复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

第一章　复数与复变函数

❶ 极限和连续性

第一节　极限和连续性

- 无穷远点
- 数列的极限
- 函数的极限

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限.

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

定义

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

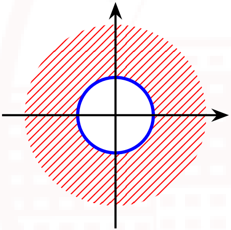
定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall\varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是**数列 $\{z_n\}$ 的极限**, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.
- 如果 $\forall X > 0, \exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $|z_n| > X$, 则称 ∞ 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

如果我们称

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

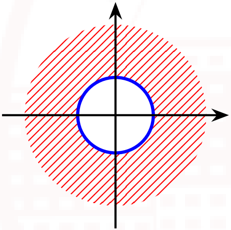
为 ∞ 的 (去心) 邻域,



如果我们称

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 (去心) 邻域, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 可统一表述为:

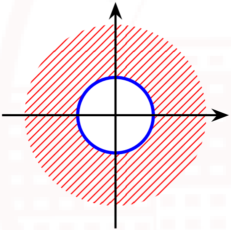


如果我们称

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 (去心) 邻域, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 可统一表述为:

对 z 的任意邻域 U, $\exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $z_n \in U$.



复球面

那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢?

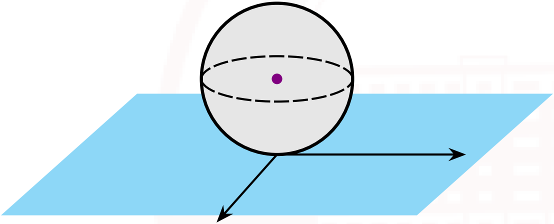
那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞.

复球面

那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢？我们将介绍复球面的概念，它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

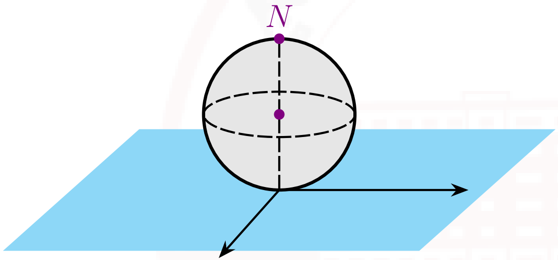
那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

取一个与复平面相切于原点 $z = 0$ 的球面.



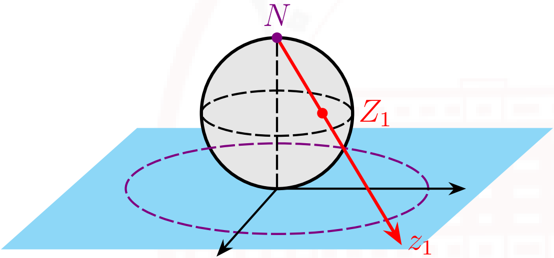
那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

取一个与复平面相切于原点 $z=0$ 的球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于另一点 N, 称之为北极.



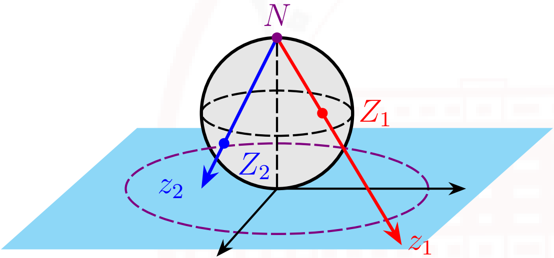
复球面

- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.



复球面

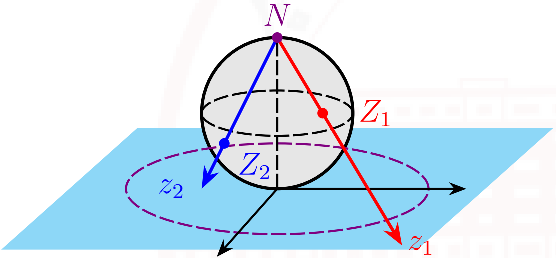
- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.



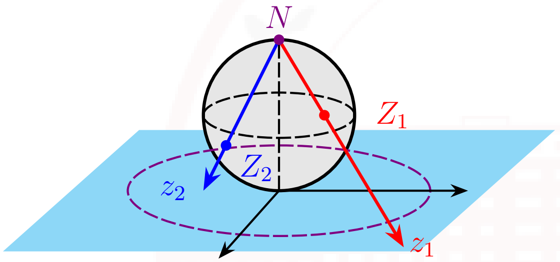
复球面

- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.

这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.

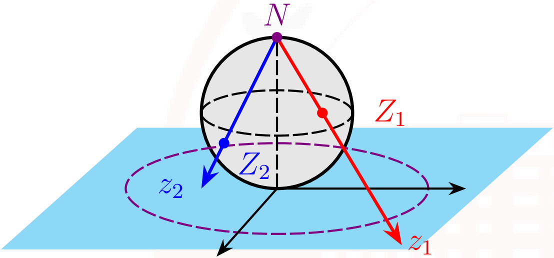


当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N.

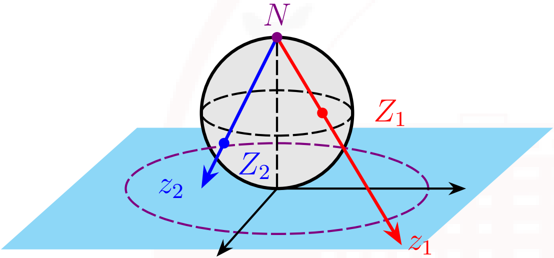


复球面: 无穷远点

当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点, 记作 ∞.

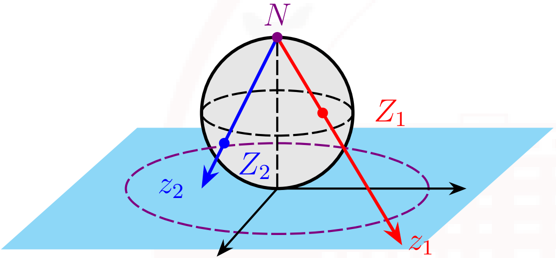


当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点, 记作 ∞. 那么扩充复数集合 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应.



复球面: 无穷远点

当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点, 记作 ∞. 那么扩充复数集合 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应. 称这样的球面为复球面, 称包含无穷远点的复平面为扩充复平面(闭复平面).

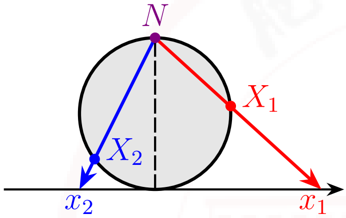


复球面：与实数无穷的联系

它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢?

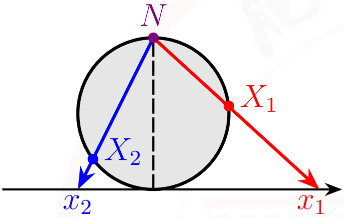
复球面：与实数无穷的联系

它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应.

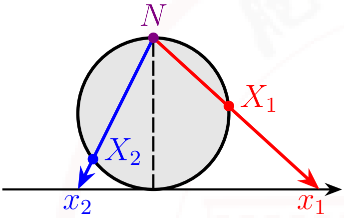


复球面：与实数无穷的联系

它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞.



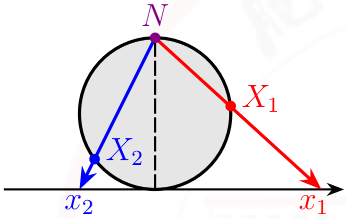
它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞.



朴素地看, 复球面上任意一点可以定义邻域的概念.

复球面: 与实数无穷的联系

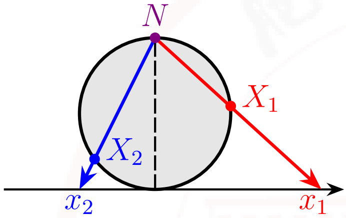
它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞.



朴素地看, 复球面上任意一点可以定义邻域的概念. 特别地, ∞ 的开邻域通过前面所说的对应关系, 可以对应到扩充复平面上 ∞ 的一个邻域.

复球面: 与实数无穷的联系

它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞.



朴素地看, 复球面上任意一点可以定义邻域的概念. 特别地, ∞ 的开邻域通过前面所说的对应关系, 可以对应到扩充复平面上 ∞ 的一个邻域. 所以在复球面上, 我们将普通复数和 ∞ 的开邻域可以视为相同的概念.

数列收敛的等价刻画

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

数列收敛的等价刻画

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

定理

设 $z_n = x_n + y_n i, z = x + yi$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

定理

设 $z_n = x_n + y_n i, z = x + yi$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

证明

由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leqslant |z_n - z| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证. $\square$

例题: 数列的敛散性

例

设 $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

例题: 数列的敛散性

例

设 $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解

由于

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0.$$

例题: 数列的敛散性

例

设 $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解

由于

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0.$$

因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

函数的极限

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.
如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists\delta>0$ 使得

$$z \in \mathring{U}(z_0,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A(z \to z_0)$.

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.
如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists\delta > 0$ 使得

$$z \in \overset{\circ}{U}(z_0,\delta) \implies f(z) \in U(A,\varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A(z \to z_0)$.

对于 $z_0 = \infty$ 或 $A = \infty$ 的情形, 也可以用上述定义统一描述.

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.
如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon),\exists\delta>0$ 使得

$$z\in\mathring{U}(z_0,\delta) \implies f(z)\in U(A,\varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z\to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$ 或 $f(z)\to A(z\to z_0)$.

对于 $z_0=\infty$ 或 $A=\infty$ 的情形, 也可以用上述定义统一描述.
通常我们说极限存在是不包括 $\lim f(z)=\infty$ 的情形的.

与实函数极限之联系

通过与二元实函数的极限对比可知, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的.

与实函数极限之联系

通过与二元实函数的极限对比可知, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的. $z \to z_0$ 可以是沿着任意一条曲线趋向于 z_0, 或者看成 z 是在一个开圆盘内任意的点逐渐地靠拢 z_0.

与实函数极限之联系

通过与二元实函数的极限对比可知，复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的. $z \to z_0$ 可以是沿着任意一条曲线趋向于 z_0，或者看成 z 是在一个开圆盘内任意的点逐渐地靠拢 z_0.

定理

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + y_0 i, A = u_0 + v_0 i$，则

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

与实函数极限之联系

通过与二元实函数的极限对比可知, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的. $z \to z_0$ 可以是沿着任意一条曲线趋向于 z_0, 或者看成 z 是在一个开圆盘内任意的点逐渐地靠拢 z_0.

定理

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + y_0 i, A = u_0 + v_0 i$, 则

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

证明

由三角不等式

$$|u - u_0|, |v - v_0| \leqslant |z - z_0| \leqslant |u - u_0| + |v - v_0|$$

易证. □

极限的四则运算

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 则

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B$;

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} (fg)(z) = AB$;

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A,\ \lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0} (fg)(z) = AB$;

(3) 当 $B \neq 0$ 时, $\lim\limits_{z\to z_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(z) = \dfrac{A}{B}$.

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad v(x, y) = 0.$$

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad v(x, y) = 0.$$

当 z 沿着直线 $y = 0$ 左右两侧趋向于 0 时，则 $u(x, y) \to \pm 1$.

例题：判断函数极限是否存在

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad v(x,y) = 0.$$

当 z 沿着直线 $y = 0$ 左右两侧趋向于 0 时，则 $u(x,y) \to \pm 1$. 因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ 不存在，

例

证明当 $z \to 0$ 时，函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$，则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad v(x,y) = 0.$$

当 z 沿着直线 $y = 0$ 左右两侧趋向于 0 时，则 $u(x,y) \to \pm 1$. 因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ 不存在，从而 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在. $\square$

定义

函数的连续性

定义

- 如果 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.

函数的连续性

定义

- 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

定义

- 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

定理

函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

函数的连续性

定义

- 如果 $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 **处连续**.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D **内连续**.

定理

函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

例如 $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$.

定义

- 如果 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

定理

函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

例如 $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$. $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x,y) = x^2 - y^2$ 处处连续.

定义

- 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

定理

函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

例如 $f(z) = \ln(x^2+y^2) + i(x^2-y^2)$. $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x,y) = x^2 - y^2$ 处处连续. 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

连续函数的性质

定理

连续函数的性质

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.

连续函数的性质

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 **(**$g(z_0) \neq 0$**)** 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续，函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续，则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

连续函数的性质

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的,

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续，函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续，则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的，故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续，

连续函数的性质

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续，函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续，则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的，故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续，有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续，函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续，则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的，故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续，有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

有时候我们会遇到在曲线上连续的函数，它指的是当 z 沿着该曲线趋向于 z_0 时，$f(z) \to f(z_0)$.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续, 有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

有时候我们会遇到在曲线上连续的函数, 它指的是当 z 沿着该曲线趋向于 z_0 时, $f(z) \to f(z_0)$. 对于闭合曲线或包含端点的曲线段, 其之上的连续函数 $f(z)$ 是有界的.

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

□

例题: 函数连续性的判定

例

证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续. $\square$

例题：函数连续性的判定

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x, y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

□

例题: 函数连续性的判定

例

证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

另一种看法是, 函数 $g(z) = \overline{z} = x - iy$ 处处连续, □

例题: 函数连续性的判定

例

证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x,y), v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

另一种看法是, 函数 $g(z) = \overline{z} = x - iy$ 处处连续, 从而 $g(f(z)) = \overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续. $\square$

注记

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别.

注记

可以看出，在极限和连续性上，复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢?

注记

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法.

注记

可以看出，在极限和连续性上，复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢？归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域，上面可以做除法.

这就导致了复变函数有导数，而不是像多变量实函数只有偏导数.

注记

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法.

这就导致了复变函数有导数, 而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.