



复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

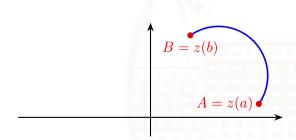
第三章 复变函数的积分

- 1 复变函数积分的概念
- 2 柯西-古萨基本定理和复合闭路定理
- 3 原函数和不定积分
- 4 柯西积分公式
- 5 解析函数与调和函数的关系

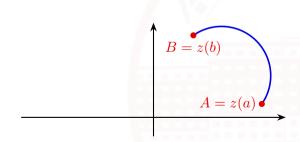
第一节 复变函数积分的概念

- ■复变函数积分的定义
- 复变函数积分的计算法

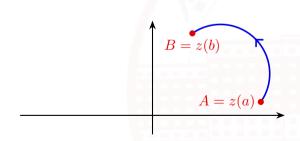
设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线,



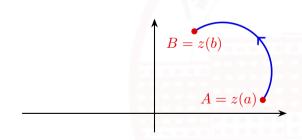
设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z=z(t), a \leqslant t \leqslant b$ 除去有限个点之外都有非零导数.



设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z=z(t), a\leqslant t\leqslant b$ 除去有限个点之外都有非零导数. 这里 z'(t)=x'(t)+iy'(t).

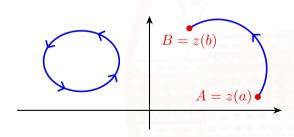


设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z=z(t), a \le t \le b$ 除去有限个点之外都有非零导数. 这里 z'(t)=x'(t)+iy'(t). 固定它的一个方向, 称为正方向, 则我们得到一条有向曲线.



设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z=z(t), a\leqslant t\leqslant b$ 除去有限个点之外都有非零导数. 这里 z'(t)=x'(t)+iy'(t).

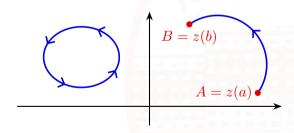
固定它的一个方向,称为正方向,则我们得到一条有向曲线。和这条曲线方向相反的记作 C^- ,它的方向被称为该曲线负方向。



设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z=z(t), a\leqslant t\leqslant b$ 除去有限个点之外都有非零导数. 这里 z'(t)=x'(t)+iy'(t).

固定它的一个方向,称为正方向,则我们得到一条有向曲线。和这条曲线方向相反的记作 C^- ,它的方向被称为该曲线负方向。

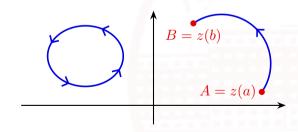
对于闭路, 它的正方向总是指逆时针方向, 负方向总是指顺时针方向.



设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程 $z=z(t), a\leqslant t\leqslant b$ 除去有限个点之外都有非零导数. 这里 z'(t)=x'(t)+iy'(t).

固定它的一个方向,称为正方向,则我们得到一条有向曲线。和这条曲线方向相反的记作 C^- ,它的方向被称为该曲线负方向。

对于闭路, 它的正方向总是指逆时针方向, 负方向总是指顺时针方向. 以后我们不加说明的话默认是正方向.



所谓的复变函数积分,本质上仍然是第二类曲线积分.

所谓的复变函数积分,本质上仍然是第二类曲线积分.设复变函数

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

定义在区域 D 内, 有向曲线 C 包含在 D 中.

所谓的复变函数积分, 本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

定义在区域 D 内, 有向曲线 C 包含在 D 中. 形式地展开

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy) = (u dx - v dy) + i(u dy + v dx).$$

所谓的复变函数积分, 本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

定义在区域 D 内, 有向曲线 C 包含在 D 中. 形式地展开

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + i dy) = (u dx - v dy) + i(u dy + v dx).$$

定义

如果下述右侧两个线积分均存在,则定义

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy)$$

为 f(z) 沿曲线 C 的积分.

当然, 我们也可以像线积分那样通过分割来定义.

当然, 我们也可以像线积分那样通过分割来定义. 在曲线 C 上依次选择分点

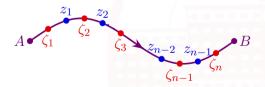
$$z_0 = A, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = B.$$



当然,我们也可以像线积分那样通过分割来定义。在曲线 C 上依次选择分点

$$z_0=A,z_1,\ldots,z_{n-1},z_n=B$$
. 然后在每一段弧上任取 $\zeta_k\in\widehat{z_{k-1}z_k}$ 并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

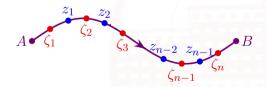


当然,我们也可以像线积分那样通过分割来定义。在曲线 C 上依次选择分点

$$z_0=A,z_1,\ldots,z_{n-1},z_n=B$$
. 然后在每一段弧上任取 $\zeta_k\in\widehat{z_{k-1}z_k}$ 并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

然后称 $n \to \infty$, 分割的最大弧长 $\to 0$ 时 S_n 的极限为复变函数积分.

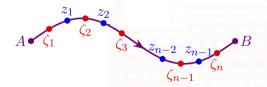


当然,我们也可以像线积分那样通过分割来定义。在曲线 C 上依次选择分点

$$z_0=A,z_1,\ldots,z_{n-1},z_n=B$$
. 然后在每一段弧上任取 $\zeta_k\in\widehat{z_{k-1}z_k}$ 并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

然后称 $n \to \infty$, 分割的最大弧长 $\to 0$ 时 S_n 的极限为复变函数积分. 这二者是等价的.



如果 C 是闭路, 则该积分记为 $\oint_C f(z) dz$.



如果 C 是闭路, 则该积分记为 $\oint_C f(z) dz$. 此时该积分不依赖端点的选取.

如果 C 是闭路, 则该积分记为 $\oint_C f(z) dz$. 此时该积分不依赖端点的选取.

如果 C 是实轴上的区间 [a,b] 且 f(z) = u(x),

如果 C 是闭路, 则该积分记为 $\oint_C f(z) dz$. 此时该积分不依赖端点的选取.

如果 C 是实轴上的区间 [a,b] 且 f(z)=u(x), 则

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b u(x) dx$$

就是黎曼积分.

如果 C 是闭路, 则该积分记为 $\oint_C f(z) dz$. 此时该积分不依赖端点的选取.

如果 C 是实轴上的区间 [a,b] 且 f(z)=u(x), 则

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b u(x) dx$$

就是黎曼积分.

根据线积分的存在性条件可知:

如果 C 是闭路, 则该积分记为 $\oint_C f(z) dz$. 此时该积分不依赖端点的选取.

如果 C 是实轴上的区间 [a,b] 且 f(z)=u(x), 则

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b u(x) dx$$

就是黎曼积分.

根据线积分的存在性条件可知:

定理

如果 f(z) 在 D 内连续, C 是光滑曲线, 则 $\int_C f(z) dz$ 总存在.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C: z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向,

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C: z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则 dz = z'(t) dt = (x'(t) + y'(t)) dt.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C: z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则 dz = z'(t) dt = (x'(t) + y'(t)) dt.

复变函数积分计算方法 |

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt.$$

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C: z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则 dz = z'(t) dt = (x'(t) + y'(t)) dt.

复变函数积分计算方法 |

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt.$$

如果 C 的正方向是从 z(b) 到 z(a),则需要交换右侧积分的上下限.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C: z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则 dz = z'(t) dt = (x'(t) + y'(t)) dt.

复变函数积分计算方法 |

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt.$$

如果 C 的正方向是从 z(b) 到 z(a), 则需要交换右侧积分的上下限.

如果 C 是逐段光滑的,则相应的积分就是各段的积分之和.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C: z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为 t 增加的方向, 则 dz = z'(t) dt = (x'(t) + y'(t)) dt.

复变函数积分计算方法 |

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t))z'(t) dt.$$

如果 C 的正方向是从 z(b) 到 z(a), 则需要交换右侧积分的上下限.

如果 C 是逐段光滑的,则相应的积分就是各段的积分之和.以后我们只考虑逐段光滑曲线上的连续函数的积分.

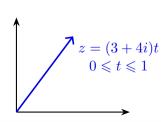
 $=\int_C z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 3+4i 的直线段.



 $\int_C z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 3+4i 的直线段.

解

由于 $z = (3+4i)t, 0 \leqslant t \leqslant 1$,



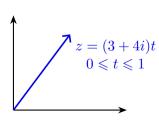
例

 $\mathcal{E}\int_C z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 3+4i 的直线段.

解

由于 $z = (3+4i)t, 0 \le t \le 1$, 因此

$$\int_{C} z \, dz = \int_{0}^{1} (3+4i)t \cdot (3+4i) \, dt$$



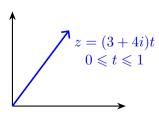
例

求 $\int_C z \, dz$, 其中 C 是从原点到点 3+4i 的直线段.

解

由于 $z = (3+4i)t, 0 \le t \le 1$, 因此

$$\int_C z \, dz = \int_0^1 (3+4i)t \cdot (3+4i) \, dt = (3+4i)^2 \int_0^1 t \, dt$$



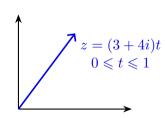
例

求 $\int_C z \, dz$, 其中 C 是从原点到点 3+4i 的直线段.

解

由于 $z = (3+4i)t, 0 \le t \le 1$, 因此

$$\int_C z \, dz = \int_0^1 (3+4i)t \cdot (3+4i) \, dt = (3+4i)^2 \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}(3+4i)^2 = -\frac{7}{2} + 12i.$$



-- 例

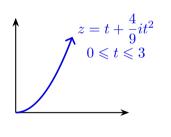
求 $\int_C z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是抛物线 $y = \frac{4}{9}x^2$ 上从原点到点 3+4i 的曲线段.

例

求 $\int_C z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是抛物线 $y = \frac{4}{9}x^2$ 上从原点到点 3+4i 的曲线段.

解

由于 $z = t + \frac{4}{9}it^2, 0 \le t \le 3$,



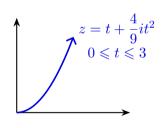
例

求 $\int_C z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是抛物线 $y = \frac{4}{9}x^2$ 上从原点到点 3+4i 的曲线段.

解

由于
$$z = t + \frac{4}{9}it^2, 0 \le t \le 3$$
, 因此

$$\int_C z \, \mathrm{d}z = \int_0^3 \left(t + \frac{4}{9} i t^2 \right) \cdot \left(1 + \frac{8}{9} i t \right) \, \mathrm{d}t$$



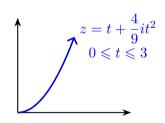
例

求 $\int_C z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是抛物线 $y = \frac{4}{9}x^2$ 上从原点到点 3+4i 的曲线段.

解

由于 $z = t + \frac{4}{9}it^2, 0 \le t \le 3$, 因此

$$\int_C z \, dz = \int_0^3 \left(t + \frac{4}{9} i t^2 \right) \cdot \left(1 + \frac{8}{9} i t \right) dt$$
$$= \int_0^3 \left(t + \frac{4}{3} i t^2 - \frac{32}{81} t^3 \right) dt$$



例

求 $\int_C z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是抛物线 $y = \frac{4}{9}x^2$ 上从原点到点 3+4i 的曲线段.

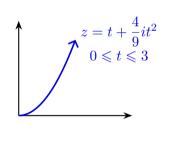
解

由于
$$z = t + \frac{4}{9}it^2, 0 \le t \le 3$$
, 因此

$$\int_C z \, dz = \int_0^3 \left(t + \frac{4}{9}it^2 \right) \cdot \left(1 + \frac{8}{9}it \right) dt$$

$$= \int_0^3 \left(t + \frac{4}{3}it^2 - \frac{32}{81}t^3 \right) dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{9}it^3 - \frac{8}{81}t^4 \right) \Big|_0^3$$



例

求 $\int_C z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是抛物线 $y = \frac{4}{9}x^2$ 上从原点到点 3+4i 的曲线段.

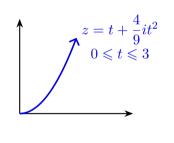
解

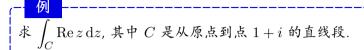
由于
$$z = t + \frac{4}{9}it^2, 0 \le t \le 3$$
, 因此

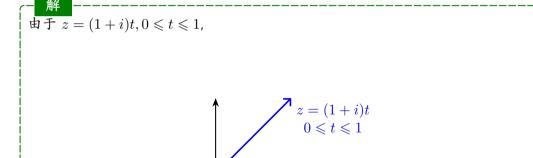
$$\int_C z \, dz = \int_0^3 \left(t + \frac{4}{9} i t^2 \right) \cdot \left(1 + \frac{8}{9} i t \right) dt$$

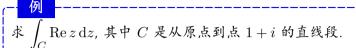
$$= \int_0^3 \left(t + \frac{4}{3} i t^2 - \frac{32}{81} t^3 \right) dt$$

$$= \left(\frac{1}{2} t^2 + \frac{4}{9} i t^3 - \frac{8}{81} t^4 \right) \Big|_0^3 = -\frac{7}{2} + 12i.$$

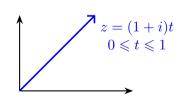




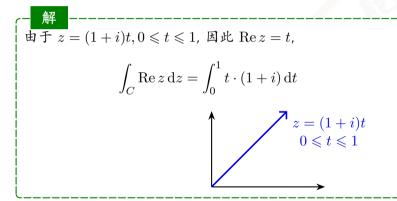




由于 $z = (1+i)t, 0 \le t \le 1$, 因此 $\operatorname{Re} z = t$,



求 $\int_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 1+i 的直线段.



由于 $z = (1+i)t, 0 \le t \le 1$, 因此 $\operatorname{Re} z = t$, $\int_{C} \operatorname{Re} z \, dz = \int_{0}^{1} t \cdot (1+i) \, dt = (1+i) \int_{0}^{1} t \, dt$

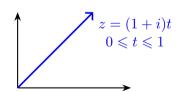
例

求 $\int_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 1+i 的直线段.

解

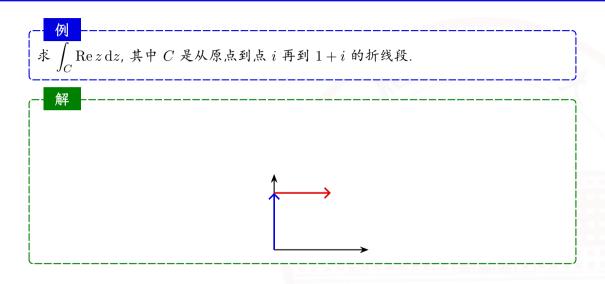
由于 $z = (1+i)t, 0 \le t \le 1$, 因此 $\operatorname{Re} z = t$,

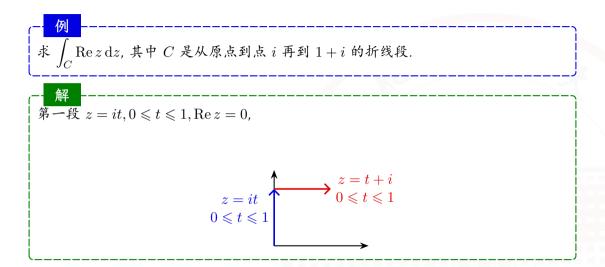
$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t \cdot (1+i) \, dt = (1+i) \int_0^1 t \, dt = \frac{1+i}{2}.$$



例

 $\int_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 i 再到 1+i 的折线段.





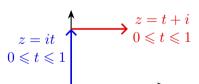
例

 $\int_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 i 再到 1+i 的折线段.

解

第一段 $z = it, 0 \le t \le 1, \operatorname{Re} z = 0,$

第二段 z = t + i. $0 \le t \le 1$. Re z = t.



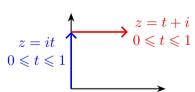
例

求 $\int_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 i 再到 1+i 的折线段.

解

第一段
$$z = it, 0 \le t \le 1, \operatorname{Re} z = 0$$
,

第二段 z=t+i, $0 \le t \le 1$, $\operatorname{Re} z=t$. 因此 $\int_C \operatorname{Re} z \, \mathrm{d} z = \int_0^1 t \, \mathrm{d} t = \frac{1}{2}$.

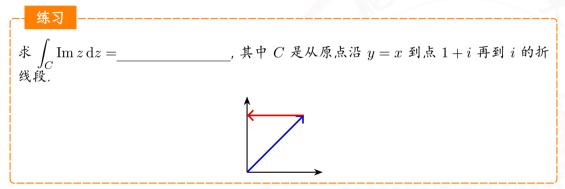


可以看出,即便起点和终点相同,沿不同路径 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 的积分也可能不同.

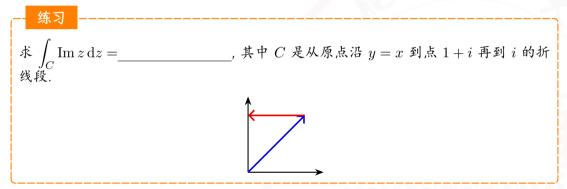
可以看出,即便起点和终点相同,沿不同路径 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 的积分也可能不同. 而 f(z) = z 的积分则只和起点和终点位置有关,与路径无关.

可以看出,即便起点和终点相同,沿不同路径 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 的积分也可能不同。而 f(z) = z 的积分则只和起点和终点位置有关,与路径无关。原因在于 f(z) = z 是处处解析的,我们以后会详加解释。

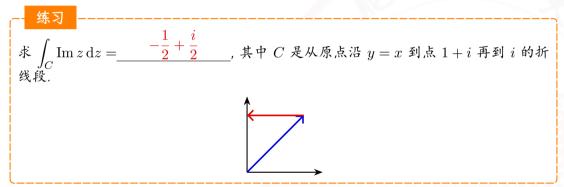
可以看出, 即便起点和终点相同, 沿不同路径 $f(z)=\mathrm{Re}\,z$ 的积分也可能不同. 而 f(z)=z 的积分则只和起点和终点位置有关, 与路径无关. 原因在于 f(z)=z 是处处解析的, 我们以后会详加解释.



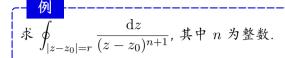
可以看出, 即便起点和终点相同, 沿不同路径 $f(z)=\mathrm{Re}\,z$ 的积分也可能不同. 而 f(z)=z 的积分则只和起点和终点位置有关, 与路径无关. 原因在于 f(z)=z 是处处解析的, 我们以后会详加解释.



可以看出, 即便起点和终点相同, 沿不同路径 $f(z)=\operatorname{Re} z$ 的积分也可能不同. 而 f(z)=z 的积分则只和起点和终点位置有关, 与路径无关. 原因在于 f(z)=z 是处处解析的, 我们以后会详加解释.







解

$$C: |z-z_0| = r$$
 的参数方程为 $z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$.

 $\vec{x} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$, 其中 n 为整数.

解

┌──例 お *↓*

$$\frac{\mathrm{d}z}{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$$
, 其中 n 为整数.

- 解

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} i(re^{i\theta})^{-n} \,\mathrm{d}\theta$$

--<mark>例</mark>

求
$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$$
, 其中 n 为整数.

- 解

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} i(re^{i\theta})^{-n} \,\mathrm{d}\theta = ir^{-n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta$$

--<mark>例</mark>

求 $\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$, 其中 n 为整数.

解

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} i(re^{i\theta})^{-n} \,\mathrm{d}\theta = ir^{-n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta$$
$$= ir^{-n} \int_0^{2\pi} (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \,\mathrm{d}\theta$$

--<mark>例</mark>

求 $\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$, 其中 n 为整数.

解

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} i(re^{i\theta})^{-n} \,\mathrm{d}\theta = ir^{-n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \,\mathrm{d}\theta
= ir^{-n} \int_0^{2\pi} (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 2\pi i, & \text{$\not\equiv$} n = 0; \\ 0, & \text{$\not\equiv$} n \neq 0. \end{cases}$$

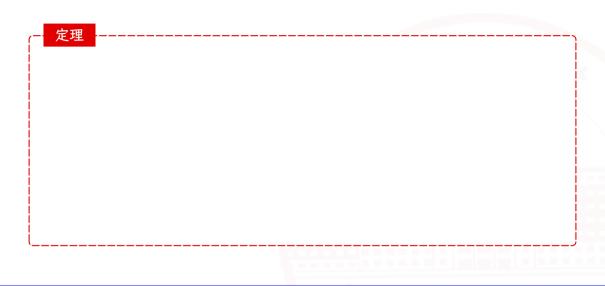
 $\vec{x} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$, 其中 n 为整数.

解

 $C: |z-z_0| = r$ 的参数方程为 $z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$. 于是 $dz = ire^{i\theta} d\theta$.

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} i(re^{i\theta})^{-n} \, \mathrm{d}\theta = ir^{-n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \, \mathrm{d}\theta
= ir^{-n} \int_0^{2\pi} (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \, \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 2\pi i, & \text{ \vec{x} } n = 0; \\ 0, & \text{ \vec{x} } n \neq 0. \end{cases}$$

这个积分以后经常用到, 它的特点是积分值与圆周的圆心和半径都无关.



定理

(1)
$$\int_C f(z) dz = -\int_{C^-} f(z) dz$$
.

定理

(1)
$$\int_C f(z) dz = -\int_{C^-} f(z) dz$$
.

(2)
$$\int_C kf(z) dz = k \int_C f(z) dz.$$

定理

- $(1) \int_C f(z) dz = \int_{C^-} f(z) dz.$
- (2) $\int_C kf(z) dz = k \int_C f(z) dz.$
- (3) $\int_C [f(z) \pm g(z)] dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz.$

线性性质

定理

$$(1) \int_C f(z) dz = - \int_{C^-} f(z) dz.$$

(2)
$$\int_C kf(z) dz = k \int_C f(z) dz$$
.

(3)
$$\int_C [f(z) \pm g(z)] dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz.$$

(4) (长大不等式) 设 C 的长度为 L, f(z) 在 C 上满足 $|f(z)| \leqslant M$, 则

$$\left| \int_{C} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \int_{C} |f(z)| \, \mathrm{d}s \leqslant ML.$$

线性性质



证明

我们来证明下(4). 由

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k) \Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)| \Delta s_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k$$

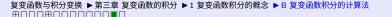
证明

我们来证明下(4). 由

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k) \Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)| \Delta s_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k$$

可知

$$\left| \int_C f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \int_C |f(z)| \, \mathrm{d}s \leqslant ML.$$



证明

我们来证明下(4). 由

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k) \Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)| \Delta s_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k$$

可知

$$\left| \int_C f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \int_C |f(z)| \, \mathrm{d}s \leqslant ML.$$

长大不等式常常用于证明等式: 估算一个积分和一个具体的数值之差不超过任意 给定的 ε . 从而得到二者相等.

证明

我们来证明下(4). 由

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k) \Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)| \Delta s_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k$$

可知

$$\left| \int_C f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \int_C |f(z)| \, \mathrm{d}s \leqslant ML.$$

长大不等式常常用于证明等式: 估算一个积分和一个具体的数值之差不超过任意给定的 ε , 从而得到二者相等.

注意到: 如果被积函数 f(z) 在 C 上的点都连续, 那么 |f(z)| 是 C 的参变量 $t \in [a,b]$ 的连续函数, 从而有界, 即存在 M 使得 $|f(z)| \leq M, \forall z \in C$.

设
$$f(z)$$
 在 $z \neq a$ 处连续,且 $\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = k$,则
$$\lim_{r \to 0} \oint_{|z-a|=r} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi i k.$$

设 f(z) 在 $z \neq a$ 处连续,且 $\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = k$,则 $\lim_{r \to 0} \oint_{|z-a|=r} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi i k.$

证明

 $orall \overline{\varepsilon} > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z-a| < \delta$ 时, $|(z-a)f(z) - k| \leqslant \varepsilon$.

设 f(z) 在 $z \neq a$ 处连续, 且 $\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = k$, 则 $\lim_{r \to 0} \oint_{|z-a|=r} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi i k.$

证明

 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z-a| < \delta$ 时, $|(z-a)f(z)-k| \leqslant \varepsilon$. 当 $0 < r < \delta$ 时,

$$\left| \oint_{|z-a|=r} f(z) \, \mathrm{d}z - 2\pi i k \right| = \left| \oint_{|z-a|=r} \left[f(z) - \frac{k}{z-a} \right] \, \mathrm{d}z \right|$$

设
$$f(z)$$
 在 $z \neq a$ 处连续, 且 $\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = k$, 则
$$\lim_{r \to 0} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz = 2\pi i k.$$

证明

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$$
 使得当 $|z - a| < \delta$ 时, $|(z - a)f(z) - k| \leqslant \varepsilon$. 当 $0 < r < \delta$ 时,
$$\left| \oint_{|z - a| = r} f(z) \, \mathrm{d}z - 2\pi i k \right| = \left| \oint_{|z - a| = r} \left[f(z) - \frac{k}{z - a} \right] \, \mathrm{d}z \right|$$
$$= \left| \oint_{|z - a| = r} \frac{(z - a)f(z) - k}{z - a} \, \mathrm{d}z \right|$$

设 f(z) 在 $z \neq a$ 处连续, 且 $\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = k$, 则 $\lim_{r \to 0} \oint_{|z-a|=r} f(z) \, \mathrm{d}z = 2\pi i k.$

证明

$$\begin{split} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \text{使得当} \ |z - a| < \delta \ \text{时}, \ |(z - a)f(z) - k| \leqslant \varepsilon. \ \text{当} \ 0 < r < \delta \ \text{时}, \\ \left| \oint_{|z - a| = r} f(z) \, \mathrm{d}z - 2\pi i k \right| &= \left| \oint_{|z - a| = r} \left[f(z) - \frac{k}{z - a} \right] \, \mathrm{d}z \right| \\ &= \left| \oint_{|z - a| = r} \frac{(z - a)f(z) - k}{z - a} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi \varepsilon. \end{split}$$

设 f(z) 在 $z \neq a$ 处连续, 且 $\lim_{z \to a} (z - a) f(z) = k$, 则 $\lim_{r \to 0} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz = 2\pi i k.$

证明

 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - a| < \delta$ 时, $|(z - a)f(z) - k| \leqslant \varepsilon$. 当 $0 < r < \delta$ 时, $\left| \oint_{|z - a| = r} f(z) \, \mathrm{d}z - 2\pi i k \right| = \left| \oint_{|z - a| = r} \left[f(z) - \frac{k}{z - a} \right] \, \mathrm{d}z \right|$ $= \left| \oint_{|z - a| = r} \frac{(z - a)f(z) - k}{z - a} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi \varepsilon.$

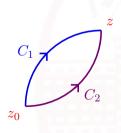
复变函数与积分变换 ▶第三章 复变函数的积分 ▶1 复变函数积分的概念 ▶B 复变函数积分的计算法

由于 ε 是任意的, 因此命题得证,

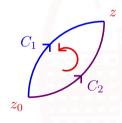
第二节 柯西-古萨基本定理和复合闭路定理

- 柯西-古萨基本定理
- 复合闭路定理

观察下方的两条曲线 C_1, C_2 .

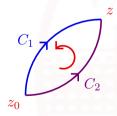


观察下方的两条曲线 C_1, C_2 . 设 $C = C_1^- + C_2$.



观察下方的两条曲线 C_1, C_2 . 设 $C = C_1^- + C_2$. 可以看出

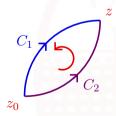
$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \iff \oint_C f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz = 0.$$



观察下方的两条曲线 C_1, C_2 . 设 $C = C_1^- + C_2$. 可以看出

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \iff \oint_C f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz = 0.$$

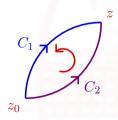
所以 f(z) 的积分只与起点终点有关 $\iff f(z)$ 绕任意闭路的积分为零.



观察下方的两条曲线 C_1, C_2 . 设 $C = C_1^- + C_2$. 可以看出

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \iff \oint_C f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz = 0.$$

所以 f(z) 的积分只与起点终点有关 \iff f(z) 绕任意闭路的积分为零. 这里, 如果 C 不是闭路 (有自相交的点), 也可以拆分为一些闭路的并.



上一节中我们计算了
$$f(z)=z, \operatorname{Re} z, \frac{1}{z-z_0}$$
 的积分.

上一节中我们计算了 $f(z)=z, \operatorname{Re} z, \frac{1}{z-z_0}$ 的积分. 其中

上一节中我们计算了
$$f(z)=z, \operatorname{Re} z, \frac{1}{z-z_0}$$
 的积分. 其中

• f(z) = z 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);

上一节中我们计算了
$$f(z) = z$$
, $\operatorname{Re} z$, $\frac{1}{z-z_0}$ 的积分. 其中

- f(z) = z 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ 有奇点 z_0 , 沿绕 z_0 闭路的积分非零;

上一节中我们计算了
$$f(z) = z$$
, $\operatorname{Re} z$, $\frac{1}{z-z_0}$ 的积分. 其中

- f(z) = z 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ 有奇点 z_0 , 沿绕 z_0 闭路的积分非零;
- $f(z) = \operatorname{Re} z$ 处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分可能非零).

上一节中我们计算了
$$f(z) = z$$
, $\operatorname{Re} z$, $\frac{1}{z-z_0}$ 的积分. 其中

- f(z) = z 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ 有奇点 z_0 , 沿绕 z_0 闭路的积分非零;
- $f(z) = \operatorname{Re} z$ 处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分可能非零).

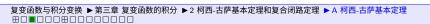
由此可见函数沿闭路积分为零,

上一节中我们计算了
$$f(z) = z$$
, $\operatorname{Re} z$, $\frac{1}{z-z_0}$ 的积分. 其中

- f(z) = z 处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ 有奇点 z_0 , 沿绕 z_0 闭路的积分非零;
- $f(z) = \operatorname{Re} z$ 处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分可能非零).

由此可见函数沿闭路积分为零,与函数在闭路内部是否解析有关.

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域.



设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 f(z) 在闭区域 $\overline{D} = D \cup C$ 上解析,

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 f(z) 在闭区域 $\overline{D} = D \cup C$ 上解析, 即存在区域 $B \supseteq \overline{D}$ 使得 f(z) 在 B 上解析.

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 f(z) 在闭区域 $\overline{D}=D\cup C$ 上解析, 即存在区域 $B\supseteq \overline{D}$ 使得 f(z) 在 B 上解析.

为了简便假设 f'(z) 连续,

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 f(z) 在闭区域 $\overline{D} = D \cup C$ 上解析, 即存 在区域 $B \supset \overline{D}$ 使得 f(z) 在 B 上解析.

为了简便假设 f'(z) 连续, 则

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy).$$

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 f(z) 在闭区域 $\overline{D}=D\cup C$ 上解析, 即存在区域 $B\supseteq \overline{D}$ 使得 f(z) 在 B 上解析.

为了简便假设 f'(z) 连续, 则

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy).$$

由格林公式和 C-R 方程可知

$$\oint_C f(z) dz = -\iint_D (v_x + u_y) dx dy + i \iint_D (u_x - v_y) dx dy = 0.$$

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 f(z) 在闭区域 $\overline{D}=D\cup C$ 上解析, 即存在区域 $B\supseteq \overline{D}$ 使得 f(z) 在 B 上解析.

为了简便假设 f'(z) 连续, 则

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C (u dx - v dy) + i \oint_C (v dx + u dy).$$

由格林公式和 C-R 方程可知

$$\oint_C f(z) dz = -\iint_D (v_x + u_y) dx dy + i \iint_D (u_x - v_y) dx dy = 0.$$

也可以从

$$\oint_C f(z) dz = -\iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dz d\overline{z} = 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} dx dy = 0$$

看出.

柯西-古萨基本定理

柯西-古萨基本定理

设 f(z) 在闭路 C 上连续, C 内部解析, 则 $\oint_C f(z) dz = 0$.

柯西-古萨基本定理

柯西-古萨基本定理

设 f(z) 在闭路 C 上连续, C 内部解析, 则 $\oint_C f(z) dz = 0$.

推论

设 f(z) 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条闭合曲线, 则 $\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0$.

柯西-古萨基本定理

柯西-古萨基本定理

设 f(z) 在闭路 C 上连续, C 内部解析, 则 $\oint_C f(z) dz = 0$.

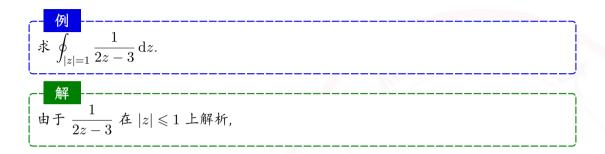
推论

设 f(z) 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条闭合曲线, 则 $\oint_C f(z) \,\mathrm{d}z = 0$.

这里的闭合曲线可以不是闭路.

典型例题: 柯西-古萨基本定理计算积分







觯

由于
$$\frac{1}{2z-3}$$
 在 $|z| \le 1$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz = 0$.

解

由于
$$\frac{1}{2z-3}$$
 在 $|z| \le 1$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz = 0$.

4. 5

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} \, \mathrm{d}z.$$

解

由于
$$\frac{1}{2z-3}$$
 在 $|z| \le 1$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz = 0$.

(1)
$$\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z^2+z} dz = \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\sum_{|z|=1}^{n} \frac{1}{2z-3} \, \mathrm{d}z.$$

解

由于
$$\frac{1}{2z-3}$$
 在 $|z| \le 1$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz = 0$.

(1)
$$\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z^2+z} dz = \underline{0}$$
.

例

$$_{|=1} \frac{1}{2z-3} \, \mathrm{d}z.$$

解

由于
$$\frac{1}{2z-3}$$
 在 $|z| \le 1$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz = 0$.

$$(1) \oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z^2 + z} \, \mathrm{d}z = \underline{0}.$$

例 -----

$$\frac{1}{2z-3}\,\mathrm{d}z.$$

解

由于
$$\frac{1}{2z-3}$$
 在 $|z| \le 1$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理 $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz = 0$.

$$(1) \oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z^2 + z} \, \mathrm{d}z = \underline{0}.$$



$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz$$
, 其中 $C: |z-i| = \frac{1}{2}$.

例

求
$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz$$
, 其中 $C: |z-i| = \frac{1}{2}$.

解

注意到
$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right).$$

例

求
$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz$$
, 其中 $C: |z-i| = \frac{1}{2}$.

解

注意到
$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right)$$
. 由于 $\frac{1}{z}, \frac{1}{z+i}$ 在 $|z-i| \leqslant \frac{1}{2}$ 上解析,

例

求
$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz$$
, 其中 $C: |z-i| = \frac{1}{2}$.

解

注意到
$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right)$$
. 由于 $\frac{1}{z}, \frac{1}{z+i}$ 在 $|z-i| \leqslant \frac{1}{2}$ 上解析,因

此由柯西-古萨基本定理

$$\oint_C \frac{1}{z} \, \mathrm{d}z = \oint_C \frac{1}{z+i} \, \mathrm{d}z = 0,$$

例

求
$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz$$
, 其中 $C: |z-i| = \frac{1}{2}$.

解

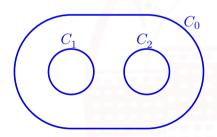
注意到
$$\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right)$$
. 由于 $\frac{1}{z}, \frac{1}{z+i}$ 在 $|z-i| \leqslant \frac{1}{2}$ 上解析,因此由柯西-古萨基本定理

 $\oint_{C} \frac{1}{z} dz = \oint_{C} \frac{1}{z + i} dz = 0,$

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz = -\frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{z-i} dz = -\pi i.$$

多连通域边界与复合闭路

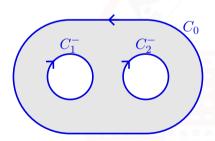
设 C_0, C_1, \ldots, C_n 是 n+1 条简单闭曲线, C_1, \ldots, C_n 每一条都包含在其它闭路的外部, 而且它们都包含在 C_0 的内部.



多连通域边界与复合闭路

设 C_0,C_1,\ldots,C_n 是 n+1 条简单闭曲线, C_1,\ldots,C_n 每一条都包含在其它闭路的外部, 而且它们都包含在 C_0 的内部. 这样它们围成了一个多连通区域 D, 它的边界称为一个复合闭路

$$C = C_0 + C_1^- + \dots + C_n^-.$$

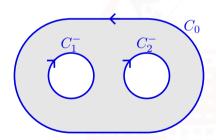


多连通域边界与复合闭路

设 C_0,C_1,\ldots,C_n 是 n+1 条简单闭曲线, C_1,\ldots,C_n 每一条都包含在其它闭路的外部, 而且它们都包含在 C_0 的内部. 这样它们围成了一个多连通区域 D, 它的边界称为一个复合闭路

$$C = C_0 + C_1^- + \dots + C_n^-.$$

沿着 C 前进的点, D 总在它的左侧, 所以这就是它的正方向.



复合闭路定理

设 f(z) 在复合闭路 $C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-$ 及其所围成的多连通区域内解析,则

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz.$$

复合闭路定理

设 f(z) 在复合闭路 $C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-$ 及其所围成的多连通区域内解析,则

$$\oint_{C_0} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz.$$

事实上, 复合闭路定理和柯西-古萨基本定理可以看成一个定理的两种情形:

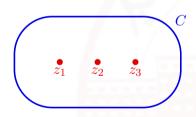
复合闭路定理

设 f(z) 在复合闭路 $C=C_0+C_1^-+\cdots+C_n^-$ 及其所围成的多连通区域内解析,则

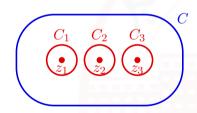
$$\oint_{C_0} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \dots + \oint_{C_n} f(z) dz.$$

事实上, 复合闭路定理和柯西-古萨基本定理可以看成一个定理的两种情形: 设 C是一个闭路或复合闭路, 若 f(z) 在 C 及其围成的区域 (单连通或多连通) 内解析, 则 $\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0$.

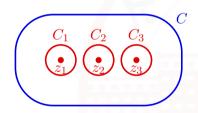
在实际应用中, 如果被积函数 f(z) 在 (复合) 闭路 C 的内部有有限多个奇点 z_1,\ldots,z_k .



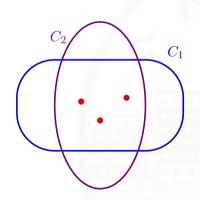
在实际应用中, 如果被积函数 f(z) 在 (复合) 闭路 C 的内部有有限多个奇点 z_1,\ldots,z_k . 那么我们可以在 C 内部 (围成的区域) 构造闭路 C_1,\ldots,C_k , 使得每个 C_j 内部只包含一个奇点 z_j .



在实际应用中, 如果被积函数 f(z) 在 (复合) 闭路 C 的内部有有限多个奇点 z_1,\ldots,z_k . 那么我们可以在 C 内部 (围成的区域) 构造闭路 C_1,\ldots,C_k , 使得每个 C_j 内部只包含一个奇点 z_j . 这样, 内部含多个奇点的情形就可以化成内部只含一个奇点的情形. 最后将这些闭路上的积分相加即可.

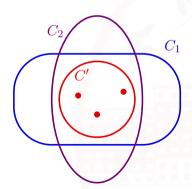


此外,从复合闭路定理还可以看出,在计算积分 $\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z$ 时,C 的具体形状无关 紧要,只要其内部奇点不变,C 可以任意变形.



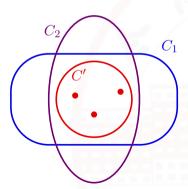
此外,从复合闭路定理还可以看出,在计算积分 $\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z$ 时,C 的具体形状无关

紧要, 只要其内部奇点不变, C 可以任意变形. 因为我们总可以选择一个包含这些奇点的闭路 C', 使得 C' 包含在 C 及其变形后的闭路内部. 这样它们的积分自然都和 C' 上的积分相同.



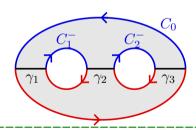
此外,从复合闭路定理还可以看出,在计算积分 $\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z$ 时,C 的具体形状无关

紧要, 只要其内部奇点不变, C 可以任意变形. 因为我们总可以选择一个包含这些奇点的闭路 C', 使得 C' 包含在 C 及其变形后的闭路内部. 这样它们的积分自然都和 C' 上的积分相同. 这里即使 C 是复合闭路也是可以自由变形的.



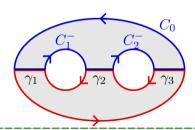
证明

以曲线 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n+1}$ 把 C_0,C_1,\ldots,C_n 连接起来, 则它们把区域 D 分成了两个单连通域 D_1,D_2 .



证明

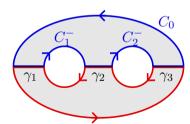
以曲线 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n+1}$ 把 C_0,C_1,\ldots,C_n 连接起来,则它们把区域 D 分成了两个单连通域 D_1,D_2 . 对 D_1 和 D_2 的边界应用柯西-古萨基本定理并相加,则 γ_i 对应的部分正好相互抵消,



证明

以曲线 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n+1}$ 把 C_0,C_1,\ldots,C_n 连接起来,则它们把区域 D 分成了两个单连通域 D_1,D_2 . 对 D_1 和 D_2 的边界应用柯西-古萨基本定理并相加,则 γ_i 对应的部分正好相互抵消,因此

$$\oint_{C_0} f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz - \dots - \oint_{C_n} f(z) dz = 0.$$

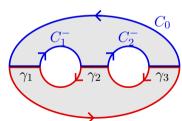


证明

以曲线 $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{n+1}$ 把 C_0,C_1,\ldots,C_n 连接起来,则它们把区域 D 分成了两个单连通域 D_1,D_2 . 对 D_1 和 D_2 的边界应用柯西-古萨基本定理并相加,则 γ_i 对应的部分正好相互抵消,因此

$$\oint_{C_0} f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz - \dots - \oint_{C_n} f(z) dz = 0.$$

于是定理得证.



例

证明对于任意闭路 C, $\int_C (z-a)^n dz = 0$, $n \neq -1$ 为整数.



证明对于任意闭路 C, $\int_C (z-a)^n dz = 0$, $n \neq -1$ 为整数.

证明

例

证明对于任意闭路 C, $\int_C (z-a)^n dz = 0$, $n \neq -1$ 为整数.

证明

(1) 如果 a 不在 C 的内部,则 $(z-a)^n$ 在 C 及其内部解析.

例

证明对于任意闭路 C, $\int_C (z-a)^n dz = 0$, $n \neq -1$ 为整数.

证明

(1) 如果 a 不在 C 的内部,则 $(z-a)^n$ 在 C 及其内部解析. 由柯西-古萨基本定理, $\int_C (z-a)^n \, \mathrm{d}z = 0.$

例

证明对于任意闭路 C, $\int_C (z-a)^n dz = 0$, $n \neq -1$ 为整数.

证明

- (1) 如果 a 不在 C 的内部,则 $(z-a)^n$ 在 C 及其内部解析. 由柯西-古萨基本定理, $\int_C (z-a)^n \, \mathrm{d}z = 0.$
- (2) 如果 a 在 C 的内部,则在 C 的内部取一个以 a 为圆心的圆周 C_1 .

例

证明对于任意闭路 C, $\int_C (z-a)^n dz = 0$, $n \neq -1$ 为整数.

证明

- (1) 如果 a 不在 C 的内部,则 $(z-a)^n$ 在 C 及其内部解析. 由柯西-古萨基本定理, $\int_C (z-a)^n \, \mathrm{d}z = 0.$
- (2) 如果 a 在 C 的内部,则在 C 的内部取一个以 a 为圆心的圆周 C_1 . 由复合闭路定理以及上一节的结论

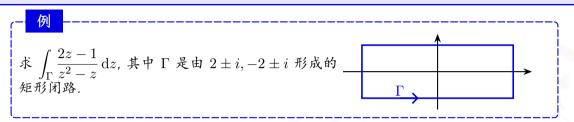
$$\int_C (z-a)^n \, dz = \int_C (z-a)^n \, dz = 0.$$

同理, 由复合闭路定理和上一节的结论可知当 a 在 C 的内部且 n=-1 时积分为 $2\pi i$.

同理, 由复合闭路定理和上一节的结论可知当 a 在 C 的内部且 n=-1 时积分为 $2\pi i$.

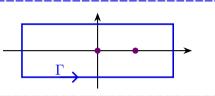
当 a 在 C 的内部时,

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$





求 $\int_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} \, \mathrm{d}z$, 其中 Γ 是由 $2\pm i, -2\pm i$ 形成的 矩形闭路.

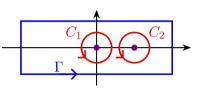


解

函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在 Γ 内有两个奇点 z=0,1.



求 $\int_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} \, \mathrm{d}z$, 其中 Γ 是由 $2\pm i, -2\pm i$ 形成的 矩形闭路.

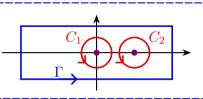


解

函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在 Γ 内有两个奇点 z=0,1. 设 C_1,C_2 如图所示,

例

求 $\int_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$, 其中 Γ 是由 $2\pm i, -2\pm i$ 形成的 矩形闭路.



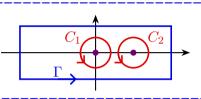
解

函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在 Γ 内有两个奇点 z=0,1. 设 C_1,C_2 如图所示, 由复合闭路定理

$$\oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z} dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$$

例

求 $\int_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$, 其中 Γ 是由 $2\pm i, -2\pm i$ 形成的 矩形闭路.



解

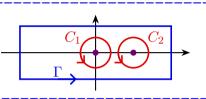
函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在 Γ 内有两个奇点 z=0,1. 设 C_1,C_2 如图所示, 由复合闭路定理

$$\oint_{\Gamma} \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz = \oint_{C_1} \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz + \oint_{C_2} \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z - 1} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z - 1} dz$$

例

求 $\int_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$, 其中 Γ 是由 $2\pm i, -2\pm i$ 形成的 矩形闭路.



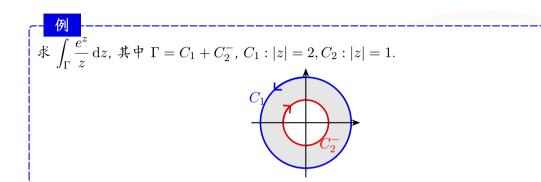
解

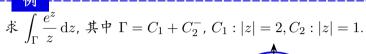
函数 $\frac{2z-1}{z^2-z}$ 在 Γ 内有两个奇点 z=0,1. 设 C_1,C_2 如图所示, 由复合闭路定理

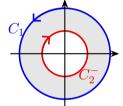
$$\oint_{\Gamma} \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz = \oint_{C_1} \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz + \oint_{C_2} \frac{2z - 1}{z^2 - z} dz$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z - 1} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z - 1} dz$$

$$= 2\pi i + 0 + 0 + 2\pi i = 4\pi i.$$





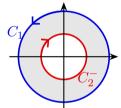


解

函数 $\frac{e^z}{z}$ 在 C_1, C_2 围城的圆环域内解析.



求 $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} dz$, 其中 $\Gamma = C_1 + C_2^-$, $C_1 : |z| = 2$, $C_2 : |z| = 1$.



解

函数 $\frac{e^z}{z}$ 在 C_1, C_2 围城的圆环域内解析. 由复合闭路定理可知 $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} dz = 0$.

第三节 原函数和不定积分

- 原函数
- 牛顿-莱布尼兹定理

设 f(z) 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条起于 z_0 终于 z 的曲线.

设 f(z) 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条起于 z_0 终于 z 的曲线. 由柯西-古萨基本定理可知, 积分 $\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 与路径无关, 只与 z_0,z 有关.

设 f(z) 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条起于 z_0 终于 z 的曲线. 由柯西-古萨基本定理可知, 积分 $\int_C f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta$ 与路径无关, 只与 z_0,z 有关. 因此我们也将其记为 $\int_{-z}^z f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta.$

设 f(z) 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条起于 z_0 终于 z 的曲线. 由柯西-古萨基本定理可知, 积分 $\int_C f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta$ 与路径无关, 只与 z_0,z 有关. 因此我们也将其记为 $\int_{z_0}^z f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta$.

对于任意固定的 $z_0 \in D$, 定义

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) \,\mathrm{d}\zeta.$$

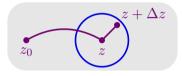
定理

F(z) 是 D 内的解析函数, 且 F'(z) = f(z).

定理

F(z) 是 D 内的解析函数, 且 F'(z) = f(z).

证明

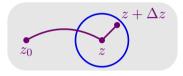


以z为中心作一包含在D内的圆K,

定理

F(z) 是 D 内的解析函数, 且 F'(z) = f(z).

证明

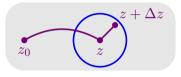


以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K, 取 $|\Delta z|$ 小于 K 的半径.

定理

F(z) 是 D 内的解析函数, 且 F'(z) = f(z).

证明

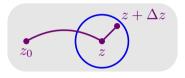


以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K, 取 $|\Delta z|$ 小于 K 的半径. 那么 $F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^zf(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$

定理

F(z) 是 D 内的解析函数, 且 F'(z) = f(z).

证明



以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K, 取 $|\Delta z|$ 小于 K 的半径. 那么 $F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^zf(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\int_z^{z+\Delta z}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$

定理

F(z) 是 D 内的解析函数, 且 F'(z) = f(z).

证明



以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K, 取 $|\Delta z|$ 小于 K 的半径. 那么 $F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^zf(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\int_z^{z+\Delta z}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$ 容易知道 $\int_z^{z+\Delta z}f(z)\,\mathrm{d}\zeta=f(z)\int_z^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta=f(z)\Delta z.$

定理

F(z) 是 D 内的解析函数, 且 F'(z) = f(z).

证明



以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K, 取 $|\Delta z|$ 小于 K 的半径. 那么 $F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^zf(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\int_z^{z+\Delta z}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$ 容易知道 $\int_z^{z+\Delta z}f(z)\,\mathrm{d}\zeta=f(z)\int_z^{z+\Delta z}\,\mathrm{d}\zeta=f(z)\Delta z$. 我们需要比较上述两个积分, 其中 z 到 $z+\Delta z$ 取直线.

续证

由于 f(z) 解析, 因此连续.

续证

由于 f(z) 解析, 因此连续. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|\zeta - z| < \delta$ 时, z 落在 K 中且 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$.

续证

由于 f(z) 解析, 因此连续. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|\zeta - z| < \delta$ 时, z 落在 K 中且 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. 当 $|\Delta z| < \delta$ 时, 由长大不等式

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right|$$

续证

由于 f(z) 解析, 因此连续. $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ 使得当 $|\zeta-z|<\delta$ 时, z 落在 K 中且 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. 当 $|\Delta z|<\delta$ 时, 由长大不等式

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \int_{z}^{z + \Delta z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\Delta z} \, d\zeta \right|$$

续证

由于 f(z) 解析, 因此连续. $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$ 使得当 $|\zeta-z|<\delta$ 时, z 落在 K 中且 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. 当 $|\Delta z|<\delta$ 时, 由长大不等式

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \int_{z}^{z + \Delta z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\Delta z} \, d\zeta \right|$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \cdot |\Delta z| = \varepsilon.$$

续证

由于 f(z) 解析, 因此连续. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|\zeta - z| < \delta$ 时, z 落在 K 中且 $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$. 当 $|\Delta z| < \delta$ 时, 由长大不等式

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \int_{z}^{z + \Delta z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\Delta z} \, d\zeta \right|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \cdot |\Delta z| = \varepsilon.$$

由于 ε 是任意的, 因此

$$f(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = F'(z).$$

如果 D 上的解析函数 G(z) 满足 G'(z) = f(z), 则称 G(z) 是 f(z) 的一个原函数.

如果 D 上的解析函数 G(z) 满足 G'(z) = f(z), 则称 G(z) 是 f(z) 的一个原函数. 由于导函数为 0 的解析函数只能是常值函数.

如果 D 上的解析函数 G(z) 满足 G'(z)=f(z), 则称 G(z) 是 f(z) 的一个原函数. 由于导函数为 0 的解析函数只能是常值函数, 因此 $G(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+C$.

如果 D 上的解析函数 G(z) 满足 G'(z)=f(z), 则称 G(z) 是 f(z) 的一个原函数. 由于导函数为 0 的解析函数只能是常值函数, 因此 $G(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+C$. 我们称之为 f(z) 的不定积分, 记为 $\int f(z)\,\mathrm{d}z$.

如果 D 上的解析函数 G(z) 满足 G'(z)=f(z), 则称 G(z) 是 f(z) 的一个原函数. 由于导函数为 0 的解析函数只能是常值函数, 因此 $G(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+C$. 我们称之为 f(z) 的不定积分, 记为 $\int f(z)\,\mathrm{d}z$.

复变函数积分计算方法 ||

设 f(z) 在单连通区域 D 上解析, z_1 至 z_2 的积分路径落在 D 内, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

其中 F(z) 是 f(z) 的一个原函数.

如果 D 上的解析函数 G(z) 满足 G'(z)=f(z), 则称 G(z) 是 f(z) 的一个原函数. 由于导函数为 0 的解析函数只能是常值函数,因此 $G(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+C$. 我们称之为 f(z) 的不定积分,记为 $\int f(z)\,\mathrm{d}z$.

复变函数积分计算方法 ||

设 f(z) 在单连通区域 D 上解析, z_1 至 z_2 的积分路径落在 D 内,则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

其中 F(z) 是 f(z) 的一个原函数.

复变函数和实变函数的牛顿-莱布尼兹定理的差异在哪呢?

如果 D 上的解析函数 G(z) 满足 G'(z)=f(z), 则称 G(z) 是 f(z) 的一个原函数. 由于导函数为 0 的解析函数只能是常值函数, 因此 $G(z)=\int_{z_0}^z f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta+C$. 我们称之为 f(z) 的不定积分, 记为 $\int f(z)\,\mathrm{d}z$.

复变函数积分计算方法 ||

设 f(z) 在单连通区域 D 上解析, z_1 至 z_2 的积分路径落在 D 内, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

其中 F(z) 是 f(z) 的一个原函数.

复变函数和实变函数的牛顿-莱布尼兹定理的差异在哪呢?复变情形要求是<mark>单连通区域上解析函数</mark>, 实变情形要求是闭区间上连续函数.

典型例题: 利用原函数求积分



典型例题: 利用原函数求积分



解

由于 f(z) = z 处处解析,



解

由于
$$f(z) = z$$
 处处解析, 且 $\int z dz = \frac{1}{2}z^2 + C$,

 $\cancel{x} \int_{z_0}^{z_1} z \, \mathrm{d}z.$

解

由于 f(z) = z 处处解析, 且 $\int z dz = \frac{1}{2}z^2 + C$, 因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2} (z_1^2 - z_0^2).$$

求 $\int_{z_0}^{z_1} z \, \mathrm{d}z.$

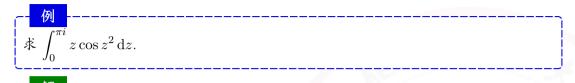
解

由于 f(z) = z 处处解析, 且 $\int z \, dz = \frac{1}{2}z^2 + C$, 因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2} (z_1^2 - z_0^2).$$

因此之前的例子中
$$\int_0^{3+4i} z \, dz = -\frac{7}{2} + 12i$$
, 无论从 0 到 $3+4i$ 的路径如何.





由于 $f(z) = z \cos z^2$ 处处解析,

例

$$\int_0^{\pi i} z \cos z^2 \, \mathrm{d}z.$$

解

由于 $f(z) = z \cos z^2$ 处处解析, 且

$$\int z \cos z^2 dz = \frac{1}{2} \int \cos z^2 dz^2 = \frac{1}{2} \sin z^2 + C,$$

例

解

由于 $f(z) = z \cos z^2$ 处处解析, 且

$$\int z \cos z^2 dz = \frac{1}{2} \int \cos z^2 dz^2 = \frac{1}{2} \sin z^2 + C,$$

$$\int_0^{\pi i} z \cos z^2 \, dz = \frac{1}{2} \sin z^2 \Big|_0^{\pi i} = -\frac{1}{2} \sin \pi^2.$$

例

解

由于 $f(z) = z \cos z^2$ 处处解析, 且

$$\int z \cos z^2 dz = \frac{1}{2} \int \cos z^2 dz^2 = \frac{1}{2} \sin z^2 + C,$$

因此

$$\int_0^{\pi i} z \cos z^2 dz = \frac{1}{2} \sin z^2 \Big|_0^{\pi i} = -\frac{1}{2} \sin \pi^2.$$

这里我们使用了凑微分法.





由于 $f(z) = z \cos z$ 处处解析,

例

$$\int_0^i z \cos z \, \mathrm{d}z.$$

解

由于 $f(z) = z \cos z$ 处处解析, 且

$$\int z \cos z \, dz = \int z \, d(\sin z) = z \sin z - \int \sin z \, dz$$

例

$$\int_0^i z \cos z \, \mathrm{d}z.$$

解

由于 $f(z) = z \cos z$ 处处解析, 且

$$\int z \cos z \, dz = \int z \, d(\sin z) = z \sin z - \int \sin z \, dz = z \sin z + \cos z + C,$$

例

解

由于 $f(z) = z \cos z$ 处处解析, 且

$$\int z \cos z \, dz = \int z \, d(\sin z) = z \sin z - \int \sin z \, dz = z \sin z + \cos z + C,$$

$$\int_0^i z \cos z \, \mathrm{d}z = (z \sin z + \cos z) \Big|_0^i$$

例

解

由于 $f(z) = z \cos z$ 处处解析, 且

$$\int z \cos z \, dz = \int z \, d(\sin z) = z \sin z - \int \sin z \, dz = z \sin z + \cos z + C,$$

$$\int_{0}^{i} z \cos z \, dz = (z \sin z + \cos z) \Big|_{0}^{i} = i \sin i + \cos i - 1 = e^{-1} - 1.$$

例

解

由于 $f(z) = z \cos z$ 处处解析, 且

$$\int z \cos z \, dz = \int z \, d(\sin z) = z \sin z - \int \sin z \, dz = z \sin z + \cos z + C,$$

因此

$$\int_0^i z \cos z \, dz = (z \sin z + \cos z) \Big|_0^i = i \sin i + \cos i - 1 = e^{-1} - 1.$$

这里我们使用了分部积分法.







解

由于
$$f(z) = ze^z$$
 处处解析, 且 $\int ze^z dz = \int z de^z = ze^z - \int e^z dz = (z-1)e^z + C$,

由于
$$f(z) = ze^z$$
 处处解析, 且 $\int ze^z dz = \int z de^z = ze^z - \int e^z dz = (z-1)e^z + C$,

因此
$$\int_{1}^{1+i} ze^z dz = (z-1)e^z \Big|_{1}^{1+i}$$

$\int_{0}^{1+i} ze^{z} dz$

解

由于
$$f(z) = ze^z$$
 处处解析, 且 $\int ze^z dz = \int z de^z = ze^z - \int e^z dz = (z-1)e^z + C$,

因此
$$\int_{1}^{1+i} ze^{z} dz = (z-1)e^{z}\Big|_{1}^{1+i} = ie^{1+i} = e(-\sin 1 + i\cos 1).$$

例

解

由于
$$f(z) = ze^z$$
 处处解析, 且 $\int ze^z dz = \int z de^z = ze^z - \int e^z dz = (z-1)e^z + C$,

因此 $\int_{1}^{1+i} ze^z dz = (z-1)e^z \Big|_{1}^{1+i} = ie^{1+i} = e(-\sin 1 + i\cos 1).$

练习

例

解

由于
$$f(z) = ze^z$$
 处处解析, 且 $\int ze^z dz = \int z de^z = ze^z - \int e^z dz = (z-1)e^z + C$,

因此 $\int_{1}^{1+i} ze^z dz = (z-1)e^z \Big|_{1}^{1+i} = ie^{1+i} = e(-\sin 1 + i\cos 1).$

练习

例

求
$$\int_C (2z^2 + 8z + 1) dz$$
, 其中 C 是摆线
$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta), \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

例

求
$$\int_C (2z^2 + 8z + 1) dz$$
, 其中 C 是摆线 $\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta), \end{cases}$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

解

由于 $f(z) = 2z^2 + 8z + 1$ 处处解析,

例

求
$$\int_C (2z^2 + 8z + 1) dz$$
, 其中 C 是摆线
$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta), \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

解

由于 $f(z) = 2z^2 + 8z + 1$ 处处解析, 因此

原积分 = $\int_0^{2\pi a} (2z^2 + 8z + 1) dz$

例

求
$$\int_C (2z^2 + 8z + 1) dz$$
, 其中 C 是摆线
$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta), \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

解

由于 $f(z) = 2z^2 + 8z + 1$ 处处解析, 因此

原积分 = $\int_0^{2\pi a} (2z^2 + 8z + 1) dz = \left(\frac{2}{3}z^3 + 4z^2 + z\right)\Big|_0^{2\pi a} = \frac{16}{3}\pi^3 a^3 + 16\pi^2 a^2 + 2\pi a.$

例

设 C 为沿着 |z|=1 从 1 到 i 的逆时针圆弧, 求 $\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$.

例

设 C 为沿着 |z|=1 从 1 到 i 的逆时针圆弧, 求 $\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$.

解

函数 $f(z) = \frac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在单连通区域 $\operatorname{Re} z > -1$ 内解析.

例

设 C 为沿着 |z|=1 从 1 到 i 的逆时针圆弧, 求 $\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$.

解

函数
$$f(z) = \frac{\ln(z+1)}{z+1}$$
 在单连通区域 $\operatorname{Re} z > -1$ 内解析.

$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \int \ln(z+1) d[\ln(z+1)] = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) + C.$$

例

设 C 为沿着 |z|=1 从 1 到 i 的逆时针圆弧, 求 $\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$.

解

函数
$$f(z) = \frac{\ln(z+1)}{z+1}$$
 在单连通区域 $\operatorname{Re} z > -1$ 内解析.

$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \int \ln(z+1) d[\ln(z+1)] = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) + C.$$

$$\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) \Big|_1^i$$

例

设 C 为沿着 |z|=1 从 1 到 i 的逆时针圆弧, 求 $\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$.

解

函数
$$f(z) = \frac{\ln(z+1)}{z+1}$$
 在单连通区域 $\text{Re } z > -1$ 内解析.

$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \int \ln(z+1) d[\ln(z+1)] = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) + C.$$

$$\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) \Big|_1^i = \frac{1}{2} \left[\ln^2(1+i) - \ln^2 2 \right]$$

例

设 C 为沿着 |z|=1 从 1 到 i 的逆时针圆弧, 求 $\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$.

解

函数
$$f(z) = \frac{\ln(z+1)}{z+1}$$
 在单连通区域 $\text{Re } z > -1$ 内解析.

$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \int \ln(z+1) d[\ln(z+1)] = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) + C.$$

$$\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) \Big|_1^i = \frac{1}{2} \left[\ln^2(1+i) - \ln^2 2 \right]$$
$$= \frac{1}{2} \left(\left(\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i \right)^2 - \ln^2 2 \right) = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8} \ln^2 2 + \frac{\pi \ln 2}{8}i.$$

第四节 柯西积分公式

- ■柯西积分公式
- 高阶导数的柯西积分公式

柯西积分公式

柯西-古萨基本定理是解析函数理论的基础, 但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式

柯西-古萨基本定理是解析函数理论的基础, 但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式

设

- 函数 f(z) 在 (复合) 闭路 C 及其内部 (围成的区域) D 解析,
- $z_0 \in D$,

柯西积分公式

柯西-古萨基本定理是解析函数理论的基础, 但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式

设

- 函数 f(z) 在 (复合) 闭路 C 及其内部 (围成的区域) D 解析,
- $z_0 \in D$,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z.$$

柯西积分公式

柯西-古萨基本定理是解析函数理论的基础, 但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式

设

- 函数 f(z) 在 (复合) 闭路 C 及其内部 (围成的区域) D 解析,
- $z_0 \in D$,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

如果 $z_0 \notin \overline{D}$, 由柯西-古萨基本定理, 右侧的积分是 0.

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一.

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设 $z=z_0+Re^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=iRe^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$,

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设 $z=z_0+Re^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=iRe^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

证明

由连续性可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| \leq \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

证明

由连续性可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| \leq \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. 设 $\Gamma: |z - z_0| = \delta$,

证明

由连续性可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| \leq \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. 设 $\Gamma: |z - z_0| = \delta$, 则

$$\left|\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0)\right| = \underbrace{\frac{2 \text{consequence}}{z-z_0}} \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0)\right|$$

证明

由连续性可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| \leq \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. 设 $\Gamma: |z - z_0| = \delta$, 则

$$\begin{split} \left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0) \right| & \xrightarrow{\underline{\mathcal{Q}} \cap \mathbb{R} \times \underline{\mathcal{Q}}} \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0) \right| \\ & = \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z - \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \right| = \left| \oint_\Gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \right| \end{split}$$

证明

由连续性可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| \leq \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. 设 $\Gamma: |z - z_0| = \delta$, 则

$$\left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0) \right| = \frac{\underbrace{\$ \, \widehat{\cap} \, \mathcal{B} \, \widehat{\vee} \, \mathcal{P}}}{2 - z_0} \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0) \right|$$

$$= \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z - \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \right| = \left| \oint_\Gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi \delta = 2\pi \varepsilon.$$

证明

由连续性可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| \leq \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. 设 $\Gamma: |z - z_0| = \delta$. 则

$$\left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0) \right| = \frac{\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} \times \mathbb{Z}}{\varepsilon} \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0) \right|$$

$$= \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z - \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \right| = \left| \oint_\Gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z \right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi \delta = 2\pi \varepsilon.$$

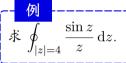
由 ε 的任意性可知 $\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$.

从柯西积分公式可以看出,被积函数分子解析而分母形如 $z-z_0$ 时,绕闭路的积分可以使用该公式计算.

从柯西积分公式可以看出,被积函数分子解析而分母形如 $z-z_0$ 时,绕闭路的积分可以使用该公式计算.



从柯西积分公式可以看出,被积函数分子解析而分母形如 $z-z_0$ 时,绕闭路的积分可以使用该公式计算.



解

函数 sin z 处处解析.

从柯西积分公式可以看出,被积函数分子解析而分母形如 $z-z_0$ 时,绕闭路的积分可以使用该公式计算.



解

函数 $\sin z$ 处处解析. 取 $f(z) = \sin z, z_0 = 0$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} \, dz = 2\pi i \sin z|_{z=0} = 0.$$





例

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \, \mathrm{d}z.$$

解

由于函数 e^z 处处解析,取 $f(z) = e^z, z_0 = 1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \, \mathrm{d}z = 2\pi i e^z|_{z=1} = 2\pi e i.$$

例

$$\lim_{z \to 2} \frac{e^z}{z - 1} \, \mathrm{d}z.$$

解

由于函数 e^z 处处解析,取 $f(z) = e^z, z_0 = 1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \, \mathrm{d}z = 2\pi i e^z|_{z=1} = 2\pi e i.$$

例

 $\frac{e^z}{z-1} \, \mathrm{d}z$.

解

由于函数 e^z 处处解析,取 $f(z) = e^z, z_0 = 1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \, \mathrm{d}z = 2\pi i e^z|_{z=1} = 2\pi e i.$$

练习



设
$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta$$
, 求 $f'(1+i)$.

例

设
$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \, d\zeta, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, f'(1+i).$$

解

当 $|z| < \sqrt{3}$ 时, 由柯西积分公式得

$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta$$

例

设
$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \,d\zeta, \,\, \, \, \, \, \, \, \, \, \, f'(1+i).$$

解

当 $|z| < \sqrt{3}$ 时, 由柯西积分公式得

$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \,d\zeta = 2\pi i (3\zeta^2 + 7\zeta + 1)|_{\zeta = z} = 2\pi i (3z^2 + 7z + 1).$$

例

设
$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \, d\zeta, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, f'(1+i).$$

解

当 $|z| < \sqrt{3}$ 时, 由柯西积分公式得

$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \, d\zeta = 2\pi i (3\zeta^2 + 7\zeta + 1)|_{\zeta = z} = 2\pi i (3z^2 + 7z + 1).$$

因此 $f'(z) = 2\pi i (6z + 7)$,

例

设
$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \, d\zeta, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, f'(1+i).$$

解

当 $|z| < \sqrt{3}$ 时, 由柯西积分公式得

$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \, d\zeta = 2\pi i (3\zeta^2 + 7\zeta + 1)|_{\zeta = z} = 2\pi i (3z^2 + 7z + 1).$$

因此 $f'(z) = 2\pi i(6z+7)$, $f'(1+i) = 2\pi i(13+6i) = -12\pi + 26\pi i$.

例

设 $f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \, d\zeta, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, \, f'(1+i).$

解

当 $|z| < \sqrt{3}$ 时, 由柯西积分公式得

$$f(z) = \oint_{|\zeta| = \sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \, d\zeta = 2\pi i (3\zeta^2 + 7\zeta + 1)|_{\zeta = z} = 2\pi i (3z^2 + 7z + 1).$$

因此 $f'(z) = 2\pi i(6z+7)$, $f'(1+i) = 2\pi i(13+6i) = -12\pi + 26\pi i$.

注意当 $|z| > \sqrt{3}$ 时, $f(z) \equiv 0$.

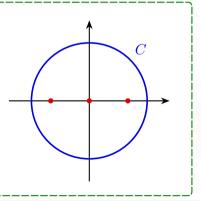




 $\xi \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} \, \mathrm{d}z.$

解

被积函数的奇点为 0,±1.

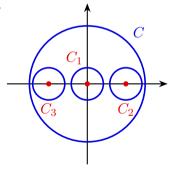




 $\not \stackrel{\stackrel{}{\downarrow}}{=} \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} \, \mathrm{d}z.$

解

被积函数的奇点为 $0,\pm 1$. 设 C_1 , C_2 , C_3 分别为绕 0,1, -1 的分离圆周.

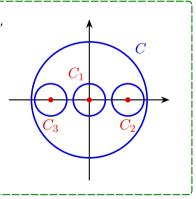


例

解

被积函数的奇点为 $0,\pm 1$. 设 C_1 , C_2 , C_3 分别为绕 0,1, -1 的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz = \oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz$$



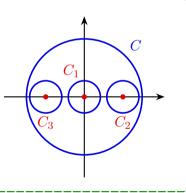
例

解

被积函数的奇点为 $0,\pm 1$. 设 C_1 , C_2 , C_3 分别为绕 0,1, -1 的分离圆周, 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} dz = \oint_{C_1 + C_2 + C_3} \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} dz$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^z}{z^2 - 1} \Big|_{z=0} + \frac{e^z}{z(z+1)} \Big|_{z=1} + \frac{e^z}{z(z-1)} \Big|_{z=-1} \right)$$



例

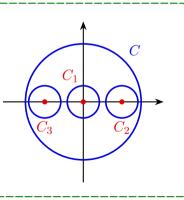
解

被积函数的奇点为 $0,\pm 1$. 设 C_1 , C_2 , C_3 分别为绕 0,1, -1 的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} dz = \oint_{C_1 + C_2 + C_3} \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} dz$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^z}{z^2 - 1} \Big|_{z=0} + \frac{e^z}{z(z+1)} \Big|_{z=1} + \frac{e^z}{z(z-1)} \Big|_{z=-1} \right)$$

$$= 2\pi i \left(-1 + \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = \pi i (e + e^{-1} - 2).$$



高阶导数的柯西积分公式

解析函数可以由它的积分所表示.

高阶导数的柯西积分公式

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

高阶导数的柯西积分公式

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

柯西积分公式

设函数 f(z) 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析,则对任意 $z_0 \in D$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

柯西积分公式

设函数 f(z) 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析,则对任意 $z_0 \in D$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

假如 f(z) 有泰勒展开

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots$$

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

柯西积分公式

设函数 f(z) 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析,则对任意 $z_0 \in D$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

假如 f(z) 有泰勒展开

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots$$

那么由 $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$ 的性质可知上述公式右侧应当为 $f^{(n)}(z_0)$.

证明

先证明 n=1 的情形.

证明

先证明 n=1 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离.

证明

先证明 n=1 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离. 当 $|h|<\delta$ 时, $z_0+h\in D$.

证明

先证明 n=1 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离. 当 $|h|<\delta$ 时, $z_0+h\in D$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \ f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - h} dz.$$

证明

先证明 n=1 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离. 当 $|h|<\delta$ 时, $z_0+h\in D$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \ f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - h} dz.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)} \, \mathrm{d}z.$$

证明

先证明 n=1 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离. 当 $|h|<\delta$ 时, $z_0+h\in D$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \ f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - h} dz.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)} \, \mathrm{d}z.$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, 左边的极限是 $f'(z_0)$.

证明

先证明 n=1 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离. 当 $|h|<\delta$ 时, $z_0+h\in D$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \ f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - h} dz.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)} \, \mathrm{d}z.$$

当 $h \to 0$ 时, 左边的极限是 $f'(z_0)$. 因此我们只需要证明右边的极限等于 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z$.

二者之差 =
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2 (z-z_0-h)} dz$$
.

续证

二者之差
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$$
. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)|\leqslant M$.

续证

二者之差 =
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} dz$$
. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)| \leq M$. 注意到 $z \in C$, $|z-z_0| \geq \delta$, $|z-z_0-h| \geq \delta - |h|$.

续证

二者之差
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$$
. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)|\leqslant M$. 注意到 $z\in C$, $|z-z_0|\geqslant \delta$, $|z-z_0-h|\geqslant \delta-|h|$. 由长大不等式,

$$\left| \oint_C \frac{hf(z)}{(z - z_0)^2 (z - z_0 - h)} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2 (\delta - |h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度.

续证

二者之差
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$$
. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)|\leqslant M$. 注意到 $z\in C$, $|z-z_0|\geqslant \delta$, $|z-z_0-h|\geqslant \delta-|h|$. 由长大不等式,

$$\left| \oint_C \frac{hf(z)}{(z - z_0)^2 (z - z_0 - h)} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2 (\delta - |h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h \rightarrow 0$ 时, 它的极限为 0, 因此 n = 1 情形得证.

续证

二者之差
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$$
. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)|\leqslant M$. 注意到 $z\in C$, $|z-z_0|\geqslant \delta$, $|z-z_0-h|\geqslant \delta-|h|$. 由长大不等式,

$$\left| \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2 (z-z_0-h)} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2 (\delta - |h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h \to 0$ 时, 它的极限为 0, 因此 n = 1 情形得证. 对于一般的 n, 我们通过归纳法将 $f^{(n)}(z_0)$ 和 $f^{(n)}(z_0 + h)$ 表达为积分形式.

续证

二者之差 $=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$. 由于 f(z) 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)|\leqslant M$. 注意到 $z\in C$, $|z-z_0|\geqslant \delta$, $|z-z_0-h|\geqslant \delta-|h|$. 由长大不等式,

$$\left| \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h \to 0$ 时, 它的极限为 0, 因此 n=1 情形得证. 对于一般的 n, 我们通过归纳法将 $f^{(n)}(z_0)$ 和 $f^{(n)}(z_0+h)$ 表达为积分形式. 比较 $\frac{f^{(n)}(z_0+h)-f^{(n)}(z_0)}{h}$ 与积分公式右侧之差, 并利用长大不等式证明 $h \to 0$ 时, 差 趋于零

续证

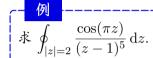
二者之差 $=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$. 由于 f(z) 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)|\leqslant M$. 注意到 $z\in C$, $|z-z_0|\geqslant \delta$, $|z-z_0-h|\geqslant \delta-|h|$. 由长大不等式,

$$\left| \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h \to 0$ 时, 它的极限为 0, 因此 n = 1 情形得证. 对于一般的 n, 我们通过归纳法将 $f^{(n)}(z_0)$ 和 $f^{(n)}(z_0 + h)$ 表达为积分形式. 比较 $\frac{f^{(n)}(z_0 + h) - f^{(n)}(z_0)}{h}$ 与积分公式右侧之差, 并利用长大不等式证明 $h \to 0$ 时, 差 趋于零. 具体过程省略.

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的, 而是用高阶导数来计算积分的.

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的, 而是用高阶导数来计算积分的.



柯西积分公式不是用来计算高阶导数的, 而是用高阶导数来计算积分的.



$$\not \stackrel{*}{\not} \oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} \, \mathrm{d}z.$$

解

由于 $\cos(\pi z)$ 处处解析,

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的, 而是用高阶导数来计算积分的.

例

$$\not x \oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} \, \mathrm{d}z.$$

解

由于 $\cos(\pi z)$ 处处解析, 因此由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} [\cos(\pi z)]^{(4)} |_{z=1}$$

柯西积分公式不是用来计算高阶导数的, 而是用高阶导数来计算积分的.

例

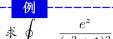
$$\not \stackrel{\mathbf{x}}{\neq} \oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} \, \mathrm{d}z.$$

解

由于 $\cos(\pi z)$ 处处解析, 因此由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} [\cos(\pi z)]^{(4)} \Big|_{z=1} = \frac{2\pi i}{24} \cdot \pi^4 \cos \pi = -\frac{\pi^5 i}{12}.$$





解

被积函数在 |z| < 2 的奇点为 $z = \pm i$.

例

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \, \mathrm{d}z.$$

解

被积函数在 |z|<2 的奇点为 $z=\pm i$. 取 C_1,C_2 为以 i,-i 为圆心的分离圆周.

例

解

被积函数在 |z| < 2 的奇点为 $z = \pm i$. 取 C_1, C_2 为以 i, -i 为圆心的分离圆周.

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1} \left(\frac{e^z}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i}$$

例

$$\stackrel{\stackrel{\longrightarrow}{\not x}}{\oint_{|z|=2}} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \, \mathrm{d}z.$$

解

被积函数在 |z|<2 的奇点为 $z=\pm i$. 取 C_1,C_2 为以 i,-i 为圆心的分离圆周.

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1} \left(\frac{e^z}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = 2\pi i \left(\frac{e^z}{(z+i)^2} - \frac{2e^z}{(z+i)^3} \right) \Big|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i \pi}{2}.$$

例

$$\stackrel{\stackrel{\longrightarrow}{\not x}}{\oint_{|z|=2}} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \, \mathrm{d}z.$$

解

被积函数在 |z|<2 的奇点为 $z=\pm i$. 取 C_1,C_2 为以 i,-i 为圆心的分离圆周.

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1} \left(\frac{e^z}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = 2\pi i \left(\frac{e^z}{(z+i)^2} - \frac{2e^z}{(z+i)^3} \right) \Big|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i \pi}{2}.$$

类似地,
$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{-(1+i)e^{-i\pi}}{2}$$
.

例

$$\vec{x} \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \, \mathrm{d}z.$$

解

被积函数在 |z|<2 的奇点为 $z=\pm i$. 取 C_1,C_2 为以 i,-i 为圆心的分离圆周.

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1} \left(\frac{e^z}{(z+i)^2} \right)' \Big|_{z=i} = 2\pi i \left(\frac{e^z}{(z+i)^2} - \frac{2e^z}{(z+i)^3} \right) \Big|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i \pi}{2}.$$

类似地, $\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{-(1+i)e^{-i}\pi}{2}$. 故

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \left(\oint_{C_1} + \oint_{C_2} \right) \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz$$
$$= \frac{(1-i)e^i \pi}{2} + \frac{-(1+i)e^{-i} \pi}{2} = \pi i (\sin 1 - \cos 1).$$

求 $\oint_{|z|=1} z^n e^z \, \mathrm{d}z$, 其中 n 是整数.



 $\vec{x} \oint_{|z|=1} z^n e^z dz$, 其中 n 是整数.

解

(1) 当 $n \ge 0$ 时, $z^n e^z$ 处处解析.

求 $\oint_{|z|=1} z^n e^z dz$, 其中 n 是整数.

解

(1) 当 $n \ge 0$ 时, $z^n e^z$ 处处解析. 由柯西-古萨基本定理,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \, \mathrm{d}z = 0.$$

 $\vec{x} \oint z^n e^z dz$, 其中 n 是整数.

解

(1) 当 $n \ge 0$ 时, $z^n e^z$ 处处解析. 由柯西-古萨基本定理,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \, \mathrm{d}z = 0.$$

(2) 当 $n \leq -1$ 时, e^z 处处解析.

求 $\oint_{|z|=1} z^n e^z dz$, 其中 n 是整数.

解

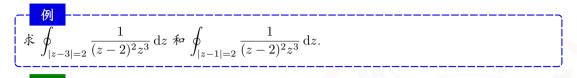
(1) 当 $n \ge 0$ 时, $z^n e^z$ 处处解析. 由柯西-古萨基本定理,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \, \mathrm{d}z = 0.$$

(2) 当 $n \leq -1$ 时, e^z 处处解析. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \, dz = \frac{2\pi i}{(-n-1)!} (e^z)^{(-n-1)} \big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(-n-1)!}.$$

* $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$ * $\int_{|z-1|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$.



畔

(1)
$$\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$$
 在 $|z-3| < 2$ 的奇点为 $z=2$.

(1)
$$\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$$
 在 $|z-3| < 2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3}\right)' \Big|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

例

(1)
$$\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$$
 在 $|z-3| < 2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3}\right)' \bigg|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

(2)
$$\frac{1}{(z-2)^2z^3}$$
 在 $|z-1| < 3$ 的奇点为 $z=0,2$.

例

(1)
$$\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$$
 在 $|z-3| < 2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3}\right)' \Big|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

(2)
$$\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$$
 在 $|z-1| < 3$ 的奇点为 $z=0,2$. 取 C_1,C_2 为以 $0,2$ 为圆心的分离圆周.

例

(1)
$$\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$$
 在 $|z-3| < 2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3}\right)' \bigg|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

(2)
$$\frac{1}{(z-2)^2z^3}$$
 在 $|z-1| < 3$ 的奇点为 $z=0,2$. 取 C_1, C_2 为以 $0,2$ 为圆心的分离圆周.

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} \, \mathrm{d}z = \oint_{C_z} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} \, \mathrm{d}z + \oint_{C_z} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} \, \mathrm{d}z$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(1)
$$\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$$
 在 $|z-3| < 2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3}\right)' \bigg|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

(2)
$$\frac{1}{(z-2)^2z^3}$$
 在 $|z-1| < 3$ 的奇点为 $z=0,2$. 取 C_1, C_2 为以 $0,2$ 为圆心的分离圆周.

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$$

$$= \frac{2\pi i}{2!} \left[\frac{1}{(z-2)^2} \right]'' \Big|_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3} \right)' \Big|_{z=2} = 0.$$

 $\oint_{|z-2i|=3} \frac{1}{z^2(z-i)} dz =$ _____

ණ 习 $\oint_{|z-2i|=3} \frac{1}{z^2(z-i)} \, \mathrm{d}z = \underline{0}.$

练习

$$\oint_{|z-2i|=3} \frac{1}{z^2(z-i)} \, \mathrm{d}z = \underline{0}.$$

例 (莫累拉定理)

设 f(z) 在单连通域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0$, 则 f(z) 在 D 内解析.

练习

$$\oint_{|z-2i|=3} \frac{1}{z^2(z-i)} \, \mathrm{d}z = \underline{0}.$$

例 (莫累拉定理)

设 f(z) 在单连通域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0$, 则 f(z) 在 D 内解析.

证明

由题设可知 f(z) 的积分与路径无关.

练习

$$\oint_{|z-2i|=3} \frac{1}{z^2(z-i)} \, \mathrm{d}z = \underline{0}.$$

例 (莫累拉定理)

设 f(z) 在单连通域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0$, 则 f(z) 在 D 内解析.

证明

由题设可知 f(z) 的积分与路径无关. 固定 $z_0 \in D$, 则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z) \, \mathrm{d}z$$

定义了D内的一个函数.

练习

$$\oint_{|z-2i|=3} \frac{1}{z^2(z-i)} \, \mathrm{d}z = \underline{0}.$$

例 (莫累拉定理)

设 f(z) 在单连通域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0$, 则 f(z) 在 D 内解析.

证明

由题设可知 f(z) 的积分与路径无关. 固定 $z_0 \in D$, 则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z) \, \mathrm{d}z$$

定义了 D 内的一个函数. 类似于原函数的证明可知 F'(z) = f(z).

练习

$$\oint_{|z-2i|=3} \frac{1}{z^2(z-i)} \, \mathrm{d}z = \underline{0}.$$

例 (莫累拉定理)

设 f(z) 在单连通域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z) dz = 0$, 则 f(z) 在 D 内解析.

证明

由题设可知 f(z) 的积分与路径无关. 固定 $z_0 \in D$, 则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z) \, \mathrm{d}z$$

定义了 D 内的一个函数. 类似于原函数的证明可知 F'(z) = f(z). 故 f(z) 作为解析 函数 F(z) 的导数也是解析的.

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同?

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数 f(z) 只要在区域 D 中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在 D 中解析.

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数 f(z) 只要在区域 D 中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在 D 中解析, 这一点与实变量函数有本质的区别。

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数 f(z) 只要在区域 D 中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在 D 中解析. 这一点与实变量函数有本质的区别.

同时我们也可以看出, 如果一个二元实函数 u(x,y) 是一个解析函数的实部或虚部,则 u 也是具有任意阶偏导数.

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数 f(z) 只要在区域 D 中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在 D 中解析. 这一点与实变量函数有本质的区别.

同时我们也可以看出, 如果一个二元实函数 u(x,y) 是一个解析函数的实部或虚部,则 u 也是具有任意阶偏导数. 这便引出了调和函数的概念.

第五节 解析函数与调和函数的关系

- ■调和函数
- 共轭调和函数

调和函数

调和函数是一类重要的二元实变函数, 它和解析函数有着紧密的联系.

调和函数

调和函数是一类重要的二元实变函数, 它和解析函数有着紧密的联系. 为了简便, 我们用 u_{xx}, u_{yy} 来表示二阶偏导数.

调和函数

调和函数是一类重要的二元实变函数,它和解析函数有着紧密的联系.为了简便,我们用 u_{xx},u_{yy} 来表示二阶偏导数.

定义

如果二元实变函数 u(x,y) 在区域 D 内有二阶连续偏导数,且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

则称 u(x,y) 是 D 内的调和函数.

定理

区域 D 内解析函数 f(z) 的实部和虚部都是调和函数.

定理

区域 D 内解析函数 f(z) 的实部和虚部都是调和函数.

证明

设 $\overline{f(z)} = u(x,y) + iv(x,y)$, 则 u,v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

定理

区域 D 内解析函数 f(z) 的实部和虚部都是调和函数.

证明

设 $\overline{f(z)} = u(x,y) + iv(x,y)$, 则 u,v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

由于 f(z) 任意阶可导, 因此 u,v 存在任意阶偏导数.

定理

区域 D 内解析函数 f(z) 的实部和虚部都是调和函数.

证明

设 $\overline{f(z)} = u(x,y) + iv(x,y)$, 则 u,v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

由于 f(z) 任意阶可导, 因此 u,v 存在任意阶偏导数. 由 $\mathit{C-R}$ 方程 $u_x=v_y,u_y=-v_x$

定理

区域 D 内解析函数 f(z) 的实部和虚部都是调和函数.

证明

设 $\overline{f(z)} = u(x,y) + iv(x,y)$, 则 u,v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

由于 f(z) 任意阶可导, 因此 u,v 存在任意阶偏导数. 由 C-R 方程 $u_x=v_y,u_y=-v_x$ 可知

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

定理

区域 D 内解析函数 f(z) 的实部和虚部都是调和函数.

证明

设 $\overline{f(z)} = u(x,y) + iv(x,y)$, 则 u,v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

由于 f(z) 任意阶可导, 因此 u,v 存在任意阶偏导数. 由 C-R 方程 $u_x=v_y,u_y=-v_x$ 可知

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0.$$

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢?

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

如果 u + iv 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的共轭调和函数.

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

如果 u+iv 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的共轭调和函数. 换言之 $u_x=v_y, u_y=-v_x.$

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

如果 u+iv 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的共轭调和函数. 换言之 $u_x=v_y, u_y=-v_x$. 显然 -u 是 v 的共轭调和函数.

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

如果 u+iv 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的共轭调和函数. 换言之 $u_x=v_y, u_y=-v_x.$ 显然 -u 是 v 的共轭调和函数.

定理

设 u(x,y) 是单连通域 D 内的调和函数,则线积分

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y \, dx + u_x \, dy + C$$

是 u 的共轭调和函数.

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

如果 u+iv 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的共轭调和函数. 换言之 $u_x=v_y, u_y=-v_x.$ 显然 -u 是 v 的共轭调和函数.

定理

设 u(x,y) 是单连通域 D 内的调和函数,则线积分

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y \, dx + u_x \, dy + C$$

是 u 的共轭调和函数.

由此可知, 区域 D 上的调和函数在 $z \in D$ 的一个邻域内是一解析函数的实部, 从而在该邻域内具有任意阶连续偏导数.

解析函数与调和函数的联系

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

如果 u+iv 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的共轭调和函数. 换言之 $u_x=v_y, u_y=-v_x.$ 显然 -u 是 v 的共轭调和函数.

定理

设 u(x,y) 是单连通域 D 内的调和函数,则线积分

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y \, dx + u_x \, dy + C$$

是 u 的共轭调和函数.

由此可知, 区域 D 上的调和函数在 $z \in D$ 的一个邻域内是一解析函数的实部, 从而在该邻域内具有任意阶连续偏导数. 而 z 的任取的, 因此调和函数总具有任意阶连续偏导数.

如果 D 是多连通区域,则未必存在共轭调和函数.

如果 D 是多连通区域,则未必存在共轭调和函数. 例如 $\ln(x^2+y^2)$ 是复平面去掉原点上的调和函数,但它并不是某个解析函数的实部.

如果 D 是多连通区域,则未必存在共轭调和函数. 例如 $\ln(x^2 + y^2)$ 是复平面去掉原点上的调和函数. 但它并不是某个解析函数的实部. 事实上. 它是 $2 \ln z$ 的实部.

如果 D 是多连通区域,则未必存在共轭调和函数. 例如 $\ln(x^2+y^2)$ 是复平面去掉原点上的调和函数,但它并不是某个解析函数的实部. 事实上,它是 $2 \ln z$ 的实部.

在实际计算中, 我们一般不用线积分来得到共轭调和函数, 而是采用下述两种办法:

如果 D 是多连通区域,则未必存在共轭调和函数. 例如 $\ln(x^2+y^2)$ 是复平面去掉原点上的调和函数,但它并不是某个解析函数的实部. 事实上,它是 $2 \ln z$ 的实部.

在实际计算中, 我们一般不用线积分来得到共轭调和函数, 而是采用下述两种办法:

偏积分法

通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x,y) + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定.

如果 D 是多连通区域,则未必存在共轭调和函数. 例如 $\ln(x^2+y^2)$ 是复平面去掉原点上的调和函数,但它并不是某个解析函数的实部. 事实上,它是 $2 \ln z$ 的实部.

在实际计算中, 我们一般不用线积分来得到共轭调和函数, 而是采用下述两种办法:

偏积分法

通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x,y) + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y = -v_x$ 中解出 $\psi(x)$.

如果 D 是多连通区域,则未必存在共轭调和函数. 例如 $\ln(x^2+y^2)$ 是复平面去掉原点上的调和函数,但它并不是某个解析函数的实部. 事实上,它是 $2 \ln z$ 的实部.

在实际计算中, 我们一般不用线积分来得到共轭调和函数, 而是采用下述两种办法:

偏积分法

通过 $v_y=u_x$ 解得 $v=\varphi(x,y)+\psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y=-v_x$ 中解出 $\psi(x)$.

不定积分法

对 $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ 求不定积分得到 f(z).

例

证明 $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.



证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.



例

证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解

• 由 $u_x = -6xy, u_y = 3y^2 - 3x^2$ 可知 $u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$,

例

证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解

• 由 $u_x = -6xy$, $u_y = 3y^2 - 3x^2$ 可知 $u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$, 故 u 是调和函数

例

证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

- 由 $u_x = -6xy$, $u_y = 3y^2 3x^2$ 可知 $u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$, 故 u 是调和函数.
- $\text{ in } v_y = u_x = -6xy \notin v = -3xy^2 + \psi(x).$

例

证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

- 由 $u_x = -6xy$, $u_y = 3y^2 3x^2$ 可知 $u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$, 故 u 是调和函数.
- $\text{ in } v_y = u_x = -6xy \notin v = -3xy^2 + \psi(x).$
- 由 $v_x = -u_y = 3x^2 3y^2$ 得 $\psi'(x) = 3x^2$,

例

证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

- 由 $u_x = -6xy$, $u_y = 3y^2 3x^2$ 可知 $u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$, 故 u 是调和函数.
- $\text{ th } v_y = u_x = -6xy \notin v = -3xy^2 + \psi(x).$
- $\text{th} \ v_x = -u_y = 3x^2 3y^2 \ \text{if} \ \psi'(x) = 3x^2, \ \psi(x) = x^3 + C.$

例

证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

- 由 $u_x = -6xy$, $u_y = 3y^2 3x^2$ 可知 $u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$, 故 u 是调和函数.
- $\forall v_y = u_x = -6xy \notin v = -3xy^2 + \psi(x)$.
- $\forall v_x = -u_y = 3x^2 3y^2 \notin \psi'(x) = 3x^2, \ \psi(x) = x^3 + C.$
- $to v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C$,

例

证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

- 由 $u_x = -6xy$, $u_y = 3y^2 3x^2$ 可知 $u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$, 故 u 是调和函数.
- $\forall v_y = u_x = -6xy \notin v = -3xy^2 + \psi(x)$.
- $\forall v_x = -u_y = 3x^2 3y^2 \notin \psi'(x) = 3x^2, \ \psi(x) = x^3 + C.$
- $to v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C$,

$$f(z) = u + iv = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + C)$$

例

证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

- 由 $u_x = -6xy$, $u_y = 3y^2 3x^2$ 可知 $u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$, 故 u 是调和函数.
- $\forall v_y = u_x = -6xy \notin v = -3xy^2 + \psi(x)$.
- $\forall v_x = -u_y = 3x^2 3y^2 \notin \psi'(x) = 3x^2, \ \psi(x) = x^3 + C.$
- $to v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C$,

$$f(z) = u + iv = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + C) = i(x + iy)^3 + iC = i(z^3 + C).$$

当解析函数 f(z) 为 x,y 的多项式形式时, 将 m 次齐次的项放一起, 则 x^m 的系数 就是 f(z) 中 z^m 的系数.

当解析函数 f(z) 为 x,y 的多项式形式时, 将 m 次齐次的项放一起, 则 x^m 的系数 就是 f(z) 中 z^m 的系数.

在上例中我们也可由另一种方法计算得到:

当解析函数 f(z) 为 x,y 的多项式形式时, 将 m 次齐次的项放一起, 则 x^m 的系数 就是 f(z) 中 z^m 的系数.

在上例中我们也可由另一种方法计算得到:

$$f'(z) = u_x - iu_y = -6xy - i(3y^2 - 3x^2) = 3iz^2.$$



当解析函数 f(z) 为 x,y 的多项式形式时, 将 m 次齐次的项放一起, 则 x^m 的系数 就是 f(z) 中 z^m 的系数.

在上例中我们也可由另一种方法计算得到:

$$f'(z) = u_x - iu_y = -6xy - i(3y^2 - 3x^2) = 3iz^2.$$

因此
$$f(z) = iz^3 + C$$
.

例

求解析函数 f(z) 使得它的虚部为

$$v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y.$$

例

求解析函数 f(z) 使得它的虚部为

$$v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y.$$

解

由 $u_x = v_y = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1$ 得

$$u = e^x(x\cos y - y\sin y) + x + \psi(y).$$

例

求解析函数 f(z) 使得它的虚部为

$$v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y.$$

由
$$u_x = v_y = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1$$
 得

$$u = e^{x}(x\cos y - y\sin y) + x + \psi(y).$$

由
$$u_y = -v_x = -e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) - 1$$
 得

$$\psi'(y) = -1, \quad \psi(y) = -y + C.$$

例

求解析函数 f(z) 使得它的虚部为

$$v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y.$$

由
$$u_x = v_y = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1$$
 得

$$u = e^x(x\cos y - y\sin y) + x + \psi(y).$$

由
$$u_y = -v_x = -e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) - 1$$
 得

$$\psi'(y) = -1, \quad \psi(y) = -y + C.$$

$$f(z) = u + iv = e^{x}(x\cos y - y\sin y) + x - y + C + i[e^{x}(y\cos y + x\sin y) + x + y]$$

例

求解析函数 f(z) 使得它的虚部为

$$v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y.$$

由
$$u_x = v_y = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1$$
 得

$$u = e^{x}(x\cos y - y\sin y) + x + \psi(y).$$

由
$$u_y = -v_x = -e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) - 1$$
 得

$$\psi'(y) = -1, \quad \psi(y) = -y + C.$$

$$f(z) = u + iv = e^{x}(x\cos y - y\sin y) + x - y + C + i[e^{x}(y\cos y + x\sin y) + x + y]$$

= $ze^{z} + (1+i)z + C$, $C \in \mathbb{R}$.

例

求解析函数 f(z) 使得它的虚部为

$$v(x,y) = e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y.$$

解

由
$$u_x = v_y = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1$$
 得

$$u = e^x(x\cos y - y\sin y) + x + \psi(y).$$

由
$$u_y = -v_x = -e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) - 1$$
 得

$$\psi'(y) = -1, \quad \psi(y) = -y + C.$$

$$f(z) = u + iv = e^{x}(x\cos y - y\sin y) + x - y + C + i[e^{x}(y\cos y + x\sin y) + x + y]$$

= $ze^{z} + (1+i)z + C$, $C \in \mathbb{R}$.

这里, 我们只需看 $e^x \cos y$ 的系数 x + iy = z, 即 f(z) 中 e^z 的系数.

也可由

$$f'(z) = v_y + iv_x = e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1 + i(e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1)$$

也可由

$$f'(z) = v_y + iv_x$$

= $e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1 + i(e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1)$
= $(z+1)e^z + 1 + i$.

也可由

$$f'(z) = v_y + iv_x$$

= $e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1 + i(e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1)$
= $(z+1)e^z + 1 + i$.

得
$$f(z) = ze^z + (1+i)z + C$$
.

也可由

$$f'(z) = v_y + iv_x$$

= $e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1 + i(e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1)$
= $(z+1)e^z + 1 + i$.

得
$$f(z) = ze^z + (1+i)z + C$$
.

- 练习

证明 $u(x,y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

也可由

$$f'(z) = v_y + iv_x$$

= $e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1 + i(e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1)$
= $(z+1)e^z + 1 + i$.

得
$$f(z) = ze^z + (1+i)z + C$$
.

- 练习

证明 $u(x,y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

答案

$$v(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + C.$$

也可由

$$f'(z) = v_y + iv_x$$

= $e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1 + i(e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1)$
= $(z+1)e^z + 1 + i$.

得
$$f(z) = ze^z + (1+i)z + C$$
.

练习

证明 $u(x,y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

答案

$$v(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + C.$$

显然 $u + iv = (1 + 2i)z^3 + iC$.