张神星

复变函数与积分变换

工程数学教材

第一版

合肥工业大学

引　　言

课程介绍

在当今科学与工程的广阔领域中, 复变函数与积分变换作为数学工具的核心组成部分, 扮演着举足轻重的角色. 它们不仅是理论研究的基石, 更是解决实际问题的利器. 本书《复变函数与积分变换》旨在为读者提供一本内容全面、结构清晰、易于理解的教材, 旨在帮助读者系统地掌握这一领域的基本理论和实际应用, 为未来的学术研究和职业生涯打下坚实的基础.

复变函数, 作为数学的一个独特分支, 将实数域扩展到复数域, 从而揭示了许多在实数域中难以发现的数学规律和性质. 通过复变函数, 我们可以更加深入地理解自然界的许多现象, 如电磁场的分布、流体的流动、振动与波动等. 本书首先介绍了复数的基本概念、运算规则和几何意义, 为读者后续学习复变函数提供了必要的数学基础. 随后, 我们深入探讨了复变函数的极限、连续性、可导性等基本性质, 以及复变函数的解析性、积分、级数展开、奇点行为与留数等核心理论.

积分变换, 特别是傅里叶变换和拉普拉斯变换, 是现代科学与工程中广泛应用的数学工具. 它们能够将复杂的微分方程转化为易于求解的代数方程, 从而大大简化了问题的求解过程. 本书在介绍复变函数的基础上, 进一步探讨了积分变换的基本原理、性质和应用. 通过详细的例子和丰富的习题, 读者可以逐步掌握积分变换的基本方法和技巧, 为解决实际工程问题提供有力的数学支持.

本书特点

在编写过程中, 我们注重理论与实践的结合, 兼顾趣味性和可读性, 力求使内容既具有理论深度, 又易于理解和应用. 在每一个概念的引入, 我们都对其引入背景有所交代, 使其显得不突兀生硬. 正文中则通过生动的语言、丰富的插图和有趣的数学故事, 激发读者的学习兴趣和好奇心. 对于重要的概念和定理, 我们还尝试提供多视角理解和分析. 对于相关概念的性质, 我们努力做到解释清晰易懂.

本书配有课后习题的雨课堂格式, 任课教师可使用雨课堂来分发和批改作业, 且客观题可由系统直接批改, 有效地减轻了教师的工作量. 每一章的课后习题经过精心编排, 可

根据题号的奇偶性将其分割为两部分, 根据不同的专业、课时或课程编排选择其中部分或全部的习题. 此外, 每一章结尾的扩展阅读中介绍了与该章内容有关的扩展内容, 以引导读者能深入了解相关知识和应用.

我们相信, 通过本书的学习, 读者不仅能够掌握复变函数与积分变换的基本理论和方法, 还能够培养自己的数学思维和解决问题的能力. 无论是在学术研究、工程实践还是日常生活中, 复变函数与积分变换都将成为读者不可或缺的数学工具.

最后, 我们要感谢所有为本书编写提供支持和帮助的同事、朋友和家人. 他们的无私奉献和辛勤付出, 使得本书能够顺利与广大读者见面. 我们衷心希望本书能够成为读者学习复变函数与积分变换的良师益友, 陪伴读者在数学探索的道路上不断前行.

让我们一起, 以复变函数与积分变换为钥匙, 打开科学与工程的神秘大门, 探索未知的数学奥秘吧！

编者

2024 年 11 月 25 日

目录

第一章 级数

复变函数的级数理论是为了研究如何把复变函数展开成幂级数或双边幂级数的形式, 这样复变函数的一些性质就显得较为简单. 与高等数学有所不同, 只要复变函数在圆域或圆环域内处处解析, 就一定能展开成幂级数或双边幂级数的形式. 这些展开均依赖于柯西积分公式, 其中圆环域内解析函数的双边幂级数展开, 即洛朗展开, 可与该函数绕闭路积分联系, 这便引出了复变函数的留数理论.

1.1 复数项级数

和数列类似, 我们可仿照实数域上级数得到复数域上级数.

定义 1.1

(1) 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是复数列. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项**无穷级数**.

(2) 称 $s_n := z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 为该级数的**部分和**.

(3) 如果部分和数列 $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ 极限存在, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ **收敛**, 并记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 为它的**和**. 否则称该级数**发散**.

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = A$ 收敛, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = A - A = 0.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件.

定理 1.1

设 $z_n = x_n + y_n i, z = x + yi$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi \iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n = a \text{ 且 } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b.$$

证明 设部分和

$$\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad \tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n,$$

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + i\tau_n.$$

由复数列的敛散性判定条件可知

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a + bi \iff \lim_{n\to\infty} \sigma_n = a \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} \tau_n = b.$$

由此命题得证.

定理 1.2

如果实数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots$$

收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛, 且 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

证明 因为 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 由比较判别法可知实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

由三角不等式可知

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

两边同时取极限即得级数的不等式关系

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|,$$

其中第二个等式是因为绝对值函数 $|z|$ 连续.

✍ **练习 1.1** 什么时候 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$?

定义 1.2

(1) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**.

(2) 称收敛但不绝对收敛的级数**条件收敛**.

定理 1.3

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

证明 必要性由定理 1.2 的证明已经知道, 充分性由 $|z_n| \leqslant |x_n| + |y_n|$ 可得.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛当且仅当它的实部和虚部级数都条件收敛, 或者一个条件收敛一个绝对收敛.

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性, 且不改变其和.

一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和，但如果重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

例 1.1 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+i^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解 由于实部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=1+\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{2}{8}+\cdots>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

发散，所以该级数发散.

例 1.2 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解 因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}y_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

均条件收敛，所以原级数条件收敛.

✍ **练习 1.2** 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

1.1.1 判别法

由正项级数的判别法可以得到如下结论：设

(1) **比值法**[1]: $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在或为 $+\infty$)，或

(2) **根式法**[2]: $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在或为 $+\infty$)，[3]

那么

- 当 $\lambda<1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}z_n$ 绝对收敛;
- 当 $\lambda>1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}z_n$ 发散;
- 当 $\lambda=1$ 时，无法使用该方法判断敛散性.

---

[1] 又名达朗贝尔判别法.

[2] 又名柯西判别法.

[3] 一般情形下，我们有柯西-阿达马判别法：$\lambda=\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{n\geqslant k}\sqrt[n]{|z_n|}\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$，即该数列收敛子数列的极限的最大值.

其证明是通过将该级数与相应的等比级数做比较得到的, 这里省略.

例 1.3 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{8}{n+1}\right|=0$, 所以该级数绝对收敛.

实际上, 它的实部和虚部级数分别为

$$1-\frac{8^2}{2!}+\frac{8^4}{4!}-\cdots=\cos 8,\quad 8-\frac{8^3}{3!}+\frac{8^5}{5!}-\cdots=\sin 8,$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8i)^n}{n!}=\cos 8+i\sin 8=e^{8i}.$$

我们能否像高等数学情形一样, 直接将函数 e^z 进行展开来得到该级数的和呢? 事实上我们总可以将解析函数展开成幂级数.

1.2 幂级数

1.2.1 幂级数及其收敛域

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义 1.3

(1) 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 称为**复变函数项级数**.

(2) 对于 $z_0\in D$, 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z_0)$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ **在 z_0 处收敛**, 相应级数的值称为它的**和**.

(3) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ 在 D 上处处收敛, 则它的和是一个函数, 称为**和函数**.

定义 1.4

称形如 $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为**幂级数**.[4]

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

[4]尽管 $z=a$ 时 $(a-z)^0$ 无意义, 但为了简便我们约定幂级数在 $z=a$ 时取值为 c_0.

定理 1.4 (阿贝尔定理)

(1) 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 那么对任意 $|z| < |z_0|$ 的 z, 该级数必绝对收敛.

(2) 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处发散, 那么对任意 $|z| > |z_0|$ 的 z, 该级数必发散.

证明 (1) 因为级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 故存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 对于 $|z| < |z_0|$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{1 - \left|\frac{z}{z_0}\right|}.$$

所以级数在 z 处绝对收敛.

(2) 是 (1) 的逆否命题.

设 R 是实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| x^n$ 的收敛半径.

- 如果 $R = +\infty$, 由阿贝尔定理可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 处处绝对收敛.
- 如果 $0 < R < +\infty$, 那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $|z| < R$ 上绝对收敛, 在 $|z| > R$ 上发散.
- 如果 $R = 0$, 那么 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 仅在 $z = 0$ 处收敛, 对任意 $z \neq 0$ 都发散.

我们称 R 为该幂级数的收敛半径.

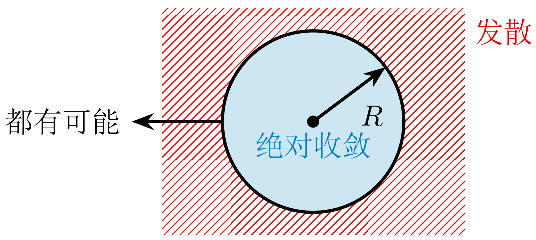


图 1.1 幂级数的收敛范围

例 1.4 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解 如果幂级数收敛, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$ 可知 $|z| < 1$. 当 $|z| < 1$ 时, 和函数为

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

因此收敛半径为 1.

1.2.2 收敛半径的计算

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R=\dfrac{1}{r}$, 其中

(1) 比值法[5]: $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ (假设存在或为 $+\infty$), 或

(2) 根式法[6]: $r=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ (假设存在或为 $+\infty$).[7]

如果 $r=0$ 或 $+\infty$, 则 $R=+\infty$ 或 0.

例 1.5 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径, 并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解 由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

可知收敛半径为 1. 当 $z=2$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散. 当 $z=0$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

收敛.

事实上, 收敛圆周上既可能处处收敛, 也可能处处发散, 也可能既有收敛的点也有发散的点.[8]

例 1.6 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos(in)z^n$ 的收敛半径.

解 我们有

$$c_n=\cos(in)=\frac{e^n+e^{-n}}{2}.$$

由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}+e^{-n-1}}{e^n+e^{-n}}=e\lim_{n\to\infty}\frac{1+e^{-2n-2}}{1+e^{-2n}}=e$$

---

[5] 又名达朗贝尔公式.

[6] 又名柯西公式.

[7] 一般情形下, 我们有柯西-阿达马公式: $r=\lim\limits_{k\to\infty}\max\limits_{n\geqslant k}\sqrt[n]{|c_n|}$.

[8] 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^n$ 在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n^2}$ 在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处绝对收敛; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\sqrt{n}]}z^n}{n}$ 在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处条件收敛, 这里 $[\alpha]$ 表示不超过 α 的最大整数.

可知收敛半径为 $\dfrac{1}{e}$.

✍ **练习 1.3** 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径为__________.

1.2.3 幂级数的运算性质

定理 1.5

设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

的收敛半径分别为 R_1, R_2, 和函数分别为 $f(z), g(z)$. 那么当 $|z| < R = \min\{R_1, R_2\}$ 时,

$$(f \pm g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n) z^n, \quad (fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

当 $R_1 \neq R_2$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)z^n$ 的收敛半径为二者收敛半径的较大值. 不妨设 $R_1 > R_2$, 当 $R_1 > |z| > R_2$ 时, 若该幂级数收敛, 则由上述定理可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n - a_n)z^n$ 收敛, 从而与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 发散矛盾. 因此当 $R_1 > |z| > R_2$ 时该幂级数发散, 从而收敛半径为 R_1.

但是若 $R_1 = R_2$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)z^n$ 的收敛半径可以比 R_1 大. 我们只需取一收敛半径大于 R_1 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, 并令 $b_n = c_n - a_n$, 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径为 R_1.

定理 1.6

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

(1) 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

(2) $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,

(3) $\displaystyle\int_0^z f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$.

也就是说, 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析, 且可以逐项求导, 逐项积分.

由于和函数在 $|z| > R$ 上没有定义, 因此我们不能谈和函数在 $|z| = R$ 上的解析性.

如果函数 $g(z)$ 在该幂级数收敛的点处和 $f(z)$ 均相同, 则 $g(z)$ 一定在收敛圆周上有

奇点. 这是因为一旦 $g(z)$ 在收敛圆周上处处解析, 该和函数就可以在一个半径更大的圆域上作泰勒展开.

例 1.7 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数, 其中 $a \neq b$.

解

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}.$$

当 $|z-a| < |b-a|$ 时, $\dfrac{1}{z-b} = \dfrac{1}{a-b}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z-a}{b-a}\right)^n$, 即

$$\frac{1}{z-b} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}, \quad |z-a| < |b-a|.$$

例 1.8 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = 2$ 可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$. 当 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 时, $|2z| < 1$. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}\\ &= \frac{2}{1-2z} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-2z)(1-z)}.\end{aligned}$$

例 1.9 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$ 可知收敛半径为 1. 当 $|z| < 1$ 时,

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty}z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \left(-\frac{1}{z-1}\right)' = \frac{1}{(z-1)^2}, \quad |z| < 1.$$

通过对

$$1 + \lambda z + \lambda^2 z^2 + \cdots = \frac{1}{1-\lambda z}$$

两边求 k 阶导数可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)\cdots(n+2)(n+1)\lambda^n z^n = \frac{k!}{(1-\lambda z)^{k+1}}.$$

因此如果 $p(n)$ 是次数为 $m-1$ 的多项式, 那么

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)\lambda^n z^n = \frac{P(z)}{(1-\lambda z)^m},$$

其中 P 是多项式.

一般地, 如果幂级数的系数形如

$$c_n = p_1(n)\lambda_1^n + \cdots + p_k(n)\lambda_k^n,$$

则和函数一定是形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{P(z)}{(1-\lambda_1 z)^{m_1}\cdots(1-\lambda_k z)^{m_k}}$$

的有理函数, 其中 $m_j = \deg p_j + 1$. 反过来这样的分式展开成幂级数的系数也一定有上述形式, 至多有有限多项例外. 这可以帮助我们进行计算的验证.

✍ **练习 1.4** 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ 的收敛半径与和函数.

例 1.10 求 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n\right) \mathrm{d}z$.

解 由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z|<1$ 收敛, 它的和函数解析. 因此

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right) \mathrm{d}z &= \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) \mathrm{d}z \\ &= 2\pi i + 0 = 2\pi i.\end{aligned}$$

1.3 泰勒级数

1.3.1 泰勒展开的形式与性质

我们知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

在高等数学中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它处处可导, 但是它在 0 处的各阶导数都是 0. 因此它的泰勒级数是 0, 余项恒为 $f(x)$. 除 0 外它的泰勒级数均不收敛到原函数.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的范围也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots,\quad |x|<1.$$

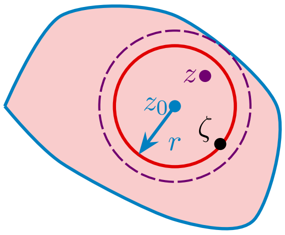
这可以从 $x=-1$ 是奇点看出. 而

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots,\quad |x|<1$$

却并没有奇点. 为什么它的麦克劳林级数成立的开区间也是 $(-1,1)$? 这个问题在本节可以得到回答.

设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0\in D$. 设 $|z-z_0|$ 小于 z_0 到 D 边界的距离 d, 则存在 $|z-z_0|<r<d$. 设 $K:|\zeta-z_0|=r$, 则 K 和它的内部包含在 D 中. 由于 $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$, 因此

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$



故

$$\begin{aligned}f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta&=\frac{1}{2\pi i}\oint_K f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n+R_N(z),\\&=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n+R_N(z),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}R_N(z)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_K f(\zeta)\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right]\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\cdot\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^N\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D\supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)|\leqslant M,\zeta\in K$, 那么

$$\begin{aligned}|R_N(z)|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\oint_K\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\cdot\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^N\right|\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{r-|z-z_0|}\cdot\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^N\cdot 2\pi r\to 0\quad(N\to\infty).\end{aligned}$$

故

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\quad |z-z_0|<d.$$

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此解析函数的泰勒展开成立的圆域不包含奇点. 由此可知, 解析函数在 z_0 处泰勒展开成立的圆域的最大半径是 z_0 到最近奇点的距离.

需要注意的是, 泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的, 而且泰勒展开等式也可能在这个圆域之外的点成立. 例如

$$f(z)=\begin{cases}e^z, & z\neq 1;\\ 0, & z=1\end{cases}$$

的麦克劳林展开为 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!},\quad |z|<1.$

现在我们来看 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$. 它的奇点为 $\pm i$, 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1,1)$.

1.3.2 泰勒展开的计算方法

若 $f(z)$ 在 z_0 附近展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, 则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0)=\sum_{k=n}^{\infty}c_k k(k-1)\cdots(k-n+1)(z-z_0)^{k-n}\Big|_{z=z_0}=n!c_n.$$

所以解析函数的幂级数展开是唯一的.

因此解析函数的泰勒展开不仅可以直接求出各阶导数得到, 也可以利用幂级数的运算法则得到.

例 1.11 由于 $(e^z)^{(n)}(0)=e^z|_{z=0}=1$, 因此

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad\forall z.$$

例 1.12 由于 $(\cos z)^{(n)}=\cos\left(z+\dfrac{n\pi}{2}\right)$,

$$(\cos z)^{(2n+1)}(0)=0,\quad (\cos z)^{(2n)}(0)=(-1)^n,$$

因此

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\quad \forall z.$$

例 1.13 由 e^z 的泰勒展开可得

$$\begin{aligned}\sin z&=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n-(-iz)^n}{2i\cdot n!}\\&=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \forall z.\end{aligned}$$

这里, 因为 $\sin z$ 是奇函数, 所以它的麦克劳林展开只有奇数幂次项, 没有偶数幂次项.

例 1.14 求对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 的麦克劳林展开.

解 由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析, 因此它在 $|z|<1$ 内解析, 且

$$[\ln(1+z)]'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1.$$

逐项积分得到

$$\begin{aligned}\ln(1+z)&=\int_0^z\frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta^n\,\mathrm{d}\zeta\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n},\quad |z|<1.\end{aligned}$$

例 1.15 函数 $f(z)=(1+z)^\alpha$ 的主值为 $\exp\big[\alpha\ln(1+z)\big]$. 它在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析. 由于

$$\begin{aligned}f^{(n)}(0)&=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\exp\big[(\alpha-n)\ln(1+z)\big]\Big|_{z=0}\\&=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(1+z)^\alpha&=1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n,\quad |z|<1.\end{aligned}$$

当 $\alpha = n$ 是正整数时, 上述麦克劳林展开的 $> n$ 幂次项系数为零, 从而

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k z^k,$$

此即牛顿二项式展开.

例 1.16 将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解 由幂函数展开可知当 $|z| < 1$ 时,

$$(1+z)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)(-3)\cdots(-1-n)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n.$$

解 另解 由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z = -1$, 因此它在 $|z| < 1$ 内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

因此

$$\frac{1}{(1+z)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n, \quad |z| < 1.$$

一般地, 我们有

$$\frac{1}{(1-\lambda z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k-1)\cdots(n+2)(n+1) z^n, \; |z| < \frac{1}{|\lambda|}.$$

例 1.17 求 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的麦克劳林展开.

解 由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z = \dfrac{2}{3}$, 因此它在 $|z| < \dfrac{2}{3}$ 内解析. 此时

$$\begin{aligned}\frac{1}{3z-2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{3z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3z}{2}\right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} z^n, \quad |z| < \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

✍ **练习 1.5** 求 $\dfrac{1}{1-3z+2z^2}$ 的麦克劳林展开.

有理函数展开为真分式形式若用待定系数法总略显繁琐, 我们现介绍一种方法. 设

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)(z+2)} = \frac{a}{z-1} + \frac{b}{z-2} + \frac{c}{z+2},$$

$$a = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-1|=0.1} f(z)\,\mathrm{d}z = \left.\frac{1}{(z-2)(z+2)}\right|_{z=1} = -\frac{1}{3}.$$

类似可得 $b = \dfrac{1}{4}, c = \dfrac{1}{12}$.

对于分母有重根的情形, 例如

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z-2)^3}=\frac{a}{z-1}+\frac{b}{(z-1)^2}+\frac{c}{z-2}+\frac{d}{(z-2)^2}+\frac{e}{(z-2)^3},$$

$$a=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=0.1}f(z)\,\mathrm{d}z=\left(\frac{1}{(z-2)^3}\right)'\bigg|_{z=1}=-3,$$

$$b=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-1|=0.1}(z-1)f(z)\,\mathrm{d}z=\frac{1}{(z-2)^3}\bigg|_{z=1}=-1.$$

类似可得 $c=3,d=-2,e=1$, 只是我们需要计算高阶导数. 因此

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(3-(n+1)+\frac{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(n+1)-\frac{1}{8}(n+2)(n+1)}{2^n}\right)z^n,\quad |z|<1.$$

1.4 洛朗级数

1.4.1 双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数, 然而它却可能可以展开为双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

例如

$$\frac{1}{z^2(1-z)}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+\cdots,\quad 0<|z|<1.$$

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用, 我们对它的敛散性作如下定义:

定义 1.5

如果双边幂级数的非负幂次部分和负幂次部分作为函数项级数都收敛, 则我们称这个双边幂级数收敛. 否则我们称之为发散.

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和形成的数列的极限来定义, 因为使用不同的部分和选取方式会影响到极限的数值.

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分，令 $\zeta=\frac{1}{z-z_0}$，那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R，则它在 $|\zeta|<R$ 内收敛，在 $|\zeta|>R$ 内发散. 设 $R_1:=\frac{1}{R}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 内收敛，在 $|z-z_0|<R_1$ 内发散.

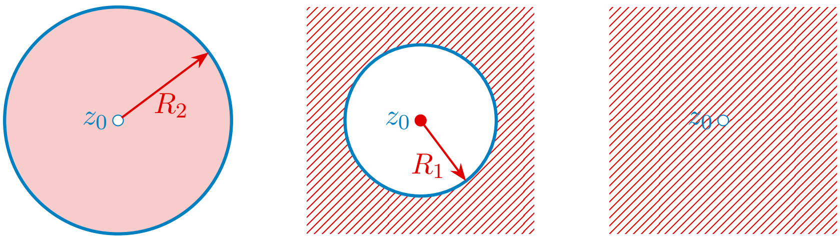
(1) 如果 $R_1>R_2$，则该双边幂级数处处不收敛.

(2) 如果 $R_1=R_2$，则该双边幂级数只在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 上可能有收敛的点. 此时没有收敛域.

(3) 如果 $R_1<R_2$，则该双边幂级数在 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内收敛，在 $|z-z_0|<R_1$ 或 $>R_2$ 内发散，在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 或 R_2 上既可能发散也可能收敛.

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$.

当 $R_1=0$ 或 $R_2=+\infty$ 时，圆环域的形状会有所不同.



$0<|z-z_0|<R_2$　　$R_1<|z-z_0|<+\infty$　　$0<|z-z_0|<+\infty$

双边幂级数的非负幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛，因此它们的和函数都解析 ($\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$ 关于 z 解析)，且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的，且可以逐项求导、逐项积分.

例 1.18　求双边幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2+i)^n}$ 的收敛域与和函数.

解　非负幂次部分收敛域为 $|z|<|2+i|=\sqrt{5}$，负幂次部分收敛域为 $|z|>|2|=2$. 因此该双边幂级数的收敛域为 $2<|z|<\sqrt{5}$. 此时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2+i)^n}=\frac{\frac{2}{z}}{1-\frac{2}{z}}+\frac{1}{1-\frac{z}{2+i}}=\frac{-iz}{(z-2)(z-2-i)}.$$

1.4.2　洛朗展开的形式

反过来，在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数，被称为洛朗级数.

例如 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z=0,1$ 以外解析. 在圆环域 $0<|z|<1$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\cdots$$

在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内,

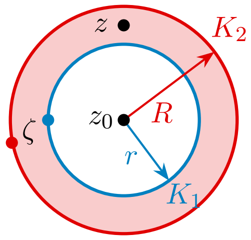
$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}-\cdots$$

现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到洛朗展开式. 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析. 设

$$K_1:|z-z_0|=r,\quad K_2:|z-z_0|=R,\quad R_1<r<R<R_2.$$

是该圆环域内的两个圆周. 对于 $r<|z-z_0|<R$, 由柯西积分公式,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta.$$



和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta\in K_1$, 由 $\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1$ 可得

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}},$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}f(\zeta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

令

$$\begin{aligned}R_N(z)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}f(\zeta)\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta\\&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\cdot\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{N-1}\mathrm{d}\zeta.\end{aligned}$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K_1$, 那么

$$\begin{aligned}|R_N(z)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_{K_1}\left|\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\cdot\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{N-1}\right| \mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{|z-z_0|-r}\cdot\left|\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|^{N-1}\cdot 2\pi r \to 0 \quad (N\to\infty).\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}f(z) = &\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\right](z-z_0)^{-n},\end{aligned}$$

其中 $r < |z-z_0| < R$. 由复合闭路定理, K_1, K_2 可以换成任意一条在圆环域内绕 z_0 的闭路 C. 从而我们得到 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心的圆环域的洛朗展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n,$$

其中 $R_1 < |z-z_0| < R_2$.

1.4.3 洛朗展开的计算方法

我们称 $f(z)$ 洛朗展开的非负幂次部分为它的解析部分, 负幂次部分为它的主要部分.

设在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

则逐项积分得到

$$\oint_C\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\oint_C(\zeta-z_0)^{k-n-1}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i c_n.$$

因此 $f(z)$ 在圆环域内的双边幂级数展开是唯一的, 它就是洛朗级数.

例 1.19 将 $f(z) = \dfrac{e^z-1}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

由洛朗级数的唯一性, 我们可以从 e^z 的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数. 这种做法比直接计算积分更简便. 因此我们一般不用直接法, 而是用双边幂级数的代数、求导、求积分运算来得到洛朗级数.

解

$$\frac{e^z-1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\right) = \frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^n,$$

其中 $0<|z|<+\infty$.

例 1.20 在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$, (2) $1<|z|<2$, (3) $2<|z|<+\infty$.

解 由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1,2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. 注意到

$$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1},$$

因此我们可以根据 $|z|$ 的范围来将其展开成等比级数.

(1) 由于 $|z|<1, \left|\dfrac{z}{2}\right|<1$, 因此

$$\begin{aligned}
f(z)&=-\frac{1}{2-z}+\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}+\frac{1}{1-z}\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n\\
&=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}z+\frac{7}{8}z^2+\cdots
\end{aligned}$$

(2) 由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1, \left|\dfrac{z}{2}\right|<1$, 因此

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}\\
&=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n\\
&=\cdots-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}z-\frac{1}{8}z^2-\cdots
\end{aligned}$$

(3) 由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right|<1, \left|\dfrac{2}{z}\right|<1$, 因此

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\\
&=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}\\
&=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots
\end{aligned}$$

洛朗展开的一些特点可以帮助我们检验计算的正确性.

- 若 $f(z)$ 在 $|z-z_0|<R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由唯一性可知泰勒级数等于洛朗级数, 因此此时洛朗展开一定没有负幂次项.

- 若 $f(z)$ 在圆周 $|z-z_0|=R_1,R_2>0$ 上有奇点, 则在圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 上的洛朗展开一定有无穷多负幂次和无穷多正幂次项.

- 有理函数在 $0<|z-z_0|<r$ 洛朗展开最多只有有限多负幂次项, 在 $R<|z-z_0|<+\infty$ 洛朗展开最多只有有限多正幂次项.

如果有理函数 $f(z)$ 在圆环域 $r<|z|<R$ 内解析, 那么它的洛朗展开一定形如

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n+\sum_{n<0}b_nz^n,$$

其中 $P(z)$ 只有有限多项, a_n 是形如 $p(n)\lambda^{-n}$ 的线性组合, $|\lambda|\geqslant R$ 是奇点, $\deg p+1$ 是 λ 在 $f(z)$ 出现的重数; 而 b_n 则是 $|\lambda|\leqslant r$ 的那个奇点对应的组合.

不仅如此, 在不同的圆环域不同圆环域上的洛朗展开形式地相减, 系数会有共同的通项形式.

例如在 $0<|z|<1$ 内,

$$f(z)=\frac{120}{(z-1)(z^2-4)(z^2-9)}=\sum_{n\geqslant 0}\left(-5+\frac{2}{(-2)^{n+1}}+\frac{6}{2^{n+1}}-\frac{1}{(-3)^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n.$$

那么在 $2<|z|<3$ 内洛朗展开的系数就是上面的每个系数 (不论正负 n) 减去一个共同形式的项, 使得其非负幂次通项对应那些奇点 $|\lambda|\geqslant 3$, 而负幂次通项对应那些奇点 $|\lambda|\leqslant 2$. 故

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{(-3)^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n+\sum_{n\leqslant -1}\left(5-\frac{2}{(-2)^{n+1}}-\frac{6}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

其证明可见复变函数在不同圆环域内洛朗展开的联系一文.

例 1.21 将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域 $0<|z|<1$ 内展开成洛朗级数.

解

$$f(z)=\frac{z-1+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}=-\frac{1}{1-z}+2\left(\frac{1}{1-z}\right)'$$

因此当 $0<|z|<1$ 时,

$$f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n.$$

✍ **练习 1.6** 将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

利用幂函数的泰勒展开可以得到

$$\frac{1}{(1-\lambda z)^k}=-\sum_{n<0}(n+k-1)\cdots(n+2)(n+1)z^n,\ |z|>\frac{1}{|\lambda|}.$$

实际上求和范围可以改成 $n\leqslant -k$.

注意到当 $n=-1$ 时, 洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分, 这便引出了留数的概念.

例 1.22 求 $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)^2}\,\mathrm{d}z$.

解 注意到闭路 $|z|=3$ 落在 $1<|z+1|<+\infty$ 内. 我们在这个圆环域内求 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^2}$ 的洛朗展开.

$$\begin{aligned}f(z)=\frac{1}{z(z+1)^2}&=\frac{1}{(z+1)^3}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{z+1}}\\&=\frac{1}{(z+1)^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+3}}\end{aligned}$$

故 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}=0$.

例 1.23 求 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{z}{\sin z^2}\,\mathrm{d}z$.

解 注意到闭路 $|z|=1$ 落在 $0<|z|<\sqrt{\pi}$ 内. 我们在这个圆环域内求 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z^2}$ 的洛朗展开.

$$f(z)=\frac{z}{\sin z^2}=\frac{z}{z^2-\dfrac{z^6}{3!}+\dfrac{z^{10}}{5!}+\cdots}=\frac{1}{z}+\frac{z^3}{6}+\cdots$$

故 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}=2\pi i$.

作业

一、单选题.

1. 下列级数中发散的是( ).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ (B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\ln(in)}\right]^n$

(C) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{5^n}$ (D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}$

2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n i}{\sqrt{n}}\right]$ 的敛散性是( ).

(A) 无法判断 (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛 (D) 发散

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(iz)^n$ 的收敛半径是( ).

(A) i (B) $-i$ (C) 1 (D) $+\infty$

4. 如果级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n$ 在点 $z=3$ 发散, 则( ).

(A) 在点 $z=-1$ 收敛 (B) 在点 $z=-3$ 发散 (C) 在点 $z=2$ 收敛 (D) 以上都不对

5. 以下表述正确的是( ).

(A) 幂级数总在它的收敛圆周上处处收敛

(B) 幂级数的和函数在收敛圆周内可能有奇点

(C) 幂级数在它的收敛圆周上可能处处绝对收敛

(D) 任一在 z_0 处可导的函数一定可以在 z_0 的邻域内展开成泰勒级数

二、填空题.

1. 函数 $f(z)=\frac{e^{1/z}}{z+1}$ 在 $z_0=i$ 处的泰勒展开成立的最大圆域是 $|z-i|<$______.

三、计算题.

1. 判断下列级数的绝对收敛性与收敛性:

(i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6+5i)^n}{8^n}$;

(iii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{5^n}(1+2i)^n$.

2. 计算下列幂级数的收敛半径.

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$;　(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(z-1)^n$;

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$;　(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ (p 为正整数);

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$;　(vi) $\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n(z+i)^n$;

(vii) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{\pi i}{n}} z^n$;　(viii) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-2}{\ln in}\right)^n$;

(ix) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+a^n)z^n$, 其中 a 是正实数.

3. 把下列各函数展开成 z 的幂级数, 并指出它们的收敛半径:

(i) $\frac{1}{(1+z^2)^2}$;　(ii) $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$;　(iii) $e^z \cos z$;

(iv) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0=2$;　(v) $\frac{1}{z^2}, z_0=-1$;　(vi) $\arctan z=-\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz}, z_0=0$.

4. 将函数 $f(z)=\frac{z+1}{z^2(z-1)}$ 分别在下列区域内展开成洛朗级数

(i) $0<|z|<1$;　(ii) $1<|z|<+\infty$.

5. 将函数 $f(z)=\frac{1}{(1-z)(z-2)}$ 分别在下列区域内展开成洛朗级数

(i) $0<|z-1|<1$;　(ii) $2<|z|<+\infty$.

6. 将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2+z-2}$ 分别在下列区域内展开成洛朗级数

(i) $1<|z|<2$;　(ii) $0<|z-1|<1$.

7. 将函数 $f(z)=\frac{1}{z^2+z}$ 分别在下列区域内展开成洛朗级数

(i) $1<|z|<2$;　(ii) $0<|z+1|<1$.

8. 将 $f(z)=\frac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

9. 将函数 $e^{1/(1-z)}$ 在圆环域 $1 < |z| < +\infty$ 内展开成洛朗级数.

10. 将 $z^3 \exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$ 在圆环域 $0 < |z| < +\infty$ 内展开成洛朗级数.

11. 如果 C 为正向圆周 $|z| = 3$, 求积分 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的值, 其中 $f(z)$ 为:

(i) $\dfrac{1}{z(z+2)}$;　　(ii) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$.

12. 下列论述为何不正确? 我们有

$$\begin{aligned}\frac{z}{1-z} &= z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots,\\ \frac{z}{z-1} &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \cdots,\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{z}{1-z} + \dfrac{z}{z-1} = 0$, 所以

$$\cdots + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots = 0.$$

四、证明题.

1. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在 $(\neq \infty)$, 下列三个幂级数有相同的收敛半径

$$\sum c_n z^n; \quad \sum \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}; \quad \sum n c_n z^{n-1}.$$

参考文献

[Car43] 吉罗拉莫·卡尔达诺, 王宪生译. 我的生平. 浙江大学出版社, 2021.
译自: Girolamo Cardano, *De Vita Propria*, Paris, 1643.

[Car63] Gerolamo Cardano, Sydney Henry Gould (Translator), *The Book on Games of Chance*, Dover Publications,2015.
译自: Gerolamo Cardano, *Liber de Zudo Aleae*, Paris, 1663.

[Kli90] 莫里斯·克莱因, 张理京, 张锦炎, 江泽涵译. 古今数学思想（第一册）. 上海科学技术出版社, 2013.
译自: Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York, NY, 1990.

[Cot14] *Phil. Trans.*, 29, 5–45, 1714.

[BJMR75] Gordon O. Berg, W. Julian, R. Mines, Fred Richman, *The constructive Jordan curve theorem*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 5 (2):225–236, 1975.

[ZZ84] 庄圻泰, 张南岳. 复变函数. 北京大学出版社, 1984.

[FH87] 范莉莉, 何成奇. 复变函数论. 上海科学技术出版社, 1987.

[Ahl22] 拉尔斯·V. 阿尔福斯, 赵志勇, 薛运华, 杨旭译. 复分析. 机械工业出版社, 2022.
译自: Lars Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill Education, 1979.

[SL] 史济怀, 刘太顺. 复变函数.

索　　引