复变函数与积分变换

张神星

2022 年秋季学期

- 1.2 **11**(1)(3)(5)
- 1.3 **5**
- 2.1 **2**(1)
- 2.2 **1**(1)(5)(9), **6**(1)(3)(6)
- 2.4 **3**(13)
- 2.5 **1**(5), **2**(1), **5**(1)(5)

积分变换的引入

- 在学习指数和对数的时候，我们了解到利用对数可以将乘除、幂次转化为加减、乘除.

积分变换的引入

- 在学习指数和对数的时候，我们了解到利用对数可以将乘除、幂次转化为加减、乘除.
- 例 计算 12345×67890.

- 在学习指数和对数的时候，我们了解到利用对数可以将乘除、幂次转化为加减、乘除.
- 例 计算 12345×67890.
- 解 通过查对数表得到

$$\ln 12345 \approx 9.4210, \qquad \ln 67890 \approx 11.1256.$$

- 在学习指数和对数的时候, 我们了解到利用对数可以将乘除、幂次转化为加减、乘除.
- 例 计算 12345×67890.
- 解 通过查对数表得到

$$\ln 12345 \approx 9.4210, \qquad \ln 67890 \approx 11.1256.$$

- 将二者相加并通过反查对数表得到原值

$$12345 \times 67890 \approx \exp(20.5466) \approx 8.3806 \times 10^8.$$

- 而对于函数而言，我们常常要解函数的微积分方程.

积分变换的引入

- 而对于函数而言，我们常常要解函数的微积分方程.
- 例 解微分方程

$$\begin{cases} y'' + y = t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

- 而对于函数而言，我们常常要解函数的微积分方程.
- 例 解微分方程

$$\begin{cases} y'' + y = t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

- 解 我们希望能找到一种函数变换 $\mathscr{L}$，使得它可以把函数的微分和积分变成代数运算，计算之后通过反变换 $\mathscr{L}^{-1}$ 求得原来的解.

- 而对于函数而言，我们常常要解函数的微积分方程.
- 例 解微分方程

$$\begin{cases} y'' + y = t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

- 解 我们希望能找到一种函数变换 $\mathscr{L}$，使得它可以把函数的微分和积分变成代数运算，计算之后通过反变换 $\mathscr{L}^{-1}$ 求得原来的解.
- 这个变换最常见的就是我们将要介绍的傅里叶变换和拉普拉斯变换.

傅里叶级数

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.

傅里叶级数

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.
- 我们知道 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 周期也是 T, 其中 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

傅里叶级数

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.
- 我们知道 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 周期也是 T, 其中 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
- 如果在 $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件:

傅里叶级数

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.
- 我们知道 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 周期也是 T, 其中 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
- 如果在 $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件:
  - 间断点只有有限多个, 且均为第一类间断点;

傅里叶级数

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.
- 我们知道 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 周期也是 T, 其中 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
- 如果在 $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件:
  - 间断点只有有限多个, 且均为第一类间断点;
  - 只有有限个极值点,

傅里叶级数

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.
- 我们知道 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 周期也是 T, 其中 $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
- 如果在 $\left[-\dfrac{T}{2}, \dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件:
  - 间断点只有有限多个, 且均为第一类间断点;
  - 只有有限个极值点,
- 则我们有傅里叶级数展开:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right).$$

- 我们先考虑周期函数的傅里叶级数展开.
- 设 $f(t)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 T 的可积实变函数.
- 我们知道 $\cos n\omega t$ 和 $\sin n\omega t$ 周期也是 T, 其中 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$.
- 如果在 $\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$ 上满足狄利克雷条件:
  - 间断点只有有限多个, 且均为第一类间断点;
  - 只有有限个极值点,
- 则我们有傅里叶级数展开:

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right).$$

- 当 t 是间断点时, 傅里叶级数的左侧需改为 $\dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}$.

傅里叶级数的复指数形式

- 现在我们来将其改写为复指数形式.

傅里叶级数的复指数形式

- 现在我们来将其改写为复指数形式.
- 物理中为了与电流 i 区分, 通常用 j 来表示虚数单位.

傅里叶级数的复指数形式

- 现在我们来将其改写为复指数形式.
- 物理中为了与电流 i 区分, 通常用 j 来表示虚数单位. 由

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

傅里叶级数的复指数形式

- 现在我们来将其改写为复指数形式.
- 物理中为了与电流 i 区分, 通常用 j 来表示虚数单位. 由

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

- 可知 $f(t)$ 的傅里叶级数展开可表为函数 $e^{jn\omega t}$ 的线性组合.

傅里叶级数的复指数形式

- 现在我们来将其改写为复指数形式.
- 物理中为了与电流 i 区分, 通常用 j 来表示虚数单位. 由

$$\cos x=\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

- 可知 $f(t)$ 的傅里叶级数展开可表为函数 $e^{jn\omega t}$ 的线性组合.
- 设 $f(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{jn\omega t}$, 则

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

傅里叶级数的复指数形式

- 现在我们来将其改写为复指数形式.
- 物理中为了与电流 i 区分, 通常用 j 来表示虚数单位. 由

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

- 可知 $f(t)$ 的傅里叶级数展开可表为函数 $e^{jn\omega t}$ 的线性组合.
- 设 $f(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}$, 则

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-jn\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

- 于是我们得到周期函数傅里叶级数的复指数形式:

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-jn\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{jn\omega t}.$$

从傅里叶级数到傅里叶积分公式

- 对于一般的函数 $f(t)$, 它未必是周期的.

从傅里叶级数到傅里叶积分公式

- 对于一般的函数 $f(t)$, 它未必是周期的.
- 我们考虑它在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上的限制, 并向两边扩展成一个周期函数 $f_T(t)$.

从傅里叶级数到傅里叶积分公式

- 对于一般的函数 $f(t)$, 它未必是周期的.
- 我们考虑它在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上的限制, 并向两边扩展成一个周期函数 $f_T(t)$.
- 设 $\omega_n = n\omega$, 则

$$f(t) = \lim_{T \to +\infty} f_T(t)$$

从傅里叶级数到傅里叶积分公式

- 对于一般的函数 $f(t)$, 它未必是周期的.
- 我们考虑它在 $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$ 上的限制, 并向两边扩展成一个周期函数 $f_T(t)$.
- 设 $\omega_n = n\omega$, 则

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{T\to+\infty} f_T(t) \\
&= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-j\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] e^{j\omega_n t}
\end{aligned}
$$

从傅里叶级数到傅里叶积分公式

- 对于一般的函数 $f(t)$, 它未必是周期的.
- 我们考虑它在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上的限制, 并向两边扩展成一个周期函数 $f_T(t)$.
- 设 $\omega_n = n\omega$, 则

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{T\to+\infty} f_T(t) \\
&= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-j\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] e^{j\omega_n t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega_n\to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-j\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] e^{j\omega_n t}(\omega_n - \omega_{n-1})
\end{aligned}
$$

从傅里叶级数到傅里叶积分公式

- 对于一般的函数 $f(t)$, 它未必是周期的.
- 我们考虑它在 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 上的限制, 并向两边扩展成一个周期函数 $f_T(t)$.
- 设 $\omega_n = n\omega$, 则

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \lim_{T\to+\infty} f_T(t) \\
&= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] e^{j\omega_n t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega_n\to 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau)e^{-j\omega_n\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] e^{j\omega_n t}(\omega_n - \omega_{n-1}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right] e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}
$$

定理 (傅里叶积分定理)

若在 $(-\infty,+\infty)$ 上绝对可积的函数 $f(t)$ 在任一有限区间上满足狄利克雷条件, 则

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega,\qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

对于 $f(t)$ 的间断点左边需要改成 $\dfrac{f(t+)+f(t-)}{2}$.

傅里叶积分公式

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega}$$ 原像函数

$\boxed{\text{傅里叶变换 } \mathscr{F}}$

$\boxed{\text{傅里叶逆变换 } \mathscr{F}^{-1}}$

$$\boxed{F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t}$$ 像函数

我们来看一下傅里叶积分公式的三角形式:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega$$

我们来看一下傅里叶积分公式的三角形式:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\omega \end{aligned}$$

我们来看一下傅里叶积分公式的三角形式:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)[\cos\omega(t-\tau)+j\sin\omega(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
$$

我们来看一下傅里叶积分公式的三角形式:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau\right]e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{j\omega(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)[\cos\omega(t-\tau)+j\sin\omega(t-\tau)]\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.
\end{aligned}
$$