1.3 复数的乘幂与方根

复数的乘幂

- 对于任意 $z \in \mathbb{C}$ 和正整数 n, z^n 是指 n 个 z 相乘, 也就是 z 的 n 次幂.

复数的乘幂

- 对于任意 $z \in \mathbb{C}$ 和正整数 n, z^n 是指 n 个 z 相乘, 也就是 z 的 n 次幂.
- 对于 $z \neq 0$, 定义 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

复数的乘幂

- 对于任意 $z \in \mathbb{C}$ 和正整数 n, z^n 是指 n 个 z 相乘, 也就是 z 的 n 次幂.
- 对于 $z \neq 0$, 定义 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.
- 设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$.

复数的乘幂

- 对于任意 $z \in \mathbb{C}$ 和正整数 n, z^n 是指 n 个 z 相乘, 也就是 z 的 n 次幂.
- 对于 $z \neq 0$, 定义 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.
- 设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$. 根据复数的三角形式的乘法和除法运算法则, 得

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

复数的乘幂

- 对于任意 $z \in \mathbb{C}$ 和正整数 n, z^n 是指 n 个 z 相乘, 也就是 z 的 n 次幂.
- 对于 $z \neq 0$, 定义 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.
- 设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$. 根据复数的三角形式的乘法和除法运算法则, 得

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

- 特别地, 当 $r = 1$ 时, 我们得到棣莫弗(De Moivre)公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\,.$$

- 棣莫弗公式本身就很有用,

*棣莫弗公式的应用

- 棣莫弗公式本身就很有用, 例如从它可以得到三角函数的 n 倍角公式:

$$
\begin{aligned}
\cos 4\theta &= \frac{1}{2}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^4 + (\cos\theta - i\sin\theta)^4\right] \\
&= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta \\
&= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1.
\end{aligned}
$$

*棣莫弗公式的应用

- 棣莫弗公式本身就很有用, 例如从它可以得到三角函数的 n 倍角公式:

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= \frac{1}{2}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^4 + (\cos\theta - i\sin\theta)^4\right] \\ &= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta \\ &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1.\end{aligned}$$

- 不难看出 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的多项式, 叫做切比雪夫多项式 $\cos n\theta = g_n(\cos\theta)$.

*棣莫弗公式的应用

- 棣莫弗公式本身就很有用, 例如从它可以得到三角函数的 n 倍角公式:

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= \frac{1}{2}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^4 + (\cos\theta - i\sin\theta)^4\right]\\ &= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta\\ &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1.\end{aligned}$$

- 不难看出 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的多项式, 叫做切比雪夫多项式 $\cos n\theta = g_n(\cos\theta)$.
- 切比雪夫多项式在计算数学, 从而在物理和信息学中的近似计算问题中有着重要的作用.

例题: 复数乘幂的计算

- 例 化简 $(1+i)^n + (1-i)^n$.

例题: 复数乘幂的计算

- 例 化简 $(1+i)^n+(1-i)^n$.
- 解 由于

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}},\qquad 1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

例题: 复数乘幂的计算

- 例 化简 $(1+i)^n+(1-i)^n$.
- 解 由于

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}},\qquad 1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

- 因此

$$(1+i)^n+(1-i)^n$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

例题: 复数乘幂的计算

- **例** 化简 $(1+i)^n+(1-i)^n$.
- **解** 由于

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}},\qquad 1-i=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}.$$

- 因此

$$\begin{aligned}
&(1+i)^n+(1-i)^n\\
&=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\
&=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.
\end{aligned}$$

复数的方根

- 我们利用棣莫弗公式来计算复数 $z = re^{i\theta}$ 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$.

- 我们利用棣莫弗公式来计算复数 $z = re^{i\theta}$ 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设 $w^n = z, w = \rho e^{i\varphi}$, 则

$$w^n = \rho^n e^{in\varphi} = z = re^{i\theta}$$

- 我们利用棣莫弗公式来计算复数 $z = re^{i\theta}$ 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设 $w^n = z, w = \rho e^{i\varphi}$, 则

$$w^n = \rho^n e^{in\varphi} = z = re^{i\theta}$$

$$\rho^n = r, \qquad \cos(in\varphi) = \cos\theta\,, \qquad \sin(in\varphi) = \sin\theta\,.$$

- 我们利用棣莫弗公式来计算复数 $z = re^{i\theta}$ 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设 $w^n = z, w = \rho e^{i\varphi}$, 则

$$w^n = \rho^n e^{in\varphi} = z = re^{i\theta}$$

$$\rho^n = r, \qquad \cos(in\varphi) = \cos\theta\,, \qquad \sin(in\varphi) = \sin\theta\,.$$

- 因此 $\rho = \sqrt[n]{r}$, 且存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \qquad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

- 我们利用棣莫弗公式来计算复数 $z = re^{i\theta}$ 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设 $w^n = z, w = \rho e^{i\varphi}$, 则

$$w^n = \rho^n e^{in\varphi} = z = re^{i\theta}$$

$$\rho^n = r, \qquad \cos(in\varphi) = \cos\theta\,, \qquad \sin(in\varphi) = \sin\theta\,.$$

- 因此 $\rho = \sqrt[n]{r}$, 且存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \qquad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

- 为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为算术根.

- 因此

$$w=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

- 因此

$$w=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

- 不难看出, k 和 $k+n$ 对应同一个 w, 因此只需取 $k=0,1,\ldots,n-1$.

- 因此

$$w=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

- 不难看出, k 和 $k+n$ 对应同一个 w, 因此只需取 $k=0,1,\ldots,n-1$.
- 故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值.

复数的方根

- 因此

$$w = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

- 不难看出, k 和 $k+n$ 对应同一个 w, 因此只需取 $k = 0,1,\ldots,n-1$.
- 故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值.
- 这些根的模长都相等, 且两两的辐角差为 $\frac{2\pi}{n}$ 的倍数,

复数的方根

- 因此

$$w=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

- 不难看出, k 和 $k+n$ 对应同一个 w, 因此只需取 $k=0,1,\dots,n-1$.
- 故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值.
- 这些根的模长都相等, 且两两的辐角差为 $\frac{2\pi}{n}$ 的倍数, 所以它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的正接 n 边形的顶点.

- 例 求 $\sqrt[4]{1+i}$.

例题: 复数方根的计算

- 例 求 $\sqrt[4]{1+i}$.
- 解 由于 $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$,

例题: 复数方根的计算

- **例** 求 $\sqrt[4]{1+i}$.

- **解** 由于 $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$, 因此

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}e^{\frac{\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi i}{4}},\qquad k=0,1,2,3,$$

例题: 复数方根的计算

- 例 求 $\sqrt[4]{1+i}$.
- 解 由于 $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}$, 因此

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}e^{\frac{\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi i}{4}},\qquad k=0,1,2,3,$$

- 即

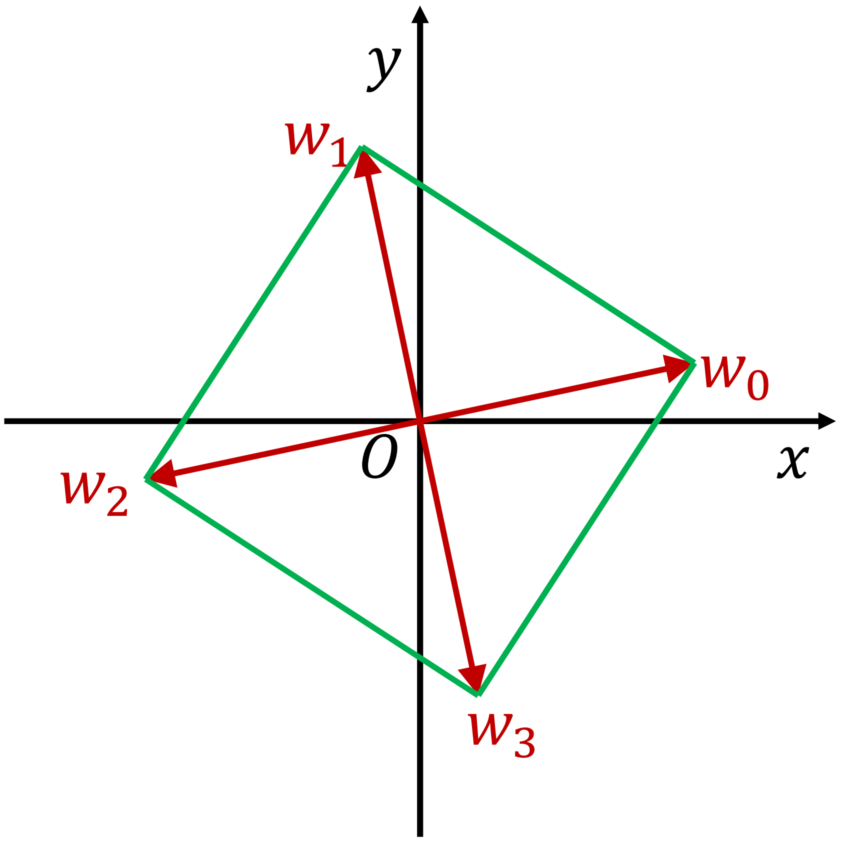
$$w_0=\sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi i}{16}},\qquad w_1=\sqrt[8]{2}e^{\frac{9\pi i}{16}},$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}e^{\frac{17\pi i}{16}},\qquad w_3=\sqrt[8]{2}e^{\frac{25\pi i}{16}}.$$

- 我们有 $w_1 = iw_0, w_2 = -w_0, w_3 = -iw_0,$

例题: 复数方根的计算

- 我们有 $w_1 = iw_0, w_2 = -w_0, w_3 = -iw_0$, 它们形成了一个正方形.



例题: 复数方根在解方程中的应用

- 例 解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$.

例题: 复数方根在解方程中的应用

- 例 解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$.
- 解 显然 $z\neq 1$. 于是 $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5=1$,

例题: 复数方根在解方程中的应用

- 例 解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$.
- 解 显然 $z\neq 1$. 于是 $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5=1$,

$$\frac{1+z}{1-z}=w=e^{\frac{2k\pi i}{5}},\qquad k=0,1,2,3,4.$$

例题: 复数方根在解方程中的应用

- **例** 解方程 $(1+z)^5 = (1-z)^5$.
- **解** 显然 $z \neq 1$. 于是 $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5 = 1$,

$$\frac{1+z}{1-z} = w = e^{\frac{2k\pi i}{5}}, \qquad k = 0,1,2,3,4.$$

- 所以

$$z = \frac{w-1}{w+1} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha - 1}{\cos\alpha + i\sin\alpha + 1}$$

例题: 复数方根在解方程中的应用

- 例 解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$.
- 解 显然 $z\neq 1$. 于是 $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5=1$,

$$\frac{1+z}{1-z}=w=e^{\frac{2k\pi i}{5}},\qquad k=0,1,2,3,4.$$

- 所以

$$z=\frac{w-1}{w+1}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha-1}{\cos\alpha+i\sin\alpha+1}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=i\tan\frac{\alpha}{2}$$

例题: 复数方根在解方程中的应用

- **例** 解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$.
- **解** 显然 $z\neq 1$. 于是 $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5=1$,

$$\frac{1+z}{1-z}=w=e^{\frac{2k\pi i}{5}},\qquad k=0,1,2,3,4.$$

- 所以

$$z=\frac{w-1}{w+1}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha-1}{\cos\alpha+i\sin\alpha+1}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(-\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=i\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$=0,i\tan\frac{\pi}{5},i\tan\frac{2\pi}{5},i\tan\frac{3\pi}{5},i\tan\frac{4\pi}{5}.$$

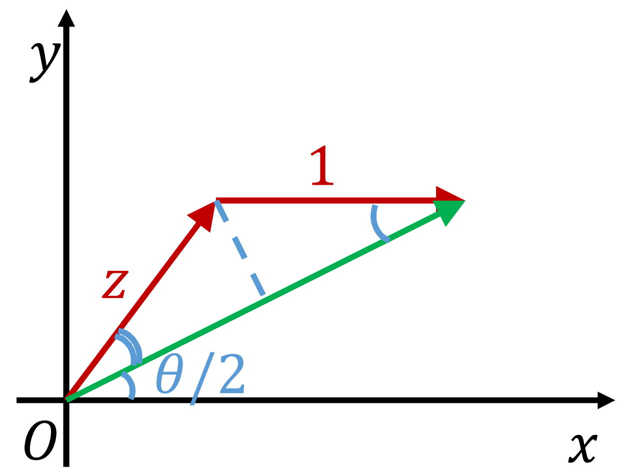
*与模为 1 复数有关的结论

- 对于模为 1 的复数 $z = \cos\theta + i\sin\theta$,

- 对于模为 1 的复数 $z = \cos\theta + i\sin\theta$,

$$z + 1 = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

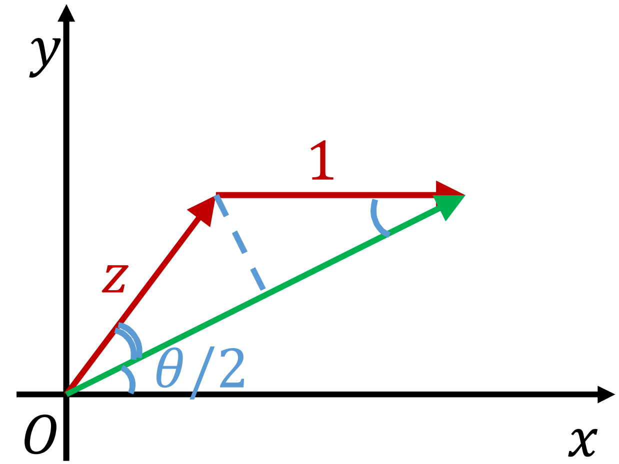
的模和辐角都很容易计算, 这种观察在计算时有时很有用.



- 对于模为 1 的复数 $z = \cos\theta + i\sin\theta$,

$$z + 1 = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

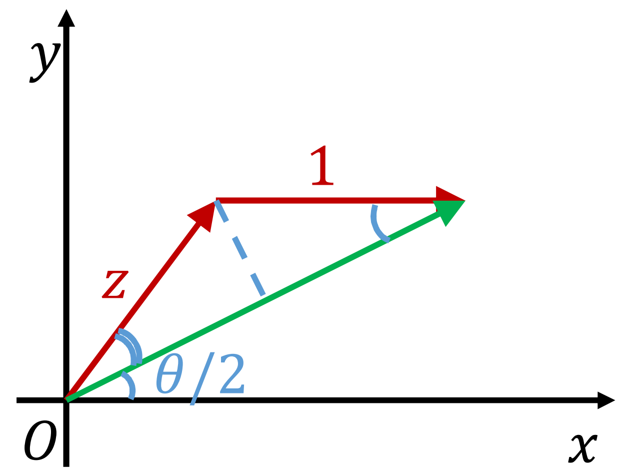
的模和辐角都很容易计算, 这种观察在计算时有时很有用. 同理,



$$z - 1 = -(-z + 1) = -2\cos\frac{\pi+\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi+\theta}{2} + i\sin\frac{\pi+\theta}{2}\right).$$

- 对于模为 1 的复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$,

$$z+1=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$



的模和辐角都很容易计算, 这种观察在计算时有时很有用. 同理,

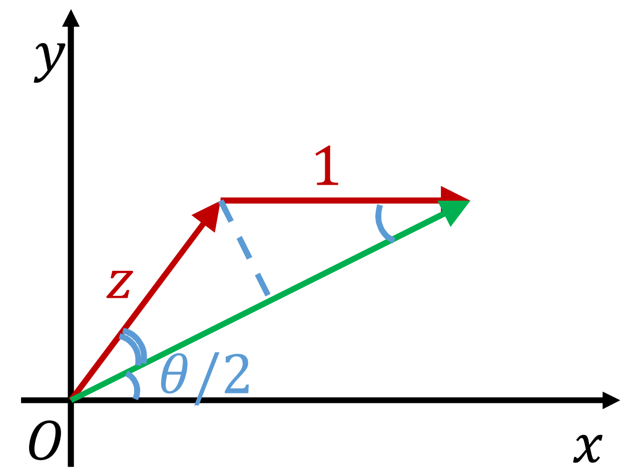
$$z-1=-(-z+1)=-2\cos\frac{\pi+\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi+\theta}{2}+i\sin\frac{\pi+\theta}{2}\right).$$

- 思考 $i=\sqrt{-1}$ 吗?

*与模为 1 复数有关的结论

- 对于模为 1 的复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$,

$$z+1=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$



的模和辐角都很容易计算, 这种观察在计算时有时很有用. 同理,

$$z-1=-(-z+1)=-2\cos\frac{\pi+\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi+\theta}{2}+i\sin\frac{\pi+\theta}{2}\right).$$

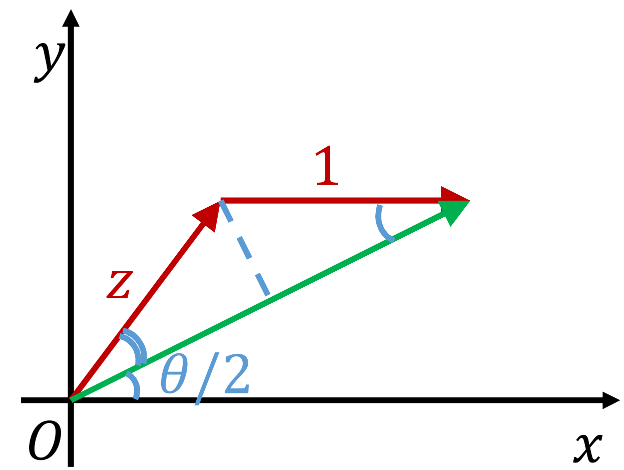
- 思考 $i=\sqrt{-1}$ 吗?
- 答案 $\sqrt{-1}$ 是多值的, 此时 $\sqrt{-1}=\pm i$.

*与模为 1 复数有关的结论

- 对于模为 1 的复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$,

$$z+1=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

的模和辐角都很容易计算, 这种观察在计算时有时很有用. 同理,



$$z-1=-(-z+1)=-2\cos\frac{\pi+\theta}{2}\left(\cos\frac{\pi+\theta}{2}+i\sin\frac{\pi+\theta}{2}\right).$$

- 思考 $i=\sqrt{-1}$ 吗?
- 答案 $\sqrt{-1}$ 是多值的, 此时 $\sqrt{-1}=\pm i$.
- 除非给定函数 $\sqrt{z}$ 的一个单值化函数, 否则不能说 $\sqrt{-1}=i$.

*三次方程的求根问题

- 现在我们来看三次方程 $x^3-3px-2q=0$ 的根.

*三次方程的求根问题

- 现在我们来看三次方程 $x^3-3px-2q=0$ 的根.

$$x=u+\frac{p}{u},\qquad u^3=q+\sqrt{\Delta},\qquad \Delta=q^2-p^3.$$

*三次方程的求根问题

- 现在我们来看三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$ 的根.

$$x = u + \frac{p}{u}, \qquad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \qquad \Delta = q^2 - p^3.$$

- (1) 如果 $\Delta < 0$, 则 u^3 是虚数, 从而 u 是虚数, $|u| = p$.

*三次方程的求根问题

- 现在我们来看三次方程 $x^3-3px-2q=0$ 的根.

$$x=u+\frac{p}{u},\qquad u^3=q+\sqrt{\Delta},\qquad \Delta=q^2-p^3.$$

- (1) 如果 $\Delta<0$, 则 u^3 是虚数, 从而 u 是虚数, $|u|=p$.
- 设 u 是其中一个方根, $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$, 则得到 3 个实根

$$x=u+\overline{u},\qquad u\omega+\overline{u\omega},\qquad u\omega^2+\overline{u\omega^2}.$$

*三次方程的求根问题

- 现在我们来看三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$ 的根.

$$x = u + \frac{p}{u}, \qquad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \qquad \Delta = q^2 - p^3.$$

- (1) 如果 $\Delta < 0$, 则 u^3 是虚数, 从而 u 是虚数, $|u| = p$.
- 设 u 是其中一个方根, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, 则得到 3 个实根

$$x = u + \overline{u}, \qquad u\omega + \overline{u\omega}, \qquad u\omega^2 + \overline{u\omega^2}.$$

- (2) 如果 $\Delta > 0$, 则 u^3 是实数.

*三次方程的求根问题

- 现在我们来看三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$ 的根.

$$x = u + \frac{p}{u}, \qquad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \qquad \Delta = q^2 - p^3.$$

- (1) 如果 $\Delta < 0$, 则 u^3 是虚数, 从而 u 是虚数, $|u| = p$.
- 设 u 是其中一个方根, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, 则得到 3 个实根

$$x = u + \overline{u}, \qquad u\omega + \overline{u\omega}, \qquad u\omega^2 + \overline{u\omega^2}.$$

- (2) 如果 $\Delta > 0$, 则 u^3 是实数. 设 u 是其中的实方根, $v = p/u$, 则得到一个实根和两个虚根

$$x = u + v, \qquad u\omega + v\omega^2, \qquad u\omega^2 + v\omega.$$

*单位根的应用举例

- 1 的方根 $\sqrt[n]{1}$ 在代数、几何和组合中有着重要的地位. 我们来看几个例子.

*单位根的应用举例

- 1 的方根 $\sqrt[n]{1}$ 在代数、几何和组合中有着重要的地位. 我们来看几个例子.
- 例 集合 $A=\{1,2,\dots,2020\}$ 的所有子集中, 满足元素之和是 5 的倍数的集合有多少个?

*单位根的应用举例

- 1 的方根 $\sqrt[n]{1}$ 在代数、几何和组合中有着重要的地位. 我们来看几个例子.
- 例 集合 $A=\{1,2,\dots,2020\}$ 的所有子集中, 满足元素之和是 5 的倍数的集合有多少个?
- 解 对于 A 的子集 S, 由于每个 $a\in A$ 都有属于和不属于两种情形, 因此一共有 2^{2020} 个子集.

*单位根的应用举例

- 1 的方根 $\sqrt[n]{1}$ 在代数、几何和组合中有着重要的地位. 我们来看几个例子.
- 例 集合 $A=\{1,2,\ldots,2020\}$ 的所有子集中, 满足元素之和是 5 的倍数的集合有多少个?
- 解 对于 A 的子集 S, 由于每个 $a\in A$ 都有属于和不属于两种情形, 因此一共有 2^{2020} 个子集.
- 在这些子集中, 例如 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 是满足我们条件的.

*单位根的应用举例

- 1 的方根 $\sqrt[n]{1}$ 在代数、几何和组合中有着重要的地位. 我们来看几个例子.
- 例 集合 $A = \{1,2, \dots , 2020\}$ 的所有子集中, 满足元素之和是 5 的倍数的集合有多少个?
- 解 对于 A 的子集 S, 由于每个 $a \in A$ 都有属于和不属于两种情形, 因此一共有 2^{2020} 个子集.
- 在这些子集中, 例如 $S = \{1,2,3,4,5\}$ 是满足我们条件的.
- 我们需要计算 $\sum_{a\in S} a$ 是不是 5 的倍数, 但是这不太容易,

*单位根的应用举例

- 1 的方根 $\sqrt[n]{1}$ 在代数、几何和组合中有着重要的地位. 我们来看几个例子.
- 例 集合 $A=\{1,2,\dots,2020\}$ 的所有子集中, 满足元素之和是 5 的倍数的集合有多少个?
- 解 对于 A 的子集 S, 由于每个 $a\in A$ 都有属于和不属于两种情形, 因此一共有 2^{2020} 个子集.
- 在这些子集中, 例如 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 是满足我们条件的.
- 我们需要计算 $\sum_{a\in S}a$ 是不是 5 的倍数, 但是这不太容易, 我们改成考虑

$$f(S):=x^{\sum_{a\in S}a}=\prod_{a\in S}x^a$$

- 是不是 x^5 的幂次.

*单位根的应用举例

- 考虑

$$\prod_{a=1}^{2020}(1+x^a),$$

*单位根的应用举例

- 考虑

$$\prod_{a=1}^{2020}(1+x^a),$$

- 它的展开式中 x^k 的系数就是元素之和为 k 的子集个数.

*单位根的应用举例

- 考虑

$$\prod_{a=1}^{2020}(1+x^{a}),$$

- 它的展开式中 x^k 的系数就是元素之和为 k 的子集个数.
- 如果再令 $x=e^{\frac{2k\pi i}{5}}$ 是 5 次单位根, 则 $x^5=1$,

*单位根的应用举例

- 考虑

$$\prod_{a=1}^{2020}(1+x^a),$$

- 它的展开式中 x^k 的系数就是元素之和为 k 的子集个数.
- 如果再令 $x=e^{\frac{2k\pi i}{5}}$ 是 5 次单位根, 则 $x^5=1$,

$$\prod_{a=1}^{2020}(1+x^a)=N_0+N_1x+\cdots+N_4x^4,$$

- 其中 N_i 是元素之和除 5 余 i 的子集个数.

*单位根的应用举例

- 当 $x = x_0 = 1$ 时, $N_0 + N_1 + \cdots + N_4 = 2^{2020}$.

*单位根的应用举例

- 当 $x = x_0 = 1$ 时, $N_0 + N_1 + \cdots + N_4 = 2^{2020}$.
- 当 $x = x_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}, 1 \leqslant k \leqslant 4$ 时, $1, x, x^2, x^3, x^4$ 是方程 $X^5 - 1 = 0$ 的根,

*单位根的应用举例

- 当 $x = x_0 = 1$ 时, $N_0 + N_1 + \cdots + N_4 = 2^{2020}$.
- 当 $x = x_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}, 1 \leqslant k \leqslant 4$ 时, $1, x, x^2, x^3, x^4$ 是方程 $X^5 - 1 = 0$ 的根, 因此 $1 + x^a (0 \leqslant a \leqslant 4)$ 是方程 $0 = (X-1)^5 - 1 = X^5 + \cdots - 2$ 的根.

*单位根的应用举例

- 当 $x = x_0 = 1$ 时, $N_0 + N_1 + \cdots + N_4 = 2^{2020}$.
- 当 $x = x_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}, 1 \leqslant k \leqslant 4$ 时, $1, x, x^2, x^3, x^4$ 是方程 $X^5 - 1 = 0$ 的根, 因此 $1 + x^a (0 \leqslant a \leqslant 4)$ 是方程 $0 = (X-1)^5 - 1 = X^5 + \cdots - 2$ 的根. 由韦达定理, 它们的乘积是 2, 从而

$$N_0 + N_1 x_k + \cdots + N_4 x_k^4 = \prod_{a=1}^{2020} (1 + x^a) = 2^{404}.$$

*单位根的应用举例

- 当 $x = x_0 = 1$ 时, $N_0 + N_1 + \cdots + N_4 = 2^{2020}$.
- 当 $x = x_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}, 1 \leqslant k \leqslant 4$ 时, $1, x, x^2, x^3, x^4$ 是方程 $X^5 - 1 = 0$ 的根, 因此 $1 + x^a (0 \leqslant a \leqslant 4)$ 是方程 $0 = (X-1)^5 - 1 = X^5 + \cdots - 2$ 的根. 由韦达定理, 它们的乘积是 2, 从而

$$N_0 + N_1 x_k + \cdots + N_4 x_k^4 = \prod_{a=1}^{2020} (1 + x^a) = 2^{404}.$$

- 由于 $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$,

*单位根的应用举例

- 当 $x = x_0 = 1$ 时, $N_0 + N_1 + \cdots + N_4 = 2^{2020}$.
- 当 $x = x_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}}, 1 \leqslant k \leqslant 4$ 时, $1, x, x^2, x^3, x^4$ 是方程 $X^5 - 1 = 0$ 的根, 因此 $1 + x^a (0 \leqslant a \leqslant 4)$ 是方程 $0 = (X-1)^5 - 1 = X^5 + \cdots - 2$ 的根. 由韦达定理, 它们的乘积是 2, 从而

$$N_0 + N_1 x_k + \cdots + N_4 x_k^4 = \prod_{a=1}^{2020} (1 + x^a) = 2^{404}.$$

- 由于 $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, 将上述等式相加得到

$$5N_0 = 2^{2020} + 4 \cdot 2^{404}, \qquad N_0 = \frac{2^{2020} + 2^{406}}{5}.$$