

---

# Kloosterman 和的生成域

---

张神星

第八届全国数论会议 江苏金坛

2021 年 6 月 30 日

# 指数和

设  $p$  是一个素数,  $\mathbb{F}_q$  是含有  $q = p^d$  个元素的有限域. 对于  $\mathbb{F}_q$  上的一元多项式  $f(x)$ , 定义**指数和**

$$S_1(f) := \sum_{x \in \mathbb{F}_q} \zeta_p^{\text{Tr}(f(x))} \in \mathbb{Z}[\zeta_p],$$

其中  $\text{Tr} = \text{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}$ ,  $\zeta_p \in \mu_p$  是一个选定的  $p$  次本原单位根.

我们要问:

- ① 作为一个复数,  $|S_1(f)| = ?$
- ② 作为一个  $p$  进数,  $|S_1(f)|_p = ?$
- ③ 作为一个代数 (整) 数,  $\deg S_1(f) = ?$

# $L$ 函数

前两个问题已经有相当多的文献中研究过, 包括本次会议也有关于指数和的估计的报告. 我们简要回顾下指数和的基本性质.

定义  $f$  的  $L$  函数为

$$L(t, f) := \prod_{x \in \overline{\mathbb{F}_p}} \left( 1 - \text{Tr}_{\mathbb{F}_q(x)/\mathbb{F}_p}(f(x)) t^{\deg x} \right)^{-1} = \exp \left( \sum_k S_k(f) \frac{t^k}{k} \right)$$

其中  $S_k(f) := \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^k}} \zeta_p^{\text{Tr}(f(x))} \in \mathbb{Z}[\zeta_p]$ .

**定理 (Dwork-Bombieri-Grothendick)**

$L(t, f)$  是有理函数.

$\ell$  进层

记

$$L(t, f) = \frac{\prod_j (1 - \beta_j t)}{\prod_i (1 - \alpha_i t)}, \quad \alpha_i \neq \beta_j,$$

则

$$S_k(f) = \sum_i \alpha_i^k - \sum_j \beta_j^k.$$

我们称  $\alpha_i, \beta_j$  为**特征根**. 为了估计特征根, 我们需要  $\ell$  进方法.

一般地, 设  $X$  是一个概形,  $X_{\text{ét}}$  是 (小) étale site. 固定素数  $\ell \neq p$ , 设  $E$  是  $\mathbb{Q}_\ell$  的有限扩张.  $X_{\text{ét}}$  上系数为  $E$  的  $\ell$  **进层** 是这个 site 上的层 (实际上是  $\mathcal{O}_E$  有限商上的模层的逆向系, 态射扩充至  $E$ ), 使得在每个有限商上是可构造的. 若在每个有限商上是局部常值的, 则称之为 **lisse** 的.

# Swan 导子

为了刻画 lisse 层的一些性质, 我们需要 Swan 导子的概念. 设  $K$  是完备离散赋值域,  $I^{(x)}, x \geq 0$  为其高阶分歧群. 对于分歧群  $P$  的  $E$  表示  $M$ , 我们有满足如下性质的分解  $M = \bigoplus M(x)$ ,

$$M(0) = M^P, \quad M(x)^{I^{(x)}} = 0, \quad M(x)^{I^{(y)}} = M(x), \quad y > x > 0.$$

称  $M(x) \neq 0$  的  $x$  为  $M$  的断点. 定义  $M$  的 Swan 导子为

$$\mathrm{Sw}(M) = \sum x \dim M(x).$$

它总是一个整数.

# 曲线

令  $C$  是特征  $p$  完全域  $\mathbb{F}$  上一射影光滑几何连通代数曲线,  $K = \mathbb{F}(C)$  为其函数域. 对于任意闭点  $x \in C(\mathbb{F})$ , 我们有完备化  $K_x$ .

对于非空开集  $U \subset C$ , 我们有阿贝尔范畴等价

$$\begin{aligned} \{U \text{ 上的 lisse } E \text{ 层}\} &\longrightarrow \operatorname{Rep}_E^c \pi_1(U, \bar{\eta}) \\ \mathcal{F} &\longmapsto \mathcal{F}_{\bar{\eta}}. \end{aligned}$$

由于基本群  $\pi_1(U, \bar{\eta})$  是伽罗瓦群  $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K)$  的商, 因此分解群  $D_x$  作用在  $\mathcal{F}_{\bar{\eta}}$  上. 于是我们可以定义  $\mathcal{F}$  在  $x$  处的 Swan 导子. 对于  $x \in U$ , 由于惯性群  $I_x$  作用平凡, 因此  $\operatorname{Sw}_x(\mathcal{F}) = 0$ .

我们将会取  $C = \mathbb{P}^1$  and  $U = \mathbb{G}_m$ .

# $\ell$ 进方法

假设  $\mu_p \subseteq E$ . Deligne 在  $\mathbb{G}_{a, \overline{\mathbb{F}}_p}$  上构造了一个局部自由秩 1 的  $\ell$  进层  $\mathcal{F}_\ell(f)$ , 它满足

$$L(t, f) = \prod_i \det(1 - t\text{Frob}, H_c^i)^{(-1)^{i+1}}$$

及由此

$$S_k(f) = \sum_i (-1)^i \text{Tr}(\text{Frob}^k, H_c^i).$$

这里  $\text{Frob}$  是几何 Frobenius,  $H_c^i = H_c^i(\mathbb{G}_{a, \overline{\mathbb{F}}_p}, \mathcal{F}_\ell(f))$  是紧支撑上同调.

$\ell$  进方法之续

记  $\omega_{ij}$  为 Frob 在  $H_c^i$  上的特征值, 则

$$S_k(f) = \sum_{ij} (-1)^i \omega_{ij}^k.$$

记  $B_i = \dim_E H_c^i$  为 Betti 数.

**定理 (Deligne)**

$\omega_{ij}$  是代数整数, 且存在整数  $0 \leq r_{ij} \leq i$  使得它的所有  $\mathbb{Q}$  共轭的绝对值均为  $q^{r_{ij}/2}$ .

由此

$$|S_k| \leq \sum_i B_i q^{ki/2}.$$



# 一般情形

更一般地, 设

- ①  $V$  是  $\mathbb{F}_q$  上  $\mathbb{A}^N$  的闭子簇,
- ②  $\psi$  是  $\mathbb{F}_q$  上非平凡加性特征,  $\psi_k := \psi \circ \text{Tr}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_q}$ ,
- ③  $f$  是  $V$  上定义在  $\mathbb{F}_q$  上的正则函数,
- ④  $\chi$  是  $\mathbb{F}_q^\times$  上乘性特征,  $\chi_k := \chi \circ \text{N}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_q}$ ,
- ⑤  $g$  是  $V$  上定义在  $\mathbb{F}_q$  上的可逆正则函数.

定义指数和

$$S_k = \sum_{x \in V(\mathbb{F}_{q^k})} \psi_k(f(x)) \chi_k(g(x)),$$

则前面的方法仍然是有效的. 这时候, Bombieri 证明了特征根个数不超过

$$(4 \max \{ \deg V + 1, \deg f \} + 5)^{2N+1}.$$

# Kloosterman 和

取

$$V = V(X_1 \cdots X_n - a), \quad f = X_1 + \cdots + X_n.$$

设  $\chi = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$  是无序的  $n$  个乘性特征  $\chi_i: \mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mu_{q-1}$ . 定义  
Kloosterman 和

$$\text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a) = \sum_{\substack{x_1 \cdots x_n = a \\ x_i \in \mathbb{F}_q}} \chi_1(x_1) \cdots \chi_n(x_n) \psi(\text{Tr}_{\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p}(x_1 + \cdots + x_n)).$$

此时特征根个数为  $n$  个. 因此  $|\text{Kl}_n| \leq nq^{(n-1)/2}$ .

# 伽罗瓦作用

但我们并不是想要对其大小进行估计, 而是想要知道第三个问题的答案, 即它生成的数域是哪个. 显然  $\text{Kl}_n \in \mathbb{Z}[\mu_{pc}]$ , 其中  $c = \text{lcm}_i \{\text{ord}(\chi_i)\}$  整除  $q-1$ . 我们将伽罗瓦群表示为

$$\text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{pc})/\mathbb{Q}) = \{ \sigma_t \tau_w \mid t \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times, w \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times \},$$

其中

$$\begin{aligned} \sigma_t(\zeta_p) &= \zeta_p^t, & \sigma_t(\zeta_c) &= \zeta_c, \\ \tau_w(\zeta_p) &= \zeta_p, & \tau_w(\zeta_c) &= \zeta_c^w. \end{aligned}$$

容易看出

$$\sigma_t \tau_w \text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a) = \prod \chi(t)^{-w} \text{Kl}_n(\psi, \chi^w, q, at^n).$$

因此我们需要研究两个 Kloosterman 和何时相差一个  $(q-1)$  次单位根.

# 平凡特征

若  $\chi = 1 = \{1, \dots, 1\}$  均为平凡特征, 则易知

$$a, b \text{ 共轭} \implies \text{Kl}_n(\psi, \mathbf{1}, q, a) = \text{Kl}_n(\psi, \mathbf{1}, q, b).$$

当  $p > (2n^{2d} + 1)^2$  (Fisher), 或  $p \geq (d-1)n + 2$  且  $p$  不整除一个特定整数 (万大庆) 时, 反过来也是成立的. 一般猜测  $p \geq nd$  就足够了. 在这些情形下,

$$\deg \text{Kl}_n(\psi, \mathbf{1}, q, a) = \frac{p-1}{(p-1, n)}.$$

# Kloosterman 层

Deligne 和 Katz 在  $\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_q$  上定义了一个 lisse 层

$$\mathcal{Kl} = \mathcal{Kl}_{n,q}(\psi, \chi),$$

它满足如下性质

- ①  $\mathcal{Kl}$  秩为  $n$ , 权为纯  $n-1$ .
- ② 对任意  $a \in \mathbb{F}_q^\times$ ,  $\text{Tr}(\text{Frob}_a, \mathcal{Kl}_{\bar{a}}) = (-1)^{n-1} \mathcal{Kl}_n(\psi, \chi, q, a)$ .
- ③  $\mathcal{Kl}$  在 0 处温和 ( $\text{Sw}_0 = 0$ ).
- ④  $\mathcal{Kl}$  在  $\infty$  处完全野,  $\text{Swan}_\infty = 1$ . 于是它的  $\infty$  断点均为  $1/n$ .

# Fisher 的下降

Fisher 给了 Kloosterman 层沿着有限域的扩张的下降. 对于  $a \in \mathbb{F}_q^\times$ , 他定义了  $\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_p$  上的一个 lisse 层  $\mathcal{F}_a(\chi)$ , 使得

$$\mathcal{F}_a(\chi)|_{\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_q} = \bigotimes_{\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)} (t \mapsto \sigma(a)t^n)^* \text{Kl}_n(\psi \circ \sigma^{-1}, \chi \circ \sigma^{-1})$$

并满足

如下性质:

- ①  $\mathcal{F}_a(\chi)$  秩为  $n^d$ , 权为纯  $d(n-1)$ .
- ② 对任意  $t \in \mathbb{F}_p^\times$ ,  $\text{Tr}(\text{Frob}_t, \mathcal{F}_a(\chi)_{\bar{t}}) = (-1)^{(n-1)d} \text{Kl}_n(\psi, \chi, q, at^n)$ .
- ③  $\mathcal{F}_a(\chi)$  在 0 处温和.
- ④  $\mathcal{F}_a(\chi)$  的  $\infty$  断点均不超过 1.

# 关键的估计

## 引理

设  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$  是  $\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_p$  上秩均为  $r$ , 权均为纯  $w$  的 *lisse* 层. 假设存在单位根  $\lambda$  使得对任意  $t \in \mathbb{F}_p^\times$  有

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_t, \mathcal{F}_{\bar{t}}) = \lambda \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_t, \mathcal{F}'_{\bar{t}}).$$

设  $\mathcal{G}$  是  $\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_p$  上一几何不可约秩为  $s$ , 权为纯  $w$  的层, 使得  $\mathcal{G} \mid \mathbb{G}_m \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$  在  $\mathcal{F} \mid \mathbb{G}_m \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$  中恰好出现一次, 则它在  $\mathcal{F}' \mid \mathbb{G}_m \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$  中至少出现一次, 其中我们要求  $p > [2rs(M_0 + M_\infty) + 1]^2$ ,  $M_\eta$  是  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}'$  的最大  $\eta$  断点.

# 关键的估计之证明概述

反证法. 通过平移我们不妨设  $w = 0$ . 我们将 Lefschetz 迹公式应用到  $\mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{F}$  和  $\mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{F}'$  上,

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \text{Tr}(\text{Frob}, H_c^i(\mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{F})) = \lambda \sum_{i=0}^2 (-1)^i \text{Tr}(\text{Frob}, H_c^i(\mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{F}')).$$

我们有

$$H_c^0 = 0 = H_c^2(\mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{F}')$$

$H_c^2(\mathcal{G}^\vee \otimes \mathcal{F})$  为 1 维, 权为纯 2,  $H_c^1$  的权不超过 1 (Weil II). 结合 Euler-Poincaré 公式

$$h_c^0(\mathcal{F}) - h_c^1(\mathcal{F}) + h_c^2(\mathcal{F}) = -\text{Sw}_0(\mathcal{F}) - \text{Sw}_\infty(\mathcal{F})$$

我们可以得到  $p$  的估计.



# Kummer 诱导的

称  $\chi$  是 Kummer 诱导的, 若存在非平凡特征  $\Lambda$  使得作为无序数组  $\chi = \chi\Lambda := \{\chi_1\Lambda, \dots, \chi_n\Lambda\}$ . 此时,  $\prod \chi = \prod(\chi\Lambda) = \Lambda^n \prod \chi$ . 因此  $\Lambda^n = 1$ .

假设  $p > 2n + 1$  且  $\chi$  不是 Kummer 诱导的, 则  $\mathcal{F}_a(\chi)$  有一个重数为 1 的最高权. 考虑对应的李代数  $\mathfrak{g}(\mathcal{F}_a(\chi))$  表示, 它对应一个子层  $\mathcal{G}_a(\chi)$ . 而且这个子层是几何不可约的, 且在  $\mathcal{F}_a(\chi)|_{\mathbb{G}_m \otimes \overline{\mathbb{F}}_p}$  中只出现一次.

## 推论

## 推论

设  $a, b \in \mathbb{F}_q^\times$ ,  $\chi$  和  $\rho$  为乘性特征  $\chi_i, \rho_j: \mathbb{F}_q^\times \rightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$  构成的  $n$  元无序数组. 假设  $p > (2n^{2d} + 1)^2$ ,  $\chi$  不是 Kummer 诱导的, 且存在  $\lambda \in \mu_{q-1}$  使得

$$\mathrm{Kl}_n(\psi, \chi, q, a) = \lambda \mathrm{Kl}_n(\psi, \rho, q, b).$$

则  $\mathcal{G}_a(\chi) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\chi}} | \mathbb{G}_m \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$  在  $\mathcal{F}_b(\rho) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\rho}} | \mathbb{G}_m \otimes \bar{\mathbb{F}}_p$  中出现.

这里  $\mathcal{L}_\chi$  是  $\mathbb{G}_m \otimes \mathbb{F}_p$  上由 Lang torsor 定义的秩 1 lisse 层, 使得对任意  $t \in \mathbb{F}_p^\times$ ,

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}_t, (\mathcal{L}_\chi)_{\bar{t}}) = \chi(t).$$

# 推论的证明

令

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_a(\chi) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\chi}}, \quad \mathcal{F}' = \mathcal{F}_b(\rho) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\rho}}, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_a(\chi) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\chi}}.$$

由于对任意  $t \in \mathbb{F}_p^\times$ ,  $\sigma_t \lambda = \lambda$ , 因此

$$\begin{aligned} (-1)^{(n-1)d} \text{Tr}(\text{Frob}_t, \mathcal{F}_{\bar{t}}) &= \prod \bar{\chi}(t) \cdot \text{Kl}_n(\psi, \chi, q, at^n) \\ &= \sigma_t(\text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a)) = \lambda \sigma_t(\text{Kl}_n(\psi, \rho, q, b)) \\ &= \lambda \prod \bar{\rho}(t) \cdot \text{Kl}_n(\psi, \rho, q, bt^n) = (-1)^{(n-1)d} \lambda \text{Tr}(\text{Frob}_t, \mathcal{F}'_{\bar{t}}). \end{aligned}$$

应用前述引理即可, 其中  $r = s = n^d$ ,  $M_0 = 0$ ,  $M_\infty \leq 1$ .

# Kloosterman 和的不同

现在

$$\mathcal{G}_a(\chi) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\chi}} \hookrightarrow \mathcal{F}_b(\rho) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\rho}}, \quad \mathcal{G}_b(\rho) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\rho}} \hookrightarrow \mathcal{F}_a(\chi) \otimes \mathcal{L}_{\Pi \bar{\chi}}.$$

我们有最高权  $\lambda_a(\chi) = \lambda_b(\rho)$ . 由此, 通过 Fisher 的论述可得:

## 定理

设  $a, b \in \mathbb{F}_q^\times$ . 假设  $\chi, \rho$  不是 Kummer 诱导的且它们都不是  $(\xi_1, \xi_1^{-1}, 1, \Lambda_2)\xi_2$  型. 若  $p > (2n^{2d} + 1)^2$  以及存在  $\lambda \in \mu_{q-1}$  使得

$$\text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a) = \lambda \text{Kl}_n(\psi, \rho, q, b),$$

则存在  $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$  和乘性特征  $\eta$ , 使得  $\rho = \eta \cdot (\chi \circ \sigma^{-1})$  以及  $b = \sigma(a)$ . 更进一步, 要么两个 Kloosterman 和均为零, 要么  $\eta(b) = \lambda^{-1}$ .

# 非零性

最后一步我们需要证明 Kloosterman 和非零.

## 定理

若  $p > (3n-1)C_{\chi} - n$ , 且对任意  $i, j$ ,  $\chi_i = \chi_j$  或它们不相差一个  $n$  次 (未必本原) 特征, 则  $\text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a)$  非零. 其中

$$C_{\chi} = \max_{i,j} \text{lcm}(\text{ord}(\chi_i), \text{ord}(\chi_j)) \quad (1)$$

是任两个特征的阶的最小公倍数的最大值.

# 非零性的证明概述

通过  $\mathbb{F}_q^\times$  上的傅里叶变换, 我们可以将  $\text{Kl}_n$  表达为高斯和的组合

$$(q-1)\text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a) = \sum_{m=0}^{q-2} \omega^m(a) \prod_{i=1}^n g(m + s_i),$$

其中我们固定一个 Teichmüller 特征并记  $\chi_i = \omega^{s_i}$ . 通过小心的估计, 我们可以证明存在唯一的  $m$  使得  $\prod_{i=1}^n g(m + s_i)$  最小, 由此可知非零性.

对于平凡特征情形,  $m = 0$ .

## 生成域

## 定理

若  $p > \max \{ (2n^{2d} + 1)^2, (3n - 1)C_\chi - n \}$  且对任意  $i, j$ ,  $\chi_i = \chi_j$  或它们不相差一个  $n$  次特征, 则  $\text{Kl}_n(\psi, \chi, q, a)$  生成  $\mathbb{Q}(\mu_{pc})^H$ , 其中  $H$  包含的  $\sigma_t \tau_w$  满足: 存在整数  $\beta$  和特征  $\eta$  使得

$$t = \lambda a_1^\beta, \lambda^{n_1} = 1, \chi^w = \eta \chi^{q_1^\beta}, \eta(a) = \prod \chi^w(t).$$

这里,  $n_1 = (n, p - 1)$ ,  $q_1 = \#\mathbb{F}_p(a^{(p-1)/n_1})$ ,  $a_1 \in \mathbb{F}_p^\times$  满足  $a_1^{n/n_1} = \mathbf{N}_{\mathbb{F}_{q_1}/\mathbb{F}_p}(a^{(1-p)/n_1}) = a^{(1-q_1)/n_1}$ .

# 例子: $n = 2$ 情形

设  $\chi = \{1, \chi\}$ , 其中乘性特征  $\chi$  的阶为  $c \neq 2$ . 若  $p > \max \{(2^{2d+1} + 1)^2, 5c - 2\}$ , 则  $\text{Kl}(\psi, \chi, p^d, a)$  生成  $\mathbb{Q}(\mu_{pc})^H$ , 其中

$$H = \begin{cases} \langle \tau_{q_1} \sigma_{a_1}, \sigma_{-1}, \tau_{-1} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = 1, \chi(a) = 1; \\ \langle \tau_{-q_1} \sigma_{a_1}, \sigma_{-1} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = 1, \chi(a) = \chi(a_1) = -1; \\ \langle \tau_{q_1^\alpha} \sigma_{a_1^\alpha}, \sigma_{-1} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = 1, \chi(a)^\alpha \neq 1; \\ \langle \tau_{q_1} \sigma_{-a_1}, \tau_{-1} \sigma_{-1} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = -1, \chi(a) = \chi(a_1) = -1; \\ \langle \tau_{q_1} \sigma_{a_1}, \tau_{-1} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = -1, \chi(a) = 1; \\ \langle \tau_{q_1} \sigma_{a_1}, \tau_{-1} \sigma_{-1} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = -1, \chi(a) = -1, \chi(a_1) = 1; \\ \langle \tau_{q_1^{\alpha/2}} \sigma_{-a_1^{\alpha/2}} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = -1, 2 \mid \alpha, \chi(a) \neq \pm 1; \\ \langle \tau_{q_1^\alpha} \sigma_{a_1^\alpha} \rangle, & \text{若 } \chi(-1) = -1, 2 \nmid \alpha, \chi(a) \neq \pm 1. \end{cases}$$

$q_1 = \#\mathbb{F}_p(a^{(1-p)/2})$ ,  $a_1 = a^{(1-q_1)/2}$ ,  $\alpha$  是  $\chi(a_1) \in \mu_{p-1}$  的阶.



# 注记

考虑 Kloosterman 和

$$S_k = \text{Kl}(\psi, \chi \circ \mathbf{N}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_q}, q^k, a).$$

若  $p > \max \{ (2n^{2dk} + 1)^2, (3n - 1)C_\chi - n \}$ , 则  $\mathbb{Q}(S_k) = \mathbb{Q}(\mu_{pc})^H$ , 其中  $H$  包含的  $\sigma_t \tau_w$  满足: 存在整数  $\beta$  和  $\mathbb{F}_q^\times$  上的特征  $\eta$  满足

$$t = \lambda a_1^\beta, \lambda^{n_1} = 1, \quad \chi^w = \eta \chi^{q_1^\beta}, \quad \eta(a) = \gamma \cdot \prod \chi^w(t), \gamma^k = 1.$$

于是  $\mathbb{Q}(S_k) = \mathbb{Q}(S_{k-c})$ , 因为  $\gamma^c = 1$ .

# 注记之续

由于  $L$  函数

$$L(T) = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k}{k} S_k \right)$$

是一个有理函数, 序列  $\{S_k\}_k$  是一个线性递推序列. 万大庆和尹航证明了存在  $N$  使得序列  $\{\mathbb{Q}(S_k)\}_{k \geq N}$  是周期的. 设  $r$  为其周期, 则

$p > \max \left\{ (2n^{2d(N+r)} + 1)^2, (3n - 1)C_\chi - n \right\}$  时,  $\mathbb{Q}(S_k)$  由前文所描述.

因此我们需要将下界  $(2n^{2d} + 1)^2$  缩小, 并需要对  $r$  和  $N$  进行尽可能小的估计. 我们 (大胆) 猜测下  $p > 3ndc$  时成立.

感谢各位的倾听!