合　肥　工　业　大　学　试　卷（A）

2021～2022 学年第 二 学期　课程代码 034Y01　课程名称 数学（下）　学分 5　课程性质:必修☑、选修 □ 限修 □考试形式:开卷 □ 闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿＿　考试日期 2022 年 6 月 18 日 8:00-10:00　命题教师 集体　系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿＿＿

一、填空题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。每小题需在答题纸上回答答案的化简形式。

1. 如果 $f(x)>0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=$＿＿＿＿＿＿.

2. 设 $y=\sin(x^2+1)$, 则 $dy=$＿＿＿＿＿＿.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2-1}+\frac{2}{n^2-2}+\cdots+\frac{n}{n^2-n}\right)=$＿＿＿＿＿＿.

4. 曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点 $(1,2\ln 2)$ 处的切线方程为＿＿＿＿＿＿.

5. 若 $e^{y-1}=1+xy$, 则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$＿＿＿＿＿＿.

6. 如果函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$, 且 $x=0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线, 那么 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)}=$＿＿＿＿.

二、选择题：本题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

7. 当 $x\to+\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 和(　)是等价无穷小.

   A. $\sin\frac{1}{x}$　　B. $\sin x$　　C. e^{-x}　　D. $e^{\frac{1}{x}}$

8. 若当 $x\to 0$ 时, $\arctan(e^x-1)\cdot(\cos x-1)$ 和 x^n 是同阶无穷小, 则 $n=$(　).

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

9. 设 $f(x)=\arctan\frac{1}{x(x-1)^2}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的(　).

   A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点

   C. 第二类间断　　D. 连续点

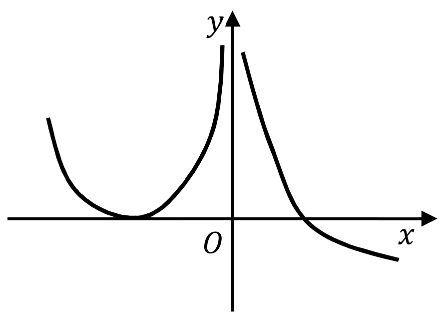
10. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数, 且 $f'(x)$ 的图像如下图所示, 则 $f(x)$ 有(　).

   A. 一个极大值点，没有极小值点

   B. 没有极大值点，一个极小值点

   C. 一个极大值点和一个极小值点

   D. 一个极大值点和两个极小值点



11. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x^{2022})+x^{2021}f(x)}{x^{2022}}=$(　).

   A. 0　　B. $f'(0)$　　C. $2f'(0)$　　D. $2022f'(0)$

12. 如果点 (x_0,y_0) 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点, 则 $f''(x_0)=$(　).

   A. 0　　B. ∞　　C. 不存在　　D. 0 或不存在

三、解答题：本题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分。每小题需在答题纸上列出过程和答案。

13. 求极限 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

14. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\arcsin x^2}$.

15. 设 $\begin{cases}x=t^2+t\\ y=t^3+t\end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

16. 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\frac{1}{x}, & x<0,\\ x^2+ax+b, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求常数 a,b 使得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 并求出此时曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

17. 求函数 $f(x)=x^3-x^2-x$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值和最小值.

18. 证明: 当 $-\frac{\pi}{2}<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x_2-\tan x_1\geqslant x_2-x_1$.

19. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且 $f(1)=0$.

   证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $\xi f'(\xi)+2022f(\xi)=0$.

20. 设函数 $f(x)=\ln x+\frac{2}{x^2}, x\in(0,+\infty)$. 求

   （1）函数 $f(x)$ 的增减区间及极值;

   （2）曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间及拐点.

合 肥 工 业 大 学 考 试 专 用 答 卷 纸（A）

2021～2022 学年第_二_学期 课程代码_034Y01_ 课程名称__数学（下）__ 命题教师 _集体__ 系主任审批 ______

教学班级________ 学生姓名________ 学号________ 考试日期 _2022 年 6 月 18 日 8:00-10:00_ 成绩 ________

考生注意事项：

1、本试卷分试题与答卷两部分；
2、所有试题的解答（包括选择、填空）必须写在专用答卷纸上，在试题上直接作答一律无效；
3、考试结束后，必须将试题、答卷整理上交，不得将试题带离考场；
4、考生务必认真填写班级、姓名、学号等信息。

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

得分	阅卷人

请将你的答案对应填在横线上：

1、__e__， 2、_$2x\cos(x^2+1)\,dx$_， 3、_$1/2$_，

4、_$y=x-1+2\ln 2$_，5、__1__，6、__0__.

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

得分	阅卷人

请将你所选择的字母 A,B,C,D 之一对应填在下列表格里：

题号	7	8	9	10	11	12
答案	A	D	B	A	C	D

三、解答题（每小题 8 分，共 64 分）

得分	阅卷人

13、（8 分）【解】

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x+2}=\frac{-2}{1}=-2.$$

14、（8 分）【解】

得分	阅卷人

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\arcsin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\text{洛必达}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

15、（8 分）【解】

得分	阅卷人

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2+1}{2t+1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy'/dt}{dx/dt}=\frac{6t(2t+1)-(3t^2+1)2}{(2t+1)^3}=\frac{6t^2+6t-2}{(2t+1)^3}.$$

合 肥 工 业 大 学 考 试 专 用 答 卷 纸（A）

2021～2022 学年第_二_学期 课程代码_034Y01_ 课程名称__数学（下）__ 命题教师 _集体_ 系主任审批 ________

教学班级__________ 学生姓名__________ 学号__________ 考试日期 _2022 年 6 月 18 日 8:00-10:00_ 成绩 __________

16、（8 分）【解】

得分	阅卷人

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，因此

$f(0)=f(0^+)=b=\lim\limits_{x\to0^-}x\arctan\frac{1}{x}=0\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0.$

由于 $f'_+(0)=(2x+a)\,|_{x=0}=a, f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x\arctan\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$,因此 $a=-\frac{\pi}{2}$.

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan\frac{1}{x}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}x\arctan\frac{1}{x}=\lim\limits_{t\to0^-}\frac{\arctan t}{t}=1,$

因此曲线 $y=f(x)$ 的渐近线只有 $y=1$.

17、（8 分）【解】

得分	阅卷人

由 $f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)=0$ 可得驻点 $x=-\frac{1}{3},1$.

由于 $f(-2)=-10, f(2)=2, f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{27}, f(1)=-1$,因此最大值为 2,最小值为 -10.

18、（8 分）【解】

得分	阅卷人

设 $f(x)=\tan x-x$,则 $f'(x)=\frac{1}{\cos^2x}-1=\tan^2x\geqslant0$.

因此 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，从而

$f(x_2)\geqslant f(x_1),\quad \tan x_2-\tan x_1\geqslant x_2-x_1.$

设 $f(x)=\tan x$，则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续，(x_1,x_2) 内可导.
由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得
$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)$,即 $\frac{\tan x_2-\tan x_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{\cos^2\xi}\geqslant1$. 所以
$\tan x_2-\tan x_1\geqslant x_2-x_1$.

19、（8 分）【解】

得分	阅卷人

设 $F(x)=x^{2022}f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=0, F(1)=f(1)=0$.
由罗尔中值定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$.
由于 $F'(x)=x^{2022}f'(x)+2022x^{2021}f(x)$ 且 $\xi\neq0$，所以
$\xi f'(\xi)+2022f(\xi)=1$.

20、（8 分）【解】

得分	阅卷人

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}=\frac{x^2-4}{x^3}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^3}.$$

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$. 当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$.
因此 $(0,2]$ 是 $f(x)$ 的单减区间，$[2,+\infty)$ 是 $f(x)$ 的单增区间.
所以 $f(x)$ 只有唯一的极小值 $f(2)=\ln2+\frac{1}{2}$.

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{12}{x^4}=-\frac{x^2-12}{x^4}=-\frac{(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{x^4}.$$

当 $0<x<2\sqrt{3}$ 时，$f''(x)>0$. 当 $x>2\sqrt{3}$ 时，$f''(x)<0$.

因此 $(0,2\sqrt{3}]$ 是曲线 $y=f(x)$ 的凹区间，$[2\sqrt{3},+\infty)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的凸区间，拐点为 $\left(2\sqrt{3},\ln(2\sqrt{3})+\frac{1}{6}\right)$.