



合肥工业大学

HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## 复变函数与积分变换

---

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: [zhangshenxing@hfut.edu.cn](mailto:zhangshenxing@hfut.edu.cn)

课件地址: <https://zhangshenxing.github.io>

### 第三章 复变函数的积分

- ① 复变函数积分的概念
- ② 柯西-古萨基本定理和复合闭路定理
- ③ 原函数和不定积分
- ④ 柯西积分公式
- ⑤ 解析函数与调和函数的关系

## 第一节 复变函数积分的概念

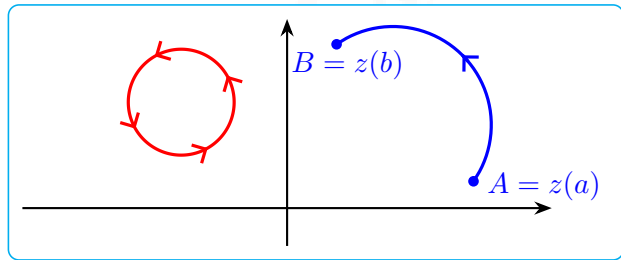
- 复变函数积分的定义
- 复变函数积分的计算法

## 有向曲线

设  $C$  是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说它的参数方程  $z = z(t), a \leq t \leq b$  除去有限个点之外都有非零导数.

固定它的一个方向, 称为**正方向**, 则我们得到一条**有向曲线**. 和这条曲线方向相反的记作  $C^-$ , 它的方向被称为该曲线**负方向**.

对于闭路, 它的**正方向总是指逆时针方向**, 负方向总是指顺时针方向. 以后我们不加说明的话**默认是正方向**.



所谓的复变函数积分, 本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  定义在区域  $D$  内, 有向曲线  $C$  包含在  $D$  中. 形式地展开

$$f(z) \, dz = (u + iv)(dx + i \, dy) = (u \, dx - v \, dy) + i(u \, dy + v \, dx).$$

## 定义

如果下述右侧两个线积分均存在, 则定义

$$\int_C f(z) \, dz = \int_C (u \, dx - v \, dy) + i \int_C (v \, dx + u \, dy)$$

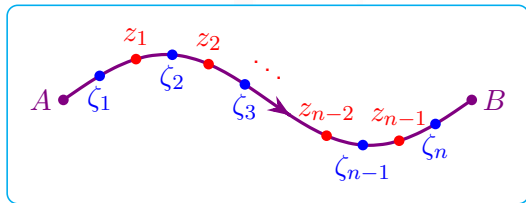
为函数  $f(z)$  沿曲线  $C$  的积分.

## 复变函数积分的定义

当然, 我们也可以像线积分那样通过分割来定义. 在曲线  $C$  上依次选择分点  $z_0 = A, z_1, \dots, z_n = B$ . 然后在每一段弧上任取  $\zeta_k \in \overline{z_{k-1}z_k}$  并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

然后称  $n \rightarrow \infty$ , 分割的弧长  $\rightarrow 0$  时  $S_n$  的极限为复变函数积分. 这二者是等价的.



如果  $C$  是闭曲线, 则该积分记为  $\oint_C f(z) dz$ . 此时该积分不依赖端点的选取.

如果  $C$  是实轴上的区间  $[a, b]$  且  $f(z) = u(x)$ , 则

$$\int_C f(z) \, dz = \int_a^b f(z) \, dz = \int_a^b u(x) \, dx$$

就是黎曼积分.

根据线积分的存在性条件可知:

## 定理

如果  $f(z)$  在  $D$  内连续,  $C$  是光滑曲线, 则  $\int_C f(z) dz$  总存在.

线积分中诸如变量替换等技巧可以照搬过来使用. 设

$$C : z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

是一条光滑有向曲线, 且正方向为  $t$  增加的方向. 则  $dz = z'(t) dt$ ,

## 复变函数积分的一般计算方法

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z) z'(t) dt. \quad (\text{A})$$

如果  $C$  的正方向是从  $z(b)$  到  $z(a)$ , 则需要交换右侧积分的上下限.

如果  $C$  是逐段光滑的, 则相应的积分就是各段的积分之和. 以后我们只考虑逐段光滑曲线上的连续函数的积分.



### 典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

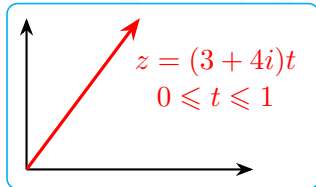
例

求  $\int_C z \, dz$ , 其中  $C$  是从原点到点  $3 + 4i$  的直线段.

解

由于  $z = (3 + 4i)t, 0 \leq t \leq 1$ , 因此

$$\int_C z \, dz = \int_0^1 (3 + 4i)t \cdot (3 + 4i) \, dt = (3 + 4i)^2 \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}(3 + 4i)^2 = -\frac{7}{2} + 12i.$$



### 典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

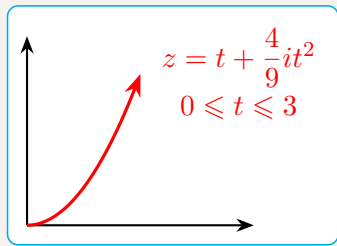
例

求  $\int_C z \, dz$ , 其中  $C$  是抛物线  $y = \frac{4}{9}x^2$  上从原点到点  $3 + 4i$  的曲线段.

解

由于  $z = t + \frac{4}{9}it^2, 0 \leq t \leq 3$ , 因此

$$\begin{aligned}\int_C z \, dz &= \int_0^3 \left( t + \frac{4}{9}it^2 \right) \cdot \left( 1 + \frac{8}{9}it \right) \, dt \\ &= \int_0^3 \left( t + \frac{4}{3}it^2 - \frac{32}{81}t^3 \right) \, dt \\ &= \left( \frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{9}it^3 - \frac{8}{81}t^4 \right) \Big|_0^3 = -\frac{7}{2} + 12i.\end{aligned}$$



### 典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

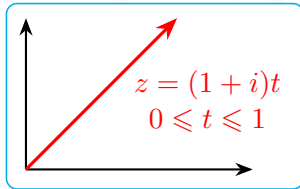
例

求  $\int_C \operatorname{Re} z \, dz$ , 其中  $C$  是从原点到点  $1+i$  的直线段.

解

由于  $z = (1+i)t, 0 \leq t \leq 1$ , 因此  $\operatorname{Re} z = t$ ,

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t \cdot (1+i) \, dt = (1+i) \int_0^1 t \, dt = \frac{1+i}{2}.$$



### 典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

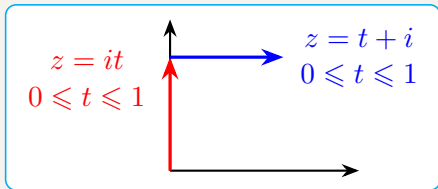
例

求  $\int_C \operatorname{Re} z \, dz$ , 其中  $C$  是从原点到点  $i$  再到  $1+i$  的折线段.

解

第一段  $z = it, 0 \leq t \leq 1, \operatorname{Re} z = 0,$

第二段  $z = t + i, 0 \leq t \leq 1, \operatorname{Re} z = t$ . 因此  $\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}$ .

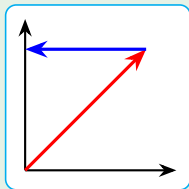


### 典型例题：计算复变函数沿曲线的积分

可以看出, 即便起点和终点相同, 沿不同路径  $f(z) = \operatorname{Re} z$  的积分也可能不同. 而  $f(z) = z$  的积分则只和起点和终点位置有关, 与路径无关. 原因在于  $f(z) = z$  是处处解析的, 我们以后会详加解释.

## 练习

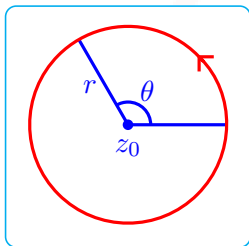
求  $\int_C \operatorname{Im} z \, dz = \underline{-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}}$ , 其中  $C$  是从原点沿  $y = x$  到点  $1 + i$  再到  $i$  的折线段.



### 例题：计算复变函数沿圆周的积分

例

求  $\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}}$ , 其中  $n$  为整数.



解

$C: |z - z_0| = r$  的参数方程为  $z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . 于是  $dz = ire^{i\theta} d\theta$ .

### 例题：计算复变函数沿圆周的积分

### 续解

$$\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} i(re^{i\theta})^{-n} d\theta = ir^{-n} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta.$$

当  $n = 0$  时, 该积分值为  $2\pi i$ .

当  $n \neq 0$  时, 该积分值  $= \frac{ir^{-n}}{-in} e^{-in\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0$ .

所以

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

这个积分以后经常用到, 它的特点是积分值与圆周的圆心和半径都无关.

## 定理

$$(1) \int_C f(z) dz = - \int_{C^-} f(z) dz.$$

$$(2) \int_C k f(z) \, dz = k \int_C f(z) \, dz.$$

$$(3) \int_C [f(z) \pm g(z)] dz = \int_C f(z) dz \pm \int_C g(z) dz.$$

## 线性性质

(4) (长大不等式) 设  $C$  的长度为  $L$ ,  $f(z)$  在  $C$  上满足  $|f(z)| \leq M$ , 则

$$\left| \int_C f(z) \, dz \right| \leq \int_C |f(z)| \, ds \leq ML.$$



## 证明

我们来证明下(4). 由

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k) \Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| \Delta s_k \leq M \sum_{k=1}^n \Delta s_k$$

可知

$$\left| \int_C f(z) \, dz \right| \leq \int_C |f(z)| \, ds \leq ML.$$

5

长大不等式常常用于证明等式: 估算一个积分和一个具体的数值之差不超过任意给定的  $\varepsilon$ , 从而得到二者相等.

注意到: 如果被积函数  $f(z)$  在  $C$  上的点都连续, 那么  $|f(z)|$  是  $C$  的参变量  $t \in [a, b]$  的连续函数, 从而有界, 即存在  $M$  使得  $|f(z)| \leq M, \forall z \in C$ .

设  $f(z)$  在  $z \neq a$  处连续, 且  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = k$ , 则

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{|z-a|=r} f(z) dz = 2\pi i k.$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  使得当  $|z - a| < \delta$  时,  $|(z - a)f(z) - k| \leq \varepsilon$ . 当  $0 < r < \delta$  时,

$$\begin{aligned} \left| \oint_{|z-a|=r} f(z) \, dz - 2\pi i k \right| &= \left| \oint_{|z-a|=r} \left[ f(z) - \frac{k}{z-a} \right] \, dz \right| \\ &= \left| \oint_{|z-a|=r} \frac{(z-a)f(z) - k}{z-a} \, dz \right| \leq \frac{\varepsilon}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

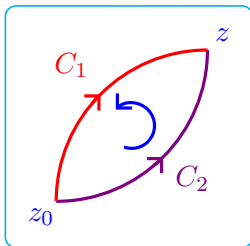
## 第二节 柯西-古萨基本定理和复合闭路定理

- 柯西-古萨基本定理
- 复合闭路定理

观察下方的两条曲线  $C_1, C_2$ . 设  $C = C_1^- + C_2$ . 可以看出

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz \iff \oint_C f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz = 0.$$

所以  $f(z)$  的积分只与起点终点有关  $\iff f(z)$  绕任意闭路的积分为零.



上一节中我们计算了  $f(z) = z, \operatorname{Re} z, \frac{1}{z - z_0}$  的积分. 其中

- $f(z) = z$  处处解析, 积分只与起点终点有关 (闭路积分为零);
- $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$  有奇点  $z_0$ , 沿绕  $z_0$  闭路的积分非零;
- $f(z) = \operatorname{Re} z$  处处不解析, 积分与路径有关 (闭路积分非零).

由此可见函数沿闭路积分为零, 与函数在闭路内部是否解析有关.

设  $C$  是一条闭路,  $D$  是其内部区域. 设  $f(z)$  在闭区域  $\bar{D} = D \cup C$  上解析, 即存在区域  $B \supseteq \bar{D}$  使得  $f(z)$  在  $B$  上解析.

为了简便假设  $f'(z)$  连续, 则

$$\oint_C f(z) \, dz = \oint_C (u \, dx - v \, dy) + i \oint_C (v \, dx + u \, dy).$$

由格林公式和 C-R 方程可知

$$\oint_C f(z) \, dz = - \iint_D (v_x + u_y) \, dx \, dy + i \iint_D (u_x - v_y) \, dx \, dy = 0.$$

也可以从

$$\oint_C f(z) \, dz = - \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \, dz \, d\bar{z} = 2i \iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \, dx \, dy = 0$$

看出.

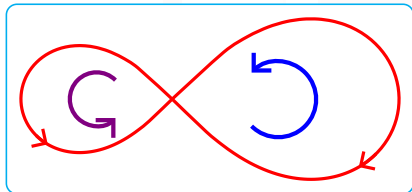
## 柯西-古萨 基本定理

设  $f(z)$  在闭路  $C$  上连续,  $C$  内部解析, 则  $\oint_C f(z) dz = 0$ .

## 推论

设  $f(z)$  在单连通域  $D$  内解析,  $C$  是  $D$  内一条闭合曲线 (可以不是闭路), 则  $\oint_C f(z) dz = 0$ .

这是因为即使不是简单曲线也可以拆分为一些简单曲线.



### 典型例题: 柯西-古萨基本定理计算积分

## 例

求  $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz$ .

解

由于  $\frac{1}{2z-3}$  在  $|z| \leq 1$  上解析, 因此由柯西-古萨基本定理  $\oint_{|z|=1} \frac{1}{2z-3} dz = 0$ .

## 练习

求  $\oint_{|z-2|=1} \frac{1}{z^2+z} dz = \underline{0}$ .

## 练习

求  $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{|z|} dz = \underline{0}$ .



### 例题：柯西-古萨基本定理计算积分

## 例

求  $\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)} dz$ , 其中  $C: |z-i| = \frac{1}{2}$ .

解

注意到  $\frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} \right)$ . 由于  $\frac{1}{z}, \frac{1}{z+i}$  在  $|z-i| \leq \frac{1}{2}$  上解析, 因此由柯西-古萨基本定理

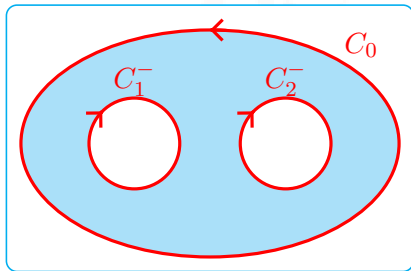
$$\oint_C \frac{1}{z} dz = \oint_C \frac{1}{z+i} dz = 0,$$

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2 + 1)} dz = -\frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{z - i} dz = -\pi i.$$

设  $C_0, C_1, \dots, C_n$  是  $n+1$  条简单闭曲线,  $C_1, \dots, C_n$  每一条都包含在其它闭路的外部, 而且它们都包含在  $C_0$  的内部. 这样它们围成了一个多连通区域  $D$ , 它的边界称为一个**复合闭路**

$$C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-.$$

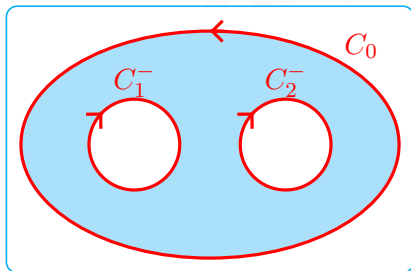
沿着  $C$  前进的点,  $D$  总在它的左侧, 所以这就是它的正方向.



## 复合闭路定理

设  $f(z)$  在复合闭路  $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$  及其所围成的多连通区域内解析, 则

$$\oint_{C_0} f(z) \, dz = \oint_{C_1} f(z) \, dz + \cdots + \oint_{C_n} f(z) \, dz.$$

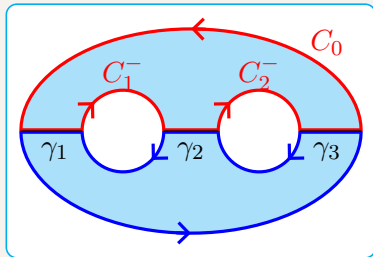


## 证明

以曲线  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}$  把  $C_0, C_1, \dots, C_n$  连接起来, 则它们把区域  $D$  分成了两个单连通域  $D_1, D_2$ . 对  $D_1$  和  $D_2$  的边界应用柯西积分定理并相加, 则  $\gamma_i$  对应的部分正好相互抵消, 因此

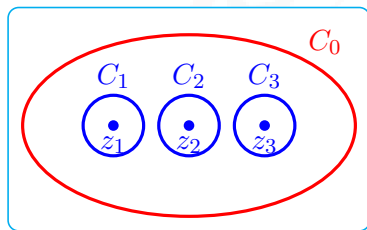
$$\oint_{C_0} f(z) dz - \oint_{C_1} f(z) dz - \cdots - \oint_{C_n} f(z) dz = 0.$$

于是定理得证.

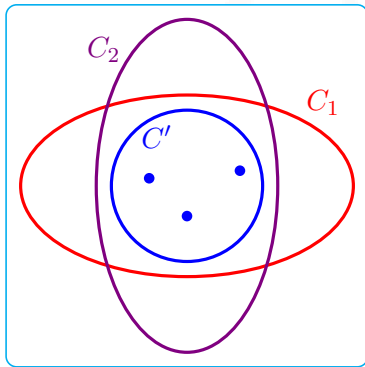


5

在实际应用中, 如果被积函数  $f(z)$  在闭路  $C$  的内部有有限多个奇点  $z_1, \dots, z_k$ . 那么我们可以在  $C$  内部构造闭路  $C_1, \dots, C_k$ , 使得每个  $C_j$  内部只包含一个奇点  $z_j$ . 这样, 内部含多个奇点的情形就可以化成内部只含一个奇点的情形. 最后将这些闭路上的积分相加即可.



此外, 从复合闭路定理还可以看出, 在计算积分  $\oint_C f(z) dz$  时,  $C$  的具体形状无关紧要, 只要其内部奇点不变,  $C$  可以任意变形. 因为我们总可以选择一个包含这些奇点的闭路  $C'$ , 使得  $C'$  包含在  $C$  及其变形后的闭路内部. 这样它们的积分自然都和  $C'$  上的积分相同.



## 例

证明对于任意闭路  $C$ ,  $\int_C (z-a)^n dz = 0$ ,  $n \neq -1$  为整数.

## 证明

如果  $a$  不在  $C$  的内部, 则  $(z-a)^n$  在  $C$  及其内部解析. 由柯西积分定理,  $\int_C (z-a)^n dz = 0$ .

如果  $a$  在  $C$  的内部, 则在  $C$  的内部取一个以  $a$  为圆心的圆周  $C_1$ . 由复合闭路定理以及上一节的结论

$$\int_C (z - a)^n dz = \int_{C_1} (z - a)^n dz = 0.$$

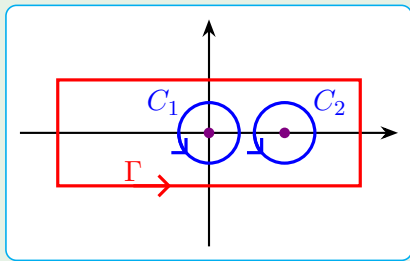






## 例

求  $\int_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz$ , 其中  $\Gamma$  是由  $2 \pm i, -2 \pm i$  形成的矩形闭路.



### 例题：复合闭路定理的应用

解

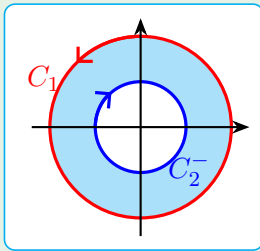
函数  $\frac{2z-1}{z^2-z}$  在  $\Gamma$  内有两个奇点  $z=0, 1$ . 设  $C_1, C_2$  如图所示, 由复合闭路定理

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{2z-1}{z^2-z} dz &= \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z} dz + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z} dz \\ &= \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z-1} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1} dz \\ &= 2\pi i + 0 + 0 + 2\pi i = 4\pi i. \end{aligned}$$

### 例题：复合闭路定理的应用

例

求  $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} dz$ , 其中  $\Gamma = C_1 + C_2^-$ ,  $C_1: |z| = 2, C_2: |z| = 1$ .



解

函数  $\frac{e^z}{z}$  在  $C_1, C_2$  围城的圆环域内解析. 由复合闭路定理可知  $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z} dz = 0$ .

### 第三节 原函数和不定积分

- 原函数
- 牛顿-莱布尼兹定理

设  $f(z)$  在单连通域  $D$  内解析,  $C$  是  $D$  内一条起于  $z_0$  终于  $z$  的曲线. 由柯西-古萨基本定理可知, 积分  $\int_C f(\zeta) d\zeta$  与路径无关, 只与  $z_0, z$  有关. 因此我们也将记为  $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ .

对于任意固定的  $z_0 \in D$ , 函数

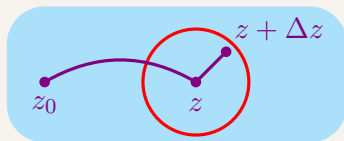
$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

定义了一个单值函数.

### 定理

$F(z)$  是  $D$  内的解析函数, 且  $F'(z) = f(z)$ .

## 证明



以  $z$  为中心作一包含在  $D$  内的圆  $K$ , 取  $|\Delta z|$  小于  $K$  的半径. 那么

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_z^{z + \Delta z} f(\zeta) d\zeta.$$

容易知道

$$\int_z^{z + \Delta z} f(z) d\zeta = f(z) \int_z^{z + \Delta z} d\zeta = f(z) \Delta z.$$

我们需要比较上述两个积分, 其中  $z$  到  $z + \Delta z$  取直线.

### 续证

由于  $f(z)$  解析, 因此连续.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  使得当  $|\zeta - z| < \delta$  时,  $z$  落在  $K$  中且  $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$ . 当  $|\Delta z| < \delta$  时, 由长大不等式

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| &= \left| \int_z^{z+\Delta z} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\Delta z} \, d\zeta \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \cdot |\Delta z| = \varepsilon. \end{aligned}$$

由于  $\varepsilon$  是任意的, 因此

$$f(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = F'(z).$$



## 牛顿-莱布尼兹定理

设  $f(z)$  在单连通区域  $D$  上解析,  $z_1$  至  $z_2$  的积分路径落在  $D$  内, 则

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_1) - F(z_2), \quad \text{其中 } F'(z) = f(z). \quad (\text{B})$$

如果  $D$  上的解析函数  $G(z)$  满足  $G'(z) = f(z)$ , 则称  $G(z)$  是  $f(z)$  的一个原函数. 由于导函数为 0 的解析函数只能是常值函数, 因此  $G(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz + C$ . 我们称之为  $f(z)$  的不定积分, 记为  $\int f(z) dz$ .

复变函数和实变函数的牛顿-莱布尼兹定理的差异在哪呢? 复变情形要求是单连通区域上解析函数, 实变情形要求是闭区间上连续函数.



## 例

求  $\int_{z_0}^{z_1} z \, dz$ .

解

由于  $f(z) = z$  处处解析, 且  $\int z \mathrm{d}z = \frac{1}{2}z^2 + C$ , 因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z \, dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_{z_0}^{z_1} = \frac{1}{2} (z_1^2 - z_0^2).$$

因此之前的例子中  $\int_0^{3+4i} z \, dz = -\frac{7}{2} + 12i$ , 无论从 0 到  $3+4i$  的路径如何.

### 典型例题：利用原函数求积分

例

求  $\int_0^{\pi i} z \cos z^2 \, dz$ .

解

由于  $f(z) = z \cos z^2$  处处解析, 且

$$\int z \cos z^2 \, dz = \frac{1}{2} \int \cos z^2 \, dz^2 = \frac{1}{2} \sin z^2 + C,$$

因此

$$\int_0^{\pi i} z \cos z^2 \, dz = \frac{1}{2} \sin z^2 \Big|_0^{\pi i} = -\frac{1}{2} \sin \pi^2.$$

这里我们使用了凑微分法.

### 典型例题：利用原函数求积分

## 例

求  $\int_0^i z \cos z \, dz$ .

解

由于  $f(z) = z \cos z$  处处解析, 且

$$\int z \cos z \, dz = \int z \, d(\sin z) = z \sin z - \int \sin z \, dz = z \sin z + \cos z + C,$$

因此

$$\int_0^i z \cos z \, dz = (z \sin z + \cos z) \Big|_0^i = i \sin i + \cos i - 1 = e^{-1} - 1.$$

这里我们使用了分部积分法.

## 典型例题: 利用原函数求积分

例

求  $\int_1^{1+i} ze^z dz$ .

解

由于  $f(z) = ze^z$  处处解析, 且

$$\int ze^z dz = \int z de^z = ze^z - \int e^z dz = (z-1)e^z + c,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_1^{1+i} ze^z dz &= (z-1)e^z \Big|_1^{1+i} \\ &= ie^{1+i} = e(-\sin 1 + i \cos 1).\end{aligned}$$

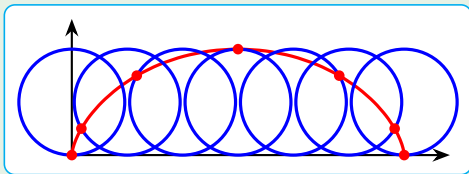
### 典型例题：利用原函数求积分

## 练习

求  $\int_0^1 z \sin z \, dz = \underline{\sin 1 - \cos 1}$ .

## 例

求  $\int_C (2z^2 + 8z + 1) dz$ , 其中  $C$  是摆线  $\begin{cases} x = a(\theta - \sin \theta), \\ y = a(1 - \cos \theta), \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$



解

由于  $f(z) = 2z^2 + 8z + 1$  处处解析, 因此

$$\begin{aligned} \int_C (2z^2 + 8z + 1) \, dz &= \int_0^{2\pi a} (2z^2 + 8z + 1) \, dz \\ &= \left( \frac{2}{3} z^3 + 4z^2 + z \right) \Big|_0^{2\pi a} = \frac{16}{3} \pi^3 a^3 + 16\pi^2 a^2 + 2\pi a. \end{aligned}$$

## 典型例题: 利用原函数求积分

例

设  $C$  为沿着  $|z| = 1$  从 1 到  $i$  的逆时针圆弧, 求  $\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$ .

解

函数  $f(z) = \frac{\ln(z+1)}{z+1}$  在  $\operatorname{Re} z \leq -1$  外的单连通区域解析.

$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz = \int \ln(z+1) d[\ln(z+1)] = \frac{1}{2} \ln^2(z+1) + c.$$

因此

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz &= \frac{1}{2} \ln^2(z+1) \Big|_1^i = \frac{1}{2} [\ln^2(1+i) - \ln^2 2] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}i \right)^2 - \ln^2 2 \right] = -\frac{\pi^2}{32} - \frac{3}{8} \ln^2 2 + \frac{\pi \ln 2}{8}i. \end{aligned}$$

## 第四节 柯西积分公式

- 柯西积分公式
- 高阶导数的柯西积分公式



柯西积分定理是解析函数理论的基础,但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

## 柯西积分公式

设

- 函数  $f(z)$  在闭路或复合闭路  $C$  及其内部  $D$  解析,
- $z_0 \in D$ ,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

如果  $z_0 \notin D$ , 由柯西-古萨基本定理, 右侧的积分是 0.

## 解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路  $C$  内部的取值完全由它在  $C$  上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设  $z = z_0 + Re^{i\theta}$ , 则  $dz = iRe^{i\theta} d\theta$ ,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

## 证明

由连续性可知,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  使得当  $|z - z_0| \leq \delta$  时,  $z \in D$  且  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ .  
 设  $\Gamma: |z - z_0| = \delta$ , 则

$$\begin{aligned} & \left| \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| \xrightarrow{\text{复合闭路定理}} \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| \\ &= \left| \oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz \right| = \left| \oint_\Gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon. \end{aligned}$$

由  $\varepsilon$  的任意性可知  $\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$ .



### 典型例题：柯西积分公式的应用

从柯西积分公式可以看出, 被积函数分子解析而分母形如  $z - z_0$  时, 绕闭路的积分可以使用该公式计算.

## 例

求  $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz$ .

解

函数  $\sin z$  处处解析. 取  $f(z) = \sin z, z_0 = 0$  并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z} dz = 2\pi i \sin z|_{z=0} = 0.$$

### 典型例题：柯西积分公式的应用

## 例

求  $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz$ .

解

由于函数  $e^z$  处处解析, 取  $f(z) = e^z, z_0 = 1$  并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi i e^z|_{z=1} = 2\pi e i.$$

## 练习

$$\text{求 } \oint_{|z|=2\pi} \frac{\cos z}{z - \pi} dz = \underline{-2\pi i}.$$

### 典型例题：柯西积分公式的应用

## 例

设  $f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta$ , 求  $f'(1+i)$ .

解

当  $|z| < \sqrt{3}$  时, 由柯西积分公式得

$$f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i(3\zeta^2 + 7\zeta + 1)|_{\zeta=z} = 2\pi i(3z^2 + 7z + 1).$$

因此  $f'(z) = 2\pi i(6z + 7)$ ,

$$f'(1+i) = 2\pi i(13+6i) = -12\pi + 26\pi i.$$

注意当  $|z| > \sqrt{3}$  时,  $f(z) \equiv 0$ .

### 典型例题：柯西积分公式的应用

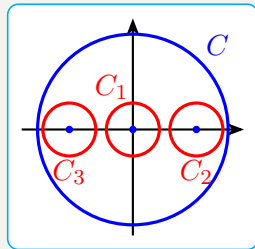
## 例

求  $\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz$ .

解

被积函数的奇点为  $0, \pm 1$ . 设  $C_1, C_2, C_3$  分别为绕  $0, 1, -1$  的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz &= \oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{e^z}{z(z^2-1)} dz \\ &= 2\pi i \left[ \frac{e^z}{z^2-1} \Big|_{z=0} + \frac{e^z}{z(z+1)} \Big|_{z=1} + \frac{e^z}{z(z-1)} \Big|_{z=-1} \right] \\ &= 2\pi i \left( -1 + \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = \pi i (e + e^{-1} - 2). \end{aligned}$$



## 高阶导数的柯西积分公式

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数是任意阶可导的.

### 柯西积分公式

设函数  $f(z)$  在闭路或复合闭路  $C$  及其内部  $D$  解析, 则对任意  $z_0 \in D$ ,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

假如  $f(z)$  有泰勒展开

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \cdots$$

那么由  $\oint_C \frac{dz}{(z - z_0)^n}$  的性质可知上述公式右侧应当为  $f^{(n)}(z_0)$ .



## 证明

先证明  $n=1$  的情形. 设  $\delta$  为  $z_0$  到  $C$  的最短距离. 当  $|h| < \delta$  时,  $z_0 + h \in D$ . 由柯西积分公式,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0 - h} dz.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - h)} \, dz.$$

当  $h \rightarrow 0$  时, 左边的极限是  $f'(z_0)$ . 因此我们只需要证明右边的极限等于  $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$ .

续证

二者之差  $= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} dz$ . 由于  $f(z)$  在  $C$  上连续, 故存在  $M$  使得  $|f(z)| \leq M$ . 注意到  $z \in C$ ,  $|z-z_0| \geq \delta$ ,  $|z-z_0-h| \geq \delta-|h|$ . 由长大不等式,

$$\left| \oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} dz \right| \leq \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)} \cdot L,$$

其中  $L$  是闭路  $C$  的长度. 当  $h \rightarrow 0$  时, 它的极限为 0, 因此  $n = 1$  情形得证.

对于一般的  $n$ , 我们通过归纳法将  $f^{(n)}(z_0)$  和  $f^{(n)}(z_0 + h)$  表达为积分形式. 比较  $\frac{f^{(n)}(z_0 + h) - f^{(n)}(z_0)}{h}$  与积分公式右侧之差, 并利用长大不等式证明  $h \rightarrow 0$  时, 差趋于零. 具体过程省略. □

## 例

求  $\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz$ .

解

由于  $\cos(\pi z)$  处处解析, 因此由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} [\cos(\pi z)]^{(4)} \Big|_{z=1} = \frac{2\pi i}{24} \cdot \pi^4 \cos \pi = -\frac{\pi^5 i}{12}.$$

## 典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz.$$

解

$\frac{e^z}{(z^2+1)^2}$  在  $|z| < 2$  的奇点为  $z = \pm i$ . 取  $C_1, C_2$  为以  $i, -i$  为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理,

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz.$$

### 续解

由柯西积分公式,

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2 + 1)^2} dz = \frac{2\pi i}{1} \left[ \frac{e^z}{(z + i)^2} \right]' \Big|_{z=i}$$

$$= 2\pi i \left[ \frac{e^z}{(z + i)^2} - \frac{2e^z}{(z + i)^3} \right] \Big|_{z=i} = \frac{(1 - i)e^{i\pi}}{2}.$$

类似地,  $\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{-(1+i)e^{-i}\pi}{2}$ . 故

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \frac{(1-i)e^{i\pi}}{2} + \frac{-(1+i)e^{-i\pi}}{2} = \pi i(\sin 1 - \cos 1).$$

### 典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求  $\oint_{|z|=1} z^n e^z dz$ , 其中  $n$  是整数.

解

当  $n \geq 0$  时,  $z^n e^z$  处处解析. 由柯西-古萨基本定理,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \, dz = 0.$$

当  $n \leq -1$  时,  $e^z$  处处解析. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \, dz = \frac{2\pi i}{(-n-1)!} (e^z)^{(-n-1)} \Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(-n-1)!}.$$

## 典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求  $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$  和  $\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$ .

解

(1)  $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$  在  $|z-3| < 2$  的奇点为  $z=2$ . 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left( \frac{1}{z^3} \right)' \Big|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

### 典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

## 续解

(2)  $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$  在  $|z-1| < 3$  的奇点为  $z=0, 2$ . 取  $C_1, C_2$  分别为以 0 和 2 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式,

$$\oint_{|z-1|=3} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz = \oint_{C_1} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} dz$$

$$= \frac{2\pi i}{2!} \left[ \frac{1}{(z-2)^2} \right]'' \Big|_{z=0} + \frac{2\pi i}{1!} \left( \frac{1}{z^3} \right)' \Big|_{z=2} = 0.$$

## 练习

$$\oint_{|z-2i|=3} \frac{1}{z^2(z-i)} dz = \underline{0}.$$



## 例 (莫累拉定理)

设  $f(z)$  在单连通域  $D$  内连续, 且对于  $D$  中任意闭路  $C$  都有  $\oint_C f(z) dz = 0$ , 则  $f(z)$  在  $D$  内解析.

该定理可视为柯西-古萨基本定理的逆定理.

## 证明

由题设可知  $f(z)$  的积分与路径无关. 固定  $z_0 \in D$ , 则

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

定义了  $D$  内的一个函数. 类似于原函数的证明可知  $F'(z) = f(z)$ . 故  $f(z)$  作为解析函数  $F(z)$  的导数也是解析的.  $\square$

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数  $f(z)$  只要在区域  $D$  中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在  $D$  中解析. **这一点与实变量函数有本质的区别.**

同时我们也可以看出, 如果一个二元实函数  $u(x, y)$  是一个解析函数的实部或虚部, 则  $u$  也是具有任意阶偏导数. 这便引出了调和函数的概念.

## 第五节 解析函数与调和函数的关系

- 调和函数
- 共轭调和函数

调和函数是一类重要的二元实变函数, 它和解析函数有着紧密的联系. 为了简便, 我们用  $u_{xx}, u_{yy}$  来表示二阶偏导数.

## 定义

如果二元实变函数  $u(x, y)$  在区域  $D$  内有二阶连续偏导数, 且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

则称  $u(x, y)$  是  $D$  内的调和函数.

## 定理

区域  $D$  内解析函数  $f(z)$  的实部和虚部都是调和函数.

## 证明

设  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , 则  $u, v$  存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

由于  $f(z)$  任意阶可导, 因此  $u, v$  存在任意阶偏导数. 由  $C-R$  方程  $u_x = v_y, u_y = -v_x$  可知

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0.$$



反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

如果  $u + iv$  是区域  $D$  内的解析函数, 则我们称  $v$  是  $u$  的**共轭调和函数**. 换言之  $u_x = v_y, u_y = -v_x$ . 显然  $-u$  是  $v$  的共轭调和函数.

### 定理

设  $u(x, y)$  是单连通域  $D$  内的调和函数, 则线积分

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy + C$$

是  $u$  的共轭调和函数.

由此可知, 区域  $D$  上的调和函数在  $z \in D$  的一个邻域内是一解析函数的实部, 从而在该邻域内具有任意阶连续偏导数. 而  $z$  的任取的, 因此调和函数总具有任意阶连续偏导数.

如果  $D$  是多连通区域, 则未必存在共轭调和函数. 例如  $\ln(x^2 + y^2)$  是复平面去掉原点上的调和函数, 但它并不是某个解析函数的实部. 事实上, 它是  $2 \operatorname{Ln} z$  的实部.

在实际计算中, 我们一般不用线积分来得到共轭调和函数, 而是采用下述两种办法:

## 偏积分法

通过  $v_y = u_x$  解得  $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$ , 其中  $\psi(x)$  待定. 再代入  $u_y = -v_x$  中解出  $\psi(x)$ .

## 不定积分法

对  $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$  求不定积分得到  $f(z)$ .

### 典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

## 例

证明  $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$  是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解

由  $u_x = -6xy, u_y = 3y^2 - 3x^2$  可知  $u_{xx} + u_{yy} = -6y + 6y = 0$ , 故  $u$  是调和函数.

由  $v_y = u_x = -6xy$  得  $v = -3xy^2 + \psi(x)$ .

由  $v_x = -u_y = 3x^2 - 3y^2$  得  $\psi'(x) = 3x^2$ ,  $\psi(x) = x^3 + C$ .

故  $v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + C$ ,

$$f(z) = u + iv = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + C) = i(x + iy)^3 + iC = i(z^3 + C).$$



## 典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

当解析函数  $f(z)$  为  $x, y$  的多项式形式时, 将  $m$  次齐次的项放在一起, 则  $x^m$  的系数就是  $f(z)$  中  $z^m$  的系数.

在上例中我们也可由另一种方法计算得到:

$$f'(z) = u_x - iu_y = -6xy - i(3y^2 - 3x^2) = 3iz^2.$$

因此  $f(z) = iz^3 + C$ .

## 典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

例

求解析函数  $f(z)$  使得它的虚部为

$$v(x, y) = e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y.$$

解

由  $u_x = v_y = e^x(\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1$  得

$$u = e^x(x \cos y - y \sin y) + x + \psi(y).$$

由  $u_y = -v_x = -e^x(y \cos y + x \sin y + \sin y) - 1$  得

$$\psi'(y) = -1, \quad \psi(y) = -y + C.$$

续解

故

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv \\ &= e^x(x \cos y - y \sin y) + x - y + C + i[e^x(y \cos y + x \sin y) + x + y] \\ &= ze^z + (1 + i)z + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

这里, 我们只需看  $e^x \cos y$  的系数  $x + iy = z$ , 即  $f(z)$  中  $e^z$  的系数.

### 典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

也可由

$$\begin{aligned} f'(z) &= v_y + i v_x \\ &= e^x (\cos y - y \sin y + x \cos y) + 1 + i [e^x (y \cos y + x \sin y + \sin y) + 1] \\ &= (z + 1)e^z + 1 + i. \end{aligned}$$

得  $f(z) = ze^z + (1+i)z + C$ .

## 练习

证明  $u(x, y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$  是调和函数并求它的共轭调和函数.

## 答案

$$v(x, y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 - y^3 + C.$$

显然  $u + iv = (1 + 2i)z^3 + iC$ .