第五章　留数

5.1　孤立奇点

作业 1. 单选题: (2020 年 A 卷) $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$ 的 (D).

(A) 一阶极点　　(B) 二阶极点　　(C) 解析点　　(D) 可去奇点

作业 2. 单选题: (2022 年 A 卷) 如果 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, $g(z)$ 的一阶零点, 则 z_0 是 $f(z)^3g(z)^2$ 的 (A).

(A) 一阶极点　　(B) 一阶零点　　(C) 可去奇点　　(D) 三阶极点

作业 3. 下列函数有哪些奇点? 如果是极点, 请指出它的阶:

(1) $\dfrac{1}{(z-2)^3(z^2+1)^2}$;　　(2) $\dfrac{\cos z-1}{z^3}$;　　(3) $\dfrac{1}{z^3+z^2-z-1}$;

(4) $\dfrac{\ln(z+1)}{z}$;　　(5) $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$;　　(6) $\dfrac{1}{e^{z-1}}$;

(7) $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$;　　(8) $\dfrac{z^6}{1+z^4}$;　　(9) $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

解. (1) 2 为三阶极点, $\pm i$ 为二阶极点.

(2) 0 为一阶极点.

(3) -1 为二阶极点, 1 为一阶极点.

(4) 0 为可去奇点.

(5) $\pm i$ 为二阶极点, $(2k+1)i$ 为一阶极点, 其中 $k\neq -1,0$ 为整数.

(6) 没有奇点.

(7) 0 为三阶极点, $2k\pi i$ 为一阶极点, 其中 $k\neq 0$ 为整数.

(8) $\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}},\pm\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ 为一阶极点.

(9) 0 为二阶极点, $\pm\sqrt{k\pi}$ 为一阶极点, 其中 $k\neq 0$ 为整数.

也可写成 $\pm\sqrt{k\pi},\pm i\sqrt{k\pi}$, 其中 k 为正整数. ■

作业 4. 证明: 如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $m>1$ 阶零点, 那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 阶零点.

证明. 设 $g(z)=f'(z)$, 则 $g^{(n)}(z_0)=f^{(n+1)}(z_0)$. 由于

$$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0,\quad f^{(m)}(z_0)\neq 0,$$

因此

$$g(z_0)=g'(z_0)=\cdots=g^{(m-2)}(z_0)=0,\quad g^{(m-1)}(z_0)\neq 0,$$

从而 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 阶零点. ■

作业 5. 证明: $\dfrac{\pi i}{2}$ 是 $\operatorname{ch} z$ 的一阶零点.

证明. 由于

$$\operatorname{ch}\frac{\pi i}{2}=\frac{e^{\frac{\pi i}{2}}+e^{-\frac{\pi i}{2}}}{2}=\frac{i-i}{2}=0,$$

$$(\operatorname{ch} z)'|_{z=\frac{\pi i}{2}}=\operatorname{sh}\frac{\pi i}{2}=\frac{e^{\frac{\pi i}{2}}-e^{-\frac{\pi i}{2}}}{2}=\frac{i+i}{2}=i\neq 0,$$

因此 $\dfrac{\pi i}{2}$ 是 $\operatorname{ch} z$ 的一阶零点. ■

作业 6. 0 是 $(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{-2}$ 的几阶极点?

解. 设 $f(z)=\sin z+\operatorname{sh} z-2z$, 则

$$\begin{aligned}
f(0)&=0,\\
f'(0)&=(\cos z+\operatorname{ch} z-2)|_{z=0}=0,\\
f''(0)&=(-\sin z+\operatorname{sh} z)|_{z=0}=0,\\
f'''(0)&=(-\cos z+\operatorname{ch} z)|_{z=0}=0,\\
f^{(4)}(0)&=(\sin z+\operatorname{sh} z)|_{z=0}=0,\\
f^{(5)}(0)&=(\cos z+\operatorname{ch} z)|_{z=0}=2\neq 0,
\end{aligned}$$

因此 0 是 $f(z)$ 的 5 阶零点, 从而是 $(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{-2}$ 的 10 阶极点. ■

另解. 设 $f(z)=\sin z+\operatorname{sh} z-2z$, 则

$$f(z)=\left(z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}+\cdots\right)+\left(z+\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}+\cdots\right)-2z=\frac{z^5}{60}+\cdots,$$

因此 0 是 $f(z)$ 的 5 阶零点, 从而是 $(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{-2}$ 的 10 阶极点. ■

作业 7. 设 a 是 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的 m 阶和 n 阶极点, 则 $z=a$ 是

(1) $\varphi(z)\psi(z)$; (2) $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$; (3) $\varphi(z)+\psi(z)$

的什么类型奇点?

解. 如果 a 是 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的 m 阶和 n 阶极点, 则

(1) a 是 $\varphi(z)\psi(z)$ 的 $m+n$ 阶极点;

(2) 当 $m>n$ 时, a 是 $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的 $m-n$ 阶极点; 当 $m\leqslant n$ 时, a 是 $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的可去奇点;

(3) 当 $m\neq n$ 时, a 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 $\max\{m,n\}$ 阶极点; 当 $m=n$ 时, a 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 $\leqslant m$ 阶极点或可去奇点. ■

5.2 留数

作业 8. 填空题: (2020 年 B 卷) 设 $f(z)=\dfrac{2021}{z}+\dfrac{\sin z}{z}$, 则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$ ___2021___.

作业 9. 填空题: (2021 年 B 卷) 设 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$, 则 $\mathrm{Res}[f(z),0]=$ ___0___.

作业 10. (2020 年 A 卷) 求函数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^8}$ 在有限奇点处的留数.

解. 它的奇点只有 $z=0$, 且 0 是 $f(z)$ 的至多 8 阶极点. 从而

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{1}{7!}(z-\sin z)^{(7)}|_{z=0}=\frac{1}{7!}\Big(-\sin(z+\frac{7\pi}{2})\Big)|_{z=0}=\frac{1}{7!}.$$ ■

作业 11. (2020 年 B 卷) 求函数 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ 在有限奇点处的留数.

解. 它的奇点只有 $z=\pm i$, 且它们是 $f(z)$ 的至多 1 阶极点. 从而

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\frac{e^{iz}}{z+i}\Big|_{z=i}=\frac{e^{-1}}{2i}=-\frac{i}{2e},$$
$$\mathrm{Res}[f(z),-i]=\frac{e^{iz}}{z-i}\Big|_{z=-i}=\frac{e}{-2i}=\frac{ei}{2},$$ ■

作业 12. (2022 年 A 卷) 求 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z^2-\pi^2)}$ 在有限复平面内的奇点和相应的留数.

解. $z=0$ 是二阶极点, 故

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\left(\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\right)'\Big|_{z=0}=\frac{-\sin z\cdot(z^2-\pi^2)-\cos z\cdot 2z}{(z^2-\pi^2)^2}\Big|_{z=0}=0.$$

$z=\pm\pi$ 是一阶极点, 故

$$\mathrm{Res}[f(z),\pi]=\frac{\cos z}{z^2(z+\pi)}\Big|_{z=\pi}=-\frac{1}{2\pi^3},$$
$$\mathrm{Res}[f(z),-\pi]=\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}\Big|_{z=-\pi}=\frac{1}{2\pi^3}.$$ ■

作业 13. (2022 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|z-3|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C\frac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}$ 在 $|z-3|\leqslant 4$ 内的奇点为 $\pi, 2\pi$, 因此

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z &= 2\pi i\big[\mathrm{Res}[f(z),\pi]+\mathrm{Res}[f(z),2\pi]\big]\\ &= 2\pi i\left[\frac{e^{iz}}{z-2\pi}\Big|_{z=\pi}+\frac{e^{iz}}{z-\pi}\Big|_{z=2\pi}\right]\\ &= 2\pi i\left[\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right]=4i.\end{aligned}$$

■

作业 14. (2021 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)}\,\mathrm{d}z$.

解. 由于 $f(z)=\dfrac{\sin z}{z(z-1)}$ 在 $|z|\leqslant 2$ 内的奇点为 $0, 1$, 因此

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)}\,\mathrm{d}z &= 2\pi i\big[\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\big]\\ &= 2\pi i\left[\frac{\sin z}{z-1}\Big|_{z=0}+\frac{\sin z}{z}\Big|_{z=1}\right]=2\pi i\sin 1.\end{aligned}$$

■

作业 15. (2021 年 A 卷) 设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2\cos z}$, C 为正向圆周 $|z|=2$.

(1) 求 $f(z)$ 在 C 内部的孤立奇点, 并给出其类型.

(2) 求 $f(z)$ 在上述奇点处的留数.

(3) 求 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

解. (1) 孤立奇点为二阶极点 $z=0$, 一阶极点 $z=\pm\frac{\pi}{2}$.

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),0] &= \left(\frac{1}{\cos z}\right)'\Big|_{z=0}=-\frac{-\sin z}{\cos^2 z}\Big|_{z=0}=0,\\ \mathrm{Res}[f(z),\frac{\pi}{2}] &= \frac{1/z^2}{(\cos z)'}\Big|_{z=\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{\pi^2},\\ \mathrm{Res}[f(z),-\frac{\pi}{2}] &= \frac{1/z^2}{(\cos z)'}\Big|_{z=-\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi^2}.\end{aligned}$$

(3)

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\big[\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),\frac{\pi}{2}]+\mathrm{Res}[f(z),-\frac{\pi}{2}]\big]=0.$$

■

作业 16. (2021 年 B 卷) 设函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$.

(1) 求 $f(z)$ 在复平面上的所有孤立奇点, 并讨论其类型;

(2) 计算 $f(z)$ 在所有孤立奇点处的留数;

(3) 计算积分 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中曲线 C 为正向圆周 $|z|=2$.

解. (1) 孤立奇点为二阶极点 $z=1$, 一阶极点 $z=0$.

(2)

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\left(\frac{e^z}{z}\right)'\bigg|_{z=1}=\frac{e^z z-e^z}{z^2}\bigg|_{z=1}=0,$$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{e^z}{(z-1)^2}\bigg|_{z=0}=1.$$

(3)

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\big[\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),1]\big]=2\pi i.$$

■

作业 17. 求下列各函数 $f(z)$ 在有限奇点处的留数:

(1) $\dfrac{z-1}{z^2+2z}$; (2) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^5}$; (3) $\dfrac{z}{\cos z}$; (4) $\cos\dfrac{1}{1-z}$; (5) $\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

解. (1) 由于 $0,-2$ 均为一阶极点, 因此

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to0}\frac{z-1}{z+2}=-\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-2]=\lim_{z\to2}\frac{z-1}{z}=\frac{3}{2}.$$

(2) 由于 0 为 4 阶极点, 因此

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{4!}\lim_{z\to0}(1-e^{2z})^{(4)}=\frac{1}{24}\lim_{z\to0}(-16e^{2z})=-\frac{2}{3}.$$

(3) 由于 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, k\in\mathbb{Z}$ 为 $\cos z$ 的 1 阶零点, 因此

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{z}{-\sin z}\bigg|_{z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}=(-1)^{k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi.$$

(4) 由于

$$\cos\frac{1}{1-z}=1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}+\cdots,$$

因此 $\operatorname{Res}[f(z),1]=c_{-1}=0$.

(5) 由于 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i$ 是 $\operatorname{ch} z$ 的 1 阶零点, 因此

$$\operatorname{Res}\left[f(z),\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{sh} z}\bigg|_{z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i}=1.$$

■

作业 18. 9 利用留数计算下述积分:

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z(z-\pi)}\,\mathrm{d}z$; (2) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$;

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1-\cos z}{z^5}\,\mathrm{d}z,\quad m\in\mathbb{Z}$; (4) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-\frac{1}{2})^9(z-2)^9}\,\mathrm{d}z$.

解. (1) 被积函数 $f(z)$ 在闭路内部的奇点为可去奇点 $0, \pi$, 因此

$$\oint_{|z|=4} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\big(\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),\pi]\big) = 0.$$

(2) 被积函数 $f(z)$ 在闭路内部的奇点为二阶极点 1 和一阶极点 0, 因此

$$\mathrm{Res}[f(z),1] = \left(\frac{e^{2z}}{z}\right)'\Big|_{z=1} = \frac{2e^{2z}z - e^{2z}}{z^2}\Big|_{z=1} = e^2,$$

$$\mathrm{Res}[f(z),0] = \frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\Big|_{z=0} = 1,$$

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\big(\mathrm{Res}[f(z),1]+\mathrm{Res}[f(z),0]\big) = 2\pi i(e^2+1).$$

(3) 被积函数 $f(z)$ 在闭路内部的奇点为 3 阶极点 0, 因此

$$\mathrm{Res}[f(z),0] = \frac{1}{4!}\lim_{z\to 0}(1-\cos z)^{(4)} = -\frac{1}{24},$$

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\mathrm{Res}[f(z),0] = -\frac{\pi i}{12}.$$

(4) $\frac{1}{2}$ 为被积函数 $f(z)$ 的 9 阶极点, 因此

$$\mathrm{Res}[f(z),\frac{1}{2}] = \frac{1}{8!}\lim_{z\to\frac{1}{2}}[(z-2)^{-9}]^{(8)} = \frac{1}{8!}\lim_{z\to\frac{1}{2}}\frac{16!}{8!}(z-2)^{-17} = -\frac{16!}{8!^2}(\frac{2}{3})^{17}.$$

故

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\mathrm{Res}[f(z),\frac{1}{2}] = \frac{2^{18}16!\pi i}{3^{17}8!^2}.$$

■

作业 19. 函数 $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在 $z=1$ 处有一个二阶极点. 这个函数又有下列洛朗展开式

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \cdots + \frac{1}{(z-1)^5} - \frac{1}{(z-1)^4} + \frac{1}{(z-1)^3}, \quad |z-1|>1,$$

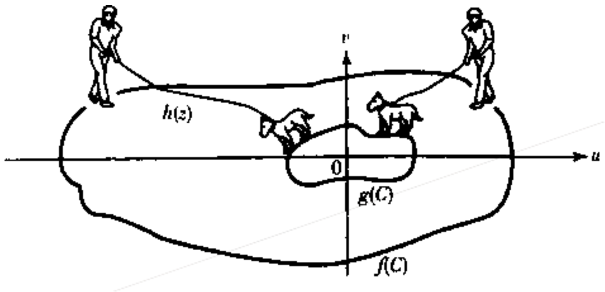
所以 “$z=1$ 又是 $f(z)$ 的本性奇点”. 又其中不含 $(z-1)^{-1}$ 幂, 因此 $\mathrm{Res}[f(z),1]=0$. 这些说法对吗?

解. 不对, 因为这个洛朗展开并不是在 1 的去心邻域内的洛朗展开. ■

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 20. 根据辐角原理和下图简要解释下为何路西定理是对的: 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在闭路 C 及其内部解析, 且在 C 上满足 $|f(z)| > |f(z) - g(z)|$, 那么在 C 内部 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的零点个数相同.



作业 21. 设函数 $f(z)$ 在扩充复平面上的奇点都是极点.

(1) 证明 $f(z)$ 只有有限多个奇点.

(2) 设 $f(z)$ 在复平面内的奇点为 $z_1, \ldots, z_n$, 其中 z_k 为 d_k 阶极点. 定义

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{d_k} f(z).$$

根据 $g(z)$ 在 0 和 ∞ 处的洛朗展开的特点证明 $g(z)$ 是一个多项式, 从而 $f(z)$ 是有理函数.

(3) 证明 $\sum\limits_{z \in \mathbb{C}^*} \operatorname{ord}(f, z) = 0$.