



中國人民大學  
RENMIN UNIVERSITY OF CHINA

## 不同椭圆曲线的二次扭之比较

---

张神星 (合肥工业大学)

中国人民大学

[zhangshenxing@hfut.edu.cn](mailto:zhangshenxing@hfut.edu.cn)

- 给定一个数域上的椭圆曲线  $E/K$ , 我们关心它的二次扭族

$$E^\chi/K, \quad \text{其中 } \chi: G_K \rightarrow \{\pm 1\}$$

的各种算术量: Mordell-Weil 秩、III 群、Selmer 群等等.

- 那么反过来, 从这些算术量中在多大程度上能决定原来的椭圆曲线  $E/K$  呢?
- 我们知道, 如果  $E_1$  和  $E_2$  同源, 那么

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} E_1^\chi(K) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} E_2^\chi(K)$$

对任意  $\chi$  均成立.

- Zarhin(1989) 提出了如下猜想: 给定阿贝尔簇  $A_1, A_2/K$ , 如果对于任意有限扩张  $F/K$ , 均有

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} A_1(F) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} A_2(F),$$

那么  $A_1$  和  $A_2$  是否一定同源?

- Mazur 和 Rubin(2015) 考虑了 Selmer 秩的问题.
- 给定数域上椭圆曲线  $E_1, E_2/K$ , 如果有

- $G_K$  模同构  $E_1[m] \cong E_2[m]$ , 其中  $m = \begin{cases} p^{k+1}, & p \leq 3 \\ p^k, & p > 3 \end{cases}$
- 相同的 potential 乘性约化素位集合  $S$
- $\forall l \in S, (E_1[m]/K_l)^\circ \cong (E_2[m]/K_l)^\circ$
- 一个分歧条件

则  $\text{Sel}_{p^k}(E_1/F) \cong \text{Sel}_{p^k}(E_2/F), \forall F/K$ .

- 特别地, 存在不同源的  $E_1, E_2$  满足这个条件.
- Chiu(2020) 证明了: 如果  $\text{Sel}_p(E_1/F) \cong \text{Sel}_p(E_2/F)$  对所有的  $F/K$  和几乎所有  $p$  成立, 那么  $E_1$  和  $E_2$  同源.



- 现在我们考虑两条椭圆曲线

$$E_i : y^2 = x(x - a_i)(x + b_i), \quad c_i = -a_i - b_i, \quad i = 1, 2.$$

- 由于作为  $G_{\mathbb{Q}}$  模,  $E_1[2] \cong E_2[2]$ , 因此二者的 2-Selmer 群落在同一个群  $H^1(G_{\mathbb{Q}}, E_i[2])$  中.
- 由于技术上的原因, 我们进一步假设有  $G_{\mathbb{Q}}$  模同构  $E_1[4] \cong E_2[4]$ .
- 此时有

$$a_1/a_2, b_1/b_2, c_1/c_2 \in \mathbb{Q}^{\times 2}.$$

- 不失一般性, 我们假设

$$a_2 = a_1 A^2, \quad b_2 = b_1 B^2, \quad c_2 = c_1 C^2$$

且  $\gcd(A, B, C) = 1$ .

## 主要结论

## 定理

- 假设  $E_i$  没有 4 阶有理点且  $\text{Sel}_2(E_i/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  达到最小.
- 假设  $n$  与  $a_1b_1c_1a_2b_2c_2$  互素且对任意奇素数  $p \mid n, q \mid a_1b_1c_1a_2b_2c_2$ , 有  $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$ .
- 如果下述三种情形之一成立:
  - $n$  的素因子都模 8 余 1, 且  $E_i^{(n)}$  没有 4 阶有理点;
  - $a_i, b_i$  是奇数且  $2 \parallel c_i$ ; (例如  $y^2 = x(x-1)(x+1)$ )
  - $2 \parallel a_i, b_i, 4 \mid c_i$ , 且  $E_i^{(n)}$  没有 4 阶有理点, (例如  $y^2 = x(x-2)(x+2)$ )
- 则  $\text{Sel}_2(E_1^{(n)}/\mathbb{Q}) \cong \text{Sel}_2(E_2^{(n)}/\mathbb{Q})$ , 且下述等价
  - $\text{rank}_{\mathbb{Z}} E_1^{(n)}(\mathbb{Q}) = 0, \text{III}(E_1^{(n)}/\mathbb{Q})[2^\infty] \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2t}$ ;
  - $\text{rank}_{\mathbb{Z}} E_2^{(n)}(\mathbb{Q}) = 0, \text{III}(E_2^{(n)}/\mathbb{Q})[2^\infty] \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2t}$ .

- 证明所使用的方法仍然是传统的 2-下降法.
- 由于我们假设  $E$  没有 4 阶有理点, 因此由正合列

$$0 \rightarrow E(\mathbb{Q})/2E(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Sel}_2(E) \rightarrow \text{III}(E/\mathbb{Q})[2] \rightarrow 0$$

可知  $E[2] \subseteq \text{Sel}_2(E)$ .

- 由于  $\text{Sel}_2(E)$  通过一些局部条件刻画, 通过比较  $E_i$  和  $E_i^{(n)}$  的这些局部条件, 可以得到  $\text{Sel}_2$  相等.
- 然后再通过计算可知二者的 Cassels 配对也是相同的, 从而可以得到我们的结论.

- 经典的下降理论告诉我们,  $\text{Sel}_2(E)$  可以表为

$$\left\{ \Lambda = (d_1, d_2, d_3) \in \left( \frac{\mathbb{Q}^\times}{\mathbb{Q}^{\times 2}} \right)^3 : D_\Lambda(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}) \neq \emptyset, d_1 d_2 d_3 \equiv 1 \pmod{\mathbb{Q}^{\times 2}} \right\},$$

- 其中齐性空间

$$D_\Lambda = \begin{cases} H_1 : at^2 + d_2 u_2^2 - d_3 u_3^2 = 0, \\ H_2 : bt^2 + d_3 u_3^2 - d_1 u_1^2 = 0, \\ H_3 : ct^2 + d_1 u_1^2 - d_2 u_2^2 = 0. \end{cases}$$

- 那么  $E[2] \rightarrow E(\mathbb{Q})/2E(\mathbb{Q}) \subseteq \text{Sel}_2(E)$  对应到

$$(1, 1, 1), (-c, -ac, a), (-bc, c, -b), (b, -a, -ab).$$



# 计算 Selmer 群: 分情形讨论

- 记  $D_{\Lambda}^{(n)}$  为  $E^{(n)}$  的齐性空间.
- 情形  $p \nmid abc n$ . 此时  $D_{\Lambda}^{(n)}(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset \iff p \nmid d_1 d_2 d_3$ .
- 故可不妨设  $d_i \mid abc n$  且无平方因子.
- 情形  $p = \infty$ . 容易证明

$$D_{\Lambda}^{(n)}(\mathbb{R}) \neq \emptyset \iff \begin{cases} d_1 > 0, & \text{若 } b > 0, c < 0; \\ d_2 > 0, & \text{若 } c > 0, a < 0; \\ d_3 > 0, & \text{若 } a > 0, b < 0. \end{cases}$$

# 计算 Selmer 群: 分情形讨论

- 情形  $p \mid n$ . 此时  $p \nmid abc$ .  $D_{\Lambda}^{(n)}(\mathbb{Q}_p) \neq \emptyset \iff$

$$\begin{cases} \left(\frac{d_1}{p}\right) = \left(\frac{d_2}{p}\right) = \left(\frac{d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \nmid d_1 d_2 d_3; \\ \left(\frac{-bcd_1}{p}\right) = \left(\frac{cn/d_2}{p}\right) = \left(\frac{bn/d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \nmid d_1, p \mid d_2, p \mid d_3; \\ \left(\frac{-cn/d_1}{p}\right) = \left(\frac{-acd_2}{p}\right) = \left(\frac{-an/d_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \mid d_1, p \nmid d_2, p \mid d_3; \\ \left(\frac{bn/d_1}{p}\right) = \left(\frac{-an/d_2}{p}\right) = \left(\frac{-abd_3}{p}\right) = 1, & \text{若 } p \mid d_1, p \mid d_2, p \nmid d_3. \end{cases}$$

- 第一种情形由希尔伯特符号容易得到, 后面的情形可以通过对  $\Lambda$  加上一个  $E[2]$  对应的齐性空间化为第一种情形.

# 计算 Selmer 群: 分离含 $n$ 的部分

- 设

$$n = p_1 \cdots p_k,$$

$$d_1 = p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k} \cdot \tilde{d}_1, \quad x_i = v_{p_i}(d_1),$$

$$d_2 = p_1^{y_1} \cdots p_k^{y_k} \cdot \tilde{d}_2, \quad y_i = v_{p_i}(d_2),$$

$$d_3 = p_1^{z_1} \cdots p_k^{z_k} \cdot \tilde{d}_3, \quad z_i = v_{p_i}(d_3),$$

其中  $\tilde{d}_i \mid abc$  且无平方因子, 则  $\tilde{d}_1 \tilde{d}_2 \tilde{d}_3 \in \mathbb{Q}^{\times 2}$ .

- 设

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)^T, \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_k)^T, \quad \mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k)^T \in \mathbb{F}_2^k,$$

则  $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$ .

## 计算 Selmer 群: 比较 $\text{Sel}'_2(E^{(n)})$ 和 $\text{Sel}'_2(E)$

- 假设  $n$  素因子均模 8 余 1.
- 设  $\tilde{\Lambda} = (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \tilde{d}_3)$ . 我们对比  $D_{\Lambda}^{(n)}(\mathbb{Q}_p)$  和  $D_{\tilde{\Lambda}}^{(1)}(\mathbb{Q}_p)$  的可解性.
- $p = \infty$ . 由  $d_i$  和  $\tilde{d}_i$  符号相同可知二者可解性相同.
- $p \mid abc$ . 由  $n, d_i/\tilde{d}_i \in \mathbb{Q}_p^{\times 2}$  可知二者可解性相同.
- 如果  $\Lambda \in \text{Sel}_2(E^{(n)})$ , 则  $\tilde{\Lambda} \in \text{Sel}_2(E) = E[2]$ .
- 如果  $\tilde{\Lambda} = (-c, -ac, a)$ , 则

$$\Lambda \cdot (-cn, -ac, an) = \left( \prod_{i=1}^k p_i^{1-x_i}, \prod_{i=1}^k p_i^{y_i}, \prod_{i=1}^k p_i^{1-z_i} \right).$$

其它情形也类似. 因此

$$\text{Sel}'_2(E^{(n)}) = \text{Sel}_2(E^{(n)})/E[2]$$

中每个元素都有唯一代表元  $(d_1, d_2, d_3)$  满足  $0 < d_i \mid n$ .

## 计算 Selmer 群: 得到 $\text{Sel}'_2(E_i^{(n)})$

- $p \mid n$ . 由于  $a_1/a_2, b_1/b_2, c_1/c_2 \in \mathbb{Q}^{\times 2}$ , 因此  $\Lambda = (d_1, d_2, d_3)$  对应的  $E_1, E_2$  的齐性空间在  $\mathbb{Q}_p$  的可解性相同. 从而

$$\text{Sel}'_2(E_1^{(n)}) \cong \text{Sel}'_2(E_2^{(n)}).$$

- 若用矩阵语言来表达则是:

$$\begin{aligned} \text{Sel}'_2(E^{(n)}) &\xrightarrow{\sim} \text{Ker} \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{D}_{-c} & \mathbf{D}_{-bc} \\ \mathbf{D}_{-ac} & \mathbf{A} + \mathbf{D}_c \end{pmatrix} \\ (d_1, d_2, d_3) &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

- 这个矩阵便是 Monsky 矩阵, 其中

$$\mathbf{A} = ([p_j, -n]_{p_i})_{i,j}, \quad \mathbf{D}_u = \text{diag} \left( \left[ \frac{u}{p_1} \right], \dots, \left[ \frac{u}{p_k} \right] \right) \in M_k(\mathbb{F}_2),$$

- $[\cdot, \cdot]$  是加性希尔伯特符号,  $\left[ \frac{\cdot}{\cdot} \right]$  是加性勒让德符号.

# 计算 Cassels 配对

- Cassels 在  $\mathbb{F}_2$  线性空间  $\text{Sel}'_2(E)$  上定义了一个反对称双线性型.
- 对于  $\Lambda, \Lambda'$ , 选择

$$P = (P_v)_v \in D_\Lambda(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}), \quad Q_i \in H_i(\mathbb{Q}).$$

- 令  $L_i$  为定义了  $H_i$  在  $Q_i$  处切平面的线性型, 定义

$$\langle \Lambda, \Lambda' \rangle = \sum_v \langle \Lambda, \Lambda' \rangle_v, \quad \text{其中 } \langle \Lambda, \Lambda' \rangle_v = \sum_{i=1}^3 [L_i(P_v), d'_i]_v,$$

- 它不依赖  $P$  和  $Q_i$  的选取.

## 引理 (Cassels1998)

如果  $p \nmid 2\infty$ ,  $H_i$  和  $L_i$  的系数均是  $p$  进整数, 且模  $p$  后,  $\overline{D}_\Lambda$  仍定义了一条亏格 1 的曲线并带有切平面  $\overline{L}_i = 0$ , 则  $\langle -, - \rangle_p = 0$ .

# 计算 Cassels 配对: 约化到 Cassels 配对非退化

- 由正合列

$$0 \rightarrow E[2] \rightarrow E[4] \xrightarrow{\times 2} E[2] \rightarrow 0$$

- 得到长正合列

$$0 \rightarrow \frac{E(\mathbb{Q})[2]}{2E(\mathbb{Q})[4]} \rightarrow \text{Sel}_2(E) \rightarrow \text{Sel}_4(E) \rightarrow \text{Im Sel}_4(E) \rightarrow 0.$$

- 注意到 Cassels 配对的核是  $\frac{\text{Im Sel}_4(E)}{E[2]}.$
- 因此 Cassels 配对非退化等价于

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} E(\mathbb{Q}) = 0, \quad \text{III}(E/\mathbb{Q})[2^\infty] \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2t}.$$

- 由我们的假设,

$$a_2 = a_1 A^2, \quad b_2 = b_1 B^2, \quad c_2 = c_1 C^2,$$

其中  $A, B, C$  是互素的非零奇数.

- 设  $\Lambda = (d_1, d_2, d_3), \Lambda' = (d'_1, d'_2, d'_3)$ .
- 若能选取适当的  $Q_{i,j}$  和  $P_{i,v}$ , 使得

$$[L_{1,i}(P_{1,v}), d'_i]_v = [L_{2,i}(P_{2,v}), d'_i]_v,$$

则  $E_1, E_2$  对应的 Cassels 配对就相同了.

- 在多数情形这不难证明, 我们仅说明相对复杂的一种情形.
- 不妨设  $A \equiv B \equiv C \equiv 1 \pmod{4}$ .



# 计算 Cassels 配对: 比较局部符号 (续)

- $p \mid n, p \nmid d_1, p \mid d_2, p \mid d_3$ . 设

$$Q_{1,1} = (\alpha, \beta, \gamma) \in H_{1,1}(\mathbb{Q}), \quad Q_{2,1} = (\alpha, A\beta, A\gamma) \in H_{2,1}(\mathbb{Q}).$$

$$P_{1,p} = (1, 0, u, v), \quad L_{1,1}(P_{1,p}) = a_1 n \alpha - d_3 \gamma v + d_2 \beta u,$$

$$P_{2,p} = (1, 0, Cu, Bv), \quad L_{2,1}(P_{2,p}) = Aa_1 n \alpha - Bd_3 \gamma v + Cd_2 \beta u,$$

$$L_{1,1}(P_{1,p})L_{2,1}(P_{2,p}) = \frac{(A+B)(B+C)(C+A)}{2} \left( \frac{a_1 n \alpha}{b+c} + \frac{d_2 \beta u}{a+b} - \frac{d_3 \gamma v}{a+c} \right)^2.$$

- 这里需要用到  $a_1 A^2 + b_1 B^2 + c_1 C^2 = 0$ .

## 引理

若  $A \equiv B \equiv C \equiv 1 \pmod{4}$ , 则  $(A+B)(B+C)(C+A)/8 \equiv 1 \pmod{4}$  是模  $p \mid n$  的二次剩余.

- 对于一些特殊的  $(a, b, c)$ , 我们不需要  $p \equiv 1 \pmod 8, \forall p \mid n$  这么强的条件.
- 例如  $2 \nmid a_i, b_i, 2 \parallel c_i$  (如奇数同余椭圆曲线情形).
- 此时需要对  $p = 2$  情形进行单独处理, 最后也可以得到该结论.
- 例如  $2 \parallel a_i, b_i, 4 \mid c_i$  (如偶数同余椭圆曲线情形).
- 此时除了需要对  $p = 2$  情形进行单独处理, 还需要考虑齐性空间在  $p = \infty$  的解的问题.

## 进一步的思考

- 对于一般的椭圆曲线  $E_1, E_2/\mathbb{Q}$ , 假设有 Galois 模同构  $E_1[4] \cong E_2[4]$ .
- 设  $n$  是无平方因子正整数且对于  $E_1$  或  $E_2$  的每个坏约化  $v$ , 均有  $n \in \mathbb{Q}_v^{\times 2}$ .
- 我们需要什么样的条件能够推出

$$\mathrm{Sel}_2(E_1^{(n)}) \cong \mathrm{Sel}_2(E_2^{(n)}),$$

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} E_1^{(n)}(\mathbb{Q}) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} E_2^{(n)}(\mathbb{Q})?$$

