第四章　级数

4.1　复数项级数

作业 1. 单选题: (2021 年 A 卷) 下列级数中发散的是 (　).

(A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$　(B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\ln(in)}\right]^n$　(C) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{5^n}$　(D) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}$

作业 2. 单选题: (2021 年 B 卷) 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n i}{\sqrt{n}}\right]$ 的敛散性是 (　).

(A) 无法判断　(B) 条件收敛　(C) 绝对收敛　(D) 发散

作业 3. 判断下列级数的绝对收敛性与收敛性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{i^n}{\ln n}$;　(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(6+5i)^n}{8^n}$;　(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}(1+2i)^n$.

4.2　幂级数

作业 4. 单选题: (2022 年 A 卷) 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(iz)^n$ 的收敛半径是 (　).

(A) i　(B) $-i$　(C) 1　(D) $+\infty$

作业 5. 填空题: (2020 年 B 卷) 如果级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-1)^n$ 在点 $z=3$ 发散，则 (　).

(A) 在点 $z=-1$ 收敛　(B) 在点 $z=-3$ 发散

(C) 在点 $z=2$ 收敛　(D) 以上都不对

作业 6. 填空题: (2020 年 A 卷) 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径为________.

作业 7. 填空题: (2020 年 B 卷) 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(z-1)^n$ 的收敛半径为________.

作业 8. 填空题: (2021 年 B 卷) 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$ 的收敛半径为________.

作业 9. 判断题:

(1) 每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛. ( )

(2) 每一个幂级数的和函数在收敛圆周内可能有奇点. ( )

(3) 每一个在 z_0 可导的函数一定可以在 z_0 的邻域内展开成泰勒级数. ( )

作业 10. 求下列幂级数的收敛半径:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$ (p 为正整数);　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}z^n$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n(z+i)^n$;　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{\pi i}{n}}z^n$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-2}{\ln in}\right)^n$;　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+a^n)z^n$, 其中 a 是正实数.

作业 11. 证明: 如果 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}$ 存在 ($\neq\infty$), 下列三个幂级数有相同的收敛半径

$$\sum c_n z^n;\quad \sum\frac{c_n}{n+1}z^{n+1};\quad \sum nc_n z^{n-1}.$$

4.3 泰勒级数

作业 12. 函数 $f(z)=\dfrac{e^{1/z}}{z+1}$ 在 $z_0=0$ 处的泰勒展开成立的最大圆域是 $|z|=$__________.

作业 13. 把下列各函数展开成 z 的幂级数, 并指出它们的收敛半径:

(1) $\dfrac{1}{(1+z^2)^2}$;　(2) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$;　(3) $e^z\cos z$.

作业 14. 求下列各函数在指定点 z_0 处的泰勒展开式, 并指出它们的收敛半径:

(1) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}, z_0=2$;　(2) $\dfrac{1}{z^2}, z_0=-1$;　(3) $\arctan z, z_0=0$.

4.4 洛朗级数

作业 15. (2020 年 A 卷) 将函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2(z-1)}$ 分别在下列区域内展开成洛朗级数

(1) $0<|z|<1$;　(2) $1<|z|<+\infty$.

作业 16. (2020 年 B 卷) 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{(1-z)(z-2)}$ 分别在下列区域内展开成洛朗级数

(1) $0<|z-1|<1$;　(2) $2<|z|<+\infty$.

作业 17. (2021 年 A 卷) 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z-2}$ 分别在下列区域内展开成洛朗级数

(1) $1<|z|<2$;　(2) $0<|z-1|<1$.

作业 18. (2021 年 B 卷) 将函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z}$ 分别在下列区域内展开成洛朗级数

(1) $1<|z|<2$;　(2) $0<|z+1|<1$.

作业 19. 将 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

作业 20. 将函数 $e^{\frac{1}{1-z}}$ 在圆环域 $1<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

作业 21. 将 $z^3\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$ 在圆环域 $0<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

作业 22. 下列结论是否正确? 用长除法得

$$\begin{aligned}\frac{z}{1-z}&=z+z^2+z^3+z^4+\cdots,\\ \frac{z}{z-1}&=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots,\end{aligned}$$

因为 $\dfrac{z}{1-z}+\dfrac{z}{z-1}=0$, 所以

$$\cdots+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+z^4+\cdots=0.$$

作业 23. 如果 C 为正向圆周 $|z|=3$, 求积分 $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的值, 其中 $f(z)$ 为:

(1) $\dfrac{1}{z(z+2)}$;

(2) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$.

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 24. 设解析函数 $f(z)$ 满足 $f(\zeta z)=\zeta^k f(z)$, 其中 $\zeta=e^{2\pi i/m}$ 是 m 次单位根.

(1) 归纳证明 $f^{(n)}(\zeta z)=\zeta^{k-n}f^{(n)}(z)$.

(2) 证明 $f(z)$ 的麦克劳林展开只有 $ml+k$ 次项, $l\in\mathbb{Z}$.

作业 25. 设 $f(z)=\ln z$, $z_0=-3+4i$.

(1) 求 $f(z)$ 在 z_0 处的泰勒展开, 并说明它成立的圆域半径是 4?

(2) 证明上述幂级数的收敛半径是 5? 为什么比 4 大?

作业 26. 设 $P(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 是有理函数, 且其 (既约) 分母为

$$g(z)=(z-\lambda_1)^{d_1}\cdots(z-\lambda_m)^{d_m},$$

其中 $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\cdots\leqslant|\lambda_m|$.

设 $r=|\lambda_k|<R=|\lambda_{k+1}|$. 证明 $P(z)$ 在圆环域 $r<|z|<R$ 内的洛朗展开形如

$$h(z)+\sum_{n\geqslant 0}\left[\frac{\alpha_1(n)}{\lambda_1^n}+\cdots+\frac{\alpha_k(n)}{\lambda_k^n}\right]z^n+\sum_{n<0}\left[\frac{\alpha_{k+1}(n)}{\lambda_{k+1}^n}+\cdots+\frac{\alpha_m(n)}{\lambda_m^n}\right]z^n,$$

其中 $h(z)$ 是只有有限多项的双边幂级数, $\alpha_t(n)$ 是 n 的多项式, 次数为 d_t.