复变函数与积分变换

张神星

合肥工业大学

2022 年秋季学期

第六章　积分变换

本章作业

- 1.2 **11**(1)(3)(5)
- 1.3 **5**
- 2.1 **2**(1)
- 2.2 **1**(1)(5)(9), **6**(1)(3)(6)
- 2.4 **3**(13)
- 2.5 **1**(5), **2**(1), **5**(1)

积分变换的引入

- 在学习指数和对数的时候，我们了解到利用对数可以将乘除、幂次转化为加减、乘除.

- 在学习指数和对数的时候，我们了解到利用对数可以将乘除、幂次转化为加减、乘除.
- 例 计算 12345×67890.

- 在学习指数和对数的时候, 我们了解到利用对数可以将乘除、幂次转化为加减、乘除.
- 例 计算 12345×67890.
- 解 通过查对数表得到

$$\ln 12345 \approx 9.4210, \qquad \ln 67890 \approx 11.1256.$$

- 在学习指数和对数的时候，我们了解到利用对数可以将乘除、幂次转化为加减、乘除.
- 例 计算 12345×67890.
- 解 通过查对数表得到

$$\ln 12345 \approx 9.4210, \qquad \ln 67890 \approx 11.1256.$$

- 将二者相加并通过反查对数表得到原值

$$12345 \times 67890 \approx \exp(20.5466) \approx 8.3806 \times 10^8.$$

积分变换的引入

- 而对于函数而言，我们常常要解函数的微积分方程.

- 而对于函数而言，我们常常要解函数的微积分方程.
- 例 解微分方程

$$\begin{cases} y'' + y = t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

- 而对于函数而言，我们常常要解函数的微积分方程.
- 例 解微分方程

$$\begin{cases} y'' + y = t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

- 解 我们希望能找到一种函数变换 $\mathscr{L}$，使得它可以把函数的微分和积分变成代数运算，计算之后通过反变换 $\mathscr{L}^{-1}$ 求得原来的解.

积分变换的引入

- 而对于函数而言，我们常常要解函数的微积分方程.
- 例 解微分方程

$$\begin{cases} y''+y=t, \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

- 解 我们希望能找到一种函数变换 $\mathscr{L}$，使得它可以把函数的微分和积分变成代数运算，计算之后通过反变换 $\mathscr{L}^{-1}$ 求得原来的解.
- 这个变换最常见的就是我们将要介绍的傅里叶变换和拉普拉斯变换.

1. 傅里叶积分和傅里叶变换
2. 傅里叶变换的性质和应用
3. 拉普拉斯变换

傅里叶级数

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.

傅里叶级数

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.
- 我们知道 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 周期也是 T, 其中 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

傅里叶级数

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.
- 我们知道 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 周期也是 T, 其中 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
- 如果 $f(t)$ 在 $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件:

傅里叶级数

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.
- 我们知道 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 周期也是 T, 其中 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
- 如果 $f(t)$ 在 $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件:
  - 间断点只有有限多个, 且均为第一类间断点;

傅里叶级数

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.
- 我们知道 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 周期也是 T, 其中 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$.
- 如果 $f(t)$ 在 $\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件:
  - 间断点只有有限多个, 且均为第一类间断点;
  - 只有有限个极值点,

傅里叶级数

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.
- 我们知道 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 周期也是 T, 其中 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
- 如果 $f(t)$ 在 $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件:
  - 间断点只有有限多个, 且均为第一类间断点;
  - 只有有限个极值点,
- 则我们有傅里叶级数展开:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right).$$

傅里叶级数

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.
- 我们知道 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 周期也是 T, 其中 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$.
- 如果 $f(t)$ 在 $\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件:
  - 间断点只有有限多个, 且均为第一类间断点;
  - 只有有限个极值点,
- 则我们有傅里叶级数展开:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right).$$

- 当 t 是间断点时, 傅里叶级数的左侧需改为 $\dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}$.

傅里叶级数的复指数形式

- 我们来将其改写为复指数形式.

傅里叶级数的复指数形式

- 我们来将其改写为复指数形式.
- 物理中为了与电流 i 区分, 通常用 j 来表示虚数单位.

傅里叶级数的复指数形式

- 我们来将其改写为复指数形式.
- 物理中为了与电流 i 区分, 通常用 j 来表示虚数单位. 由

$$\cos x=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

- 我们来将其改写为复指数形式.
- 物理中为了与电流 i 区分, 通常用 j 来表示虚数单位. 由

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

- 可知 $f(t)$ 的傅里叶级数可以表示为函数 $e^{jn\omega t}$ 的线性组合.

傅里叶级数的复指数形式

- 我们来将其改写为复指数形式.
- 物理中为了与电流 i 区分, 通常用 j 来表示虚数单位. 由

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

- 可知 $f(t)$ 的傅里叶级数可以表示为函数 $e^{jn\omega t}$ 的线性组合.
- 设 $f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}$, 则

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

傅里叶级数的复指数形式

- 我们来将其改写为复指数形式.
- 物理中为了与电流 i 区分, 通常用 j 来表示虚数单位. 由

$$\cos x=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

- 可知 $f(t)$ 的傅里叶级数可以表示为函数 $e^{jn\omega t}$ 的线性组合.
- 设 $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{jn\omega t}$, 则

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

- 于是我们得到周期函数傅里叶级数的复指数形式:

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(\tau)e^{-jn\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{jn\omega t}.$$

从傅里叶级数到傅里叶积分公式

- 对于一般的函数 $f(t)$, 它未必是周期的.

- 对于一般的函数 $f(t)$, 它未必是周期的.
- 我们考虑它在 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ 上的限制, 并向两边扩展成一个周期函数 $f_T(t)$.

从傅里叶级数到傅里叶积分公式

- 对于一般的函数 $f(t)$, 它未必是周期的.
- 我们考虑它在 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ 上的限制, 并向两边扩展成一个周期函数 $f_T(t)$.
- 设 $\omega_n=n\omega,\Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\omega$, 则

$$f(t)=\lim_{T\to+\infty}f_T(t)$$

- 对于一般的函数 $f(t)$, 它未必是周期的.
- 我们考虑它在 $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ 上的限制, 并向两边扩展成一个周期函数 $f_T(t)$.
- 设 $\omega_n = n\omega, \Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \omega$, 则

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{T\to+\infty} f_T(t) \\ &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] e^{j\omega_n t} \end{aligned}$$

从傅里叶级数到傅里叶积分公式

- 对于一般的函数 $f(t)$, 它未必是周期的.
- 我们考虑它在 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ 上的限制, 并向两边扩展成一个周期函数 $f_T(t)$.
- 设 $\omega_n=n\omega, \Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\omega$, 则

$$\begin{aligned}
f(t)&=\lim_{T\to+\infty} f_T(t)\\
&=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega_n t}\\
&=\frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega_n t}\Delta\omega_n
\end{aligned}$$

从傅里叶级数到傅里叶积分公式

- 对于一般的函数 $f(t)$, 它未必是周期的.
- 我们考虑它在 $[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$ 上的限制, 并向两边扩展成一个周期函数 $f_T(t)$.
- 设 $\omega_n=n\omega, \Delta\omega_n=\omega_n-\omega_{n-1}=\omega$, 则

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{T\to+\infty} f_T(t) \\
&= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega_n t} \\
&= \frac{1}{2\pi}\lim_{\Delta\omega_n\to 0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega_n t}\Delta\omega_n \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}
$$

傅里叶积分定理

定理 (傅里叶积分定理)

设函数 $f(t)$ 满足: 在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积; 在任一有限区间上满足狄利克雷条件. 那么

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega,\qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

对于 $f(t)$ 的间断点左边需要改成 $\dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}$.

傅里叶积分公式的三角形式 *

- 我们来看一下傅里叶积分公式的三角形式:

傅里叶积分公式的三角形式 *

- 我们来看一下傅里叶积分公式的三角形式:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

- 我们来看一下傅里叶积分公式的三角形式:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

傅里叶积分公式的三角形式 *

- 我们来看一下傅里叶积分公式的三角形式:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)[\cos\omega(t-\tau)+j\sin\omega(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

傅里叶积分公式的三角形式 *

- 我们来看一下傅里叶积分公式的三角形式:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)[\cos\omega(t-\tau)+j\sin\omega(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}
$$

- 我们来看一下傅里叶积分公式的三角形式:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)[\cos\omega(t-\tau)+j\sin\omega(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}
$$

- 这里, 作为 ω 的函数, 带 $\cos$ 部分的积分是偶函数, 带 $\sin$ 部分的积分是奇函数.

傅里叶正弦/余弦积分公式 *

- 对上式再次展开得到:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)(\cos\omega t\cos\omega\tau + \sin\omega t\sin\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.$$

傅里叶正弦/余弦积分公式 *

- 对上式再次展开得到:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)(\cos\omega t\cos\omega\tau + \sin\omega t\sin\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.$$

- 若 $f(t)$ 是奇函数, $f(\tau)\cos\omega\tau$ 是奇函数, $f(\tau)\sin\omega\tau$ 是偶函数.

傅里叶正弦/余弦积分公式 *

- 对上式再次展开得到:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)(\cos\omega t\cos\omega\tau + \sin\omega t\sin\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.$$

- 若 $f(t)$ 是奇函数, $f(\tau)\cos\omega\tau$ 是奇函数, $f(\tau)\sin\omega\tau$ 是偶函数. 由此得到傅里叶正弦变换/正弦积分公式:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\tau)\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega.$$

傅里叶正弦/余弦积分公式 *

- 对上式再次展开得到:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)(\cos\omega t\cos\omega\tau+\sin\omega t\sin\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.$$

- 若 $f(t)$ 是奇函数, $f(\tau)\cos\omega\tau$ 是奇函数, $f(\tau)\sin\omega\tau$ 是偶函数. 由此得到傅里叶正弦变换/正弦积分公式:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega.$$

- 类似地, 若 $f(t)$ 是偶函数, 有傅里叶余弦变换/余弦积分公式:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega.$$

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换和积分表达式.

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换和积分表达式.
- 解

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换和积分表达式.
- 解

$$\begin{aligned}F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-1}^{1}(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换和积分表达式.
- 解

$$\begin{aligned}F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-1}^{1}(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,\mathrm{d}t=\frac{2\sin\omega}{\omega},\end{aligned}$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换和积分表达式.
- 解

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{1}(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,\mathrm{d}t=\frac{2\sin\omega}{\omega},$$

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant 1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}$ 的傅里叶变换和积分表达式.
- 解

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{1}(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,\mathrm{d}t=\frac{2\sin\omega}{\omega},$$

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\sin\omega}{\omega}(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,\mathrm{d}\omega$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求 $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ 的傅里叶变换和积分表达式.
- 解

$$
\begin{aligned}
F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1} (\cos\omega t + j\sin\omega t) \,\mathrm{d}t = \frac{2\sin\omega}{\omega},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin\omega}{\omega} (\cos\omega t + j\sin\omega t) \,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega} \,\mathrm{d}\omega \quad (t \neq \pm 1).
\end{aligned}
$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 当 $t=\pm 1$ 时，$f(t)$ 应替换为 $\dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}=\dfrac{1}{2}$.

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 当 $t=\pm 1$ 时，$f(t)$ 应替换为 $\dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}=\dfrac{1}{2}$.
- 由于 $f(t)$ 是偶函数，因此该积分表达式也可以从余弦变换得到. ■

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 当 $t=\pm 1$ 时，$f(t)$ 应替换为 $\dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}=\dfrac{1}{2}$.
- 由于 $f(t)$ 是偶函数，因此该积分表达式也可以从余弦变换得到.
- 从该傅里叶积分可以得到反常积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\pi/2, & |t|<1,\\ \pi/4, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 当 $t=\pm 1$ 时，$f(t)$ 应替换为 $\dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}=\dfrac{1}{2}$.
- 由于 $f(t)$ 是偶函数，因此该积分表达式也可以从余弦变换得到.
- 从该傅里叶积分可以得到反常积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\pi/2, & |t|<1,\\ \pi/4, & |t|=1,\\ 0, & |t|>1.\end{cases}$$

- 特别地，可以得到狄利克雷积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}.$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t\leqslant 1,\\ 0, & t>1\end{cases}$ 的傅里叶积分公式.

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t\leqslant 1, \\ 0, & t>1\end{cases}$ 的傅里叶积分公式.
- 分析 只定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数需要先将其延拓.

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t\leqslant 1,\\ 0, & t>1\end{cases}$ 的傅里叶积分公式.
- 分析 只定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数需要先将其延拓.
- 解 将 $f(t)$ 延拓为一个奇函数, 则

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t\leqslant 1,\\ 0, & t>1\end{cases}$ 的傅里叶积分公式.
- 分析 只定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数需要先将其延拓.
- 解 将 $f(t)$ 延拓为一个奇函数, 则

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

例题: 求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t\leqslant 1,\\ 0, & t>1\end{cases}$ 的傅里叶积分公式.
- 分析 只定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数需要先将其延拓.
- 解 将 $f(t)$ 延拓为一个奇函数, 则

$$\begin{aligned}F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\left(\int_0^1-\int_{-1}^0\right)(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t\leqslant 1,\\ 0, & t>1\end{cases}$ 的傅里叶积分公式.
- 分析 只定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数需要先将其延拓.
- 解 将 $f(t)$ 延拓为一个奇函数, 则

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\left(\int_0^1-\int_{-1}^0\right)(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,\mathrm{d}t=-\frac{2j(1-\cos\omega)}{\omega},\end{aligned}$$

例题: 求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t\leqslant 1,\\ 0, & t>1\end{cases}$ 的傅里叶积分公式.
- 分析 只定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数需要先将其延拓.
- 解 将 $f(t)$ 延拓为一个奇函数, 则

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\\&=\left(\int_0^1-\int_{-1}^0\right)(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,\mathrm{d}t=-\frac{2j(1-\cos\omega)}{\omega},\end{aligned}$$

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

例题: 求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求 $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t\leqslant 1,\\ 0, & t>1\end{cases}$ 的傅里叶积分公式.
- 分析 只定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数需要先将其延拓.
- 解 将 $f(t)$ 延拓为一个奇函数, 则

$$
\begin{aligned}
F(\omega)&=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\\
&=\left(\int_0^1-\int_{-1}^0\right)(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,\mathrm{d}t=-\frac{2j(1-\cos\omega)}{\omega},\\
f(t)&=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\\
&=-\frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- **例** 求 $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t\leqslant 1,\\ 0, & t>1\end{cases}$ 的傅里叶积分公式.
- **分析** 只定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数需要先将其延拓.
- **解** 将 $f(t)$ 延拓为一个奇函数, 则

$$
\begin{aligned}
F(\omega)&=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\\
&=\left(\int_0^1-\int_{-1}^0\right)(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,\mathrm{d}t=-\frac{2j(1-\cos\omega)}{\omega},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(t)&=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\\
&=-\frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\omega}{\omega}(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega\quad(t\neq\pm 1),
\end{aligned}
$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 即

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}f(t), & 0<t\neq 1,\\ 1/2, & t=1.\end{cases}$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 即

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}f(t), & 0<t\neq 1,\\ 1/2, & t=1.\end{cases}$$

- 从该傅里叶积分可以得到反常积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\pi/2, & 0<t<1,\\ \pi/4, & t=1,\\ 0, & t>1.\end{cases}$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 即

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases} f(t), & 0<t\neq 1,\\ 1/2, & t=1.\end{cases}$$

- 从该傅里叶积分可以得到反常积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos\omega)\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\begin{cases} \pi/2, & 0<t<1,\\ \pi/4, & t=1,\\ 0, & t>1.\end{cases}$$

- 若将 $f(t)$ 延拓为一个偶函数，则和前一个例子相同.

- 例 求指数衰减函数 $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-\beta t}, & t \geqslant 0 \end{cases}$ 的傅里叶变换和积分表达式, $\beta > 0$.

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- **例** 求指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ 的傅里叶变换和积分表达式, $\beta>0$.
- **解**

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ 的傅里叶变换和积分表达式, $\beta>0$.
- 解

$$\begin{aligned} F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\\ &=\int_{0}^{+\infty} e^{-\beta t}e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ 的傅里叶变换和积分表达式, $\beta>0$.
- 解

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$
$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-\beta t}e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty} e^{-(\beta+j\omega)t}\,\mathrm{d}t$$

- 例 求指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ e^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$ 的傅里叶变换和积分表达式, $\beta>0$.
- 解

$$
\begin{aligned}
F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} e^{-(\beta+j\omega)t}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\beta+j\omega}=\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2},
\end{aligned}
$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta - j\omega}{\beta^2+\omega^2}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta - j\omega}{\beta^2+\omega^2}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta - j\omega}{\beta^2+\omega^2}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta - j\omega}{\beta^2+\omega^2}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega. \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

- 从该傅里叶积分可以得到反常积分

$$
\int_0^{+\infty} \frac{\beta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\,\mathrm{d}\omega = \begin{cases} 0, & t<0, \\ \pi/2, & t=0, \\ \pi e^{-\beta t}, & t>0. \end{cases}
$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求钟形脉冲函数 $f(t) = Ae^{-\beta t^2}$ 的傅里叶变换和积分表达式，$A, \beta > 0$.

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求钟形脉冲函数 $f(t)=Ae^{-\beta t^2}$ 的傅里叶变换和积分表达式，$A,\beta>0$.
- 解

$$F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

- 例 求钟形脉冲函数 $f(t) = Ae^{-\beta t^2}$ 的傅里叶变换和积分表达式，$A, \beta > 0$.
- 解

$$
\begin{aligned}
F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\beta t^2} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

- 例 求钟形脉冲函数 $f(t) = Ae^{-\beta t^2}$ 的傅里叶变换和积分表达式，$A, \beta > 0$.
- 解

$$
\begin{aligned}
F(\omega) = \mathscr{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{-\beta t^2} e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\beta\left(t + \frac{j\omega}{2\beta}\right)^2\right] \mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

- 例 求钟形脉冲函数 $f(t)=Ae^{-\beta t^2}$ 的傅里叶变换和积分表达式，$A,\beta>0$.
- 解

$$
\begin{aligned}
F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-\beta t^2}e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\\
&=Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\beta\left(t+\frac{j\omega}{2\beta}\right)^2\right]\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}},
\end{aligned}
$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} A e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

$$
\begin{aligned}
f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{A}{\sqrt{\pi\beta}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

例题：求傅里叶变换和积分表达式

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\pi\beta}}\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega. \quad \blacksquare$$

- 从该傅里叶积分可以得到反常积分

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega = \sqrt{\pi\beta}e^{-\beta t^2}.$$

广义函数

- 傅里叶变换存在的条件是比较苛刻的.

广义函数

- 傅里叶变换存在的条件是比较苛刻的. 例如常值函数 $f(t)=1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是可积的. 所以它没有傅里叶变换, 这很影响我们使用傅里叶变换.

- 傅里叶变换存在的条件是比较苛刻的. 例如常值函数 $f(t) = 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是可积的. 所以它没有傅里叶变换, 这很影响我们使用傅里叶变换. 为此我们需要引入广义函数的概念.

广义函数

- 傅里叶变换存在的条件是比较苛刻的. 例如常值函数 $f(t)=1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是可积的. 所以它没有傅里叶变换, 这很影响我们使用傅里叶变换. 为此我们需要引入广义函数的概念.
- 所有满足傅里叶积分定理的函数形成一个线性空间 $\mathscr{C}$.

广义函数

- 傅里叶变换存在的条件是比较苛刻的. 例如常值函数 $f(t)=1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是可积的. 所以它没有傅里叶变换, 这很影响我们使用傅里叶变换. 为此我们需要引入广义函数的概念.
- 所有满足傅里叶积分定理的函数形成一个线性空间 $\mathscr{C}$. 从一个函数 $\lambda(t)$ 出发, 可以定义一个线性映射 $\mathscr{C}\to\mathbb{R}$:

$$\langle\lambda,f\rangle:=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

广义函数

- 傅里叶变换存在的条件是比较苛刻的. 例如常值函数 $f(t)=1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是可积的. 所以它没有傅里叶变换, 这很影响我们使用傅里叶变换. 为此我们需要引入广义函数的概念.
- 所有满足傅里叶积分定理的函数形成一个线性空间 $\mathscr{C}$. 从一个函数 $\lambda(t)$ 出发, 可以定义一个线性映射 $\mathscr{C}\to\mathbb{R}$:

$$\langle\lambda,f\rangle:=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- 广义函数是指一个线性映射 $\mathscr{C}\to\mathbb{R}$.

广义函数

- 傅里叶变换存在的条件是比较苛刻的. 例如常值函数 $f(t) = 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是可积的. 所以它没有傅里叶变换, 这很影响我们使用傅里叶变换. 为此我们需要引入广义函数的概念.
- 所有满足傅里叶积分定理的函数形成一个线性空间 $\mathscr{C}$. 从一个函数 $\lambda(t)$ 出发, 可以定义一个线性映射 $\mathscr{C} \to \mathbb{R}$:

$$\langle \lambda, f \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) f(t)\, \mathrm{d}t.$$

- 广义函数是指一个线性映射 $\mathscr{C} \to \mathbb{R}$. 我们通常也将其表为上述积分形式.

广义函数

- 傅里叶变换存在的条件是比较苛刻的. 例如常值函数 $f(t) = 1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不是可积的. 所以它没有傅里叶变换, 这很影响我们使用傅里叶变换. 为此我们需要引入广义函数的概念.
- 所有满足傅里叶积分定理的函数形成一个线性空间 $\mathscr{C}$. 从一个函数 $\lambda(t)$ 出发, 可以定义一个线性映射 $\mathscr{C} \to \mathbb{R}$:

$$\langle \lambda, f \rangle := \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(t) f(t) \,\mathrm{d}t.$$

- 广义函数是指一个线性映射 $\mathscr{C} \to \mathbb{R}$. 我们通常也将其表为上述积分形式. 由此可知广义函数确实是普通函数的一种推广.

广义函数

- 傅里叶变换存在的条件是比较苛刻的. 例如常值函数 $f(t)=1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是可积的. 所以它没有傅里叶变换, 这很影响我们使用傅里叶变换. 为此我们需要引入广义函数的概念.
- 所有满足傅里叶积分定理的函数形成一个线性空间 $\mathscr{C}$. 从一个函数 $\lambda(t)$ 出发, 可以定义一个线性映射 $\mathscr{C}\to\mathbb{R}$:

$$\langle\lambda,f\rangle:=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda(t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

- 广义函数是指一个线性映射 $\mathscr{C}\to\mathbb{R}$. 我们通常也将其表为上述积分形式. 由此可知广义函数确实是普通函数的一种推广.
- 从这个积分可以形式上推导出广义函数应当满足的性质:

$$\langle\lambda(at),f(t)\rangle=\frac{1}{|a|}\langle\lambda(t),f\left(\frac{t}{a}\right)\rangle,\quad\langle\lambda',f\rangle=-\langle\lambda,f'\rangle.$$

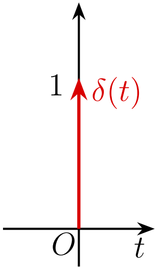
- δ 函数定义为

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) \, \mathrm{d}t = f(0).$$

- δ 函数定义为

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) \, \mathrm{d}t = f(0).$$

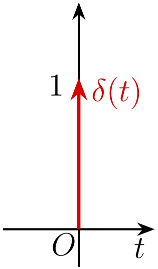
- 通常用长度为 1 的有向线段来表示它.



Dirac δ 函数

- δ 函数定义为

$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) \, \mathrm{d}t = f(0).$$

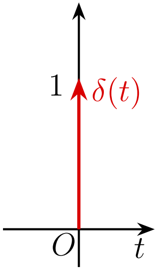


- 通常用长度为 1 的有向线段来表示它.
- 它满足如下性质:

- δ 函数定义为

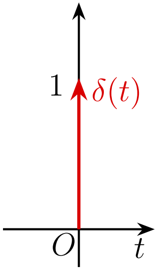
$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(0).$$

- 通常用长度为 1 的有向线段来表示它.
- 它满足如下性质:
- $\langle \delta^{(n)}, f \rangle = (-1)^n f^{(n)}(0);$



- δ 函数定义为

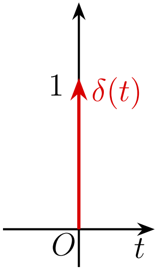
$$\langle\delta, f\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) \,\mathrm{d} t=f(0).$$



- 通常用长度为 1 的有向线段来表示它.
- 它满足如下性质:
- $\langle\delta^{(n)}, f\rangle=(-1)^n f^{(n)}(0)$;
- $\delta(t)=\delta(-t)$ 是偶函数;

- δ 函数定义为

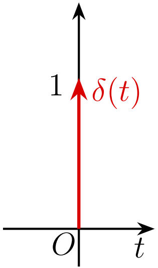
$$\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) \,\mathrm{d}t = f(0).$$



- 通常用长度为 1 的有向线段来表示它.
- 它满足如下性质:
- $\langle \delta^{(n)}, f \rangle = (-1)^n f^{(n)}(0)$;
- $\delta(t) = \delta(-t)$ 是偶函数;
- $\delta(at) = \delta(t)/|a|$;

- δ 函数定义为

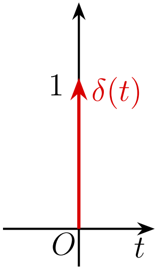
$$\langle \delta, f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(0).$$



- 通常用长度为 1 的有向线段来表示它.
- 它满足如下性质:
- $\langle \delta^{(n)}, f\rangle = (-1)^n f^{(n)}(0)$;
- $\delta(t) = \delta(-t)$ 是偶函数;
- $\delta(at) = \delta(t)/|a|$;
- $u'(t) = \delta(t)$, 其中 $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 是单位阶跃函数.

- δ 函数定义为

$$\langle\delta, f\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(0).$$



- 通常用长度为 1 的有向线段来表示它.
- 它满足如下性质:
- $\langle\delta^{(n)}, f\rangle = (-1)^n f^{(n)}(0)$;
- $\delta(t) = \delta(-t)$ 是偶函数;
- $\delta(at) = \delta(t)/|a|$;
- $u'(t) = \delta(t)$, 其中 $u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ 是单位阶跃函数.
- $\mathscr{F}[\delta] = 1$, $\mathscr{F}^{-1}[\delta] = \dfrac{1}{2\pi}$.

例题：求傅里叶变换

- 例 证明 $u(t)$ 的傅里叶变换是 $\dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$.

- 例 证明 $u(t)$ 的傅里叶变换是 $\dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$.
- 证明

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

- 例 证明 $u(t)$ 的傅里叶变换是 $\dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$.
- 证明

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega}\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{j\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

- 由 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}$ 可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega = \frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(t)$.

例题：求傅里叶变换

- 例 证明 $u(t)$ 的傅里叶变换是 $\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$.
- 证明

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{j\omega t}}{j\omega}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega.$$

- 由 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}$ 可知 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(t)$.
- 故

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)+\frac{1}{2}=u(t).\quad\blacksquare$$

1. 傅里叶积分和傅里叶变换
2. 傅里叶变换的性质和应用
3. 拉普拉斯变换

傅里叶变换的性质

- 我们不可能也没必要每次都对需要变换的函数从定义出发计算傅里叶变换.

傅里叶变换的性质

- 我们不可能也没必要每次都对需要变换的函数从定义出发计算傅里叶变换. 通过研究傅里叶变换的性质, 结合常见函数的傅里叶变换, 我们可以得到很多情形的傅里叶变换.

- 我们不可能也没必要每次都对需要变换的函数从定义出发计算傅里叶变换. 通过研究傅里叶变换的性质, 结合常见函数的傅里叶变换, 我们可以得到很多情形的傅里叶变换.
- 线性性质

$$\mathscr{F}[\alpha f+\beta g]=\alpha F+\beta G,\quad \mathscr{F}^{-1}[\alpha F+\beta G]=\alpha f+\beta g.$$

傅里叶变换的性质

- 我们不可能也没必要每次都对需要变换的函数从定义出发计算傅里叶变换. 通过研究傅里叶变换的性质, 结合常见函数的傅里叶变换, 我们可以得到很多情形的傅里叶变换.
- 线性性质

$$\mathscr{F}[\alpha f+\beta g]=\alpha F+\beta G,\quad \mathscr{F}^{-1}[\alpha F+\beta G]=\alpha f+\beta g.$$

- 位移性质

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}F(\omega),\quad \mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=e^{j\omega_0 t}f(t).$$

- 我们不可能也没必要每次都对需要变换的函数从定义出发计算傅里叶变换. 通过研究傅里叶变换的性质, 结合常见函数的傅里叶变换, 我们可以得到很多情形的傅里叶变换.
- 线性性质

$$\mathscr{F}[\alpha f+\beta g]=\alpha F+\beta G,\quad \mathscr{F}^{-1}[\alpha F+\beta G]=\alpha f+\beta g.$$

- 位移性质

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}F(\omega),\quad \mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=e^{j\omega_0 t}f(t).$$

- 由此可得 $\mathscr{F}[\delta(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}$, $\mathscr{F}^{-1}[\delta(\omega-\omega_0)]=\dfrac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$.

傅里叶变换的性质

- 我们不可能也没必要每次都对需要变换的函数从定义出发计算傅里叶变换．通过研究傅里叶变换的性质，结合常见函数的傅里叶变换，我们可以得到很多情形的傅里叶变换．
- 线性性质

$$\mathscr{F}[\alpha f+\beta g]=\alpha F+\beta G,\quad \mathscr{F}^{-1}[\alpha F+\beta G]=\alpha f+\beta g.$$

- 位移性质

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}F(\omega),\quad \mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=e^{j\omega_0 t}f(t).$$

- 由此可得 $\mathscr{F}[\delta(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}$，$\mathscr{F}^{-1}[\delta(\omega-\omega_0)]=\dfrac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t}$.
- 位移性质通过变量替换容易得到.

- 微分性质

$$\mathscr{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[F'(\omega)] = -jtf(t).$$

- 微分性质

$$\mathscr{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[F'(\omega)] = -jtf(t).$$

- 这由

$$\mathscr{F}[f'] = \langle f'(t), e^{-j\omega t}\rangle = -\langle f(t), (e^{-j\omega t})'\rangle = j\omega F(\omega)$$

可得.

傅里叶变换的性质

- 微分性质

$$\mathscr{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[F'(\omega)] = -jtf(t).$$

- 这由

$$\mathscr{F}[f'] = \langle f'(t), e^{-j\omega t}\rangle = -\langle f(t), (e^{-j\omega t})'\rangle = j\omega F(\omega)$$

可得. 从而

$$\mathscr{F}[f^{(k)}(t)] = (j\omega)^k F(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[F^{(k)}(\omega)] = (-jt)^k f(t).$$

- 微分性质

$$\mathscr{F}[f'(t)] = j\omega F(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[F'(\omega)] = -jtf(t).$$

- 这由

$$\mathscr{F}[f'] = \langle f'(t), e^{-j\omega t}\rangle = -\langle f(t), (e^{-j\omega t})'\rangle = j\omega F(\omega)$$

可得. 从而

$$\mathscr{F}[f^{(k)}(t)] = (j\omega)^k F(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[F^{(k)}(\omega)] = (-jt)^k f(t).$$

- 由此可得积分性质

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{j\omega}F(\omega).$$

- 由微分性质可得乘多项式性质

$$\mathscr{F}[tf(t)] = jF'(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[tF(\omega)] = -jf'(t).$$

傅里叶变换的性质

- 由微分性质可得乘多项式性质

$$\mathscr{F}[tf(t)] = jF'(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[tF(\omega)] = -jf'(t).$$

- 由此可得

$$\mathscr{F}[t^k f(t)] = j^k F^{(k)}(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[t^k F(\omega)] = (-j)^k f^{(k)}(t).$$

- 由微分性质可得乘多项式性质

$$\mathscr{F}[tf(t)] = jF'(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[tF(\omega)] = -jf'(t).$$

- 由此可得

$$\mathscr{F}[t^k f(t)] = j^k F^{(k)}(\omega), \quad \mathscr{F}^{-1}[t^k F(\omega)] = (-j)^k f^{(k)}(t).$$

- 由变量替换易得相似性质

$$\mathscr{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad \mathscr{F}^{-1}[F(a\omega)] = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

例题: 计算傅里叶变换

- 例 求 $\mathscr{F}[t^k e^{-\beta t} u(t)], \beta > 0.$

例题：计算傅里叶变换

- 例 求 $\mathscr{F}[t^k e^{-\beta t} u(t)], \beta > 0.$
- 解

$$\mathscr{F}[e^{-\beta t} u(t)] = \frac{1}{\beta + j\omega},$$

- 例 求 $\mathscr{F}[t^k e^{-\beta t}u(t)], \beta > 0.$
- 解

$$\mathscr{F}[e^{-\beta t}u(t)] = \frac{1}{\beta + j\omega},$$

$$\mathscr{F}[t^k e^{-\beta t}u(t)] = j^k \left(\frac{1}{\beta + j\omega}\right)^{(k)}$$

例题: 计算傅里叶变换

- 例 求 $\mathscr{F}[t^k e^{-\beta t} u(t)], \beta > 0.$
- 解

$$\mathscr{F}[e^{-\beta t} u(t)] = \frac{1}{\beta + j\omega},$$

$$\mathscr{F}[t^k e^{-\beta t} u(t)] = j^k \left(\frac{1}{\beta + j\omega}\right)^{(k)} = \frac{k!}{(\beta + j\omega)^k}. \quad \blacksquare$$

例题: 计算傅里叶变换

- 例 求 $\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换.

例题: 计算傅里叶变换

- 例 求 $\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换.
- 解 由于 $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$,

例题：计算傅里叶变换

- 例 求 $\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换.
- 解 由于 $\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$, 因此 $\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$,

- 例 求 $\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换.
- 解 由于 $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$, 因此 $\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$,

$$\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = \frac{1}{2j}\left[\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] - \mathscr{F}[e^{-j\omega_0 t}]\right]$$

- 例 求 $\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换.
- 解 由于 $\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$, 因此 $\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]&=\frac{1}{2j}\left[\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}]-\mathscr{F}[e^{-j\omega_0 t}]\right]\\&=\frac{1}{2j}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)]\end{aligned}$$

例题: 计算傅里叶变换

- 例 求 $\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换.
- 解 由于 $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$, 因此 $\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] &= \frac{1}{2j}\left[\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] - \mathscr{F}[e^{-j\omega_0 t}]\right] \\ &= \frac{1}{2j}[2\pi\delta(\omega-\omega_0) - 2\pi\delta(\omega+\omega_0)] \\ &= j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

例题: 计算傅里叶变换

- 例 求 $\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换.
- 解 由于 $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega)$, 因此 $\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$,

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] &= \frac{1}{2j}\left[\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] - \mathscr{F}[e^{-j\omega_0 t}]\right] \\
&= \frac{1}{2j}[2\pi\delta(\omega-\omega_0) - 2\pi\delta(\omega+\omega_0)] \\
&= j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- 练习 求 $\cos\omega_0 t$ 的傅里叶变换.

- 例 求 $\sin\omega_0 t$ 的傅里叶变换.
- 解 由于 $\mathscr{F}[1]=2\pi\delta(\omega)$, 因此 $\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}]=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\sin\omega_0 t]&=\frac{1}{2j}\left[\mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}]-\mathscr{F}[e^{-j\omega_0 t}]\right]\\&=\frac{1}{2j}[2\pi\delta(\omega-\omega_0)-2\pi\delta(\omega+\omega_0)]\\&=j\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)].\quad\blacksquare\end{aligned}$$

- 练习 求 $\cos\omega_0 t$ 的傅里叶变换.
- 答案 $\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$.

卷积

定义

$f_1(t), f_2(t)$ 的卷积是指

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

卷积

定义

$f_1(t), f_2(t)$ 的卷积是指

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

- 容易验证卷积满足如下性质:

定义

$f_1(t), f_2(t)$ 的卷积是指

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

- 容易验证卷积满足如下性质:
- $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$, $(f_1 * f_2) * f_2 = f_1 * (f_2 * f_3)$;

卷积

定义

$f_1(t), f_2(t)$ 的卷积是指

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

- 容易验证卷积满足如下性质:
- $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$, $(f_1 * f_2) * f_2 = f_1 * (f_2 * f_3)$;
- $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$;

卷积

定义

$f_1(t), f_2(t)$ 的卷积是指

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

- 容易验证卷积满足如下性质:
- $f_1 * f_2 = f_2 * f_1, \ (f_1 * f_2) * f_2 = f_1 * (f_2 * f_3);$
- $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3;$
- $f * \delta = f;$

卷积

定义

$f_1(t), f_2(t)$ 的卷积是指

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

- 容易验证卷积满足如下性质:
- $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$, $(f_1 * f_2) * f_2 = f_1 * (f_2 * f_3)$;
- $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$;
- $f * \delta = f$;
- $(f_1 * f_2)' = f_1' * f_2 = f_1 * f_2'$.

- 例 设 $f_1(t) = u(t), f_2(t) = e^{-t}u(t)$. 求 $f_1 * f_2$.

例题：计算卷积

- 例 设 $f_1(t) = u(t), f_2(t) = e^{-t}u(t)$. 求 $f_1 * f_2$.
- 解

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

例题: 计算卷积

- 例 设 $f_1(t)=u(t), f_2(t)=e^{-t}u(t)$. 求 f_1*f_2.
- 解

$$(f_1*f_2)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau)f_1(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^{+\infty} e^{-\tau}u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

- 当 $t<0$ 时, $(f_1*f_2)(t)=0$.

例题: 计算卷积

- 例 设 $f_1(t) = u(t), f_2(t) = e^{-t}u(t)$. 求 $f_1 * f_2$.
- 解

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

- 当 $t < 0$ 时, $(f_1 * f_2)(t) = 0$.
- 当 $t \geqslant 0$ 时,

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = 1 - e^{-t}.$$

例题: 计算卷积

- 例 设 $f_1(t) = u(t), f_2(t) = e^{-t}u(t)$. 求 $f_1 * f_2$.
- 解

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\tau} u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

- 当 $t < 0$ 时, $(f_1 * f_2)(t) = 0$.
- 当 $t \geqslant 0$ 时,

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t e^{-\tau}\,\mathrm{d}\tau = 1 - e^{-t}.$$

- 故 $(f_1 * f_2)(t) = (1 - e^{-t})u(t)$. ■

卷积定理

定理 (卷积定理)

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = F_1 \cdot F_2, \quad \mathscr{F}^{-1}[F_1 * F_2] = \frac{1}{2\pi} f_1 \cdot f_2.$$

卷积定理

定理 (卷积定理)

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = F_1 \cdot F_2, \quad \mathscr{F}^{-1}[F_1 * F_2] = \frac{1}{2\pi} f_1 \cdot f_2.$$

- **证明**

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

卷积定理

定理 (卷积定理)

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = F_1 \cdot F_2, \quad \mathscr{F}^{-1}[F_1 * F_2] = \frac{1}{2\pi} f_1 \cdot f_2.$$

- **证明**

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[f_1 * f_2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \cdot f_2(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

卷积定理

定理 (卷积定理)

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = F_1 \cdot F_2, \quad \mathscr{F}^{-1}[F_1 * F_2] = \frac{1}{2\pi} f_1 \cdot f_2.$$

- **证明**

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f_1 * f_2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \cdot e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \cdot f_2(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \cdot f_2(t) e^{-j\omega t}\, \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

定理 (卷积定理)

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = F_1 \cdot F_2, \quad \mathscr{F}^{-1}[F_1 * F_2] = \frac{1}{2\pi} f_1 \cdot f_2.$$

- **证明**

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f_1 * f_2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \cdot f_2(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \cdot f_2(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

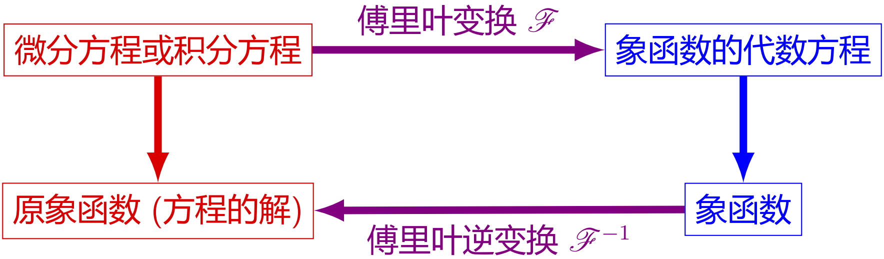
卷积定理

定理 (卷积定理)

$$\mathscr{F}[f_1 * f_2] = F_1 \cdot F_2, \quad \mathscr{F}^{-1}[F_1 * F_2] = \frac{1}{2\pi} f_1 \cdot f_2.$$

- **证明**

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}[f_1 * f_2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \cdot e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \cdot f_2(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} \cdot f_2(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathscr{F}[f_1]\mathscr{F}[f_2]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$


微分方程或积分方程
傅里叶变换 $\mathscr{F}$
象函数的代数方程
象函数
傅里叶逆变换 $\mathscr{F}^{-1}$
原象函数 (方程的解)

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x'(t) - \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 2\delta(t)$.

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x'(t)-\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,\mathrm{d}\tau=2\delta(t).$
- 解 设 $\mathscr{F}[x]=X$，则两边同时作傅里叶变换得到

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x'(t) - \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 2\delta(t)$.
- 解 设 $\mathscr{F}[x] = X$, 则两边同时作傅里叶变换得到

$$= j\omega X(\omega) - \frac{1}{j\omega} X(\omega) = 2,$$

- 例 解方程 $x'(t)-\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,\mathrm{d}\tau=2\delta(t)$.
- 解 设 $\mathscr{F}[x]=X$, 则两边同时作傅里叶变换得到

$$=j\omega X(\omega)-\frac{1}{j\omega}X(\omega)=2,$$

$$X(\omega)=-\frac{2j\omega}{1+\omega^2}=\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{1-j\omega},$$

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x'(t) - \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 2\delta(t)$.
- 解 设 $\mathscr{F}[x] = X$, 则两边同时作傅里叶变换得到

$$= j\omega X(\omega) - \frac{1}{j\omega} X(\omega) = 2,$$

$$X(\omega) = -\frac{2j\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{1-j\omega},$$

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{1-j\omega}\right]$$

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x'(t) - \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 2\delta(t)$.
- 解 设 $\mathscr{F}[x] = X$, 则两边同时作傅里叶变换得到

$$= j\omega X(\omega) - \frac{1}{j\omega}X(\omega) = 2,$$

$$X(\omega) = -\frac{2j\omega}{1+\omega^2} = \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{1-j\omega},$$

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{1-j\omega}\right] = \begin{cases} 0 - e^t = -e^t, & t < 0, \\ 1/2 - 1/2 = 0, & t = 0, \\ e^{-t} - 0 = e^{-t}, & t > 0. \end{cases} \blacksquare$$

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x''(t)-x(t)=0$.

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x''(t) - x(t) = 0$.
- 解 设 $\mathscr{F}[x] = X$, 则

- 例 解方程 $x''(t) - x(t) = 0.$
- 解 设 $\mathscr{F}[x] = X$，则

$$\mathscr{F}[x''(t) - x(t)] = [(j\omega)^2 - 1]X(\omega) = 0,$$

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x''(t) - x(t) = 0$.
- 解 设 $\mathscr{F}[x] = X$, 则

$$\mathscr{F}[x''(t) - x(t)] = [(j\omega)^2 - 1]X(\omega) = 0,$$

$$X(\omega) = 0, \quad x(t) = \mathscr{F}^{-1}[X(\omega)] = 0.$$

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x''(t) - x(t) = 0$.
- 解 设 $\mathscr{F}[x] = X$, 则

$$\mathscr{F}[x''(t) - x(t)] = [(j\omega)^2 - 1]X(\omega) = 0,$$

$$X(\omega) = 0, \quad x(t) = \mathscr{F}^{-1}[X(\omega)] = 0.$$

- 显然这是不对的，该方程的解实际上是 $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x''(t) - x(t) = 0$.
- 解 设 $\mathscr{F}[x] = X$, 则

$$\mathscr{F}[x''(t) - x(t)] = [(j\omega)^2 - 1]X(\omega) = 0,$$

$$X(\omega) = 0, \quad x(t) = \mathscr{F}^{-1}[X(\omega)] = 0.$$

- 显然这是不对的，该方程的解实际上是 $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$.
- 原因在于使用傅里叶变换要求函数是绝对可积的，而非零的 $C_1e^t + C_2e^{-t}$ 并不满足该条件.

例题: 使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x''(t) - x(t) = 0$.
- 解 设 $\mathscr{F}[x] = X$, 则

$$\mathscr{F}[x''(t) - x(t)] = [(j\omega)^2 - 1]X(\omega) = 0,$$

$$X(\omega) = 0, \quad x(t) = \mathscr{F}^{-1}[X(\omega)] = 0.$$

- 显然这是不对的, 该方程的解实际上是 $x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$.
- 原因在于使用傅里叶变换要求函数是绝对可积的, 而非零的 $C_1e^t + C_2e^{-t}$ 并不满足该条件.
- 我们需要一个对函数限制更少的积分变换来解决此类方程, 例如拉普拉斯变换.

1. 傅里叶积分和傅里叶变换
2. 傅里叶变换的性质和应用
3. 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换

- 傅里叶变换对函数要求过高，这使得在很多时候无法应用它，或者要引入复杂的广义函数.

拉普拉斯变换

- 傅里叶变换对函数要求过高, 这使得在很多时候无法应用它, 或者要引入复杂的广义函数.
- 对于一般的 $\varphi(t)$, 为了让它绝对可积, 我们考虑

$$\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}, \quad \beta > 0.$$

- 傅里叶变换对函数要求过高, 这使得在很多时候无法应用它, 或者要引入复杂的广义函数.
- 对于一般的 $\varphi(t)$, 为了让它绝对可积, 我们考虑

$$\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}, \quad \beta > 0.$$

- 它的傅里叶变换为

$$\mathscr{F}[\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}] = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-(\beta+j\omega)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

拉普拉斯变换

- 傅里叶变换对函数要求过高, 这使得在很多时候无法应用它, 或者要引入复杂的广义函数.
- 对于一般的 $\varphi(t)$, 为了让它绝对可积, 我们考虑

$$\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}, \quad \beta > 0.$$

- 它的傅里叶变换为

$$\mathscr{F}[\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}] = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-(\beta+j\omega)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

- 其中 $s = \beta + j\omega$.

- 傅里叶变换对函数要求过高, 这使得在很多时候无法应用它, 或者要引入复杂的广义函数.
- 对于一般的 $\varphi(t)$, 为了让它绝对可积, 我们考虑

$$\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}, \quad \beta > 0.$$

- 它的傅里叶变换为

$$\mathscr{F}[\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}] = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-(\beta+j\omega)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

- 其中 $s = \beta + j\omega$.
- 这样的积分在我们遇到的多数情形都是存在的, 只要选择充分大的 $\beta = \operatorname{Re} s$.

拉普拉斯变换

- 傅里叶变换对函数要求过高, 这使得在很多时候无法应用它, 或者要引入复杂的广义函数.
- 对于一般的 $\varphi(t)$, 为了让它绝对可积, 我们考虑

$$\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}, \quad \beta > 0.$$

- 它的傅里叶变换为

$$\mathscr{F}[\varphi(t)u(t)e^{-\beta t}] = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-(\beta+j\omega)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

- 其中 $s = \beta + j\omega$.
- 这样的积分在我们遇到的多数情形都是存在的, 只要选择充分大的 $\beta = \operatorname{Re} s$.
- 我们称之为 $\varphi(t)$ 的拉普拉斯变换.

定理 (拉普拉斯变换存在定理)

若定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(t)$ 满足

- $f(t)$ 在任一有限区间上至多只有有限多间断点;
- 存在 M, c 使得 $|f(t)| \leqslant Me^{ct}$,

则 $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ 在 $\operatorname{Re} s > c$ 上存在且为解析函数.

拉普拉斯变换存在定理

定理 (拉普拉斯变换存在定理)

若定义在 $[0,+\infty)$ 上的函数 $f(t)$ 满足

- $f(t)$ 在任一有限区间上至多只有有限多间断点;
- 存在 M,c 使得 $|f(t)|\leqslant Me^{ct}$,

则 $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$ 在 $\operatorname{Re}s>c$ 上存在且为解析函数.

原象函数 $f(t)$

拉普拉斯变换 $\mathscr{L}$ →

← 拉普拉斯逆变换 $\mathscr{L}^{-1}$

象函数

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

例题：求拉普拉斯变换

- 例 求 $\mathscr{L}[e^{kt}], k \in \mathbb{R}$.

例题：求拉普拉斯变换

- 例 求 $\mathscr{L}[e^{kt}], k \in \mathbb{R}$.
- 解

$$\mathscr{L}[e^{kt}] = \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st} \, \mathrm{d}t$$

例题：求拉普拉斯变换

- 例 求 $\mathscr{L}[e^{kt}], k \in \mathbb{R}$.
- 解

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[e^{kt}] &= \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t} \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s-k} e^{-(s-k)t} \Big|_0^{+\infty}\end{aligned}$$

- 例 求 $\mathscr{L}[e^{kt}], k \in \mathbb{R}$.
- 解

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[e^{kt}] &= \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s-k} e^{-(s-k)t}\Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{s-k}, \qquad \operatorname{Re} s > k.
\end{aligned}$$

- 例 求 $\mathscr{L}[e^{kt}], k \in \mathbb{R}$.
- 解

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[e^{kt}] &= \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s-k} e^{-(s-k)t}\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s-k}, \qquad \operatorname{Re} s > k.\end{aligned}$$

- 即 $\mathscr{L}[e^{kt}] = \dfrac{1}{s-k}$.

例题：求拉普拉斯变换

- 例 求 $\mathscr{L}[e^{kt}], k \in \mathbb{R}$.
- 解

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[e^{kt}] &= \int_0^{+\infty} e^{kt} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(s-k)t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s-k} e^{-(s-k)t}\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s-k}, \qquad \operatorname{Re} s > k.\end{aligned}$$

- 即 $\mathscr{L}[e^{kt}] = \dfrac{1}{s-k}$.
- 特别地 $\mathscr{L}[1] = \dfrac{1}{s}$. ■

拉普拉斯变换的性质

- 线性性质

$$\mathscr{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha F + \beta G, \quad \mathscr{L}^{-1}[\alpha F + \beta G] = \alpha f + \beta g.$$

拉普拉斯变换的性质

- 线性性质

$$\mathscr{L}[\alpha f + \beta g] = \alpha F + \beta G, \quad \mathscr{L}^{-1}[\alpha F + \beta G] = \alpha f + \beta g.$$

- 延迟性质

$$\mathscr{L}[f(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s).$$

拉普拉斯变换的性质

- **线性性质**

$$\mathscr{L}[\alpha f+\beta g]=\alpha F+\beta G,\quad \mathscr{L}^{-1}[\alpha F+\beta G]=\alpha f+\beta g.$$

- **延迟性质**

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s).$$

- **位移性质**

$$\mathscr{L}[e^{s_0t}f(t)]=F(s-s_0).$$

- 微分性质

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0),$$

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

- 微分性质

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0),$$

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

- 积分性质

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}F(s).$$

- 微分性质

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0),$$

$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

- 积分性质

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] = \frac{1}{s}F(s).$$

- 乘多项式性质

$$\mathscr{L}[tf(t)] = -F'(s),$$

$$\mathscr{L}[t^kf(t)] = (-1)^kF^{(k)}(s).$$

例题: 求拉普拉斯变换

- 例 求 $\mathscr{L}[\sin kt], k \in \mathbb{R}$.

例题: 求拉普拉斯变换

- 例 求 $\mathscr{L}[\sin kt], k \in \mathbb{R}$.
- 解 由于

$$\sin kt = \frac{1}{2j}(e^{jkt} - e^{-jkt}),$$

- 例 求 $\mathscr{L}[\sin kt], k \in \mathbb{R}$.
- 解 由于

$$\sin kt = \frac{1}{2j}(e^{jkt} - e^{-jkt}),$$

- 因此

$$\mathscr{L}[\sin kt] = \frac{1}{2j}\left(\mathscr{L}[e^{jkt}] - \mathscr{L}[e^{-jkt}]\right)$$

例题：求拉普拉斯变换

- 例 求 $\mathscr{L}[\sin kt], k \in \mathbb{R}$.
- 解 由于

$$\sin kt = \frac{1}{2j}(e^{jkt} - e^{-jkt}),$$

- 因此

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\sin kt] &= \frac{1}{2j}\left(\mathscr{L}[e^{jkt}] - \mathscr{L}[e^{-jkt}]\right) \\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-jk} - \frac{1}{s+jk}\right) = \frac{k}{s^2+k^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0.\end{aligned}$$

- 例 求 $\mathscr{L}[\sin kt], k \in \mathbb{R}$.
- 解 由于

$$\sin kt = \frac{1}{2j}(e^{jkt} - e^{-jkt}),$$

- 因此

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\sin kt] &= \frac{1}{2j}\left(\mathscr{L}[e^{jkt}] - \mathscr{L}[e^{-jkt}]\right) \\
&= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-jk} - \frac{1}{s+jk}\right) = \frac{k}{s^2+k^2}, \qquad \operatorname{Re} s > 0.
\end{aligned}$$

- 练习 求 $\mathscr{L}[\cos kt], k \in \mathbb{R}$.

例题: 求拉普拉斯变换

- 例 求 $\mathscr{L}[\sin kt], k \in \mathbb{R}$.
- 解 由于

$$\sin kt = \frac{1}{2j}(e^{jkt} - e^{-jkt}),$$

- 因此

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[\sin kt] &= \frac{1}{2j}\left(\mathscr{L}[e^{jkt}] - \mathscr{L}[e^{-jkt}]\right)\\ &= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-jk} - \frac{1}{s+jk}\right) = \frac{k}{s^2+k^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0.\end{aligned}$$

- 练习 求 $\mathscr{L}[\cos kt], k \in \mathbb{R}$.
- 答案 $\mathscr{L}[\cos kt] = \dfrac{s}{s^2+k^2}, \operatorname{Re} s > 0$.

例题: 求拉普拉斯变换

- 例 求 $\mathscr{L}[t^m]$, 其中 m 是正整数.

例题：求拉普拉斯变换

- 例 求 $\mathscr{L}[t^m]$, 其中 m 是正整数.
- 解 设 $f(t)=t^m$. 由于

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0,$$

- 例 求 $\mathscr{L}[t^m]$, 其中 m 是正整数.
- 解 设 $f(t)=t^m$. 由于

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(m-1)}(0)=0,$$

- 因此

$$\mathscr{L}[f^{(m)}(t)]=s^m\mathscr{L}[f(t)]=\mathscr{L}[m!]=\frac{m!}{s},$$

例题：求拉普拉斯变换

- 例 求 $\mathscr{L}[t^m]$，其中 m 是正整数.
- 解 设 $f(t) = t^m$. 由于

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-1)}(0) = 0,$$

- 因此

$$\mathscr{L}[f^{(m)}(t)] = s^m \mathscr{L}[f(t)] = \mathscr{L}[m!] = \frac{m!}{s},$$

$$\mathscr{L}[t^m] = \mathscr{L}[f(t)] = \frac{m!}{s^{m+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

拉普拉斯逆变换

- 拉普拉斯逆变换可以由下述反演公式给出:

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s, \quad t>0$$

拉普拉斯逆变换

- 拉普拉斯逆变换可以由下述反演公式给出:

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s, \quad t>0$$

- 通过构造恰当的闭路, 可以证明这等价于

拉普拉斯逆变换

- 拉普拉斯逆变换可以由下述反演公式给出:

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s, \quad t>0$$

- 通过构造恰当的闭路, 可以证明这等价于

定理 (拉普拉斯逆变换定理)

设 $F(s)$ 的所有奇点为 $s_1,\ldots,s_k$, 且 $F(\infty)=0$, 则

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\left[F(s)e^{st}, s_k\right].$$

- 拉普拉斯逆变换可以由下述反演公式给出:

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s)e^{st}\,\mathrm{d}s, \quad t>0$$

- 通过构造恰当的闭路, 可以证明这等价于

定理 (拉普拉斯逆变换定理)

设 $F(s)$ 的所有奇点为 $s_1,\dots,s_k$, 且 $F(\infty)=0$, 则

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left[F(s)e^{st}, s_k\right].$$

- 不过我们只要求掌握如何利用常见函数的拉普拉斯变换来计算逆变换.

例题：求拉普拉斯逆变换

- 例 求 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$ 的拉普拉斯逆变换.

- 例 求 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$ 的拉普拉斯逆变换.
- 解 注意到

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}.$$

- 例 求 $F(s)=\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$ 的拉普拉斯逆变换.
- 解 注意到

$$F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}.$$

- 因此

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]=t-\cos t.$$ ■

卷积定理

- 由于在拉普拉斯变换中, 我们考虑的函数在 $t < 0$ 时都是零.

卷积定理

- 由于在拉普拉斯变换中，我们考虑的函数在 $t<0$ 时都是零.
- 因此此时函数的卷积变成了

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant 0.$$

卷积定理

- 由于在拉普拉斯变换中，我们考虑的函数在 $t<0$ 时都是零.
- 因此此时函数的卷积变成了

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant 0.$$

- 此时我们有如下的卷积定理.

卷积定理

- 由于在拉普拉斯变换中，我们考虑的函数在 $t<0$ 时都是零.
- 因此此时函数的卷积变成了

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,\quad t\geqslant 0.$$

- 此时我们有如下的卷积定理.

定理 (卷积定理)

$$\mathscr{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s).$$

例题: 求拉普拉斯逆变换

- 例 求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$ 的拉普拉斯逆变换.

例题：求拉普拉斯逆变换

- 例 求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$ 的拉普拉斯逆变换.
- 解 通过待定系数，我们可以得到如下的拆分

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}.$$

例题：求拉普拉斯逆变换

- 例 求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$ 的拉普拉斯逆变换.
- 解 通过待定系数，我们可以得到如下的拆分

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}.$$

- 而

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1,\quad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]=e^t,$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=t \implies \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]=te^t,$$

例题：求拉普拉斯逆变换

- 例 求 $F(s)=\dfrac{1}{s(s-1)^2}$ 的拉普拉斯逆变换.
- 解 通过待定系数, 我们可以得到如下的拆分

$$F(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}.$$

- 而

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]=1,\quad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]=e^t,$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right]=t \implies \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]=te^t,$$

- 因此

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=1+(t-1)e^t.$$

例题：求拉普拉斯逆变换

- 我们也可以利用卷积定理来计算.

例题：求拉普拉斯逆变换

- 我们也可以利用卷积定理来计算.

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] * \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]$$

- 我们也可以利用卷积定理来计算.

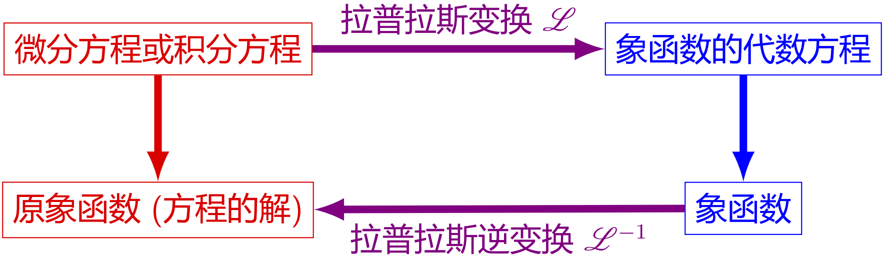
$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[F(s)] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] * \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] \\ &= 1 * te^t = \int_0^t \tau e^\tau \, \mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

例题：求拉普拉斯逆变换

- 我们也可以利用卷积定理来计算.

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[F(s)] &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] * \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right] \\ &= 1 * te^t = \int_0^t \tau e^\tau \,\mathrm{d}\tau \\ &= (t-1)e^t + 1. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

使用积分变换解微积分方程



典型例题: 使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 2e^t \cos t, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$

典型例题：使用积分变换解微积分方程

- **例** 解方程 $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 2e^t \cos t, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$
- **解** 设 $\mathscr{L}[x] = X$, 则

$$s^2 X - 2sX + 2X = \frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1},$$

典型例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 2e^t \cos t, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$
- 解 设 $\mathscr{L}[x] = X$，则

$$s^2 X - 2sX + 2X = \frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1},$$

$$X(s) = \frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2},$$

典型例题: 使用积分变换解微积分方程

- **例** 解方程 $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 2e^t \cos t, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$
- **解** 设 $\mathscr{L}[x] = X$, 则

$$s^2X - 2sX + 2X = \frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1},$$

$$X(s) = \frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2},$$

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}\right]$$

- **例** 解方程 $\begin{cases} x''(t)-2x'(t)+2x(t)=2e^t\cos t, \\ x(0)=x'(0)=0. \end{cases}$
- **解** 设 $\mathscr{L}[x]=X$, 则

$$s^2X-2sX+2X=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1},$$

$$X(s)=\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2},$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}\right]=e^t\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right]$$

典型例题: 使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 2e^t \cos t, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$
- 解 设 $\mathscr{L}[x] = X$, 则

$$s^2 X - 2sX + 2X = \frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1},$$

$$X(s) = \frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2},$$

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}\right] = e^t \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right]$$

$$= -e^t \mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\right]$$

典型例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 2e^t \cos t, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$
- 解 设 $\mathscr{L}[x] = X$，则

$$s^2 X - 2sX + 2X = \frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1},$$

$$X(s) = \frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2},$$

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}\right] = e^t \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right]$$

$$= -e^t \mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s^2+1}\right)'\right] = te^t \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = te^t \sin t. \quad \blacksquare$$

典型例题: 使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $\begin{cases} x'(t) + 2x(t) + 2y(t) = 10e^{2t}, \\ -2x(t) + y'(t) + 3y(t) = 13e^{2t}, \\ x(0) = 1, y(0) = 3. \end{cases}$

典型例题: 使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $\begin{cases} x'(t) + 2x(t) + 2y(t) = 10e^{2t}, \\ -2x(t) + y'(t) + 3y(t) = 13e^{2t}, \\ x(0) = 1, y(0) = 3. \end{cases}$
- 解 设 $\mathscr{L}[x] = X, \mathscr{L}[y] = Y$, 则

$$\begin{cases} sX - 1 + 2X + 2Y = 10/(s-2), \\ -2X + sY - 3 + 3Y = 13/(s-2). \end{cases}$$

典型例题: 使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $\begin{cases} x'(t)+2x(t)+2y(t)=10e^{2t}, \\ -2x(t)+y'(t)+3y(t)=13e^{2t}, \\ x(0)=1, y(0)=3. \end{cases}$
- 解 设 $\mathscr{L}[x]=X, \mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\begin{cases} sX-1+2X+2Y=10/(s-2), \\ -2X+sY-3+3Y=13/(s-2). \end{cases}$$

- 于是

$$X(s)=\frac{1}{s-2}, \quad Y(s)=\frac{3}{s-2},$$

典型例题: 使用积分变换解微积分方程

- **例** 解方程 $\begin{cases} x'(t)+2x(t)+2y(t)=10e^{2t}, \\ -2x(t)+y'(t)+3y(t)=13e^{2t}, \\ x(0)=1, y(0)=3. \end{cases}$
- **解** 设 $\mathscr{L}[x]=X, \mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\begin{cases} sX-1+2X+2Y=10/(s-2), \\ -2X+sY-3+3Y=13/(s-2). \end{cases}$$

- 于是

$$X(s)=\frac{1}{s-2}, \quad Y(s)=\frac{3}{s-2},$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]=e^{2t}, \quad y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3}{s-2}\right]=3e^{2t}. \quad ∎$$

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x''(t) - x(t) = 0.$

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x''(t) - x(t) = 0$.
- 解 设 $\mathscr{L}[x] = X$, 则

$$\mathscr{L}[x''(t)] = s^2 X(s) - s x(0) - x'(0),$$

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x''(t) - x(t) = 0$.
- 解 设 $\mathscr{L}[x] = X$, 则

$$\mathscr{L}[x''(t)] = s^2 X(s) - sx(0) - x'(0),$$

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) - X(s) = 0,$$

- 例 解方程 $x''(t) - x(t) = 0$.
- 解 设 $\mathscr{L}[x] = X$, 则

$$\mathscr{L}[x''(t)] = s^2 X(s) - sx(0) - x'(0),$$

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) - X(s) = 0,$$

$$X(s) = \frac{sx(0) + x'(0)}{s^2 + 1} = x(0)\frac{s}{s^2 + 1} + x'(0)\frac{1}{s^2 + 1},$$

例题：使用积分变换解微积分方程

- 例 解方程 $x''(t) - x(t) = 0$.
- 解 设 $\mathscr{L}[x] = X$, 则

$$\mathscr{L}[x''(t)] = s^2 X(s) - sx(0) - x'(0),$$

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) - X(s) = 0,$$

$$X(s) = \frac{sx(0) + x'(0)}{s^2 + 1} = x(0)\frac{s}{s^2+1} + x'(0)\frac{1}{s^2+1},$$

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = x(0)\cos t + x'(0)\sin t. \quad \blacksquare$$