

# 合 肥 工 业 大 学 期 中 试 卷

2021~2022 学年第二学期

数学(下)(034Y01)

1. (10 分) 求函数  $f(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \arctan \frac{1}{x}$  的定义域.
2. (5 分) 求函数  $y = \begin{cases} 1/x, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 1 + e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$  的反函数.
3. (10 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1-x)^{1/x}$ .
4. (5 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x^3+8}$ .
5. (5 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{-x}-1)}{\arctan(1-\cos x)}$ .
6. (5 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x-x^2} - \sqrt{1-2x+x^2}}{x}$ .
7. (5 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)-2\ln x}}$ .
8. (5 分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{e^x-1} - \arctan \frac{x}{2} \right)$ .
9. (5 分) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2+2} + \frac{2}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+2n} \right)$ .
10. (5 分) 设  $a_1 = 4, a_{n+1} = \sqrt{a_n+6}$ , 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在并求之.
11. (10 分) 证明  $e^x + x = 4$  在  $(0, +\infty)$  内有零点.
12. (5 分) 设函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上连续, 且  $f(-1) \leq 1 \leq f(1)$ . 证明存在  $\xi \in [-1, 1]$ , 使得  $f(\xi) = \xi^2$ .
13. (10 分) 求  $y = e^{x+1} \sin x - e^2 \sin 1$  的导数.
14. (5 分) 求  $y = \arctan e^x$  的导数.
15. (5 分) 求曲线  $y = \tan x$  在点  $\left(-\frac{\pi}{4}, -1\right)$  处的切线方程和法线方程.
16. (5 分) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{\arctan x}, & x < 0, \\ 2x+a, & x \geq 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续, 求常数  $a$ .

# 合 肥 工 业 大 学 试 卷 (A)

2021~2022 学年第二学期

数学(下)(034Y01)

## 一、填空题(每题 3 分, 共 18 分)

1. 如果  $f(x) > 0$  且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 + f(x)]^{1/f(x)} =$ \_\_\_\_\_.

2. 设  $y = \sin(x^2 + 1)$ , 则  $dy =$ \_\_\_\_\_.

3. 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{2}{n^2 - 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 - n} \right) =$ \_\_\_\_\_.

4. 曲线  $y = 2 \ln(x + 1)$  在点  $(1, 2 \ln 2)$  处的切线方程为\_\_\_\_\_.

5. 若  $e^{y-1} = 1 + xy$ , 则  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ \_\_\_\_\_.

6. 如果函数  $f(x)$  的定义域是  $(0, +\infty)$ , 且  $x = 0$  是曲线  $y = f(x)$  的垂直渐近线, 那么

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = \text{_____}.$$

## 二、选择题(每题 3 分, 共 18 分)

1. 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\frac{1}{x}$  和 ( ) 是等价无穷小.

A.  $\sin \frac{1}{x}$

B.  $\sin x$

C.  $e^{-x}$

D.  $e^{1/x}$

2. 若当  $x \rightarrow 0$  时,  $\arctan(e^x - 1) \cdot (\cos x - 1)$  和  $x^n$  是同阶无穷小, 则  $n =$  ( ).

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

3. 设  $f(x) = \arctan \frac{1}{x(x-1)^2}$ , 则  $x = 0$  是  $f(x)$  的 ( ).

A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 第二类间断点

D. 连续点

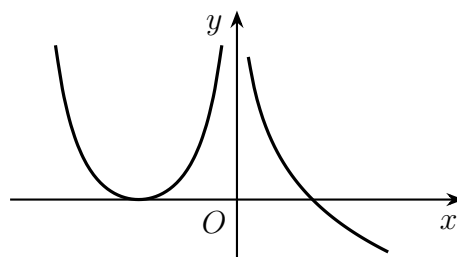
4. 设  $f(x)$  是定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的连续函数, 且  $f'(x)$  的图像如下图所示, 则  $f(x)$  有 ( ).

A. 一个极大值点, 没有极小值点

B. 没有极大值点, 一个极小值点

C. 一个极大值点和一个极小值点

D. 一个极大值点和两个极小值点



5. 设  $f(x)$  在点  $x=0$  处可导, 且  $f(0)=0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^{2022}) + x^{2021}f(x)}{x^{2022}} = ( \quad )$ .  
 A. 0                      B.  $f'(0)$                       C.  $2f'(0)$                       D.  $2022f'(0)$
6. 如果点  $(x_0, y_0)$  是曲线  $y=f(x)$  的拐点, 则  $f''(x_0) = ( \quad )$ .  
 A. 0                      B.  $\infty$                       C. 不存在                      D. 0 或不存在

### 三、解答题 (每题 8 分, 共 64 分)

1. 求极限  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$ .
2. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\arcsin x^2}$ .
3. 设  $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^3 + t \end{cases}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$  和  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .
4. 设  $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, & x < 0, \\ x^2 + ax + b, & x \geq 0. \end{cases}$  求常数  $a, b$  使得函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导, 并求出此时曲线  $y=f(x)$  的渐近线.
5. 求函数  $f(x) = x^3 - x^2 - x$  在区间  $[-2, 2]$  上的最大值和最小值.
6. 证明: 当  $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$  时,  $\tan x_2 - \tan x_1 \geq x_2 - x_1$ .
7. 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导, 且  $f(1)=0$ . 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $\xi f'(\xi) + 2022f(\xi) = 0$ .
8. 设函数  $f(x) = \ln x + \frac{2}{x^2}, x \in (0, +\infty)$ . 求
- (1) 函数  $f(x)$  的增减区间及极值;
- (2) 曲线  $y=f(x)$  的凹凸区间及拐点.

# 合肥工业大学试卷参考答案(A)

2021~2022 学年第二学期

数学(下)(034Y01)

## 一、填空题(每小题 3 分, 共 18 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1.  $e$ , 2.  $2x \cos(x^2 + 1) dx$ , 3.  $\frac{1}{2}$ ,  
4.  $y = x - 1 + 2 \ln 2$ , 5.  $1$ , 6.  $0$ .

## 二、选择题(每小题 3 分, 共 18 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	D	B	A	C	D

## 三、解答题(每小题 8 分, 共 64 分)

1. (8 分)【解】

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+2} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &= \frac{-2}{1} = -2. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

2. (8 分)【解】

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\arcsin x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &\stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

3. (8 分)【解】

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= \frac{3t^2 + 1}{2t + 1}, \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dy'/dt}{dx/dt} \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= \frac{6t(2t+1) - (3t^2+1)2}{(2t+1)^3} = \frac{6t^2 + 6t - 2}{(2t+1)^3}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

4. (8 分)【解】

由于  $f(x)$  在  $x=0$  处连续, 因此

$$f(0) = f(0^+) \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$= b = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \arctan \frac{1}{x} = 0 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

由于  $f(x)$  在  $x=0$  处可导, 因此

$$f'_-(0) = f'_+(0), \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \arctan \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$f'_+(0) = (2x + a)|_{x=0} = a, \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

因此  $a = -\frac{\pi}{2}. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = +\infty, \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \arctan \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\arctan t}{t} = 1,$$

因此曲线  $y = f(x)$  的渐近线只有  $y = 1. \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

5. (8 分)【解】

由

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1) = 0 \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

可得驻点  $x = -\frac{1}{3}, 1. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

由于

$$f(-2) = -10, \quad f(2) = 2, \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}, \quad f(1) = -1, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此最大值为 2, 最小值为 -10.  $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

6. (8 分)【证明】

证法一: 设  $f(x) = \tan x - x$ , 则  $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \geq 0. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此  $f(x)$  在  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增, 从而  $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$f(x_2) \geq f(x_1), \quad \tan x_2 - \tan x_1 \geq x_2 - x_1. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

证法二: 设  $f(x) = \tan x$ , 则  $f(x)$  在  $[x_1, x_2]$  上连续,  $(x_1, x_2)$  内可导. .... (2 分)  
由拉格朗日中值定理, 存在  $\xi \in (x_1, x_2)$  使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

即

$$\frac{\tan x_2 - \tan x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\cos^2 \xi} \geq 1. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

所以  $\tan x_2 - \tan x_1 \geq x_2 - x_1$ . .... (2 分)

## 7. (8 分) 【证明】

设  $F(x) = x^{2022}f(x)$ , .... (2 分)

则  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上连续,  $(0, 1)$  内可导, .... (1 分)

且  $F(0) = 0, F(1) = f(1) = 0$ . .... (1 分)

由罗尔中值定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $F'(\xi) = 0$ . .... (2 分)

由于  $F'(x) = x^{2022}f'(x) + 2022x^{2021}f(x)$  且  $\xi \neq 0$ , .... (1 分)

所以  $\xi f'(\xi) + 2022f(\xi) = 1$ . .... (1 分)

## 8. (8 分) 【解】

(1)

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} = \frac{x^2 - 4}{x^3} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^3}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

当  $0 < x < 2$  时,  $f'(x) < 0$ . 当  $x > 2$  时,  $f'(x) > 0$ . .... (1 分)

因此  $(0, 2]$  是  $f(x)$  的单减区间,

$[2, +\infty)$  是  $f(x)$  的单增区间. .... (1 分, 写成开区间不扣分)

所以  $f(x)$  只有唯一的极小值  $f(2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$ . .... (1 分)

(2)

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{12}{x^4} = -\frac{x^2 - 12}{x^4} = -\frac{(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})}{x^4}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

当  $0 < x < 2\sqrt{3}$  时,  $f''(x) > 0$ . 当  $x > 2\sqrt{3}$  时,  $f''(x) < 0$ . .... (1 分)

因此  $(0, 2\sqrt{3}]$  是曲线  $y = f(x)$  的凹区间,

$[2\sqrt{3}, +\infty)$  是曲线  $y = f(x)$  的凸区间, .... (1 分, 写成开区间不扣分)

拐点为  $\left(2\sqrt{3}, \ln(2\sqrt{3}) + \frac{1}{6}\right)$ . .... (1 分)