

合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

2022~2023 学年第一学期复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. i^{-i} 的主值是_____.
2. 设 $z = -i$, 则 $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 =$ _____.
3. 设 C 为正向圆周 $|z| = 2$, 则积分 $\oint_C \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) dz =$ _____.
4. 设 a, b, c 为实数. 如果函数 $f(z) = x^2 - 2xy - y^2 + i(ax^2 + bxy + cy^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a + b + c =$ _____.
5. 函数 $\sin t + j \cos t$ 的傅里叶变换为_____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 方程 $||z + i| - |z - i|| = 1$ 表示的曲线是 ().
A. 直线 B. 不是圆的椭圆 C. 双曲线 D. 圆周
2. 不等式 $-1 \leq \arg z \leq \pi - 1$ 确定的是的 ().
A. 有界多连通闭区域 B. 有界单连通区域
C. 无界多连通区域 D. 无界单连通闭区域
3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (iz)^n$ 的收敛半径是 ().
A. i B. $-i$ C. 1 D. $+\infty$
4. 下面哪个函数在 $z = 0$ 处不可导? ()
A. $2x + 3yi$ B. $2x^2 + 3y^2i$ C. $x^2 - xyi$ D. $e^x \cos y + ie^x \sin y$
5. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, $g(z)$ 的一阶零点, 则 z_0 是 $f(z)^3 g(z)^2$ 的 ().
A. 一阶极点 B. 一阶零点 C. 可去奇点 D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z = \frac{3+i}{i} - \frac{10i}{3-i}$, 求 z 的模和辐角.
2. (6 分) 解方程 $\sin z = 2 \cos z$.
3. (6 分) 设 C 为从 i 到 $i - \pi$ 再到 $-\pi$ 的折线, 求 $\int_C \cos^2 z dz$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z - 3| = 4$, 求 $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2} dz$.
5. (10 分) 假设 $v(x, y) = x^3 + y^3 - axy(x + y)$ 是调和函数, 求参数 a 以及解析函数 $f(z)$ 使得 $v(x, y)$ 是它的虚部.
6. (10 分) 确定函数 $f(z) = \frac{z + 1}{(z - 1)^2}$ 在圆环域
 (1) $0 < |z| < 1$; (2) $1 < |z| < +\infty$
 内的洛朗级数展开式.
7. (10 分) 求 $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z^2 - \pi^2)}$ 在有限复平面内的奇点和相应的留数.
8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题
- $$\begin{cases} y''(t) + 2y(t) = \sin t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$
9. (3 分) 复变函数 $f(z) = \sin z$ 和实变量函数 $g(x) = \sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试列举一二.

合肥工业大学考试参考答案(A)

2022~2023 学年第一学期复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. $e^{\pi/2}$, 2. 1, 3. 0, 4. 2, 5. $2\pi j\delta(\omega+1)$.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	C	D	C	A	A

三、解答题

1. (6 分)【解】

由于 $z = -3i + 1 - i(3 + i) = 2 - 6i$, (2 分)

因此 $|z| = 2\sqrt{10}$, (2 分)

$\text{Arg } z = 2k\pi - \arctan 3, k \in \mathbb{Z}$ (2 分, 只有主值得 1 分)

2. (6 分)【解】

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i(e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$e^{2iz} = \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)^2}{5}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$2iz = \text{Ln} \frac{(1+2i)^2}{5} = (2\arctan 2 + 2k\pi)i, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$z = \arctan 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分, 只有主值得 1 分})$$

其它答案: $z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan \frac{4}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. (6 分)【解】

由于 $\cos^2 z$ 解析, 且 (1 分)

$$\int \cos^2 z \, dz = \int \frac{1 + \cos(2z)}{2} \, dz \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{z}{2} + \frac{\sin(2z)}{4}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C \cos^2 z \, dz &= \left[\frac{z}{2} + \frac{\sin(2z)}{4} \right] \Big|_i^{-\pi} \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \left[\frac{i}{2} + \frac{\sin(2i)}{4} \right] \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{(e^{-2} - 4 - e^2)i}{8}. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})\end{aligned}$$

4. (10 分)【解】

由于 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2}$ 在 $|z - 3| \leq 4$ 内的奇点为 $\pi, 2\pi$, $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$
因此

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) \, dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), \pi] + \operatorname{Res}[f(z), 2\pi]] \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{iz}}{z - 2\pi} \Big|_{z=\pi} + \frac{e^{iz}}{z - \pi} \Big|_{z=2\pi} \right] \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right] = 4i. \dots\dots\dots (3 \text{ 分})\end{aligned}$$

5. (10 分)【解】

由 $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 6x - 2ay + 6y - 2ax = 0$ 可知 $a = 3$. $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$
由

$$\begin{aligned}f'(z) &= v_y + iv_x \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= (3y^2 - 3x^2 - 6xy) + i(3x^2 - 6xy - 3y^2) \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 3(i - 1)(x + iy)^2 = 3(i - 1)z^2 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})\end{aligned}$$

可知 $f(z) = (i - 1)z^3 + C, C \in \mathbb{R}$. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分, 没有常数项得 } 1 \text{ 分})$

其它解法: 由 $u_x = v_y = 3y^2 - 3x^2 - 6xy$ 得 $u = 3xy^2 - x^3 - 3x^2y + \psi(y)$. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

由 $u_y = -v_x = -(3x^2 - 6xy - 3y^2)$ 得 $\psi'(y) = 3y^2$,

$\psi(y) = y^3 + C$, $\dots\dots\dots (3 \text{ 分, 没有常数项得 } 2 \text{ 分})$

$$\begin{aligned}f(z) &= u + iv \\ &= 3xy^2 - x^3 - 3x^2y + y^3 + C + i(x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y) \\ &= (i - 1)z^3 + C, C \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

6. (10 分)【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 1, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{z-1+2}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} = -\frac{1}{1-z} + 2\left(\frac{1}{1-z}\right)' \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分}) \\&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \\&= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)z^n. \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})\end{aligned}$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}, \quad \dots\dots\dots(1 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{z-1} - 2\left(\frac{1}{z-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\right)' \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分}) \\&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-n)z^{-n-1} \\&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-n+1)z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)z^{-n}. \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})\end{aligned}$$

7. (10 分)【解】

由于 0 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

由于 $\pm\pi$ 是分母的一阶零点, 因此它们是 $f(z)$ 的一阶极点. $\dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \left(\frac{\cos z}{z^2 - \pi^2}\right)' \Big|_{z=0} \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$= \frac{-\sin z \cdot (z^2 - \pi^2) - \cos z \cdot 2z}{(z^2 - \pi^2)^2} \Big|_{z=0} = 0, \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z), \pi] = \frac{\cos z}{z^2(z+\pi)} \Big|_{z=\pi} = -\frac{1}{2\pi^3}, \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z), -\pi] = \frac{\cos z}{z^2(z-\pi)} \Big|_{z=-\pi} = \frac{1}{2\pi^3}. \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

8. (9 分)【解】

设 $\mathcal{L}[y] = Y$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y - 2, \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2 Y - 2 + 2Y = \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 2} + \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 2)} = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 2} \right] = \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(\sqrt{2}t). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

9. (3 分) 【解】

例如 (每项 1 分)

- $f'(z) = \cos z, g'(x) = \cos x.$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- $\sin z$ 处处可导, $\sin x$ 处处可导. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- 麦克劳林展开的系数相同. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- $\sin z$ 无界, $\sin x$ 有界. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$