复变函数与积分变换

张神星

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

zhangshenxing@hfut.edu.cn

第三章　复变函数的积分

本章作业

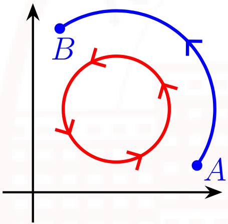
- **1**, **4**, **6**(1)(3)(5)
- **7**(1)(2)(5)(9), **8**(1)(3)(5), **9**(1)(3)(4)
- **15**, **17**, **23**,
- **26**, **28**, **30**(1)(2)

有向曲线

设 C 是平面上一条光滑或逐段光滑的连续曲线, 也就是说 $z(t), a \leqslant t \leqslant b$ 除去有限个点之外都有非零导数.

固定它的一个方向, 称为正方向, 则我们得到一条有向曲线. 和这条曲线方向相反的记作 C^-, 它的方向被称为该曲线负方向.

对于闭路, 它的正方向总是指逆时针方向, 负方向总是指顺时针方向. 以后我们不加说明的话默认是正方向.



所谓的复变函数积分, 本质上仍然是第二类曲线积分. 设复变函数 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 定义在区域 D 内, 有向曲线 C 包含在 D 中. 形式地展开

$$f(z)\,\mathrm{d}z=(u+iv)(\,\mathrm{d}x+i\,\mathrm{d}y)=(u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y)+i(u\,\mathrm{d}y+v\,\mathrm{d}x).$$

定义

如果下述右侧两个线积分均存在, 则定义

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_C(u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y)+i\int_C(v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y)$$

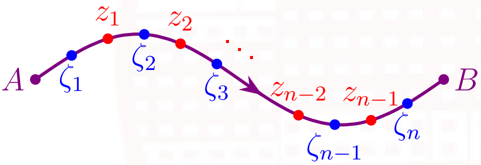
为**函数 $f(z)$ 沿曲线 C 的积分**.

复变函数积分的定义

当然, 我们也可以像线积分那样直接定义. 在曲线 C 上依次选择分点 $z_0 = A, z_1, \dots, z_n = B$. 然后在每一段弧上任取 $\zeta_k \in \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ 并作和式

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

然后称 $n \to \infty$, 分割的弧长 $\to 0$ 时 S_n 的极限为复变函数积分. 这二者是等价的.



复变函数积分的定义

如果 C 是闭曲线, 则该积分记为 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$. 此时该积分不依赖端点的选取.

如果 C 是实轴上的区间 $[a, b]$ 且此时 $f(z) = u(x)$, 则

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$$

就是黎曼积分.

根据线积分的存在性条件可知:

定理

如果 $f(z)$ 是 D 内连续函数, C 是光滑曲线, 则 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 总存在.

在计算线积分时, 我们可以利用变量替换等技巧. 这些技巧可以照搬过来使用. 设 $C: z(t) = x(t) + iy(t), a \leqslant t \leqslant b$ 是一条光滑有向曲线, 正方向为 t 增加的方向. 那么 $\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t$,

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b f(z)z'(t)\,\mathrm{d}t.$$

如果 C 的正方向是 t 减少的方向, 则需要交换右侧积分的上下限.

如果 C 是逐段光滑的, 则相应的积分就是各段的积分之和. 以后我们只考虑逐段光滑曲线上的连续函数的积分.

典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

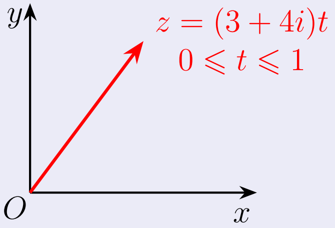
例

求 $\int_C z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 $3+4i$ 的直线段.

解.

由于 $z=(3+4i)t, 0\leqslant t\leqslant 1$, 因此

$$\begin{aligned}\int_C z\,\mathrm{d}z &= \int_0^1 (3+4i)t\cdot(3+4i)\,\mathrm{d}t\\ &= (3+4i)^2\int_0^1 t\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}(3+4i)^2 = -\frac{7}{2}+12i.\end{aligned}$$



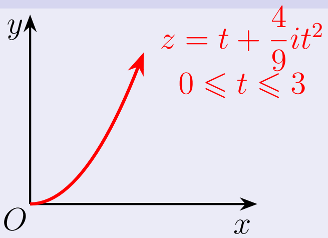
典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

例

求 $\displaystyle\int_C z\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是抛物线 $y=\dfrac{4}{9}x^2$ 上从原点到点 $3+4i$ 的曲线段.

解.

由于 $z=t+\dfrac{4}{9}it^2, 0\leqslant t\leqslant 3$, 因此



$$\begin{aligned}\int_C z\,\mathrm{d}z &= \int_0^3 \left(t+\frac{4}{9}it^2\right)\cdot\left(1+\frac{8}{9}it\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^3 \left(t+\frac{4}{3}it^2-\frac{32}{81}t^3\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \left(\frac{1}{2}t^2+\frac{4}{9}it^3-\frac{8}{81}t^4\right)\bigg|_0^3 = -\frac{7}{2}+12i.\end{aligned}$$

典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

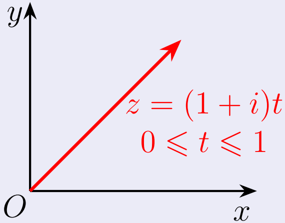
例

求 $\int_C \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 $1+i$ 的直线段.

解.

由于 $z=(1+i)t, 0 \leqslant t \leqslant 1$, 因此 $\operatorname{Re} z = t$,

$$\begin{aligned}\int_C \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 t\cdot(1+i)\,\mathrm{d}t \\ &= (1+i)\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1+i}{2}.\end{aligned}$$



典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

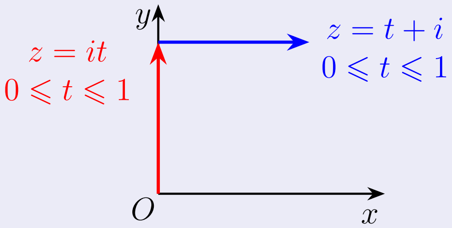
例

求 $\displaystyle\int_C \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点到点 i 再到 $1+i$ 的折线段.

解.

由于第一段 $z=it, 0\leqslant t\leqslant 1, \operatorname{Re} z=0$, 第二段 $z=t+i$, $0\leqslant t\leqslant 1$, $\operatorname{Re} z=t$. 因此

$$\int_C \operatorname{Re} z \,\mathrm{d}z=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

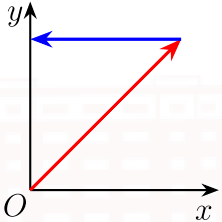


典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分

可以看出, 即便起点和终点相同, 沿不同路径 $f(z) = \operatorname{Re} z$ 的积分也可能不同. 而 $f(z) = z$ 的积分则只和起点和终点位置有关, 与路径无关. 原因在于 $f(z) = z$ 是处处解析的, 我们以后会详加解释.

练习

求 $\int_C \operatorname{Im} z \, \mathrm{d}z$, 其中 C 是从原点沿 $y = x$ 到点 $1 + i$ 再到 i 的折线段.



答案.

$-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

例题: 计算复变函数沿圆周的积分

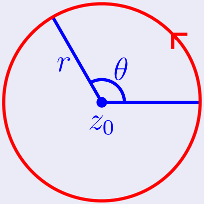
例

求 $\displaystyle\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}}$, 其中 n 为整数.

解.

$C: |z-z_0| = r$ 的参数方程为 $z = z_0 + re^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. 于是 $\mathrm{d}z = ire^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$,

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} i(re^{i\theta})^{-n}\,\mathrm{d}\theta = ir^{-n}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$



例题: 计算复变函数沿圆周的积分

续解.

当 $n=0$ 时, $\oint_C \dfrac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = 2\pi i.$

当 $n \neq 0$ 时,

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = ir^{-n}\int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i\sin n\theta)\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

所以

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

这个积分以后经常用到, 它的特点是与积分圆周的圆心和半径都无关.

定理

1. $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\,\mathrm{d}z.$
2. $\displaystyle\int_C kf(z)\,\mathrm{d}z = k\int_C f(z)\,\mathrm{d}z.$
3. $\displaystyle\int_C [f(z)\pm g(z)]\,\mathrm{d}z = \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \pm \int_C g(z)\,\mathrm{d}z.$
4. (长大不等式) 设 C 的长度为 L, $f(z)$ 在 C 上满足 $|f(z)|\leqslant M$, 则

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \leqslant ML.$$

积分的性质

证明.

我们来证明下 4 . 由

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)\Delta z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)|\Delta s_k \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k$$

可知

$$\left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\,\mathrm{d}s \leqslant ML.$$

■

长大不等式常常用于估算一个积分和一个具体的数值之差不超过任意给定的 ε, 从而得到二者相等.

例题: 长大不等式的应用 *

例

设 $f(z)$ 在 $z \neq a$ 处连续, 且 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=k$, 则

$$\lim_{r\to 0}\oint_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i k.$$

证明.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z-a| < \delta$ 时, $|(z-a)f(z)-k| \leqslant \varepsilon$. 当 $0 < r < \delta$ 时,

$$\left|\oint_{|z-a|=r} f(z)\,\mathrm{d}z - 2\pi i k\right| = \left|\oint_{|z-a|=r}\left[f(z)-\frac{k}{z-a}\right]\mathrm{d}z\right|$$

$$= \left|\oint_{|z-a|=r}\frac{(z-a)f(z)-k}{z-a}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r = 2\pi\varepsilon.$$

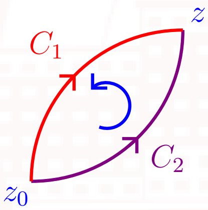
由于 ε 是任意的, 因此命题得证. ■

观察下方的两条曲线 C_1, C_2. 设 $C = C_1^- + C_2$. 可以看出

$$\int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \iff$$

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

所以 $f(z)$ 的积分只和起点和终点有关 $\iff$ $f(z)$ 绕任意闭路的积分为零.



上一节中我们计算了 $f(z)=z, \operatorname{Re} z, \dfrac{1}{z-z_0}$ 的积分. 其中

- $f(z)=z$ 沿任意闭路积分是 0;
- $f(z)=\dfrac{1}{z-z_0}$ 沿绕 z_0 闭路的积分非零;
- $f(z)=\operatorname{Re} z$ 积分也与路径有关.

由此可见函数沿闭路积分为零, 与函数在闭路内部是否解析有关.

设 C 是一条闭路, D 是其内部区域. 设 $f(z)$ 在闭区域 $\overline{D}=D\cup C$ 上解析, 即存在区域 $B\supseteq\overline{D}$ 使得 $f(z)$ 在 B 上解析. 为了简便假设 $f'(z)$ 连续, 则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=\oint_C(u\,\mathrm{d}x-v\,\mathrm{d}y)+i\oint_C(v\,\mathrm{d}x+u\,\mathrm{d}y).$$

由格林公式和 C-R 方程可知

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=-\iint_D(v_x+u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+i\iint_D(u_x-v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

柯西-古萨基本定理

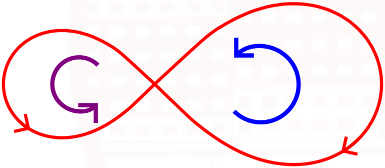
柯西-古萨基本定理

设 $f(z)$ 在闭路 C 上连续, C 内部解析, 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

推论

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条闭合曲线 (可以不是闭路), 则 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

这是因为即使不是简单曲线也可以拆分为一些简单曲线.



典型例题: 柯西-古萨基本定理计算积分

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{1}{2z-3}\,\mathrm{d}z.$

解.

由于 $\dfrac{1}{2z-3}$ 在 $|z|\leqslant 1$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理

$$\oint_{|z|=1}\frac{1}{2z-3}\,\mathrm{d}z=0.$$

练习

求 $\displaystyle\oint_{|z-2|=1}\frac{1}{z^2+z}\,\mathrm{d}z.$

答案.

0.

例题: 柯西-古萨基本定理计算积分

例

求 $\displaystyle\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z.$

解.

注意到 $\dfrac{1}{z(z^2+1)} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z+i} + \dfrac{1}{z-i}\right)$. 由于 $\dfrac{1}{z}, \dfrac{1}{z+i}$ 在 $|z-i| \leqslant \dfrac{1}{2}$ 上解析, 因此由柯西-古萨基本定理

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+i}\,\mathrm{d}z = 0,$$

$$\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z(z^2+1)}\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{2}\oint_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z = -\pi i.$$

解析函数绕闭路的积分一般用留数定理算，本例只作为柯西-古萨基本定理的一个应用.

当 $f(z)$ 不解析, 但 u, v 均可微时, 我们也可以利用格林公式计算闭路上的积分. 例如

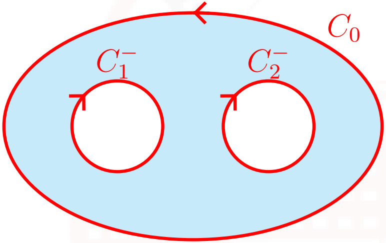
$$f(z) = \operatorname{Re} z = x, \quad C : |z| = 1, D : |z| < 1,$$

则

$$v_x + u_y = 0, \quad u_x - v_y = 1,$$

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= -\iint_{|z|<1} (v_x + u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\iint_{|z|<1} (u_x - v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= i\iint_{|z|<1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi i. \end{aligned}$$

设 $C_0, C_1, \ldots, C_n$ 是 $n+1$ 条简单闭曲线, 且 $C_1, \ldots, C_n$ 每一条都包含在其它闭路的外部, 而且它们都包含在 C_0 的内部. 这样它们围成了一个多连通区域 D, 它的边界称为一个复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$. 沿着 C 前进的点, D 总在它的左侧, 所以这就是它的正方向.



复合闭路定理

设 $f(z)$ 在复合闭路 $C = C_0 + C_1^- + \cdots + C_n^-$ 及其所围成的多连通区域内解析，则

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \cdots + \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

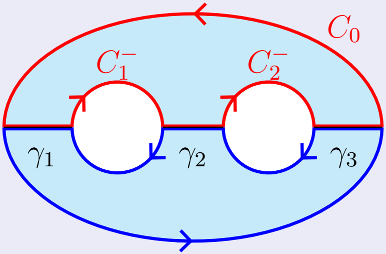
复合闭路定理

证明.

以曲线 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n+1}$ 把 $C_0, C_1, \ldots, C_n$ 连接起来, 则它们把区域 D 分成了两个单连通域 D_1, D_2. 对 D_1 和 D_2 的边界应用柯西积分定理并相加, 则 γ_i 对应的部分正好相互抵消, 因此

$$\oint_{C_0} f(z)\,\mathrm{d}z - \oint_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \cdots - \oint_{C_n} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

于是定理得证. ■



例题: 复合闭路定理的应用

例

证明对于任意闭路 C, $\int_C (z-a)^n \, \mathrm{d}z = 0$, $n \neq -1$ 为整数.

证明.

当 $n \geqslant 0$ 时, $(z-a)^n$ 处处解析, 因此 $\int_C (z-a)^n \, \mathrm{d}z = 0$.

当 $n \leqslant -2$ 时, 如果 a 不在 C 的内部, 则 $(z-a)^n$ 在 C 及其内部解析. 由柯西积分定理, $\int_C (z-a)^n \, \mathrm{d}z = 0$. 如果 a 在 C 的内部, 则在 C 的内部取一个以 a 为圆心的圆周 C_1. 由复合闭路定理以及上一节的结论

$$\int_C (z-a)^n \, \mathrm{d}z = \int_{C_1} (z-a)^n \, \mathrm{d}z = 0.$$

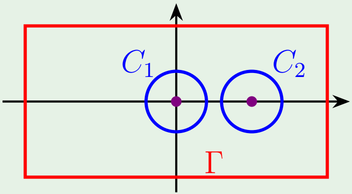
■

同理可知, 当 a 在 C 的内部时,

$$\int_C \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i.$$

例

求 $\int_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$, 其中 Γ 是由 $2\pm i, -2\pm i$ 形成的矩形闭路.



例题: 复合闭路定理的应用

解.

函数 $\dfrac{2z-1}{z^2-z}$ 在 Γ 内有两个奇点 $z=0,1$. 设 C_1, C_2 如图所示, 由复合闭路定理

$$\oint_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{2z-1}{z^2-z}\,\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{C_1} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_1} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z$$

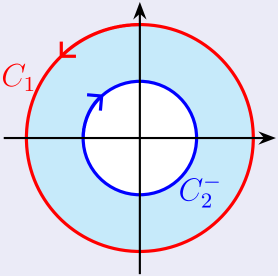
$$= 2\pi i + 0 + 0 + 2\pi i = 4\pi i.$$

例

求 $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$, 其中 $\Gamma = C_1 + C_2^-, C_1 : |z| = 2, C_2 : |z| = 1.$

例题: 复合闭路定理的应用

解.



函数 $\dfrac{e^z}{z}$ 在 C_1, C_2 围城的圆环域内解析. 由复合闭路定理可知

$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z = 0.$$

原函数的存在性

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内解析, C 是 D 内一条起于 z_0 终于 z 的曲线. 由柯西-古萨基本定理可知, 积分 $\int_C f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ 与路径无关, 只与 z_0, z 有关. 因此我们也将其记为 $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$.

对于任意固定的 $z_0 \in D$, 函数

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

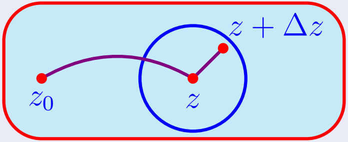
定义了一个单值函数.

定理

$F(z)$ 是 D 内的解析函数, 且 $F'(z) = f(z)$.

原函数的存在性

证明.



以 z 为中心作一包含在 D 内的圆 K, 取 $|\Delta z|$ 小于 K 的半径. 那么

$$F(z+\Delta z)-F(z)=\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta-\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta=\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta.$$

容易知道

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,\mathrm{d}\zeta=f(z)\int_{z}^{z+\Delta z}\mathrm{d}\zeta=f(z)\Delta z.$$

我们需要比较上述两个积分, 其中 z 到 $z+\Delta z$ 取直线.

原函数的存在性

续证.

由于 $f(z)$ 解析, 因此连续. $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 使得当 $|\zeta-z|<\delta$ 时, z 落在 K 中且 $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$. 当 $|\Delta z|<\delta$ 时, 由长大不等式

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}-f(z)\right| &= \left|\int_z^{z+\Delta z}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\Delta z}\,\mathrm{d}\zeta\right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\cdot|\Delta z| = \varepsilon.\end{aligned}$$

由于 ε 是任意的, 因此

$$f(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=F'(z).$$

■

如果 D 上的解析函数 $\varphi(z)$ 满足 $\varphi'(z)=f(z)$, 则称 $\varphi(z)$ 是 $f(z)$ 的一个原函数. 由 C-R 方程可知, 如果 $\varphi'(z)=0$, 则 $\varphi(z)$ 是常值函数. 因此 $f(z)$ 的原函数至多相差一个常数. 故 $f(z)$ 的原函数一定是

$$G(z)=\int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z+c.$$

我们称之为 $f(z)$ 的不定积分, 记为 $\int f(z)\,\mathrm{d}z$. 显然

$$\boxed{G(z_1)-G(z_2)=\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z.}$$

这就是单连通区域上解析函数的牛顿-莱布尼兹定理.

它和实变函数定积分的牛顿-莱布尼兹定理的差异在哪呢? 复变情形要求是单连通区域上解析函数, 实变情形要求是闭区间上连续函数.

典型例题: 利用原函数求积分

例

求 $\displaystyle\int_{z_0}^{z_1} z\,\mathrm{d}z.$

解.

由于 $f(z)=z$ 处处解析, 且 $\displaystyle\int z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2+c$, 因此

$$\int_{z_0}^{z_1} z\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}z^2\Big|_{z_0}^{z_1}=\frac{1}{2}(z_1^2-z_0^2).$$

因此之前的例子中 $\displaystyle\int_0^{3+4i} z\,\mathrm{d}z=-\frac{7}{2}+12i$, 而无论从 0 到 $3+4i$ 的路径如何.

典型例题: 利用原函数求积分

例

求 $\displaystyle\int_0^{\pi i} z\cos z^2\,\mathrm{d}z$.

解.

由于 $f(z)=z\cos z^2$ 处处解析, 且

$$\int z\cos z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int\cos z^2\,\mathrm{d}z^2=\frac{1}{2}\sin z^2+c,$$

因此

$$\int_0^{\pi i} z\cos z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\sin z^2\Big|_0^{\pi i}=-\frac{1}{2}\sin\pi^2.$$

这里我们使用了凑微分法.

例

求 $\displaystyle\int_0^i z\cos z\,\mathrm{d}z$.

解.

由于 $f(z)=z\cos z$ 处处解析, 且

$$\int z\cos z\,\mathrm{d}z=\int z\,\mathrm{d}(\sin z)=z\sin z-\int\sin z\,\mathrm{d}z$$
$$=z\sin z+\cos z+c,$$

因此

$$\int_0^i z\cos z\,\mathrm{d}z=(z\sin z+\cos z)\Big|_0^i$$
$$=i\sin i+\cos i-1=e^{-1}-1.$$

这里我们使用了分部积分法.

典型例题: 利用原函数求积分

例

求 $\displaystyle\int_1^{1+i} ze^z\,\mathrm{d}z$.

解.

由于 $f(z)=ze^z$ 处处解析, 且

$$\int ze^z\,\mathrm{d}z=\int z\,\mathrm{d}e^z=ze^z-\int e^z\,\mathrm{d}z=(z-1)e^z+c,$$

因此

$$\begin{aligned}\int_1^{1+i} ze^z\,\mathrm{d}z&=(z-1)e^z\Big|_1^{1+i}\\&=ie^{1+i}=e(-\sin 1+i\cos 1).\end{aligned}$$

典型例题: 利用原函数求积分

练习

求 $\int_0^1 z\sin z\,\mathrm{d}z$.

答案.

$\sin 1-\cos 1$.

例

设 C 为沿着 $|z|=1$ 从 1 到 i 的逆时针圆弧, 求 $\displaystyle\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z$.

典型例题: 利用原函数求积分

解.

函数 $f(z)=\dfrac{\ln(z+1)}{z+1}$ 在 $\operatorname{Re} z\leqslant -1$ 外的单连通区域解析.

$$\int \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z=\int \ln(z+1)\,\mathrm{d}[\ln(z+1)]=\frac{1}{2}\ln^2(z+1)+c.$$

因此

$$\int_C \frac{\ln(z+1)}{z+1}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\ln^2(z+1)\Big|_1^i=\frac{1}{2}\left[\ln^2(1+i)-\ln^2 2\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i\right)^2-\ln^2 2\right]=-\frac{\pi^2}{32}-\frac{3}{8}\ln^2 2+\frac{\pi\ln 2}{8}i.$$

典型例题: 利用原函数求积分

例

求 $\int_C (2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是连接 0 到 $2\pi a$ 的摆线

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1-\cos\theta), \end{cases} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

解.

由于 $f(z) = 2z^2+8z+1$ 处处解析, 因此

$$\int_C (2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi a} (2z^2+8z+1)\,\mathrm{d}z$$

$$= \left(\frac{2}{3}z^3+4z^2+z\right)\Bigg|_0^{2\pi a} = \frac{16}{3}\pi^3 a^3 + 16\pi^2 a^2 + 2\pi a.$$

柯西积分定理是解析函数理论的基础，但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式

设

- 函数 $f(z)$ 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析,
- $z_0 \in D$,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z.$$

如果 $z_0 \notin D$, 由柯西-古萨基本定理, 右侧的积分是 0.

1. 解析函数可以用一个积分

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta,\quad z\in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

2. 求积分 $\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z$ 时, 如果 $g(z)$ 在 C 内部只有一个奇点 z_0, 且 $g(z)(z-z_0)$ 解析, 那么我们就可以使用柯西积分公式来计算该积分.

3. 解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一.

   特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设 $z=z_0+Re^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=iRe^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+Re^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

柯西积分公式: 证明

证明.

由连续性可知, $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| < \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. 设 $\Gamma : |z - z_0| = r < \delta$. 由复合闭路定理和长大不等式

$$\begin{aligned}
&\left|\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0)\right| = \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0)\right| \\
={}& \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z - \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right| \\
\leqslant{}& \frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r = 2\pi\varepsilon.
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知 $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$. ■

典型例题: 柯西积分公式的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z.$

解.

由于函数 $\sin z$ 处处解析, 因此由柯西积分公式

$$\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sin z\big|_{z=0} = 0.$$

例题: 柯西积分公式的应用

例

求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\,\mathrm{d}z.$

解.

由于函数 e^z 处处解析, 因此由柯西积分公式

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i e^z\big|_{z=1} = 2\pi e i.$$

练习

求 $\oint_{|z|=2\pi} \frac{\cos z}{z-\pi}\,\mathrm{d}z.$

答案.

$-2\pi i.$

例题：柯西积分公式的应用

例

设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=\sqrt{3}}\dfrac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$，求 $f'(1+i)$.

解.

由柯西积分公式，当 $|z|<\sqrt{3}$ 时，

$$\begin{aligned} f(z) &= \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= 2\pi i(3\zeta^2+7\zeta+1)\big|_{\zeta=z} = 2\pi i(3z^2+7z+1). \end{aligned}$$

因此

$$f'(z) = 2\pi i(6z+7),$$

$$f'(1+i) = 2\pi i(13+6i) = -12\pi+26\pi i.$$

注意当 $|z|>\sqrt{3}$ 时，$f(z)\equiv 0$.

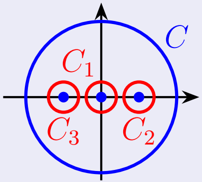
例题: 柯西积分公式的应用

例

求 $\oint_{|z|=3} \dfrac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z.$

解.

被积函数的奇点为 $0, \pm 1$. 设 C_1, C_2, C_3 分别为绕 $0, 1, -1$ 的分离圆周.



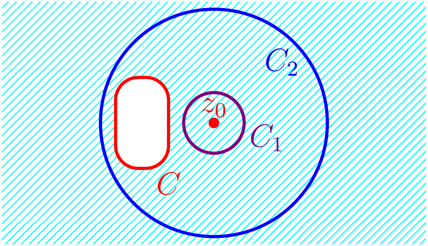
例题：柯西积分公式的应用

续解.

由复合闭路定理和柯西积分公式

$$
\begin{aligned}
\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z &= \oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi i \left[\left.\frac{e^z}{z^2-1}\right|_{z=0} + \left.\frac{e^z}{z(z+1)}\right|_{z=1} + \left.\frac{e^z}{z(z-1)}\right|_{z=-1} \right] \\
&= 2\pi i \left(-1 + \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = \pi i (e + e^{-1} - 2).
\end{aligned}
$$

典型例题: 计算复变函数沿曲线的积分



思考

对于闭路 C 的外部, 是否有类似的柯西积分公式?

答案.

这时候我们要求 $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$ 存在. 当 z_0 在 C 的外部时,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z-\oint_{C_1}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=f(\infty)-f(z_0).$$

其中 $\oint_{C_2}\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z=f(\infty)$ 可利用长大不等式证明.

高阶导数的柯西积分公式

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数存在任意阶解析的导数.

柯西积分公式

设函数 $f(z)$ 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析, 则对任意 $z_0 \in D$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z.$$

其中右侧被积函数可以记忆成公式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z$$

右侧被积函数对 z_0 求导 n 次得到.

证明.

先证明 $n=1$ 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离. 当 $|h|<\delta$ 时, $z_0+h\in D$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,$$

$$f(z_0+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0-h}\,\mathrm{d}z.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z.$$

当 $h\to 0$ 时, 左边的极限是 $f'(z_0)$. 因此我们只需要证明右边的极限等于 $\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z$.

高阶导数的柯西积分公式

续证.

二者之差 $= \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)| \leqslant M$. 注意到 $z \in C$, $|z-z_0| \geqslant \delta$, $|z-z_0-h| \geqslant \delta - |h|$. 由长大不等式,

$$\left|\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)}\cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h \to 0$ 时, 它的极限为 0, 因此 $n=1$ 情形得证.

对于一般的 n, 我们通过归纳法将 $f^{(n)}(z_0)$ 和 $f^{(n)}(z_0+h)$ 表达为积分形式. 然后利用长大不等式证明 $h \to 0$ 时,
$\dfrac{f^{(n)}(z_0+h)-f^{(n)}(z_0)}{h}$ 趋于积分公式右侧. 具体过程省略. ■

柯西积分公式的作用不在于计算高阶导数, 而是用高阶导数来计算积分.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z.$

解.

由于 $\cos(\pi z)$ 在 $|z|<2$ 处处解析, 因此由柯西积分公式,

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z &= \frac{2\pi i}{4!}[\cos(\pi z)]^{(4)}\Big|_{z=1}\\ &= \frac{2\pi i}{24}\cdot\pi^4\cos\pi = -\frac{\pi^5 i}{12}.\end{aligned}$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z.$

解.

$\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 $|z|<2$ 的奇点为 $z=\pm i$. 取 C_1, C_2 为以 $i, -i$ 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理,

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z.$$

续解.

由柯西积分公式,

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Big|_{z=i}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^z}{(z+i)^2} - \frac{2e^z}{(z+i)^3}\right]\Big|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i\pi}{2}.$$

类似地, $\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-(1+i)e^{-i}\pi}{2}$. 故

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{(1-i)e^i\pi}{2} + \frac{-(1+i)e^{-i}\pi}{2}$$

$$= \pi i(\sin 1 - \cos 1).$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\oint_{|z|=1} z^n e^z \,\mathrm{d}z$, 其中 n 是整数.

解.

当 $n \geqslant 0$ 时, $z^n e^z$ 处处解析. 由柯西-古萨基本定理, $\oint_{|z|=1} z^n e^z \,\mathrm{d}z = 0.$

当 $n \leqslant -1$ 时, e^z 处处解析. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(-n-1)!}(e^z)^{(-n-1)}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(-n-1)!}.$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} \, dz$ 和 $\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} \, dz$.

解.

(1) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-3|<2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3} \, dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{1}{z^3}\right)' \Bigg|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解.

(2) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-1|<3$ 的奇点为 $z=0,2$. 取 C_1,C_2 分别为以 0 和 2 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式,

$$\oint_{|z-1|=3}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right]''\Bigg|_{z=0}+\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z^3}\right)'\Bigg|_{z=2}=0.$$

练习

求 $\displaystyle\oint_{|z-2i|=3}\frac{1}{z^2(z-i)}\,\mathrm{d}z.$

答案.

0.

例题: 使用柯西积分公式证明莫累拉定理

例 (莫累拉定理)

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

该定理可视作柯西-古萨基本定理的逆定理.

证明.

由题设可知 $f(z)$ 的积分与路径无关. 固定的 $z_0 \in D$, 则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

定义了 D 内一个单值函数. 类似于原函数的证明可知 $F'(z) = f(z)$. 故 $f(z)$ 作为解析函数 $F(z)$ 的导数也是解析的. ∎

解析函数与实函数的差异

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数 $f(z)$ 只要在闭区域 $\overline{D}$ 中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在 $\overline{D}$ 中解析. 这一点与实变量函数有本质的区别.

同时我们也可以看出, 如果一个二元实函数 $u(x,y)$ 是一个解析函数的实部或虚部, 则 u 也是具有任意阶偏导数. 这便引出了调和函数的概念.

调和函数是一类重要的二元实变函数，它和解析函数有着紧密的联系．为了简便，我们用 u_{xx}, u_{yy} 来表示二阶偏导数．

定义

如果二元实变函数 $u(x,y)$ 在区域 D 内有二阶连续偏导数，且满足拉普拉斯方程

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

则称 $u(x,y)$ 是 D 内的**调和函数**．

解析函数与调和函数的联系

定理

区域 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部和虚部都是调和函数.

证明.

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, 则 u, v 存在偏导数且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_x.$$

由于 $f(z)$ 存在各阶导数, 因此 u_x, u_y, v_x, v_y 存在连续偏导数. 由 C-R 方程 $u_x = v_y, u_y = -v_x$, 从而

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0,$$

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0.$$

■

反过来, 调和函数是否一定是某个解析函数的实部或虚部呢? 对于单连通的情形, 答案是肯定的.

如果 $u+iv$ 是区域 D 内的解析函数, 则我们称 v 是 u 的共轭调和函数. 换言之 $u_x=v_y, u_y=-v_x$. 显然 $-u$ 是 v 的共轭调和函数.

定理

设 $u(x,y)$ 是单连通域 D 内的调和函数, 则线积分

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-u_y\,\mathrm{d}x+u_x\,\mathrm{d}y+C$$

是 u 的共轭调和函数.

由此可知, 调和函数总具有任意阶连续偏导数.

如果 D 是多连通区域, 则未必存在共轭调和函数. 例如 $\ln(x^2+y^2)$ 是复平面去掉原点上的调和函数, 但它并不是某个解析函数的实部. 事实上, 它是 $2\,\mathrm{Ln}\,z$ 的实部.

在实际计算中, 我们一般不用线积分来得到共轭调和函数, 而是采用下述两种办法:

1. 偏积分法: 通过 $v_y = u_x$ 解得 $v = \varphi(x, y) + \psi(x)$, 其中 $\psi(x)$ 待定. 再代入 $u_y = -v_x$ 中解出 $\psi(x)$.
2. 不定积分法: 对 $f'(z) = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ 求不定积分得到 $f(z)$.

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

例

证明 $u(x,y)=y^3-3x^2y$ 是调和函数, 并求其共轭调和函数以及由它们构成的解析函数.

解.

因为 $u_x=-6xy, u_y=3y^2-3x^2$, 所以

$$u_{xx}+u_{yy}=-6y+6y=0,$$

故 u 是调和函数.

由 $v_y=u_x=-6xy$ 得 $v=-3xy^2+\psi(x)$.

由 $v_x=-u_y=3x^2-3y^2$ 得 $\psi'(x)=3x^2$, $\psi(x)=x^3+C$.

续解.

故 $v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + C$,

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv = y^3 - 3x^2y + i(-3xy^2 + x^3 + C) \\ &= i(x+iy)^3 + iC = i(z^3 + C). \end{aligned}$$

或由

$$f'(z) = u_x - iu_y = -6xy - i(3y^2 - 3x^2) = 3iz^2$$

得 $f(z) = iz^3 + C$.

典型例题：求共轭调和函数和相应的解析函数

例

求解析函数 $f(z)$ 使得它的虚部为

$$v(x,y)=e^x(y\cos y+x\sin y)+x+y.$$

解.

由 $u_x=v_y=e^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)+1$ 得

$$u=e^x(x\cos y-y\sin y)+x+\psi(y).$$

由 $u_y=-v_x=-e^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)-1$ 得

$$\psi'(y)=-1,\quad \psi(y)=-y+C.$$

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

续解.

故

$$\begin{aligned} f(z) &= u + iv \\ &= e^x(x\cos y - y\sin y) + x - y + C \\ &\quad + i\Big[e^x(y\cos y + x\sin y) + x + y\Big] \\ &= ze^z + (1+i)z + C. \end{aligned}$$

或者由

$$\begin{aligned} f'(z) &= v_y + iv_x \\ &= e^x(\cos y - y\sin y + x\cos y) + 1 \\ &\quad + i\Big[e^x(y\cos y + x\sin y + \sin y) + 1\Big] \\ &= (z+1)e^z + 1 + i. \end{aligned}$$

得 $f(z) = ze^z + (1+i)z + C.$

典型例题: 求共轭调和函数和相应的解析函数

练习

证明 $u(x,y)=x^3-6x^2y-3xy^2+2y^3$ 是调和函数并求它的共轭调和函数.

答案.

$v(x,y)=2x^3+3x^2y-6xy^2-y^3+C.$