3.2 求导的运算法则

- 求导的四则运算法则
- 和极限、连续性类似，函数的四则运算也可以继承可导性.
- **定理** 设函数 $u(x), v(x)$ 均在点 x 处可导，则
- (1) 函数 $f(x)=u(x)\pm v(x)$ 在点 x 处可导，且 $f'(x)=u'(x)\pm v'(x)$.
- (2) 函数 $f(x)=u(x)v(x)$ 在点 x 处可导，且

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

- (3) 函数 $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ $(v(x)\neq 0)$ 在点 x 处可导，且

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

- 证明 (1) 由于

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= [u(x+\Delta x) - u(x)] \pm [v(x+\Delta x) - v(x)] \\ &= \Delta u \pm \Delta v,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \\ &= u'(x) \pm v'(x).\end{aligned}$$

- (2) 由于

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x+\Delta x) - f(x)\\ &= u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)\\ &= [u(x+\Delta x) - u(x)]\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot[v(x+\Delta x) - v(x)]\\ &= \Delta u\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot\Delta v\end{aligned}$$

- 因此

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot v(x+\Delta x) + u(x)\cdot\Delta v}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v(x+\Delta x)\right] + \lim_{\Delta x\to 0}\left[u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\right]\\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x).\end{aligned}$$

- (3) 设 $g(x)=\frac{1}{v(x)}$. 由于

$$\Delta g = g(x+\Delta x) - g(x)$$
$$= -\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{v(x)v(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta v}{v(x)v(x+\Delta x)},$$

- 因此

$$g'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\frac{1}{v(x)v(x+\Delta x)} = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

- 由(2)可知

$$f'(x) = u'(x)g(x)+u(x)g'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

- **推论** 设函数 $u(x), v(x)$ 均在点 x 处可导, 则
- (1) $(Cu)'(x) = Cu'(x)$. (因为 $C' = 0$)
- (2) $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.
- 求导法则可以简记为

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (Cu)'(x) = Cu' \quad \text{(线性)}$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{(莱布尼兹法则)}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

- 自然地，对于有限个 $u_1, \dots, u_n$,

$$(C_1u_1 + C_2u_2 \cdots + C_nu_n)' = C_1u_1' + C_2u_2' \cdots + C_nu_n' = \sum_{i=1}^{n} C_iu_i',$$

$$(u_1u_2\cdots u_n)' = u_1'u_2\cdots u_n + u_1u_2'\cdots u_n + \cdots + u_1u_2\cdots u_n'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_1 \dots u_i' \dots u_n,$$

- 例如

$$(u + 2v - w)' = u' + 2v' - w',$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

- 例 $\left(x^2\right)' = 2x.$
- 证明 由函数乘法的求导法则(莱布尼兹法则)可知
- $\left(x^2\right)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = x + x = 2x.$
- 一般地, 对任意正整数 n, $(x^n)' = nx^{n-1}$. 我们后面会看到, n 取任意实数时它也成立.
- 例 求函数 $f(x) = 2x^n - \mathrm{e}^x + \sin x + \cos\frac{\pi}{4}$ 的导数.
- 解 $$f'(x) = 2(x^n)' - (\mathrm{e}^x)' + (\sin x)' + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)'$$ $$= 2nx^{n-1} - \mathrm{e}^x + \cos x .$$
- 这里注意不要误写为 $\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)' = -\sin\frac{\pi}{4}$.

- **例** 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)$ 的导数.
- **解**

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\mathrm{e}^x)'\cdot(\sin x-\cos x)+\mathrm{e}^x\cdot(\sin x-\cos x)' \\ &= \mathrm{e}^x\cdot(\sin x-\cos x)+\mathrm{e}^x\cdot(\cos x+\sin x) \\ &= 2\mathrm{e}^x\sin x\,. \end{aligned}$$

- **例** 求函数 $f(x)=\cos 2x$ 的导数.
- **解** 由于 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$, 因此

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x+\sin x)'\cdot(\cos x-\sin x)+(\cos x+\sin x)\cdot(\cos x-\sin x)' \\ &= (-\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)+(\cos x+\sin x)\cdot(-\sin x-\cos x) \\ &= (1-2\sin x\cos x)+(-1-2\sin x\cos x)=-2\sin 2x\,. \end{aligned}$$

- 例 求函数 $f(x)=\tan x$ 的导数.

- 解 $$f'(x)=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$
$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x\,.$$

- 同理 $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x\,.$

- 例 求函数 $f(x)=\sec x$ 的导数.

- 解 $$f'(x)=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$=-\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x\sec x.$$

- 同理 $(\csc x)'=-\cot x\csc x.$

- 反函数的求导法则

- 定理 设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 局部单调连续，且在 x_0 处可导，$f'(x_0)\neq 0$，则其反函数 $x=\varphi(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 处可导，且

$$\varphi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}\quad \left(\text{即 } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\mathrm{d}y/\mathrm{d}x}\right)$$

- 注 从几何直观上看，φ 的图像是 f 的图像沿着 $y=x$ 翻转得到，因此 φ 在 (x_0,y_0) 处的切线翻转过去就是 f 在 (y_0,x_0) 处的切线，二者的斜率之积为 1，即 $\varphi'(y_0)\cdot f'(x_0)=1$.

- 证明 设 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x) - f(x_0)$. 由于 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续，因此 $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y \to 0$.
- 由于 $y = f(x)$ 在 x_0 局部单调连续，因此其反函数 $x = \varphi(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 局部连续，从而 $\Delta y \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$. 所以

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

- 换言之，

$$\text{反函数的导数} = \frac{1}{\text{函数的导数}}.$$

- 如果 $f'(x_0) = 0$, 则 $\varphi'(y_0) = \infty$.

- 例 求函数 $f(x)=\arcsin x\ (-1<x<1)$ 的导数.
- 注意这里是反函数在 y_0 处取导数，而原本的函数时在 x_0 处取导数. 因此

$$(\sin x)'=\cos x \Rightarrow (\arcsin x)'=\frac{1}{\cos x}$$

- 是错误的. 为避免错误，我们可用 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 的语言.
- 解 由于 $\frac{\mathrm{d}(\sin y)}{\mathrm{d}y}=\cos y$，因此 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}(\arcsin x)}=\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$，即

$$(\arcsin x)'=\frac{\mathrm{d}(\arcsin x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\quad(-1<x<1).$$

- 这里注意当 $x=\pm 1$ 时导数不存在，实际上 $f'_+(-1)=\infty, f'_-(1)=\infty$.

- 例 求函数 $f(x)=\arctan x$ 的导数.

- 解 由于 $\dfrac{\mathrm{d}(\tan y)}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\cos^2 y}$, 因此

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}(\arctan x)}=\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}=1+\tan^2(\arctan x)=1+x^2,$$

- 即

$$(\arctan x)'=\frac{\mathrm{d}(\arctan x)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+x^2}.$$

- 由于

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, (-1 \le x \le 1)$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2},$$

- 因此

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ (-1 < x < 1), \qquad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

- 例 求函数 $f(x) = \log_a x\ (a > 0, a \neq 1)$ 的导数.
- 解 我们知道 $y = \log_a x$ 是单调可导函数 $x = a^y$ 的反函数.
- 由于 $\frac{\mathrm{d}a^y}{\mathrm{d}y} = a^y \ln a$, 因此

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}(\log_a x)} = a^{\log_a x} \ln a = x \ln a,$$

- 即

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

- 特别地, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

- 复合函数的求导法则
- 定理 设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处可导，函数 $y=f(u)$ 在点 $\varphi(x_0)$ 处可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处可导，且

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=f'[\varphi(x_0)]\cdot\varphi'(x_0)\quad\left(即\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)$$

- 证明 设

$$\Delta x=x-x_0,\qquad \Delta u=\varphi(x)-\varphi(x_0),\qquad \Delta y=f[\varphi(x)]-f[\varphi(x_0)].$$

- 由于函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续，函数 $y=f(u)$ 在点 $\varphi(x_0)$ 处连续，因此

$$\Delta x\to 0\Rightarrow\Delta u\to 0\Rightarrow\Delta y\to 0.$$

- 故

$$(f\circ\varphi)'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$=\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\cdot\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$=f'[\varphi(x_0)]\cdot\varphi'(x_0).$$

- 换言之,

复合函数的导数 = 外函数的导数 × 内函数的导数.

- 复合函数的求导法则也被称为链式法则，它可以推广到多重复合函数的情形，例如 $y = f(u), u = \varphi(v), v = \psi(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

- 复合函数求导的关键在于复合函数的分解.
- 例 求函数 $f(x) = \sin(1 - 2x^2)$ 的导数.
- 解 $f(x) = (\sin x)' \cdot (1 - x^2)' = -2x\cos x$.
- 这种解法是错误的，因为一般 $(f \circ \varphi)'(x) \neq f'(x) \cdot \varphi'(x)$.

- **解** 令 $u(x)=1-2x^2$，则 $y=\sin u$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\cos u$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-2\cdot 2x=-4x$，再由链式法则得到

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\cos\left(1-2x^2\right)\cdot(-4x)=-4x\cos\left(1-2x^2\right).$$

- **注** 我们在计算时，可以先把内层的函数看成一个整体的变量来处理，这样就不容易出错了.
- **例** 求函数 $f(x)=\ln(2+\sin x)$ 的导数.
- **解** $f'(x)=\frac{1}{2+\sin x}\cdot(2+\sin x)'=\frac{1}{2+\sin x}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{2+\sin x}$.

- 例 求函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2+1}$ 的导数.
- 解 $f'(x)=\mathrm{e}^{x^2+1}\cdot(2x)=2x\mathrm{e}^{x^2+1}$.
- 例 求函数 $f(x)=2^{\arctan(x^2+1)}$ 的导数.
- 解 $f'(x)=\ln 2\cdot 2^{\arctan(x^2+1)}\cdot\dfrac{1}{1+(x^2+1)^2}\cdot 2x=\dfrac{x2^{\arctan(x^2+1)+1}\ln 2}{1+(x^2+1)^2}$.
- 例 求函数 $f(x)=\ln[\cos(\mathrm{e}^x)]$ 的导数.
- 分析 这是一个三重复合函数.
- 解 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}\cdot[-\sin(\mathrm{e}^x)]\cdot\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x)$.

- 可导函数的奇偶性和周期性
- 定理 (1) 若奇函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 $-x_0$ 处可导, 且 $f'(-x_0)=f'(x_0)$, $f'(x)$ 是偶函数.
- (2) 若偶函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 $-x_0$ 处可导, 且 $f'(-x_0)=-f'(x_0)$, $f'(x)$ 是奇函数.
- 证明 (1)

$$f'(-x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x_0+\Delta x)-f(-x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

- (2) 类似可证.
- **定理** 若周期为 T 的函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 x_0+T 处可导, 且 $f'(x_0+T)=f'(x_0), f'(x)$ 是周期为 T 的函数.
- **证明**

$$f'(x_0+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+T+\Delta x)-f(x_0+T)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$=f'(x_0).$$

- 注意该命题的逆命题不成立, 例如 $f(x)=x+\sin x, f'(x)=1+\cos x$.

- **例** 求函数 $f(x)=x^{\mu}$ 的导数.
- **解** 我们先考虑 $x>0$ 情形. 由于 $f(x)=\mathrm{e}^{\mu\ln x}$, 因此

$$f'(x)=\mathrm{e}^{\mu\ln x}\cdot(\mu\ln x)'=x^{\mu}\cdot\frac{\mu}{x}=\mu x^{\mu-1},\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\mu}{x}.$$

- 当 $\mu=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ 时, 若 p,q 均为奇数, 则 $f(x)$ 为奇函数, $f'(x)$ 是偶函数. 若 p 为偶数, q 为奇数, 则 $f(x)$ 为偶函数, $f'(x)$ 为奇函数. 因此此时对于 $x>0$,

$$\frac{f'(-x)}{f(-x)}=-\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{\mu}{x}=\frac{\mu}{-x},\qquad f'(-x)=\mu(-x)^{\mu-1}.$$

- 故 $x\neq 0$ 时, 总有 $f'(x)=\mu x^{\mu-1}$.

- 不难看出，若 $\mu > 1$，则 $f'(0) = 0$；若 $\mu = 1$，则 $f'(0) = 1$；若 $0 < \mu < 1$，则 $f'(0)$ 不存在.
- 综上所述，$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ 对任意 $\mu \in \mathbb{R}$ 以及任意属于该函数定义域开区间内的 x 成立.
- 设 $y = u^m v^n$，则 $y = \mathrm{e}^{m\ln u + n\ln v}$. 于是由链式法则，

$$y' = \mathrm{e}^{m\ln u + n\ln v}(m\ln u + n\ln v)' = u^m v^n\left(m\frac{u'}{u} + n\frac{v'}{v}\right).$$

- 当 $m = n = 1$ 时，我们得到莱布尼兹法则 $(uv)' = uv\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right) = u'v + uv'$.
- 当 $m = 1, n = -1$ 时，我们得到 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u}{v}\left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. 这种对数技巧我们之后还会遇到.

- 例 求函数 $f(x)=\ln|x|\ (x\neq 0)$ 的导数.
- 解 当 $x>0$ 时, $f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$.
- 当 $x<0$ 时, $f'(x)=[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{x}$. 也可由偶函数性质得到.
- 所以 $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}\ (x\neq 0)$.
- 例 求函数 $f(x)=\operatorname{sh}x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ 的导数.
- 解 $f'(x)=\frac{(e^{x})'-(e^{-x})'}{2}=\frac{e^{x}-e^{-x}\cdot(-x)'}{2}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch}x$.
- 同理 $(\operatorname{ch}x)'=\operatorname{sh}x$, $(\operatorname{th}x)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^{2}x}$.

- 我们发现它们和三角函数的导函数形式相似. 在引入复数后, 我们发现 $\operatorname{sh} x = -\mathrm{i}\sin \mathrm{i}x$, 于是 $(\operatorname{sh} x)' = -\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot\cos \mathrm{i}x = \cos \mathrm{i}x = \operatorname{ch} x$. 因此二者本质上确实是一回事.

- **例** 求函数 $f(x) = \operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ 的导数.

- **解** 由于 $\dfrac{\mathrm{d}(\operatorname{sh} y)}{\mathrm{d}y} = \operatorname{ch} y = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}$, 因此

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}(\operatorname{arsh} x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

- 我们也可以直接计算

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(x+\sqrt{1+x^2}\right)' \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left[1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(1+x^2\right)'\right] \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},
\end{aligned}
$$

- 这里 $\left(\sqrt{x^2+C}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2+C}}$ 也是常见结论. 同理

$$
(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.
$$

- 基本导数公式
- $(C)' = 0$
- $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a\,, (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$
- $(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\ln a}$, $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
- 记忆技巧 这里，三角函数的正换成余，导函数的余换成正，且符号变成负的.

- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
- $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
- $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
- $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$
- 求导法则

$$(u+v)' = u' + v', \qquad (Cu)' = Cu'$$

$$(uv)' = u'v + uv', \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \qquad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$(f \circ \varphi)'(x) = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}.$$

- 现在我们可以自信地说，任何一个初等函数的导函数我们都可以计算出了，因为初等函数无非就是基本初等函数通过四则运算和复合得到的.
- 例 求函数 $f(x)=x^2\sin e^x$ 的导数.
- 解 $f'(x)=2x\sin e^x+x^2\cdot(\sin e^x)'$

$$=2x\sin e^x+x^2\cdot\cos e^x\cdot e^x=2x\sin e^x+x^2e^x\cos e^x.$$

- 例 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln\cos x^2}$ 的导数.
- 解

$$f'(x)=-\frac{1}{(\ln\cos x^2)^2}\cdot\frac{1}{\cos x^2}\cdot\left(-\sin x^2\right)\cdot(2x)$$

$$=-\frac{2x\sin x^2}{\cos x^2\ (\ln\cos x^2)^2}.$$

- 例 求函数 $f(x) = x\arctan(x^2)$ 的导数.
- 解

$$f'(x) = \arctan(x^2) + x\cdot[\arctan(x^2)]'$$

$$= \arctan(x^2) + x\cdot\frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot(x^2)'$$

$$= \arctan(x^2) + \frac{2x^2}{1+x^4}.$$

- 例 求函数 $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ 的导数以及 $f'(1)$.

- 解 由于 $f(x)=-1+\frac{2}{1+\sqrt{x}}$, 因此

$$f'(x)=\left[\frac{2}{1+\sqrt{x}}\right]'=-\frac{2}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=-\frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)^2},$$

$$f'(1)=-\frac{1}{4}.$$