HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

第二章　解析函数

1. 解析函数的概念
2. 函数解析的充要条件
3. 初等函数

第一节　解析函数的概念

- 可导的函数
- 可微的函数
- 解析的函数

由于 $\mathbb{C}$ 和 $\mathbb{R}$ 一样是域, 因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义

设 $w=f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0\in D$. 如果极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作

$$f'(z_0)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 称 $f(z)$ 在 D 内可导.

典型例题: 线性函数的不可导性

例

函数 $f(z) = x + 2yi$ 在哪些点处可导?

解

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+\Delta x) + 2(y+\Delta y)i - (x+2yi)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i}. \end{aligned}$$

当 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ 时, 上述极限为 2; 当 $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ 时, 上述极限为 1. 因此该极限不存在, $f(z)$ 处处不可导.

例题：复变函数的导数

练习

函数 $f(z) = x - yi$ 在哪些点处可导?

答案

处处不可导.

例

求 $f(z) = z^2$ 的导数.

解

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.
\end{aligned}
$$

和一元实变函数情形类似，我们有如下求导法则:

定理

- $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf'$;
- $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$;
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z)$;
- $f'(z) = \dfrac{1}{(f^{-1})'(w)}, w = f(z)$.

可导蕴含连续

定理

若 $f(z)$ 在 z_0 可导，则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

证明

该定理的证明和实变量情形完全相同. 设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z \\ &= f'(z_0) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

$\square$

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

定义

如果存在常数 A 使得函数 $w=f(z)$ 满足

$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\Delta z+o(\Delta z),$$

其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}w=A\Delta z$.

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $\mathrm{d}w=f'(z_0)\Delta z$, $\mathrm{d}z=\Delta z$. 故 $\mathrm{d}w=f'(z_0)\,\mathrm{d}z$, $f'(z_0)=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$.

定义

- 若函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 则称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 则称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数.
- 若 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

由于区域 D 是一个开集, 其中的任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 的邻域. 所以 $f(z)$ 在 D 内解析和在 D 内可导是等价的.

如果 $f(z)$ 在 z_0 解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集.

练习

单选题: (2021 年 B 卷) 函数 $f(z)$ 在点 z_0 处解析是 $f(z)$ 在该点可导的 (A).

(A) 充分条件 (B) 必要条件
(C) 充要条件 (D) 既非充分也非必要条件

答案

解析要求在 z_0 的一个邻域内都可导才行.

解析函数

例

研究函数 $f(z) = |z|^2$ 的解析性.

解

由于

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z} = \overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta y i}{\Delta x+\Delta y i},$$

若 $z=0$, 则当 $\Delta z \to 0$ 时该极限为 0.

若 $z \neq 0$, 则当 $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$ 时该极限为 $\overline{z}+z$; 当 $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$ 时该极限为 $\overline{z}-z$. 因此此时极限不存在.

故 $f(z)$ 仅在 $z=0$ 处可导, 从而处处不解析.

第二节　函数解析的充要条件

- 柯西-黎曼方程
- 柯西-黎曼方程的应用

可导函数的特点

通过对一些简单函数的分析，我们会发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式，而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 等内容. 这种现象并不是孤立的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.

可导的等价刻画: 形式推导

设 f 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

由于 $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$, 因此

u, v 可微且 $u_x = v_y = a, v_x = -u_y = b$.

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}v &= v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y = v_x\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}f &= \mathrm{d}(u+iv) = (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}x + (-v_x + iu_x)\,\mathrm{d}y \\ &= (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}(x+iy) \\ &= (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}z = (v_y - iu_y)\,\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

故

$f(z)$ 在 z 处可导, 且 $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$.

可导的等价刻画：柯西-黎曼方程

由此我们得到

柯西-黎曼方程 (C-R 方程)

$f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u, v 可微且满足 **C-R** 方程:

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

可导的充分性条件

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理

- 如果 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 **C-R** 方程, 则 $f(z)$ 在 z 可导.
- 如果 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 上处处连续, 且满足 **C-R** 方程, 则 $f(z)$ 在 D 上可导 (从而解析).

例

(1) 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u = x, v = -y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 1, & u_y &= 0, \\ v_x &= 0, & v_y &= -1. \end{aligned}$$

因为 $u_x = 1 \neq v_y = -1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

例 (续)

(2) 函数 $f(z) = z\operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\ v_x &= y, & v_y &= x. \end{aligned}$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 **C-R** 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0) = u_x(0) + iv_x(0) = 0.$$

例 (续)

(3) 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y, & u_y &= -e^x \sin y, \\ v_x &= e^x \sin y, & v_y &= e^x \cos y. \end{aligned}$$

因此该函数处处可导，处处解析，且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z).$$

实际上, 这个函数就是复变量的指数函数 e^z.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

练习

单选题: (2022 年 A 卷) 下面哪个函数在 $z=0$ 处不可导? (A)

(A) $2x+3yi$ (B) $2x^2+3y^2i$

(C) $e^x\cos y+ie^x\sin y$ (D) x^2-xyi

答案

根据 **C-R** 方程可知对于 **A**, $u_x(0)=2\neq v_y(0)=3$. 对于 **BD**, 各个偏导数在 0 处取值都是 0. **C** 则是处处都可导.

例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

解

由于

$$u_x = 2x + ay, \qquad u_y = ax + 2by,$$
$$v_x = 2cx + dy, \qquad v_y = dx + 2y,$$

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$

$$a = d = 2, \quad b = c = -1,$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2y + i(-2x + 2y) = (2 - 2i)z.$$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明

由于 $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$, 因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数. □

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件等价:

- $f(z)$ 是一常数,
- $f'(z) = 0$,
- $|f(z)|$ 是一常数,
- $\arg f(z)$ 是一常数,
- $\operatorname{Re} f(z)$ 是一常数,
- $\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数,
- $v = u^2$,
- $u = v^2$.

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明

由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得 $u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0$, 从而 $(u_x,-u_y)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理 $(v_x,-v_y)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_xv_x+u_yv_y=-u_xu_y+u_yu_x=0,$$

因此二者正交. $\square$

当 $f'(z_0)\neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性.

这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 上述例子是该结论关于 w 复平面上曲线族 $u=c_1, v=c_2$ 的一个特殊情形.

最后我们来看复数在求导中的一个应用.

例

设 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 则它在除 $z=\pm i$ 外处处解析. 当 $z=x$ 为实数时,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}&=f^{(n)}(x)=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x-i}\right]^{(n)}\\&=\frac{i}{2}\cdot(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x+i)^{n+1}}-\frac{1}{(x-i)^{n+1}}\right]\\&=(-1)^{n+1}n!\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{(x+i)^{n+1}}\\&=\frac{(-1)^n n!\sin[(n+1)\operatorname{arccot}x]}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}.\end{aligned}$$

第三节　初等函数

- 指数函数
- 对数函数
- 幂函数
- 三角函数和反三角函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

(1) $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$ (欧拉恒等式);

(2) $\exp z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ (极限定义);

(3) $\exp z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{z^k}{k!}$ (级数定义);

(4) $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z = x \in \mathbb{R}$ 时, $\exp z = e^x$ (e^x 的解析延拓).

有些人会从 $e^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义，而不是欧拉恒等式的证明. 我们在学习了幂级数之后就可知(1)和(3)是等价的.

我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\qquad(1^\infty\text{ 型不定式})$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right]=e^x.$$

不妨设 $n>|z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n\to\infty}n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\arctan\frac{y}{n+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x}=y.$$

故 $\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)$.

定义指数函数

$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

我们已经知道 $\exp z$ 是一个处处解析的函数, 且 $(\exp z)' = \exp z$. 不难看出

- $\exp z \neq 0$;
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$;
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$;
- $\exp z_1 = \exp z_2$ 当且仅当 $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

为了方便, 我们也记 $e^z = \exp z$.

指数函数的性质

指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.

例

函数 $f(z) = e^{z/6}$ 的周期是 $\underline{12\pi i}$.

解

设 $f(z_1) = f(z_2)$, 则 $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$. 因此存在 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

从而 $z_1 - z_2 = 12k\pi i$. 所以 $f(z)$ 的周期是 $12\pi i$.

一般地, $\exp(az+b)$ 的周期是 $\dfrac{2\pi i}{a}$ (或写成 $-\dfrac{2\pi i}{a}$), $a \neq 0$.

对数函数定义为指数函数的反函数. 设 $z \neq 0$, 满足方程 $e^w = z$ 的 $w = f(z)$ 被称为**对数函数**, 记作 $w = \operatorname{Ln} z$.

为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 $\operatorname{Arg} z$ 和 $\arg z$.

对数函数及其主值

设 $e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

所以

$$\boxed{\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z}.$$

它是一个多值函数.

我们取它的主值为

$$\boxed{\ln z = \ln|z| + i \arg z}.$$

对于每一个 k, $\ln z + 2k\pi i$ 都给出了 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支. 特别地, 当 $z = x > 0$ 是正实数时, $\ln z$ 就是实变的对数函数.

例

求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

解

$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$, 主值就是 $\ln 2$.

$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$, 主值是 πi.

典型例题: 对数函数的计算

例

求 $\mathrm{Ln}(-2+3i), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i), \mathrm{Ln}(-3)$.

解

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(-2+3i) &= \ln|-2+3i| + i\,\mathrm{Arg}(-2+3i)\\ &= \frac{1}{2}\ln 13 + \Big(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\Big)i, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i) = \ln\left|3+\sqrt{3}i\right| + i\,\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}i)$$

$$= \ln 2\sqrt{3} + \Big(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\Big)i = \ln 2\sqrt{3} + \Big(2k - \frac{1}{6}\Big)\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{Ln}(-3) = \ln(-3) + i\,\mathrm{Arg}(-3) = \ln 3 + (2k+1)\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

典型例题：对数函数的计算

例

解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.

解

由于 $1 + \sqrt{3}i = 2\exp\dfrac{\pi i}{3}$，因此

$$z = \mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

练习

求 $\ln(-1-\sqrt{3}i) = \underline{\ln 2 - \dfrac{2\pi i}{3}}$.

对数函数与其主值的关系是

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln z + \mathrm{Ln}\, 1 = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及主辐角的相应等式, 我们有

$$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2, \quad \mathrm{Ln}\, \frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2,$$

$$\mathrm{Ln}\, \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \mathrm{Ln}\, z.$$

而当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\mathrm{Ln}\, z^n = n\, \mathrm{Ln}\, z$ 不成立. 以上等式换成 $\ln z$ 均不一定成立.

设 $z_0 = -x < 0$ 是负实数. 由于

$$\lim_{y\to 0^+} \ln(-x+yi) = \ln x + \pi, \quad \lim_{y\to 0^-} \ln(-x+yi) = \ln x - \pi,$$

因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续. 实际上, $\lim_{z\to 0} \ln z = \infty$.

而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数, 从而

$$(\ln z)' = \frac{1}{z},$$

$\ln z$ 在除负实轴和零处的区域解析.

设 $a \neq 0,\ z \neq 0$, 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a\,\mathrm{Ln}\,z}$$
$$= \exp\left[a\ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

它的主值为

$$w = e^{a\ln z} = \exp\left(a\ln|z| + ia\arg z\right).$$

当 $a \geqslant 0$ 是非负实数时, 我们约定 $0^a = 0$.

幂函数的性质: a 为整数时

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.
当 a 为整数时, 因为 $e^{2ak\pi i}=1$, 所以 $w=z^a$ 是单值的. 此时

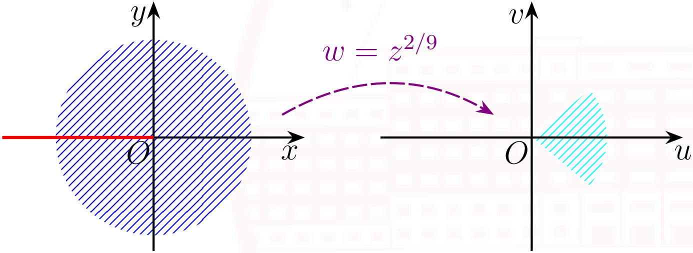
$$z^a=|z|^a\,e^{ia\arg z}$$

就是我们之前定义的方幂.
当 a 是非负整数时, z^a 在复平面上解析; 当 a 是负整数时, z^a 在 $\mathbb{C}-\{0\}$ 上解析.

当 $a=\dfrac{p}{q}$ 为分数, p,q 为互质的整数且 $q>1$ 时,

$$z^{\frac{p}{q}}=|z|^{\frac{p}{q}}\exp\left[\frac{ip(\arg z+2k\pi)}{q}\right],\qquad k=0,1,\dots,q-1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w=\exp(a\ln z)$ 是处处解析的. 事实上它就是 $\sqrt[q]{z^p}=(\sqrt[q]{z})^p$.



幂函数的性质: a 为其他情形

对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值. 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi ai$ 不可能是 $2\pi i$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 也是处处解析的.

a	z^a 的值	z^a 的解析区域
整数 n	单值	$n \geqslant 0$ 时处处解析 $n < 0$ 时除零点外解析
分数 p/q	q 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

典型例题: 幂函数的计算

例

求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i.

解

$$\begin{aligned} 1^{\sqrt{2}} &= e^{\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1} = e^{\sqrt{2}\cdot 2k\pi i} \\ &= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \\ i^i &= e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = \exp\left[i\cdot\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right] \\ &= \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

练习

填空题: (2021 年 A 卷) 3^i 的主辐角是 $\underline{\ \ln 3\ }$.

幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = \left(e^{a \ln z}\right)' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

对于整数 n, 我们总有 $(z^a)^n = z^{an}$. 这里换成主值也成立. 而 $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$ 仅对主值总成立.

我们来看 $\operatorname{Ln} z^a = a \operatorname{Ln} z$ 何时成立. 由于

$$\operatorname{Ln} z^a = a \ln z + 2a\pi i \cdot \left(k + \frac{\ell}{a}\right) \pi i, \quad k, \ell \in \mathbb{Z},$$

$$a \operatorname{Ln} z = a \ln z + 2a\pi i \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

因此当且仅当 $a = \pm\frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}$ 时, $\operatorname{Ln} z^a = a \operatorname{Ln} z$ 成立. 对于除此之外的 a, 该式子均不成立.

最后, 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是不同的. 因为后者在 $a \notin \mathbb{Z}$ 时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆, 以后我们总默认 e^a 表示指数函数 $\exp a$.

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 y 成立, 我们将其推广到复数情形. 定义余弦和正弦函数

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}.$$

那么欧拉恒等式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ 对任意复数 z 均成立.

不难得到

$$\cos(x+iy)=\cos x\,\mathrm{ch}\,y-i\sin x\,\mathrm{sh}\,y,$$
$$\sin(x+iy)=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y,$$

其中 $\mathrm{ch}\,y=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}=\cos iy$, $\mathrm{sh}\,y=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}=-i\sin iy$.

当 $y\to\infty$ 时, $\sin iy=i\,\mathrm{sh}\,y$ 和 $\cos iy=\mathrm{ch}\,y$ 都 $\to\infty$. 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的零点都是实数. 于是我们可类似定义其它三角函数

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\ z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z},\ z\neq k\pi,$$
$$\sec z=\frac{1}{\cos z},\ z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\qquad \csc z=\frac{1}{\sin z},\ z\neq k\pi.$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$,
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

双曲函数

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

$\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ 的周期是 $2\pi i$, $\operatorname{th} z$ 的周期是 πi.

设 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}\ \text{(双值)}.$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的.

同理, 我们有:

- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z = -\dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$
- 反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + z}{1 - z}$.

例题：解三角函数方程

例

解方程 $\sin z = 2$.

解

由于 $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$，我们有 $e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$．于是 $e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$，

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$