3.2 求导的运算法则

- 求导的四则运算法则
- 和极限、连续性类似，函数的四则运算也可以继承可导性.
- **定理** 设函数 $u(x), v(x)$ 均在点 x 处可导，则
- (1) 函数 $f(x) = u(x) \pm v(x)$ 在点 x 处可导，且

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x).$$

- (2) 函数 $f(x) = u(x)v(x)$ 在点 x 处可导，且

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

- (3) 函数 $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $(v(x) \neq 0)$ 在点 x 处可导，且

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

- 证明 (1) 由 $f(x+\Delta x)-f(x)=[u(x+\Delta x)-u(x)]\pm[v(x+\Delta x)-v(x)]$ 可知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]$$
$$=u'(x)\pm v'(x),$$

- 因此 $f'(x)$ 存在且 $f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$.
- (2) 由 $f(x+\Delta x)-f(x)=u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)$
- $=[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x+\Delta x)+u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]$ 可知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]$$
$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

- 因此 $f'(x)$ 存在且 $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

- **证明** (3) 设 $g(x)=\frac{1}{v(x)}$. 由 $g(x+\Delta x)-g(x)=-\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{v(x)v(x+\Delta x)}$ 可知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{v(x)v(x+\Delta x)}\right]$$

$$=-\frac{v'(x)}{v^2(x)},$$

- 因此 $g'(x)$ 存在且 $g'(x)=-\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.
- 由(2)可知 $f'(x)$ 存在且

$$f'(x)=u'(x)g(x)+u(x)g'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

- 推论 设函数 $u(x), v(x)$ 均在点 x 处可导, 则
- (1) $(Cu)'(x) = Cu'(x)$.
- (2) $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.
- 求导法则可以简记为

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (Cu)'(x) = Cu' \quad \text{(线性)}$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{(莱布尼兹法则)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

- 自然地，对于有限个 $u_1, \dots, u_n$,

$$(C_1u_1 + C_2u_2 \cdots + C_nu_n)' = C_1u_1' + C_2u_2' \cdots + C_nu_n' = \sum_{i=1}^{n} C_iu_i',$$

$$(u_1u_2\cdots u_n)' = u_1'u_2\cdots u_n + u_1u_2'\cdots u_n + \cdots + u_1u_2\cdots u_n' = \sum_{i=1}^{n} u_1 \dots u_i' \dots u_n,$$

- 例如

$$(u + 2v - w)' = u' + 2v' - w',$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

- 例 $(x^2)' = 2x.$
- 证明 由函数乘法的求导法则(莱布尼兹法则)可知
- $(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = x + x = 2x.$
- 一般地, 对任意正整数 n, $(x^n)' = nx^{n-1}.$
- 例 求函数 $f(x) = 2x^n - \mathrm{e}^x + \sin x + \cos\frac{\pi}{4}$ 的导数.
- 解 $f'(x) = 2(x^n)' - (\mathrm{e}^x)' + (\sin x)' + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)'$
- $= 2nx^{n-1} - \mathrm{e}^x + \cos x\,.$

- 例 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)$ 的导数.
- 解 $f'(x)=(\mathrm{e}^x)'\cdot(\sin x-\cos x)+\mathrm{e}^x\cdot(\sin x-\cos x)'$
- $=\mathrm{e}^x\cdot(\sin x-\cos x)+\mathrm{e}^x\cdot(\cos x+\sin x)=2\mathrm{e}^x\sin x$.
- 例 求函数 $f(x)=\tan x$ 的导数.
- 解 $f'(x)=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}$
- $=\dfrac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$.
- 同理 $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$.

- 例 求函数 $f(x)=\sec x$ 的导数.
- 解 $f'(x)=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=-\dfrac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=-\tan x\sec x$.
- 同理 $(\csc x)'=-\cot x\csc x$.
- 总结一下

$$(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=\sin x,$$

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,\quad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x,$$

$$(\sec x)'=-\tan x\sec x,\quad (\csc x)'=-\cot x\csc x.$$

- 反函数的求导法则
- **定理** 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内单调连续，且在点 x 处可导，$f'(x_0)\neq 0$，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 处可导，且

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}\quad \left(\text{即 } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}\right)$$

- **证明** 设 $\Delta x=x-x_0, \Delta y=f(x)-f(x_0)$. 由于 $y=f(x)$ 在点 x 处连续，因此 $\Delta x\to 0$ 能推出 $\Delta y\to 0$.
- 由于函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内单调连续，因此其反函数 $x=\varphi(y)$ 在点 $y_0=f(x_0)$ 的某个邻域内单调连续，从而 $\Delta y\to 0$ 能推出 $\Delta x\to 0$.
- 故 $\varphi'(y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta y/\Delta x}=\frac{1}{f'(x_0)}$.

- 换言之，

$$\text{反函数的导数} = \frac{1}{\text{函数的导数}}.$$

- 例 求函数 $f(x) = \arcsin x \ (-1 < x < 1)$ 的导数.
- 解 我们知道 $y = \arcsin x \ (-1 < x < 1)$ 是单调可导函数 $x = \sin y \ \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数.
- 由于 $(\sin y)' = \cos y$，因此 $f'(x) = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，即

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (-1 < x < 1).$$

- **例** 求函数 $f(x)=\arctan x$ 的导数.
- **解** 我们知道 $y=\arctan x$ 是单调可导函数 $x=\tan y$ 的反函数.
- 由于 $(\tan y)'=\dfrac{1}{\cos^2 y}$, 因此

$$f'(x)=\cos^2 y=\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y+\sin^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2},$$

- 即

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

- 由于

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},\ (-1\leq x\leq 1)$$

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2},$$

- 因此

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1<x<1),\quad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

- 例 求函数 $f(x)=\log_a x\ (a>0, a\neq 1)$ 的导数.
- 解 我们知道 $y=\log_a x$ 是单调可导函数 $x=a^y$ 的反函数.
- 由于 $(a^y)'=a^y\ln a$, 因此

$$f'(x)=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a},$$

- 即

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

- 特别地, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

- 复合函数的求导法则
- 定理 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处可导，函数 $y=f(u)$ 在点 $\varphi(x_0)$ 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处可导，且

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=f'[\varphi(x_0)]\cdot\varphi'(x_0)\quad \left(\text{即 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)$$

- 证明 设 $\Delta x=x-x_0, \Delta u=\varphi(x)-\varphi(x_0), \Delta y=f[\varphi(x)]-f[\varphi(x_0)]$.
- 由于函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，函数 $y=f(u)$ 在点 $\varphi(x_0)$ 处连续，因此 $\Delta x\to 0\Rightarrow \Delta u\to 0\Rightarrow \Delta y\to 0$.
- 故 $(f\circ\varphi)'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$
- $=\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\cdot\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\left(\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\cdot\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=f'[\varphi(x_0)]\cdot\varphi'(x_0).$

- 换言之，

复合函数的导数 = 外函数的导数 × 内函数的导数.

- 复合函数的求导法则也被称为链式法则，它可以推广到多重复合函数的情形，例如 $y = f(u), u = \varphi(v), v = \psi(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

- 复合函数求导的关键在于复合函数的分解.
- 注意，一般 $(f \circ \varphi)'(x_0) \neq f'(x_0) \cdot \varphi'(x_0)$.

- 例 求函数 $f(x)=\sin(1-2x^2)$ 的导数.
- 令 $u(x)=1-2x^2$, 则 $y=\sin u$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\cos u$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-2\cdot 2x=-4x$,
  再由链式法则得到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.
- 解 $f'(x)=\cos(1-2x^2)\cdot(-4x)=-4x\cos(1-2x^2)$.
- 例 求函数 $f(x)=\ln(2+\sin x)$ 的导数.
- 令 $u(x)=2+\sin x$, 则 $y=\ln u$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\dfrac{1}{u}$, $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos x$, 再由链式法则得到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.
- 解 $f'(x)=\dfrac{1}{2+\sin x}\cdot\cos x=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$.

- 例 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2+1}$ 的导数.
- 解 $f'(x)=\mathrm{e}^{x^2+1}\cdot(2x)=2x\mathrm{e}^{x^2+1}$.
- 例 求函数 $f(x)=2^{\arctan\left(x^2+1\right)}$ 的导数.
- 解 $f'(x)=\ln 2\cdot 2^{\arctan\left(x^2+1\right)}\cdot\dfrac{1}{1+\left(x^2+1\right)^2}\cdot 2x$
- $=2^{\arctan\left(x^2+1\right)+1}\cdot\dfrac{x\ln 2}{1+\left(x^2+1\right)^2}$.
- 例 求函数 $f(x)=\ln(\cos(\mathrm{e}^x))$ 的导数.
- 解 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}\cdot(-\sin(\mathrm{e}^x))\cdot\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x)$.

- 可导函数的奇偶性和周期性
- 定理 (1) 若奇函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 $-x_0$ 处可导, 且 $f'(-x_0)=f'(x_0)$, $f'(x)$ 是偶函数.
- (2) 若偶函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 $-x_0$ 处可导, 且 $f'(-x_0)=-f'(x_0)$, $f'(x)$ 是奇函数.
- 证明 (1) $f'(-x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-x_0+\Delta x)-f(-x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$
- $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$.
- (2) $f'(-x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(-x_0+\Delta x)-f(-x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
- $=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-f'(x_0)$.

- 定理 若周期为 T 的函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 x_0+T 处可导, 且 $f'(x_0+T)=f'(x_0)$, $f'(x)$ 是周期为 T 的函数.
- 证明 $f'(x_0+T)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+T+\Delta x)-f(x_0+T)}{\Delta x}$
- $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$
- 注意该命题的逆命题不成立, 例如 $f(x)=x+\sin x$, $f'(x)=1+\cos x$.

- 例 求函数 $f(x)=x^{\mu}$ 的导数.
- 解 我们先考虑 $x>0$ 情形. 由于 $f(x)=\mathrm{e}^{\mu\ln x}$, 因此

$$f'(x)=\mathrm{e}^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)'=x^{\mu}\cdot\frac{\mu}{x}=\mu x^{\mu-1}.$$

- 当 $\mu=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ 时, 若 p,q 均为奇数, 则 $f(x)$ 为奇函数, $x<0$ 时,
- $f'(x)=f'(-x)=\mu(-x)^{\mu-1}=\mu(-x)^{\frac{p-q}{q}}=\mu x^{\frac{p-q}{q}}=\mu x^{\mu-1}.$
- 若 p 为偶数, q 为奇数, 则 $f(x)$ 为偶函数, $x<0$ 时,
- $f'(x)=-f'(-x)=-\mu(-x)^{\mu-1}=-\mu(-x)^{\frac{p-q}{q}}=\mu x^{\frac{p-q}{q}}=\mu x^{\mu-1}.$

- 不难看出, 若 $\mu > 1$, 则 $f'(0) = 0$; 若 $\mu = 1$, 则 $f'(0) = 1$; , 若 $0 < \mu < 1$, 则 $f'(0)$ 不存在.
- 综上所述,

$$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

- 对任意 $\mu \in \mathbb{R}$ 以及任意属于该函数定义域开区间内的 x 成立.
- 特别地,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ (x > 0),\quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\ (x \neq 0).$$

- 例 求函数 $f(x)=\operatorname{sh}x=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 的导数.
- 解 $f'(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^{x})'-(\mathrm{e}^{-x})'}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\cdot(-x)'}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x.$
- 同理 $(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x$，$(\operatorname{th}x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$
- 例 求函数 $f(x)=\ln|x|\ (x\neq 0)$ 的导数.
- 解 当 $x>0$ 时, $f'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.$
- 当 $x<0$ 时, $f'(x)=(\ln(-x))'=\dfrac{1}{-x}\cdot(-x)'=\dfrac{1}{x}.$ 也可由偶函数性质得到.
- 所以 $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}\ (x\neq 0).$

- 例 求函数 $f(x)=\operatorname{arsh}x=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 的导数.
- 解 $f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'$
- $=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left[1+\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(1+x^2)'\right]$
- $=\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,
- 即 $(\operatorname{arsh}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
- 这里 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+C}}\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+C}}$ 也是常见结论.

- 同理

$$(\operatorname{arch} x)' = \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\operatorname{arth} x)' = \left[\frac{1}{2}\ln\frac{1 - x}{1 + x}\right]' = \frac{1}{1 - x^2}.$$

- 基本导数公式
- $(C)' = 0$
- $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$，$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
- $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$，$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
- $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
- $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
- $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$
- 求导法则

$$(u+v)' = u' + v',\quad (Cu)' = Cu'$$

$$(uv)' = u'v + uv',\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2},\quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$(f\circ\varphi)'(x) = f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x) \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}.$$

- 前面我们已经介绍了诸多求导法则和基本初等函数的求导公式，我们可以把它们综合起来加以运用.
- 例 求函数 $f(x)=x^2\sin \mathrm{e}^x$ 的导数.
- 解 $f'(x)=2x\sin \mathrm{e}^x+x^2\cdot(\sin \mathrm{e}^x)'$
- $=2x\sin \mathrm{e}^x+x^2\cdot\cos \mathrm{e}^x\cdot \mathrm{e}^x=2x\sin \mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x\cos \mathrm{e}^x.$
- 例 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln\cos x^2}$ 的导数.
- 解 $f(x)=\dfrac{1}{\ln\cos x^2}=-\dfrac{1}{(\ln\cos x^2)^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x^2}\cdot(-\sin x^2)\cdot(2x)$
- $=-\dfrac{2x\sin x^2}{\cos x^2\ (\ln\cos x^2)^2}.$

- 例 求函数 $f(x) = x\arctan(x^2)$ 的导数.
- 解 $f'(x) = \arctan(x^2) + x \cdot [\arctan(x^2)]'$
- $= \arctan(x^2) + x \cdot \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot (x^2)' = \arctan(x^2) + \frac{2x^2}{1+x^4}$.
- 例 求函数 $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ 的导数以及 $f'(1)$.
- 解 由于 $f(x) = -1 + \frac{2}{1+\sqrt{x}}$, 因此

$$f'(x) = \left[\frac{2}{1+\sqrt{x}}\right]' = -\frac{2}{(1+\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}, \quad f'(1) = -\frac{1}{4}.$$