $\cos iy = \cosh y$ 都 $\to \infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数. 于是我们可类似定义 其它三角函数

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, z \neq k\pi,$$
$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}, z \neq k\pi.$$

三角函数的性质

这些三角函数的奇偶性,周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$,
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$,
- $\bullet \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

th
$$z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz$$
, $z \neq (k + \frac{1}{2}) \pi i$.

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

 $\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ 的周期是 $2\pi i, \operatorname{th} z$ 的周期是 πi .

反三角函数和反双曲函数

设
$$z=\cos w=rac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$$
,则
$$e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0,\quad e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}\;$$
(双值).

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的.

同理, 我们有:

- 反正弦函数 $Arcsin z = -i Ln(iz + \sqrt{z^2 1})$
- 反正切函数 $\arctan z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 1})$
- 反双曲正弦函数 $Arsh z = Ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$
- 反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$.

例

解方程 $\sin z = 2$.

解

由于
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$
, 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

于是
$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$$
,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = (2k + \frac{1}{2})\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$