复变函数与积分变换

张神星

合肥工业大学

2022 年秋季学期

第四章　级数

本章作业

1, 3, 4, 6, 8, 11, 12, 15, 16, 19

1 复数项级数

2 幂级数

3 泰勒级数

4 洛朗级数

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

复数项级数

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列.

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项无穷级数.

复数项级数

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项无穷级数.
- 称

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

为该级数的部分和.

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项无穷级数.
- 称
$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$
为该级数的部分和.
- 如果部分和数列 $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ 极限存在, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 并记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 为它的和.

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项无穷级数.
- 称
$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$
为该级数的部分和.
- 如果部分和数列 $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ 极限存在, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 并记 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 为它的和. 否则称之发散.

复数项级数敛散性的判定

定理

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi$ 当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b.$

复数项级数敛散性的判定

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi$ 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = b.$

证明.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和为 $\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和为 $\tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$,

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi$ 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = b$.

证明.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和为 $\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和为 $\tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 的部分和为

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + i\tau_n.$$

定理

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi$ 当且仅当 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b.$

证明.

设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和为 $\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和为 $\tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 的部分和为

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + i\tau_n.$$

由复数列的敛散性判定条件可知

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a + bi \iff \lim_{n\to\infty} \sigma_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} \tau_n = b.$$

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi$ 当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = a$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = b$.

证明.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和为 $\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和为 $\tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 的部分和为

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + i\tau_n.$$

由复数列的敛散性判定条件可知

$$\lim_{n\to\infty} s_n = a + bi \iff \lim_{n\to\infty} \sigma_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} \tau_n = b.$$

由此命题得证. ∎

复数项级数敛散性的判定

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛,

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛, 从而 $x_n, y_n \to 0$,

复数项级数敛散性的判定

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛, 从而 $x_n, y_n \to 0$, $z_n = x_n + iy_n \to 0$.

复数项级数敛散性的判定

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛, 从而 $x_n, y_n \to 0$, $z_n = x_n + iy_n \to 0$. 因此 $z_n \to 0$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件.

复数项级数敛散性的判定

如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛, 从而 $x_n, y_n \to 0$, $z_n = x_n + iy_n \to 0$. 因此 $z_n \to 0$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件.

定理

如果实数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots$$

收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛, 且 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

复数项级数敛散性的判定

证明.

因为 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 由比较判别法可知实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛.

复数项级数敛散性的判定

证明.

因为 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 由比较判别法可知实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

证明.

因为 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 由比较判别法可知实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

由三角不等式可知

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

证明.

因为 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 由比较判别法可知实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

由三角不等式可知

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

两边同时取极限即得级数的不等式关系

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|,$$

证明.

因为 $|x_n|, |y_n| \leqslant |z_n|$, 由比较判别法可知实数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

由三角不等式可知

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

两边同时取极限即得级数的不等式关系

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |z_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|,$$

其中第二个等式是因为绝对值函数 $|z|$ 连续. ■

绝对收敛和条件收敛

定义

绝对收敛和条件收敛

定义

1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}z_n$ 绝对收敛.

绝对收敛和条件收敛

定义

1. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.
2. 称收敛但不绝对收敛的级数条件收敛.

绝对收敛和条件收敛

定义

1. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.
2. 称收敛但不绝对收敛的级数条件收敛.

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

绝对收敛和条件收敛

定义

1. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.
2. 称收敛但不绝对收敛的级数条件收敛.

定理

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

证明.

必要性由前一定理的证明已经知道,

绝对收敛和条件收敛

定义

1. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛.
2. 称收敛但不绝对收敛的级数条件收敛.

定理

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

证明.

必要性由前一定理的证明已经知道, 充分性由 $|z_n| \leqslant |x_n| + |y_n|$ 可得. ■

绝对收敛和条件收敛

	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛
$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散
$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 条件收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛
$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛

绝对收敛和条件收敛

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性, 且不改变其和.

绝对收敛和条件收敛

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性，且不改变其和.

一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和，但如果重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

绝对收敛和条件收敛

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性，且不改变其和.

一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和，但如果重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

思考

什么时候 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$?

绝对收敛和条件收敛

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性，且不改变其和.

一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和，但如果重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

思考

什么时候 $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$?

答案.

当且仅当非零的 z_n 的辐角全都相同时成立.

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解.

由于实部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{2}{8} + \cdots$$

发散，所以该级数发散. ■

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

由于实部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{2}{8} + \cdots$$

发散，所以该级数发散. ■

事实上，它的虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

是条件收敛的.

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

因为实部级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{i}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

因为实部级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，虚部级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 绝对收敛，

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{i}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

因为实部级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，虚部级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 绝对收敛，所以该级数条件收敛. ∎

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{i}{2^n}\right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

因为实部级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，虚部级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 绝对收敛，所以该级数条件收敛. ■

例

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

例题: 复数项级数敛散性

解.

因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

例题：复数项级数敛散性

解.

因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

均条件收敛,

例题：复数项级数敛散性

解.

因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

均条件收敛，所以原级数条件收敛.

例题：复数项级数敛散性 *

对 $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ 逐项积分可得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

例题: 复数项级数敛散性 *

对 $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ 逐项积分可得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

可以证明 $x = 1$ 时该级数的余项趋于 0, 因此

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

对 $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ 逐项积分可得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

可以证明 $x = 1$ 时该级数的余项趋于 0, 因此

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

同理

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(1+x)\big|_{x=1} = \ln 2.$$

例题: 复数项级数敛散性 *

对 $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ 逐项积分可得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

可以证明 $x = 1$ 时该级数的余项趋于 0, 因此

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

同理

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(1+x)|_{x=1} = \ln 2.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4}.$$

例题: 复数项级数敛散性 *

对 $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ 逐项积分可得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

可以证明 $x = 1$ 时该级数的余项趋于 0, 因此

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

同理

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(1+x)\big|_{x=1} = \ln 2.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi i}{4}.$$

事实上, 左侧是复变函数 $-\ln(1+z)$ 在 $z = -i$ 处的泰勒级数.

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

因为 $\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right| = \frac{8^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!} = e^8$ 收敛，所以该级数绝对收敛. ■

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

因为 $\left|\frac{(8i)^n}{n!}\right| = \frac{8^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!} = e^8$ 收敛，所以该级数绝对收敛. ■

实际上，它的实部和虚部级数分别为

$$1 - \frac{8^2}{2!} + \frac{8^4}{4!} - \frac{8^6}{6!} + \cdots = \cos 8, \quad 8 - \frac{8^3}{3!} + \frac{8^5}{5!} - \frac{8^7}{7!} + \cdots = \sin 8,$$

例题：判断级数的敛散性

例

级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(8i)^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛？

解.

因为 $\left|\dfrac{(8i)^n}{n!}\right| = \dfrac{8^n}{n!}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{8^n}{n!} = e^8$ 收敛，所以该级数绝对收敛. ■

实际上，它的实部和虚部级数分别为

$$1 - \frac{8^2}{2!} + \frac{8^4}{4!} - \frac{8^6}{6!} + \cdots = \cos 8, \quad 8 - \frac{8^3}{3!} + \frac{8^5}{5!} - \frac{8^7}{7!} + \cdots = \sin 8,$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!} = \cos 8 + i \sin 8 = e^{8i}.$$

级数敛散性判别法

对于正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, 我们有若干判别法来判断它的敛散性.

由此可得: 设

级数敛散性判别法

对于正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, 我们有若干判别法来判断它的敛散性.

由此可得: 设

1. 达朗贝尔判别法 (比值法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);

级数敛散性判别法

对于正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, 我们有若干判别法来判断它的敛散性.

由此可得: 设

1. 达朗贝尔判别法 (比值法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{z_{n+1}}{z_n} \right|$ (假设存在);
2. 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);

对于正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, 我们有若干判别法来判断它的敛散性.
由此可得: 设

1. 达朗贝尔判别法 (比值法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);
2. 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);
3. 柯西-Hadamard 判别法: $\lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|}$ (所有子数列中极限的最大值).

对于正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, 我们有若干判别法来判断它的敛散性.

由此可得: 设

1. 达朗贝尔判别法 (比值法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);
2. 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);
3. 柯西-Hadamard 判别法: $\lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|}$ (所有子数列中极限的最大值).

则当 $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛;

级数敛散性判别法

对于正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, 我们有若干判别法来判断它的敛散性. 由此可得: 设

1. 达朗贝尔判别法 (比值法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);
2. 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);
3. 柯西-Hadamard 判别法: $\lambda = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (所有子数列中极限的最大值).

则当 $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛; 当 $\lambda > 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 发散.

对于正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, 我们有若干判别法来判断它的敛散性. 由此可得: 设

1. 达朗贝尔判别法 (比值法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);
2. 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);
3. 柯西-Hadamard 判别法: $\lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|}$ (所有子数列中极限的最大值).

则当 $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛; 当 $\lambda > 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 发散. 其证明主要是通过将该级数与相应的等比级数做比较得到.

级数敛散性判别法

对于正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, 我们有若干判别法来判断它的敛散性. 由此可得: 设

1. 达朗贝尔判别法 (比值法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);
2. 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);
3. 柯西-Hadamard 判别法: $\lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|}$ (所有子数列中极限的最大值).

则当 $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛; 当 $\lambda > 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 发散. 其证明主要是通过将该级数与相应的等比级数做比较得到. 如果 $\lambda = 1$, 则无法使用该方法判断.

级数敛散性判别法

对于正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, 我们有若干判别法来判断它的敛散性.

由此可得: 设

1. 达朗贝尔判别法 (比值法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ (假设存在);
2. 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);
3. 柯西-Hadamard 判别法: $\lambda = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z_n|}$ (所有子数列中极限的最大值).

则当 $\lambda < 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛; 当 $\lambda > 1$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ 发散. 其证明主要是通过将该级数与相应的等比级数做比较得到. 如果 $\lambda = 1$, 则无法使用该方法判断.

另解.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{8}{n+1}\right| = 0$, 所以该级数绝对收敛. ■

函数项级数

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义

- 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义

- 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为复变函数项级数.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义

- 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为复变函数项级数.
- 对于 $z_0 \in D$, 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 z_0 处收敛, 相应级数的值称为它的和.

复变函数级数与实变量函数级数也是类似的.

定义

- 设 $\{f_n(z)\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复变函数列, 其中每一项都在区域 D 上有定义. 表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 称为**复变函数项级数**.
- 对于 $z_0 \in D$, 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ **在 z_0 处收敛**, 相应级数的值称为它的**和**.
- 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 上处处收敛, 则它的和是一个函数, 称为**和函数**.

幂级数及其敛散性

定义

称形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

定义

称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为**幂级数**.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

定义

称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数, 我们也有阿贝尔定理.

定义

称形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数, 我们也有阿贝尔定理.

定理 (阿贝尔定理)

定义

称形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数, 我们也有阿贝尔定理.

定理 (阿贝尔定理)

1. 如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 那么对任意 $|z|<|z_0|$ 的 z, 该级数必绝对收敛.

定义

称形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的函数项级数为幂级数.

我们只需要考虑 $a=0$ 情形的幂级数, 因为二者的收敛范围与和函数只是差一个平移.

对于复变函数幂级数, 我们也有阿贝尔定理.

定理 (阿贝尔定理)

1. 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛, 那么对任意 $|z| < |z_0|$ 的 z, 该级数必绝对收敛.
2. 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处发散, 那么对任意 $|z| > |z_0|$ 的 z, 该级数必发散.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域.

幂级数及其敛散性

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

设

$$R = \sup \left\{ |z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛} \right\}.$$

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

设

$$R = \sup\left\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛}\right\}.$$

- 如果 $R = +\infty$, 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

设

$$R = \sup\left\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛}\right\}.$$

- 如果 $R = +\infty$, 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.
- 如果 $0 < R < +\infty$, 那么该幂级数在 $|z| < R$ 上绝对收敛, 在 $|z| > R$ 上发散.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

设

$$R = \sup\left\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛}\right\}.$$

- 如果 $R = +\infty$, 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.
- 如果 $0 < R < +\infty$, 那么该幂级数在 $|z| < R$ 上绝对收敛, 在 $|z| > R$ 上发散.
- 如果 $R = 0$, 那么该幂级数仅在 $z = 0$ 处收敛, 对任意 $z \neq 0$ 都发散.

幂级数及其敛散性

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

设

$$R = \sup\left\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛}\right\}.$$

- 如果 $R = +\infty$, 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.
- 如果 $0 < R < +\infty$, 那么该幂级数在 $|z| < R$ 上绝对收敛, 在 $|z| > R$ 上发散.
- 如果 $R = 0$, 那么该幂级数仅在 $z = 0$ 处收敛, 对任意 $z \neq 0$ 都发散.

我们称 R 为该幂级数的收敛半径.

从阿贝尔定理我们可以得到幂级数的收敛域. 回忆一下实数理论中的确界原理: 实数集的子集 S 若有上界, 则一定有最小的上界, 即上确界 $\sup S$. 没有上确界时记 $\sup S = +\infty$.

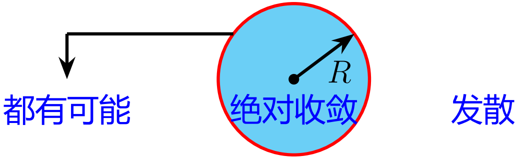
设

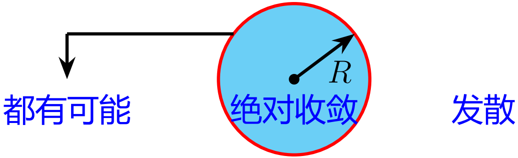
$$R = \sup\left\{|z| : \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ 收敛}\right\}.$$

- 如果 $R = +\infty$, 则由阿贝尔定理可知该幂级数处处绝对收敛.
- 如果 $0 < R < +\infty$, 那么该幂级数在 $|z| < R$ 上绝对收敛, 在 $|z| > R$ 上发散.
- 如果 $R = 0$, 那么该幂级数仅在 $z = 0$ 处收敛, 对任意 $z \neq 0$ 都发散.

我们称 R 为该幂级数的收敛半径. 这也等同于实幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| z^n$ 的收敛半径.

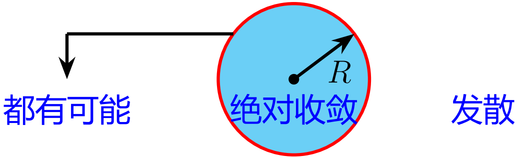
幂级数及其敛散性





证明.

2 可由 1 的逆否命题得到.

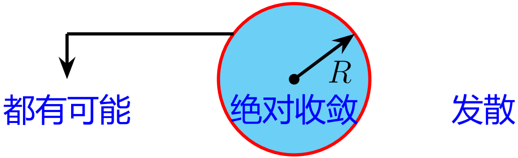


证明.

2 可由 1 的逆否命题得到.

我们来证明 1. 因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$.

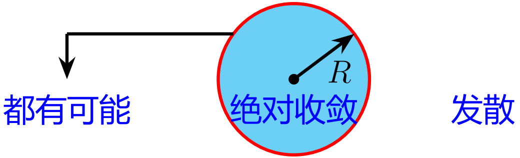
幂级数及其敛散性



证明.

2可由1的逆否命题得到.

我们来证明1. 因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$.

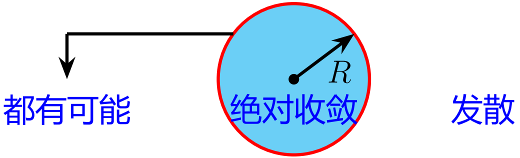


证明.

2 可由 1 的逆否命题得到.

我们来证明 1. 因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 如果 $|z| < |z_0|$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

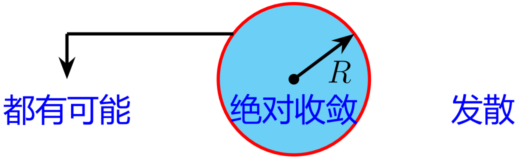


证明.

2 可由 1 的逆否命题得到.

我们来证明 1. 因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 如果 $|z| < |z_0|$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{1 - |z/z_0|}.$$



证明.

2 可由 1 的逆否命题得到.

我们来证明 1. 因为级数收敛, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. 于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 如果 $|z| < |z_0|$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = \frac{M}{1 - |z/z_0|}.$$

所以级数在 z 处绝对收敛. ∎

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解.

如果幂级数收敛，则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$.

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解.

如果幂级数收敛, 则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$. 当 $|z| < 1$ 时, 和函数为

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解.

如果幂级数收敛, 则由 $z^n \to 0$ 可知 $|z| < 1$. 当 $|z| < 1$ 时, 和函数为

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

因此收敛半径为 1. ■

收敛半径的计算

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中

1. 达朗贝尔公式 (比值法): $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ (假设存在);

收敛半径的计算

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中

1. 达朗贝尔公式 (比值法): $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ (假设存在);
2. 柯西公式 (根式法): $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ (假设存在);

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R=\dfrac{1}{r}$, 其中

1. 达朗贝尔公式 (比值法): $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ (假设存在);
2. 柯西公式 (根式法): $r=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ (假设存在);
3. 柯西-Hadamard 公式: $r=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$.

收敛半径的计算

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R = \dfrac{1}{r}$, 其中

1. 达朗贝尔公式 (比值法): $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ (假设存在);
2. 柯西公式 (根式法): $r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ (假设存在);
3. 柯西-Hadamard 公式: $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$.

如果 $r = 0$ 或 $+\infty$, 则 $R = +\infty$ 或 0.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z = 0, 2$ 的情形.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解.

由 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ 可知收敛半径为 1.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$ 可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解.

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$ 可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

当 $z=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛. ■

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径，并讨论 $z=0,2$ 的情形.

解.

由 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ 可知收敛半径为 1.

当 $z=2$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

当 $z=0$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛. ∎

事实上，收敛圆周上既可能处处收敛，也可能处处发散，也可能既有收敛的点也有发散的点.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$ 的收敛半径.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$ 的收敛半径.

解.

我们有 $c_n = \cos(in) = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2}$.

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$ 的收敛半径.

解.

我们有 $c_n = \cos(in) = \dfrac{e^n + e^{-n}}{2}$. 由

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1} + e^{-n-1}}{e^n + e^{-n}} = e \lim_{n\to\infty} \frac{1 + e^{-2n-2}}{1 + e^{-2n}} = e$$

可知收敛半径为 $\dfrac{1}{e}$.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径.

例题：收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n$ 的收敛半径.

解.

由

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |1+i| = \sqrt{2}$$

可知收敛半径为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ■

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形, 其中 $p \in \mathbb{R}$.

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p \in \mathbb{R}$.

解.

由 $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1$ 可知收敛半径为 1.

例题：收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p\in\mathbb{R}$.

解.

由 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$ 可知收敛半径为 1. 设 $|z|=1$.

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p\in\mathbb{R}$.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p=1$ 可知收敛半径为 1. 设 $|z|=1$.

- 若 $p>1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^p}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛,

例题：收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p \in \mathbb{R}$.

解.

由 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$ 可知收敛半径为 1. 设 $|z| = 1$.

- 若 $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛，原级数在收敛圆周上处处(绝对) 收敛.

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形, 其中 $p \in \mathbb{R}$.

解.

由 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$ 可知收敛半径为 1. 设 $|z| = 1$.

- 若 $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z^n}{n^p}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 原级数在收敛圆周上处处 (绝对) 收敛.
- 若 $p \leqslant 0$, $\left|\frac{z^n}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p} \not\to 0$,

例题：收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形，其中 $p \in \mathbb{R}$.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p = 1$ 可知收敛半径为 1. 设 $|z| = 1$.

- 若 $p > 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{z^n}{n^p}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 收敛，原级数在收敛圆周上处处 (绝对) 收敛.
- 若 $p \leqslant 0$, $\left|\dfrac{z^n}{n^p}\right| = \dfrac{1}{n^p} \not\to 0$, 原级数在收敛圆周上处处发散.

例题: 收敛半径的计算 *

回忆狄利克雷判别法: 若 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 部分和有界, 实数项数列 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

例题：收敛半径的计算 *

回忆狄利克雷判别法：若 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 部分和有界，实数项数列 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

续解.

回忆狄利克雷判别法：若 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 部分和有界，实数项数列 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

续解.

- 若 $0 < p \leqslant 1$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散，

例题：收敛半径的计算 *

回忆狄利克雷判别法：若 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 部分和有界，实数项数列 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

续解.

- 若 $0 < p \leqslant 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 发散，而在收敛圆周上其它点 $z \neq 1$ 处，

$$|z + z^2 + \cdots + z^n| = \left|\frac{z(1-z^n)}{1-z}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|}$$

有界，数列 $\{n^{-p}\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0，

例题: 收敛半径的计算 *

回忆狄利克雷判别法: 若 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 部分和有界, 实数项数列 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

续解.

- 若 $0 < p \leqslant 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, 而在收敛圆周上其它点 $z \neq 1$ 处,

$$|z + z^2 + \cdots + z^n| = \left|\frac{z(1-z^n)}{1-z}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|}$$

有界, 数列 $\{n^{-p}\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 收敛.

例题: 收敛半径的计算 *

回忆狄利克雷判别法: 若 $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ 部分和有界, 实数项数列 $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

续解.

- 若 $0 < p \leqslant 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, 而在收敛圆周上其它点 $z \neq 1$ 处,

$$|z + z^2 + \cdots + z^n| = \left|\frac{z(1-z^n)}{1-z}\right| \leqslant \frac{2}{|1-z|}$$

有界, 数列 $\{n^{-p}\}_{n\geqslant 1}$ 单调趋于 0, 因此 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 收敛. 故该级数在 $z = 1$ 发散, 在收敛圆周上其它点收敛. ■

幂级数的有理运算

定理

设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, |z|<R_1, \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n, |z|<R_2.$$

幂级数的有理运算

定理

设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\ |z|<R_1,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n,\ |z|<R_2.$$

那么当 $|z|<R=\min\{R_1,R_2\}$ 时,

$$(f\pm g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n,\quad (fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)z^n.$$

定理

设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, |z|<R_1, \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n, |z|<R_2.$$

那么当 $|z|<R=\min\{R_1,R_2\}$ 时,

$$(f\pm g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n, \quad (fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)z^n.$$

注意当 $R_1=R_2$ 时, $f\pm g$ 或 fg 的收敛半径可以比 f,g 的大.

幂级数的有理运算

定理

设幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R_1, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, |z| < R_2.$$

那么当 $|z| < R = \min\{R_1, R_2\}$ 时,

$$(f \pm g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, \quad (fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

注意当 $R_1 = R_2$ 时, $f \pm g$ 或 fg 的收敛半径可以比 f, g 的大. 在某些情形下, 我们只关心 fg 的某一幂次系数,

幂级数的有理运算

定理

设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, |z|<R_1, \quad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n, |z|<R_2.$$

那么当 $|z|<R=\min\{R_1,R_2\}$ 时,

$$(f\pm g)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)z^n, \quad (fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}\right)z^n.$$

注意当 $R_1=R_2$ 时, $f\pm g$ 或 fg 的收敛半径可以比 f,g 的大.

在某些情形下, 我们只关心 fg 的某一幂次系数, 此时我们便可以用上述表达式来计算特定幂次系数.

幂级数的代换运算

定理

设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n, |z|<R,$$

设函数 $\varphi(z)$ 在 $|z|<r$ 上解析且 $|\varphi(z)|<R,$

幂级数的代换运算

定理

设幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, |z|<R,$$

设函数 $\varphi(z)$ 在 $|z|<r$ 上解析且 $|\varphi(z)|<R$, 那么当 $|z|<r$ 时,

$$f[\varphi(z)]=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[\varphi(z)]^n.$$

幂级数的解析性质

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

幂级数的解析性质

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

1. 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

幂级数的解析性质

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

1. 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,
2. $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,

幂级数的解析性质

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

1. 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,
2. $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,
3. $\displaystyle\int_a^z f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$.

幂级数的解析性质

定理

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

1. 它的和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,
2. $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,
3. $\int_a^z f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$.

也就是说, 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析, 且可以逐项求导, 逐项积分.

定理

设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

1. 它的和函数 $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,
2. $f'(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,
3. $\displaystyle\int_a^z f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$.

也就是说, 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析, 且可以逐项求导, 逐项积分.

尽管幂级数在收敛圆周上有可能处处收敛, 但它的和函数在收敛圆周上一定有奇点.

幂级数的解析性质

定理

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|z| < R$ 上:

1. 它的和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,
2. $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,
3. $\int_a^z f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$.

也就是说, 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析, 且可以逐项求导, 逐项积分.

尽管幂级数在收敛圆周上有可能处处收敛, 但它的和函数在收敛圆周上一定有奇点. 这是因为一旦在收敛圆周上处处解析, 该和函数就可以在一个半径更大的圆域上作泰勒展开.

例题：幂级数展开

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

例题：幂级数展开

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

解.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数, 其中 $a \neq b$.

解.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$

$$= \frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}},$$

例题：幂级数展开

例

把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 $a \neq b$.

解.

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{z-a}{b-a}}$$

$$= \frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{b-a} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}},$$

收敛半径为 $|b-a|$.

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$ 可知收敛半径为 1.

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$ 可知收敛半径为 1. 由于

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n \,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n} = 1$ 可知收敛半径为 1. 由于

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \left(-\frac{1}{z-1}\right)' = \frac{1}{(z-1)^2},\quad |z|<1.$$

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = 2$ 可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$.

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = 2$ 可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$. 当 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 时, $|2z| < 1$.

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = 2$ 可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$. 当 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 时, $|2z| < 1$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}$$

例

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = 2$ 可知收敛半径为 $\dfrac{1}{2}$. 当 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 时, $|2z| < 1$. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)z^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty}2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}z^{n-1}\\ &= \frac{2}{1-2z} - \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-2z)(1-z)}.\end{aligned}$$

∎

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) \mathrm{d}z.$

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求 $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right) \mathrm{d}z.$

解.

当 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ 收敛且

$$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{z^{-1}}{1-z} = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}.$$

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right)\mathrm{d}z.$

解.

当 $|z|<\dfrac{1}{2}$ 时，$\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ 收敛且

$$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n=\frac{z^{-1}}{1-z}=\frac{1}{z(1-z)}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}.$$

当 $|z|<\dfrac{1}{2}$ 时，$|2z|<1.$

例题：幂级数的收敛半径与和函数

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right) \mathrm{d}z.$

解.

当 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 时，$\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ 收敛且

$$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{z^{-1}}{1-z} = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}.$$

当 $|z| < \dfrac{1}{2}$ 时，$|2z| < 1$. 故

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n\right) \mathrm{d}z = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}\right) \mathrm{d}z = 2\pi i.$$

■

实泰勒级数

在实变函数中我们知道，一个函数即使在一点附近无限次可导，它的泰勒级数也未必收敛到原函数.

在实变函数中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

实泰勒级数

在实变函数中我们知道，一个函数即使在一点附近无限次可导，它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它处处可导，但是它在 0 处的泰勒级数是 0.

在实变函数中我们知道，一个函数即使在一点附近无限次可导，它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x^{-2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

它处处可导，但是它在 0 处的泰勒级数是 0.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形，它成立的区间也很难从函数本身读出.

在实变函数中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它处处可导, 但是它在 0 处的泰勒级数是 0.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的区间也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

在实变函数中我们知道，一个函数即使在一点附近无限次可导，它的泰勒级数也未必收敛到原函数．例如

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

它处处可导，但是它在 0 处的泰勒级数是 0.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形，它成立的区间也很难从函数本身读出．例如

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots,\qquad |x|<1.$$

这可以从 $x=-1$ 是奇点看出.

在实变函数中我们知道，一个函数即使在一点附近无限次可导，它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它处处可导，但是它在 0 处的泰勒级数是 0.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形，它成立的区间也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

这可以从 $x = -1$ 是奇点看出. 而

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad |x| < 1$$

却并没有奇点.

泰勒级数

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数成立的开区间也是 $(-1,1)$?

泰勒级数

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数成立的开区间也是 $(-1,1)$? 这个问题在本节可以得到回答.

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数成立的开区间也是 $(-1,1)$? 这个问题在本节可以得到回答.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数.

泰勒级数

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数成立的开区间也是 $(-1,1)$? 这个问题在本节可以得到回答.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数成立的开区间也是 $(-1,1)$? 这个问题在本节可以得到回答.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$.

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数成立的开区间也是 $(-1,1)$? 这个问题在本节可以得到回答.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$. 设 $|z-z_0|$ 小于 z_0 到 D 边界的距离 d, 则存在 $|z-z_0| < r < d$.

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数成立的开区间也是 $(-1,1)$? 这个问题在本节可以得到回答.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$. 设 $|z-z_0|$ 小于 z_0 到 D 边界的距离 d, 则存在 $|z-z_0|<r<d$. 设 $K:|\zeta-z_0|=r$, 则 K 和它的内部包含在 D 中.

为什么 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 0 处的泰勒级数成立的开区间也是 $(-1,1)$? 这个问题在本节可以得到回答.

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$. 设 $|z-z_0|$ 小于 z_0 到 D 边界的距离 d, 则存在 $|z-z_0|<r<d$. 设 $K:|\zeta-z_0|=r$, 则 K 和它的内部包含在 D 中. 由于 $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1$, 因此

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$

泰勒展开

故

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$$

故

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K}f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

故

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_K f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n+R_N(z),$$

故

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_K f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n + R_N(z), \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + R_N(z),
\end{aligned}$$

其中

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_K f(\zeta)\left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right]\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界.

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$,

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$|R_N(z)| \leqslant \frac{M}{2\pi} \oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| \mathrm{d}s$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$
\begin{aligned}
|R_N(z)| &\leqslant \frac{M}{2\pi} \oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \right| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{M}{2\pi} \oint_K \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{1}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right)^N \right| \mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$\begin{aligned}
|R_N(z)| &\leqslant \frac{M}{2\pi} \oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}} \right| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{M}{2\pi} \oint_K \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{1}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right)^N \right| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{r - |z-z_0|} \cdot \left| \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} \right|^N \cdot 2\pi r \to 0 \quad (N \to \infty).
\end{aligned}$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K$, 那么

$$\begin{aligned}|R_N(z)| &\leqslant \frac{M}{2\pi}\oint_K \left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right| \mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{M}{2\pi}\oint_K \sum_{n=N}^{\infty}\left|\frac{1}{\zeta-z}\cdot\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^N\right| \mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{M}{2\pi}\cdot\frac{1}{r-|z-z_0|}\cdot\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^N\cdot 2\pi r \to 0 \quad (N\to\infty).\end{aligned}$$

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < d.$$

泰勒展开的成立范围

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的，因此解析函数的泰勒展开成立的圆域不包含奇点.

泰勒展开的成立范围

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的，因此解析函数的泰勒展开成立的圆域不包含奇点．由此可知，解析函数在 z_0 处泰勒展开成立的圆域的最大半径是 z_0 到最近奇点的距离．

泰勒展开的成立范围

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的，因此解析函数的泰勒展开成立的圆域不包含奇点．由此可知，解析函数在 z_0 处泰勒展开成立的圆域的最大半径是 z_0 到最近奇点的距离．需要注意的是，泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的，例如

$$f(z) = \begin{cases} e^z, & z \neq 1; \\ 0, & z = 1. \end{cases}$$

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的，因此解析函数的泰勒展开成立的圆域不包含奇点．由此可知，解析函数在 z_0 处泰勒展开成立的圆域的最大半径是 z_0 到最近奇点的距离．需要注意的是，泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的，例如

$$f(z)=\begin{cases} e^z, & z\neq 1; \\ 0, & z=1. \end{cases}$$

若 $f(z)$ 在 z_0 附近展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$，则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!c_k}{(k-n)!}(z-z_0)^{k-n}\bigg|_{z=z_0}=n!c_n.$$

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此解析函数的泰勒展开成立的圆域不包含奇点. 由此可知, 解析函数在 z_0 处泰勒展开成立的圆域的最大半径是 z_0 到最近奇点的距离. 需要注意的是, 泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的, 例如

$$f(z)=\begin{cases} e^z, & z\neq 1;\\ 0, & z=1.\end{cases}$$

若 $f(z)$ 在 z_0 附近展开为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, 则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k!c_k}{(k-n)!}(z-z_0)^{k-n}\Big|_{z=z_0}=n!c_n.$$

所以解析函数的幂级数展开是唯一的.

典型例题：泰勒展开的计算

现在我们来看 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$.

现在我们来看 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$. 它的奇点为 $\pm i$, 所以它的麦克劳林展开 (即 0 处的泰勒展开) 成立的半径是 1.

现在我们来看 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$. 它的奇点为 $\pm i$, 所以它的麦克劳林展开 (即 0 处的泰勒展开) 成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1,1)$.

典型例题: 泰勒展开的计算

现在我们来看 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$. 它的奇点为 $\pm i$, 所以它的麦克劳林展开 (即 0 处的泰勒展开) 成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1,1)$.

解析函数的泰勒展开既可以直接求出各阶导数得到, 也可以利用幂级数的运算法则得到.

典型例题: 泰勒展开的计算

现在我们来看 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$. 它的奇点为 $\pm i$, 所以它的麦克劳林展开 (即 0 处的泰勒展开) 成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1,1)$.

解析函数的泰勒展开既可以直接求出各阶导数得到, 也可以利用幂级数的运算法则得到.

例

由于 $(e^z)^{(n)}(0) = e^z|_{z=0} = 1$,

典型例题: 泰勒展开的计算

现在我们来看 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$. 它的奇点为 $\pm i$, 所以它的麦克劳林展开 (即 0 处的泰勒展开) 成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1,1)$.

解析函数的泰勒展开既可以直接求出各阶导数得到, 也可以利用幂级数的运算法则得到.

例

由于 $(e^z)^{(n)}(0)=e^z|_{z=0}=1$, 因此

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \forall z.$$

例

由于

$$(\cos z)^{(n)} = \cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right),$$

典型例题：泰勒展开的计算

例

由于

$$(\cos z)^{(n)} = \cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$(\cos z)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \quad (\cos z)^{(2n+1)}(0) = 0,$$

例

由于

$$(\cos z)^{(n)} = \cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right),$$

$$(\cos z)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \quad (\cos z)^{(2n+1)}(0) = 0,$$

因此

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z.$$

典型例题：泰勒展开的计算

例

由 e^z 的泰勒展开可得

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

典型例题：泰勒展开的计算

例

由 e^z 的泰勒展开可得

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n + (-iz)^n}{2i \cdot n!}$$

典型例题：泰勒展开的计算

例

由 e^z 的泰勒展开可得

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n + (-iz)^n}{2i \cdot n!}$$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

典型例题：泰勒展开的计算

例

由 e^z 的泰勒展开可得

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n + (-iz)^n}{2i \cdot n!}$$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z.$$

例

函数 $f(z) = (1+z)^\alpha$ 的主值为 $\exp\big[\alpha\ln(1+z)\big]$.

例

函数 $f(z) = (1+z)^\alpha$ 的主值为 $\exp\big[\alpha\ln(1+z)\big]$. 它在去掉射线 $z = x \leqslant -1$ 的区域内解析.

例

函数 $f(z)=(1+z)^\alpha$ 的主值为 $\exp\big[\alpha\ln(1+z)\big]$. 它在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析. 由于

$$f^{(n)}(0)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\exp\big[(\alpha-n)\ln(1+z)\big]\Big|_{z=0}$$

例

函数 $f(z)=(1+z)^\alpha$ 的主值为 $\exp\big[\alpha\ln(1+z)\big]$. 它在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析. 由于

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\exp\big[(\alpha-n)\ln(1+z)\big]\Big|_{z=0} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}. \end{aligned}$$

例

函数 $f(z)=(1+z)^{\alpha}$ 的主值为 $\exp\big[\alpha\ln(1+z)\big]$. 它在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析. 由于

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\exp\big[(\alpha-n)\ln(1+z)\big]\Big|_{z=0} \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
(1+z)^{\alpha} &= 1+\alpha z+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}z^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3+\cdots \\
& \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n, \quad |z|<1.
\end{aligned}
$$

例

将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

例

将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它在 $|z|<1$ 内解析.

例

将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

例

将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

因此

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'$$

例

将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

因此

$$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n z^{n-1}$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z=-1$, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

因此

$$\frac{1}{(1+z)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n z^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1) z^n, \quad |z|<1. \quad \blacksquare$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z=\dfrac{2}{3}$, 因此它在 $|z|<\dfrac{2}{3}$ 内解析.

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z=\dfrac{2}{3}$, 因此它在 $|z|<\dfrac{2}{3}$ 内解析. 于是

$$\frac{1}{3z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-3z/2}$$

例

将 $\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z=\dfrac{2}{3}$, 因此它在 $|z|<\dfrac{2}{3}$ 内解析. 于是

$$\frac{1}{3z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-3z/2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3z}{2}\right)^n$$

例

将 $\dfrac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z=\dfrac{2}{3}$, 因此它在 $|z|<\dfrac{2}{3}$ 内解析. 于是

$$\frac{1}{3z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-3z/2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3z}{2}\right)^n$$
$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n+1}}z^n,\quad |z|<\frac{2}{3}.\quad\blacksquare$$

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析,

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析, 因此它在 $|z|<1$ 内解析.

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad |z|<1$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z = x \leqslant -1$ 的区域内解析, 因此它在 $|z| < 1$ 内解析. 由

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

逐项积分得到

$$\ln(1+z) = \int_0^z \frac{1}{1+\zeta} \, \mathrm{d}\zeta$$

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由

$$[\ln(1+z)]'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1$$

逐项积分得到

$$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta^n$$

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant-1$ 的区域内解析, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由

$$[\ln(1+z)]'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1$$

逐项积分得到

$$\begin{aligned}\ln(1+z)&=\int_0^z\frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z=x\leqslant -1$ 的区域内解析, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由

$$[\ln(1+z)]'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\quad |z|<1$$

逐项积分得到

$$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{1}{1+\zeta}\,\mathrm{d}\zeta=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\zeta^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n},\quad |z|<1.\quad ■$$

例

将 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 展开成 z 的幂级数.

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 的奇点为 -1, 因此它在 $|z|<1$ 内解析.

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 的奇点为 -1, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n,\qquad \frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

例

将 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 展开成 z 的幂级数.

解.

由于 $\dfrac{e^z}{1+z}$ 的奇点为 -1, 因此它在 $|z|<1$ 内解析. 由

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

得

$$\frac{e^z}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \right] z^n = 1 + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{3} z^3 + \cdots, \qquad |z| < 1.$$

典型例题：泰勒展开的计算

练习

将 $\cos^2 z$ 展开成 z 的幂级数.

练习

将 $\cos^2 z$ 展开成 z 的幂级数.

答案.

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z) = \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^n, \quad \forall z.$$

练习

将 $\cos^2 z$ 展开成 z 的幂级数.

答案.

$$\begin{aligned}\cos^2 z &= \frac{1}{2}(1+\cos 2z) = \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\right]\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^n, \quad \forall z.\end{aligned}$$

思考

奇函数和偶函数的麦克劳林展开有什么特点?

练习

将 $\cos^2 z$ 展开成 z 的幂级数.

答案.

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z) = \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\right]$$
$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^n, \quad \forall z.$$

思考

奇函数和偶函数的麦克劳林展开有什么特点?

答案.

奇函数 (偶函数) 的麦克劳林展开只有奇数次项 (偶数次项).

例题：泰勒展开的应用

练习

将 $\cos^2 z$ 展开成 z 的幂级数.

例题：泰勒展开的应用

练习

将 $\cos^2 z$ 展开成 z 的幂级数.

答案.

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z) = \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^n, \quad \forall z.$$

例题: 泰勒展开的应用

练习

将 $\cos^2 z$ 展开成 z 的幂级数.

答案.

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z) = \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\right]$$

$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^n, \quad \forall z.$$

思考

奇函数和偶函数的麦克劳林展开有什么特点?

例题：泰勒展开的应用

练习

将 $\cos^2 z$ 展开成 z 的幂级数.

答案.

$$\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z) = \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}\right]$$
$$= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^n, \quad \forall z.$$

思考

奇函数和偶函数的麦克劳林展开有什么特点?

答案.

奇函数 (偶函数) 的麦克劳林展开只有奇数次项 (偶数次项).

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数.

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢?

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z - z_0$ 的幂级数,

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z - z_0$ 的幂级数, 然而它却可能可以展开为双边幂级数

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数, 然而它却可能可以展开为双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数, 然而它却可能可以展开为双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用, 我们对它的敛散性作如下定义:

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数, 然而它却可能可以展开为双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用, 我们对它的敛散性作如下定义:

定义

如果双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分作为函数项级数都收敛, 则我们称这个双边幂级数收敛.

双边幂级数

如果解析函数 $f(z)$ 在 z_0 处解析, 那么在 z_0 处可以展开成泰勒级数. 如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析呢? 此时 $f(z)$ 一定不能展开成 $z-z_0$ 的幂级数, 然而它却可能可以展开为双边幂级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}}_{\text{负幂次部分}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{非负幂次部分}}.$$

为了保证双边幂级数的收敛范围有一个好的性质以便于我们使用, 我们对它的敛散性作如下定义:

定义

如果双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分作为函数项级数都收敛, 则我们称这个双边幂级数收敛. 否则我们称之为发散.

双边幂级数的敛散性

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和

$$s_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k (z - z_0)^k,$$

形成的数列的极限来定义.

双边幂级数的敛散性

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和

$$s_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k (z - z_0)^k,$$

形成的数列的极限来定义. 例如双边幂级数

$$\cdots + z^{-2} + z^{-1} - 1 - z - z^2 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和

$$s_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k (z - z_0)^k,$$

形成的数列的极限来定义. 例如双边幂级数

$$\cdots + z^{-2} + z^{-1} - 1 - z - z^2 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

当 $z = -1$ 时,

$$s_n(-1) = -1 + \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{-k} - (-1)^k \right] = -1$$

收敛,

双边幂级数的敛散性

注意双边幂级数的敛散性不能像幂级数那样通过部分和

$$s_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} c_k (z - z_0)^k,$$

形成的数列的极限来定义. 例如双边幂级数

$$\cdots + z^{-2} + z^{-1} - 1 - z - z^2 - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

当 $z = -1$ 时,

$$s_n(-1) = -1 + \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{-k} - (-1)^k\right] = -1$$

收敛, 但这个双边幂级数在 $z = -1$ 并不收敛.

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$.

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 内收敛, 在 $|\zeta|>R$ 内发散.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 内收敛, 在 $|\zeta|>R$ 内发散. 设 $R_1:=\dfrac{1}{R}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 内收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 内发散.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 内收敛, 在 $|\zeta|>R$ 内发散. 设 $R_1:=\dfrac{1}{R}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 内收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 内发散.

1. 如果 $R_1>R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 内收敛, 在 $|\zeta|>R$ 内发散. 设 $R_1:=\dfrac{1}{R}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 内收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 内发散.

1. 如果 $R_1>R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.
2. 如果 $R_1=R_2$, 则该双边幂级数只在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 上可能有收敛的点.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta=\dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 内收敛, 在 $|\zeta|>R$ 内发散. 设 $R_1:=\dfrac{1}{R}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 内收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 内发散.

1. 如果 $R_1>R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.
2. 如果 $R_1=R_2$, 则该双边幂级数只在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 上可能有收敛的点. 此时没有收敛域.

双边幂级数的收敛域

设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2, 则它在 $|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|>R_2$ 内发散.

对于负幂次部分, 令 $\zeta = \dfrac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R, 则它在 $|\zeta|<R$ 内收敛, 在 $|\zeta|>R$ 内发散. 设 $R_1 := \dfrac{1}{R}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0|>R_1$ 内收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 内发散.

1. 如果 $R_1>R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.
2. 如果 $R_1=R_2$, 则该双边幂级数只在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 上可能有收敛的点. 此时没有收敛域.
3. 如果 $R_1<R_2$, 则该双边幂级数在 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内收敛, 在 $|z-z_0|<R_1$ 或 $>R_2$ 内发散, 在圆周 $|z-z_0|=R_1$ 或 R_2 上既可能发散也可能收敛.

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的收敛域

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛,

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分.

双边幂级数的收敛域

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

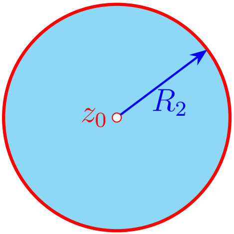
双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.

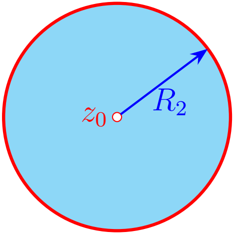


$0 < |z - z_0| < R_2$

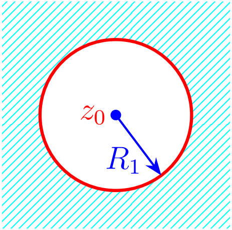
因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.



$0 < |z - z_0| < R_2$

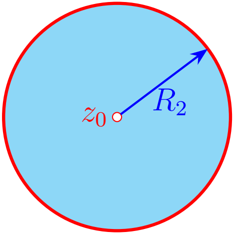


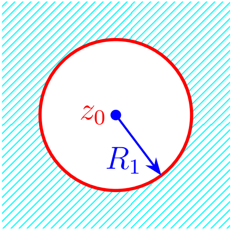
$R_1 < |z - z_0| < +\infty$

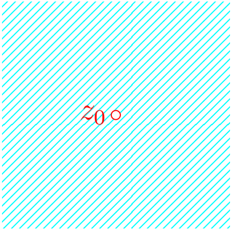
因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

双边幂级数的正幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析, 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.







$0 < |z - z_0| < R_2$ $\qquad$ $R_1 < |z - z_0| < +\infty$ $\qquad$ $0 < |z - z_0| < +\infty$

例题：双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{z^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{b^n}$ 的收敛域与和函数，其中 a, b 为非零复数.

例

求双边幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{b^n}$ 的收敛域与和函数, 其中 a,b 为非零复数.

解.

$$\text{由于 }\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n}\text{ 的收敛半径为 }|b|,\ \sum_{n=0}^{\infty}(az)^n\text{ 的收敛半径为 }\frac{1}{|a|},$$

例题：双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{b^n}$ 的收敛域与和函数，其中 a,b 为非零复数.

解.

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{b^n}$ 的收敛半径为 $|b|$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(az)^n$ 的收敛半径为 $\dfrac{1}{|a|}$，因此该双边幂级数的收敛域为 $|a|<|z|<|b|$.

例题：双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{b^n}$ 的收敛域与和函数，其中 a,b 为非零复数.

解.

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{b^n}$ 的收敛半径为 $|b|$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(az)^n$ 的收敛半径为 $\dfrac{1}{|a|}$，因此该双边幂级数的收敛域为 $|a|<|z|<|b|$.

当 $|b|<|a|$ 时，没有收敛域.

例题：双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{b^n}$ 的收敛域与和函数，其中 a,b 为非零复数.

解.

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{b^n}$ 的收敛半径为 $|b|$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(az)^n$ 的收敛半径为 $\dfrac{1}{|a|}$，因此该双边幂级数的收敛域为 $|a|<|z|<|b|$.

当 $|b|<|a|$ 时，没有收敛域. 当 $|a|<|z|<|b|$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{b^n}=\frac{a/z}{1-a/z}+\frac{1}{1-z/b}=\frac{(a-b)z}{(z-a)(z-b)}.$$

■

反过来，在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数，被称为洛朗级数.

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为洛朗级数.

例如 $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z = 0, 1$ 以外解析.

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为洛朗级数.

例如 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z=0,1$ 以外解析. 在圆环域 $0<|z|<1$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\cdots$$

反过来, 在圆环域内解析的函数也一定能展开为双边幂级数, 被称为洛朗级数.

例如 $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ 在 $z=0,1$ 以外解析. 在圆环域 $0<|z|<1$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=\frac{1}{z}+1+z+z^2+z^3+\cdots$$

在圆环域 $0<|z-1|<1$ 内,

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots$$

洛朗级数

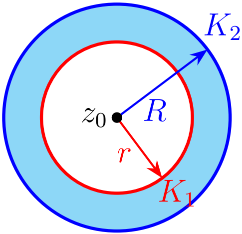
现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到洛朗展开式.

现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到洛朗展开式. 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内处处解析.

现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到洛朗展开式. 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内处处解析. 设

$$K_1 : |z - z_0| = r, \quad K_2 : |z - z_0| = R, \quad R_1 < r < R < R_2.$$

是该圆环域内的两个圆周.

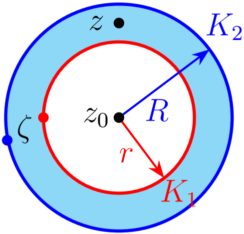


现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到洛朗展开式. 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内处处解析. 设

$$K_1 : |z-z_0| = r, \quad K_2 : |z-z_0| = R, \quad R_1 < r < R < R_2.$$

是该圆环域内的两个圆周. 对于 $r < |z-z_0| < R$, 由柯西积分公式,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta.$$



洛朗级数

和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right](z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式.

和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\right](z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta \in K_1$, 由于 $\left|\dfrac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$,

和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta\in K_1$, 由于 $\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1$, 因此

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}},$$

和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta\in K_1$, 由于 $\left|\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right|<1$, 因此

$$-\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\zeta-z_0}{z-z_0}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}},$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}f(\zeta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

洛朗级数

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \, \mathrm{d}\zeta.$$

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \,\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界.

令

$$R_N(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1} f(\zeta)\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D\supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)|\leqslant M, \zeta\in K_1$,

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K_1$, 那么

$$|R_N(z)| \leqslant \frac{M}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right| \mathrm{d}s$$

洛朗级数

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1} f(\zeta)\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K_1$, 那么

$$\begin{aligned}|R_N(z)| &\leqslant \frac{M}{2\pi}\oint_{K_1}\left|\sum_{n=N}^{\infty}\frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\right|\mathrm{d}s \\ &= \frac{M}{2\pi}\oint_{K_1}\left|\frac{1}{\zeta-z}\cdot\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{N-1}\right|\mathrm{d}s\end{aligned}$$

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \mathrm{d}\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leqslant M, \zeta \in K_1$, 那么

$$\begin{aligned}
|R_N(z)| &\leqslant \frac{M}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z-z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right| \mathrm{d}s \\
&= \frac{M}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \frac{1}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{N-1} \right| \mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{|z - z_0| - r} \cdot \left[\frac{r}{|z - z_0|} \right]^{N-1} \cdot 2\pi r \to 0 \quad (N \to \infty).
\end{aligned}$$

故

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\right](z-z_0)^{-n},$$

其中 $r<|z-z_0|<R$.

故

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\right](z-z_0)^{-n},$$

其中 $r<|z-z_0|<R$. 由复合闭路定理, K_1, K_2 可以换成任意一条在圆环域内绕 z_0 的闭路 C.

故

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_2}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{K_1}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{-n+1}}\right](z-z_0)^{-n},$$

其中 $r<|z-z_0|<R$. 由复合闭路定理, K_1, K_2 可以换成任意一条在圆环域内绕 z_0 的闭路 C. 从而我们得到 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心的圆环域的洛朗展开

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}\frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n,$$

其中 $R_1<|z-z_0|<R_2$.

我们称 $f(z)$ 洛朗展开的正幂次部分为它的解析部分, 负幂次部分为它的主要部分.

洛朗展开的性质

我们称 $f(z)$ 洛朗展开的正幂次部分为它的解析部分, 负幂次部分为它的主要部分.

设在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

我们称 $f(z)$ 洛朗展开的正幂次部分为它的解析部分, 负幂次部分为它的主要部分.

设在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

则

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i c_n.$$

洛朗展开的性质

我们称 $f(z)$ 洛朗展开的正幂次部分为它的解析部分, 负幂次部分为它的主要部分.

设在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为双边幂级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

则

$$\oint_C \frac{f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi i c_n.$$

因此 $f(z)$ 在圆环域内的双边幂级数展开是唯一的, 它就是洛朗级数.

与泰勒级数的关系

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项.

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数.

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析,

与泰勒级数的关系

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数.

与泰勒级数的关系

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

与泰勒级数的关系

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知, $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当 $f(z)$ (或适当延拓) 在 $|z - z_0| \leqslant R_1$ 内有奇点 (未必是 z_0).

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知, $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当 $f(z)$ (或适当延拓) 在 $|z - z_0| \leqslant R_1$ 内有奇点 (未必是 z_0). 例如

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知, $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当 $f(z)$ (或适当延拓) 在 $|z - z_0| \leqslant R_1$ 内有奇点 (未必是 z_0). 例如

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

与泰勒级数的关系

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知, $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当 $f(z)$ (或适当延拓) 在 $|z - z_0| \leqslant R_1$ 内有奇点 (未必是 z_0). 例如

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

可以看出, 右侧是一个幂级数, 所以它在 $z = 0$ 处也解析.

如果 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数没有负幂次项. 那么该洛朗级数是一个幂级数. 因此它的和函数在 $|z-z_0| < R_2$ 内解析, 且在圆环域上等于 $f(z)$.

反过来, 如果 $f(z)$ 在 $|z-z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可以展开为泰勒级数. 由洛朗级数的唯一性可知此时泰勒级数就是洛朗级数.

由此可知, $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内展开的洛朗级数有负幂次项, 当且仅当 $f(z)$ (或适当延拓) 在 $|z-z_0| \leqslant R_1$ 内有奇点 (未必是 z_0). 例如

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

可以看出, 右侧是一个幂级数, 所以它在 $z=0$ 处也解析. 如果我们补充定义 $f(0)=1$, 则 $f(z)$ 处处解析.

例

将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

例

将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点，$f(z)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析.

典型例题：求洛朗级数

例

将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点, $f(z)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析. 我们有

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

其中 C 为圆环域内的闭路.

典型例题：求洛朗级数

例

将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点，$f(z)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析. 我们有

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

其中 C 为圆环域内的闭路. 当 $n\leqslant -3$ 时，被积函数处处解析，因此由柯西-古萨基本定理，$c_n=0$.

典型例题：求洛朗级数

例

将 $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点, $f(z)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内解析. 我们有

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}\,\mathrm{d}\zeta,$$

其中 C 为圆环域内的闭路. 当 $n\leqslant -3$ 时, 被积函数处处解析, 因此由柯西-古萨基本定理, $c_n=0$. 当 $n\geqslant -2$ 时, 由柯西积分公式

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}}\,\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{(n+2)!}(e^z)^{(n+2)}\big|_{z=0}=\frac{1}{(n+2)!}.$$

典型例题：求洛朗级数

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^n,\quad 0<|z|<+\infty.$$

实际上，由洛朗级数的唯一性，我们可以直接从 e^z 的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数.

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!}z^n,\quad 0<|z|<+\infty.$$

实际上, 由洛朗级数的唯一性, 我们可以直接从 e^z 的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数. 这种做法会简便得多.

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

实际上，由洛朗级数的唯一性，我们可以直接从 e^z 的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数．这种做法会简便得多．因此我们一般不用直接法，而是用双边幂级数的代数、求导、求积分运算来得到洛朗级数．

典型例题: 求洛朗级数

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

实际上, 由洛朗级数的唯一性, 我们可以直接从 e^z 的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数. 这种做法会简便得多. 因此我们一般不用直接法, 而是用双边幂级数的代数、求导、求积分运算来得到洛朗级数.

另解.

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right)$$

续解.

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

实际上，由洛朗级数的唯一性，我们可以直接从 e^z 的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数．这种做法会简便得多．因此我们一般不用直接法，而是用双边幂级数的代数、求导、求积分运算来得到洛朗级数.

另解.

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n. \quad \blacksquare$$

典型例题：求洛朗展开

例

在下列圆环域中把 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

例

在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$, (2) $1<|z|<2$, (3) $2<|z|<+\infty$.

例

在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$, (2) $1<|z|<2$, (3) $2<|z|<+\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1,2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数.

典型例题：求洛朗展开

例

在下列圆环域中把 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.
(1) $0 < |z| < 1$, (2) $1 < |z| < 2$, (3) $2 < |z| < +\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z = 1, 2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. (1) 由于 $|z| < 1, |z/2| < 1$,

例

在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.
(1) $0<|z|<1$, (2) $1<|z|<2$, (3) $2<|z|<+\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1,2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. (1) 由于 $|z|<1,|z/2|<1$, 因此

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$$

例

在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0<|z|<1$, (2) $1<|z|<2$, (3) $2<|z|<+\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1,2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. (1) 由于 $|z|<1, |z/2|<1$, 因此

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}$$

例

在下列圆环域中把 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.
(1) $0<|z|<1$, (2) $1<|z|<2$, (3) $2<|z|<+\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z=1,2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. (1) 由于 $|z|<1, |z/2|<1$, 因此

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

例

在下列圆环域中把 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.
(1) $0 < |z| < 1$, (2) $1 < |z| < 2$, (3) $2 < |z| < +\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z = 1, 2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. (1) 由于 $|z| < 1, |z/2| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$$

典型例题: 求洛朗展开

例

在下列圆环域中把 $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.
(1) $0 < |z| < 1$, (2) $1 < |z| < 2$, (3) $2 < |z| < +\infty$.

解.

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z = 1, 2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. (1) 由于 $|z| < 1, |z/2| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} z + \frac{7}{8} z^2 + \cdots$$

典型例题：求洛朗展开

续解.

(2) 由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1, \left|\dfrac{z}{2}\right| < 1,$

典型例题：求洛朗展开

续解.

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1,$ 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

典型例题：求洛朗展开

续解.

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2}$$

典型例题：求洛朗展开

续解.

(2) 由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1, \left|\dfrac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

续解.

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2}$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n$$

续解.

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2}$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n$$

$$= \cdots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \cdots$$

典型例题：求洛朗展开

续解.

(3) 由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1, \left|\dfrac{2}{z}\right| < 1,$

续解.

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z}$$

典型例题：求洛朗展开

续解.

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$，因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z}$$

续解.

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z}$$

$$= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n$$

典型例题：求洛朗展开

续解.

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z}$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)z^{-n-1}$$

续解.

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z} \\
&= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)z^{-n-1} \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

典型例题：求洛朗展开

续解.

(3) 由于 $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1, \left|\dfrac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-2/z} \\
&= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) z^{-n-1} \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

同一个函数在不同的圆环域内有不同的洛朗展开，这和洛朗展开的唯一性并不矛盾.

典型例题：求洛朗展开

续解.

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z} \\ &= -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)z^{-n-1} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots \quad \blacksquare \end{aligned}$$

同一个函数在不同的圆环域内有不同的洛朗展开，这和洛朗展开的唯一性并不矛盾. 因为洛朗展开的唯一性是指在固定的一个圆环域上.

典型例题: 求洛朗展开

例

将 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

典型例题: 求洛朗展开

例

将 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点, $f(z)$ 在 $0<|z-2|<2$ 内解析.

例

将 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点，$f(z)$ 在 $0<|z-2|<2$ 内解析.

$$f(z)=\frac{1}{z(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2+z-2}$$

典型例题：求洛朗展开

例

将 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点, $f(z)$ 在 $0<|z-2|<2$ 内解析.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2+z-2} \\ &= \frac{1}{2(z-2)}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/2} \end{aligned}$$

例

将 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点，$f(z)$ 在 $0<|z-2|<2$ 内解析.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2+z-2} \\ &= \frac{1}{2(z-2)}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/2} = \frac{1}{2(z-2)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-2}{2}\right)^n \end{aligned}$$

例

将 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解.

由于 0 是奇点, $f(z)$ 在 $0<|z-2|<2$ 内解析.

$$\begin{aligned}
f(z)&=\frac{1}{z(z-2)}=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{2+z-2}\\
&=\frac{1}{2(z-2)}\cdot\frac{1}{1+(z-2)/2}=\frac{1}{2(z-2)}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(-\frac{z-2}{2}\Big)^n\\
&=\frac{1}{2(z-2)}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(z-2)^n,\quad 0<|z-2|<2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

练习

将 $z^3 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内展开成洛朗级数.

练习

将 $z^3\exp\left(\dfrac{1}{z}\right)$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内展开成洛朗级数.

答案.

$$\begin{aligned}z^3\exp\left(\frac{1}{z}\right)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!z^n}+\frac{1}{6}+\frac{z}{2}+z^2+z^3\\&=\cdots+\frac{1}{24z}+\frac{1}{6}+\frac{z}{2}+z^2+z^3,\quad 0<|z|<+\infty.\end{aligned}$$

例题：洛朗展开的应用

注意到当 $n = -1$ 时，洛朗级数的系数

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

例题：洛朗展开的应用

注意到当 $n=-1$ 时，洛朗级数的系数

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分，

例题：洛朗展开的应用

注意到当 $n=-1$ 时，洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分，它就是所谓的留数.

例题：洛朗展开的应用

注意到当 $n=-1$ 时，洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分，它就是所谓的**留数**.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)^2}\,\mathrm{d}z$.

注意到当 $n=-1$ 时，洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分，它就是所谓的留数.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)^2}\,\mathrm{d}z$.

解.

注意到闭路 $|z|=3$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内.

例题：洛朗展开的应用

注意到当 $n=-1$ 时，洛朗级数的系数

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分，它就是所谓的留数.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{1}{z(z+1)^2}\,\mathrm{d}z.$

解.

注意到闭路 $|z|=3$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内. 我们在这个圆环域内求 $f(z)=\dfrac{1}{z(z+1)^2}$ 的洛朗展开.

续解.

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]'$$

例题：洛朗展开的应用

续解.

$$f(z)=\frac{1}{z(z+1)^2}=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]'=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right]'$$

例题：洛朗展开的应用

续解.

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]' = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right]'$$

$$= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\right]'$$

续解.

$$f(z)=\frac{1}{z(z+1)^2}=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]'=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right]'$$

$$=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\right]'$$

$$=-\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right]'$$

例题：洛朗展开的应用

续解.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]' = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{3}{z^4}+\cdots\right]
\end{aligned}
$$

例题：洛朗展开的应用

续解.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]' = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{3}{z^4}+\cdots\right] = \frac{1}{z^3}-\frac{2}{z^4}+\cdots
\end{aligned}
$$

例题：洛朗展开的应用

续解.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z+1)^2} = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z+1}\right]' = -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+1/z}\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}\cdot\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right]' \\
&= -\frac{1}{z}\left[-\frac{1}{z^2}+\frac{2}{z^3}-\frac{3}{z^4}+\cdots\right] = \frac{1}{z^3}-\frac{2}{z^4}+\cdots
\end{aligned}
$$

故

$$
\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1} = 0.
$$

例题：洛朗展开的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\exp(1/z)}{1-z}\,\mathrm{d}z.$

例题：洛朗展开的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\exp(1/z)}{1-z}\,\mathrm{d}z.$

解.

注意到闭路 $|z|=2$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内.

例题：洛朗展开的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\exp(1/z)}{1-z}\,\mathrm{d}z.$

解.

注意到闭路 $|z|=2$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内. 我们在这个圆环域内求被积函数 $f(z)$ 的洛朗展开.

例题: 洛朗展开的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\exp(1/z)}{1-z}\,\mathrm{d}z.$

解.

注意到闭路 $|z|=2$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内. 我们在这个圆环域内求被积函数 $f(z)$ 的洛朗展开.

$$f(z) = -\frac{\exp(1/z)}{1-1/z}$$

例题：洛朗展开的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\exp(1/z)}{1-z}\,\mathrm{d}z.$

解.

注意到闭路 $|z|=2$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内. 我们在这个圆环域内求被积函数 $f(z)$ 的洛朗展开.

$$f(z) = -\frac{\exp(1/z)}{1-1/z} = -\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots\right)$$

例题：洛朗展开的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z\exp(1/z)}{1-z}\,\mathrm{d}z.$

解.

注意到闭路 $|z|=2$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内. 我们在这个圆环域内求被积函数 $f(z)$ 的洛朗展开.

$$f(z)=-\frac{\exp(1/z)}{1-1/z}=-\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots\right)$$

$$=-\left(1+\frac{2}{z}+\frac{5}{2z^2}+\cdots\right)$$

例题：洛朗展开的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z\exp(1/z)}{1-z}\,\mathrm{d}z.$

解.

注意到闭路 $|z|=2$ 落在 $1<|z|<+\infty$ 内. 我们在这个圆环域内求被积函数 $f(z)$ 的洛朗展开.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{\exp(1/z)}{1-1/z} = -\Big(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\Big)\Big(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots\Big)\\
&= -\Big(1+\frac{2}{z}+\frac{5}{2z^2}+\cdots\Big)
\end{aligned}
$$

故

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1} = -4\pi i.$$