合肥工業大學
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

数学（下）

主讲教师: 汪任 (目前由张神星代课)
办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东
Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn
课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

第二章　极限和连续

❶ 数列的极限

第一节　数列的极限

- 极限的引入
- 极限的定义
- 极限的定义
- 收敛数列的性质

极限的引入

在数学中, 很多时候我们需要描述一个无限过程的变化行为.

极限的引入

在数学中, 很多时候我们需要描述一个无限过程的变化行为. 为了严格地描述并研究它们, 我们需要引入极限的概念.

极限的引入

在数学中, 很多时候我们需要描述一个无限过程的变化行为. 为了严格地描述并研究它们, 我们需要引入极限的概念.

例

极限的引入

在数学中, 很多时候我们需要描述一个无限过程的变化行为. 为了严格地描述并研究它们, 我们需要引入极限的概念.

例

- 双曲线 $xy = 1$ 的图像的渐近线是

极限的引入

在数学中, 很多时候我们需要描述一个无限过程的变化行为. 为了严格地描述并研究它们, 我们需要引入极限的概念.

例

- 双曲线 $xy = 1$ 的图像的渐近线是 $x = 0, y = 0$.

极限的引入

在数学中, 很多时候我们需要描述一个无限过程的变化行为. 为了严格地描述并研究它们, 我们需要引入极限的概念.

例

- 双曲线 $xy = 1$ 的图像的渐近线是 $x = 0, y = 0.$
- 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的图像的渐近线是

极限的引入

在数学中, 很多时候我们需要描述一个无限过程的变化行为. 为了严格地描述并研究它们, 我们需要引入极限的概念.

例

- 双曲线 $xy = 1$ 的图像的渐近线是 $x = 0, y = 0$.
- 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的图像的渐近线是 $y = 0$.

极限的引入

在数学中, 很多时候我们需要描述一个无限过程的变化行为. 为了严格地描述并研究它们, 我们需要引入极限的概念.

例

- 双曲线 $xy = 1$ 的图像的渐近线是 $x = 0, y = 0$.
- 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的图像的渐近线是 $y = 0$.
- 函数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ 的图像的渐近线是什么呢?

极限的引入

在数学中, 很多时候我们需要描述一个无限过程的变化行为. 为了严格地描述并研究它们, 我们需要引入极限的概念.

例

- 双曲线 $xy = 1$ 的图像的渐近线是 $x = 0, y = 0$.
- 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的图像的渐近线是 $y = 0$.
- 函数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ 的图像的渐近线是什么呢?

为了回答这个问题, 我们需要明确“渐近线”的含义.

极限的引入

在数学中, 很多时候我们需要描述一个无限过程的变化行为. 为了严格地描述并研究它们, 我们需要引入极限的概念.

例

- 双曲线 $xy = 1$ 的图像的渐近线是 $x = 0, y = 0$.
- 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的图像的渐近线是 $y = 0$.
- 函数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ 的图像的渐近线是什么呢?

为了回答这个问题, 我们需要明确 “渐近线” 的含义. 朴素地讲, 渐近线是指: 若曲线 C 上一点 M 沿曲线越来越无限接近无穷远时, 它到一条直线 l 的距离无限接近零, 则称直线 l 为曲线 C 的渐近线.

极限的引入

在数学中, 很多时候我们需要描述一个无限过程的变化行为. 为了严格地描述并研究它们, 我们需要引入极限的概念.

例

- 双曲线 $xy = 1$ 的图像的渐近线是 $x = 0, y = 0$.
- 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 的图像的渐近线是 $y = 0$.
- 函数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ 的图像的渐近线是什么呢?

为了回答这个问题, 我们需要明确 “渐近线” 的含义. 朴素地讲, 渐近线是指: 若曲线 C 上一点 M 沿曲线越来越无限接近无穷远时, 它到一条直线 l 的距离无限接近零, 则称直线 l 为曲线 C 的渐近线. 而想要严格地描述 “越来越无限接近” 的含义, 就需要引入极限的概念.

例

一个物体在空间中移动, 它的位置坐标是 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, 其中 s_1, s_2, s_3 都是时间 t 的函数.

.

例

一个物体在空间中移动, 它的位置坐标是 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, 其中 s_1, s_2, s_3 都是时间 t 的函数. 它在时间段 $[t, t']$ 内的平均速度定义为矢量

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \qquad v_i = \frac{s_i(t') - s_i(t)}{t' - t}.$$

.

例

一个物体在空间中移动, 它的位置坐标是 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, 其中 s_1, s_2, s_3 都是时间 t 的函数. 它在时间段 $[t, t']$ 内的平均速度定义为矢量

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \qquad v_i = \frac{s_i(t') - s_i(t)}{t' - t}.$$

当 t' 越来越无限接近 t 时, 平均速度会无限接近它在时刻 t 的瞬时速度.

例

一个物体在空间中移动, 它的位置坐标是 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, 其中 s_1, s_2, s_3 都是时间 t 的函数. 它在时间段 $[t, t']$ 内的平均速度定义为矢量

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \qquad v_i = \frac{s_i(t') - s_i(t)}{t' - t}.$$

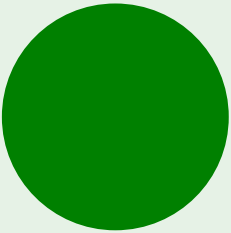
当 t' 越来越无限接近 t 时, 平均速度会无限接近它在时刻 t 的瞬时速度.

同样, 我们需要利用极限来准确地描述它.

极限的引入

例

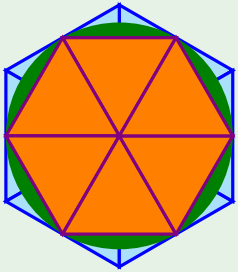
我国古代数学家刘徽为了计算圆周率 π, 采用无限逼近的思想建立了割圆法.



例

我国古代数学家刘徽为了计算圆周率 π, 采用无限逼近的思想建立了割圆法. 依次计算单位圆的内接和外切正 $3 \cdot 2^n = 6, 12, 24, 48, \ldots$ 边形的面积

$$A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}, \qquad B_n = 3 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n},$$

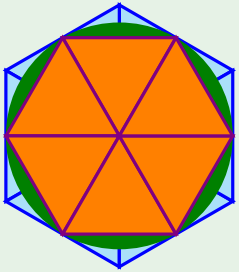


例

我国古代数学家刘徽为了计算圆周率 π, 采用无限逼近的思想建立了割圆法. 依次计算单位圆的内接和外切正 $3 \cdot 2^n = 6, 12, 24, 48, \ldots$ 边形的面积

$$A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}, \qquad B_n = 3 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n},$$

那么必定有 $A_n < \pi < B_n$.

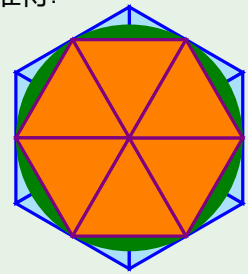


例

我国古代数学家刘徽为了计算圆周率 π, 采用无限逼近的思想建立了割圆法. 依次计算单位圆的内接和外切正 $3 \cdot 2^n = 6, 12, 24, 48, \ldots$ 边形的面积

$$A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}, \qquad B_n = 3 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n},$$

那么必定有 $A_n < \pi < B_n$. 这个数列的递推关系可以由半角公式推得:



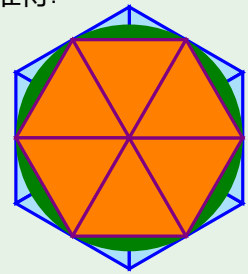
例

我国古代数学家刘徽为了计算圆周率 π, 采用无限逼近的思想建立了割圆法. 依次计算单位圆的内接和外切正 $3 \cdot 2^n = 6, 12, 24, 48, \ldots$ 边形的面积

$$A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}, \qquad B_n = 3 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n},$$

那么必定有 $A_n < \pi < B_n$. 这个数列的递推关系可以由半角公式推得:

n	A_n	B_n



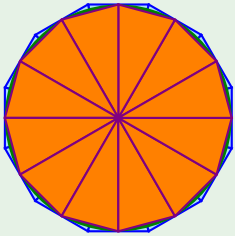
例

我国古代数学家刘徽为了计算圆周率 π, 采用无限逼近的思想建立了割圆法. 依次计算单位圆的内接和外切正 $3 \cdot 2^n = 6, 12, 24, 48, \ldots$ 边形的面积

$$A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}, \qquad B_n = 3 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n},$$

那么必定有 $A_n < \pi < B_n$. 这个数列的递推关系可以由半角公式推得:

n	A_n	B_n
2	3.00000000	3.21539031



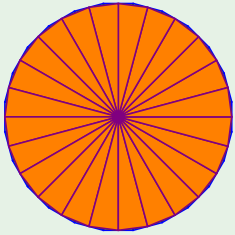
例

我国古代数学家刘徽为了计算圆周率 π, 采用无限逼近的思想建立了割圆法. 依次计算单位圆的内接和外切正 $3 \cdot 2^n = 6, 12, 24, 48, \ldots$ 边形的面积

$$A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}, \qquad B_n = 3 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n},$$

那么必定有 $A_n < \pi < B_n$. 这个数列的递推关系可以由半角公式推得:

n	A_n	B_n
2	3.00000000	3.21539031
3	3.10582854	3.15965994



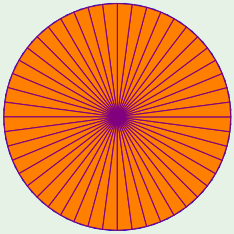
例

我国古代数学家刘徽为了计算圆周率 π, 采用无限逼近的思想建立了割圆法. 依次计算单位圆的内接和外切正 $3 \cdot 2^n = 6, 12, 24, 48, \ldots$ 边形的面积

$$A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}, \qquad B_n = 3 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n},$$

那么必定有 $A_n < \pi < B_n$. 这个数列的递推关系可以由半角公式推得:

n	A_n	B_n
2	3.00000000	3.21539031
3	3.10582854	3.15965994
4	3.13262861	3.14608622



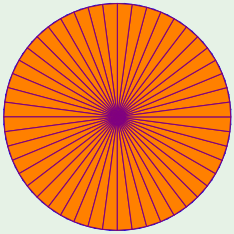
例

我国古代数学家刘徽为了计算圆周率 π, 采用无限逼近的思想建立了割圆法. 依次计算单位圆的内接和外切正 $3 \cdot 2^n = 6, 12, 24, 48, \ldots$ 边形的面积

$$A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}, \qquad B_n = 3 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n},$$

那么必定有 $A_n < \pi < B_n$. 这个数列的递推关系可以由半角公式推得:

n	A_n	B_n
2	3.00000000	3.21539031
3	3.10582854	3.15965994
4	3.13262861	3.14608622
12	3.14159251	3.14159272



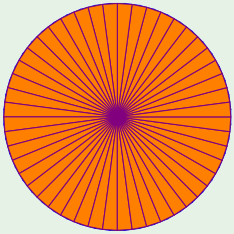
例

我国古代数学家刘徽为了计算圆周率 π, 采用无限逼近的思想建立了割圆法. 依次计算单位圆的内接和外切正 $3 \cdot 2^n = 6, 12, 24, 48, \ldots$ 边形的面积

$$A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}, \qquad B_n = 3 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n},$$

那么必定有 $A_n < \pi < B_n$. 这个数列的递推关系可以由半角公式推得:

n	A_n	B_n
2	3.00000000	3.21539031
3	3.10582854	3.15965994
4	3.13262861	3.14608622
12	3.14159251	3.14159272
13	3.14159262	3.14159267



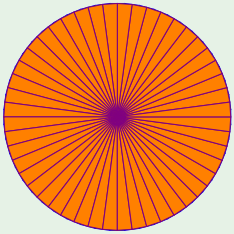
例

我国古代数学家刘徽为了计算圆周率 π, 采用无限逼近的思想建立了割圆法. 依次计算单位圆的内接和外切正 $3 \cdot 2^n = 6, 12, 24, 48, \ldots$ 边形的面积

$$A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}, \qquad B_n = 3 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n},$$

那么必定有 $A_n < \pi < B_n$. 这个数列的递推关系可以由半角公式推得:

n	A_n	B_n
2	3.00000000	3.21539031
3	3.10582854	3.15965994
4	3.13262861	3.14608622
12	3.14159251	3.14159272
13	3.14159262	3.14159267



为什么这样下去会越来越趋近于 π 呢? 这也需要用到极限的概念.

数列极限的定义

极限可以按如下方式理解:

极限的朴素定义

给定一个函数 $y = f(x)$.
当 x 越来越无限接近于某个状态时, y 无限接近某个值 A, 则 A 就是 $y = f(x)$ 关于这个极限过程的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to\text{某个状态}} f(x) = A$ 或 $y \to A(x \to \text{某个状态})$.

数列极限的定义

极限可以按如下方式理解:

极限过程: $x \to$ 某个状态

极限的朴素定义

给定一个函数 $y = f(x)$.

当 x 越来越无限接近于某个状态时, y 无限接近某个值 A, 则 A 就是 $y = f(x)$ 关于这个极限过程的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to \text{某个状态}} f(x) = A$ 或 $y \to A(x \to \text{某个状态})$.

极限可以按如下方式理解:

极限过程: $x \to$ 某个状态　　记为 $y \to A$

极限的朴素定义

给定一个函数 $y = f(x)$.

当 x 越来越无限接近于某个状态时, y 无限接近某个值 A, 则 A 就是 $y = f(x)$ 关于这个极限过程的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to \text{某个状态}} f(x) = A$ 或 $y \to A(x \to \text{某个状态})$.

数列极限的定义

极限可以按如下方式理解:

极限过程: $x \to$ 某个状态　　记为 $y \to A$

极限的朴素定义

给定一个函数 $y = f(x)$.

当 x 越来越无限接近于某个状态时, y 无限接近某个值 A, 则 A 就是 $y = f(x)$ 关于这个极限过程的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to \text{某个状态}} f(x) = A$ 或 $y \to A(x \to \text{某个状态})$.

我们来将该表述严格化.

数列极限的定义

极限可以按如下方式理解:

极限过程: $x \to$ 某个状态　　记为 $y \to A$

极限的朴素定义

给定一个函数 $y = f(x)$.

当 x 越来越无限接近于某个状态时, y 无限接近某个值 A, 则 A 就是 $y = f(x)$ 关于这个极限过程的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to \text{某个状态}} f(x) = A$ 或 $y \to A(x \to \text{某个状态})$.

我们来将该表述严格化. 先考虑数列的情形.

极限可以按如下方式理解:

极限过程: $x \to$ 某个状态　　记为 $y \to A$

极限的朴素定义

给定一个函数 $y = f(x)$.

当 x 越来越无限接近于某个状态时, y 无限接近某个值 A, 则 A 就是 $y = f(x)$ 关于这个极限过程的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to \text{某个状态}} f(x) = A$ 或 $y \to A(x \to \text{某个状态})$.

我们来将该表述严格化. 先考虑数列的情形. 所谓的(无穷) 数列是指依次排列的无穷多个数

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

记为 $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$.

数列极限的定义

极限可以按如下方式理解:

极限过程: $x \to$ 某个状态　　记为 $y \to A$

极限的朴素定义

给定一个函数 $y = f(x)$.

当 x 越来越无限接近于某个状态时, y 无限接近某个值 A, 则 A 就是 $y = f(x)$ 关于这个极限过程的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to \text{某个状态}} f(x) = A$ 或 $y \to A(x \to \text{某个状态})$.

我们来将该表述严格化. 先考虑数列的情形. 所谓的(无穷) 数列是指依次排列的无穷多个数

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

记为 $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$. 其中 a_n 被称为它的第 n 项, 用于描述所有项的式子 $a_n = f(n)$ 被称为它的通项.

数列极限的定义

极限可以按如下方式理解:

极限过程: $x \to$ 某个状态　　记为 $y \to A$

极限的朴素定义

给定一个函数 $y = f(x)$.

当 x 越来越无限接近于某个状态时, y 无限接近某个值 A, 则 A 就是 $y = f(x)$ 关于这个极限过程的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to \text{某个状态}} f(x) = A$ 或 $y \to A(x \to \text{某个状态})$.

我们来将该表述严格化. 先考虑数列的情形. 所谓的(无穷) 数列是指依次排列的无穷多个数

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

记为 $\{a_n\}_{n \geqslant 1}$. 其中 a_n 被称为它的第 n 项, 用于描述所有项的式子 $a_n = f(n)$ 被称为它的通项. 不难看出, 一个数列和一个定义域是全体正整数的函数

$$f : \{1, 2, 3, \ldots\} \to \mathbb{R}$$

是一回事.

例题: 数列的变化趋势

例

例题: 数列的变化趋势

例

- $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \cdots$ 递减地 $\to 0$;

例题: 数列的变化趋势

例

- $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}: \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \cdots$ 递减地 $\to 0$;
- $\{n\}: 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 无限增大;

例题: 数列的变化趋势

例

- $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}: \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \cdots$ 递减地 $\to 0$;
- $\{n\}: 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 无限增大;
- $\left\{A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \dfrac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}\right\}$ 递增地 $\to \pi$;

例题: 数列的变化趋势

例

- $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}: \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \cdots$ 递减地 $\to 0$;
- $\{n\}: 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 无限增大;
- $\left\{A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \dfrac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}\right\}$ 递增地 $\to \pi$;
- $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}\right\}$ 奇数项和偶数项分别交错地越来越接近 1 和 -1;

例题: 数列的变化趋势

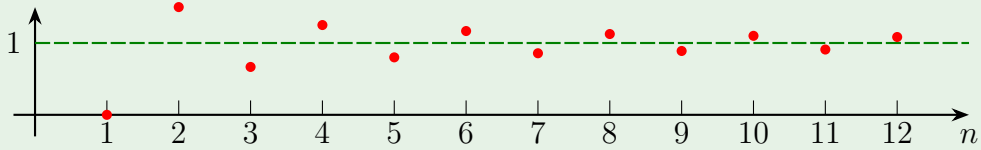
例

- $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}: \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \cdots$ 递减地 $\to 0$;
- $\{n\}: 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 无限增大;
- $\left\{A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \dfrac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}\right\}$ 递增地 $\to \pi$;
- $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}\right\}$ 奇数项和偶数项分别交错地越来越接近 1 和 -1;
- $\left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 交错地 $\to 1$.

例题: 数列的变化趋势

例

- $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}: \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \cdots$ 递减地 $\to 0$;
- $\{n\}: 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 无限增大;
- $\left\{A_n = 3 \cdot 2^{n-1} \sin \dfrac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}\right\}$ 递增地 $\to \pi$;
- $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}\right\}$ 奇数项和偶数项分别交错地越来越接近 1 和 -1;
- $\left\{1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 交错地 $\to 1$.



数列极限的定义

所谓“越来越无限接近”，是指“比任何正实数”都要接近.

数列极限的定义

所谓“越来越无限接近”，是指“比任何正实数”都要接近. 换言之, 对任意的正实数 $\varepsilon > 0$, $|a_n - a|$ 最终是要小于 ε 的.

数列极限的定义

所谓“越来越无限接近”，是指“比任何正实数”都要接近. 换言之, 对任意的正实数 $\varepsilon > 0$, $|a_n - a|$ 最终是要小于 ε 的. 即存在 $N = N_\varepsilon$ 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$.

数列极限的定义

所谓“越来越无限接近”，是指“比任何正实数”都要接近. 换言之, 对任意的正实数 $\varepsilon > 0$, $|a_n - a|$ 最终是要小于 ε 的. 即存在 $N = N_\varepsilon$ 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$.

定义

设有数列 $\{a_n\}$ 和常数 a. 如果

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ 使得当 } n > N \text{ 时, 有 } |a_n - a| < \varepsilon,$$

则称 a 为 a_n 当 $n \to \infty$ 时的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a (n \to \infty).$$

数列极限的定义

所谓“越来越无限接近”，是指“比任何正实数”都要接近. 换言之, 对任意的正实数 $\varepsilon > 0$, $|a_n - a|$ 最终是要小于 ε 的. 即存在 $N = N_\varepsilon$ 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$.

定义

设有数列 $\{a_n\}$ 和常数 a. 如果

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ 使得当 } n > N \text{ 时, 有 } |a_n - a| < \varepsilon,$$

则称 a 为 a_n 当 $n \to \infty$ 时的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a (n \to \infty).$$

此时称该数列收敛.

数列极限的定义

所谓“越来越无限接近”，是指“比任何正实数”都要接近. 换言之, 对任意的正实数 $\varepsilon > 0$, $|a_n - a|$ 最终是要小于 ε 的. 即存在 $N = N_\varepsilon$ 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$.

定义

设有数列 $\{a_n\}$ 和常数 a. 如果

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ 使得当 } n > N \text{ 时, 有 } |a_n - a| < \varepsilon,$$

则称 a 为 a_n 当 $n \to \infty$ 时的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a (n \to \infty).$$

此时称该数列收敛.

如果不存在这样的常数 a, 则称该数列发散(没有极限, 不收敛).

数列极限的定义

所谓“越来越无限接近”，是指“比任何正实数”都要接近. 换言之, 对任意的正实数 $\varepsilon > 0$, $|a_n - a|$ 最终是要小于 ε 的. 即存在 $N = N_\varepsilon$ 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$.

定义

设有数列 $\{a_n\}$ 和常数 a. 如果

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ 使得当 } n > N \text{ 时, 有 } |a_n - a| < \varepsilon, \quad \varepsilon\text{-}N \text{ 语言}$$

则称 a 为 a_n 当 $n \to \infty$ 时的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a (n \to \infty).$$

此时称该数列收敛.

如果不存在这样的常数 a, 则称该数列发散(没有极限, 不收敛).

注意并不是 $\exists N, \forall \varepsilon$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

数列极限的定义

注意并不是 $\exists N, \forall \varepsilon$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.
注意到当 $\varepsilon' > \varepsilon$ 时, 我们可以取 $N_{\varepsilon'} = N_\varepsilon$.

注意并不是 $\exists N, \forall \varepsilon$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

注意到当 $\varepsilon' > \varepsilon$ 时, 我们可以取 $N_{\varepsilon'} = N_\varepsilon$. 所以在证明极限的问题中, 可以只考虑例如 $\varepsilon < 1$ 的情形.

注意并不是 $\exists N, \forall \varepsilon$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

注意到当 $\varepsilon' > \varepsilon$ 时, 我们可以取 $N_{\varepsilon'} = N_\varepsilon$. 所以在证明极限的问题中, 可以只考虑例如 $\varepsilon < 1$ 的情形. 同理, 我们可以只考虑例如 $n \geqslant 100$ 的情形.

注意并不是 $\exists N, \forall \varepsilon$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

注意到当 $\varepsilon' > \varepsilon$ 时, 我们可以取 $N_{\varepsilon'} = N_\varepsilon$. 所以在证明极限的问题中, 可以只考虑例如 $\varepsilon < 1$ 的情形. 同理, 我们可以只考虑例如 $n \geqslant 100$ 的情形.

例

单选题: “极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 存在” 的充要条件是 “$\forall \varepsilon > 0$,(　　)” .

(A) 必有无穷多项 a_n 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$
(B) 所有项 a_n 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$
(C) 只有有限项 a_n 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$
(D) 可能有无穷多项 a_n 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$

注意并不是 $\exists N, \forall \varepsilon$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

注意到当 $\varepsilon' > \varepsilon$ 时, 我们可以取 $N_{\varepsilon'} = N_\varepsilon$. 所以在证明极限的问题中, 可以只考虑例如 $\varepsilon < 1$ 的情形. 同理, 我们可以只考虑例如 $n \geqslant 100$ 的情形.

例

单选题: “极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 存在” 的充要条件是 “$\forall \varepsilon > 0$,(　　)” .

(A) 必有无穷多项 a_n 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$
(B) 所有项 a_n 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$
(C) 只有有限项 a_n 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$
(D) 可能有无穷多项 a_n 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$

解

$\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

注意并不是 $\exists N, \forall \varepsilon$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

注意到当 $\varepsilon' > \varepsilon$ 时, 我们可以取 $N_{\varepsilon'} = N_\varepsilon$. 所以在证明极限的问题中, 可以只考虑例如 $\varepsilon < 1$ 的情形. 同理, 我们可以只考虑例如 $n \geqslant 100$ 的情形.

例

单选题: "极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 存在" 的充要条件是 "$\forall \varepsilon > 0$,(C)".

(A) 必有无穷多项 a_n 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$
(B) 所有项 a_n 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$
(C) 只有有限项 a_n 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$
(D) 可能有无穷多项 a_n 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$

解

$\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 这等价于至多只有有限项 $a_1, \ldots, a_N$ 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$. 故选 *C*, 而 *BD* 均不正确.

注意并不是 $\exists N, \forall \varepsilon$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

注意到当 $\varepsilon' > \varepsilon$ 时, 我们可以取 $N_{\varepsilon'} = N_\varepsilon$. 所以在证明极限的问题中, 可以只考虑例如 $\varepsilon < 1$ 的情形. 同理, 我们可以只考虑例如 $n \geqslant 100$ 的情形.

例

单选题: "极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 存在" 的充要条件是 "$\forall \varepsilon > 0$,(C)" .

(A) 必有无穷多项 a_n 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$
(B) 所有项 a_n 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$
(C) 只有有限项 a_n 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$
(D) 可能有无穷多项 a_n 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$

解

$\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 这等价于至多只有有限项 $a_1, \ldots, a_N$ 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$. 故选 C, 而 BD 均不正确. 对于 A, 反例 $a_n = (-1)^n, a = 1$.

例题: 极限的定义证明

例

证明当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

例题: 极限的定义证明

例

证明当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

分析

分为两步:

例题: 极限的定义证明

例

证明当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

分析

分为两步:

- 估计 $|a_n - a|$, 得到它和 n 的不等式关系, 从而求得 $N = N_\varepsilon$. 这个过程中可以进行适当的放缩.

例题: 极限的定义证明

例

证明当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

分析

分为两步:

- 估计 $|a_n - a|$, 得到它和 n 的不等式关系, 从而求得 $N = N_\varepsilon$. 这个过程中可以进行适当的放缩.
- 将上述 N 代入极限的定义中.

例题: 极限的定义证明

例

证明当 $|q| < 1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

分析

分为两步:

- 估计 $|a_n - a|$, 得到它和 n 的不等式关系, 从而求得 $N = N_\varepsilon$. 这个过程中可以进行适当的放缩.
- 将上述 N 代入极限的定义中.

对于本题, 从 $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$ 解得 $n > \log_{|q|} \varepsilon$.

例题: 极限的定义证明

例

证明当 $|q|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

分析

分为两步:

- 估计 $|a_n - a|$, 得到它和 n 的不等式关系, 从而求得 $N = N_\varepsilon$. 这个过程中可以进行适当的放缩.
- 将上述 N 代入极限的定义中.

对于本题, 从 $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$ 解得 $n > \log_{|q|}\varepsilon$.

证明

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = \log_{|q|}\varepsilon$.

例题: 极限的定义证明

例

证明当 $|q|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

分析

分为两步:

- 估计 $|a_n - a|$, 得到它和 n 的不等式关系, 从而求得 $N = N_\varepsilon$. 这个过程中可以进行适当的放缩.
- 将上述 N 代入极限的定义中.

对于本题, 从 $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$ 解得 $n > \log_{|q|}\varepsilon$.

证明

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = \log_{|q|}\varepsilon$. 当 $n > N$ 时, 有 $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$.

例题: 极限的定义证明

例

证明当 $|q|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

分析

分为两步:

- 估计 $|a_n - a|$, 得到它和 n 的不等式关系, 从而求得 $N = N_\varepsilon$. 这个过程中可以进行适当的放缩.
- 将上述 N 代入极限的定义中.

对于本题, 从 $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$ 解得 $n > \log_{|q|}\varepsilon$.

证明

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = \log_{|q|}\varepsilon$. 当 $n > N$ 时, 有 $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. □

例题: 极限的定义证明

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0.$

例题: 极限的定义证明

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0.$

证明

我们有 $\left|\dfrac{\sin n}{n} - 0\right| \leqslant \dfrac{1}{n}.$

例题: 极限的定义证明

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0.$

证明

我们有 $\left|\dfrac{\sin n}{n} - 0\right| \leqslant \dfrac{1}{n}.$ $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = \dfrac{1}{\varepsilon}.$

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0.$

证明

我们有 $\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{n}$. $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$. 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0.$

证明

我们有 $\left|\dfrac{\sin n}{n}-0\right|\leqslant\dfrac{1}{n}$. $\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$. 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0.$ □

例题: 极限的定义证明

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}=2.$

例题: 极限的定义证明

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}=2.$

证明

我们有 $\left|\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}-2\right|=\dfrac{2n+12}{n^2-8}.$

例题: 极限的定义证明

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}=2.$

证明

我们有 $\left|\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}-2\right|=\dfrac{2n+12}{n^2-8}$. 若 $n\geqslant 12$, 则 $\left|\dfrac{2n+12}{n^2-8}\right|\leqslant\dfrac{3n}{n^2-n}=\dfrac{3}{n-1}$.

例题: 极限的定义证明

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}=2.$

证明

我们有 $\left|\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}-2\right|=\dfrac{2n+12}{n^2-8}$. 若 $n\geqslant 12$, 则 $\left|\dfrac{2n+12}{n^2-8}\right|\leqslant\dfrac{3n}{n^2-n}=\dfrac{3}{n-1}$.

$\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\max\left\{1+\dfrac{3}{\varepsilon},12\right\}$.

例题: 极限的定义证明

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}=2.$

证明

我们有 $\left|\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}-2\right|=\dfrac{2n+12}{n^2-8}$. 若 $n\geqslant 12$, 则 $\left|\dfrac{2n+12}{n^2-8}\right|\leqslant\dfrac{3n}{n^2-n}=\dfrac{3}{n-1}$.

$\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\max\left\{1+\dfrac{3}{\varepsilon},12\right\}$. 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{2n^2+2n-4}{n^2-8}-2\right|\leqslant\frac{3}{n-1}<\varepsilon.$$

例题: 极限的定义证明

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}=2.$

证明

我们有 $\left|\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}-2\right|=\dfrac{2n+12}{n^2-8}$. 若 $n\geqslant 12$, 则 $\left|\dfrac{2n+12}{n^2-8}\right|\leqslant\dfrac{3n}{n^2-n}=\dfrac{3}{n-1}$.

$\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\max\left\{1+\dfrac{3}{\varepsilon},12\right\}$. 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{2n^2+2n-4}{n^2-8}-2\right|\leqslant\frac{3}{n-1}<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}=0.$ □

定理 (唯一性)

收敛数列的极限是唯一的.

定理 (唯一性)

收敛数列的极限是唯一的.

证明

设 a 和 b 都是 $\{a_n\}$ 的极限.

数列极限的唯一性

定理 (唯一性)

收敛数列的极限是唯一的.

证明

设 a 和 b 都是 $\{a_n\}$ 的极限. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, M > 0$ 使得

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |a_n - a| < \varepsilon; \text{ 当 } n > M \text{ 时, } |a_n - b| < \varepsilon.$$

定理 (唯一性)

收敛数列的极限是唯一的.

证明

设 a 和 b 都是 $\{a_n\}$ 的极限. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, M > 0$ 使得

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |a_n - a| < \varepsilon; \text{ 当 } n > M \text{ 时, } |a_n - b| < \varepsilon.$$

对于 $n > \max\{N, M\}$, 由三角不等式有

$$|a - b| \leqslant |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

定理 (唯一性)

收敛数列的极限是唯一的.

证明

设 a 和 b 都是 $\{a_n\}$ 的极限. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, M > 0$ 使得

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |a_n - a| < \varepsilon; \text{ 当 } n > M \text{ 时, } |a_n - b| < \varepsilon.$$

对于 $n > \max\{N, M\}$, 由三角不等式有

$$|a - b| \leqslant |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

若 $a \neq b$, 则可取 $\varepsilon = \left|\dfrac{a-b}{2}\right| > 0$ 代入得到 $2\varepsilon < 2\varepsilon$, 矛盾!

定理 (唯一性)

收敛数列的极限是唯一的.

证明

设 a 和 b 都是 $\{a_n\}$ 的极限. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, M > 0$ 使得

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |a_n - a| < \varepsilon; \text{ 当 } n > M \text{ 时, } |a_n - b| < \varepsilon.$$

对于 $n > \max\{N, M\}$, 由三角不等式有

$$|a - b| \leqslant |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon.$$

若 $a \neq b$, 则可取 $\varepsilon = \left|\dfrac{a-b}{2}\right| > 0$ 代入得到 $2\varepsilon < 2\varepsilon$, 矛盾! 因此 $a = b$. □

定理 (有界性)

收敛数列是有界数列.

定理 (有界性)

收敛数列是有界数列.

证明

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a, 则对于 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时

$$|a_n - a| < \varepsilon = 1, \qquad |a_n| \leqslant |a| + |a_n - a| < |a| + 1.$$

定理 (有界性)

收敛数列是有界数列.

证明

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a, 则对于 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时

$$|a_n - a| < \varepsilon = 1, \qquad |a_n| \leqslant |a| + |a_n - a| < |a| + 1.$$

因此对于

$$M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, |a| + 1\},$$

有 $|a_n| \leqslant M$.

定理 (有界性)

收敛数列是有界数列.

证明

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a, 则对于 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时

$$|a_n - a| < \varepsilon = 1, \qquad |a_n| \leqslant |a| + |a_n - a| < |a| + 1.$$

因此对于

$$M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, |a| + 1\},$$

有 $|a_n| \leqslant M$. 这说明 $\{a_n\}$ 是有界数列. □

定理 (有界性)

收敛数列是有界数列.

证明

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a, 则对于 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时

$$|a_n - a| < \varepsilon = 1, \qquad |a_n| \leqslant |a| + |a_n - a| < |a| + 1.$$

因此对于

$$M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, |a| + 1\},$$

有 $|a_n| \leqslant M$. 这说明 $\{a_n\}$ 是有界数列. □

收敛数列一定有界, 但反之未必.

数列极限的有界性

定理 (有界性)

收敛数列是有界数列.

证明

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a, 则对于 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时

$$|a_n - a| < \varepsilon = 1, \qquad |a_n| \leqslant |a| + |a_n - a| < |a| + 1.$$

因此对于

$$M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, |a| + 1\},$$

有 $|a_n| \leqslant M$. 这说明 $\{a_n\}$ 是有界数列. □

收敛数列一定有界, 但反之未必.

例

对于数列 $\{a_n\} = (-1)^n$, 该数列是有界的但是不收敛.

数列极限的保号性

定理 (保号性)

定理 (保号性)

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > 0$.

数列极限的保号性

定理 (保号性)

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > 0$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n < 0$.

数列极限的保号性

定理 (保号性)

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > 0$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n < 0$.

证明

(1) 对于 $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$, $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon = \dfrac{a}{2}$,

数列极限的保号性

定理 (保号性)

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > 0$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n < 0$.

证明

(1) 对于 $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$, $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon = \dfrac{a}{2}$, 从而

$$a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

数列极限的保号性

定理 (保号性)

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > 0$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n < 0$.

证明

(1) 对于 $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$, $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon = \dfrac{a}{2}$, 从而

$$a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

(2) 同理可得. □

定理 (保号性)

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > 0$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n < 0$.

证明

(1) 对于 $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$, $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon = \dfrac{a}{2}$, 从而

$$a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

(2) 同理可得. □

注意这里 > 0 不能换成 $\geqslant 0$, < 0 也不能换成 $\leqslant 0$.

定理 (保号性)

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > 0$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n < 0$.

证明

(1) 对于 $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$, $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon = \dfrac{a}{2}$, 从而

$$a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

(2) 同理可得. □

注意这里 > 0 不能换成 $\geqslant 0$, < 0 也不能换成 $\leqslant 0$. 因为极限为 0 的数列符号可以无限次变化, 例如 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

推论 (逆否命题)

推论 (逆否命题)

(1) 如果收敛数列 $\{a_n\}$ 从某项起 $\geqslant 0$, 则它的极限 $\geqslant 0$.

推论 (逆否命题)

(1) 如果收敛数列 $\{a_n\}$ 从某项起 $\geqslant 0$, 则它的极限 $\geqslant 0$.

(2) 如果收敛数列 $\{a_n\}$ 从某项起 $\leqslant 0$, 则它的极限 $\leqslant 0$.

推论 (逆否命题)

(1) 如果收敛数列 $\{a_n\}$ 从某项起 $\geqslant 0$, 则它的极限 $\geqslant 0$.

(2) 如果收敛数列 $\{a_n\}$ 从某项起 $\leqslant 0$, 则它的极限 $\leqslant 0$.

同理, 这里 $\geqslant$ 也不能换成 $>$ (这很容易记错!), 例如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

推论 (逆否命题)

(1) 如果收敛数列 $\{a_n\}$ 从某项起 $\geqslant 0$, 则它的极限 $\geqslant 0$.

(2) 如果收敛数列 $\{a_n\}$ 从某项起 $\leqslant 0$, 则它的极限 $\leqslant 0$.

同理, 这里 $\geqslant$ 也不能换成 $>$ (这很容易记错!), 例如 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

推论

如果收敛数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足从某项起 $a_n\geqslant b_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

数列的子数列

对于正整数集的一个无限子集合 $S \subseteq \mathbb{N}_+$, 将其中元素从小到大排成一列

$$S = \{k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots\},$$

数列的子数列

对于正整数集的一个无限子集合 $S \subseteq \mathbb{N}_+$, 将其中元素从小到大排成一列

$$S = \{k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots\},$$

则它对应了数列 $\{a_n\}$ 的一个子数列

$$\{a_{k_n}\}_{n\geqslant 1} : a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}, \ldots$$

数列的子数列

对于正整数集的一个无限子集合 $S \subseteq \mathbb{N}_+$, 将其中元素从小到大排成一列

$$S = \{k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots\},$$

则它对应了数列 $\{a_n\}$ 的一个子数列

$$\{a_{k_n}\}_{n\geqslant 1} : a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}, \ldots$$

特别地, 当 S 为全体正奇数时, 称 $\{a_{2n-1}\}_{n\geqslant 1}$ 为奇子数列; 当 S 为全体正偶数时, 称 $\{a_{2n}\}_{n\geqslant 1}$ 为偶子数列.

数列与子数列的极限关系

定理

$\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均收敛于 a.

数列与子数列的极限关系

定理

$\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均收敛于 a.

证明

必要性 $(\Rightarrow)$: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

定理

$\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均收敛于 a.

证明

必要性 $(\Rightarrow)$: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 因此

$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \qquad |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

定理

$\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均收敛于 a.

证明

必要性 $(\Rightarrow)$: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 因此

$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \qquad |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

从而 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均收敛于 a.

定理

$\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均收敛于 a.

证明

必要性 ($\Rightarrow$): 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 因此

$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \qquad |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

从而 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均收敛于 a.

充分性 ($\Leftarrow$): 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N, M$ 使得

当 $n > N$ 时, $|a_{2n-1} - a| < \varepsilon$; 当 $n > M$ 时, $|a_{2n} - a| < \varepsilon$.

定理

$\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均收敛于 a.

证明

必要性 $(\Rightarrow)$: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 因此

$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \qquad |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

从而 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均收敛于 a.

充分性 $(\Leftarrow)$: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N, M$ 使得

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |a_{2n-1} - a| < \varepsilon; \text{ 当 } n > M \text{ 时, } |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

所以当 $n > \max\{2N - 1, 2M\}$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 故数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a. □

定理

$\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当它的所有子数列均收敛于 a.

定理

$\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当它的所有子数列均收敛于 a.

设 $S_1, \ldots, S_m \subseteq \mathbb{N}_+$ 均是无限集合, 且

$$S_1 \cup \cdots \cup S_m = \mathbb{N}_+.$$

定理

$\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当它的所有子数列均收敛于 a.

设 $S_1, \ldots, S_m \subseteq \mathbb{N}_+$ 均是无限集合, 且

$$S_1 \cup \cdots \cup S_m = \mathbb{N}_+.$$

那么 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff$ 每个 S_i 对应子数列均收敛于 a.

定理

$\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当它的所有子数列均收敛于 a.

设 $S_1, \ldots, S_m \subseteq \mathbb{N}_+$ 均是无限集合, 且

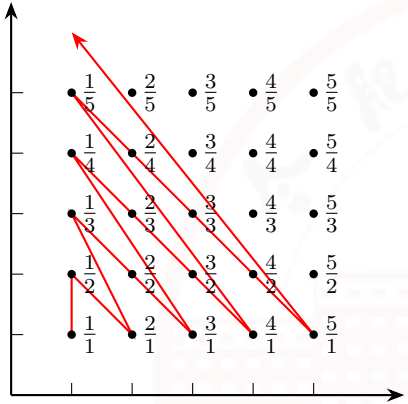
$$S_1 \cup \cdots \cup S_m = \mathbb{N}_+.$$

那么 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff$ 每个 S_i 对应子数列均收敛于 a.

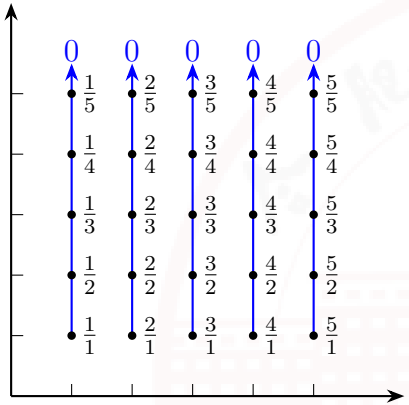
这是因为 $\forall \varepsilon > 0$, 每个 S_i 中至多只有有限多项满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$, 从而一共也只有有限多项满足这个不等式. 于是对充分大的 n, $|a_n - a| < \varepsilon$.

然而对于无穷多个 S_i, 这是不对的.

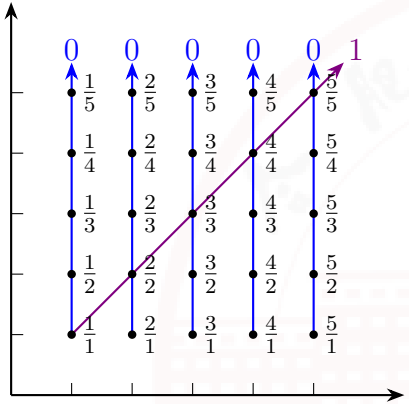
然而对于无穷多个 S_i, 这是不对的. 下图中红色连线形成一个数列 $\{a_n\}$,



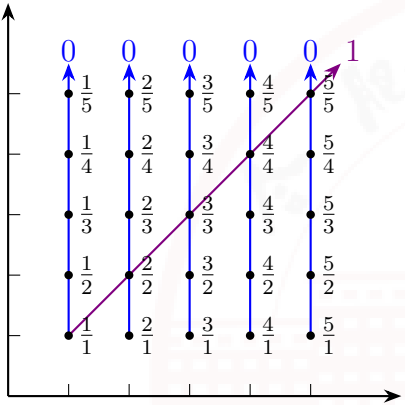
然而对于无穷多个 S_i, 这是不对的. 下图中红色连线形成一个数列 $\{a_n\}$, 蓝色连线对应的子数列均收敛到 0,



然而对于无穷多个 S_i, 这是不对的. 下图中红色连线形成一个数列 $\{a_n\}$, 蓝色连线对应的子数列均收敛到 0, 但是 $\{a_n\}$ 本身却不收敛.



然而对于无穷多个 S_i, 这是不对的. 下图中红色连线形成一个数列 $\{a_n\}$, 蓝色连线对应的子数列均收敛到 0, 但是 $\{a_n\}$ 本身却不收敛.



在数学中, 常常有这种在有限情形成立, 无限情形不成立的结论. 因此遇到涉及无限的情形要小心.