线性代数

张神星 (合肥工业大学)

办公室：翡翠科教楼 *B1810* 东

Email：zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址：https://zhangshenxing.github.io

第三章　线性方程组

1 齐次线性方程组

第一节 齐次线性方程组

- 齐次线性方程组解的存在性
- 齐次线性方程组解的结构
- 非齐次线性方程组
- 向量组线性表示

线性方程组是指

$$\begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

它的系数形成了一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, 称为系数矩阵. 系数和常数项一起形成了一个 $m \times (n+1)$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 称为增广矩阵.

线性方程组等价于

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

其中

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}.$$

齐次线性方程组非零解的判定

当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 为零向量时, 称该线性方程组为齐次的; 否则称为非齐次的. 齐次线性方程组总有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解 $\iff$ $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关 $\iff$ $R(\boldsymbol{A})<n$.

定理

(1) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有 (无穷多) 非零解 $\iff$ $R(\boldsymbol{A})<n$;

(2) $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\iff$ $R(\boldsymbol{A})=n$.

推论

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵.

(1) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有 (无穷多) 非零解 $\iff$ $|\boldsymbol{A}|=0$;

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解 $\iff$ $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

推论

若方程个数小于未知元个数, 则齐次线性方程组有非零解.

例：齐次线性方程组非零解的判定

例

假设

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + ax_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解，求 a.

解

此时系数矩阵行列式为零:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & a & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7a + 21, \quad a = -3.$$

例：齐次线性方程组非零解的判定

例

若下述方程有非零解，求 a.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = 0 \\ -x_1 + (a-1)x_2 + (1-a)x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a-1 & 1-a \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & 2a+1 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩小于 3，因此 $a = 0$.

定义

称空间 $\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$ 的一组基为该齐次线性方程组的基础解系.

定理

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, R(\boldsymbol{A})=r$. 线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系包含 $n-r$ 个向量.

证明

通过交换未知元的位置 (相当于交换 $\boldsymbol{A}$ 列的位置), 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 化为行最简形

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} \\
\hline
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

续证

方程化为 $(\boldsymbol{E}_r, \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = -\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

于是 $\boldsymbol{C} := \begin{pmatrix} -\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{E}_{n-r} \end{pmatrix}$ 的 $n-r$ 个列向量生成了整个解空间. 由于 $R(\boldsymbol{C}) \geqslant R(\boldsymbol{E}_{n-r}) = n-r$, $\boldsymbol{C}$ 列满秩, 因此它的列向量就是一组基础解系. □

推论

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 任意 $n-r$ 个线性无关的解都是一组基础解系.

解齐次线性方程组的步骤:

(1) 将系数矩阵通过初等行变换化为行最简形.

(2) 去掉零行, 并取负矩阵, 得到 $r \times n$ 矩阵.

(3) 添加 $n-r$ 行 e_j^{T}, 使得对角元全都变成 ± 1, 其中 1 对应的是原来的非零行的第一个 1. 得到 $n \times n$ 矩阵.

(4) 去掉对角元是 1 对应的列, 得到 $n \times (n-r)$ 矩阵.

(5) 这个矩阵的列向量就是一组基础解系.

典型例题：求基础解系

例

解方程 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \qquad\quad = 0 \end{cases}$.

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & 3 \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

续解

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1/5 \\ 1 & 0 \\ 0 & -3/10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ -3/10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad k_1, k_2 \text{为任意常数}.$$

典型例题：求基础解系

练习

解方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

答案

$$\boldsymbol{A} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例：基础解系

例

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, R(\boldsymbol{A}) = n-3$, ξ_1,ξ_2,ξ_3 为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的三个线性无关的解. 那么 (B) 是该方程的一组基础解系.

(A) $\xi_1, -\xi_2, \xi_2-\xi_3, \xi_3-\xi_1$

(B) $\xi_1, \xi_1+\xi_2, \xi_1+\xi_2+\xi_3$

(C) ξ_1, ξ_2

(D) $\xi_1, \xi_1-\xi_2-\xi_3, \xi_1+\xi_2+\xi_3$

例

设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一组基础解系, 则 (D) 也是该方程的一组基础解系.

(A) 与 ξ_1,ξ_2,ξ_3 等价的一组向量

(B) 与 ξ_1,ξ_2,ξ_3 同秩的一组向量

(C) $\xi_1-\xi_2, \xi_2-\xi_3, \xi_3-\xi_1$

(D) $\xi_1+\xi_2, \xi_2+\xi_3, \xi_3+\xi_1$

例

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, $R(\boldsymbol{A}) = n-1$ 且每行元素之和为 0. 那么齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解为 $k(1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}, k$ 为任意常数.

例

设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times s} = \boldsymbol{O}$, 证明 $R(\boldsymbol{A}) + R(\boldsymbol{B}) \leqslant n$.

证明

由于 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解，因此 $R(\boldsymbol{B})$ 不超过该方程解空间的维数，即 $n - R(\boldsymbol{A})$. □

例

设 $\boldsymbol{A}$ 是实矩阵，证明 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A})$.

证明

若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，则

$$0=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(y_1,\dots,y_n)^{\mathrm{T}}$，则右侧为 $y_1^2+\cdots+y_n^2=0$，这迫使 $y_1=\cdots=y_n=0$，于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$. 所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\iff\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. 二者列数相同，因此二者秩相同. □

注意，对于复矩阵这并不成立，例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=0.$$

此时有 $R\left(\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)=R(\boldsymbol{A})$，其中 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 表示所有元素取共轭.

例

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\dots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$. 那么 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $\underline{\quad k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\alpha}_{n-1}, k_1,\dots,k_{n-1}}$ 为任意常数.

例

设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $R(\boldsymbol{A})=n-1$, 代数余子式 $A_{11}\neq 0$. 那么 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解为 $\underline{\quad k(A_{11},\dots,A_{1n})^{\mathrm{T}}, k_1,\dots,k_{n-1}}$ 为任意常数.

练习

若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 且存在 3 阶非零矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$, 则 (A).

(A) $a=1, |\boldsymbol{B}|=0$ (B) $a=-2, |\boldsymbol{B}|=0$ (C) $a=1, |\boldsymbol{B}|\neq 0$ (D) $a=-2, |\boldsymbol{B}|\neq 0$

例：基础解系

练习

若 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5)$ 且 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解为 $k_1(1,0,-1,0,1)^{\mathrm{T}}+k_2(1,0,0,1,-1)^{\mathrm{T}}$，则 A 列向量组的一个极大无关组是（ D ）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　(C) $\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$

解的存在性

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$. 对于非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, 若方程有解, 则 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组和 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的列向量组等价. 因此 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 的极大无关组. 从而 $\boldsymbol{b}$ 是 S 的线性组合, 也是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合.

定理

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有解 $\iff R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$.

推论

若 $R(\boldsymbol{A}_{m\times n}) = m$ (即 $\boldsymbol{A}$ 行满秩), 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 总有解.

若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$, 则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{b}$. 从而 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解. 设 $\boldsymbol{\xi}_1,\ldots,\boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一组基础解系, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+k_1\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r},$$

$k_1,\ldots,k_{n-r}$ 为任意常数.

定理

(1) 若 $R(\boldsymbol{A})<R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解;

(2) 若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解;

(3) 若 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

推论

若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\iff |\boldsymbol{A}|\neq 0$.

若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解或有无穷多解.

解非齐次线性方程组的步骤:

(1) 写: 写出方程组对应的增广矩阵 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$;

(2) 变: 通过初等行变换将其化为行最简形;

(3) 判: 通过行最简形判定方程是否有解;

(4) 解: 若系数矩阵部分零行对应的常数项均为零, 则方程有解. 其中特解为每个非零行对应未知元取对应常数项值, 其余取零.

(5) 通解 $=$ 特解 $+$ 对应的齐次方程的基础解系的线性组合.

典型例题：解非齐次线性方程组

例

解方程 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

解

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & -1 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & -4 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

于是 $R(\boldsymbol{A}) = 2 < R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$，无解.

典型例题：解非齐次线性方程组

例

解方程 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1/2 \end{cases}$

解

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & -1/2 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

于是 $R(\boldsymbol{A}) = 2 = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$，有解. 特解为 $(1/2, 0, 1/2, 0)^{\mathrm{T}}$.

续解

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{基础解系 } \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

通解为

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

k_1, k_2 为任意常数.

例

已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,4,0,2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,7,1,3)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\beta} = (3,10,b,4)^{\mathrm{T}}.$$

问 a, b 为何值时,

(1) β 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示;

(2) β 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示;

(3) β 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 不唯一线性表示.

解

即问 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解的情况，其中 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\4&7&1&10\\0&1&-1&b\\2&3&a&4\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&-1&1&-2\\0&1&-1&b\\0&-1&a&-2\end{array}\right)\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&0&3\\0&1&-1&2\\0&0&a-1&0\\0&0&0&b-2\end{array}\right)$$

于是可知 $R(\boldsymbol{A})$ 和 $R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，故

(1) $b\neq 2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示；

(2) $a\neq -1, b=2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示；

(3) $a=-1, b=2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 不唯一线性表示.

例：线性方程组解的性质

例

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}$, 则 (D).

(A) 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 仅有零解, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解
(B) 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解
(C) 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解
(D) 若 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 有无穷多解, 则 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 有非零解

例

设 $\boldsymbol{A} \in M_{m\times n}, R(\boldsymbol{A}) = m < n$, 则 (C).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的任意 m 个列向量线性无关
(B) $\boldsymbol{A}$ 的任意一个 m 阶子式不等于 0
(C) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 一定有无穷多个解
(D) $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换可化为 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{O})$ 的形式

例

a 为何值时，以下方程(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = a \end{cases}$$

注意处理带未知数的矩阵时，不宜实施 $\frac{1}{a+1}r_2, (a-2)r_3$ 等类似操作，因为其分母或系数可能为零.

解

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1+a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+a & a \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+a & 1 & 3 \\ 0 & -a & a & a-3 \\ 0 & a & a^2+2a & a^2+a \end{array}\right)$$

典型例题：解非齐次线性方程组

续解

$$\overset{r}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1+a & 1 & 3 \\ 0 & a & -a & 3-a \\ 0 & 0 & a^2+3a & a^2+2a-3 \end{array}\right).$$

(1) 若 $a \neq 0, -3$, 则 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 3$, 方程有唯一解.

(2) 若 $a = 0$, 则 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $R(\boldsymbol{A}) = 1 < R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = 2$, 方程无解.

续解

(3) 若 $a=-3$, 则 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=2$, 方程有无穷多解. 特解为 $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, 基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, 通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

k 为任意常数.

由于系数矩阵为 3 阶方阵, 也可以先通过 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 得到唯一解情形.

练习

a, b 为何值时，以下方程(1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + (a+2)x_3 + 4x_4 = b+3 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + (a+8)x_4 = 5 \end{cases}$$

典型例题：解非齐次线性方程组

答案

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{array}\right).$$

(1) $a \neq -1$ 时有唯一解；

(2) $a=-1, b \neq 0$ 时无解；

(3) $a=-1, b=0$ 时有无穷多解，通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例

设四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3. 已知 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}.$$

求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

解

由于 $R(\boldsymbol{A})=3$，因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只包含一个向量. 根据解的性质，

$$2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$$

是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，因此这是它的一个基础解系. 故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}_1+k(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}=(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}+k(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}.$$

例

已知 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，且 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解

由题设可知 $R(\boldsymbol{A})=3$，因此 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只包含一个向量. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 可知 $(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，因此这是它的一个基础解系. 注意到 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解，故通解为

$$\boldsymbol{x}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,1,0)^{\mathrm{T}}.$$

例：线性方程组解的性质

例

已知 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 (B)，k_1, k_2 为任意常数.

(A) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$　　(B) $2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$

(C) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$　　(D) $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$

例

已知 $\boldsymbol{\eta}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\eta}_2=(-3,2,2)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=-1 \\ 3x_1+x_2+4x_3=1 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$ 的两个解向量，则该方程组的通解为 $\underline{\quad (0,1,0)^{\mathrm{T}}+k(-3,1,2)^{\mathrm{T}} \quad}$.

若 $\boldsymbol{B}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示, 那么 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价, 因此 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

注意到 $\boldsymbol{A}$ 列向量生成的空间 V 是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 列向量生成的空间 W 的子空间. 若 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, 则 $\boldsymbol{A}$ 列向量组的一个极大无关组 S 也是 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 的极大无关组. 从而 $\boldsymbol{B}$ 的列向量都是 S 的线性组合, 也是 $\boldsymbol{A}$ 列向量的线性组合.

定理

(1) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示 $\iff$ $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 有解 $\iff$ $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

(2) $\boldsymbol{B}$ 的列向量组和 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价 $\iff$ $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = R(\boldsymbol{B})$.

例

证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 等价，其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

证明

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & - & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{r}{\sim} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

因此 $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = R(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) = 2.$ □