HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

线性代数

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第三章　相似和合同

❶ 实对称阵的合同

第一节　实对称阵的合同

- 惯性指数
- 实二次型规范形
- 正定二次型

引例：二次曲线的分类

设 A, B, C 是不全为零的实数. 二次曲线 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ 左侧的实二次型对应方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$. 由

$$|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} A - \lambda & B/2 \\ B/2 & C - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2/4)$$

可知,

(1) 当 $B^2 - 4AC > 0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 特征值一正一负, 从而通过正交变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ 可知该曲线为双曲线.

(2) 同理, $B^2 - 4AC < 0$ 时该曲线为椭圆 (或空集);

(3) $B^2 - 4AC = 0$ 时该曲线为双曲线.

可以看出我们有时候只关心实二次型对应的矩阵的特征值的符号.

定义

称实二次型 f 对应矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 f 的秩.

对于可逆阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 的秩和 $\boldsymbol{A}$ 相同. 因此若可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将 f 变为标准形, 则 y_i^2 系数非零为恰有 r 个.

定理 (惯性定理)

设实二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 r. 若可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{z}$ 分别将 f 变为

$$f=k_1y_1^2+\cdots+k_ry_r^2$$
$$f=\ell_1z_1^2+\cdots+\ell_rz_r^2,$$

则 $k_1,\ldots,k_r$ 中正的个数和 $\ell_1,\ldots,\ell_r$ 中正的个数相同.

证明

由题设可知

$$\boldsymbol{B} := \operatorname{diag}(k_1, \dots, k_r, 0, \dots, 0) = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},$$
$$\boldsymbol{C} := \operatorname{diag}(\ell_1, \dots, \ell_r, 0, \dots, 0) = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}.$$

设 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)$, 则

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R} = \operatorname{diag}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, k_r\boldsymbol{\alpha}_r^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_r, 0, \dots, 0).$$

从而 $\ell_i = k_i\|\boldsymbol{\alpha}_i\|^2$, 二者符号相同. □

定义

把 f 标准型系数中为正数的个数称为实二次型 f 的正惯性指数 p, 为负数的个数称为实二次型 f 的负惯性指数 $q = r - q$.

推论

实二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正 (负) 惯性指数等于实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的正 (负) 特征值的个数.

推论

设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 均为 n 阶实对称阵. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数等于 $\boldsymbol{B}$ 的正特征值的个数, 且 $\boldsymbol{A}$ 的负特征值的个数等于 $\boldsymbol{B}$ 的负特征值的个数.

例

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 合同于 (D).

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

例

矩阵 $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}$(B).

(A) 合同且相似 (B) 合同但不相似
(C) 不合同但相似 (D) 既不合同也不相似

对于三元实二次型, 正负惯性指数确定了二次曲面的类别.

(1) $p=3, q=0$ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

(2) $p=2, q=1$ 为单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

(3) $p=1, q=2$ 为双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

(4) $p=2, q=0$ 为椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

(5) $p=1, q=1$ 为双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

定义

若实二次型的标准形的系数只在 $1, 0, 1$ 三个数中取值，则称此实二次型为**规范形**.

定理

任意一个实二次型总可经过适当的可逆线性变换化为规范形，且规范形是唯一的 (可任意交换变量顺序):

$$f = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

其中 p, q 分别为正负惯性指数.

推论

任意 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_q & \\ & & \boldsymbol{O}_{n-p-q} \end{pmatrix},$$

其中 p, q 分别为正负特征值个数 (计算重数), $R(\boldsymbol{A}) = p + q$.

例

若实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, 则通过可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可将二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为规范形 $\underline{\quad y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \quad}$.

定义

设 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是二次型.

(1) 若对任意 $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, 都有 $f(\boldsymbol{x})>0$, 则称 f 为正定二次型, 并称实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵, 也记作 $\boldsymbol{A}>0$.

(2) 若对任意 $\boldsymbol{x}$, 都有 $f(\boldsymbol{x})\geqslant 0$, 则称 f 为半正定二次型, 并称实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为半正定矩阵, 也记作 $\boldsymbol{A}\geqslant 0$.

(3) 若 $-f$ 正定, 则称 f 为负定二次型, 并称实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为负定矩阵, 也记作 $\boldsymbol{A}<0$.

(4) 若 $-f$ 半正定, 则称 f 为半负定二次型, 并称实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为半负定矩阵, 也记作 $\boldsymbol{A}\leqslant 0$.

(5) 除此之外, 称 f 不定.

可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 不会影响正定性. $\boldsymbol{A}$ 正定 $\iff$ $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 正定.

例：正定和负定

例

(1) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$ 半正定.

(2) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2+x_3^2$ 不定.

(3) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 正定.

(4) $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2$ 半正定.

(5) 椭球面 $f(x,y,z)=1$ 对应的二次型正定.

(6) 单叶/双叶双曲面 $f(x,y,z)=1$ 对应的二次型不定.

正定的判定

定理

设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称阵, $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. 如下命题等价:

(1) $\boldsymbol{A}>0$ 正定, 即 f 正定.

(2) f 的正惯性指数为 n, 即 $\boldsymbol{A}$ 特征值全为正.

(3) 存在正交阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$.

(4) (赫尔维茨 (Hurwitz) 定理) $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式都为正, 即

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}>0,\quad \ldots,\quad |\boldsymbol{A}|>0.$$

将(4)中 $>$ 换成 $\geqslant$ 即可判断半正定, 这也等价于 f 的负惯性指数为 0, 即 $\boldsymbol{A}$ 特征值全非负.

推论

若 $\boldsymbol{A}$ 正定，则 $|\boldsymbol{A}|>0$ 且对角元全为正.

例

若 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 正定，求 t 的取值范围.

解

f 对应 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&t/2\\0&t/2&1\end{pmatrix}$，顺序主子式 $2>0,\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1>0,|\boldsymbol{A}|=1-\dfrac{t^2}{2}>0$ 得到 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

例：正定的性质和判定

例

判别二次型 $f=-5x^2-6y^2-4z^2+4xy+4xz$ 是否正定.

解

由于 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-5&2&2\\2&-6&0\\2&0&-4\end{pmatrix}$. 顺序主子式 $-5<0$, 因此不是正定的.

或由 $f(1,0,0)<0$ 得到.

例

若实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 正定, 证明 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|>1$.

证明

由 $\boldsymbol{A}$ 正定可知其特征值均为正, 从而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 特征值都大于 1. 从而 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|>1$. □

例

设 3 阶实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}, R(\boldsymbol{A})=2$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

(2) 当 k 为何值时, 矩阵 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 为正定矩阵.

解

(1) 由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值满足 $\lambda^2+2\lambda=0, \lambda=0,-2$. 由 $R(\boldsymbol{A})=2$ 可知 $\boldsymbol{A}$ 特征值为 $0,-2,-2$.

(2) $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 特征值为 $k, k-2, k-2$. 因此 $k>2$.

例

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 实矩阵且 $R(\boldsymbol{A}) = n$. 证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定.

证明

显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是对称的. 注意到

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|.$$

由于 $R(\boldsymbol{A}) = n$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解. 因此当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, 从而

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| > 0. \qquad \square$$

例

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵. 证明 $R(\boldsymbol{A})=n \iff$ 存在一个 n 阶实方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 正定.

证明

显然 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是对称的，且

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bx}+(\boldsymbol{Bx})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})=2[\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Bx}].$$

若 $R(\boldsymbol{A})=n$，令 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，则当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{Ax}\neq\boldsymbol{0}$，从而

$$[\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Bx}]=\|\boldsymbol{Ax}\|>0.$$

若 $R(\boldsymbol{A})<n$，则存在 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，从而 $[\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{Bx}]=0$，$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 不正定. □

例

设二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. 证明：当 $\|x\|=1$ 时，$f(\boldsymbol{x})$ 的最大 (小) 值为实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大 (小) 特征值.

证明

将 $\boldsymbol{A}$ 的特征值排序为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$. 存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 使得

$$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n),\quad f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

由于正交变换保持长度，因此 $\|\boldsymbol{x}\|=1\iff\|\boldsymbol{y}\|=1$.

$$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\leqslant\lambda_1(y_1^2+\cdots+y_n^2)=\lambda_1,$$

且等式可在 $\boldsymbol{y}=(1,0,\ldots,0)$ 处取得.

$$f=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\geqslant\lambda_n(y_1^2+\cdots+y_n^2)=\lambda_n,$$

且等式可在 $\boldsymbol{y}=(0,\ldots,0,1)$ 处取得. 故 f 的最大值为 λ_1，最小值为 λ_n. □