



## 复变函数与积分变换

## 张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

# 第三章 复变函数的积分

- 1 复变函数积分的概念
- 2 柯西-古萨基本定理和复合闭路定理
- 3 原函数和不定积分
- 4 柯西积分公式
- 5 解析函数与调和函数的关系

## 第一节 复变函数积分的概念

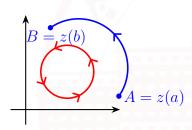
- 复变函数积分的定义
- 复变函数积分的计算法

#### 有向曲线

设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的 参数方程  $z=z(t), a \leqslant t \leqslant b$  除去有限个点之外都有非零导数.

固定它的一个方向,称为正方向,则我们得到一条有向曲线。和这条曲线方向相反的记作  $C^-$ ,它的方向被称为该曲线负方向

对于闭路,它的<mark>正方向总是指逆时针方向</mark>,负方向总是指顺时针 方向.以后我们不加说明的话默认是正方向.



#### 复变函数积分的定义

所谓的复变函数积分,本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数 w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y) 定义在区域 D 内,有向曲线 C 包含在 D 中. 形式地展开

$$f(z) dz = (u+iv)(dx+i dy) = (u dx - v dy) + i(u dy + v dx).$$

## 定义

如果下述右侧两个线积分均存在, 则定义

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

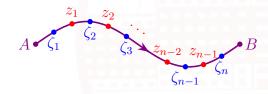
为函数 f(z) 沿曲线 C 的积分.

#### 复变函数积分的定义

当然,我们也可以像线积分那样通过分割来定义. 在曲线 C 上依次选择分点  $z_0 = A, z_1, \ldots, z_n = B$ . 然后在每一段弧上任取  $C_k \in \widehat{z_{k-1}z_k}$  并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

然后称  $n \to \infty$ , 分割的弧长  $\to 0$  时  $S_n$  的极限为复变函数积分. 这二者是等价的.



如果 C 是闭曲线,则该积分记为  $\oint_C f(z) dz$ . 此时该积分不依赖端点的选取.

如果 C 是实轴上的区间 [a,b] 且此时 f(z)=u(x), 则

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b u(x) dx$$

就是黎曼积分.

#### 积分存在的条件及其计算法

根据线积分的存在性条件可知:

#### 定理

如果 f(z) 是 D 内连续函数, C 是光滑曲线, 则  $\int_C f(z) \,\mathrm{d}z$  总存在.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设  $C: z(t) = x(t) + iy(t), a \le t \le b$  是一条光滑有向曲线, 正方向为 t 增加的方向. 那么  $\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t$ ,

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z)z'(t) dt.$$

如果 *C* 的正方向是 *t* 减少的方向,则需要交换右侧积分的上下限.如果 *C* 是逐段光滑的,则相应的积分就是各段的积分之和.以后我们只考虑逐段光滑曲线上的连续函数的积分.

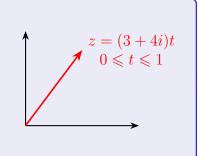
## 例

求  $\int_C z \, dz$ , 其中 C 是从原点到点 3 + 4i 的直线段.

## 解

由于 
$$z = (3+4i)t, 0 \leqslant t \leqslant 1$$
, 因此

$$\int_C z \, dz = \int_0^1 (3+4i)t \cdot (3+4i) \, dt$$
$$= (3+4i)^2 \int_0^1 t \, dt$$
$$= \frac{1}{2}(3+4i)^2 = -\frac{7}{2} + 12i.$$



例

求 
$$\int_C z \, dz$$
, 其中  $C$  是抛物线  $y = \frac{4}{9}x^2$  上从原点到点  $3+4i$  的曲线段.

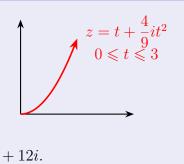
解

由于 
$$z = t + \frac{4}{9}it^2, 0 \leqslant t \leqslant 3$$
,因此

$$\int_C z \, dz = \int_0^3 \left( t + \frac{4}{9} i t^2 \right) \cdot \left( 1 + \frac{8}{9} i t \right) \, dt$$

$$= \int_0^3 \left( t + \frac{4}{3} i t^2 - \frac{32}{81} t^3 \right) \, dt$$

$$= \left( \frac{1}{2} t^2 + \frac{4}{9} i t^3 - \frac{8}{81} t^4 \right) \Big|_0^3 = -\frac{7}{2} + 12i.$$



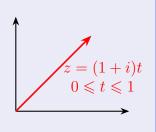
例

求  $\int_C \operatorname{Re} z \, dz$ , 其中 C 是从原点到点 1+i 的直线段.

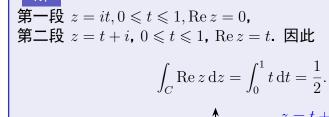
## 解

由于  $z=(1+i)t, 0 \leqslant t \leqslant 1$ , 因此  $\operatorname{Re} z=t$ ,

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t \cdot (1+i) \, dt$$
$$= (1+i) \int_0^1 t \, dt$$
$$= \frac{1+i}{2}.$$



求  $\int_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$ , 其中 C 是从原点到点 i 再到 1+i 的折线段.



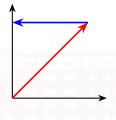
可以看出,即便起点和终点相同,沿不同路径  $f(z) = \operatorname{Re} z$  的积分也可能不同. 而 f(z) = z 的积分则只和起点和终点位置有关,与路径无关. 原因在于 f(z) = z 是处处解析的,我们以后会详加解释.

## 练习

求  $\int_C \operatorname{Im} z \, dz$ , 其中 C 是从原点沿 y = x 到点 1 + i 再到 i 的折线段.



$$-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$
.



例题: 计算复变函数沿圆周的积分

例

求  $\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$ , 其中 n 为整数.

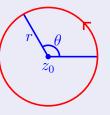
## 解

 $\overline{C:|z-z_0|}=r$  的参数方程为  $z=z_0+re^{i\theta}, 0\leqslant \theta\leqslant 2\pi$ . 于是  $\mathrm{d}z=ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$ .

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} i(re^{i\theta})^{-n} \,\mathrm{d}\theta$$
$$= ir^{-n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta.$$

当 n=0 时, 该积分值为  $2\pi i$ .

当 
$$n \neq 0$$
 时,该积分值 =  $\frac{ir^{-n}}{in}e^{-in\theta}\Big|_{0}^{2\pi} = 0$ .



所以

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

这个积分以后经常用到,它的特点是与积分圆周的圆心和半径都无关.

#### 定理

- (1)  $\int_C f(z) dz = \int_{C_-} f(z) dz$ .
- (2)  $\int_C kf(z) dz = k \int_C f(z) dz$ .
- (3)  $\int_C [f(z) \pm g(z)] dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz$ .
- (4) (长大不等式) 设 C 的长度为 L, f(z) 在 C 上满足  $|f(z)| \leq M$ , 则

$$\left| \int_C f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \int_C |f(z)| \, \mathrm{d}s \leqslant ML.$$



#### 证明

#### 我们来证明下(4). 由

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k) \Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)| \Delta s_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k$$

可知

$$\left| \int_C f(z) \, \mathrm{d}z \right| \le \int_C |f(z)| \, \mathrm{d}s \le ML.$$

长大不等式常常用于证明等式: 估算一个积分和一个具体的数值之差不超过任意给定的  $\varepsilon$ , 从而得到二者相等.

例题: 长大不等式的应用\*

例

设 
$$f(z)$$
 在  $z \neq a$  处连续,且  $\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = k$ ,则 
$$\lim_{r \to 0} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz = 2\pi i k.$$

### - 证明

 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  使得当  $|z - a| < \delta$  时,  $|(z - a)f(z) - k| \leqslant \varepsilon$ . 当  $0 < r < \delta$  时,

$$\left| \oint_{|z-a|=r} f(z) \, \mathrm{d}z - 2\pi i k \right| = \left| \oint_{|z-a|=r} \left[ f(z) - \frac{k}{z-a} \right] \, \mathrm{d}z \right|$$

$$= \left| \oint_{|z-a|=r} \frac{(z-a)f(z) - k}{z-a} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi \varepsilon.$$

由于  $\varepsilon$  是任意的. 因此命题得证.

# 第二节 柯西-古萨基本定理和复合闭路定理

- 柯西-古萨基本定理
- ■复合闭路定理

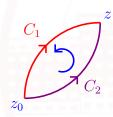
### 积分路径无关与闭路积分

## 观察下方的两条曲线 $C_1, C_2$ . 设 $C = C_1^- + C_2$ . 可以看出

$$\int_{C_1} f(z) \, \mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z) \, \mathrm{d}z \iff$$

$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz = 0.$$

所以 f(z) 的积分只与起点终点有关  $\iff f(z)$  绕任意闭路的积分为零.



#### 积分路径无关的函数特点

上一节中我们计算了 f(z)=z,  $\operatorname{Re} z$ ,  $\frac{1}{z-z_0}$  的积分. 其中

- f(z)=z 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \frac{1}{z z_0}$  有奇点  $z_0$ , 沿绕  $z_0$  闭路的积分非零;
- $f(z) = \operatorname{Re} z$  处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分非零).
- 由此可见函数沿闭路积分为零,与函数在闭路内部是否解析有关.

### 柯西-古萨基本定理: 推导

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 f(z) 在闭区域  $\overline{D} = D \cup C$  上解析, 即存在区域  $B \supseteq \overline{D}$  使得 f(z) 在 B 上解析. 为了简便假设 f'(z) 连续, 则

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy).$$

由格林公式和 C-R 方程可知

$$\oint_C f(z) dz = -\iint_D (v_x + u_y) dx dy + i \iint_D (u_x - v_y) dx dy = 0.$$

#### 柯西-古萨基本定理

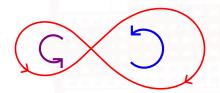
#### 柯西-古萨基本定理

设 f(z) 在闭路 C 上连续, C 内部解析, 则  $\oint_C f(z) dz = 0$ .

#### 推论

设 f(z) 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条闭合曲线 (可以不是闭路), 则  $\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0$ .

这是因为即使不是简单曲线也可以拆分为一些简单曲线.



## 典型例题: 柯西-古萨基本定理计算积分

求  $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} \,\mathrm{d}z.$ 

由于  $\frac{1}{2z-3}$  在  $|z|\leqslant 1$  上解析,因此由柯西-古萨基本定理

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} \, \mathrm{d}z = 0.$$

求  $\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z^2 + z} \, \mathrm{d}z = \underline{0}$ .

例题: 柯西-古萨基本定理计算积分

例

求 
$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} \, \mathrm{d}z.$$

解

注意到 
$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right)$$
. 由于  $\frac{1}{z}, \frac{1}{z+i}$  在

$$|z-i| \le \frac{1}{2}$$
 上解析,因此由柯西-古萨基本定理

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z} dz = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+i} dz = 0,$$

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)} dz = -\frac{1}{2} \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i} dz = -\pi i.$$

## 不解析函数绕闭路积分\*

解析函数绕闭路的积分一般用留数定理算,本例只作为柯西-古萨基本定理的一个应用.

当 f(z) 不解析时,我们也可以使用格林公式。例如 f(z) = Re z = x,则

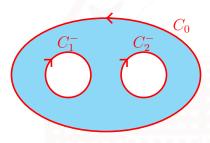
$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = -\iint_{|z|<1} (v_x + u_y) dx dy + i \iint_{|z|<1} (u_x - v_y) dx dy$$

$$= i \iint_{|z|<1} dx dy = \pi i.$$

 $v_x + u_y = 0, \quad u_x - v_y = 1,$ 

#### 多连通域边界与复合闭路

设  $C_0, C_1, \ldots, C_n$  是 n+1 条简单闭曲线,  $C_1, \ldots, C_n$  每一条都包含在其它闭路的外部, 而且它们都包含在  $C_0$  的内部. 这样它们围成了一个多连通区域 D, 它的边界称为一个复合闭路  $C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-$ . 沿着 C 前进的点, D 总在它的左侧, 所以这就是它的正方向.



## 复合闭路定理

设 f(z) 在复合闭路  $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$  及其所围成的多连通区域内解析. 则

$$\oint_{C_2} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz.$$

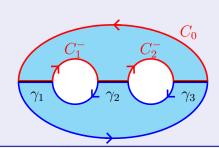
#### 复合闭路定理

#### 证明

以曲线  $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n+1}$  把  $C_0,C_1,\ldots,C_n$  连接起来,则它们把区域 D 分成了两个单连通域  $D_1,D_2$ . 对  $D_1$  和  $D_2$  的边界应用柯西积分定理并相加,则  $\gamma_i$  对应的部分正好相互抵消,因此

$$\oint_{C_0} f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz - \dots - \oint_{C_n} f(z) dz = 0.$$

于是定理得证.



例

证明对于任意闭路 C,  $\int_C (z-a)^n dz = 0$ ,  $n \neq -1$  为整数.

### 证明

当  $n \ge 0$  时,  $(z-a)^n$  处处解析, 因此  $\int_C (z-a)^n dz = 0$ .

当  $n \le -2$  时, 如果 a 不在 C 的内部, 则  $(z-a)^n$  在 C 及其内部解析. 由柯西积分定理,  $\int_C (z-a)^n \, \mathrm{d}z = 0$ .

如果 a 在 C 的内部,则在 C 的内部取一个以 A 为圆心的圆周  $C_1$ . 由复合闭路定理以及上一节的结论

$$\int_C (z-a)^n \, dz = \int_{C_1} (z-a)^n \, dz = 0.$$

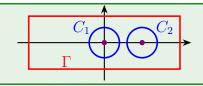
同理可知, 当 a 在 C 的内部时,

$$\int_C \frac{1}{z-a} \, \mathrm{d}z = 2\pi i.$$

例

求  $\int_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$ , 其中  $\Gamma$  是由

 $2 \pm i$ ,  $-2 \pm i$  形成的矩形闭路.



#### 解

函数  $\frac{2z-1}{z^2-z}$  在  $\Gamma$  内有两个奇点 z=0,1. 设  $C_1,C_2$  如图所示,由

## 复合闭路定理

$$\oint_{\Gamma} \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz = \oint_{C_1} \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz + \oint_{C_2} \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z - 1} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z - 1} dz$$

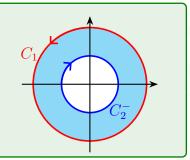
$$= 2\pi i + 0 + 0 + 2\pi i = 4\pi i.$$

例

求  $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} dz$ , 其中

$$\Gamma=C_1+C_2^-$$
 ,

$$C_1: |z| = 2, C_2: |z| = 1.$$



#### 解

函数  $\frac{e^z}{z}$  在  $C_1, C_2$  围城的圆环域内解析.

由复合闭路定理可知  $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} dz = 0.$ 

# 第三节 原函数和不定积分

- ■原函数
- 牛顿-莱布尼兹定理

#### 原函数的存在性

设 f(z) 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条起于  $z_0$  终于 z 的曲线. 由柯西-古萨基本定理可知, 积分  $\int_C f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta$  与路径无关, 只与  $z_0,z$  有关. 因此我们也将其记为  $\int_{z_0}^z f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta$ .

对于任意固定的  $z_0 \in D$ , 函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta$$

定义了一个单值函数.

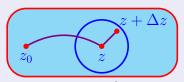
## 定理

F(z) 是 D 内的解析函数,且 F'(z)=f(z).

#### 原函数的存在性

### 证明

以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K, 取  $|\Delta z|$  小于 K 的半径. 那么



$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta = \int_{z}^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta.$$

#### 容易知道

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z) \, d\zeta = f(z) \int_{z}^{z+\Delta z} \, d\zeta = f(z) \Delta z.$$

我们需要比较上述两个积分, 其中 z 到  $z + \Delta z$  取直线.

#### 原函数的存在性

#### **续证**

由于 f(z) 解析, 因此连续.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  使得当  $|\zeta - z| < \delta$  时, z 落在 K 中且  $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ . 当  $|\Delta z| < \delta$  时, 由长大不等式

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \int_{z}^{z + \Delta z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\Delta z} \, \mathrm{d}\zeta \right|$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \cdot |\Delta z| = \varepsilon.$$

由于  $\varepsilon$  是任意的, 因此

$$f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = F'(z).$$



#### 原函数的存在性

#### 牛顿-莱布尼兹定理

设 f(z) 在单连通区域 D 上解析,  $z_1$  至  $z_2$  的积分路径落在 D 内,则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_1) - F(z_2), \quad \mathbf{\sharp \Phi} \quad F'(z) = f(z).$$

如果 D 上的解析函数 G(z) 满足 G'(z)=f(z), 则称 G(z) 是 f(z) 的一个原函数. 由于导函数为 0 的解析函数只能是常值函数, 因此  $G(z)=\int_{z_0}^z f(z)\,\mathrm{d}z+C$ . 我们称之为 f(z) 的不定积分, 记为

$$\int f(z) dz$$
.

复变函数和实变函数的牛顿-莱布尼兹定理的差异在哪呢?复变情形要求是<mark>单连通区域上解析函数</mark>,实变情形要求是<mark>闭区间上连续函数</mark>.

#### 解

由于 f(z)=z 处处解析,且  $\int z\,\mathrm{d}z=rac{1}{2}z^2+C$ ,因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2} (z_1^2 - z_0^2).$$

因此之前的例子中  $\int_0^{3+4i} z \, dz = -\frac{7}{2} + 12i$ , 而无论从 0 到 3+4i 的路径如何.

例

求  $\int_0^{\pi i} z \cos z^2 \, \mathrm{d}z.$ 

解

由于  $f(z) = z \cos z^2$  处处解析,且

$$\int z \cos z^2 dz = \frac{1}{2} \int \cos z^2 dz^2 = \frac{1}{2} \sin z^2 + C,$$

因此

$$\int_0^{\pi i} z \cos z^2 dz = \frac{1}{2} \sin z^2 \Big|_0^{\pi i} = -\frac{1}{2} \sin \pi^2.$$

这里我们使用了凑微分法.

求 
$$\int_0^i z \cos z \, \mathrm{d}z.$$

## 解

由于  $f(z) = z \cos z$  处处解析,且

$$\int z \cos z \, dz = \int z \, d(\sin z) = z \sin z - \int \sin z \, dz$$
$$= z \sin z + \cos z + C,$$

因此

$$\int_0^t z \cos z \, dz = (z \sin z + \cos z) \Big|_0^t$$
$$= i \sin i + \cos i - 1 = e^{-1} - 1.$$

变函数的积分 ▶ 3 原函数和不定积分 ▶ B 华顿

这里我们使用了分部积分法.

例

求  $\int_{1}^{1+i} ze^z \, \mathrm{d}z$ .

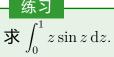
## 解

由于  $f(z) = ze^z$  处处解析,且

$$\int ze^z \, dz = \int z \, de^z = ze^z - \int e^z \, dz = (z - 1)e^z + c,$$

因此

$$\int_{1}^{1+i} ze^{z} dz = (z-1)e^{z} \Big|_{1}^{1+i}$$
$$= ie^{1+i} = e(-\sin 1 + i\cos 1).$$



## 答案

 $\sin 1 - \cos 1$ .

例

设 C 为沿着 |z|=1 从 1 到 i 的逆时针圆弧, 求  $\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$ .

#### 解

函数  $f(z) = \frac{\ln(z+1)}{z+1}$  在  $\operatorname{Re} z \leqslant -1$  外的单连通区域解析.

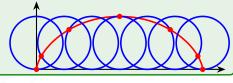
$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \int \ln(z+1) d[\ln(z+1)] = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) + c.$$

因此 
$$\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) \Big|_1^i = \frac{1}{2} \left[ \ln^2(1+i) - \ln^2 2 \right]$$
$$= \frac{1}{2} \left[ \left( \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i \right)^2 - \ln^2 2 \right] = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8} \ln^2 2 + \frac{\pi \ln 2}{8}i.$$

#### 例

求 
$$\int_C (2z^2 + 8z + 1) dz$$
, 其中  $C$  是连接  $0$  到  $2\pi a$  的摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta), \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$



#### 解

## 由于 $f(z) = 2z^2 + 8z + 1$ 处处解析, 因此

$$\int_C (2z^2 + 8z + 1) \, dz = \int_0^{2\pi a} (2z^2 + 8z + 1) \, dz$$
$$= \left(\frac{2}{3}z^3 + 4z^2 + z\right) \Big|_0^{2\pi a} = \frac{16}{3}\pi^3 a^3 + 16\pi^2 a^2 + 2\pi a.$$

# 第四节 柯西积分公式

- ■柯西积分公式
- 高阶导数的柯西积分公式

柯西积分定理是解析函数理论的基础, 但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

#### 柯西积分公式

设

- 函数 f(z) 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析,
- $z_0 \in D$ ,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z.$$

如果  $z_0 \notin D$ , 由柯西-古萨基本定理, 右侧的积分是 0.

#### 解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设  $z=z_0+Re^{i\theta}$ , 则  $\mathrm{d}z=iRe^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$ ,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

#### 柯西积分公式: 证明

## 证明

由连续性可知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  使得当  $|z - z_0| \leq \delta$  时,  $z \in D$  且  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ . 设  $\Gamma : |z - z_0| = \delta$ . 由复合闭路定理和长大不等式

$$\left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right|$$

$$= \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \right| = \left| \oint_\Gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi \delta = 2\pi \varepsilon.$$

由 
$$\varepsilon$$
 的任意性可知  $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$ .

求积分  $\oint_C g(z) dz$  时, 如果 g(z) 在 C 内部只有一个奇点  $z_0$ , 且  $(z-z_0)g(z)$  解析, 那么我们就可以使用柯西积分公式来计算该积分.

## 例

求  $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} \, \mathrm{d}z.$ 

#### 一解

函数  $\sin z$  处处解析. 取  $f(z) = \sin z, z_0 = 0$  并应用柯西积分公式得

$$\oint_{1+z} \frac{\sin z}{z} \, \mathrm{d}z = 2\pi i \sin z|_{z=0} = 0.$$

#### 典型例题: 柯西积分公式的应用

例

#### 解

由于函数  $e^z$  处处解析,取  $f(z)=e^z, z_0=1$  并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \, \mathrm{d}z = 2\pi i e^z|_{z=1} = 2\pi e i.$$

## 练习

 $\overline{\mathcal{R}} \oint_{|z|=2\pi} \frac{\cos z}{z-\pi} \, \mathrm{d}z = \underline{-2\pi i}.$ 

典型例题: 柯西积分公式的应用

设 
$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta$$
, 求  $f'(1+i)$ .

当 
$$|z|$$
  $<\sqrt{3}$  时,取  $g(\zeta)=3\zeta^2+7\zeta+1,\zeta_0=z$  并应用柯西积分公式得

式得

$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta$$
  
=  $2\pi i (3\zeta^2 + 7\zeta + 1)|_{\zeta = z} = 2\pi i (3z^2 + 7z + 1).$ 

因此.

$$f'(z) = 2\pi i (6z + 7),$$
  
$$f'(1+i) = 2\pi i (13+6i) = -12\pi + 26\pi i.$$

注意当  $|z| > \sqrt{3}$  时,  $f(z) \equiv 0$ .

#### 典型例题: 柯西积分公式的应用

例

求  $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} \,\mathrm{d}z.$ 

#### 解

被积函数的奇点为  $0,\pm 1$ . 设  $C_1,C_2,C_3$  分别为绕 0,1,-1 的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} dz = \oint_{C_1 + C_2 + C_3} \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} dz$$

$$= 2\pi i \left[ \frac{e^z}{z^2 - 1} \Big|_{z=0} + \frac{e^z}{z(z+1)} \Big|_{z=1} + \frac{e^z}{z(z-1)} \Big|_{z=-1} \right] \xrightarrow{C_1}$$

$$= 2\pi i \left( -1 + \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = \pi i (e + e^{-1} - 2).$$

#### 高阶导数的柯西积分公式

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

#### 柯西积分公式

设函数 f(z) 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析,则对任意  $z_0 \in D$ ,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

类似于实变函数的泰勒展开, 我们推测解析函数也有泰勒展开

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots$$

这样由  $\oint_C \frac{1}{(z-z_0)^n} dz$  的性质可知右侧应当为  $f^{(n)}(z_0)$ .

#### 高阶导数的柯西积分公式

## ┰ 证明

先证明 n=1 的情形. 设  $\delta$  为  $z_0$  到 C 的最短距离. 当  $|h|<\delta$  时,  $z_0+h\in D$ . 由柯西积分公式,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \ f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - h} dz.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)} \, \mathrm{d}z.$$

当  $h \to 0$  时, 左边的极限是  $f'(z_0)$ . 因此我们只需要证明右边的极限等于  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$ .

#### 高阶导数的柯西积分公式

#### 续证

二者之差 = 
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} dz$$
. 由于  $f(z)$  在  $C$ 

上连续, 故存在 M 使得  $|f(z)| \leq M$ . 注意到  $z \in C$ ,  $|z - z_0| \geqslant \delta$ ,  $|z - z_0 - h| \geqslant \delta - |h|$ . 由长大不等式,

$$\left| \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当  $h \rightarrow 0$  时,它的极限为 0,因此 n=1 情形得证.

对于一般的 n, 我们通过归纳法将  $f^{(n)}(z_0)$  和  $f^{(n)}(z_0+h)$  表达为积分形式. 然后利用长大不等式证明  $h\to 0$  时,  $\frac{f^{(n)}(z_0+h)-f^{(n)}(z_0)}{}$  趋于积分公式右侧. 具体过程省略.

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的, 而是用高阶导数来计算积分的.

## 例

#### 解

由于  $\cos(\pi z)$  在 |z| < 2 处处解析, 因此由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} [\cos(\pi z)]^{(4)} \Big|_{z=1}$$
$$= \frac{2\pi i}{24} \cdot \pi^4 \cos \pi = -\frac{\pi^5 i}{12}.$$

#### 典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

求 
$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \, \mathrm{d}z.$$

$$e^z$$

 $\frac{e^{z}}{(z^2+1)^2}$  在 |z|<2 的奇点为  $z=\pm i$ . 取  $C_1,C_2$  为以 i,-i 为圆

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz.$$

#### 续解

### 由柯西积分公式,

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1} \left[ \frac{e^z}{(z+i)^2} \right]' \Big|_{z=i}$$

$$= 2\pi i \left[ \frac{e^z}{(z+i)^2} - \frac{2e^z}{(z+i)^3} \right] \Big|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i \pi}{2}.$$

类似地, 
$$\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{-(1+i)e^{-i\pi}}{2}$$
. 故

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{(1-i)e^i\pi}{2} + \frac{-(1+i)e^{-i\pi}}{2}$$
$$= \pi i (\sin 1 - \cos 1).$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求  $\oint_{|z|=1} z^n e^z dz$ , 其中 n 是整数.

#### 解

当  $n\geqslant 0$  时,  $z^ne^z$  处处解析. 由柯西-古萨基本定理,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \, \mathrm{d}z = 0.$$

当  $n \leqslant -1$  时,  $e^z$  处处解析. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \, dz = \frac{2\pi i}{(-n-1)!} (e^z)^{(-n-1)} \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(-n-1)!}.$$

例

求 
$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$$
 和  $\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$ .

解

$$\frac{1}{(1)}\frac{1}{(z-2)^2z^3}$$
 在  $|z-3|<2$  的奇点为  $z=2$ . 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1!} \left( \frac{1}{z^3} \right)' \bigg|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

#### 典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

#### 续解

(2)  $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$  在 |z-1| < 3 的奇点为 z=0,2. 取  $C_1,C_2$  分别为

以 0 和 2 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式,

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$$

$$= \frac{2\pi i}{2!} \left[ \frac{1}{(z-2)^2} \right]'' \Big|_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!} \left( \frac{1}{z^3} \right)' \Big|_{z=2} = 0.$$

## 练习

$$\oint_{|z-2i|=3} \frac{1}{z^2(z-i)} \, \mathrm{d}z = \underline{0}.$$

#### 莫累拉定理

## 例 (莫累拉定理)

设 f(z) 在单连通域 D 内连续,且对于 D 中任意闭路 C 都有  $\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0$ ,则 f(z) 在 D 内解析.

该定理可视作柯西-古萨基本定理的逆定理.

#### 证明

由题设可知 f(z) 的积分与路径无关. 固定  $z_0 \in D$ , 则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z) \, \mathrm{d}z$$

定义了 D 内的一个函数. 类似于原函数的证明可知 F'(z) = f(z). 故 f(z) 作为解析函数 F(z) 的导数也是解析的.

#### 解析函数与实函数的差异

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数 f(z) 只要在区域 D 中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在 D 中解析. 这一点与实变量函数有本质的区别.

同时我们也可以看出, 如果一个二元实函数 u(x,y) 是一个解析函数的实部或虚部, 则 u 也是具有任意阶偏导数. 这便引出了调和函数的概念.

# 第五节 解析函数与调和函数的关系

- ■调和函数
- 共轭调和函数

调和函数是一类重要的二元实变函数, 它和解析函数有着紧密的联系. 为了简便, 我们用  $u_{xx}$ ,  $u_{yy}$  来表示二阶偏导数.

#### 定义

如果二元实变函数 u(x,y) 在区域 D 内有二阶连续偏导数, 且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

则称 u(x,y) 是 D 内的调和函数.

#### 解析函数与调和函数的联系

#### 定理

区域 D 内解析函数 f(z) 的实部和虚部都是调和函数.

#### 证明

设 f(z) = u(x,y) + iv(x,y), 则 u,v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_x.$$

由于 f(z) 存在各阶导数, 因此  $u_x,u_y,v_x,v_y$  存在连续偏导数. 由 C-R 方程  $u_x=v_y,u_y=-v_x$ , 从而

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0.$$

#### 解析函数与调和函数的联系

反过来. 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

如果 u + iv 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的共轭调 和函数. 换言之  $u_x = v_y, u_y = -v_x$ . 显然 -u 是 v 的共轭调和函数.

- 定理 设 u(x,y) 是单连通域 D 内的调和函数,则线积分

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y \, dx + u_x \, dy + C$$

是 u 的共轭调和函数.

由此可知, 调和函数总具有任意阶连续偏导数.

#### 共轭调和函数的求法

如果 D 是多连通区域,则未必存在共轭调和函数. 例如  $\ln(x^2+y^2)$  是复平面去掉原点上的调和函数,但它并不是某个解析函数的实部. 事实上,它是  $2 \ln z$  的实部.

在实际计算中, 我们一般不用线积分来得到共轭调和函数, 而是 采用下述两种办法:

#### 偏积分法

通过  $v_y=u_x$  解得  $v=\varphi(x,y)+\psi(x)$ , 其中  $\psi(x)$  待定. 再代入  $u_y=-v_x$  中解出  $\psi(x)$ .

#### 不定积分法

对  $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$  求不定积分得到 f(z).

例

证明  $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$  是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

#### 解

由  $u_x = -6xy$ ,  $u_y = 3y^2 - 3x^2$  可知  $u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$ , 故 是调和函数.

由  $v_y=u_x=-6xy$  得  $v=-3xy^2+\psi(x)$ . 由  $v_x=-u_y=3x^2-3y^2$  得  $\psi'(x)=3x^2$ ,  $\psi(x)=x^3+C$ . 故  $v(x,y)=-3xy^2+x^3+C$ ,

$$f(z) = u + iv = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + C)$$
  
=  $i(x + iy)^3 + iC = i(z^3 + C)$ .

也可由  $f'(z) = u_x - iu_y = 3iz^2$  得  $f(z) = iz^3 + C$ .

## 例

## 求解析函数 f(z) 使得它的虚部为

$$v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y.$$

#### 解

由 
$$\overline{u_x} = v_y = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1$$
 得

$$u = e^x(x\cos y - y\sin y) + x + \psi(y).$$

由 
$$u_y = -v_x = -e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) - 1$$
 得

$$\psi'(y) = -1, \quad \psi(y) = -y + C.$$

## 续解

$$f(z) = u + iv$$

$$= e^{x}(x\cos y - y\sin y) + x - y + C$$

$$+ i\left[e^{x}(y\cos y + x\sin y) + x + y\right]$$

$$= ze^{z} + (1+i)z + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

也可由 
$$f'(z) = v_y + iv_x$$

$$= e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1$$

$$+ i \Big[ e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1 \Big]$$

$$= (z+1)e^z + 1 + i.$$

得  $f(z) = ze^z + (1+i)z + C$ .

#### 练习

证明  $u(x,y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$  是调和函数并求它的共轭调和函数.

### 答案

 $v(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + C$ .