3.3 高阶导数

- 沿直线运动的物体的速度 $v(t)$ 是位置函数 $s(t)$ 对时间 t 的变化率, 即 $v(t)=s'(t)$. 而加速度 $a(t)$ 是速度 $v(t)$ 对时间 t 的变化率, 即这种导数称为 $s(t)$ 对 t 的二阶导数.
- 对导函数再讨论其可导性或再求导数, 甚至可以对导函数的导函数继续讨论下去, 则就是本节所要介绍的高阶导数.

- 定义 如果函数 $y=f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在点 x 处可导，就称 $y=f(x)$ 在 x 处二阶可导. $f'(x)$ 在点 x 处的导数称为函数 $y=f(x)$ 在 x 点处的二阶导数，记作 $f''(x), y'', \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$f''(x)=[f'(x)]' \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

- 极限形式为 $f''(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$.
- 类似地，我们可以定义三阶导数 $f'''(x), y''', \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^3f}{\mathrm{d}x^3}$，四阶导数 $f^{(4)}(x), y^{(4)}, \frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^4f}{\mathrm{d}x^4}$ 等等.

- 一般地，$y=f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数的导数称为 $f(x)$的 n 阶导数，记作 $f^{(n)}(x), y^{(n)}, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$，即

$$f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]' \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right).$$

- 二阶及二阶以上的导数称为高阶导数，$f'(x)$ 称为一阶导数. 有时候为了方便也称 $f(x)$ 为零阶导数，即 $f^0(x)=f(x)$.
- 注意，低阶导数存在不能推出更高阶的导数存在.
- 例如 $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$ 在 $x=0$ 处可导，但导函数 $f'(x)=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$ 在 $x=0$ 处不可导，即 $f(x)=x^{\frac{5}{3}}$ 在 $x=0$ 处不是二阶可导的.
- 又例如 $f(x)=x^{\frac{8}{3}}$ 在 $x=0$ 处二阶可导但不是三阶可导的.

- 例 设 $f(x)=xe^x$, 求 $f''(x)$.
- 解 $f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$,

  $f''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$.
- 例 求 $y=2x^3-x^2+5x+1$ 的各阶导数.
- 解 $y'=6x^2-2x+5, y''=12x-2, y'''=12.$
- 当 $n\geq 4$ 时, $y^{(n)}=0$.
- 从这个例子中可以看出, 多项式函数任意阶可导, 且每次求导后仍然为多项式, 次数降低一次直至为 0.

- 一般地, 若 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0)$, 则

$$y^{(k)}=\begin{cases} a_nn(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}+\cdots+a_kk!, & k<n, \\ a_nn!, & k=n, \\ 0, & k>n. \end{cases}$$

- 例 求 $y=e^{\lambda x}$ (λ 为常数)的各阶导数.
- 解 $y'=\lambda e^{\lambda x},\quad y''=\lambda f'(x)=\lambda^2e^{\lambda x}$.
- 一般地, $y^{(n)}=\left(e^{\lambda x}\right)^{(n)}=\lambda^ne^{\lambda x}, n=0,1,2,\ldots$
- 特别地, $(e^x)^{(n)}=e^x, n=0,1,2,\ldots$

- 例 求 $y=\sin\omega x$ (ω 为常数)的各阶导数.

- 解 $y'=\omega\cos\omega x=\omega\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{2}\right),$

$$y''=\omega^2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=\omega^2\sin\left(\omega x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\omega^3\cos\left(\omega x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\omega^3\sin\left(\omega x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(n)}=\omega^n\sin\left(\omega x+\frac{n\pi}{2}\right),\qquad n=0,1,2,\ldots$$

- 同理 $(\cos\omega x)^{(n)}=\omega^n\cos\left(\omega x+\dfrac{n\pi}{2}\right),n=0,1,2,\ldots$

- **例** 求 $y=(x+C)^{\mu}$ $(C,\mu$ 为常数)的各阶导数.
- **解** $y'=\mu(x+C)^{\mu-1},\ y''=\mu(\mu-1)(x+C)^{\mu-2},\ldots$
- 一般地, $y^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-k+1)(x+C)^{\mu-k}, n=0,1,2,\ldots$
- 如果 μ 是正整数则情形同多项式.
- 特别地, 我们有 $\left(\frac{1}{x+C}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+C)^{n+1}}, n=0,1,2,\ldots$
- 由于 $[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x}$, 因此 $[\ln(1+x)]^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n}, n=0,1,2,\ldots$
- 同理 $[\ln(1-x)]^{(n)}=-\left[\frac{1}{x-1}\right]^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x-1)^n}=-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}, n=0,1,2,\ldots$

- 常用高阶导数公式

$$(x^m)^{(n)}=\begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, & n<m,\\ m!, & n=m,\\ 0, & n>m. \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{x+C}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+C)^{n+1}},\qquad \left(e^{\lambda x}\right)^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$$

$$(\sin\omega x)^{(n)}=\omega^n\sin\left(\omega x+\frac{n\pi}{2}\right),\qquad (\cos\omega x)^{(n)}=\omega^n\cos\left(\omega x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)}=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x+1)^n},\qquad [\ln(1-x)]^{(n)}=-\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

- 求一个函数的 n 阶导数时，可以先求一阶导数、二阶导数、三阶导数，根据其中的规律，归纳得到函数的 n 阶导数. 这种求函数 n 阶导数的方法我们称为直接法.
- 利用直接法可以求一些简单函数的高阶导数. 对于复杂的函数，用直接法很难求出 n 阶导数. 下面介绍间接法，为此先介绍高阶导数的运算法则.

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}, \qquad (Cu)^{(n)} = Cu^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \quad \text{(莱布尼兹公式)}.$$

- 特别地，$(uv)'' = u''v + 2u'v' + 2uv''$,
- $(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + v'''$.

- 利用高阶导数运算法则，以及常用高阶导数公式，通过适当的函数变形求出函数 n 阶导数的方法称为间接法.
- 例 函数 $y=\ln(1-2x)$ 在点 $x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$______.
- 解 由于 $y=\ln 2+\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)$，因此

$$y^{(n)}=\left[\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)\right]^{(n)}=\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n}},$$

- $y^{(n)}(0)=-2^{n}(n-1)!.$

- 例 设 $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, 则 $y^{(99)}(0)=$______.

- 解 由于 $y=\frac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x)]$, 因此

$$y^{(99)}=\frac{1}{2}\left[(\ln(1-x))^{(99)}-(\ln(1+x))^{(99)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{98!}{(1-x)^{99}}-\frac{(-1)^{98}98!}{(1+x)^{99}}\right]=-\frac{98!}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{99}}\right.$$

$y^{(99)}(0)=-98!.$

- 例 求 $y=\frac{x}{1-x^2}$ 的各阶导数.
- 解 由于 $y=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$, 因此

$$y^{(n)}=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}+\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

- 例 求 $y=\frac{1}{x^2-1}$ 的各阶导数.
- 解 由于 $y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$, 因此

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

- 例 求 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$ 的 10 阶导数.
- 解 由于

$$y=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{\cos 4x}{4},$$

- 因此 $y^{(10)}=\frac{1}{4}\cdot 4^{10}\cos\left(4x+10\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-4^9\cos 4x\,.$

- 另解 由于 $$y' = 4\sin^3 x\cos x - 4\cos^3 x\sin x$$ $$= 4\sin x\cos x\left(\sin^2 x - \cos^2 x\right)$$ $$= -2\sin 2x\cos 2x = -\sin 4x\,,$$

因此 $y^{(10)} = -(\sin 4x)^{(9)} = -4^9\sin\left(4x + 9\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -4^9\cos 4x\,.$

- 例 求 $y = \sin x\sin 3x$ 的 20 阶导数.

- 解 由于 $y = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)$, 因此

$$y^{(20)} = \frac{1}{2}\cdot\left[2^{20}\cos\left(2x + 20\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 4^{20}\cos\left(4x + 20\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= 2^{19}\cos 2x - 2^{39}\cos 4x\,.$$

- 例 求 $y = x^2e^{-x}$ 的 10 阶导数.
- 解 由莱布尼兹公式,

$$y^{(10)} = \left(x^2e^{-x}\right)^{(10)} = \sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^{k}\left(x^2\right)^{(k)}\left(e^{-x}\right)^{(n-k)}$$

$$= x^2\left(e^{-x}\right)^{(10)} + \mathrm{C}_{10}^{1} \cdot 2x\left(e^{-x}\right)^{(9)} + \mathrm{C}_{10}^{2} \cdot 2\left(e^{-x}\right)^{(8)}$$

$$= x^2e^{-x} - 20xe^{-x} + 90e^{-x} = \left(x^2 - 20x + 90\right)e^{-x}.$$

- 一般地, 如果 $P(x)$ 是多项式, $P(x)e^{\lambda x}$ 的各阶导数仍然为 $Q(x)e^{\lambda x}$ 这种形式, 其中 $Q(x)$ 是与 $P(x)$ 同次数的多项式.

- 例 设 $y=\arctan x$, 求 $y^{(n)}(0)$, 其中 $n>1$.
- 解 由于 $y'=\frac{1}{1+x^2}$, 因此 $(1+x^2)y'=1$.
- 两边同时对 x 求 $(n-1)$ 阶导数, 则

$$(1+x^2)y^{(n)}+2(n-1)xy^{(n-1)}+(n-1)(n-2)y^{(n-2)}=0.$$

- 令 $x=0$, 则 $y^{(n)}=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}$.
- 由于 $y(0)=0, y'(0)=1$, 因此

$$y^{(n)}=\begin{cases}(-1)^m(2m)!, & n=2m+1,\\ 0, & n=2m,\end{cases}\quad m=1,2,\ldots$$

- 如果允许使用复数的话，

$$y' = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right),$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right] = \frac{(-1)^{n+1}\sin\left(n\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}.$$

- 类似地，

$$(e^x\cos x)^{(n)} = 2^{\frac{n}{2}}e^x\cos\left(x+\frac{n\pi}{4}\right).$$