复变函数与积分变换

# 孤立奇点的分类——可去奇点

合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

2023 年青年教师教学基本功比赛

# 一、问题引入——柯西积分公式的局限性

回忆柯西积分公式:

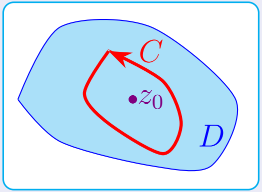
# 一、问题引入——柯西积分公式的局限性

回忆柯西积分公式：

**定理 (柯西积分公式)**

如果 $f(z)$ 在闭路 $C$ 及其内部区域 $D$ 内解析，且 $z_0 \in D$，那么

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z.$$

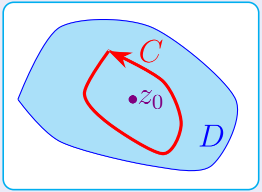


回忆柯西积分公式：

**定理 (柯西积分公式)**

如果 $f(z)$ 在闭路 $C$ 及其内部区域 $D$ 内解析，且 $z_0 \in D$，那么

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$




直观地说，柯西积分公式可以用来处理这种积分：被积函数在闭路 $C$ 内的奇点 $z_0$ 是由于被积函数分母中出现了因式 $z - z_0$ 导致的.

例如

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} \, \mathrm{d}z$$

例如

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cos z\big|_{z=0}$$

# 一、问题引入——柯西积分公式的局限性

例如

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cos z\big|_{z=0} = 2\pi i,$$

# 一、问题引入——柯西积分公式的局限性

例如

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cos z\big|_{z=0} = 2\pi i,$$

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{z^3+1}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z$$

例如

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cos z|_{z=0} = 2\pi i,$$

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{z^3+1}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2!}(z^3+1)''|_{z=1}$$

例如

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z} \, \mathrm{d}z = 2\pi i \cos z|_{z=0} = 2\pi i,$$

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{z^3+1}{(z-1)^3} \, \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2!}(z^3+1)''|_{z=1} = 6\pi i.$$

# 一、问题引入——柯西积分公式的局限性

例如

$$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cos z\big|_{z=0} = 2\pi i,$$

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{z^3+1}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{2!}(z^3+1)''\big|_{z=1} = 6\pi i.$$

然而, 该公式无法处理诸如

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{z}{\sin z}\,\mathrm{d}z, \qquad \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{e^z-1}\,\mathrm{d}z$$

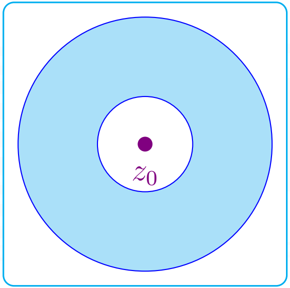
等类型的积分.

# 一、问题引入——洛朗展开的应用

回忆解析函数的洛朗展开形式:

回忆解析函数的洛朗展开形式：如果函数 $f(z)$ 在圆环域 $0 < |z - z_0| < R$ 内解析，那么 $f(z)$ 可以展开为洛朗级数

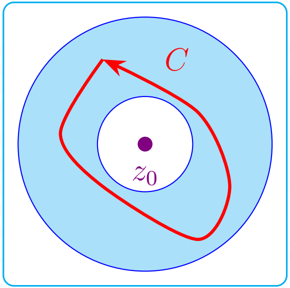
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$



# 一、问题引入——洛朗展开的应用

回忆解析函数的洛朗展开形式：如果函数 $f(z)$ 在圆环域 $0 < |z - z_0| < R$ 内解析，那么 $f(z)$ 可以展开为洛朗级数

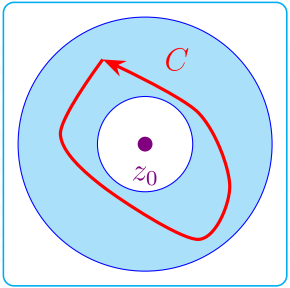
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{其中 } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z,$$



回忆解析函数的洛朗展开形式：如果函数 $f(z)$ 在圆环域 $0 < |z - z_0| < R$ 内解析，那么 $f(z)$ 可以展开为洛朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{其中 } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z,$$

$C$ 是该圆环域内的闭路.



# 一、问题引入——洛朗展开的应用

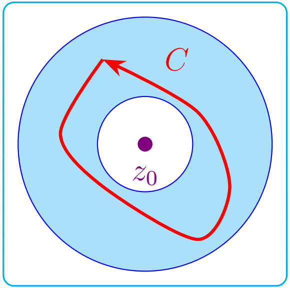
回忆解析函数的洛朗展开形式：如果函数 $f(z)$ 在圆环域 $0<|z-z_0|<R$ 内解析，那么 $f(z)$ 可以展开为洛朗级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\quad \text{其中 } c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z,$$

$C$ 是该圆环域内的闭路.

令 $n=-1$ 得到

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}.$$



# 一、问题引入——洛朗展开的应用

例如 $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$. 当 $0 < |z| < \pi$ 时,

$$f(z) = \frac{z}{z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \cdots} = 1 + \frac{z^2}{6} + \cdots$$

例如 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$. 当 $0<|z|<\pi$ 时,

$$f(z)=\frac{z}{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots}=1+\frac{z^2}{6}+\cdots$$

特别地, $c_{-1}=0$, 从而

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}=0.$$

例如 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$. 当 $0<|z|<\pi$ 时,

$$f(z)=\frac{z}{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots}=1+\frac{z^2}{6}+\cdots$$

特别地, $c_{-1}=0$, 从而

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}=0.$$

这样便可求出这种类型的积分.

# 一、问题引入——洛朗展开的应用

例如 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$. 当 $0<|z|<\pi$ 时,

$$f(z)=\frac{z}{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots}=1+\frac{z^2}{6}+\cdots$$

特别地, $c_{-1}=0$, 从而

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}=0.$$

这样便可求出这种类型的积分. 然而, 每次计算都需要求洛朗展开形式, 计算依然繁琐.

# 一、问题引入——洛朗展开的应用

例如 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$. 当 $0<|z|<\pi$ 时,

$$f(z)=\frac{z}{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots}=1+\frac{z^2}{6}+\cdots$$

特别地, $c_{-1}=0$, 从而

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}=0.$$

这样便可求出这种类型的积分. 然而, 每次计算都需要求洛朗展开形式, 计算依然繁琐. 我们希望能通过一些较为简单的判定方法来得到 $c_{-1}$, 而避免展开整个洛朗级数.

例如 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$. 当 $0<|z|<\pi$ 时,

$$f(z)=\frac{z}{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots}=1+\frac{z^2}{6}+\cdots$$

特别地, $c_{-1}=0$, 从而

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i c_{-1}=0.$$

这样便可求出这种类型的积分. 然而, 每次计算都需要求洛朗展开形式, 计算依然繁琐. 我们希望能通过一些较为简单的判定方法来得到 $c_{-1}$, 而避免展开整个洛朗级数. 为了达到这个目的, 我们对奇点按在其洛朗展开的特点来进行分类.

# 二、孤立奇点

为了利用洛朗级数，我们要求 $f(z)$ 在奇点 $z_0$ 的一个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析.

# 二、孤立奇点

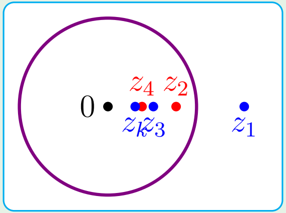
为了利用洛朗级数, 我们要求 $f(z)$ 在奇点 $z_0$ 的一个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析. 这样的奇点被称为孤立奇点.

# 二、孤立奇点

为了利用洛朗级数，我们要求 $f(z)$ 在奇点 $z_0$ 的一个去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析. 这样的奇点被称为孤立奇点.

**例**

考虑函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin(1/z)}$，显然 0 和 $z_k=\dfrac{1}{k\pi}$ 是奇点，$k$ 是非零整数.

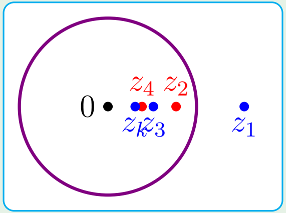


# 二、孤立奇点

为了利用洛朗级数，我们要求 $f(z)$ 在奇点 $z_0$ 的一个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析．这样的奇点被称为孤立奇点．

**例**

考虑函数 $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$，显然 0 和 $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ 是奇点，$k$ 是非零整数．因为 $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k = 0$，所以 0 的任何一个去心邻域内都有奇点．

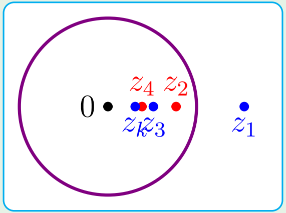


# 二、孤立奇点

为了利用洛朗级数，我们要求 $f(z)$ 在奇点 $z_0$ 的一个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析．这样的奇点被称为孤立奇点．

**例**

考虑函数 $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$，显然 $0$ 和 $z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ 是奇点，$k$ 是非零整数．因为 $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k = 0$，所以 $0$ 的任何一个去心邻域内都有奇点．此时 $0$ 不是孤立奇点．



例

# 二、孤立奇点

**例**

- $z=0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}, \dfrac{z}{\sin z}$ 的孤立奇点.

# 二、孤立奇点

**例**

- $z=0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}, \dfrac{z}{\sin z}$ 的孤立奇点.
- $z=-1$ 是 $\dfrac{1}{z(z+1)}$ 的孤立奇点.

# 二、孤立奇点

**例**

- $z=0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}, \dfrac{z}{\sin z}$ 的孤立奇点.
- $z=-1$ 是 $\dfrac{1}{z(z+1)}$ 的孤立奇点.
- $z=0$ 不是 $\dfrac{1}{\sin(1/z)}$ 的孤立奇点.

# 二、孤立奇点

**例**

- $z=0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}, \dfrac{z}{\sin z}$ 的孤立奇点.
- $z=-1$ 是 $\dfrac{1}{z(z+1)}$ 的孤立奇点.
- $z=0$ 不是 $\dfrac{1}{\sin(1/z)}$ 的孤立奇点.

若 $f(z)$ 只有有限多个奇点, 则这些奇点都是孤立奇点.

# 三、可去奇点——定义

**定义**

若 $f(z)$ 在孤立奇点 $z_0$ 的去心邻域的洛朗级数没有主要部分，即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

是幂级数，则称 $z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

## 三、可去奇点——定义

**定义**

若 $f(z)$ 在孤立奇点 $z_0$ 的去心邻域的洛朗级数没有主要部分, 即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

是幂级数, 则称 $z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

设 $g(z)$ 为右侧幂级数的和函数, 则 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析,

# 三、可去奇点——定义

**定义**

若 $f(z)$ 在孤立奇点 $z_0$ 的去心邻域的洛朗级数没有主要部分，即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

是幂级数，则称 $z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

设 $g(z)$ 为右侧幂级数的和函数，则 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析，且除 $z_0$ 外 $f(z) = g(z)$.

**定义**

若 $f(z)$ 在孤立奇点 $z_0$ 的去心邻域的洛朗级数没有主要部分，即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

是幂级数，则称 $z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

设 $g(z)$ 为右侧幂级数的和函数，则 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析，且除 $z_0$ 外 $f(z) = g(z)$. 通过补充或修改定义 $f(z_0) = g(z_0) = c_0$，可使得 $f(z)$ 也在 $z_0$ 解析.

## 三、可去奇点——定义

**定义**

若 $f(z)$ 在孤立奇点 $z_0$ 的去心邻域的洛朗级数没有主要部分, 即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

是幂级数, 则称 $z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

设 $g(z)$ 为右侧幂级数的和函数, 则 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析, 且除 $z_0$ 外 $f(z) = g(z)$. 通过补充或修改定义 $f(z_0) = g(z_0) = c_0$, 可使得 $f(z)$ 也在 $z_0$ 解析. 这就是 "可去" 的含义.

# 三、可去奇点——判定方法

如果 $z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 那么

## 三、可去奇点——判定方法

如果 $z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 那么

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$ 存在;

# 三、可去奇点——判定方法

如果 $z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 那么

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$ 存在;
- $\lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = 0$.

# 三、可去奇点——判定方法

如果 $z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 那么

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$ 存在;
- $\lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) = 0$.

实际上, 这三者是等价的:

## 三、可去奇点——判定方法

如果 $z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 那么

- $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = c_0$ 存在;
- $\lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) = 0$.

实际上, 这三者是等价的:

**定理 (可去奇点的判定方法)**

$z_0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点 $\iff \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在

$\iff \lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) = 0.$

# 例题：可去奇点的判定

**例**

设 $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$.

# 例题：可去奇点的判定

**例**

设 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$. 那么

$$\lim_{z\to 0} zf(z)=e^0-1=0.$$

# 例题：可去奇点的判定

**例**

设 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$. 那么

$$\lim_{z\to 0} zf(z)=e^0-1=0.$$

因此 $0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

# 例题：可去奇点的判定

**例**

设 $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$. 那么

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = e^0 - 1 = 0.$$

因此 0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

实际上当 $0 < |z| < +\infty$ 时,

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

# 例题：可去奇点的应用

例

设 $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$.

# 例题：可去奇点的应用

例

设 $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$. 则

$$\lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z^2}{\sin z}$$

# 例题：可去奇点的应用

例

设 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$. 则

$$\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\sin z}\xlongequal{\text{等价无穷小}}\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{z}=0.$$

# 例题：可去奇点的应用

例

设 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$. 则

$$\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\sin z} \xlongequal{\text{等价无穷小}} \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{z}=0.$$

因此 0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

# 例题：可去奇点的应用

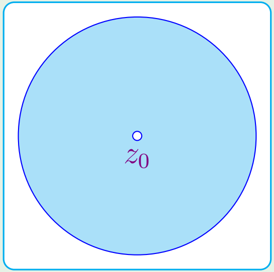
例

设 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$. 则

$$\lim_{z\to 0} zf(z)=\lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\sin z} \xlongequal{\text{等价无穷小}} \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{z}=0.$$

因此 $0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点.

所以 $f(z)$ 在 $0<|z|<\pi$ 内的洛朗展开中 $c_{-1}=0$,



# 例题：可去奇点的应用

例

设 $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$. 则

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{\sin z} \xlongequal{\text{等价无穷小}} \lim_{z\to 0}\frac{z^2}{z} = 0.$$

因此 0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

所以 $f(z)$ 在 $0 < |z| < \pi$ 内的洛朗展开中 $c_{-1} = 0$,

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i c_{-1} = 0.$$