复变函数在不同圆环域内洛朗展开的联系

袁志杰 [1]，　　张神星 [1]

（1. 合肥工业大学数学学院，合肥 230601）

[**摘　要**] 复变函数的洛朗级数展开是复变函数课程中的重要部分，它将复变函数解析理论中的柯西积分公式与留数定理相衔接，揭示了孤立奇点处的性质与其级数展开的关系。本文通过在教学中的观察和理论研究，给出了解析函数在相同圆心的不同圆环域内洛朗级数的联系。特别地，这一理论研究在洛朗展开的计算中也有着丰富的应用。

[**关键词**] 复变函数；解析函数；洛朗级数

[**中图分类号**] O174.5

The Relations of Laurent Series of Complex Functions in Different Annuli

YUAN Zhijie[1]，ZHANG Shenxing[1]

（1. School of Mathematics，Hefei University of Technology，Hefei 230601，China）

Abstract: The Laurent expansions of complex functions constitute a vital component of the course on Complex Functions. This expansion reveals the connection between the Cauchy integral formula and the residue theorem within the analytic theory of complex functions，while also illuminating the properties at isolated singularities and the Laurent expansion itself. Through careful observations and insights gained from teaching，this paper presents the relationship between Laurent series in different annuli，all sharing the same center point for analytic functions. Furthermore，exploring this theory has numerous applications in the practical calculation of Laurent expansions.

Key words: complex function; analytic function; Laurent series

0　引　言

复变函数论以微积分为基础，以解析函数为主要研究对象，研究复数域上的函数理论、性质及其应用。该课程对学生形成逻辑思维、创新思维具有重要的支撑作用，同时该课程具有广泛的应用性，直接影响着学生后继课程如信号与系统、通信原理等课程的学习。而这门课程也存在着过于抽象繁琐的特点，因此在教学中需要把内容讲懂、讲透。

复变函数中复级数是研究和表示解析函数的重要方法。解析函数在不同的定义域内的幂级数分为泰勒级数和洛朗级数，而洛朗级数是揭示解析函数在孤立奇点性质的重要手段，是连接柯西积分公式理论到留数定理应用的重要桥梁。复变函数的理论和应用大多围绕孤立奇点处进行研究，而其中非本性奇点情形占据最主要的地位。学生在学习这部分内容时，往往会感到困惑，尤其是不太明白洛朗级数与泰勒级数的区别以及洛朗展开的意义。相应地，教师应该向学生强调洛朗展开的条件，以及举多个例子展示函数如何进行洛朗展开。

复变函数在圆环域内的洛朗展开的计算方法在不同教材中均有详细介绍。本文作者在教学和研究中发现，同一复变函数在不同的圆环域内的洛朗展开其形式上往往有着一定的关联。本文将通过进一步的

[**基金项目**] 安徽省教学改革项目（2022jyxm1232）；国家自然科学基金（12001510）；中央高校基础科研业务费（JZ2023HGTB0217）

研究，对这一现象进行描述并揭示其背后的原因，得到了一些理论上的结果，并给出它的一些应用。这些理论和应用不仅有助于复变函数课程师生加深对洛朗级数理论的理解，也对实际计算有着一定的帮助作用。

1 一般的解析函数情形

本文假定复变函数 $f(z)$ 在所讨论的圆环域内解析，这是函数能够展开为复级数的充要条件。对于以 z_0 为圆心的圆环域内，$f(z)$ 可以展成为相应的洛朗级数：

定理 1 ([1])**.** 设 $f(z)$ 在圆环域 $r<|z-z_0|<R$ 内解析，其中 $0\leqslant r<R\leqslant+\infty$。则 $f(z)$ 有如下洛朗展开

$$f(z)=\sum_n a_n(z-z_0)^n,\quad r<|z-z_0|<R.$$

其中 $a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_K\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z$，$K$ 是圆环域 $r<|z-z_0|<R$ 内包含着 z_0 的闭路。

现在考虑 $f(z)$ 在不同的圆环内的洛朗展开系数的联系，即有如下结论成立。

定理 2. 设 $f(z)$ 在两个不同的圆环域内有洛朗展开

$$f(z)=\sum_n a_n(z-z_0)^n,\quad r_1<|z-z_0|<R_1,$$
$$f(z)=\sum_n b_n(z-z_0)^n,\quad r_2<|z-z_0|<R_2,$$

其中 $0\leqslant r_1<R_1\leqslant r_2<R_2\leqslant+\infty$。如果 $f(z)$ 在 $R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant r_2$ 内没有本性奇点，则 $c_n=b_n-a_n$ 作为整数 $n\in\mathbb{Z}$ 的函数，是有限多个形如 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$ 函数的线性组合，其中 λ 是 $f(z)$ 在 $R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant r_2$ 的极点，α 是小于 λ 的阶的非负整数。

证. 设 $\lambda\neq z_0$ 是 $f(z)$ 在 $R_1\leqslant|z-z_0|\leqslant r_2$ 内的奇点，C_λ 是只包含 λ 这一个奇点的闭路。

(i) λ 是可去奇点，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\lambda}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z=\operatorname{Res}\left[\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}},\lambda\right]=0.$$

(ii) λ 是 m 阶极点。令 $g(z)=(z-\lambda)^m f(z)$，那么 λ 是 $g(z)$ 的可去奇点。通过补充定义 $g(\lambda)=\lim\limits_{z\to\lambda}(z-\lambda)^m f(z)$，可使 $g(z)$ 在 λ 处解析。于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\lambda}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z&=\operatorname{Res}\Big[\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}},\lambda\Big]\\&=\frac{1}{(m-1)!}\left[\frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right]^{(m-1)}\Bigg|_{z=\lambda}\\&=\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{(n+1)\cdots(n+k)}{(\lambda-z_0)^{n+1+k}}g^{(m-1-k)}(\lambda).\end{aligned}$$

设 K_1, K_2 分别是圆环域 $r_1 < |z-z_0| < R_1$ 和 $r_2 < |z-z_0| < R_2$ 内包含着 z_0 的闭路。由复合闭路定理

$$\begin{aligned} c_n = b_n - a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2+K_1^-} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z \\ &= \sum_{\lambda} \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_\lambda} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\,z \\ &= \sum_{\lambda} \frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k \frac{(n+1)\cdots(n+k)}{(\lambda-z_0)^{n+1+k}} g^{(m-1-k)}(\lambda), \end{aligned}$$

其中 λ 取遍 $f(z)$ 在 $R_1 \leqslant |z-z_0| \leqslant r_2$ 内的所有极点。因此 c_n 是形如 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$ 函数的线性组合，α 是小于 λ 的阶的非负整数。 □

由定理 2，只要找到 $f(z)$ 在 $R_1 \leqslant |z-z_0| \leqslant r_2$ 内的所有极点 λ，那么 $f(z)$ 在两个圆环域 $r_1 < |z-z_0| < R_1$ 和 $r_2 < |z-z_0| < R_2$ 内洛朗级数的系数之差 c_n 就是形如 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$ 的线性组合，组合系数主要取决于 $g(z) = (z-\lambda)^m f(z)$ 的各阶导数在极点 λ 处的值，与具体的极点有关。

注 1. 事实上，形如 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$ 的线性组合形成的数列 $\{c_n\}$ 是所谓的线性递推数列，即存在常数 $s_0, \ldots, s_{k-1} \in \mathbb{C}, s_0 \neq 0$，使得

$$c_{n+k} = s_0 c_n + s_1 c_{n+1} + \cdots + s_{k-1} c_{n+k-1}.$$

对于定理 2 的情形，它的特征多项式就是

$$p(T) = T^k - s_{k-1}T^{k-1} - \cdots - s_1 T - s_0 = \prod_{\lambda}\left(T - \frac{1}{\lambda - z_0}\right)^{m_\lambda},$$

其中 m_λ 是 λ 的阶，λ 取遍 $f(z)$ 在 $R_1 \leqslant |z-z_0| \leqslant r_2$ 内的所有极点。

2 有理函数情形

对于有理函数 $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ 而言，除了 $q(z)$ 的零点外均是解析的，即有理函数 $f(z)$ 在整个复平面上的奇点只可能是可去奇点或极点，它在圆环域内的洛朗展开通常是通过结合有理函数的分解定理来给出的。

引理 1. 有理函数 $f(x)$ 在圆环域 $r < |z-z_0| < R$ 内的洛朗展开一定形如

$$f(z) = P(z) + \sum_{n \geqslant n_0} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n < n_0} b_n (z-z_0)^n, \quad r < |z-z_0| < R.$$

这里

(i) n_0 是任意一个固定的整数；

(ii) $P(z)$ 是一个只有有限项的双边幂级数；

(iii) 作为 $n \in \mathbb{Z}$ 的函数，a_n 是形如 $\lambda^{-n}n^\alpha$ 函数的线性组合，其中 λ 是 $f(z)$ 在 $|z-z_0| \geqslant R$ 上的极点，α 是小于 λ 的阶的非负整数；

(iv) 作为 $n \in \mathbb{Z}$ 的函数，b_n 是形如 $\lambda^{-n}n^\alpha$ 函数的线性组合，其中 λ 是 $f(z)$ 在 $|z-z_0| \leqslant r$ 上的极点，α 是小于 λ 的阶的非负整数。

证. 不妨设 $z_0=0$。由有理函数的分解定理知，$f(z)$ 可以表为一多项式和若干形如 $\dfrac{1}{(z-\lambda)^m}$ 的函数的线性组合，其中 λ 取遍 $f(z)$ 在复平面上的极点。而多项式显然是关于 z 的有限项幂级数，因此只需看 $\dfrac{1}{(z-\lambda)^m}$ 的洛朗级数展开。

(i) $\lambda=0$。此时 $\dfrac{1}{z^m}$ 已经是 $r<|z|<R$ 内的洛朗展开，显然满足命题中要求的形式。

(ii) $\lambda\neq 0$。此时 $\dfrac{1}{(z-\lambda)^m}=\dfrac{(-1)^m}{(m-1)!}\left(\dfrac{1}{\lambda-z}\right)^{(m-1)}$。

(a) 当 $|\lambda|\leqslant r$ 时，$\dfrac{1}{\lambda-z}=-\sum_{n=-1}^{-\infty}\lambda^{-n-1}z^n$。于是

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(z-\lambda)^m}&=-\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\left(\sum_{n=-1}^{-\infty}\lambda^{-n-1}z^n\right)^{(m-1)}\\
&=-\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\sum_{n=-1}^{-\infty}\lambda^{-n-1}n(n-1)\cdots(n-m+2)z^{n-m+1}\\
&=-\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\sum_{n=-m}^{-\infty}\lambda^{-n-m}(n+m-1)\cdots(n+2)(n+1)z^n.
\end{aligned}
$$

(b) 当 $|\lambda|\geqslant R$ 时，$\dfrac{1}{\lambda-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n-1}z^n$。于是

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(z-\lambda)^m}&=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\left(\sum_{n=0}^{-\infty}\lambda^{-n-1}z^n\right)^{(m-1)}\\
&=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\sum_{n=0}^{-\infty}\lambda^{-n-1}n(n-1)\cdots(n-m+2)z^{n-m+1}\\
&=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\sum_{n=0}^{-\infty}\lambda^{-n-m}(n+m-1)\cdots(n+2)(n+1)z^n.
\end{aligned}
$$

故 $f(z)$ 在 $r<|z|<R$ 内的洛朗级数可以写为命题中要求的形式。 □

值得注意的是引理中的 n_0 是任意的，不同的 n_0 会影响引理中 $P(z)$ 的形式，但是不会影响 a_n 和 b_n 的表达式。

现在可以从定理 2 和引理 1 得到如下结论，即从 $f(z)$ 的任一圆环域内的洛朗展开得到其在每一个圆环域内的洛朗展开。

定理 3. 设 $f(z)$ 是一个有理函数，且有如引理 1 所述的洛朗展开

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n<n_0}b_n(z-z_0)^n,\quad r<|z-z_0|<R.$$

(i) 如果 $R'\leqslant r$，那么 $f(z)$ 在其解析的圆环域 $r'<|z-z_0|<R'$ 内有洛朗展开

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}(a_n-b_n+c_n)(z-z_0)^n+\sum_{n<n_0}c_n(z-z_0)^n,$$

其中 c_n 是 b_n 写成形如 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$ 函数的线性组合时，其中位于 $|z-z_0|\leqslant r'$ 内的 λ 对应的项。

(ii) 如果 $r'\geqslant R$，那么 $f(z)$ 在其解析的圆环域 $r'<|z-z_0|<R'$ 内有洛朗展开

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n<n_0}(b_n-a_n+c_n)(z-z_0)^n,$$

其中 c_n 是 a_n 写成形如 $n^\alpha(\lambda-z_0)^{-n}$ 函数的线性组合时，其中位于 $|z-z_0|\geqslant R'$ 内的 λ 对应的项。

证. (i) 不妨设 $z_0=0$. 由定理 2和题设可知 $f(z)$ 在 $r'<|z|<R'$ 内的洛朗展开具有形式

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}(a_n+d_n)z^n+\sum_{n<n_0}(b_n+d_n)z^n,$$

其中 d_n 是形如 $n^\alpha\lambda^{-n}$ 函数的线性组合。根据引理 1，b_n 是形如 $n^\alpha\lambda^{-n}$ 函数的线性组合，其中 λ 是 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 上的极点；b_n+d_n 是形如 $n^\alpha\lambda^{-n}$ 函数的线性组合，其中 λ 是 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r'$ 上的极点。因此 d_n 是形如 $n^\alpha\lambda^{-n}$ 函数的线性组合，其中 λ 是 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant r$ 上的极点。同理，通过考虑 a_n 和 a_n+d_n 的形式可知 d_n 是形如 $n^\alpha\lambda^{-n}$ 函数的线性组合，其中 λ 是 $f(z)$ 在 $|z|\geqslant R'$ 上的极点。又因为 b_n+d_n 不含 $R'\leqslant|z|\leqslant r$ 中 λ 对应的 $n^\alpha\lambda^{-n}$ 函数，因此 b_n+d_n 就是 b_n 中位于 $|z|\leqslant r'$ 内的 λ 对应的项。

(ii) 同理可证。 □

特别地，当 $r'=0$ 或 $R'=+\infty$ 时，可以得到如下推论。

推论 1. 设 $f(z)$ 是一个有理函数，且如引理 1 所述的洛朗展开

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n<n_0}b_n(z-z_0)^n,\quad r<|z-z_0|<R.$$

那么对足够小的正数 δ 和足够大的正数 X，有洛朗展开

$$f(z)=P(z)+\sum_{n\geqslant n_0}(a_n-b_n)(z-z_0)^n,\quad 0<|z-z_0|<\delta;$$

$$f(z)=P(z)-\sum_{n<n_0}(a_n-b_n)(z-z_0)^n,\quad |z-z_0|>X.$$

3 应　用

通过定理 2 和定理 3 给出的解析函数在不同圆环域内洛朗展开系数联系的结论，可以用来帮助计算解析函数的洛朗展开。

例 1. 将 $f(z)=\dfrac{e^z}{2z-1}$ 在各个以 0 为圆心的圆环域内展开为洛朗级数。

解. (i) 利用级数乘法，$f(z)$ 在 $0<|z|<1/2$ 内洛朗展开为

$$f(z)=-\sum_{n\geqslant0}\frac{z^n}{n!}\cdot\sum_{n\geqslant0}(2z)^n=-\sum_{n\geqslant0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{n-k}}{k!}\right)z^n.$$

(ii) 在 $|z|>1/2$ 内根据定理 2，$\lambda=1/2, z_0=0, m=1, g(z)=e^z/2$，因此

$$c_n=\frac{g(1/2)}{(1/2)^{n+1}}=2^n\sqrt{e}.$$

故 $f(z)$ 在 $|z|>1/2$ 内洛朗展开为

$$f(z)=\sum_{n\leqslant-1}2^n\sqrt{e}z^n+\sum_{n\geqslant0}\left(2^n\sqrt{e}-\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{n-k}}{k!}\right)z^n.$$

形式上，右侧两个双边幂级数之差为

$$\sum_n c_nz^n=\sum_n 2^n\sqrt{e}z^n.$$

如果直接将 $\dfrac{1}{2z-1}$ 和 e^z 展开来计算 $f(z)$ 在 $|z|>1/2$ 内洛朗展开的话，会发现每一项的系数都是一个无穷求和，化简较为繁琐。

例 2. 将 $f(z)=\dfrac{z^3}{(z-1)(z-2)}$ 在各个以 0 为圆心的圆环域内展开为洛朗级数。

解. (i) 在 $0<|z|<1$ 内，

$$f(z)=z+3+\frac{1}{1-z}-\frac{8}{2-z}=3+z+\sum_{n\geqslant 0}(1-2^{-n+2})z^n.$$

(ii) 在 $1<|z|<2$ 内根据定理 3，c_n 是 $a_n=1-2^{-n+2}$ 中 $|\lambda|\geqslant 2$ 对应的项，即 $c_n=-2^{-n+1}$。从而在 $1<|z|<2$ 内，

$$f(z)=3+z-\sum_{n\geqslant 0}2^{-n+2}z^n-\sum_{n\leqslant -1}z^n.$$

(iii) 由定理 3 或推论 1 直接得到在 $|z|>2$ 内，

$$f(z)=3+z-\sum_{n\leqslant -1}(1-2^{-n+2})z^n.$$

例 3. 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-\eta)^2}+\dfrac{1}{z-\xi}(|\eta|>|xi|>0)$ 在各个以 0 为圆心的圆环域内展开为洛朗级数。

解. (i) 在 $0<|z|<|\xi|$ 内，

$$f(z)=\frac{1}{\eta}\left(\frac{1}{1-z/\eta}\right)'-\frac{1}{\xi}\cdot\frac{1}{1-z/\xi}=\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{n+1}{\eta^{n+2}}-\frac{1}{\xi^{n+1}}\right)z^n.$$

(ii) 在 $|\xi|<|z|<|\eta|$ 内根据定理 3，c_n 是 $a_n=\dfrac{n+1}{\eta^{n+2}}-\dfrac{1}{\xi^{n+1}}$ 中 $|\lambda|\geqslant|\eta|$ 对应的项，即 $c_n=\dfrac{n+1}{\eta^{n+2}}$。从而在 $|\xi|<|z|<|\eta|$ 内，

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+1}{\eta^{n+2}}z^n+\sum_{n\leqslant -1}\frac{1}{\xi^{n+1}}z^n.$$

(iii) 由定理 3 或推论 1 直接得到在 $|z|>2$ 内，

$$f(z)=-\sum_{n\leqslant -1}\left(\frac{n+1}{\eta^{n+2}}-\frac{1}{\xi^{n+1}}\right)z^n.$$

例 4. 将 $f(z)=\dfrac{120}{(z-1)(z^2-4)(z^2-9)}$ 在各个以 0 为圆心的圆环域内展开为洛朗级数。

解. (i) 在 $0<|z|<1$ 内，

$$f(z)=-\frac{5}{1-z}+\frac{2}{-2-z}+\frac{6}{2-z}-\frac{1}{-3-z}-\frac{2}{3-z}=\sum_{n\geqslant 0}\left(-5+\frac{2}{(-2)^{n+1}}+\frac{6}{2^{n+1}}-\frac{1}{(-3)^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n.$$

(ii) 在 $1<|z|<2$ 内根据定理 3，c_n 是 a_n 中 $|\lambda|\geqslant 2$ 对应的项，即

$$c_n=\frac{2}{(-2)^{n+1}}+\frac{6}{2^{n+1}}-\frac{1}{(-3)^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}.$$

从而在 $1<|z|<2$ 内，

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{2}{(-2)^{n+1}}+\frac{6}{2^{n+1}}-\frac{1}{(-3)^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n+\sum_{n\leqslant -1}5z^n.$$

(iii) 在 $2<|z|<3$ 内根据定理 3，c_n 是 a_n 中 $|\lambda|\geqslant 3$ 对应的项，即

$$c_n=-\frac{1}{(-3)^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}.$$

从而在 $2<|z|<3$ 内，

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0}\left(-\frac{1}{(-3)^{n+1}}-\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n+\sum_{n\leqslant -1}\left(5-\frac{2}{(-2)^{n+1}}-\frac{6}{2^{n+1}}\right)z^n.$$

(iv) 由定理 3 或推论 1 直接得到在 $|z|>3$ 内，

$$f(z)=\sum_{n\leqslant -1}\left(5-\frac{2}{(-2)^{n+1}}-\frac{6}{2^{n+1}}+\frac{1}{(-3)^{n+1}}+\frac{2}{3^{n+1}}\right)z^n.$$

4 结　论

在复变函数教学中，洛朗级数作为级数理论的重点和难点，在整个解析理论中起着承上启下的衔接作用。因此对于它的理解将直接影响到学生对于整个理论体系的理解。在通常的教学中，教师会强调解析函数在不同圆环域上洛朗展开的区别，却很少认识到解析函数在不同圆环域上洛朗展开的联系。本文通过教学实践中的观察和理论研究，揭示了解析函数在不同圆环域上洛朗展开系数的联系。更具体地说，解析函数在不同圆环域的洛朗级数与两个圆环中间区域内的极点有密切关系。特别地，对于有理函数而言，可以从其在任意圆环域中的洛朗展开，得到其在每一个圆环域内的洛朗展开形式。

在此基础上，本文还给出了一系列典型例子，来解释这一现象及其如何在具体例子中的应用。这些理论和示例研究不仅可以加深师生在复变函数教学中的理解和认识，在实际计算中也有着丰富的应用。

致谢 作者非常感谢相关文献对本文的启发。

[参　考　文　献]

[1] 钟玉泉．复变函数论 [M]．4 版．北京：高等教育出版社，2013:200-209.

[2] 史济怀，刘太顺．复变函数 [M]．1 版．合肥：中国科学技术大学出版社，1998:193-195.

[3] 孟华, 罗荣, 杨晓伟. 以问题为导向的复变函数教学与实践 [J]. 大学数学，2020，36(03).

[4] 任京男. 复变函数在极点邻域内的罗朗级数的系数公式 [J]. 上海海运学院学报，2001（04）:80-82.

[5] 冯小高. 有理复变函数分解成部分分式的一种方法 [J]. 高等数学研究,2013,16(01):32-33+45.