习题课

- 每道证明题应当以"证明"开始, 其它题目应当以"解"开始.
- 习题1-1
- (A) 1.(1) $x-1>0$ 且 $\ln(x-1)\neq 0$, 即 $x>1, x\neq 2$. 定义域为 $(1,2)\cup(2,+\infty)$.
- (2) $x\neq -1$ 且

$$-1\leq\frac{2x}{1+x}=2-\frac{2}{x+1}\leq 1,\qquad 1\leq\frac{2}{x+1}\leq 3,\qquad \frac{2}{3}\leq x+1\leq 2,$$

- 即 $-\frac{1}{3}\leq x\leq 1$. 定义域为 $\left[-\frac{1}{3},1\right]$.

- (3) $3-x\geq 0, x\neq 0$. 定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,3]$.
- (4) $1-x^3>0, 1-x^2\geq 0, -1\leq x<1$. 定义域为 $[-1,1)$.
- 2.(1) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $g(x)$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 因此二者不同.
- (2) 二者的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$, 且对任意 x,

$$f(x)=x\sqrt[3]{1-x}=\sqrt[3]{x^3-x^4}=g(x).$$

- 因此二者相同.
- 注意, $\sqrt[n]{x}$ 当 n 为奇数时定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 当 n 为偶数时定义域为 $[0,+\infty)$, 以及 $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}, \sqrt[1]{x}=x$.

- (3) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, $g(x)$ 的定义域为

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

- 因此二者不同.
- 3. 根据题意, $(2,1)$ 和 $(1,2)$ 都落在函数 $f(x)$ 的图像上, 因此

$$a+b=2, \qquad 2a+b=1,$$

- 解得 $a=-1, b=3$.
- 4. $0 \leq -x \leq 2, 0 \leq x+1 \leq 2$, 因此 $-1 \leq x \leq 0$, 定义域为 $[-1,0]$.

- (B) 1.(1) 令 $x = t + 1$, 则 $f(t) = e^{(t+1)^3}$, 即 $f(x) = e^{(x+1)^3}$. (变量无关性)
- (2) 由 $f[\varphi(x)] = \frac{2\varphi(x)-1}{3\varphi(x)+2} = \ln x$ 得

$$(3\ln x - 2)\varphi(x) + 2\ln x + 1 = 0, \qquad \varphi(x) = \frac{1 + 2\ln x}{2 - 3\ln x}.$$

- 2. $f[g(x)] = \begin{cases} 1, g(x) > 0, \\ -2, g(x) \le 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \\ -2, x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right). \end{cases}$

$$g[f(x)] = 2 - f(x)^2 = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -2\, x \le 0. \end{cases}$$

- 3. 当 $x \le 0$ 时, $y \le 0, x = 2y$. 当 $x > 0$ 时, $y > 0, x = \frac{1}{y}$.
- 因此该函数存在反函数 $x = \begin{cases} 2y, y \le 0, \\ \frac{1}{y}, y > 0. \end{cases}$
- 习题1-2
- (A)1. 由均值不等式, $x^2 + 1 \ge 2\sqrt{x^2 \cdot 1} = 2|x|$, 因此 $|f(x)| \le \frac{1}{2}$.
- 2.(1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 且 $f(-x) = -x\cos(-x) = -x\cos x = -f(x)$, 所以是奇函数.
- (2) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 且 $f(-x) = f(x)$,所以是偶函数.

- (3) $f(1)=6\neq \pm f(-1)=\pm 4$, 所以既不是奇函数也不是偶函数.
- 一般地, 一个多项式是奇函数当且仅当它的所有非零单项式次数均为奇数; 一个多项式是偶函数当且仅当它的所有非零单项式次数均为偶数.
- 3. 当 $x_1<x_2$ 时,

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2).$$

- 而 $x_2^2+x_1x_2+x_1^2=\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\geq 0$, 等号成立当且仅当 $x_1=x_2=0$. 所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$, $f(x)$ 是单调增加函数.

- (B)1. 由于 $x-1<[x]\le x$, 因此

$$(x+1)-1<[x]+1\le x+1, \qquad [x+1]=[x]+1,$$

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=f(x).$$

- 2. 当 $x_1<x_2$ 时, $g(x_1)>g(x_2)$,

$$\varphi(x_1)=f[g(x_1)]>f[g(x_2)]=\varphi(x_2),$$

$$\psi(x_1)=g[g(x_1)]<g[g(x_2)]=\psi(x_2),$$

- 所以 $\varphi(x)$ 是单调减少函数, $\psi(x)$ 是单调增加函数.

- 3. 设 $f(x)=y<0$, 则 $\ln(x+1)=y-2, x=e^{y-2}-1<0$.
- 对于任意 $M>0$, 令 $x_M=e^{-M-2}-1\le e^{-2}-1<0, x_M>-1$, 且 $|f(x_M)|=|-M|=M$. 因此 f 在 $(-1,1)$ 内无界.
- 4.(1) $f(x)+f(-x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\cdot\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)$

$$=\ln\left(1+x^2-x^2\right)=0,$$

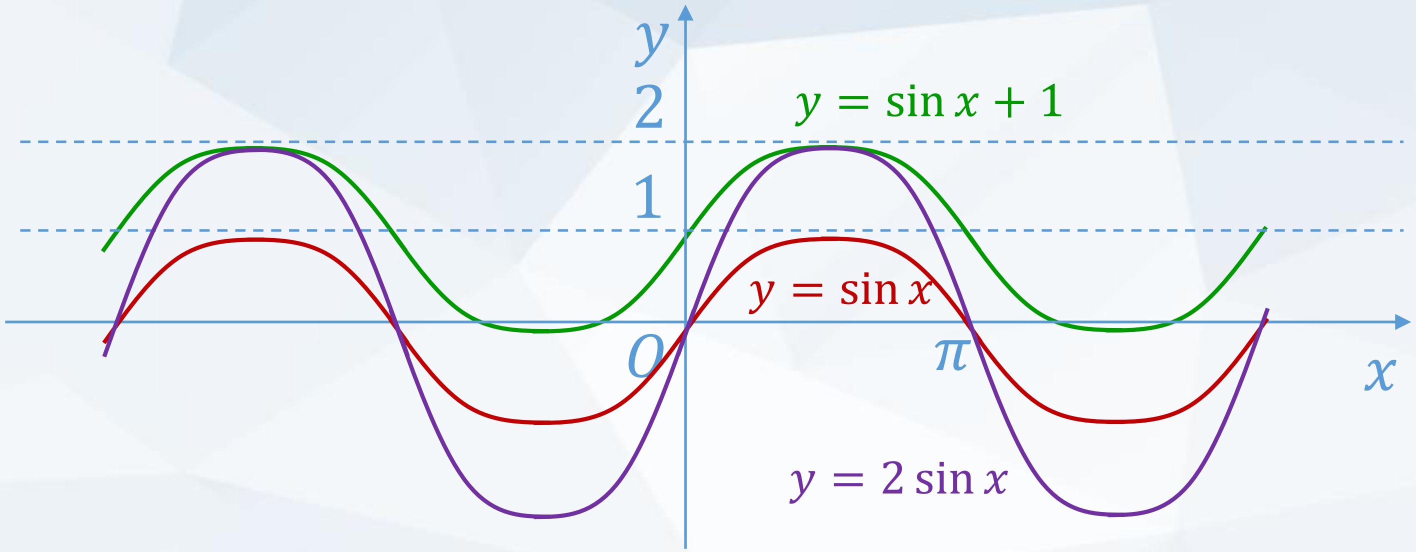
- 因此 $f(x)$ 是奇函数.
- (2) $f(x)+f(-x)=\dfrac{1}{1+e^x}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1+e^{-x}}-\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{1}{1+e^x}-\frac{e^x}{1+e^x}-1=0,$$

- 因此 $f(x)$ 是奇函数.

- 6. 实际上该命题对单调不减函数也成立.
- 反证法, 假设存在 x 使得 $y = f(x) \neq x$.
- 如果 $x < y$, 则 $f(x) \le f(y)$, 即 $y \le f[f(x)] = x$, 矛盾!
- 如果 $x > y$, 则 $f(x) \ge f(y)$, 即 $y \ge f[f(x)] = x$, 矛盾!
- 因此不存在这样的 x, 从而 $f(x) = x$ 恒成立.

- 习题1-3(A)
- 1.



- 2.(1) 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x = \frac{1}{2}(x + x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$.
- 当 $x < 0$ 时, $f(x) = 0 = \frac{1}{2}(-x + x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$.
- (2) 因为 $|x| = \sqrt{x^2}$ 是初等函数, 所以 $f(x)$ 也是初等函数.

- 习题1-3(B)
- 1.(1) 设 $t = x - \frac{1}{x}$, 则

$$t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = f(t) - 2,$$

- 即 $f(t) = t^2 + 2.$
- 然而, 这样写是不严格的, 因为题目只规定了 t 落在函数 $x - \frac{1}{x}$ 的像的范围时 $f(t)$ 的值. 我们还需要说明 $t = x - \frac{1}{x}$ 对任意 t 有解,

$$x^2 - tx - 1 = 0, \qquad x = \frac{t \pm \sqrt{t^2 + 4}}{2}.$$

- (2) $f(\cos x) = \sin^2 x + \cot^2 x$

$$= 1 - \cos^2 x + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= 1 - \cos^2 x + \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{1 - \cos^2 x} - \cos^2 x\,,$$

- 故 $f(x) = \frac{1}{1-x^2} - x^2, x \in (-1,1).$

- 2. $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\quad e^x - 2y - e^{-x} = 0$, $\quad e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$.

$$(e^x - y)^2 = y^2 + 1, \qquad e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$

- 而 $e^x > 0$, 因此 $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$, $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

- 3. 当 $C>1$ 时, 解为 $x\in[0,2\pi]$.
- 当 $0<C\le 1$ 时, 若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $x\le\arcsin C$; 若 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $\sin x=\sin(\pi-x)\le C$, $\pi-x\le\arcsin C$, $x\ge\pi-\arcsin C$; 若 $x\in[\pi,2\pi]$, $\sin x\le 0\le C$. 因此解为 $[0,\arcsin C]\cup[\pi-\arcsin C\,,2\pi]$.
- 类似地,当 $C=0$ 时, 解为 $\{0\}\cup[\pi,2\pi]$.
- 当 $-1\le C<0$ 时, 解为 $[\pi-\arcsin C\,,2\pi+\arcsin C]$.
- 当 $C=-1$ 时, 解为 $\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$. $C<-1$ 时, 解为 $\emptyset$.

- 习题1-4
- (A) 2. 这题本身比较简单, 但这种裂项技巧在求和中很有用.
- 4. $x^{\ln y}=e^{\ln x\cdot\ln y}=\left(e^{\ln y}\right)^{\ln x}=y^{\ln x}$.
- (B)1. 原式 $=\sum\limits_{n=1}^{99}\dfrac{1}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{99}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{100}=\dfrac{99}{100}$.
- (2) $\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\cos^2 2x\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x.$$

- 习题1-5
- (A)1. $r\cos\theta + r\sin\theta = 1, r = \dfrac{1}{\cos\theta + \sin\theta}$.
- A: $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = 1$. 由于 $\cos\theta = \dfrac{x}{r} > 0$, 因此 $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- B: $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = -\sqrt{3}$. 由于 $\cos\theta = \dfrac{x}{r} < 0$, 因此 $\theta = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 2. $r^2 = 2r\cos\theta, x^2 + y^2 = 2x, (x-1)^2 + y^2 = 1$ 为圆心在 $(1,0)$ 半径为 1 的圆.

- (B)1. 题目等价于

$$(r^2)^2 = 2\left[(r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2\right] = 2r^2\cos 2\theta\,.$$

- 当 $r \neq 0$ 时, $r^2 = 2\cos 2\theta\,, r = \sqrt{2\cos 2\theta}$. 显然 $r = 0$ 可以取到, 因此该曲线极坐标方程为 $r = \sqrt{2\cos 2\theta}$, 其中

$$\cos 2\theta \geq 0, \qquad \theta \in \left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right], k \in \mathbb{Z}.$$

- 总复习题一
- 1. 当 $x < 0$ 时, $g(x) = -2x > 0, f[g(x)] = (-2x)^2 = 4x^2$.
- $f[g(0)] = f(0) = 0$, 因此选 C.

- 2. $y = \sin x = -\sin(x - \pi)$, 其中 $x - \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. 因此

$$x - \pi = \arcsin(-y), \qquad x = \pi - \arcsin y, \qquad y = \pi - \arcsin x.$$

- 3. $f_1(x)$ 和 $f(x)$的图像关于 y 轴对称.
- $f_2(x)$ 和 $f(x)$的图像关于 x 轴对称.
- $f_3(x)$ 和 $f(x)$的图像关于原点中心对称.
- 6. 设 $0 < x_1 < x_2 < a$, 则 $-a < -x_2 < -x_1 < 0$, 因此 $f(-x_2) > f(-x_1)$.
- 由于 f 是奇函数, 因此 $-f(x_2) > -f(x_1), f(x_1) > f(x_2)$, f 在 $(0, a)$ 上单调减少.

- 7. (1) 令 $x=-1$, 则 $f(1)-f(-1)=f(2)$, 而 $f(-1)=-f(1)=-a$, 因此 $f(2)=2a$.
- 由 $f(x+2)=f(x)+f(2)$ 可知

$$f(5)=f(3)+f(2)=f(1)+2f(2)=5a.$$

- (2) $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数当且仅当 $f(x+2)=f(x)$, 即 $f(2)=0, a=0$.
- 8. 当 $x\in[k,k+1)$ 时, $x-k\in[0,1)$. 由于 $|k|$ 是周期, 所以

$$f(x)=f(x-k)=(x-k)^2.$$

- 9. 由 $f\left(2n+\frac{1}{2}\right)=2n+\frac{1}{2}$ 可知 $f(x)$ 无界.
- 由 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ 可知 $f(x)$不是单调函数.
- 若 T 是 $f(x)$ 的周期, 则当 $x\in[0,T)$ 时, $|f(x)|\le\left|[x]+\frac{1}{2}\right|\le T+\frac{1}{2}$, 从而 f 有界, 矛盾!
- 当 $x\in\mathbb{Z}$ 时, $f(x)=0=f(-x)$. 当 $x\notin\mathbb{Z}$ 时, 设 $[x]=n$, 则

$$n<x<n+1,\qquad -n-1<-x<-n,\qquad [-x]=-n-1,$$

$$f(x)=\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\pi x,\qquad f(-x)=\left(-n-1+\frac{1}{2}\right)\sin(-\pi x)=f(x).$$

- 因此 f 是偶函数, 选 D.

- 10. 当 $x \neq 1$ 时, 我们有

$$xs = x + 2x + 3x^2 + \cdots + 99x^{99} + 100x^{100},$$

- 两式相减得到

$$(1-x)s = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{99} - 100x^{100} = \frac{1-x^{100}}{1-x} - 100x^{100},$$

$$s = \frac{1-x^{100}}{(1-x)^2} - \frac{100x^{100}}{1-x} \ (x \neq 1).$$

- 当 $x = 1$ 时, $s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 5050.$

- 11. 令 $s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, 则

$$s_n - s_{n-1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$= \frac{n}{6} \cdot \left[\left(2n^2 + 3n + 1\right) - \left(2n^2 - 3n + 1\right)\right] = n^2.$$

- 因此

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) = s_n - s_0 = s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- 一般地, 想要计算 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 可设 s_n 是一个 $k+1$ 次多项式, 然后通过 $s_n - s_{n-1} = n^m$ 和 $s_0 = 0$ 求得其系数.

- 12.(1) 归纳法. $n=1$ 时显然.
- 当 $n=2$ 时, 若 $x_1=0$ 或 $x_2=0$ 显然. 若 x_1,x_2 同号, 则

$$|x_1+x_2|=|x_1|+|x_2|.$$

- 若 x_1,x_2 异号, 则

$$|x_1+x_2|=\big||x_1|-|x_2|\big|\le \max\{|x_1|,|x_2|\}\le |x_1|+|x_2|.$$

- 假设 $|x_1+\cdots+x_n|\le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$, 则

$$\begin{aligned}|x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}|&\le |x_1+\cdots+x_n|+|x_{n+1}|\\&\le |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|+|x_{n+1}|.\end{aligned}$$

- 由数学归纳法可知命题成立.

- (2) 由

$$\begin{aligned}&|(x_1+\cdots+x_n+x)+(-x_1)+\cdots+(-x_n)|\\ &\le |x_1+\cdots+x_n+x|+|x_1|+\cdots+|x_n|\end{aligned}$$

- 可得.
- 13. 当 $a \ge b$ 时, $|a-b| = a-b$,

$$\frac{a+b-|a-b|}{2}=\frac{a+b-(a-b)}{2}=b=\min\{a,b\},$$

$$\frac{a+b+|a-b|}{2}=\frac{a+b+a-b}{2}=a=\max\{a,b\}.$$

- 当 $a<b$ 时, 将上述等式中 a,b 交换位置即可得到.