

2022 年 合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

2022~2023 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. i^{-i} 的主值是_____.
2. 设 $z = -i$, 则 $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 =$ _____.
3. 设 C 为正向圆周 $|z| = 2$, 则积分 $\oint_C \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) dz =$ _____.
4. 设 a, b, c 为实数. 如果函数 $f(z) = x^2 - 2xy - y^2 + i(ax^2 + bxy + cy^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a + b + c =$ _____.
5. 函数 $\sin t + j \cos t$ 的傅里叶变换为_____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 方程 $||z + i| - |z - i|| = 1$ 表示的曲线是 ().
A. 直线 B. 不是圆的椭圆 C. 双曲线 D. 圆周
2. 不等式 $-1 \leq \arg z \leq \pi - 1$ 确定的是的 ().
A. 有界多连通闭区域 B. 有界单连通区域
C. 无界多连通区域 D. 无界单连通闭区域
3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (iz)^n$ 的收敛半径是 ().
A. i B. $-i$ C. 1 D. $+\infty$
4. 下面哪个函数在 $z = 0$ 处不可导? ()
A. $2x + 3yi$ B. $2x^2 + 3y^2i$ C. $x^2 - xyi$ D. $e^x \cos y + ie^x \sin y$
5. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, $g(z)$ 的一阶零点, 则 z_0 是 $f(z)^3 g(z)^2$ 的 ().
A. 一阶极点 B. 一阶零点 C. 可去奇点 D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z = \frac{3+i}{i} - \frac{10i}{3-i}$, 求 z 的模和辐角.
2. (6 分) 解方程 $\sin z = 2 \cos z$.
3. (6 分) 设 C 为从 i 到 $i - \pi$ 再到 $-\pi$ 的折线, 求 $\int_C \cos^2 z dz$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z - 3| = 4$, 求 $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2} dz$.
5. (10 分) 假设 $v(x, y) = x^3 + y^3 - axy(x + y)$ 是调和函数, 求参数 a 以及解析函数 $f(z)$ 使得 $v(x, y)$ 是它的虚部.
6. (10 分) 确定函数 $f(z) = \frac{z + 1}{(z - 1)^2}$ 在圆环域
(1) $0 < |z| < 1$; (2) $1 < |z| < +\infty$
内的洛朗级数展开式.
7. (10 分) 求 $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z^2 - \pi^2)}$ 在有限复平面内的奇点和相应的留数.
8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题
- $$\begin{cases} y''(t) + 2y(t) = \sin t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$
9. (3 分) 复变函数 $f(z) = \sin z$ 和实变量函数 $g(x) = \sin x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试列举一二.

2022 年合肥工业大学考试参考答案 (A)

2022 ~ 2023 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. $e^{\pi/2}$, 2. 1, 3. 0, 4. 2, 5. $2\pi j\delta(\omega + 1)$.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	C	D	C	A	A

三、解答题

1. (6 分) 【解】

由于 $z = -3i + 1 - i(3 + i) = 2 - 6i$, (2 分)

因此 $|z| = 2\sqrt{10}$, (2 分)

$\text{Arg } z = 2k\pi - \arctan 3, k \in \mathbb{Z}$ (2 分, 只有主值得 1 分)

2. (6 分) 【解】

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i(e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$e^{2iz} = \frac{1 + 2i}{1 - 2i} = \frac{(1 + 2i)^2}{5}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$2iz = \text{Ln} \frac{(1 + 2i)^2}{5} = (2 \arctan 2 + 2k\pi)i, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$z = \arctan 2 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分, 只有主值得 1 分})$$

其它答案: $z = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{4}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3. (6 分) 【解】

由于 $\cos^2 z$ 解析, 且 (1 分)

$$\int \cos^2 z \, dz = \int \frac{1 + \cos(2z)}{2} \, dz \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{z}{2} + \frac{\sin(2z)}{4} + C, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C \cos^2 z \, dz &= \left[\frac{z}{2} + \frac{\sin(2z)}{4} \right] \Big|_i^{-\pi} \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ &= -\frac{\pi}{2} - \left[\frac{i}{2} + \frac{\sin(2i)}{4} \right] \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ &= -\frac{\pi}{2} + \frac{(e^{-2} - 4 - e^2)i}{8}. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})\end{aligned}$$

4. (10 分)【解】

由于 $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 - 3\pi z + 2\pi^2}$ 在 $|z - 3| \leq 4$ 内的奇点为 $\pi, 2\pi$, $\dots\dots\dots$ (3 分)
因此

$$\begin{aligned}\oint_C f(z) \, dz &= 2\pi i [\operatorname{Res}[f(z), \pi] + \operatorname{Res}[f(z), 2\pi]] \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{iz}}{z - 2\pi} \Big|_{z=\pi} + \frac{e^{iz}}{z - \pi} \Big|_{z=2\pi} \right] \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right] = 4i. \dots\dots\dots (3 \text{ 分})\end{aligned}$$

5. (10 分)【解】

由 $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 6x - 2ay + 6y - 2ax = 0$ 可知 $a = 3$. $\dots\dots\dots$ (3 分)
由

$$\begin{aligned}f'(z) &= v_y + iv_x \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= (3y^2 - 3x^2 - 6xy) + i(3x^2 - 6xy - 3y^2) \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= 3(i - 1)(x + iy)^2 = 3(i - 1)z^2 \dots\dots\dots (1 \text{ 分})\end{aligned}$$

可知 $f(z) = (i - 1)z^3 + C, C \in \mathbb{R}$. $\dots\dots\dots$ (2 分, 没有常数项得 1 分)

其它解法: 由 $u_x = v_y = 3y^2 - 3x^2 - 6xy$ 得 $u = 3xy^2 - x^3 - 3x^2y + \psi(y)$. $\dots\dots\dots$ (2 分)

由 $u_y = -v_x = -(3x^2 - 6xy - 3y^2)$ 得 $\psi'(y) = 3y^2$,

$\psi(y) = y^3 + C$, $\dots\dots\dots$ (3 分, 没有常数项得 2 分)

$$\begin{aligned}f(z) &= u + iv \\ &= 3xy^2 - x^3 - 3x^2y + y^3 + C + i(x^3 + y^3 - 3xy^2 - 3x^2y) \\ &= (i - 1)z^3 + C, C \in \mathbb{R}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

6. (10 分)【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 1, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z-1+2}{(z-1)^2} = \frac{1}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2} = -\frac{1}{1-z} + 2\left(\frac{1}{1-z}\right)' \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分}) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)z^n. \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}, \quad \dots\dots\dots(1 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1} - 2\left(\frac{1}{z-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}\right)' \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-n)z^{-n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-n+1)z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)z^{-n}. \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

7. (10 分)【解】

由于 0 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

由于 $\pm\pi$ 是分母的一阶零点, 因此它们是 $f(z)$ 的一阶极点. $\dots\dots\dots(1 \text{ 分})$

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = \left(\frac{\cos z}{z^2 - \pi^2}\right)' \Big|_{z=0} \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$= \frac{-\sin z \cdot (z^2 - \pi^2) - \cos z \cdot 2z}{(z^2 - \pi^2)^2} \Big|_{z=0} = 0, \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z), \pi] = \frac{\cos z}{z^2(z + \pi)} \Big|_{z=\pi} = -\frac{1}{2\pi^3}, \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z), -\pi] = \frac{\cos z}{z^2(z - \pi)} \Big|_{z=-\pi} = \frac{1}{2\pi^3}. \quad \dots\dots\dots(2 \text{ 分})$$

8. (9 分)【解】

设 $\mathcal{L}[y] = Y$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y - 2, \quad \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2 Y - 2 + 2Y = \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2 + 2} + \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 2)} = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 1} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 2} \right] = \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin(\sqrt{2}t). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

9. (3 分) 【解】

例如 (每项 1 分)

- $f'(z) = \cos z, g'(x) = \cos x.$ $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- $\sin z$ 处处可导, $\sin x$ 处处可导. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- 麦克劳林展开的系数相同. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- $\sin z$ 无界, $\sin x$ 有界. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

2022 年 合 肥 工 业 大 学 试 卷 (B)

2022 ~ 2023 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. $-1 + \sqrt{3}i$ 的辐角主值是_____.
2. $i^{2022} - (-i)^{2022} =$ _____.
3. 如果函数 $f(z) = e^{ax}(\cos y - i \sin y)$ 在复平面上处处解析, 则实数 $a =$ _____.
4. 设 C 为正向圆周 $|z| = 1$, 则积分 $\oint_C \left(\frac{1+z+z^2}{z^3} \right) dz =$ _____.
5. 函数 e^{jt} 的傅里叶变换为_____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 不等式 $1 < |z| < 2$ 确定的是 ().
A. 有界多连通区域 B. 有界单连通区域 C. 无界多连通区域 D. 无界单连通区域
2. 方程 $|z+i| = |z-i|$ 表示的曲线是 ().
A. 直线 B. 不是圆的椭圆 C. 双曲线 D. 圆周
3. 幂级数在其收敛圆周上 ().
A. 一定处处绝对收敛 B. 一定处处条件收敛
C. 一定有发散的点 D. 可能处处收敛也可能有发散的点
4. 函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处可导的充要条件是 ().
A. u, v 均在 (x_0, y_0) 处连续
B. u, v 均在 (x_0, y_0) 处有偏导数
C. u, v 均在 (x_0, y_0) 处可微
D. u, v 均在 (x_0, y_0) 处可微且满足 C-R 方程
5. $z = \pi$ 是函数 $\frac{\sin z}{(z - \pi)^2}$ 的 ().
A. 一阶极点 B. 一阶零点 C. 可去奇点 D. 本性奇点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z = \frac{2+i}{1-2i}$, 求 z 的模和辐角.
2. (6 分) 求 $\sqrt[3]{-8}$.

3. (7 分) 设 C 是从 i 到 $2+i$ 的直线, 求 $\int_C \bar{z} dz$.

4. (7 分) 求 $\int_{-\pi i}^{\pi i} (e^z + 1) dz$.

5. (7 分) 求 $\int_0^\pi (z + \cos 2z) dz$.

6. (7 分) 设 C 为正向圆周 $|z| = 4$, 求 $\oint_C \frac{z-6}{z^2+9} dz$.

7. (8 分) 已知 $f(z) = u + iv$ 是解析函数, 其中 $u(x, y) = x^2 + axy - y^2$, $v = 2x^2 - 2y^2 + 2xy$ 且 a 是实数. 求参数 a 以及解析函数 $f'(z)$, 其中 $f'(z)$ 需要写成 z 的表达式.

8. (10 分) 确定函数 $f(z) = \frac{2}{z(z+2)}$ 在圆环域
(1) $0 < |z| < 2$; (2) $2 < |z| < +\infty$
内的洛朗级数展开式.

9. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) = 8e^{2t}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

10. (3 分) 复积分的计算方法或公式有哪些? 请给出至少三条.

2022 年合肥工业大学考试参考答案 (B)

2022 ~ 2023 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. $\frac{2\pi}{3}$, 2. 0, 3. -1, 4. $2\pi i$, 5. $2\pi\delta(\omega - 1)$.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	A	A	D	D	A

三、解答题

1. (6 分) 【解】由于 $z = \frac{(2+i)(1+2i)}{5} = i$, (2 分)

因此 $|z| = 1$, (2 分)

$\text{Arg } z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (2 分, 只有主值得 1 分)

2. (6 分) 【解】由于 $-8 = 8e^{\pi i}$, (2 分)

因此

$$\sqrt[3]{-8} = 2e^{\frac{1}{3}(\pi i + 2k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2 \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

即

$$2e^{\frac{\pi i}{3}} = 1 + \sqrt{3}i, \quad 2e^{\pi i} = -2, \quad 2e^{\frac{5\pi i}{3}} = 1 - \sqrt{3}i. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

3. (7 分) 【解】

直线 C 的方程为 $z = t + i, 0 \leq t \leq 2$ (2 分)

因此 $dz = dt, \bar{z} = t - i$ (2 分)

$$\int \bar{z} dz = \int_0^2 (t - i) dt \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} - it \right) \Big|_0^2 = 2 - 2i. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

4. (7 分) 【解】由于 $e^z + 1$ 处处解析, 因此 (2 分)

$$\int_{-\pi i}^{\pi i} (e^z + 1) dz = (e^z + z) \Big|_{-\pi i}^{\pi i} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (e^{\pi i} + \pi i) - (e^{-\pi i} - \pi i) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

5. (7 分) 【解】由于 $z + \cos 2z$ 处处解析, 因此 (2 分)

$$\int_0^\pi (z + \cos 2z) dz = \left(\frac{z^2}{2} + \frac{\sin 2z}{2} \right) \Big|_0^\pi \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \frac{\sin 2\pi}{2} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi^2}{2}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

6. (7 分) 【解】

由于 $f(z) = \frac{z-6}{z^2+9}$ 在 $|z| \leq 4$ 内的奇点为 $\pm 3i$, (2 分)

因此

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}[f(z), 3i] + \text{Res}[f(z), -3i]] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i \left[\frac{z-6}{z+3i} \Big|_{z=3i} + \frac{z-6}{z-3i} \Big|_{z=-3i} \right] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i \left(\frac{3i-6}{6i} + \frac{-3i-6}{-6i} \right) = 2\pi i \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

7. (8 分) 【解】

由 $u_x = 2x + ay = v_y = -4y + 2x$ 可知 $a = -4$ (2 分)

由

$$f'(z) = u_x + iv_x \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (-4y + 2x) + i(4x + 2y) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (2 + 4i)z. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

8. (10 分) 【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 0, 2, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1)

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{2}\right)^n \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} z^n. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

(2)

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z}\right)^n \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{z^n}. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

9. (9 分)【解】

设 $\mathcal{L}[y] = Y$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2, \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 2 + 2sY = \mathcal{L}[8e^{2t}] = \frac{8}{s-2}, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+2s)} = \frac{2}{s(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s}, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = e^{2t} - 1. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

10. (3 分)【解】 例如

- 列出参数方程 $z = z(t)$ 并将积分表达为 t 的积分形式;
- 单连通区域内解析函数的积分可以用原函数计算;
- 利用柯西-古萨基本定理;
- 利用复合闭路定理;
- 利用柯西积分公式;
- 利用高阶导数的柯西积分公式;
- 利用留数;
- 利用长大不等式.

2023 年 合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

2023 ~ 2024 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 2^{-i} 的辐角主值是_____.
2. $2023 - i$ 绕 0 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到的复数是_____.
3. 如果函数 $f(z) = \frac{1}{(z+5)\sin z}$ 可以在圆环域 $0 < |z| < R$ 内作洛朗展开, 则 R 的最大值为_____.
4. 设 $f(z) = e^z - |z| \cos z$, 则 $\oint_{|z|=1} f(z) dz =$ _____.
5. 函数 $f(t) = \cos(3t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega) =$ _____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 函数 $f(z) = \frac{1}{z}$ 在下面哪个区域内有原函数? ()
A. $0 < |z| < 1$ B. $\operatorname{Re} z > 0$
C. $|z - 1| > 2$ D. $|z + 1| + |z - 1| > 4$
2. 设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=4} \frac{\sin \zeta - \cos \zeta}{\zeta - z} d\zeta$, 则 $f'(\pi) =$ ()
A. 0 B. $2\pi i$ C. $-2\pi i$ D. πi
3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ 的收敛半径是 ().
A. 0 B. $+\infty$ C. e D. 1
4. 下面哪个函数不能作为解析函数的虚部? ()
A. $2x + 3y$ B. $2x^2 + 3y^2$ C. $x^2 - xy - y^2$ D. $e^x \cos y$
5. $z = 0$ 是函数 $f(z) = \frac{(e^z - 1)^2 z^3}{\sin z^8}$ 的 ().
A. 一阶极点 B. 本性奇点 C. 可去奇点 D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 计算 $(-1 + i)^{10} - (-1 - i)^{10}$.
2. (6 分) 解方程 $\cos z = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

3. (6 分) 设 C 为有向曲线 $z(t) = \sin t + it, 0 \leq t \leq \pi$, 求 $\int_C z e^z dz$.
4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z - 1| = 4$, 求 $\oint_C \frac{\sin z}{z^2 + 1} dz$.
5. (10 分) 假设 $u(x, y) = x^3 + ax^2y + bxy^2 - 3y^3$ 是调和函数, 求参数 a, b 以及 $v(x, y)$ 使得 $v(0, 0) = 0$ 且 $f(z) = u + iv$ 是解析函数.
6. (10 分) 确定函数 $f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$ 在圆环域
 (1) $|z| > 2$; (2) $0 < |z - 2| < 1$
 内的洛朗级数展开式.
7. (10 分) 设 $f(z) = \frac{e^z}{(z - \pi i)(z - 2\pi i)^2}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点以及 $\oint_{|z|=8} f(z) dz$.
8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题
- $$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = 3 \cos t, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$
9. (3 分) 复变函数 $f(z) = e^z$ 和实变量函数 $g(x) = e^x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试举出三点.

2023 年合肥工业大学考试参考答案 (A)

2023 ~ 2024 学年第一学期

复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. $-\ln 2$, 2. $1 + 2023i$, 3. π , 4. 0 , 5. $\pi[\delta(\omega + 3) + \delta(\omega - 3)]$.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5
答案	B	C	C	B	D

三、解答题

1. (6 分) 【解】由于

$$-1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$(-1 + i)^{10} = 32e^{\frac{30\pi i}{4}} = -32i, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$(-1 - i)^{10} = 32e^{-\frac{30\pi i}{4}} = 32i, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

故

$$(-1 + i)^{10} - (-1 - i)^{10} = -64i. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

也可以直接计算 $(-1 + i)^2 = -2i$ 得到 $(-1 + i)^{10} = -32i$.

2. (6 分) 【解】由

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

整理得到

$$e^{2iz} - \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{iz} + 1 = 0, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$e^{iz} = \frac{1}{2} \left[\frac{3\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4} \right] = \sqrt{2} \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$iz = \operatorname{Ln} \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 + 2k\pi i \text{ 或 } \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} \ln 2 + 2k\pi i,$$

$$z = 2k\pi \pm \frac{\ln 2}{2}i, k \in \mathbb{Z}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

3. (6 分) 【解】 由于 ze^z 解析, 且 $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\int ze^z dz = (z-1)e^z + C, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

而曲线 C 的起点是 0, 终点是 πi , 因此

$$\int_C ze^z dz = (z-1)e^z \Big|_0^{\pi i} \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= (\pi i - 1)e^{\pi i} - (-1) = 2 - \pi i. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

4. (10 分) 【解】 由于 $f(z) = \frac{\sin z}{(z+i)(z-i)}$ 在 $|z-1| \leq 4$ 内的奇点为 $\pm i$, 因此 $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}[f(z), -i] + \text{Res}[f(z), 2i]] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\sin z}{z+i} \Big|_{z=-i} + \frac{\sin z}{z-i} \Big|_{z=2i} \right] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi i \left[\frac{\sin i}{2i} + \frac{\sin(-i)}{-2i} \right] \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= 2\pi \sin i = \pi i \left(e - \frac{1}{e} \right). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

5. (10 分) 【解】 由

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6x + 2ay + 2bx - 18y = 0$$

可知 $a = 9, b = -3$. 由 $\dots\dots\dots (3 \text{ 分})$

$$f'(z) = u_x - iu_y \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (3x^2 + 18xy - 3y^2) - i(9x^2 - 6xy - 9y^2) \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= (3 - 9i)(x + iy)^2 = (3 - 9i)z^2 \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

可知

$$f(z) = (1 - 3i)z^3 + C, C \in \mathbb{R}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

由 $v(0, 0) = 0, f(0) = 0$ 可知 $C = 0$,

$$v = -3x^3 + 3x^2y + 9xy^2 - y^3. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

其它解法: 由 $u_x = v_y = 3x^2 + 18xy - 3y^2$ 得

$$v = 3x^2y + 9xy^2 - y^3 + \psi(x). \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由 $v_x = -u_y = -(9x^2 - 6xy - 9y^2)$ 得

$$\psi'(x) = -9x^2, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\psi(x) = -3x^3 + C, \quad v = -3x^3 + 3x^2y + 9xy^2 - y^3 + C. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

由 $v(0, 0) = 0$ 可知 $C = 0$,

$$v = -3x^3 + 3x^2y + 9xy^2 - y^3. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

6. (10 分) 【解】 由于 $f(z)$ 的奇点是 1, 2, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^n}. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{2}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

7. (10 分) 【解】 由于 πi 是分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的一阶极点. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

由于 $2\pi i$ 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

$$\text{Res}[f(z), \pi i] = \left. \frac{e^z}{(z-2\pi i)^2} \right|_{z=\pi i} = \frac{1}{\pi^2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{Res}[f(z), 2\pi i] = \left(\frac{e^z}{z-\pi i} \right)' \Big|_{z=2\pi i} \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$= \frac{e^z(z-\pi i-1)}{(z-\pi i)^2} \Big|_{z=2\pi i} = \frac{1-\pi i}{\pi^2}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\oint_{|z|=8} f(z) dz = 2\pi i [\text{Res}[f(z), \pi i] + \text{Res}[f(z), 2\pi i]] = 2 + \frac{4}{\pi} i. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

8. (9 分)【解】设 $\mathcal{L}[y] = Y$, 则

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - sy(0) - y'(0) = s^2 Y - s - 2, \quad \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2 Y - s - 2 + 4Y = 3\mathcal{L}[\cos t] = \frac{3s}{s^2 + 1}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+2}{s^2+4} + \frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{s^3+2s^2+4s+2}{(s^2+1)(s^2+4)} \\ &= \frac{2}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+1}, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \sin 2t + \cos t. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

9. (3 分)【解】例如 (每项 1 分)

- $f'(z) = e^z, g'(x) = e^x$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- e^z 处处可导, e^x 处处可导. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- 麦克劳林展开的系数相同. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- e^z 无界, e^x 无界. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$
- e^z 是周期的, e^x 不是. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$