复变函数与积分变换

张神星

2022 年秋季学期

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

https://zhangshenxing.gitee.io/

第七章 复习课

复数代数运算

- 复数的四则运算, 求实部 $\operatorname{Re} z$, 虚部 $\operatorname{Im} z$, 模 $|z|$.

复数代数运算

- 复数的四则运算, 求实部 $\operatorname{Re} z$, 虚部 $\operatorname{Im} z$, 模 $|z|$.
- 复数的主辐角 $\arg z$:

- 复数的四则运算, 求实部 $\operatorname{Re} z$, 虚部 $\operatorname{Im} z$, 模 $|z|$.
- 复数的主辐角 $\arg z$:
  1. 当 z 在一四象限时, 主辐角为 $\arctan \dfrac{y}{x}$;

复数代数运算

- 复数的四则运算, 求实部 $\operatorname{Re} z$, 虚部 $\operatorname{Im} z$, 模 $|z|$.
- 复数的主辐角 $\arg z$:
  1. 当 z 在一四象限时, 主辐角为 $\arctan \dfrac{y}{x}$;
  2. 当 z 在第二象限时, 主辐角为 $\arctan \dfrac{y}{x} + \pi$;

复数代数运算

- 复数的四则运算, 求实部 $\operatorname{Re} z$, 虚部 $\operatorname{Im} z$, 模 $|z|$.
- 复数的主辐角 $\arg z$:
  1. 当 z 在一四象限时, 主辐角为 $\arctan \frac{y}{x}$;
  2. 当 z 在第二象限时, 主辐角为 $\arctan \frac{y}{x} + \pi$;
  3. 当 z 在第三象限时, 主辐角为 $\arctan \frac{y}{x} - \pi$.

复数代数运算

- 复数的四则运算, 求实部 $\operatorname{Re} z$, 虚部 $\operatorname{Im} z$, 模 $|z|$.
- 复数的主辐角 $\arg z$:
  1. 当 z 在一四象限时, 主辐角为 $\arctan \dfrac{y}{x}$;
  2. 当 z 在第二象限时, 主辐角为 $\arctan \dfrac{y}{x} + \pi$;
  3. 当 z 在第三象限时, 主辐角为 $\arctan \dfrac{y}{x} - \pi$.
- 复数的辐角 $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

复数代数运算

- 复数的四则运算, 求实部 $\mathrm{Re}\, z$, 虚部 $\mathrm{Im}\, z$, 模 $|z|$.
- 复数的主辐角 $\arg z$:
  1. 当 z 在一四象限时, 主辐角为 $\arctan \dfrac{y}{x}$;
  2. 当 z 在第二象限时, 主辐角为 $\arctan \dfrac{y}{x} + \pi$;
  3. 当 z 在第三象限时, 主辐角为 $\arctan \dfrac{y}{x} - \pi$.
- 复数的辐角 $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 共轭复数的有关等式和不等式.

- 复数的三角/指数形式主要是要求它的模和辐角.

复数的三角/指数形式

- 复数的三角/指数形式主要是要求它的模和辐角.
- 复数的乘法, 除法, 方幂的计算.

复数的三角/指数形式

- 复数的三角/指数形式主要是要求它的模和辐角.
- 复数的乘法, 除法, 方幂的计算.
- 以下等式成立 (Arg 可以换成 Ln)

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

- 复数的三角/指数形式主要是要求它的模和辐角.
- 复数的乘法, 除法, 方幂的计算.
- 以下等式成立 (Arg 可以换成 Ln)

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

- 以下等式未必成立 (arg 可以换成 ln)

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2,$$

$$\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z, \quad \operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z.$$

平面图形与区域

- 圆 $|z - z_0| = r$;

平面图形与区域

- 圆 $|z - z_0| = r$;
- 椭圆 $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a > |z_1 - z_2|$;

平面图形与区域

- 圆 $|z - z_0| = r$;
- 椭圆 $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a > |z_1 - z_2|$;
- 双曲线 $\big||z - z_1| - |z - z_2|\big| = 2a < |z_1 - z_2|$;

平面图形与区域

- 圆 $|z - z_0| = r$;
- 椭圆 $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a > |z_1 - z_2|$;
- 双曲线 $\big||z - z_1| - |z - z_2|\big| = 2a < |z_1 - z_2|$;
- 直线 $ax + by + c = 0$.

平面图形与区域

- 圆 $|z-z_0|=r$;
- 椭圆 $|z-z_1|+|z-z_2|=2a>|z_1-z_2|$;
- 双曲线 $\big||z-z_1|-|z-z_2|\big|=2a<|z_1-z_2|$;
- 直线 $ax+by+c=0$.
- 区域是连通的开集, 闭区域是区域和它的边界

平面图形与区域

- 圆 $|z-z_0|=r$;
- 椭圆 $|z-z_1|+|z-z_2|=2a>|z_1-z_2|$;
- 双曲线 $\big||z-z_1|-|z-z_2|\big|=2a<|z_1-z_2|$;
- 直线 $ax+by+c=0$.
- 区域是连通的开集, 闭区域是区域和它的边界
- 有界/无界, 单连通/多连通的判断.

- 集合在映照下的像.

复变函数

- 集合在映照下的像.
- 数列的极限: 实部虚部数列都收敛.

- 集合在映照下的像.
- 数列的极限: 实部虚部数列都收敛.
- 函数的极限: 会证明特定函数极限不存在, 例如
  $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}, z \to 0.$

- 集合在映照下的像.
- 数列的极限: 实部虚部数列都收敛.
- 函数的极限: 会证明特定函数极限不存在, 例如
  $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}, z \to 0.$
- 会计算函数的导数.

- 集合在映照下的像.
- 数列的极限: 实部虚部数列都收敛.
- 函数的极限: 会证明特定函数极限不存在, 例如
  $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}, z \to 0.$
- 会计算函数的导数.
- 可导蕴含连续.

- 集合在映照下的像.
- 数列的极限: 实部虚部数列都收敛.
- 函数的极限: 会证明特定函数极限不存在, 例如
  $$f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, z \to 0.$$
- 会计算函数的导数.
- 可导蕴含连续.
- 可导与解析的差别: 解析要求在一个邻域内都可导.

- $f(z) = u + iv$ 在 z_0 可导等价于 u, v 均可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

解析函数的判定: C-R 方程

- $f(z) = u + iv$ 在 z_0 可导等价于 u, v 均可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

- $f'(z) = u_x + iv_x$.

解析函数的判定: C-R 方程

- $f(z) = u + iv$ 在 z_0 可导等价于 u, v 均可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

- $f'(z) = u_x + iv_x$.
- 会计算函数的可导点和解析区域.

解析函数的判定: C-R 方程

- $f(z) = u + iv$ 在 z_0 可导等价于 u, v 均可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

- $f'(z) = u_x + iv_x$.
- 会计算函数的可导点和解析区域.

练习

求 $f(z) = 3x^2 - y^2 + 2xyi$ 的可导点和解析点.

解析函数的判定: C-R 方程

- $f(z) = u + iv$ 在 z_0 可导等价于 u, v 均可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

- $f'(z) = u_x + iv_x$.
- 会计算函数的可导点和解析区域.

练习

求 $f(z) = 3x^2 - y^2 + 2xyi$ 的可导点和解析点.

答案.

可导点为 $\operatorname{Re} z = 0$, 没有解析点.

初等函数

- 指数函数 $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

初等函数

- 指数函数 $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$.
- 指数函数的周期性, 解析性: 处处解析, 导数 $(\exp z)' = \exp z$.

初等函数

- 指数函数 $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$.
- 指数函数的周期性, 解析性: 处处解析, 导数 $(\exp z)' = \exp z$.
- 对数函数 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ 和主值 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ 的计算.

初等函数

- 指数函数 $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$.
- 指数函数的周期性, 解析性: 处处解析, 导数 $(\exp z)' = \exp z$.
- 对数函数 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ 和主值 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ 的计算.
- 主值的解析性: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数 $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$.

初等函数

- 指数函数 $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$.
- 指数函数的周期性, 解析性: 处处解析, 导数 $(\exp z)' = \exp z$.
- 对数函数 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ 和主值 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ 的计算.
- 主值的解析性: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数 $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$.
- 幂函数 $z^a = \exp(a\operatorname{Ln} z)$ 的计算, 主值 $\exp(a\ln z)$ 的计算.

初等函数

- 指数函数 $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$.
- 指数函数的周期性, 解析性: 处处解析, 导数 $(\exp z)' = \exp z$.
- 对数函数 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ 和主值 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ 的计算.
- 主值的解析性: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数 $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$.
- 幂函数 $z^a = \exp(a\operatorname{Ln} z)$ 的计算, 主值 $\exp(a\ln z)$ 的计算.
- 主值的解析性质: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数 $(z^a)' = az^{a-1}$.

初等函数

- 指数函数 $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$.
- 指数函数的周期性, 解析性: 处处解析, 导数 $(\exp z)' = \exp z$.
- 对数函数 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ 和主值 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ 的计算.
- 主值的解析性: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数 $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$.
- 幂函数 $z^a = \exp(a\operatorname{Ln} z)$ 的计算, 主值 $\exp(a\ln z)$ 的计算.
- 主值的解析性质: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数 $(z^a)' = az^{a-1}$.
- 三角函数的定义

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}.$$

初等函数

- 指数函数 $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$.
- 指数函数的周期性, 解析性: 处处解析, 导数 $(\exp z)' = \exp z$.
- 对数函数 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ 和主值 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ 的计算.
- 主值的解析性: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数 $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$.
- 幂函数 $z^a = \exp(a\operatorname{Ln} z)$ 的计算, 主值 $\exp(a\ln z)$ 的计算.
- 主值的解析性质: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数 $(z^a)' = az^{a-1}$.
- 三角函数的定义

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

- 无界性, 处处解析, 其它性质和实情形类似.

初等函数

- 指数函数 $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$.
- 指数函数的周期性, 解析性: 处处解析, 导数 $(\exp z)' = \exp z$.
- 对数函数 $\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ 和主值 $\ln z = \ln|z| + i\arg z$ 的计算.
- 主值的解析性: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数 $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$.
- 幂函数 $z^a = \exp(a\operatorname{Ln} z)$ 的计算, 主值 $\exp(a\ln z)$ 的计算.
- 主值的解析性质: 去掉负实轴和 0 后解析, 导数 $(z^a)' = az^{a-1}$.
- 三角函数的定义

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

- 无界性, 处处解析, 其它性质和实情形类似.
- 反三角函数的计算: 化成指数函数和对数函数来计算.

复变函数积分的计算

- 一般情形: 曲线 $C : z = z(t), a \leqslant t \leqslant b$, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

复变函数积分的计算

- 一般情形: 曲线 $C: z = z(t), a \leqslant t \leqslant b$, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- 如果 $f(z)$ 在一个单连通区域 D 上解析, 且 $z_1, z_2 \in D$,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1), \quad F(z) = \int f(z)\,\mathrm{d}z.$$

复变函数积分的计算

- 一般情形: 曲线 $C: z=z(t), a\leqslant t\leqslant b$, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- 如果 $f(z)$ 在一个单连通区域 D 上解析, 且 $z_1, z_2\in D$,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z=F(z_2)-F(z_1),\quad F(z)=\int f(z)\,\mathrm{d}z.$$

- 如果 $f(z)$ 在闭路 C 内只有奇点 $z_1,\dots,z_n$, 则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k].$$

- 一般情形: 曲线 $C: z=z(t), a \leqslant t \leqslant b$, 则
$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t.$$
- 如果 $f(z)$ 在一个单连通区域 D 上解析, 且 $z_1, z_2 \in D$,
$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1), \quad F(z) = \int f(z)\,\mathrm{d}z.$$
- 如果 $f(z)$ 在闭路 C 内只有奇点 $z_1, \ldots, z_n$, 则
$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$
- 会求原函数: 分部积分, 凑微分等.

复变函数积分的计算

- 一般情形: 曲线 $C: z=z(t), a \leqslant t \leqslant b$, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- 如果 $f(z)$ 在一个单连通区域 D 上解析, 且 $z_1, z_2 \in D$,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1), \quad F(z) = \int f(z)\,\mathrm{d}z.$$

- 如果 $f(z)$ 在闭路 C 内只有奇点 $z_1, \ldots, z_n$, 则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

- 会求原函数: 分部积分, 凑微分等.

练习

三类积分题, 自己多翻书.

- 柯西古萨基本定理: 若 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部解析, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

- 柯西古萨基本定理: 若 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部解析, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
- 复合闭路定理: 若 $f(z)$ 在复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 及其围成的多连通区域内解析, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, 即

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

- 柯西古萨基本定理: 若 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部解析, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.
- 复合闭路定理: 若 $f(z)$ 在复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 及其围成的多连通区域内解析, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, 即

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

- 柯西积分公式: 若 $f(z)$ 在闭路 C 及其内部解析, $z_0 \in D$, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z,$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

从 z_0 是 (至多) $n+1$ 阶极点看出.

奇点的判断

- 可去奇点: 从 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在得到.

奇点的判断

- 可去奇点: 从 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 存在得到.
- 本性奇点: 从洛朗展开的形式得到, 主要部分有无穷多项.

- 可去奇点: 从 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在得到.
- 本性奇点: 从洛朗展开的形式得到, 主要部分有无穷多项.
- 极点 (包括可去奇点): 从函数的各个部分的 order 计算得到, 例如 0 是 $\dfrac{(\sin z)^3(e^z-1)^4}{z^9}$ 的 2 阶极点, 0 是 $\dfrac{(\sin z)^3(e^z-1)^4}{z^5}$ 的可去奇点.

- 可去奇点: 从 $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 存在得到.
- 本性奇点: 从洛朗展开的形式得到, 主要部分有无穷多项.
- 极点 (包括可去奇点): 从函数的各个部分的 order 计算得到, 例如 0 是 $\frac{(\sin z)^3(e^z-1)^4}{z^9}$ 的 2 阶极点, 0 是 $\frac{(\sin z)^3(e^z-1)^4}{z^5}$ 的可去奇点.
- ∞ 的奇点类型: 看正幂次部分.

- 可去奇点处留数为 0, 本性奇点留数按照定义计算: c_{-1}.

- 可去奇点处留数为 0, 本性奇点留数按照定义计算: c_{-1}.
- (至多) n 阶极点

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)^n f(z)]^{(n-1)},$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z), \quad \text{若 } n = 1,$$

留数的计算

- 可去奇点处留数为 0, 本性奇点留数按照定义计算: c_{-1}.
- (至多) n 阶极点

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)^n f(z)]^{(n-1)},$$

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z), \quad \text{若 } n=1,$$

- 设 z_0 是 P 的解析点, 是 Q 的一阶零点, 则

$$\mathrm{Res}[\frac{P}{Q}, z_0] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

调和函数

- 定义: 二阶连续可导, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.

调和函数

- 定义: 二阶连续可导, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- 解析函数的实部和虚部都是调和函数, 单连通区域内调和函数是解析函数的实部或虚部.

调和函数

- 定义: 二阶连续可导, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- 解析函数的实部和虚部都是调和函数, 单连通区域内调和函数是解析函数的实部或虚部.
- 求共轭调和函数:

调和函数

- 定义: 二阶连续可导, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- 解析函数的实部和虚部都是调和函数, 单连通区域内调和函数是解析函数的实部或虚部.
- 求共轭调和函数:
  1. 偏积分法: 通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定.

调和函数

- 定义：二阶连续可导，$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- 解析函数的实部和虚部都是调和函数，单连通区域内调和函数是解析函数的实部或虚部.
- 求共轭调和函数：
  1. 偏积分法：通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$，其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y = -v_x$ 中解出 $\psi(x)$.

调和函数

- 定义: 二阶连续可导, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- 解析函数的实部和虚部都是调和函数, 单连通区域内调和函数是解析函数的实部或虚部.
- 求共轭调和函数:
  1. 偏积分法: 通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y = -v_x$ 中解出 $\psi(x)$.
  2. 不定积分法: 对 $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ 求不定积分得到 $f(z)$.

调和函数

- 定义：二阶连续可导，$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- 解析函数的实部和虚部都是调和函数，单连通区域内调和函数是解析函数的实部或虚部.
- 求共轭调和函数：
  1. 偏积分法：通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$，其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y = -v_x$ 中解出 $\psi(x)$.
  2. 不定积分法：对 $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ 求不定积分得到 $f(z)$.

练习

证明 $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

调和函数

- 定义: 二阶连续可导, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- 解析函数的实部和虚部都是调和函数, 单连通区域内调和函数是解析函数的实部或虚部.
- 求共轭调和函数:
  1. 偏积分法: 通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y = -v_x$ 中解出 $\psi(x)$.
  2. 不定积分法: 对 $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ 求不定积分得到 $f(z)$.

练习

证明 $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

答案.

$v(x, y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + C$.

- 级数收敛等价于实部和虚部级数都收敛.

级数

- 级数收敛等价于实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛等价于实部和虚部级数都绝对收敛.

- 级数收敛等价于实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛等价于实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中

- 级数收敛等价于实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛等价于实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中
  1. 比值法: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$;

- 级数收敛等价于实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛等价于实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中
  1. 比值法: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$;
  2. 根式法: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

级数

- 级数收敛等价于实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛等价于实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径 $R=\dfrac{1}{r}$, 其中
  1. 比值法: $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$;
  2. 根式法: $r=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$.
- 在收敛圆周上可能收敛可能发散.

级数

- 级数收敛等价于实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛等价于实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中
  1. 比值法: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$;
  2. 根式法: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.
- 在收敛圆周上可能收敛可能发散.
- 幂级数有理运算, 逐项求导, 逐项积分性质; 等比级数的展开.

级数

- 级数收敛等价于实部和虚部级数都收敛.
- 级数绝对收敛等价于实部和虚部级数都绝对收敛.
- 幂级数的收敛区域是一个圆域, 半径 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中
  1. 比值法: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$;
  2. 根式法: $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.
- 在收敛圆周上可能收敛可能发散.
- 幂级数有理运算, 逐项求导, 逐项积分性质; 等比级数的展开.
- 上述技巧在函数的幂级数/洛朗级数展开中的运用.

级数

- 幂级数的收敛域是圆域, 双边幂级数的收敛域是圆环域.

- 幂级数的收敛域是圆域, 双边幂级数的收敛域是圆环域.
- 泰勒展开与洛朗展开的成立范围的判定: 看奇点位置.

级数

- 幂级数的收敛域是圆域, 双边幂级数的收敛域是圆环域.
- 泰勒展开与洛朗展开的成立范围的判定: 看奇点位置.
- 有理函数的洛朗展开:

- 幂级数的收敛域是圆域, 双边幂级数的收敛域是圆环域.
- 泰勒展开与洛朗展开的成立范围的判定: 看奇点位置.
- 有理函数的洛朗展开:

练习

求 $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+1)}$ 在以 0 为圆心的不同圆环域的洛朗展开.

- 傅里叶变换:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega, \qquad F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

- 傅里叶变换:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega,\qquad F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

- 傅里叶变换的性质: 重点是位移性质和微分性质

$$\mathscr{F}[f(t-t_0)]=e^{-j\omega t_0}F(\omega),\quad \mathscr{F}^{-1}[F(\omega-\omega_0)]=e^{j\omega_0 t}f(t),$$

$$\mathscr{F}[f'(t)]=j\omega F(\omega),\quad \mathscr{F}^{-1}[F'(\omega)]=-jtf(t).$$

- $\mathscr{F}[\delta(t)] = 1, \mathscr{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}$,

傅里叶变换

- $\mathscr{F}[\delta(t)] = 1, \mathscr{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0}$,
- $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$.

傅里叶变换

- $\mathscr{F}[\delta(t)] = 1, \mathscr{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}$,
- $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$.
- $\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$,

傅里叶变换

- $\mathscr{F}[\delta(t)] = 1, \mathscr{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}$,
- $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$.
- $\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$,
- $\mathscr{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$.

傅里叶变换

- $\mathscr{F}[\delta(t)] = 1, \mathscr{F}[\delta(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0}$,
- $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$.
- $\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$,
- $\mathscr{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$.
- $\mathscr{F}[u(t)] = \dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$,

傅里叶变换

- $\mathscr{F}[\delta(t)] = 1, \mathscr{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}$,
- $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$.
- $\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$,
- $\mathscr{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$.
- $\mathscr{F}[u(t)] = \dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$,
- $\mathscr{F}[u(t)e^{-\beta t}] = \dfrac{1}{\beta + j\omega}$,

傅里叶变换

- $\mathscr{F}[\delta(t)] = 1, \mathscr{F}[\delta(t-t_0)] = e^{-j\omega t_0}$,
- $\mathscr{F}[1] = 2\pi\delta(\omega), \mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}] = 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$.
- $\mathscr{F}[\sin\omega_0 t] = j\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$,
- $\mathscr{F}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)]$.
- $\mathscr{F}[u(t)] = \dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$,
- $\mathscr{F}[u(t)e^{-\beta t}] = \dfrac{1}{\beta + j\omega}$,
- $\mathscr{F}[e^{-\beta t^2}] = \sqrt{\dfrac{\pi}{\beta}} e^{-\omega^2/(4\beta)}$

- 拉普拉斯变换:

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

- 拉普拉斯变换:

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

- 拉普拉斯变换的性质: 重点是延迟/位移性质和微分性质

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)]=e^{-st_0}F(s),\quad \mathscr{L}[e^{s_0t}f(t)]=F(s-s_0),$$

$$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0),$$

$$\mathscr{L}[f''(t)]=s^2F(s)-sf(0)-f'(0),$$

其它性质可由此类推.

- 拉普拉斯变换:

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

- 拉普拉斯变换的性质: 重点是延迟/位移性质和微分性质

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s), \quad \mathscr{L}[e^{s_0t}f(t)] = F(s-s_0),$$

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0),$$
$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

其它性质可由此类推.

- $\mathscr{L}[e^{kt}] = \dfrac{1}{s-k}, \mathscr{L}[1] = \dfrac{1}{s}, \mathscr{L}[t] = \dfrac{1}{s^2}.$

- 拉普拉斯变换:

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

- 拉普拉斯变换的性质: 重点是延迟/位移性质和微分性质

$$\mathscr{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s), \quad \mathscr{L}[e^{s_0 t}f(t)] = F(s-s_0),$$

$$\mathscr{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0),$$
$$\mathscr{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0),$$

其它性质可由此类推.

- $\mathscr{L}[e^{kt}] = \dfrac{1}{s-k}, \mathscr{L}[1] = \dfrac{1}{s}, \mathscr{L}[t] = \dfrac{1}{s^2}.$
- $\mathscr{L}[\sin kt] = \dfrac{k}{s^2+k^2}, \mathscr{L}[\cos kt] = \dfrac{s}{s^2+k^2}.$

拉普拉斯变换

- 解微分方程: 两边同时做 $\mathscr{L}$, 利用微分性质求得 $X = \mathscr{L}[x]$, 然后利用常见函数的拉普拉斯变换反解得到 $x(t)$.

- 解微分方程: 两边同时做 $\mathscr{L}$, 利用微分性质求得 $X=\mathscr{L}[x]$, 然后利用常见函数的拉普拉斯变换反解得到 $x(t)$.

练习

解方程 $\begin{cases} x''(t)+4x(t)=3\cos t, \\ x(0)=x'(0)=0. \end{cases}$