



哈尔滨工程大学  
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

## 抓石子游戏中的数学问题

---

张神星 (合肥工业大学)

哈尔滨工程大学

[zhangshenxing@hfut.edu.cn](mailto:zhangshenxing@hfut.edu.cn)

- 幼儿园里有两个小朋友 Alice 和 Bob, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.
- 每个人每次可以取走  $1 \sim 3$  个石子, 最终谁把最后一颗石子取走, 谁就获得了游戏的胜利.
- 不难知道, 如果一开始石子的个数是 4 的倍数. 那么每次 Alice 取  $x$  个之后, Bob 只需要取  $4 - x$  个, 就可以保证必胜.
- 而如果一开始石子的个数不是 4 的倍数, 那么 Alice 只需要取  $1 \sim 3$  个石子, 使得剩下的石子个数是 4 的倍数即可获胜.

- 我们将这个游戏记为  $\text{SUB}(S)$ , 其中  $S = \{1, 2, 3\}$  表示每次可以取的石头个数.
- 那么根据初始石头个数  $n$  的不同, 我们可以得到一个胜负数列(从 0 开始):

0111 0111 0111 ...

这里 0 表示先手必败, 1 表示先手必胜.

- 事实上, 我们将游戏规则改成谁不能取谁算输更为合理, 因为允许取的石子个数的集合  $S$  可能不包含 1, 这样有时候会剩下石子.

- 如果存在  $s \in S$  使得  $n - s$  个石子情形是先手必败的 (必败点), 则  $n$  个石子情形是先手必胜的 (必胜点).
- 而有些情形, 既可以转化为必胜点, 也可以转化为必败点. 为了一般化, 我们把必败点叫做 0 级必胜点, 把可以一步走到  $0 \sim m - 1$  级必胜点的点, 叫做  $m$  级必胜点.
- 如果  $n$  个石子情形是  $m$  级必胜点, 定义  $\mathcal{G}_S(n) = m$ . 这样我们得到了一个数列, 称之为 **Sprague-Grundy 数列** (或 Nim 数列), 且

$$\mathcal{G}_S(n) = \text{mex}\{\mathcal{G}_S(n - s) : s \in S\}.$$

mex 是指不属于后面集合的最小的非负整数 (minimal except).

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 ( $S$  无限);
- 高维情形 ( $n$  是向量,  $S$  是向量集合) 等等.

不过我们今天只讨论  $S$  有限的 <sup>subtraction game</sup> 一维一堆情形.

注意到  $\mathcal{G}_{dS}(n) = \mathcal{G}_S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$ . 因此我们只需考虑  $S$  的所有元素公因子为 1 的情形.

通过抽屉原理, 容易说明:

### 命题

*ultimately periodic*

数列  $\mathcal{G}_S$  是最终周期的, 即存在整数  $p \geq 1, \ell \geq 0$  使得  $\mathcal{G}_S(n+p) = \mathcal{G}_S(n), \forall n \geq \ell$ .

将最小的  $p$  称为  $(\mathcal{G}_S$  或  $\text{SUB}(S)$  的) <sup>period</sup>周期, 最小的  $\ell$  称为 <sup>pre-period</sup>预周期.

我们总将集合  $S$  中的元素从小到大排列, 即

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}, \quad s_1 < s_2 < \dots < s_k.$$

不难说明, 满足  $\mathcal{G}_S(n) = \mathcal{G}_S(n+p), \ell \leq n \leq \ell + s_k$  的最小的  $p$  和  $\ell$  就是周期和预周期. 因此对于任意集合  $S$ , 很容易通过计算机来计算它的周期和预周期, 从而得到整个 SG 数列.

当  $k = \#S \leq 2$  时,  $p$  和  $\ell$  都是已知的. 而即使是  $k = 3$  的情形,  $p$  和  $\ell$  依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

- $\mathcal{G}_{\{1\}} = \underline{01}$ . 这里  $\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathcal{H}\cdots$  表示无穷多个  $\mathcal{H}$  重复得到的数列.
- $1 \in S$  不含偶数  $\iff \mathcal{G}_S = \underline{01}$ .
- 设  $S = \{a, c = at + r\}, 0 \leq r < a$ , 则

$$\mathcal{G}_S = \begin{cases} \underline{(0^a 1^a)^{t/2} 0^r 2^{a-r} 1^r}, & 2 \mid t; \\ \underline{(0^a 1^a)^{(t+1)/2} 2^r}, & 2 \nmid t, \end{cases} \quad \ell = 0, p = c + a \text{ 或 } 2a.$$

这里  $\mathcal{H}^t = \mathcal{H}\cdots\mathcal{H}$  表示  $t$  个  $\mathcal{H}$  重复得到的数列.

## $S = \{1, b, c\}$ 的简单情形

- 设  $S = \{1, b, c\}, 2 \nmid b$ . 注意到  $\mathcal{G}_{\{1,b\}} = \underline{\mathcal{H}}, \mathcal{H} = 01$ . 我们有

$c$	$\mathcal{G}_S$	$\ell$	$p$
奇数	$\underline{\mathcal{H}}$	0	2
偶数	$\underline{\mathcal{H}^{c/2}(23)^{(b-1)/2}2}$	0	$c + b$

- 设  $S = \{1, 2, 3t + r\}, 0 \leq r < 3$ . 注意到  $\mathcal{G}_{\{1,2\}} = \underline{\mathcal{H}}, \mathcal{H} = 012$ . 我们有

$r$	$\mathcal{G}_S$	$\ell$	$p$
0	$\underline{(012)^t 3}$	0	$c + 1$
1, 2	$\underline{012}$	0	3



- 设  $S = \{1, 4, c = 5t + r\}, 0 \leq r < 5$ . 注意到  $\mathcal{G}_{\{1,4\}} = \underline{\mathcal{H}}, \mathcal{H} = 01012$ . 我们有

$r, c$	$\mathcal{G}_S$	$\ell$	$p$
$r = 0, c = 5$	$\underline{\mathcal{H} 323}$	0	8
$r = 0, c > 5$	$\mathcal{H}^t 323013 \underline{\mathcal{H}^{t-1} 012012}$	$c + 6$	$c + 1$
$r = 1, 4$	$\underline{\mathcal{H}}$	0	5
$r = 2$	$\underline{\mathcal{H}^t 012}$	0	$c + 1$
$r = 3$	$\underline{\mathcal{H}^{t+1} 32}$	0	$c + 4$

### 命题

设  $S = \{1, b, c = t(b+1) + r\}$ ,  $b = 2k \geq 6$ ,  $0 \leq r \leq b$ .

- (1) 若  $r = 1, b$ , 则  $\ell = 0, p = b + 1$ .
- (2) 若  $3 \leq r \leq b - 1$  是奇数, 则  $\ell = 0, p = c + b$ .
- (3) 若  $r = b - 2$ , 则  $\ell = 0, p = c + 1$ .
- (4) 若  $c = b + 1$ , 则  $\ell = 0, p = 2b$ .
- (5) 若  $c > b + 1$ ,  $0 \leq r \leq b - 4$  是偶数且  $t + r/2 \geq k$ , 则  
 $\ell = ((b - r)/2 - 1)(c + b + 2) - b, p = c + 1$ .
- (6) 若  $c > b + 1$ ,  $0 \leq r \leq b - 4$  是偶数且  $t + r/2 \leq k - 1$ , 则  $\ell = t(c + b + 2) - b$ . 若  
 $t + r/2 < k - 1$ , 则  $p = c + b$ ; 若  $t + r/2 = k - 1$ , 则  $p = b - 1$ .

我们发现, 对于集合  $S = \{1, b, c\}$ ,  $p$  和  $\ell$  的形式与  $c$  模  $\{1, b\}$  的周期的同余类有关. 对于每一个同余类而言,  $p$  和  $\ell$  是  $c$  的一次函数.

## 命题

(1) 设  $S = \{a, 2a, c = 3at + r\}, 0 \leq r < 3a$ , 则

$$\ell = \begin{cases} c + a - r, & 0 < r < a; \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases} \quad p = \begin{cases} 3a/2, & r = a/2; \\ 3a, & a/2 < r \leq 2a; \\ c + a, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

(2) 设  $S = \{a, a + 1, \dots, b - 1, b, c = t(a + b) + r\}, 0 \leq r < a + b$ , 则

$$\ell = 0, \quad p = \begin{cases} a + b, & a \leq r \leq b; \\ c + a, & r = 0 \text{ 或 } r > b; \\ c + b, & 0 < r < a. \end{cases}$$

## 例

设  $S = \{2, 3, 5, 7\}$ , 则  $\mathcal{G}_S = \underline{0^2 1^2 2^2 3^2 4}$  周期为 9. 对于  $11 \leq c \leq 500$ ,  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  的预周期和周期为

$$\ell_c = \begin{cases} 2c - 4, & c \equiv 1 \pmod{18}; \\ c + 5, & c \equiv 10 \pmod{18}; \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases} \quad p_c = \begin{cases} c + 2, & c \equiv 0, 8, 9, 10, 17 \pmod{18}; \\ 4, & c \equiv 1 \pmod{18}; \\ 9, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

根据这些结论, 我们提出如下猜想:

### 猜想

固定集合  $S$ . 存在正整数  $q, N$  以及  $\alpha_r, \beta_r, \lambda_r, \mu_r, 0 \leq r < q$ , 使得当  $c \geq N$  且  $c \equiv r \pmod{q}$  时,  $\text{SUB}(S \cup \{c\})$  的预周期和周期分别是  $\alpha_r c + \beta_r$  和  $\lambda_r c + \mu_r$ .

### 定理

上述猜想在如下情形成立:

- (1)  $1 \in S$  且  $S$  所有元素均为奇数;
- (2)  $S = \{1, b\}$ ;
- (3)  $S = \{a, 2a\}$ ;
- (4)  $S = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$ .

这个猜想可以指导我们寻找特定周期的 SG 数列. 如果  $\mathcal{G}_S$  的周期为 2, 称  $\text{SUB}(S)$  是最终二分的. 可以证明如果  $\text{SUB}(S)$  是最终二分的, 则  $S$  不含偶数.

### 例

设  $a \geq 3$  是奇数. 如果  $S$  是如下情形之一:

- $S = \{3, 5, 9, \dots, 2^a + 1\};$
- $S = \{3, 5, 2^a + 1\};$
- $S = \{a, a + 2, 2a + 3\};$
- $S = \{a, 2a + 1, 3a\},$

则  $\text{SUB}(S)$  是最终二分的.

根据上面的例子和猜想的启发, 我们发现了如下三元最终二分  $\text{SUB}(S)$ .

### 定理

设  $a \geq 3$  是奇数,  $t \geq 1$ . 如果  $S$  是如下情形之一:

- (1)  $S = \{a, a + 2, (2a + 2)t + 1\}$ ;
- (2)  $S = \{a, 2a + 1, (3a + 1)t - 1\}$ ;
- (3)  $S = \{a, 2a - 1, (3a - 1)t + a - 2\}$ ,

则  $\text{SUB}(S)$  是最终二分的.

对于四元情形, 我们通过计算发现了当  $3 \leq a \leq 25, c < 500$  且  $c \not\equiv \pm 1 \pmod{a}$  时,  $\text{SUB}(\{a, 2a + 1, 3a, c\})$  是最终二分的.

# 谢谢!