复变函数 B 随堂测验

时长: 4.5 小时, 满分 60 分.

✍ **练习 1.** 计算题.

1. 化简 $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{114514}$. (1 分)
2. 计算 $(-4+4\mathrm{i})^{1/5}$. (1 分)

✍ **练习 2.** 图像题.

1. 请问 $\arg(z+1)=-\dfrac{\pi}{2}$ 的图像是什么? (1 分)
2. 请问 $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1919}$ 的图像是什么? (1 分)
3. 请问 $\arg\dfrac{z-1}{z+1}=\dfrac{\pi}{3}$ 的图像是什么? (1 分)
4. 将 $x^2+6x+y^2-18y=810$ 化为复数形式. (1 分)
5. $x^2-y^2=4$ 在 $w=z^2$ 下的像是什么? (1 分)

✍ **练习 3.** 连续与解析.

1. $\arg z$ 是连续函数吗? (1 分)
2. 证明: $f(z)=z\overline{z}^{-1}-\overline{z}z^{-1}$ 在 $z\to 0$ 时极限不存在. (1 分)
3. 验证 $e^x(x\cos y-y\sin y)+\mathrm{i}e^x(y\cos y+x\sin y)$ 在全平面解析, 并求出其导数. 它在无穷远解析吗? 为何? (3 分)
4. 求出 $\dfrac{1}{\sin z-2}$ 的解析区域. (1 分)
5. 证明: 若整函数 (在整个复平面解析) f 将实轴和虚轴均映为实数, 则 $f'(0)=0$. (1 分)

✍ **练习 4.** 证明: 如果 $z_1+z_2+z_3=0$ 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, 则 z_1,z_2,z_3 构成一个正三角形, 且单位圆 (圆心为 0, 半径为 1 的圆) 是它的外接圆. (2 分)

✍ **练习 5.** 证明: 设 $|a|<1$. 证明 $|z|=1$ 当且仅当 $|z-a|=|1-\overline{a}z|$. (2 分)

✍ **练习 6.** 设 4 维实向量空间 $\mathbb{H}=\{z+w\mathrm{j}\mid z,w\in\mathbb{C}\}$ 上的乘法运算为

$$(z_1+w_1\mathrm{j})(z_2+w_2\mathrm{j})=(z_1z_2-w_1\overline{w}_2)+(z_1w_2+w_1\overline{z}_2)\mathrm{j},$$

定义 $\tau(z+w\mathrm{j})=\overline{z}-w\mathrm{j}$. 证明

1. 对于任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{H}$, $\tau(\alpha\beta)=\tau(\alpha)\tau(\beta)$. (1 分)
2. 对于任意 $\alpha\in\mathbb{H}$, $\tau(\tau(\alpha))=\alpha$ 且 $\alpha\tau(\alpha)$ 是非负实数. $\alpha\tau(\alpha)=0$ 当且仅当 $\alpha=0$. (1 分)
3. 对于任意非零 $\alpha\in\mathbb{H}$, 存在 $\beta\in\mathbb{H}$ 使得 $\alpha\beta=\beta\alpha=1$. (1 分)

✍ **练习 7.** (4 分) 计算积分

$$\int_\gamma \frac{3z-2}{z}\mathrm{d}z,$$

其中 γ 为圆周 $\{z:|z|=2\}$ 的上半圆, 从 -2 到 2.

✍ **练习 8.** (4 分) 求 $\dfrac{1}{1-z-z^2}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. 由此求得斐波那契数列

$$F_0=F_1=1, \quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

的通项公式.

✍ **练习 9.** (4 分) 函数

$$\sin\frac{1}{1-z}$$

有哪些奇点 (包括 ∞)? 并求其在 1 处的洛朗展开.

✍ **练习 10.** (4 分) 计算

$$\frac{e^z}{z(z-1)}$$

在其所有奇点处的留数.

✍ **练习 11.** (4 分) 证明如果 f 在复平面解析且有界, 则对任意 $a\in\mathbb{C}$, 有

$$\int_{|z|=R}\frac{f(z)}{(z-a)^2}=0,$$

其中 $R>|a|$. 由此证明 f 是常数.

✍ **练习 12.** (4 分) 计算积分

$$\int_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}.$$

✍ **练习 13.** (4 分) 求下列全纯函数在 $\{z:|z|<1\}$ 中的零点个数:

1. $z^9-2z^6+z^2-8z-2$;
2. $2z^5-z^3+3z^2-z+8$;
3. e^z-4z^n+1.

✍ **练习 14.** (4 分) 计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x.$$

✍ **练习 15.** (4 分) 证明

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}\pi.$$

✍ **练习 16.** (4 分) 利用拉普拉斯变换解微分方程

$$\begin{cases} y''(t)-y'(t)=e^t, \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

中国科学技术大学

2020 ~ 2021 学年第一学期期末考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称	复变函数 B	课程编号	001548
考试时间	2020 年 12 月 13 日 8:30-10:30	考试形式	闭卷
姓　　名		学　　号	

总　分		阅 卷 人	

1. (10 分) 将 $f(z) = \dfrac{1}{z-2} + e^{-z}$ 在 $z = 0$ 处展开为幂级数, 并指出其收敛半径.

解.

2. (10 分) 将 $f(z) = \dfrac{1}{z^3 + 2z^2}$ 在 $1 < |z+1| < +\infty$ 展开为洛朗级数.

解.

3. (5 分) 计算 $(2020+i)(2-i)$.

解.

4. (5 分) 计算 $\operatorname{Arc}\cos 2$.

解.

5. (10 分) 求 α 使得 $v(x,y)=\alpha x^2y-y^3+x+y$ 是调和函数, 并求虚部为 $v(x,y)$ 且满足 $f(0)=1$ 的解析函数 $f(z)$.

解.

6. (30 分) 求积分 (所有路径均为逆时针)

(1) $\displaystyle\int_C (e^z+3z^2+1)\mathrm{d}z$, $C:|z|=2, \mathrm{Re}\, z>0$.

(2) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2(z-5)}$, $C:|z|=3$.

(3) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(\sin z)(z+6)(z-5)}$, $C:|z|=4$.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$.

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}$.

解.

7. (10 分) 求方程 $z^8 + e^z + 6z + 1 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 中根的个数, 并说明理由.
解.

8. (10 分) 利用拉氏变换解微分方程

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = te^t \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

解.

9. (10 分) 设 f 是域 $|z| > r > 0$ 上的解析函数. 证明: 如果对于 $|a| > R > r$, $\lim_{z\to\infty} f(z) = f(a)$, 则积分

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 0.$$

证明.

中国科学技术大学

2020 ～ 2021 学年第一学期期末考试试卷

■A 卷　　□B 卷

课程名称	复变函数 B	课程编号	001548
考试时间	2020 年 12 月 13 日 8:30-10:30	考试形式	闭卷
姓　　名		学　　号	

总　分		阅 卷 人	

1. (10 分) 将 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}+e^{-z}$ 在 $z=0$ 处展开为幂级数, 并指出其收敛半径.

解.

$$f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}+e^{-z}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^n+\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{z^m}{m!}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-2^{-n-1}+\frac{(-1)^n}{n!}\Big)z^n,$$

收敛半径为 2.

2. (10 分) 将 $f(z)=\dfrac{1}{z^3+2z^2}$ 在 $1<|z+1|<+\infty$ 展开为洛朗级数.

解. 设 $w=1/(z+1)$, 则 $0<|w|<1$,

$$\frac{1}{z^3+2z^2}=\frac{w^3}{(1-w)^2(1+w)}=\frac{w^3}{2}\Big(\frac{1}{1-w^2}+\frac{1}{(1-w)^2}\Big)$$

$$=\frac{w^3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1+(-1)^n}{2}+n+1\Big)w^n=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{2n-3-(-1)^n}{4}(z+1)^{-n}.$$

3. (5 分) 计算 $(2020+i)(2-i)$.

解. $(2020+i)(2-i)=4040+1+2i-2020i=4041-2018i$.

4. (5 分) 计算 $\mathrm{Arc}\cos 2$.

解. 设 $\cos z=2$, 则 $\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=2$,

$$e^{2iz}-4e^{iz}+1=0.$$

于是 $e^{iz}=2\pm\sqrt{3}$, $iz=\ln(2\pm\sqrt{3})+2n\pi i$, 即 $z=2n\pi\pm\ln(2+\sqrt{3})i, n\in\mathbb{Z}$.

5. (10 分) 求 α 使得 $v(x,y)=\alpha x^2y-y^3+x+y$ 是调和函数, 并求虚部为 $v(x,y)$ 且满足 $f(0)=1$ 的解析函数 $f(z)$.

解. 由 $v_{xx}+v_{yy}=0$ 可知 $2\alpha y-6y=0$, 因此 $\alpha=3$. (3 分) 设 $f=u+iv$, 则由柯西-黎曼方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2+1,$$

因此 $u(x,y)=x^3-3xy^2+x+g(y)$. (3 分) 由于

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

即 $-6xy+g'(y)=-(6xy+1),\quad g(y)=-y+c$, 从而

$$u(x,y)=x^3-3xy^2+x-y+c,$$

$$f(z)=x^3-3xy^2+x-y+c+i(3x^2y-y^3+x+y)=z^3+(1+i)z+c$$

(3 分). 由于 $f(0)=1$, 因此 $c=1, f(z)=z^3+(1+i)z+1$. (1 分)

6. (30 分) 求积分 (所有路径均为逆时针)

(1) $\displaystyle\int_C(e^z+3z^2+1)\mathrm{d}z$, $C:|z|=2,\mathrm{Re}\, z>0$.

(2) $\displaystyle\int_C\frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)^2(z-5)}$, $C:|z|=3$.　　(3) $\displaystyle\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(\sin z)(z+6)(z-5)}$, $C:|z|=4$.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$.　　(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}$.

解. (1) 由于该函数解析, 因此

$$\int_C(e^z+3z^2+1)\mathrm{d}z=(e^z+z^3+z)\big|_{-2i}^{2i}=e^{2i}-e^{-2i}-12i=(2\sin 2-12)i.$$

(2) 该函数 f 在 $|z|<3$ 中有 1 阶极点 0 和 2 阶极点 1, 且

$$\mathrm{Res}[f,0]=-\frac{1}{5},\quad \mathrm{Res}[f,1]=\Big(\frac{1}{z(z-5)}\Big)'\Big|_{z=1}=\frac{5-2z}{z^2(z-5)^2}\Big|_{z=1}=\frac{3}{16},$$

因此该积分为

$$2\pi i(-\frac{1}{5}+\frac{3}{16})=-\frac{\pi i}{40}.$$

(3) 该函数 f 在 $|z|<4$ 中有 1 阶极点 $0,\pi,-\pi$ 且

$$\mathrm{Res}[f,0]=-\frac{1}{30},\quad \mathrm{Res}[f,\pi]=\frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)},\quad \mathrm{Res}[f,\pi]=-\frac{1}{(\pi-6)(\pi+5)},$$

因此该积分为

$$2\pi i\Big(-\frac{1}{30}+\frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)}-\frac{1}{(\pi-6)(\pi+5)}\Big)=-2\pi i\Big(\frac{1}{30}+\frac{2(\pi^2-30)}{(\pi^2-36)(\pi^2-25)}\Big).$$

(4) 函数 $R(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+3}$ 在上半平面有 1 阶极点 $-1+2i$, 因此

$$\mathrm{Res}[R(z)e^{iz},-1+2i]=\frac{e^{-2-i}}{4i}=\frac{-\sin 1-i\cos 1}{4e^2},$$

原积分等于

$$\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x\right]=\mathrm{Re}\left[2\pi i\frac{-\sin 1-i\cos 1}{4e^2}\right]=\frac{\pi\cos 1}{2e^2}.$$

(5)

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\sin^2\theta)^2}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(2-\cos 2\theta)^2}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2(2-\cos\theta)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{4(2-\cos\theta)^2}.$$

令 $z=e^{i\theta}$, 则原积分等于

$$\int_{|z|=1}\frac{z\mathrm{d}z}{i(z^2-4z+1)^2}.$$

设被积函数为 $f(z)$, 则 f 在 $|z|<1$ 上有 2 阶极点 $2-\sqrt{3}$, 且

$$\mathrm{Res}[f,2-\sqrt{3}]=\left[\frac{1}{i(z-2-\sqrt{3})^2}-\frac{2z}{i(z-2-\sqrt{3})^3}\right]\Bigg|_{z=2-\sqrt{3}}=\frac{1}{6\sqrt{3}i}.$$

从而原积分等于

$$2\pi i\cdot\frac{1}{6\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

7. (10 分) 求方程 $z^8+e^z+6z+1=0$ 在 $1<|z|<2$ 中根的个数, 并说明理由.

解. 由于在 $|z|=1$ 上

$$|z^8+e^z+1|\le 1+e+1<6=|6z|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z|<1$ 中有 1 个根. 由于在 $|z|=2$ 上

$$|6z+e^z+1|\le 12+e^2+1<2^8=|z^8|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z|<2$ 中有 8 个根. 从而该方程在 $1<|z|<2$ 中有 7 个根.

8. (10 分) 利用拉氏变换解微分方程

$$\begin{cases} y''+2y'+y=te^t \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

解. 设 $Y = Ly$, 则

$$p^2Y + 2pY + Y = \frac{1}{(p-1)^2},$$

$$Y = \frac{1}{(1+p)^2(1-p)^2} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1}\Big),$$

$$y = L^{-1}Y = \frac{1}{4}(te^t + te^{-t} + e^{-t} - e^t).$$

9. (10 分) 设 f 是域 $|z| > r > 0$ 上的解析函数. 证明: 如果对于 $|a| > R > r$, $\lim_{z\to\infty} f(z) = f(a)$, 则积分

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 0.$$

证明. 设 $R' > |a|$, 则函数 $\dfrac{f(z)}{z-a}$ 在 $|z| > R'$ 上解析, 因此由多连通区域的柯西积分定理, 对任意 $R'' > R' + |a|$,

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z.$$

由长大不等式

$$\Big|\int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z - 2\pi i f(a)\Big| = \Big|\int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\mathrm{d}z\Big| \le 2\pi \max_{|z-a|=R''} |f(z) - f(a)|.$$

令 $R' \to +\infty$, 则

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 2\pi i f(a).$$

设 D 为区域 $R < |z| < R'$, C 为其边界. 由多连通区域的柯西积分定理

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z - \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = \int_{C} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 2\pi i f(a),$$

因此

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a}\mathrm{d}z = 0.$$

中国科学技术大学

2020 ~ 2021 学年第一学期期末考试试卷

□A 卷　　■B 卷

课程名称	复变函数 B	课程编号	001548
考试时间	待定	考试形式	闭卷
姓　　名		学　　号	

总　分		阅 卷 人	

1. (10 分) 将 $f(z) = \dfrac{1}{z-2} + e^{-z}$ 在 $z = 1$ 处展开为幂级数, 并指出其收敛半径.

解.

2. (10 分) 将 $f(z) = \dfrac{1}{z^3 + 2z^2}$ 在 $2 < |z| < +\infty$ 展开为洛朗级数.

解.

3. (5 分) 计算 $\ln(-i)$.

解.

4. (5 分) 计算 $(-64)^{1/4}$.

解.

5. (10 分) 求 α 使得 $u(x,y) = x^3 + \alpha xy^2 + x - y$ 是调和函数, 并求实部为 $u(x,y)$ 且满足 $f(0) = i$ 的解析函数 $f(z)$.

解.

6. (30 分) 求积分 (所有路径均为逆时针)

(1) $\displaystyle\int_C (e^{-z} - 3z^2 + 1)\mathrm{d}z$, $C: |z| = 2, \mathrm{Im}\, z > 0$.

(2) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z+1)^2(z-4)}$, $C: |z| = 3$.

(3) $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(\cos z)(z-6)}$, $C: |z| = 3$.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 10}\mathrm{d}x$.

(5) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + 2\cos^2\theta)^2}$.

解.

7. (10 分) 求方程 $z^3+\frac{1}{z}+4z+1=0$ 在 $1<|z|<3$ 中根的个数, 并说明理由.

解.

8. (10 分) 利用拉氏变换解微分方程

$$\begin{cases} y''-2y'+y=te^{-t} \\ y(0)=y'(0)=0. \end{cases}$$

解.

9. (10 分) 设函数 f 在整个复平面解析, 若 f 将实轴和虚轴均映为实数, 则 f 是偶函数.

证明.

中国科学技术大学

2020 ～ 2021 学年第一学期期末考试试卷

□A 卷　■B 卷

课程名称	复变函数 B	课程编号	001548
考试时间	待定	考试形式	闭卷
姓　　名		学　　号	

总　分		阅 卷 人	

1. (10 分) 将 $f(z)=\dfrac{1}{z-2}+e^{-z}$ 在 $z=1$ 处展开为幂级数, 并指出其收敛半径.

解.

$$f(z)=-\frac{1}{1-(z-1)}+e^{-1}e^{-(z-1)}=-\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n+e^{-1}\sum_{m=0}^{+\infty}(-1)^m\frac{(z-1)^m}{m!}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(-1+\frac{(-1)^n}{n!}\Big)(z-1)^n,$$

收敛半径为 1.

2. (10 分) 将 $f(z)=\dfrac{1}{z^3+2z^2}$ 在 $2<|z|<+\infty$ 展开为洛朗级数.

解. 设 $w=1/z$, 则 $0<|w|<1/2$,

$$\frac{1}{z^3+2z^2}=\frac{w^3}{1+2w}=w^3\sum_{n=0}^{+\infty}(-2w)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^nw^{n+3}=\sum_{n=3}^{+\infty}(-2)^{n-3}z^{-n}.$$

3. (5 分) 计算 $\ln(-i)$.

解. 由于 $-i=e^{-\frac{\pi}{2}i}$, 因此 $\ln(-i)=-\frac{\pi}{2}i$.

4. (5 分) 计算 $(-64)^{1/4}$.

解. 由于 $-64=64e^{\pi i}$, 因此

$$(-64)^{1/4}=2\sqrt{2}e^{\frac{(2n+1)\pi i}{4}},\quad n=0,1,2,3,$$

即 $2+2i, 2-2i, -2+2i, -2-2i$.

5. (10 分) 求 α 使得 $u(x,y)=x^3+\alpha xy^2+x-y$ 是调和函数, 并求实部为 $u(x,y)$ 且满足 $f(0)=i$ 的解析函数 $f(z)$.

解. 由 $u_{xx}+u_{yy}=0$ 可知 $6x+2\alpha x=0$, 因此 $\alpha=-3$. (3 分) 设 $f=u+iv$, 则由

柯西-黎曼方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 1,$$

因此 $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + y + g(x)$. (3 分) 由于

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

即 $-6xy - 1 = -(6xy + g'(x)), \quad g(x) = x + c$, 从而

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + x + y + c,$$

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + x - y + i(3x^2y - y^3 + x + y + c) = z^3 + (1+i)z + ci$$

(3 分). 由于 $f(0) = i$, 因此 $c = 1, f(z) = z^3 + (1+i)z + i$. (1 分)

6. (30 分) 求积分 (所有路径均为逆时针)

(1) $\int_C (e^{-z} - 3z^2 + 1)\mathrm{d}z$, $C: |z| = 2, \mathrm{Im}\, z > 0$.

(2) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z(z+1)^2(z-4)}$, $C: |z| = 3$.

(3) $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(\cos z)(z-6)}$, $C: |z| = 3$.

(4) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 10}\mathrm{d}x$.

(5) $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + 2\cos^2\theta)^2}$.

解. (1) 由于该函数解析, 因此

$$\int_C (e^z - 3z^2 + 1)\mathrm{d}z = (e^z - z^3 + z)|_2^{-2} = e^{-2} - e^2 + 12.$$

(2) 该函数 f 在 $|z| < 3$ 中有 1 阶极点 0 和 2 阶极点 -1, 且

$$\mathrm{Res}[f,0] = -\frac{1}{4}, \quad \mathrm{Res}[f,-1] = \left(\frac{1}{z(z-4)}\right)'\Big|_{z=-1} = \frac{4-2z}{z^2(z-4)^2}\Big|_{z=-1} = \frac{6}{25},$$

因此该积分为

$$2\pi i(-\frac{1}{4} + \frac{6}{25}) = -\frac{\pi i}{50}.$$

(3) 该函数 f 在 $|z| < 4$ 中有 1 阶极点 $\pm\pi/2$ 且

$$\mathrm{Res}[f,\pi/2] = -\frac{2}{\pi - 12}, \quad \mathrm{Res}[f,-\pi/2] = -\frac{2}{\pi + 12},$$

因此该积分为

$$2\pi i\Big(-\frac{2}{\pi - 12} - \frac{2}{\pi + 12}\Big) = \frac{8\pi^2 i}{\pi^2 - 144}.$$

(4) 函数 $R(z)=\dfrac{1}{z^2-2z+10}$ 在上半平面有 1 阶极点 $1+3i$, 因此

$$\mathrm{Res}[R(z)e^{iz},1+3i]=\frac{e^{-3+i}}{6i}=\frac{\sin 1-i\cos 1}{6e^3},$$

原积分等于

$$\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x^2-2x+10}\mathrm{d}x\right]=\mathrm{Re}\left[2\pi i\frac{\sin 1-i\cos 1}{6e^3}\right]=\frac{\pi\cos 1}{3e^3}.$$

(5)

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+2\cos^2\theta)^2}=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(2+\cos 2\theta)^2}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{2(2+\cos\theta)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{4(2+\cos\theta)^2}.$$

令 $z=e^{i\theta}$, 则原积分等于

$$\int_{|z|=1}\frac{z\mathrm{d}z}{i(z^2+4z+1)^2}.$$

设被积函数为 $f(z)$, 则 f 在 $|z|<1$ 上有 2 阶极点 $-2+\sqrt{3}$, 且

$$\mathrm{Res}[f,-2+\sqrt{3}]=\left[\frac{1}{i(z+2+\sqrt{3})^2}-\frac{2z}{i(z+2+\sqrt{3})^3}\right]\bigg|_{z=-2+\sqrt{3}}=\frac{1}{6\sqrt{3}i}.$$

从而原积分等于

$$2\pi i\cdot\frac{1}{6\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

7. (10 分) 求方程 $z^3+\frac{1}{z}+4z+1=0$ 在 $1<|z|<3$ 中根的个数, 并说明理由.

解. 由于 $z\neq 0$, 即要求 $z^4+4z^2+z+1=0$ 的根的个数. 在 $|z|=1$ 上

$$|z^4+z+1|\le 1+1+1<4=|4z^2|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z|<1$ 中有 2 个根. 由于在 $|z|=3$ 上

$$|4z^2+z+1|\le 36+3+1<81=|z^4|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z|<3$ 中有 4 个根. 从而该方程在 $1<|z|<3$ 中有 2 个根.

8. (10 分) 利用拉氏变换解微分方程

$$\begin{cases} y''-2y'+y=te^{-t}\\ y(0)=y'(0)=0.\end{cases}$$

解. 设 $Y = Ly$, 则

$$p^2Y - 2pY + Y = \frac{1}{(p+1)^2},$$

$$Y = \frac{1}{(1+p)^2(1-p)^2} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1}\Big),$$

$$y = L^{-1}Y = \frac{1}{4}(te^t + te^{-t} + e^{-t} - e^t).$$

9. (10 分) 设函数 f 在整个复平面解析, 若 f 将实轴和虚轴均映为实数, 则 f 是偶函数.

证明. 设 f 在 $z=0$ 处的幂级数展开为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

对于 $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \in \mathbb{R},$$

$$f'(iy) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f((y+\Delta y)i) - f(yi)}{\Delta y i} \in i\mathbb{R}.$$

因此

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \in \mathbb{R},$$

$$f''(iy) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'((y+\Delta y)i) - f'(yi)}{\Delta y i} \in \mathbb{R}.$$

因此 f'' 在整个复平面解析且将实轴和虚轴均映为实数. 归纳可知对任意非负整数 k, $f^{(2k)}$ 在整个复平面解析且将实轴和虚轴均映为实数, 且 $f^{(2k+1)}(x) \in \mathbb{R}, f^{(2k+1)}(iy) \in i\mathbb{R}$. 从而

$$a_{2k+1} = f^{(2k+1)}(0) = 0 \in \mathbb{R} \cap i\mathbb{R},$$

即 f 是偶函数.