线性代数

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第二章　矩阵及其运算

1. 矩阵的线性运算和乘法
2. 矩阵的运算：转置和行列式
3. 逆矩阵
4. 分块矩阵
5. 矩阵的初等变换
6. 矩阵的秩

第一节　矩阵的线性运算和乘法

- 矩阵和线性变换
- 矩阵的线性运算
- 矩阵的乘法
- 矩阵的幂

矩阵记号

我们已经在上一章知道了什么是矩阵和方阵. 分别用记号

- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 表示 m 行 n 列实矩阵, 即元素都是实数的矩阵;
- $M_n(\mathbb{R})$ 表示 n 阶实方阵;
- $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 表示 m 行 n 列复矩阵;
- $M_n(\mathbb{C})$ 表示 n 阶复方阵.

不特别强调矩阵元素是实数还是复数时, 就简单记作 $M_{m\times n}, M_n$.

元素全为零的矩阵为零矩阵 $\mathbf{O} \in M_{m\times n}$. 方阵中

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n$$

分别为上三角阵, 下三角阵和对角阵. 为书写方便, 对角阵也可记作

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

$$\mathbf{E}_n = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1) \in M_n$$

为单位阵.

向量

只有一行的矩阵

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_{1\times n}$$

称为 n 维行矩阵或行向量. 只有一行的矩阵

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}$$

称为 n 维列矩阵或列向量. 为了书写方便, 可以把列向量写成

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\mathbb{R}^n$ 表示所有 n 维列向量形成的集合. 例如 $\mathbb{R}^2$ 就是平面直角坐标系里的点, 而 $\mathbb{R}^3$ 则表示空间中的点.

类似于二维和三维向量的情形, 我们可以在 $\mathbb{R}^n$ 上定义加法和数乘:

(1) $(a_1, \dots, a_n)^{\mathrm{T}} + (b_1, \dots, b_n)^{\mathrm{T}} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)^{\mathrm{T}}$, 其中 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$;

(2) $\lambda(a_1, \dots, a_n)^{\mathrm{T}} = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)^{\mathrm{T}}$, 其中 $a_i, \lambda \in \mathbb{R}$.

将上述 $\mathbb{R}$ 均换成 $\mathbb{C}$, 则可以得到 $\mathbb{C}^n$ 上的加法和数乘.

定义

如果映射 $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ 满足

(1) $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$;

(2) $f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u}), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$,

称 f 是一个线性变换.

对于线性变换 $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, 记

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{pmatrix}, \cdots, f\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{pmatrix}.$$

那么

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

它的系数形成了一个矩阵

$$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n} = \left(f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \in M_{m\times n}(\mathbb{C}).$$

线性变换 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ 全体和 $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 之间是一一对应的.

线性变换的例子：旋转

如何用矩阵表示平面 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转？设 $A(x_1, x_2)$ 是平面上的一个点，沿着原点逆时针旋转角度 θ 变成 $B(y_1, y_2)$. 利用极坐标将 A 表示为

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\alpha, \\ x_2 = \rho\sin\alpha, \end{cases}$$

那么

$$\begin{cases} y_1 = \rho\cos(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = (\cos\theta)x_1 - (\sin\theta)x_2, \\ y_2 = \rho\sin(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) = (\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_2. \end{cases}$$

因此上述旋转变换 $\mathscr{A}$ 对应的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

线性变换的例子

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 表示各个分量分别放大 λ_i 倍的线性变换.
- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 表示平面中沿着直线 $x_1 = x_2$ 翻转.
- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 表示三维空间中沿着直线 $x_1 = x_2 = x_3$ 旋转 $\dfrac{2\pi}{3}$.
- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 表示什么线性变换?

给定两个线性变换 $f, g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, 定义

$$(f+g)(\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + g(\mathbf{u}).$$

由此得到对应的矩阵的加法:

定义

设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{m\times n}$. 定义

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}.$$

只有同型矩阵才能相加, 即行列数都相同的矩阵. 矩阵的加法满足通常数的加法的几条规律:

(1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;

(2) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$;

(3) $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$.

注意两个方阵的和的行列式 $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$ 一般不等于各自行列式的和 $|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|$.

例

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}|=2, |\mathbf{B}|=1$. 计算 $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$.

解

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}|=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & 2c_1 & 2d_1 \\ a_2+b_2 & 2c_2 & 2d_2 \\ a_3+b_3 & 2c_3 & 2d_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & 2c_1 & 2d_1 \\ a_2 & 2c_2 & 2d_2 \\ a_3 & 2c_3 & 2d_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & 2c_1 & 2d_1 \\ b_2 & 2c_2 & 2d_2 \\ b_3 & 2c_3 & 2d_3 \end{vmatrix}$$

$$=4|\mathbf{A}|+4|\mathbf{B}|=12.$$

矩阵的数乘

给定一个线性变换 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$ 和一个数 λ, 定义

$$(\lambda f)(\mathbf{u})=\lambda(f(\mathbf{u})).$$

由此得到对应的矩阵的数乘:

定义

数 λ 和矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的数乘定义为

$$\lambda\mathbf{A}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

列矩阵的加法和数乘就是其对应的列向量的加法和数乘. 数乘矩阵满足:

(1) $(\lambda\mu)\mathbf{A}=\lambda(\mu\mathbf{A})=\mu(\lambda\mathbf{A})$;

(2) $(\lambda+\mu)\mathbf{A}=\lambda\mathbf{A}+\mu\mathbf{A}$;

(3) $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\lambda\mathbf{A}+\lambda\mathbf{B}$;

(4) $1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}, 0\cdot\mathbf{A}=\mathbf{O}, \lambda\mathbf{O}=\mathbf{O}$.

-1 与 $\mathbf{A}$ 的数乘称为 $\mathbf{A}$ 的负矩阵

$$-\mathbf{A} = (-a_{ij})_{m\times n}.$$

那么矩阵的减法就是

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}.$$

想一想: $|\lambda\mathbf{A}| = \lambda|\mathbf{A}|$? × 如果 $\mathbf{A} \in M_n$, 则 $|\lambda\mathbf{A}| = \lambda^n|\mathbf{A}|$.

矩阵线性运算的应用：图像处理

一张图片由一些像素构成，上图包含 512×341 个像素. 在 RGB 颜色模式下，每个像素包含红绿蓝三个通道，每个通道为一个 $0 \sim 255$ 之间的数，数值越高对应颜色越饱满. 如果三个通道相同，图片就是一张灰色的图 (无色彩). 此时图片对应一个 512×341 的矩阵 $\mathbf{A}$.

想一想：如何将这个图像变亮?

矩阵线性运算的应用：图像处理

$\Longrightarrow$

我们只需要增加每个元素的值，例如

$$\mathbf{A}+\begin{pmatrix} 50 & 50 & \cdots & 50 \\ 50 & 50 & \cdots & 50 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 50 & 50 & \cdots & 50 \end{pmatrix}, \qquad 1.5\mathbf{A}.$$

如何让图像反色?

$\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 255 & 255 & \cdots & 255 \\ 255 & 255 & \cdots & 255 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 255 & 255 & \cdots & 255 \end{pmatrix} - \mathbf{A}.$$

给定两个矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n},\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times p}$, 其中 $\mathbf{A}$ 的列数和 $\mathbf{B}$ 的行数相等. 那么它们对应两个映射

$$\mathscr{L}_{\mathbf{A}}:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m,\quad \mathscr{L}_{\mathbf{B}}:\mathbb{C}^p\to\mathbb{C}^n.$$

它们的复合

$$\mathscr{L}_{\mathbf{A}}\circ\mathscr{L}_{\mathbf{B}}:\mathbb{C}^p\to\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$$

是否还是一个线性变换呢? 如果是, 对应的矩阵是什么?

线性变换的复合

设 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}^p$, 那么

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}} = \mathscr{L}_{\mathbf{B}}(x) \in \mathbb{C}^n \qquad \text{满足} \qquad y_k = \sum_{j=1}^{p} b_{kj} x_j.$$

$$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)^{\mathrm{T}} = \mathscr{L}_{\mathbf{A}}(y) \in \mathbb{C}^n$$

满足

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{p} b_{kj} x_j = \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \Big) x_j.$$

所以 $\mathscr{L}_{\mathbf{A}} \circ \mathscr{L}_{\mathbf{B}}$ 是线性变换, 且对应的矩阵为

$$\mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times p}, \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

我们把它定义为矩阵的乘法 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.

定义

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. 定义矩阵的乘法为 $\mathbf{C}=\mathbf{AB}=(c_{ij})_{m\times p}$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数才能相乘.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} =? \times .$$

设 $\mathbf{A}=(a_1,\ldots,a_n)$ 是 n 维行向量, $\mathbf{B}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量. $\mathbf{AB},\mathbf{BA}=?$

$$\mathbf{AB}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\qquad \mathbf{BA}=(b_ia_j)_{n\times n}\in M_n.$$

对于矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n},\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. $\mathbf{AB}$ 的 (i,j) 元其实就是 $\mathbf{A}$ 第 i 行对应的行向量和 $\mathbf{B}$ 第 j 列对应的列向量相乘得到的数 (1 阶方阵):

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \vdots\\ \mathbf{u}_m\end{pmatrix}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_p)=\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_1\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{u}_1\mathbf{v}_p\\ \mathbf{u}_2\mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{u}_2\mathbf{v}_p\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{u}_m\mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_m\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{u}_m\mathbf{v}_p\end{pmatrix}.$$

例：矩阵乘法的计算

例

求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 的乘积 $\mathbf{AB}$.

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 6 & 23 & 3 \end{pmatrix}.$$

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

的系数矩阵为 $\mathbf{A}$. 如果我们令

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1},$$

那么上述方程等价于矩阵方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. 对应的齐次方程为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

矩阵乘法满足如下性质:

(1) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(2) $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$;

(3) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$;

(4) 如果 $\mathbf{A} \in M_{m\times n}$, 则 $\mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{AE}_n = \mathbf{A}$.

(5) 如果 $\mathbf{A} \in M_{m\times n}$, 则 $\mathbf{O}_{p\times m}\mathbf{A} = \mathbf{O}_{p\times n}$, $\mathbf{AO}_{n\times p} = \mathbf{O}_{m\times p}$.

矩阵乘法无交换律和消去律

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\mathbf{AB}$ 为 $\mathbf{A}$ 左乘 $\mathbf{B}$, 或者 $\mathbf{B}$ 右乘 $\mathbf{A}$.
如果 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, 则称 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 是可交换的. 此时 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 必为同阶方阵. 例如

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

矩阵乘法也没有消去律: $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ 推不出 $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ 或 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$. 例如

$$\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\mathbf{O}_2.$$

由此可知: $\mathbf{AC}=\mathbf{BC}$ 推不出 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

练习

设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为 $n>1$ 阶方阵, 则 $\mathbf{A}+\mathbf{AB}=$(C)

(A) $\mathbf{A}(1+\mathbf{B})$ (B) $(\mathbf{E}+\mathbf{B})\mathbf{A}$ (C) $\mathbf{A}(\mathbf{E}+\mathbf{B})$ (D) 以上都不对

例

求与矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

解

设 $\mathbf{B} = (a_{ij})_{3\times3}$ 与 $\mathbf{A}$ 可交换, 则

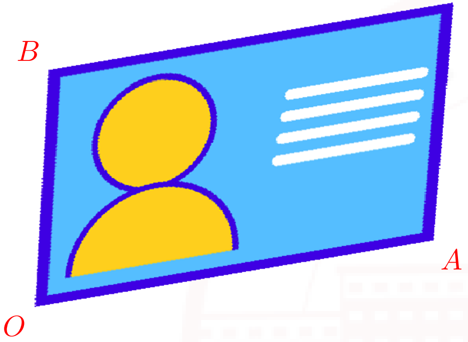
$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{23} = a_{12},$$

即 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{11} & a_{12} \\ & & a_{11} \end{pmatrix}.$

矩阵乘法的应用：图像校正

某位同学拍身份证照片拍成了下图的样子，如何能否修复好呢？



以左下角为原点，通过测量发现 A 坐标为 $(521, 88)$，B 坐标为 $(19, 311)$.

经过查询知道身份证长宽比为 $85.6 : 54$. 令 $A' = (427, 0), B' = (270, 0)$. 我们希望找到一个线性变换，将 A, B 变为 A', B'.

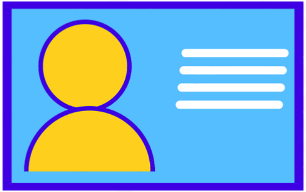
设该线性变换对应的矩阵为 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，那么

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 521 & 19 \\ 88 & 311 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 427 & 0 \\ 0 & 270 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} 521a+88b=427, \\ 19a+311b=0, \\ 511c+88d=0, \\ 19c+311d=270. \end{cases}$$

解得 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0.828 & -0.051 \\ -0.148 & 0.877 \end{pmatrix}$.



定义

设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，定义 $\mathbf{A}$ 的幂

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n, \quad \mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \cdots \cdot \mathbf{A}}_{k\ \text{个}}.$$

矩阵幂满足如下性质 (k, ℓ 为正整数):

(1) $\mathbf{A}^{k+\ell} = \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A}^\ell$;

(2) $\mathbf{A}^{k\ell} = (\mathbf{A}^k)^\ell$.

注意 $(\mathbf{AB})^k$ 一般不等于 $\mathbf{A}^k \cdot \mathbf{B}^k$. 想一想下面的等式成立吗?

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2?$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2?$$

例

设 $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 求 $\mathbf{A}^k$.

解

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2),$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^2 = \mathrm{diag}(\lambda_1^3, \cdots, \lambda_n^3),$$

递推下去可知

$$\mathbf{A}^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k).$$

例

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$. 求 $\mathbf{A}^k$.

解

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ & \lambda^2 & 2\lambda \\ & & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

续解

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ & \lambda^2 & 2\lambda \\ & & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ & & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

归纳可知

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ & & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

另解

设 $\mathbf{N}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ & 0 & 1\\ & & 0\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{N}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}$，$\mathbf{N}^3=\mathbf{O}$. 由于 $\mathbf{A}=\lambda\mathbf{E}+\mathbf{N}$ 且 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{N}$ 可交换，因此

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k &= \lambda^k\mathbf{E}+\mathrm{C}_k^1\lambda^{k-1}\mathbf{N}+\mathrm{C}_k^2\lambda^{k-2}\mathbf{N}^2\\ &= \begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dfrac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ & & \lambda^k\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 求 $\mathbf{A}^k$.

解

注意到 $\mathbf{A}$ 对应平面 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换是逆时针旋转 θ, 所以 $\mathbf{A}^k$ 就是逆时针旋转 $n\theta$, 对应的矩阵为

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}.$$

例：矩阵的幂

例

设 $\mathbf{A} = (1, 2, 3), \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. 求 $(\mathbf{BA})^k$.

解

注意到 $\mathbf{AB} = 3$，因此

$$(\mathbf{BA})^k = \mathbf{B}(\mathbf{AB})^{k-1}\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdots 3^{k-1} \cdot \mathbf{A} = 3^{k-1}\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -3^{k-1} & -2 \cdot 3^{k-1} & -3^k \\ 2 \cdot 3^{k-1} & 4 \cdot 3^{k-1} & 2 \cdot 3^k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

练习

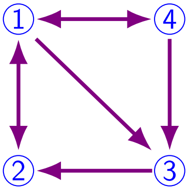
设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$. 求 $\mathbf{A}^k$.

答案

注意到 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(1,2,3)$, 因此 $\mathbf{A}^k=14^{k-1}\mathbf{A}$.

想一想：$\mathbf{A}^2=\mathbf{E}$ 能推出 $\mathbf{A}=\mathbf{E}$ 或 $-\mathbf{E}$ 吗?

网上订票系统里记录了所有能直飞的航班线路. 对于不能直达的城市，该怎么确定是否有换乘方案呢？例如 4 个城市之间的航线如图所示:



$$\Longleftrightarrow \text{邻接矩阵 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵中 $a_{ij} = 1$ 表示从 i 到 j 有直飞航线.

那么 $\mathbf{A}^2$ 的 (i,j) 元

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik}a_{kj}$$

就是从 i 到 j 换乘一次的方案数. 例如从①$\Longrightarrow$③:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 $b_{23} = 1$, 因此可通过②$\Longrightarrow$①$\Longrightarrow$③换乘一次到达.

想一想: 如何从③到达④?

第二节　矩阵的运算：转置和行列式

- 矩阵的转置
- 方阵的行列式

矩阵转置的定义

上一章我们已经说过, 如果 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 称

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置, 它是 $n\times m$ 矩阵. 例如行向量的转置是列向量, 方阵的转置还是方阵, 上三角阵的转置是下三角阵. 矩阵的转置满足如下性质:

(1) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$;

(2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda\mathbf{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

两边取转置得到

$$(b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = (c_1, c_2, c_3).$$

例

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$, 求 $|\mathbf{A}|$.

这题当然可以直接硬算, 不过我们可以利用一点小技巧:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)\mathbf{E}.$$

因此 $|\mathbf{A}|=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$ (因为一定有 a^4 项).

定义

- 如果方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$，称 $\mathbf{A}$ 为对称阵；
- 如果 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=-\mathbf{A}$，称 $\mathbf{A}$ 为反对称阵.

例如 $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 是对称阵. 对角矩阵都是对称阵.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是反对称阵. 反对称阵的对角线均为 0.

例

证明：如果 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{AB}$ 都是对称阵，则 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

证明

由题设可知 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}, \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}$,

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{BA}.$$

□

想一想：如果 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{AB}$ 中有一个对称阵和两个反对称阵呢？

练习

设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵，（ A ）一定是对称阵？

(A) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ (B) $\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ (C) $\mathbf{A}^2$ (D) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}$

一般地，如果 $\mathbf{A} \in M_{m\times n}$, $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$ 是 m 阶对称阵，$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ 是 n 阶对称阵.

任一方阵可表为对称阵与反对称阵之和

例

证明：任一方阵均可写成一对称阵和一反对称阵之和.

证明

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2}. \qquad \square$$

想一想：如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，那么 $f(x)$ 一定可以表示成一个偶函数和一个奇函数之和.

方阵的行列式我们已在上一章详细研究过. 如果方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}|=0$, 称 $\mathbf{A}$ 为退化矩阵, 否则称为非退化矩阵. 行列式满足如下性质:

(1) $|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|=|\mathbf{A}|$;

(2) $|\lambda\mathbf{A}|=\lambda^n|\mathbf{A}|$, 其中 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵;

(3) $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|=|\mathbf{BA}|$.

行列式与乘法交换

我们来证明 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{B} = (b_{ij})$,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{nn} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

经过变换 $c_{n+j} + b_{1j}c_1 + \cdots + b_{nj}, j = 1, \ldots, n$ 得到 $D = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{vmatrix}$, 其中 $\mathbf{C} = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{ik}$. 换言之 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. 再进行变换 $r_i \leftrightarrow r_{n+j}, j = 1, \ldots, n$ 得到

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} -\mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = (-1)^n |-\mathbf{E}| \cdot |\mathbf{C}| = |\mathbf{C}| = |\mathbf{AB}|.$$

例：方阵的行列式

练习

设 $\mathbf{A}$ 为 5 阶方阵，$|\mathbf{A}| = -1$，则 $|2\mathbf{A}| = \underline{\;-32\;}$，$||\mathbf{A}|\mathbf{A}| = \underline{\;\;1\;\;}$.

练习

设 $\alpha = (1, 0, -1)$，$\mathbf{A} = \alpha^{\mathrm{T}}\alpha$，则 $|5\mathbf{E} - \mathbf{A}^3| = \underline{\;-75\;}$.

练习

$$\begin{vmatrix} 2\sin a\cos a & \sin a\cos b + \cos a\sin b & \sin a\cos c + \cos a\sin c \\ \sin b\cos a + \cos b\sin a & 2\sin b\cos b & \sin b\cos c + \cos b\sin c \\ \sin c\cos a + \cos c\sin a & \sin c\cos b + \cos c\sin b & 2\sin c\cos c \end{vmatrix} = \underline{\;\;0\;\;}.$$

答案

注意到

$$\begin{pmatrix} 2\sin a\cos a & \sin a\cos b+\cos a\sin b & \sin a\cos c+\cos a\sin c \\ \sin b\cos a+\cos b\sin a & 2\sin b\cos b & \sin b\cos c+\cos b\sin c \\ \sin c\cos a+\cos c\sin a & \sin c\cos b+\cos c\sin b & 2\sin c\cos c \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \sin a & \cos a & 0 \\ \sin b & \cos b & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

设 $\mathbf{A}\in M_{m\times n},\mathbf{B}\in M_{n\times m}$. 如果 $m>n$, 那么

$$|\mathbf{AB}|=\left|(\mathbf{A},\mathbf{O}_{m\times(m-n)})\begin{pmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{O}_{(m-n)\times m}\end{pmatrix}\right|=0=|\mathbf{BA}|.$$

第三节　逆矩阵

- 方阵的伴随矩阵
- 逆矩阵的定义和形式
- 逆矩阵的性质
- 逆矩阵的应用

定义

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$. 由 $\mathbf{A}$ 的代数余子式形成的矩阵

$$\mathbf{A}^*=(A_{ji})=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{21} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{21} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵.

注意, 伴随矩阵的 (i,j) 元是代数余子式 A_{ji} 而不是 A_{ij}.

例

如果 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 那么 $\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

伴随矩阵满足如下重要性质:

(1) $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|E_n$.

这是因为

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{21} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{21} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

的 (i,j) 元是

$$a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(2) $(k\mathbf{A})^* = k^{n-1}\mathbf{A}^*$.

(3) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^* = (\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}}$.

(4) $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.

如果 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, 显然 $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}$. 如果 $|\mathbf{A}| = 0$ 但 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, 那么

$$\mathbf{A}^* \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \mathbf{O}_{n\times 1}.$$

所以以 $\mathbf{A}^*$ 为系数的齐次线性方程组有非零解, 从而 $|\mathbf{A}^*| = 0$.

如果 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 由 $|\mathbf{A}^*| \cdot |\mathbf{A}| = ||\mathbf{A}|\mathbf{E}_n| = |\mathbf{A}|^n$ 可得.

例：伴随矩阵

例

设非零 $n \geqslant 3$ 实方阵 $\mathbf{A}$ 满足对任意 i, j, $a_{ij} = A_{ij}$. 求 $|\mathbf{A}|$.

解

由题设可知 $(\mathbf{A}^*)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$. 因此 $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|^{n-1}$, 从而 $|\mathbf{A}| = 0$ 或 1.

如果 $|\mathbf{A}| = 0$, 则

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = |\mathbf{A}|\mathbf{E} = \mathbf{O}.$$

而 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 个对角元为

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 \geqslant 0.$$

于是 $\mathbf{A}$ 所有元素均为零，矛盾！因此 $|\mathbf{A}| = 1$.

线性变换的逆

给定一个线性变换 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$, 如果线性变换 $g:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}^n$ 满足

$$(gf)(\mathbf{u})=\mathbf{u},\forall\mathbf{u}\in\mathbb{C}^n,\quad (fg)(\mathbf{v})=\mathbf{v},\forall\mathbf{v}\in\mathbb{C}^m,$$

则称 g 是 f 的逆.

设 f,g 对应的矩阵分别是 $\mathbf{A},\mathbf{B}$, 则

$$\mathbf{AB}=\mathbf{E}_m,\quad \mathbf{BA}=\mathbf{E}_n.$$

注意到 $m\neq n$ 时上述等式不可能成立, 因为 $m>n$ 时, 通过补零列可知 $|\mathbf{AB}|=0$; $m<n$ 时 $|\mathbf{BA}|=0$. 因此线性变换的逆只可能在 $m=n$ 时存在.

由此得到对应的矩阵的逆的定义:

定义

设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵. 若存在 n 阶方阵 $\mathbf{B}$ 使得

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}_n,$$

则称 $\mathbf{A}$ 是可逆矩阵, $\mathbf{B}$ 是 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵.

(1) 如果 $\mathbf{A}$ 是可逆矩阵, 它的逆矩阵唯一吗?
设 $\mathbf{B}, \mathbf{B}'$ 都是 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵, 则

$$\mathbf{AB} = \mathbf{E}_n, \quad \mathbf{B}'\mathbf{A} = \mathbf{E}_n.$$

于是

$$\mathbf{B} = (\mathbf{B}'\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}'(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}'.$$

因此若逆矩阵存在必唯一.

(2) 任何非零矩阵都有逆吗?

设 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则

$$a + c = 1, \quad 2a + 2c = 0.$$

这不可能, 因此 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 不可逆. 实际上从 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ 可知

$$|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = 1.$$

所以退化矩阵都是不可逆的.

(3) 那非退化矩阵都可逆吗?

注意到

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\mathbf{E}.$$

因此如果 $\mathbf{A}$ 非退化, 则

$$\mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}.$$

逆矩阵存在性的刻画

定理

n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 可逆当且仅当 $|\mathbf{A}| \neq 0$. 此时 $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}$.

推论

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为 n 阶矩阵. 如果 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$ (或 $\mathbf{BA} = \mathbf{E}$), 则 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

证明

如果 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$, 则 $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| = 1$, $|\mathbf{A}| \neq 0$. 因此 $\mathbf{A}$ 可逆.

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}.$$

□

例

证明 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 可逆并求其逆矩阵.

解

由于 $|\mathbf{A}|=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$, 因此 $\mathbf{A}$ 可逆. 由于 $\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, 因此

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

注意到 $\mathbf{A}$ 对应的是平面上沿原点逆时针旋转 θ, 因此 $\mathbf{A}^{-1}$ 对应的是平面上沿原点逆时针旋转 $-\theta$.

例

$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\-1&3&4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-1&-3&5\\1&5&11\end{pmatrix}$ 是否可逆？若可逆求其逆矩阵.

解

由于 $|\mathbf{A}|=10$, 因此 $\mathbf{A}$ 可逆. 计算其代数余子式为

$$A_{11}=7,\ A_{12}=1,\ A_{13}=1,\ A_{21}=-5,\ A_{22}=5$$

$$A_{23}=-5,\ A_{31}=-3,\ A_{32}=1,\ A_{33}=1.$$

因此 $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{\mathbf{A}^*}{10}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}7&-5&-3\\1&5&1\\1&-5&1\end{pmatrix}$. 由于 $|\mathbf{B}|=0$, 因此 $\mathbf{B}$ 不可逆.

例

设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

则

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}).$$

逆矩阵通常采用下述方法计算:

(1) 利用公式 $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$, 适用于 $2,3$ 阶方阵, 或用于抽象分析.

(2) 寻找方阵 $\mathbf{B}$ 使得 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$, 适用于抽象矩阵求逆.

(3) 利用矩阵的初等变换求逆矩阵, 该方法我们会在之后的学习中接触到.

例

设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵且满足 $\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\mathbf{O}$. 求 $\mathbf{A}^{-1}$ 和 $(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}$.

解

(1) 由于 $\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}=2\mathbf{E}$, 因此 $\mathbf{A}(\mathbf{A}+3\mathbf{E})=2\mathbf{E}$, $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{\mathbf{A}+3\mathbf{E}}{2}$.

(2) 由于 $(\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{A}+4\mathbf{E})=-2\mathbf{E}$, 因此 $(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}=-\dfrac{\mathbf{A}+4\mathbf{E}}{2}$.

设

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0$$

是一个多项式. 定义

$$f(\mathbf{A}) = a_m \mathbf{A}^m + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbf{E}.$$

例如,

(1) 若 $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, 则 $f(\mathbf{A}) = \mathrm{diag}\big(f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\big)$.

(2) $f(\mathbf{PAP}^{-1}) = \mathbf{P} f(\mathbf{A}) \mathbf{P}^{-1}$.

若 $f(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, 我们想求 $(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{E})^{-1}$. 那么

$$f(\mathbf{A}) - f(\alpha)\mathbf{E} = (\mathbf{A} - \alpha \mathbf{E})\mathbf{B} = -f(\alpha)\mathbf{E}.$$

从而当 $f(\alpha) \neq 0$ 时, $(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{E})^{-1} = -\dfrac{\mathbf{B}}{f(\alpha)}$.

想一想：如果 $\mathbf{A}^3+\mathbf{A}^2-2\mathbf{E}=\mathbf{O}$，如何求 $(\mathbf{A}^2+\mathbf{E})^{-1}$?

(1) 待定系数设 $(\mathbf{A}^2+\mathbf{E})(a\mathbf{A}^2+b\mathbf{A}+c\mathbf{E})=\mathbf{E}$，然后使得两边相减是 $\mathbf{A}^3+\mathbf{A}^2-2\mathbf{E}$ 的倍数.

(2) 通过 $\mathbf{A}^6=(\mathbf{A}^3)^2$ 得到 $\mathbf{A}^2$ 满足的方程.

例

多选题：若 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 为同阶方阵，且 $\mathbf{A}$ 可逆，则（ AC ）.

(A) 若 $\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$，则 $\mathbf{B}=\mathbf{C}$

(B) 若 $\mathbf{AB}=\mathbf{CB}$，则 $\mathbf{A}=\mathbf{C}$

(C) 若 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，则 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$

(D) 若 $\mathbf{BC}=\mathbf{O}$，则 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$

例

设 n 阶方阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 满足 $\mathbf{ABC} = \mathbf{E}$, 则 (D).

(A) $\mathbf{ACB} = \mathbf{E}$ (B) $\mathbf{CBA} = \mathbf{E}$ (C) $\mathbf{BAC} = \mathbf{E}$ (D) $\mathbf{CAB} = \mathbf{E}$

想一想 $\mathbf{B}^{-1} =?$

练习

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 4 & a & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 且存在两个不等的 3×2 矩阵 $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ 使得 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, 则 $a = \underline{\ -3\ }$.

练习

设 3 阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A} + \mathbf{E} = \mathbf{O}$, 且 $|\mathbf{A}| = 2$, 则 $|(\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{E})^{-1}| = \underline{\ -2\ }$.

逆矩阵满足如下性质:

(1) 设 $\mathbf{A}$ 可逆.

- $\mathbf{A}^{-1}$ 也可逆, 且 $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$;
- 若 $\lambda\neq 0$, 则 $\lambda\mathbf{A}$ 也可逆, 且 $(\lambda\mathbf{A})^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}\mathbf{A}^{-1}$;
- $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ 也可逆, 且 $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;
- $|\mathbf{A}^{-1}|=|\mathbf{A}|^{-1}$.

(2) 若 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为同阶可逆矩阵, 则 $\mathbf{AB}$ 也可逆, 且

$$(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

一般地

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{A}_n)^{-1}=\mathbf{A}_n^{-1}\cdots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}.$$

注意矩阵不能相除 $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$, 因为一般 $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\neq\mathbf{AB}^{-1}$.

注意一般地, $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$. 例如 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 均可逆, 但 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 不可逆.

伴随矩阵的性质

(5) 若 $\mathbf{A}$ 可逆, 则 $(\mathbf{A}^{-1})^*=(\mathbf{A}^*)^{-1}=\dfrac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$.

证明

由于 $\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$, 因此 $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$. 于是

$$(\mathbf{A}^{-1})^*=|\mathbf{A}^{-1}|(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|},\quad (\mathbf{A}^*)^{-1}=(|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}.$$

□

例

设 $\mathbf{A}$ 是 3 阶方阵, $|\mathbf{A}| = \frac{1}{2}$. 求 $|(2\mathbf{A})^{-1} - (2\mathbf{A})^*|$.

解

$$(2\mathbf{A})^{-1} - (2\mathbf{A})^* = \frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1} - 2^2\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* - 4\mathbf{A}^* = -3\mathbf{A}^*,$$

因此

$$\left|(2\mathbf{A})^{-1} - (2\mathbf{A})^*\right| = -27|\mathbf{A}^*| = -27|\mathbf{A}|^2 = -\frac{27}{4}.$$

如果 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可逆，下述矩阵方程可以由逆矩阵表出：

(1) $\mathbf{AX} = \mathbf{C} \implies \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$;

(2) $\mathbf{XA} = \mathbf{C} \implies \mathbf{X} = \mathbf{CA}^{-1}$;

(3) $\mathbf{AXB} = \mathbf{C} \implies \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{CB}^{-1}$.

例

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 如果 $\mathbf{AX} = \mathbf{A} + 2\mathbf{X}$，求 $\mathbf{X}$.

解

由题设得 $(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{A}$. 注意到

$$|\mathbf{A}-2\mathbf{E}|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{vmatrix}=-1\neq 0,\quad (\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

因此

$$\mathbf{X}=(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}.$$

也可由 $\mathbf{X}=\mathbf{E}+2(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}$ 计算得到.

例：解矩阵方程

练习

设 3 阶矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} = 6\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{A}$. 如果 $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7})$, 求 $\mathbf{B}$.

答案

右乘 $\mathbf{A}^{-1}$ 得到 $\mathbf{B} = 6(\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{E})^{-1} = \mathrm{diag}(6, 2, 1)$.
也可以左乘 $\mathbf{A}$ 右乘 $\mathbf{A}^{-1}$ 得到

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{B} = 6\mathbf{A} = 6\mathbf{E} - 6(\mathbf{E} - \mathbf{A}),$$

$$\mathbf{B} = 6(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} - 6\mathbf{E} = \mathrm{diag}(6, 2, 1).$$

例

解矩阵方程 $\mathbf{A}^*\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} + 2\mathbf{X}$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

解

注意到 $|\mathbf{A}| = 4$. 两边同时左乘 $\mathbf{A}$ 得到 $4\mathbf{X} = \mathbf{E} + 2\mathbf{A}\mathbf{X}$, 因此

$$\mathbf{X} = (4\mathbf{E} - 2\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

练习

解矩阵方程 $\mathbf{A}^*\mathbf{X}\mathbf{A} = 2\mathbf{X}\mathbf{A} - 8\mathbf{E}$, 其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

答案

两边同时左乘 $\mathbf{A}$ 右乘 $\mathbf{A}^{-1}$ 得到

$$-2\mathbf{X} = 2\mathbf{A}\mathbf{X} - 8\mathbf{E}, \quad (\mathbf{A}+\mathbf{E})\mathbf{X} = 4\mathbf{E},$$

$$\mathbf{X} = 4(\mathbf{A}+\mathbf{E})^{-1} = 4\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = 4\begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

例：解矩阵方程

例

设 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}1&\\&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{AP}=\mathbf{P}\Lambda$, 求 $\mathbf{A}^n$.

解

$|\mathbf{P}|=2, \mathbf{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}=\mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^n&=\mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}\cdot\mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}\cdots\mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{P}\Lambda^n\mathbf{P}^{-1}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

我们会在后面学习到该技巧来计算一般方阵的幂次.

如果 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 且 $\mathbf{A}$ 可逆, 则

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^{*}\mathbf{b}$$

因此

$$x_i=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\sum_{k=1}^{n}A_{ki}b_k.$$

此即克拉默法则.

容易知道，2 阶方阵满足 $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$.
如果 $\mathbf{A}$ 是 $n \geqslant 3$ 阶非退化方阵，则

$$(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}^*|(\mathbf{A}^*)^{-1} = |\mathbf{A}|^{n-1}\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}.$$

如果 $\mathbf{A}$ 是 $n \geqslant 3$ 阶退化方阵，我们会在后面证明 $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{O}$. 因此

伴随矩阵的性质

(6) $$(\mathbf{A}^*)^* = \begin{cases} \mathbf{A}, & n = 2; \\ |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}, & n \geqslant 3. \end{cases}$$

练习

单选题：设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵，如果 (D)，则 $\mathbf{A}-\mathbf{E}$ 可逆.

(A) $\mathbf{A}$ 可逆

(B) $|\mathbf{A}|=0$

(C) $\mathbf{A}$ 的主对角线元素均为 0

(D) 存在某个正整数 m 使得 $\mathbf{A}^m=\mathbf{O}$

练习

若 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，则下面命题正确的有 __1__ 个.

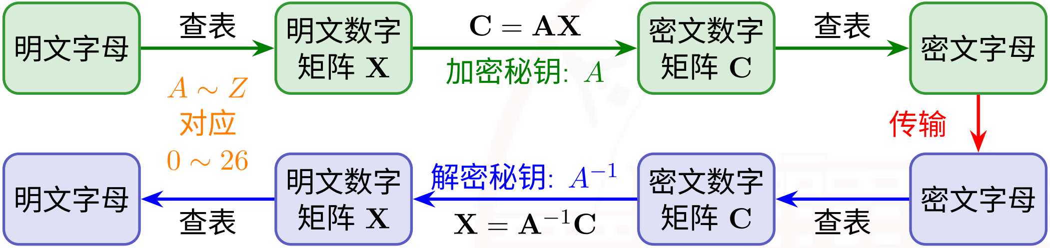
(1) $\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$

(2) $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$

(3) $|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}$

逆矩阵的应用：通信加密

1929 年，希尔通过线性变换对信息进行加密和解密处理，提出了密码史上具有重要地位的希尔密码系统.



例

设接受收到的密文字母为 “WBIZTNWJBRFSGNZ”，加密密钥为 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$.

请用希尔密码系统解密密文.

解

密文对应的数字为

$$22,1,8,25,19,13,22,9,1,17,5,18,6,13,25.$$

由于密钥是 3 阶方阵，所以将上述数字按 3 个一列写成

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}22&25&22&17&6\\1&19&9&5&13\\8&13&1&18&25\end{pmatrix}.$$

逆矩阵的应用：通信加密

续解

解密密钥为 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，因此

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -7 & 6 & 8 & -13 & -12 \\ 34 & -1 & 25 & 6 & -39 \\ -13 & 7 & -12 & 6 & 32 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 19 & 6 & 8 & 13 & 14 \\ 8 & 25 & 25 & 6 & 13 \\ 13 & 7 & 14 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

查表得到明文：*TINGZHI ZONGGONG*.

第四节　分块矩阵

- 分块矩阵的定义和运算
- 特殊分块矩阵

有时为了研究矩阵和其部分元素形成的矩阵的联系，需要使用分块法将其进行拆分:

定义

用若干条横线和竖线将矩阵 $\mathbf{A}$ 分成许多小矩阵，每个小矩阵成为 $\mathbf{A}$ 的子块，以子块为元素的矩阵称为分块矩阵.

例如

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{O}_{m\times n} & \mathbf{E}_m \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{O}_{n\times m}\end{pmatrix}$$

就是一个分块矩阵.

如果分块矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 同型，且每个对应分块也同型，则 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 就是对应分块相加形成的分块矩阵：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{B}_{sr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r}+\mathbf{B}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1}+\mathbf{B}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr}+\mathbf{B}_{sr} \end{pmatrix}.$$

数 λ 和分块矩阵的数乘，就是 λ 和对应分块数乘形成的分块矩阵：

$$\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mathbf{A}_{11} & \cdots & \lambda\mathbf{A}_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\mathbf{A}_{s1} & \cdots & \lambda\mathbf{A}_{sr} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的运算：乘法

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr}\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11} & \cdots & \mathbf{B}_{1t}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{B}_{r1} & \cdots & \mathbf{B}_{rt},\end{pmatrix}$$

且 $\mathbf{A}_{ij}$ 的列数和 $\mathbf{B}_{jk}$ 的行数相同, 则

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_{11} & \cdots & \mathbf{C}_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{C}_{s1} & \cdots & \mathbf{C}_{sr}\end{pmatrix},\quad \mathbf{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{r}\mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}.$$

简单来说就是, 如果对应的分块能做相应运算, 则分块矩阵的运算就如同把这些分块视作数一样运算.

分块矩阵的运算：转置

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1r}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{s1} & \cdots & \mathbf{A}_{sr}\end{pmatrix},$$

则

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & \mathbf{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \mathbf{A}_{sr}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}.$$

如果方阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_m \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ 都是方阵, 称 $\mathbf{A}$ 为分块对角阵. 记作 $\mathbf{A} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m)$.

分块对角阵具有如下性质:

(1) $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_1| \cdots |\mathbf{A}_m|$;

(2) $\mathbf{A}$ 可逆当且仅当 $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ 均可逆, 此时 $\mathbf{A}^{-1} = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1^{-1}, \ldots, \mathbf{A}_m^{-1})$.

(3) $\mathbf{A}^k = \mathrm{diag}(\mathbf{A}_1^k, \ldots, \mathbf{A}_m^k)$.

例

求 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

设 $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}, \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}2&0\\-1&3\end{pmatrix}$,则 $\mathbf{A}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, $\quad \mathbf{A}_2^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&0\\1&2\end{pmatrix}$.

故 $\mathbf{A}^{-1}=\mathrm{diag}(\mathbf{A}_1^{-1},\mathbf{A}_2^{-1})=\begin{pmatrix}1&-1&&\\-1&2&&\\&&\frac{1}{2}&0\\&&\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

例：分块三角阵的逆

例

设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均可逆，求 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

解

由 $\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}| \neq 0$ 可知该方阵可逆. 设

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

例：分块三角阵的逆

续解

则

$$\mathbf{A}\mathbf{A}_1 = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A}\mathbf{A}_2 = \mathbf{O}, \quad \mathbf{C}\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}\mathbf{A}_3 = \mathbf{O}, \quad \mathbf{C}\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}\mathbf{A}_4 = \mathbf{E}.$$

于是

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}_2 = \mathbf{O}, \mathbf{A}_4 = \mathbf{B}^{-1}.$$

再由 $\mathbf{C}\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}\mathbf{A}_3 = \mathbf{O}$ 可得

$$\mathbf{A}_3 = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}_1 = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}.$$

故

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}.$$

例：分块方阵的伴随

练习

设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为同阶方阵，$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \end{pmatrix}$，则 $\mathbf{C}^*=($ D $)$.

(A) $\begin{pmatrix} & \mathbf{A}^* \\ \mathbf{B}^* & \end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix} & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{A}^* & \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} & |\mathbf{B}|\mathbf{A}^* \\ |\mathbf{A}|\mathbf{B}^* & \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} & |\mathbf{A}|\mathbf{B}^* \\ |\mathbf{B}|\mathbf{A}^* & \end{pmatrix}$

第五节　矩阵的初等变换

- 初等变换和行最简形矩阵
- 初等矩阵
- 矩阵等价

我们在第一章中利用了如下三种初等变换来帮助计算行列式:

初等变换

(1) 互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$;

(2) 一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i;

(3) j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$.

实际上它也可以用来解线性方程组. 例如

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 11 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

右侧矩阵被称为增广矩阵.

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -2 & 11 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)
\underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-3r_1}{\sim}}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \end{array}\right)
\overset{-\frac{1}{5}r_3}{\sim}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right)
\overset{r_3+3r_2}{\sim}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)
$$

经过若干次初等变换，增广矩阵变为行阶梯形矩阵.

增广矩阵化为行最简形

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right) \underset{r_1+2r_3}{\overset{r_2+r_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 0 & 8\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right) \overset{r_1-3r_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

再经过若干次初等变换，增广矩阵变为行最简形矩阵.

线性方程组的初等变换 $\iff$ 增广矩阵的初等行变换

定义

矩阵的初等行 (列) 变换包括:

(1) 对换变换: 互换两行 (列): $r_i \leftrightarrow r_j, c_i \leftrightarrow c_j$;

(2) 数乘变换: 一行 (列) 乘非零常数 k: kr_i, kc_i;

(3) 倍加变换: j 行 (列) 乘 k 加到 i 行 (列): $r_i + kr_j, c_i + kc_j$.

这三类变换过程都是可逆的, 且其逆变换是同一类变换:

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 的逆是 $r_i \leftrightarrow r_j$;

(2) kr_i 的逆是 $\frac{1}{k} r_i$;

(3) $r_i + kr_j$ 的逆是 $r_i - kr_j$.

行阶梯形矩阵

定义

满足下述条件的矩阵称为行阶梯形矩阵:

(1) 每个非零行的第一个非零元只出现在上一行第一个非零元的右边;

(2) 零行只可能出现在最下方.

换言之, 若 $\mathbf{A} \in M_{m\times n}$, 存在正整数

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_\ell, j \leqslant m$$

使得 $a_{1,k_1}, \ldots, a_{\ell,k_\ell}$ 均非零; $j < k_i$ 或 $i > \ell$ 时 $a_{ij} = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

任何矩阵都可通过初等行变换化为行阶梯形.

定义

满足下述条件的行阶梯形矩阵称为行最简形矩阵:

(1) 每个非零行的第一个非零元是 1;

(2) 每个非零行的第一个非零元所在列其它元素均为 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

任何矩阵都可通过初等行变换化为行最简形.

例

用初等行变换将 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&-9&3\\0&1&-3&4\\-2&-3&9&6\end{pmatrix}$

解

$$\begin{pmatrix}1&3&-9&3\\0&1&-3&4\\-2&-3&9&6\end{pmatrix}\underset{\sim}{\overset{r_3+2r_1}{}}\begin{pmatrix}1&3&-9&3\\0&1&-3&4\\0&3&-9&12\end{pmatrix}\underset{\sim}{\overset{r_3-3r_2}{}}\begin{pmatrix}1&3&-9&3\\0&1&-3&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\overset{r_1-3r_2}{}}\begin{pmatrix}1&0&0&-9\\0&1&-3&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

单位阵 $\mathbf{E}$ 经过一次初等变换得到的方阵称为初等矩阵.

(1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 和 $c_i \leftrightarrow c_j$ 都对应初等矩阵

$$\mathbf{E}(i,j)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array}.$$

第二类初等矩阵

(2) kr_i, kc_i 都对应初等矩阵

$$
\begin{array}{cc}
\mathbf{E}(i(k)) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & k & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{第 } i \text{ 列} \end{array} &
\end{array}
$$

(3) $r_i + kr_j, c_j + kc_i$ 都对应初等矩阵

$$\mathbf{E}(i,j(k)) = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & k & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
&
\begin{array}{l}
 \\
 \\
\leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\
\cdot \\
\leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\
 \\
 \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \text{第 } i \text{ 列} & & \text{第 } j \text{ 列} & &
\end{array}
&
\end{array}$$

我们来看

$$\mathbf{E}(1,3)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{E}(i,j)$ 左乘在矩阵 $\mathbf{A}$ 上, 即对 $\mathbf{A}$ 实施 $r_i \leftrightarrow r_j$.

$$\mathbf{E}(2(k))\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4k & 5k & 6k \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{E}(i(k))$ 左乘在矩阵 $\mathbf{A}$ 上, 即对 $\mathbf{A}$ 实施 kr_i.

$$\mathbf{E}(3,1(k))\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7+k & 8+2k & 9+3k \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{E}(i,j(k))$ 左乘在矩阵 $\mathbf{A}$ 上, 即对 $\mathbf{A}$ 实施 $r_i + kr_j$.

从分块矩阵乘法

$$\mathbf{E}(i,j)\mathbf{A} = \mathbf{E}(i,j)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

可以看出确实如此.

同理, 初等矩阵右乘矩阵 $\mathbf{A}$ 等同于对 $\mathbf{A}$ 实施对应的初等列变换.

定理

设 $\mathbf{A} \in M_{m\times n}$.

(1) 对 $\mathbf{A}$ 实施一次初等行变换, 相当于在$\mathbf{A}$ 的左边乘对应的 m 阶初等矩阵.

(2) 对 $\mathbf{A}$ 实施一次初等列变换, 相当于在$\mathbf{A}$ 的右边乘对应的 n 阶初等矩阵.

即左行右列.

例

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31}+2a_{11} & a_{33}+2a_{13} & a_{32}+2a_{12} \end{pmatrix}$,

$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 那么 $\mathbf{B}=$(C)

(A) $\mathbf{P}_3\mathbf{A}\mathbf{P}_2$ (B) $\mathbf{P}_2\mathbf{A}\mathbf{P}_3$ (C) $\mathbf{P}_3\mathbf{A}\mathbf{P}_1$ (D) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{A}$

例

设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方阵，将 $\mathbf{A}$ 的第 1 列与第 2 列交换得 $\mathbf{B}$，再把 $\mathbf{B}$ 的第 2 列加到第 3 列得到 $\mathbf{C}$．求满足 $\mathbf{AQ}=\mathbf{C}$ 的可逆矩阵 $\mathbf{Q}$.

解

$\mathbf{B}=\mathbf{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \mathbf{C}=\mathbf{B}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. 因此

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例：初等矩阵的逆

由于初等变换都是可逆，因此初等矩阵也都是可逆的：

(1) $\mathbf{E}(i,j)\mathbf{E}(i,j)=\mathbf{E} \implies \mathbf{E}(i,j)^{-1}=\mathbf{E}(i,j)$;

(2) $\mathbf{E}(i(k))\mathbf{E}(i(\frac{1}{k}))=\mathbf{E} \implies \mathbf{E}(i(k))^{-1}=\mathbf{E}(i(\frac{1}{k}))$;

(3) $\mathbf{E}(i,j(k))\mathbf{E}(i,j(-k))=\mathbf{E} \implies \mathbf{E}(i,j(k))^{-1}=\mathbf{E}(i,j(-k))$.

例

设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，将 $\mathbf{A}$ 的第 i 行与第 j 行对换后得到的矩阵记为 $\mathbf{B}$，则 $\mathbf{AB}^{-1}=$ ____$\mathbf{E}(i,j)$____

例：初等矩阵与初等变换

练习

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{13} & -a_{11}+a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & -a_{21}+a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & -a_{31}+a_{32} & a_{31} \end{pmatrix},$

$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 且 $\mathbf{A}$ 可逆. 那么 $\mathbf{B}^{-1}$ =(B)

(A) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ (B) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{A}^{-1}$ (C) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3\mathbf{A}^{-1}$ (D) $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_1\mathbf{A}^{-1}$

例

设 $\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}1&&&\\0&1&&\\0&0&1&\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{P}_3=\begin{pmatrix}1&&&\\&k&&\\&&1&\\&&&1\end{pmatrix}$, 求 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3$ 和 $(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1}$.

这题可以直接计算，也可以利用初等矩阵对应的变换来看.

解

$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ 就是对 $\mathbf{P}_1$ 实施初等列变换 c_1+ac_4, 即 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\a&0&0&1\end{pmatrix}$.

例：初等矩阵

续解

同理 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

反过来，$\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}$,

$$(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3)^{-1} = \mathbf{P}_3^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\mathbf{P}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

例：初等矩阵

练习

将可逆方阵 $\mathbf{A}$ 的第 1 行的 2 倍加到第 2 行得到 $\mathbf{B}$, 则对 $\mathbf{A}^{-1}$ 实施初等变换 (D) 可得到 $\mathbf{B}^{-1}$.

(A) $r_2 + 2r_1$ (B) $r_2 - 2r_1$ (C) $c_1 + 2c_2$ (D) $c_1 - 2c_2$

如果 $(\mathbf{A},\mathbf{B}) \overset{r}{\sim} (\mathbf{E},\mathbf{X})$, 那么存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{P}(\mathbf{A},\mathbf{B}) = (\mathbf{E},\mathbf{X})$. 即 $\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}, \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. 所以这种方法可用来解矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, 其中 $\mathbf{A}$ 是可逆阵.

特别地, $(\mathbf{A},\mathbf{E}) \overset{r}{\sim} (\mathbf{E},\mathbf{A}^{-1})$ 可用来帮助计算矩阵的逆. 类似地 $\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\\mathbf{B}\end{pmatrix} \overset{c}{\sim} \begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{X}\end{pmatrix}$ 可用来解 $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$, 其中 $\mathbf{A}$ 是可逆阵.

练习

求 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&3\\2&1&4\end{pmatrix}$ 的逆.

解

$$(\mathbf{A},\mathbf{E}) = \begin{pmatrix}1&1&2&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\2&1&4&0&0&1\end{pmatrix} \underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2-r_1}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix}1&1&2&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&-1&0&-2&0&1\end{pmatrix}$$

例：初等变换解矩阵方程

续解

$$(\mathbf{A},\mathbf{E}) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_3+r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2-r_3}{\overset{r_1-2r_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{r_1-r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

故 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

练习

若 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&1&3\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{AX}=\mathbf{A}+\mathbf{X}$, 求 $\mathbf{X}$.

解

由题设知 $(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{A}$, $\mathbf{X}=(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}$.

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E},\mathbf{A})=\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\2&0&3&2&1&3\\0&1&-1&0&1&0\end{pmatrix}\underset{r_2\leftrightarrow r_3}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&0&2&2&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&-4&3&-2&-3&3\end{pmatrix}$$

续解

$$(\mathbf{A}-\mathbf{E},\mathbf{A}) \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \underset{-r_3}{\overset{r_3+4r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \overset{r_1-2r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

故 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$

练习

(1) 设 $\mathbf{A}$ 是 3 阶方阵, 存在可逆阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$, 则

$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{P} = \underline{\quad \operatorname{diag}(6,3,2) \quad}$.

(2) 设 $\mathbf{A}$ 是 3 阶方阵, 存在可逆阵 $\mathbf{P} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

若 $\mathbf{Q} = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$, 则 $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \underline{\quad \operatorname{diag}(1,3,2) \quad}$.

(3) 设 n 阶方阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{E}$, 则以下说法正确的有 $\underline{\quad 4 \quad}$ 个.

(I) $\mathbf{A}$ 等价于 $\mathbf{E}$;　　(II) $\mathbf{A}$ 等价于 $\mathbf{B}$;

(III) $\mathbf{A}$ 可经过有限次初等行变换化为 $\mathbf{B}$;　　(IV) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

练习

设

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

若 $\mathbf{A}$ 可逆, 则 $\mathbf{B}^{-1}$ =(C).

(A) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ (B) $\mathbf{P}_1\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}_2$ (C) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{A}^{-1}$ (D) $\mathbf{P}_2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}_1$

矩阵等价的定义

定义

(1) 如果 $\mathbf{A}$ 经过有限次初等行变换变为 $\mathbf{B}$, 则称 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 行等价, 记作 $\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{B}$.

(2) 如果 $\mathbf{A}$ 经过有限次初等列变换变为 $\mathbf{B}$, 则称 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 列等价, 记作 $\mathbf{A} \overset{c}{\sim} \mathbf{B}$.

(3) 如果 $\mathbf{A}$ 经过有限次初等行变换和初等列变换变为 $\mathbf{B}$, 则称 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 列等价, 记作 $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

每个矩阵都可以通过初等行变换变为行最简形矩阵. 对于可逆方阵 $\mathbf{P}$, 由于初等矩阵都是可逆的, 因此它对应的行最简形矩阵 $\mathbf{Q}$ 也是可逆的. 于是 $\mathbf{Q}$ 没有零行, 它只能是 $\mathbf{E}$. 换言之, 可逆方阵可以写成有限个初等矩阵的乘积. 所以 $\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{B}$ 等价于存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{B} = \mathbf{PA}$.

定理

(1) $\mathbf{A} \overset{r}{\sim} \mathbf{B}$ 当且仅当存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{B} = \mathbf{PA}$.

(2) $\mathbf{A} \overset{c}{\sim} \mathbf{B}$ 当且仅当存在可逆矩阵 $\mathbf{Q}$ 使得 $\mathbf{B} = \mathbf{AQ}$.

(3) $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ 当且仅当存在可逆矩阵 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ 使得 $\mathbf{B} = \mathbf{PAQ}$.

由此可知

命题

矩阵的行等价、列等价、等价均满足

(1) 自反性: $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}$;

(2) 对称性: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \implies \mathbf{B} \sim \mathbf{A}$;

(3) 传递性: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}, \mathbf{B} \sim \mathbf{C} \implies \mathbf{A} \sim \mathbf{C}$.

矩阵的标准型

任一矩阵通过有限次初等行变换变为行最简形后，可通过初等列变换将其变为标准型 $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$. 例如:

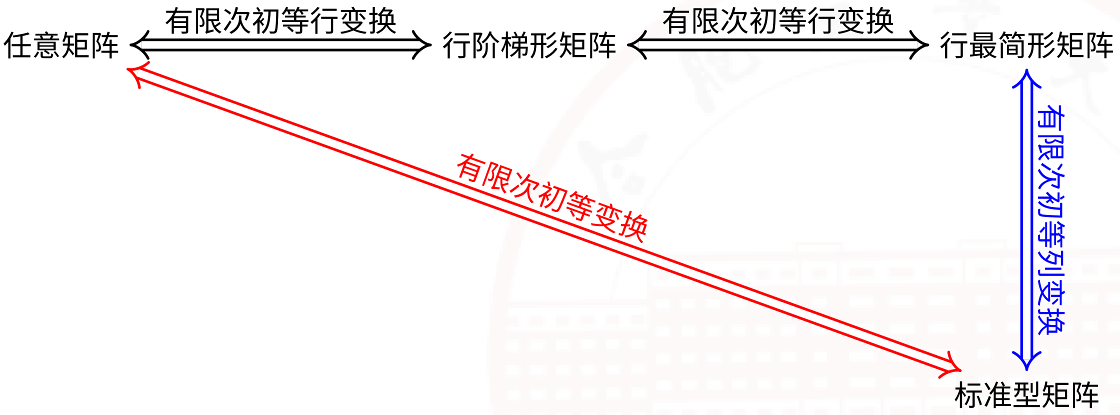
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{c_4+9c_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_4-4c_2}{\overset{c_3+3c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的等价也叫做相抵，上述标准型也叫作相抵标准型. 我们会看到不同的 r 对应的相抵标准型不等价. 所以相抵标准型相当于在每一个等价类中找到了一个具有代表性的矩阵.

命题

方阵 $\mathbf{A}$ 可逆当且仅当它的标准型为 $\mathbf{E}_n$.

矩阵的变换关系


任意矩阵
有限次初等行变换
行阶梯形矩阵
有限次初等行变换
行最简形矩阵
有限次初等变换
有限次初等列变换
标准型矩阵

例

将矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ 表示成有限个初等阵的乘积.

解

$$\mathbf{A}\overset{r_2\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\overset{r_3-2r_1}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\underset{-r_3}{\overset{-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因此 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\mathbf{A}=\mathbf{E}$,

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

第六节　矩阵的秩

- 矩阵秩的定义
- 矩阵秩与子式
- 矩阵秩的性质

上一节中我们说每个矩阵 $\mathbf{A}$ 都等价于某个标准型 $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$. 称 r 为 $\mathbf{A}$ 的秩, 记作 $R(\mathbf{A})$.

第一个问题是, 秩是唯一的吗? 如果两个 $m \times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{E}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \quad (r > s)$$

则存在可逆的方阵 $\mathbf{P} \in M_m, \mathbf{Q} \in M_n$ 使得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

设 $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_4 \end{pmatrix}$, 其中 $\mathbf{P}_1 \in M_s, \mathbf{Q}_1 \in M_r$. 则

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{P}_3 & \mathbf{O} \end{pmatrix}.$$

由于 $r > s$, 因此 $\mathbf{Q}_1$ 的最后 $r - s$ 列为零, $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{O}$. 从而

$$|\mathbf{Q}| = \begin{vmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{Q}_3 & \mathbf{Q}_4 \end{vmatrix} = |\mathbf{Q}_1| \cdot |\mathbf{Q}_4| = 0.$$

矛盾! 因此不同的标准型之间不等价, 也就是说矩阵的秩是唯一的.

对于行阶梯形矩阵，再实施初等变换使其变为行最简形矩阵或标准型矩阵，并不会改变它的非零行的个数．换言之，行阶梯形矩阵的秩就是非零行的个数．

例

求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&0&3&-2\\0&3&1&-2&5\\0&0&0&4&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}$ 的秩．

解

$\mathbf{A}$ 是行阶梯形矩阵，因此 $R(\mathbf{A})=3$．

$$\mathbf{B}\underset{r_4-4r_1}{\overset{r_2-2r_1}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-11\\0&-1&-11\end{pmatrix}\underset{-r_2}{\overset{r_3-r_2}{\sim}}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&11\\0&0&0\end{pmatrix}\implies R(\mathbf{B})=2.$$

例：计算矩阵的秩

例

求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ -1 & a-1 & 1-a\\ 1 & 1 & a^2\\ 1 & 1 & 2a+1\end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$\mathbf{A}\underset{r_4-r_1}{\overset{r_2+r_1}{\underset{r_3-r_1}{\sim}}}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a^2-a\\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}\underset{-\frac{1}{2}r_3}{\overset{r_3-ar_4}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & a+1\end{pmatrix}\overset{r_4-r_3}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\underset{r_3\leftrightarrow r_4}{\overset{r_3-ar_4}{\sim}}\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 0 & a & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此 $a\neq 0$ 时，$R(\mathbf{A})=3$; $a=0$ 时，$R(\mathbf{A})=2$.

练习

求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -6 & 4 \\ 3 & 2 & m & 7 \end{pmatrix}$ 的秩.

答案

$m \neq -8$ 时，$R(\mathbf{A}) = 3$; $m = -8$ 时，$R(\mathbf{A}) = 2$.

例

求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的秩.

解

$$\mathbf{A} \underset{\substack{r_3-r_1 \\ r_4-ar_1}}{\overset{\substack{r_1\leftrightarrow r_4 \\ r_2-r_1}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \underset{r_4+r_3}{\overset{r_4+r_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & -(a+3)(a-1) \end{pmatrix}$$

因此 $a \neq 1, -3$ 时，$R(\mathbf{A})=4$; $a=-3$ 时，$R(\mathbf{A})=3$; $a=1$ 时，$R(\mathbf{A})=1$.

矩阵秩有另一种刻画方式. 矩阵 $\mathbf{A}$ 任取 k 行 k 列交叉得到的 k^2 个元素 (不改变位置次序) 形成的 k 阶方阵的行列式, 称为 $\mathbf{A}$ 的 k 阶子式. 例如 n 阶方阵的余子式是 $n-1$ 阶子式.

定理

设 $R(\mathbf{A})=r$, 则存在非零的 r 阶子式, 但所有的 $r+1$ 阶子式都是零.

根据行列式的拉普拉斯展开, 如果 $\mathbf{A}$ 的 k 阶子式均为零, 则 $k+1$ 阶子式也都是零. 因此 $\mathbf{A}$ 的任意 $s>r$ 阶子式都是零.

推论

(1) $R(\mathbf{A}) \geqslant r \iff \mathbf{A}$ 存在非零 r 阶子式.

(2) $R(\mathbf{A}) \leqslant r \iff \mathbf{A}$ 所有 $r+1$ 阶子式均为零.

(3) $R(\mathbf{A}) = r \implies \mathbf{A}$ 存在 $1,2,\ldots,r$ 阶非零子式.

证明

设 $\mathbf{B}=\mathbf{PA}$, 其中 $\mathbf{P}$ 是初等矩阵.

(1) 若 $\mathbf{P}=\mathbf{E}(i,j)$, 则 $\mathbf{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\mathbf{A}$ 的某个 k 阶子式, 最多相差 -1.

(2) 若 $\mathbf{P}=\mathbf{E}(i(a))$, 则 $\mathbf{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\mathbf{A}$ 的某个 k 阶子式或 a 倍.

(3) 若 $\mathbf{P}=\mathbf{E}(i,j(a))$, 则 $\mathbf{B}$ 的 k 阶子式总等于 $\mathbf{A}$ 的某个 k 阶子式.

因此如果 $\mathbf{A}$ 的 k 阶子式都是零, 则 $\mathbf{B}$ 的 k 阶子式也都是零.

由于 $\mathbf{P}^{-1}$ 也是初等矩阵, 因此反过来也成立. 对于 $\mathbf{B}=\mathbf{AP}$ 情形同理. 因此, 如果 $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$, 则 $\mathbf{A}$ 的 k 阶子式都是零 $\iff$ $\mathbf{B}$ 的 k 阶子式都是零.

对于标准型矩阵, 该定理显然成立. 因此该定理对任意矩阵都成立. □

矩阵秩的性质

命题

设 $\mathbf{A} \in M_{m\times n}$, 则 $0 \leqslant R(\mathbf{A}) \leqslant \min(m, n)$.

定义

(1) 若 $R(\mathbf{A}) = m$, 称 $\mathbf{A}$ 行满秩;

(2) 若 $R(\mathbf{A}) = n$, 称 $\mathbf{A}$ 列满秩;

(3) 若 $R(\mathbf{A}) = m = n$, 称 $\mathbf{A}$ 满秩.

矩阵秩的性质

命题

(1) $R(\mathbf{A}) = 0 \iff \mathbf{A} = \mathbf{O}$;

(2) n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 可逆 $\iff R(\mathbf{A}) = n$;

(3) $R(k\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}), k \neq 0$;

(4) $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \iff R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B})$;

(5) $R(\mathbf{AB}) \leqslant \min\big(R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\big)$;

(6) 若 $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times \ell} = \mathbf{O}$, 则 $R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) \leqslant n$;

(7) $R(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leqslant R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$;

(8) $\max\big(R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})\big) \leqslant R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leqslant R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$.

命题

(5) $R(\mathbf{AB}) \leqslant \min(R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B}))$.

证明

(5) 设 $\mathbf{A} = \mathbf{P}'\begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}\mathbf{Q}, \mathbf{B} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \mathbf{E}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}\mathbf{Q}'$, 其中 $\mathbf{P}, \mathbf{P}', \mathbf{Q}, \mathbf{Q}'$ 均可逆. 那么

$$R(\mathbf{AB}) = R(\begin{pmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}\mathbf{QP}\begin{pmatrix} \mathbf{E}_s & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{pmatrix}).$$

注意到右侧矩阵除前 r 行 s 列外均为零. 因此它的秩不超过 $\min(r, s)$. □

如果 $\mathbf{B}$ 行满秩, 则 $R(\mathbf{AB}) = R(\mathbf{A})$; 如果 $\mathbf{B}$ 列满秩, 则 $R(\mathbf{BA}) = R(\mathbf{A})$;

命题

(6) 若 $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times \ell}=\mathbf{O}$, 则 $R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B})\leqslant n$.

证明

(6) 设 $\mathbf{A}=\mathbf{P}'\begin{pmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}\mathbf{Q}, \mathbf{B}=\mathbf{P}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_s & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}\mathbf{Q}'$, 其中 $\mathbf{P},\mathbf{P}',\mathbf{Q},\mathbf{Q}'$ 均可逆. 那么

$$\mathbf{AB}=\mathbf{O}\implies\begin{pmatrix}\mathbf{E}_r & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}\mathbf{QP}\begin{pmatrix}\mathbf{E}_s & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{pmatrix}=\mathbf{O}.$$

设 $\mathbf{QP}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ \mathbf{C}_3 & \mathbf{C}_4\end{pmatrix}$ 其中 $\mathbf{C}_1$ 为 $(n-s)\times s$. 由于 $\mathbf{QP}$ 的前 r 行 s 列均为零, 因此若 $r+s>n$, 则 $\mathbf{C}_1=\mathbf{O}$ 且 $\mathbf{C}_3$ 的第一行为零, $|\mathbf{QP}|=\pm|\mathbf{C}_2|\cdot|\mathbf{C}_3|=0$, 矛盾! □

命题

(7) $R(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leqslant R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B})$.

证明

(7) 由于添加零行或零列不改变秩，因此不妨设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 都是方阵. 由于

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(\mathbf{E},\mathbf{O})\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \\ & \mathbf{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{O}\end{pmatrix},$$

因此 $R(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leqslant R\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \\ & \mathbf{B}\end{pmatrix}=R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B})$. □

命题

(8) $\max(R(\mathbf{A}),R(\mathbf{B}))\leqslant R(\mathbf{A},\mathbf{B})\leqslant R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B}).$

证明

(8) 不妨设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 是方阵，那么

$$\mathbf{A}=(\mathbf{A},\mathbf{B})\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{O}\end{pmatrix},\quad (\mathbf{A},\mathbf{B})=(\mathbf{E},\mathbf{E})\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\\&\mathbf{B}\end{pmatrix}.$$

因此 $R(\mathbf{A})\leqslant R(\mathbf{A},\mathbf{B}),R(\mathbf{A},\mathbf{B})\leqslant R\begin{pmatrix}\mathbf{A}&\\&\mathbf{B}\end{pmatrix}=R(\mathbf{A})+R(\mathbf{B}).$ □

练习

(1) 设 $R(\mathbf{A})=2, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$, 则 $R(\mathbf{AB})=$ __2__.

(2) 若 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵且 $R(\mathbf{AB})<R(\mathbf{B})$, 则 $|\mathbf{A}|=$ __0__.

(3) 若 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\2&0&5\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}3&4&1\\1&2&1\\4&6&t\end{pmatrix}, \mathbf{AX}=\mathbf{B}$ 且 $R(\mathbf{X})=2$, 则 $t=$ __2__.

(4) 若 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}t&2&3\\2&1&-1\\0&0&5\end{pmatrix}$ 且存在非零矩阵 $\mathbf{B}$ 使得 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$, 则 $t=$ __4__.

例

证明：若 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$，则 $R(\mathbf{A})+R(\mathbf{A}-\mathbf{E})=n$.

证明

由于 $\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{E})=\mathbf{A}^2-\mathbf{A}=\mathbf{O}$，因此 $R(\mathbf{A})+R(\mathbf{A}-\mathbf{E})\leqslant n$. 由于 $\mathbf{A}+(\mathbf{E}-\mathbf{A})=\mathbf{E}$，因此 $n=R(\mathbf{E})\leqslant R(\mathbf{A})+R(\mathbf{E}-\mathbf{A})$. 故 $R(\mathbf{A})+R(\mathbf{A}-\mathbf{E})=n$. □

例：矩阵秩性质的应用

例

证明：设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵，则

$$R(\mathbf{A}^*)=\begin{cases} n, & R(\mathbf{A})=n; \\ 1, & R(\mathbf{A})=n-1; \\ 0, & R(\mathbf{A})\leqslant n-2. \end{cases}$$

证明

(1) 若 $R(\mathbf{A})=n$，$\mathbf{A}$ 可逆，从而 $\mathbf{A}^*$ 可逆，$R(\mathbf{A}^*)=n$.

(2) 若 $R(\mathbf{A})=n-1$，由 $\mathbf{A}\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{E}=\mathbf{O}$ 可知 $R(\mathbf{A}^*)\leqslant 1$. 由于 $R(\mathbf{A})=n-1$，$\mathbf{A}$ 存在非零的 $n-1$ 子式，从而 $\mathbf{A}^*\neq\mathbf{O}$. 故 $R(\mathbf{A}^*)=1$.

(3) 若 $R(\mathbf{A})\leqslant n-2$，则 $\mathbf{A}$ 的 $n-1$ 子式均为零，从而 $\mathbf{A}^*=\mathbf{O}$. □

例：矩阵秩性质的应用

练习

(1) 设 $\alpha=(1,0,-1,2)^{\mathrm{T}},\beta=(0,1,0,2)^{\mathrm{T}}$, 则 $R(\alpha\beta^{\mathrm{T}})=$ __1__.

(2) 若 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ 且 $R(\mathbf{A}^*)=1$, 则 (B).

(A) $a\neq b, a+2b\neq 0$　　(B) $a\neq b, a+2b=0$

(C) $a=b, a\neq 0$　　(D) $a=b=0$

(3) 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为 n 阶方阵, 则 (A).

(A) $R(\mathbf{A},\mathbf{AB})=R(\mathbf{A})$　　(B) $R(\mathbf{A},\mathbf{BA})=R(\mathbf{A})$

(C) $R(\mathbf{A},\mathbf{AB})=\max(R(\mathbf{A}),R(\mathbf{B}))$　　(D) $R(\mathbf{AB})=R(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}})$

答案

存在 $\mathbf{AB}=\mathbf{O},\mathbf{BA}\neq\mathbf{O}$, D 错误. 令 $\mathbf{A}=\mathbf{E}$, C 错误. $(\mathbf{E},\mathbf{B})$ 行满秩, 选 A.

例：矩阵秩性质的应用

练习

(1) 设 $\mathbf{P}$ 为 3 阶非零矩阵，$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$ 且 $\mathbf{PQ}=\mathbf{O}$，则（ A ）.

(A) $t\neq 6$ 时，$R(\mathbf{P})=1$
(B) $t\neq 6$ 时，$R(\mathbf{P})=2$
(C) $t=6$ 时，$R(\mathbf{P})=1$
(D) $t=6$ 时，$R(\mathbf{P})=2$

(2) 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 均为 n 阶非零矩阵，且 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$，则 $R(\mathbf{A})$ 与 $R(\mathbf{B})$（ B ）.

(A) 必有一个等于 0
(B) 都小于 n
(C) 都等于 n
(D) 一个小于 n，一个等于 n

(3) 设 $\mathbf{A}\in M_{m\times n},\mathbf{B}\in M_{n\times m}$，则（ A ）.

(A) 当 $m>n$ 时，必有 $|\mathbf{AB}|=0$
(B) 当 $m>n$ 时，必有 $|\mathbf{AB}|\neq 0$
(C) 当 $m<n$ 时，必有 $|\mathbf{AB}|=0$
(D) 当 $m<n$ 时，必有 $|\mathbf{AB}|\neq 0$