

合 肥 工 业 大 学 试 卷 参 考 答 案 (A)

2021~2022 学年第 二 学期 课程代码 034Y01 课程名称 数学(下) 命题教师 集体 系主任审批
 教学班级 学生姓名 学号 考试日期 2022 年 6 月 18 日 8:00-10:00 成绩

一、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

请将你的答案对应填在横线上:

1. e , 2. $2x \cos(x^2 + 1) dx$, 3. $1/2$,

4. $y = x - 1 + 2 \ln 2$, 5. 1 , 6. 0 .

二、选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里:

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	D	B	A	C	D

三、解答题 (每小题 8 分, 共 64 分)

1. (8 分)【解】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+2} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &= \frac{-2}{1} = -2. \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

2. (8 分)【解】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{\arcsin x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &\stackrel{\text{洛必达}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \dots\dots\dots (3 \text{ 分}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

3. (8 分)【解】

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= \frac{3t^2 + 1}{2t + 1}, \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{dy'/dt}{dx/dt} \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \\ &= \frac{6t(2t+1) - (3t^2+1)2}{(2t+1)^3} = \frac{6t^2 + 6t - 2}{(2t+1)^3}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

4. (8 分)【解】

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 因此

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0^+) \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ &= b = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \arctan \frac{1}{x} = 0 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 因此

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= f'_+(0), \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \arctan \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ f'_+(0) &= (2x + a)|_{x=0} = a, \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \end{aligned}$$

因此 $a = -\frac{\pi}{2}$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = +\infty, \dots\dots\dots (1 \text{ 分}) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan \frac{1}{x} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \arctan \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\arctan t}{t} = 1, \end{aligned}$$

因此曲线 $y = f(x)$ 的渐近线只有 $y = 1$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

合 肥 工 业 大 学 试 卷 参 考 答 案 (A)

2021~2022 学年第 二 学期 课程代码 034Y01 课程名称 数学(下) 命题教师 集体 系主任审批
 教学班级 学生姓名 学号 考试日期 2022 年 6 月 18 日 8:00-10:00 成绩

5. (8 分)【解】

由

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1) = 0 \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

可得驻点 $x = -\frac{1}{3}, 1$. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

由于

$$f(-2) = -10, \quad f(2) = 2, \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}, \quad f(1) = -1, \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此最大值为 2, 最小值为 -10. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

6. (8 分)【证明】

证法一: 设 $f(x) = \tan x - x$, 则 $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \geq 0. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

因此 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 从而 $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$f(x_2) \geq f(x_1), \quad \tan x_2 - \tan x_1 \geq x_2 - x_1. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

证法二: 设 $f(x) = \tan x$, 则 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, (x_1, x_2) 内可导. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

即

$$\frac{\tan x_2 - \tan x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\cos^2 \xi} \geq 1. \quad \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

所以 $\tan x_2 - \tan x_1 \geq x_2 - x_1$. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

7. (8 分)【证明】

设 $F(x) = x^{2022}f(x)$, $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

且 $F(0) = 0, F(1) = f(1) = 0$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $F'(\xi) = 0$. $\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

由于 $F'(x) = x^{2022}f'(x) + 2022x^{2021}f(x)$ 且 $\xi \neq 0$, $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

所以 $\xi f'(\xi) + 2022f(\xi) = 1$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

8. (8 分)【解】

(1)

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} = \frac{x^2 - 4}{x^3} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^3}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$. 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

因此 $(0, 2]$ 是 $f(x)$ 的单减区间, $[2, +\infty)$ 是 $f(x)$ 的单增区间. $\dots\dots (1 \text{ 分, 写成开区间不扣分})$

所以 $f(x)$ 只有唯一的极小值 $f(2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

(2)

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{12}{x^4} = -\frac{x^2 - 12}{x^4} = -\frac{(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})}{x^4}. \quad \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

当 $0 < x < 2\sqrt{3}$ 时, $f''(x) > 0$. 当 $x > 2\sqrt{3}$ 时, $f''(x) < 0$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$

因此 $(0, 2\sqrt{3}]$ 是曲线 $y = f(x)$ 的凹区间,

$[2\sqrt{3}, +\infty)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的凸区间, $\dots\dots\dots (1 \text{ 分, 写成开区间不扣分})$

拐点为 $\left(2\sqrt{3}, \ln(2\sqrt{3}) + \frac{1}{6}\right)$. $\dots\dots\dots (1 \text{ 分})$