第一章 复数与复变函数

第一章 复数与复变函数

- 复数、实部、虚部、模、辐角、共轭复数
- 复平面、复球面、∞
- 复数的四则运算、乘幂、方根
- 区域、复变函数
- 复变函数的极限和连续性

本章作业

- **1, 5, 8**(1)(3)
- **12**(3)**, 13, 14**(1)(3)
- **21**(4)(7)**, 22**(5) (10)**, 27**(2)

1.1 复数及其代数运算

复数的引入

- 复数起源于多项式方程的求根问题.

复数的引入

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$,

复数的引入

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2+bx+c=0$, 由求根公式可知

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\qquad \text{其中 } \Delta=b^2-4c.$$

复数的引入

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$, 由求根公式可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad \text{其中 } \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当 $\Delta \geqslant 0$ 时, 有两个实根(计算重数);

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2+bx+c=0$, 由求根公式可知

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\qquad \text{其中 } \Delta=b^2-4c.$$

- (1) 当 $\Delta\geqslant 0$ 时, 有两个实根(计算重数);
- (2) 当 $\Delta<0$, 无实根.

复数的引入

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2+bx+c=0$, 由求根公式可知

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\qquad \text{其中 } \Delta=b^2-4c.$$

- (1) 当 $\Delta\geqslant 0$ 时, 有两个实根(计算重数);
- (2) 当 $\Delta<0$, 无实根.
- 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根,

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2+bx+c=0$, 由求根公式可知

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\qquad 其中\ \Delta=b^2-4c.$$

- (1) 当 $\Delta\geqslant 0$ 时, 有两个实根(计算重数);
- (2) 当 $\Delta<0$, 无实根.
- 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根, 形式地计算可以发现它们满足原来的方程.

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$,

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$, 我们也有求根公式

$$x = u + \frac{p}{u}, \qquad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \qquad \Delta = q^2 - p^3.$$

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3-3px-2q=0$, 我们也有求根公式

$$x=u+\frac{p}{u},\qquad u^3=q+\sqrt{\Delta},\qquad \Delta=q^2-p^3.$$

- (1) 当 $\Delta>0$, 有一个实根.

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3-3px-2q=0$, 我们也有求根公式

$$x=u+\frac{p}{u},\qquad u^3=q+\sqrt{\Delta},\qquad \Delta=q^2-p^3.$$

- (1) 当 $\Delta>0$, 有一个实根.
- (2) 当 $\Delta=0, x=2\sqrt[3]{q},-\sqrt[3]{q}(2\text{重})$.

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$, 我们也有求根公式

$$x = u + \frac{p}{u}, \qquad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \qquad \Delta = q^2 - p^3.$$

- (1) 当 $\Delta > 0$, 有一个实根.
- (2) 当 $\Delta = 0, x = 2\sqrt[3]{q}, -\sqrt[3]{q}(2\text{重})$.
- (3) 当 $\Delta < 0$, 看上去没有根, 实际上有3个实根.

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$, 我们也有求根公式

$$x = u + \frac{p}{u}, \qquad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \qquad \Delta = q^2 - p^3.$$

- (1) 当 $\Delta > 0$, 有一个实根.
- (2) 当 $\Delta = 0, x = 2\sqrt[3]{q}, -\sqrt[3]{q}(2\text{重})$.
- (3) 当 $\Delta < 0$, 看上去没有根, 实际上有3个实根. 这可以通过分析函数单调性得到.

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3-3px-2q=0$, 我们也有求根公式

$$x=u+\frac{p}{u},\qquad u^3=q+\sqrt{\Delta},\qquad \Delta=q^2-p^3.$$

- (1) 当 $\Delta>0$, 有一个实根.
- (2) 当 $\Delta=0, x=2\sqrt[3]{q},-\sqrt[3]{q}(2\text{重})$.
- (3) 当 $\Delta<0$, 看上去没有根, 实际上有3个实根. 这可以通过分析函数单调性得到.
- 但我们必须接受负数开方.

三次方程的根

- 尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

三次方程的根

- 尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

“圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚的 -1 的平方根。”

——Leibniz

- 例 $x^3 + 6x - 20 = 0$

三次方程的根

- 例 $x^3+6x-20=0$,

$$p=-2, q=10, \Delta=108>0,$$

三次方程的根

- 例 $x^3 + 6x - 20 = 0,$

$$p = -2, q = 10, \Delta = 108 > 0,$$

$$u = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = 1 + \sqrt{3},$$

- 例 $x^3 + 6x - 20 = 0$,

$$p = -2, q = 10, \Delta = 108 > 0,$$

$$u = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = 1 + \sqrt{3},$$

$$x = u - \frac{2}{u} = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2.$$

三次方程的根

- 例 $x^3 - 7x + 6 = 0$

- 例 $x^3 - 7x + 6 = 0$,

$$p = \frac{7}{3}, q = -3, \Delta = -\frac{100}{27} < 0,$$

- 例 $x^3 - 7x + 6 = 0$,

$$p = \frac{7}{3}, q = -3, \Delta = -\frac{100}{27} < 0,$$

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

- 例 $x^3 - 7x + 6 = 0$,

$$p = \frac{7}{3}, q = -3, \Delta = -\frac{100}{27} < 0,$$

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x = u + \frac{7}{3u} = 2, -3, 1.$$

- 例 $x^3-7x+6=0$,

$$p=\frac{7}{3},q=-3,\Delta=-\frac{100}{27}<0,$$

$$u=\sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x=u+\frac{7}{3u}=2,-3,1.$$

- 为什么这样做一定会得到三个实根?

三次方程的根

- 例 $x^3 - 7x + 6 = 0$,

$$p = \frac{7}{3}, q = -3, \Delta = -\frac{100}{27} < 0,$$

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x = u + \frac{7}{3u} = 2, -3, 1.$$

- 为什么这样做一定会得到三个实根? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答了.

定义

固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数,

定义

固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

定义

固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

- 换言之, 复数全体构成一个二维实线性空间, $\{1, i\}$ 是一组基.

定义

固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

- 换言之, 复数全体构成一个二维实线性空间, $\{1, i\}$ 是一组基.
- 将**全体复数集合记作** $\mathbb{C}$, 全体实数集合记作 $\mathbb{R}$, 则 $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.

复数的实部和虚部，虚数和纯虚数

定义

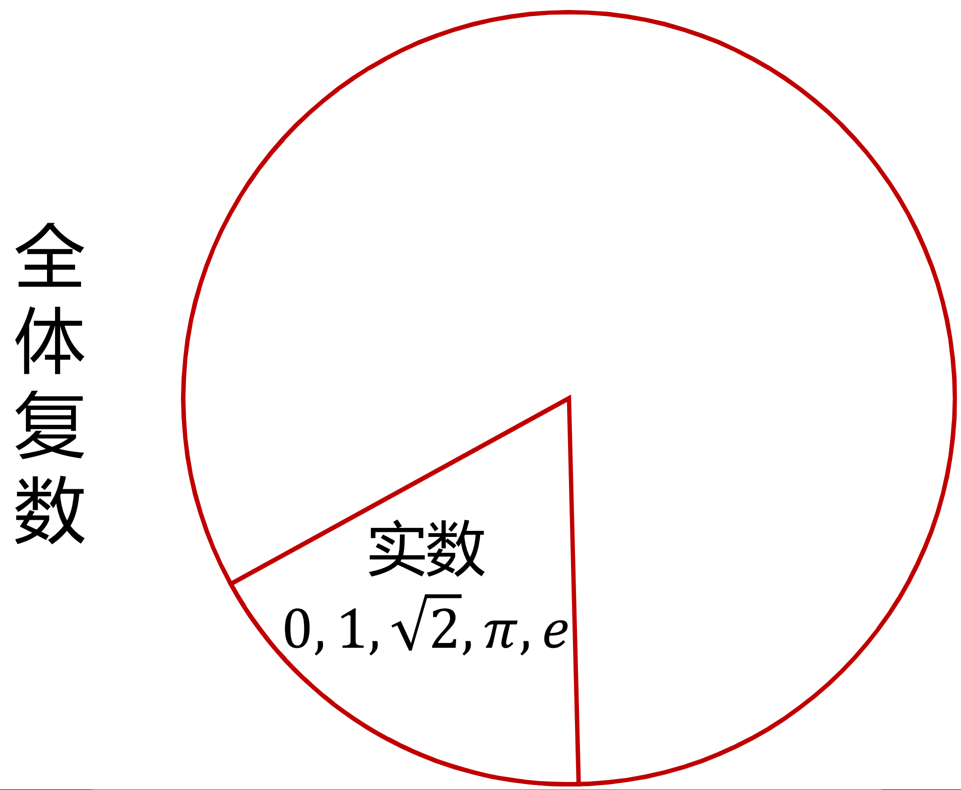
称复数 $z = x + yi$ 的**实部**为 $\mathbf{Re}\,z = x$, **虚部**为 $\mathbf{Im}\,z = y$.

复数的实部和虚部，虚数和纯虚数

定义

称复数 $z = x + yi$ 的**实部**为 $\mathbf{Re}\, z = x$，**虚部**为 $\mathbf{Im}\, z = y$.

- 当 $\mathrm{Im}\, z = 0$ 时，z 是实数.

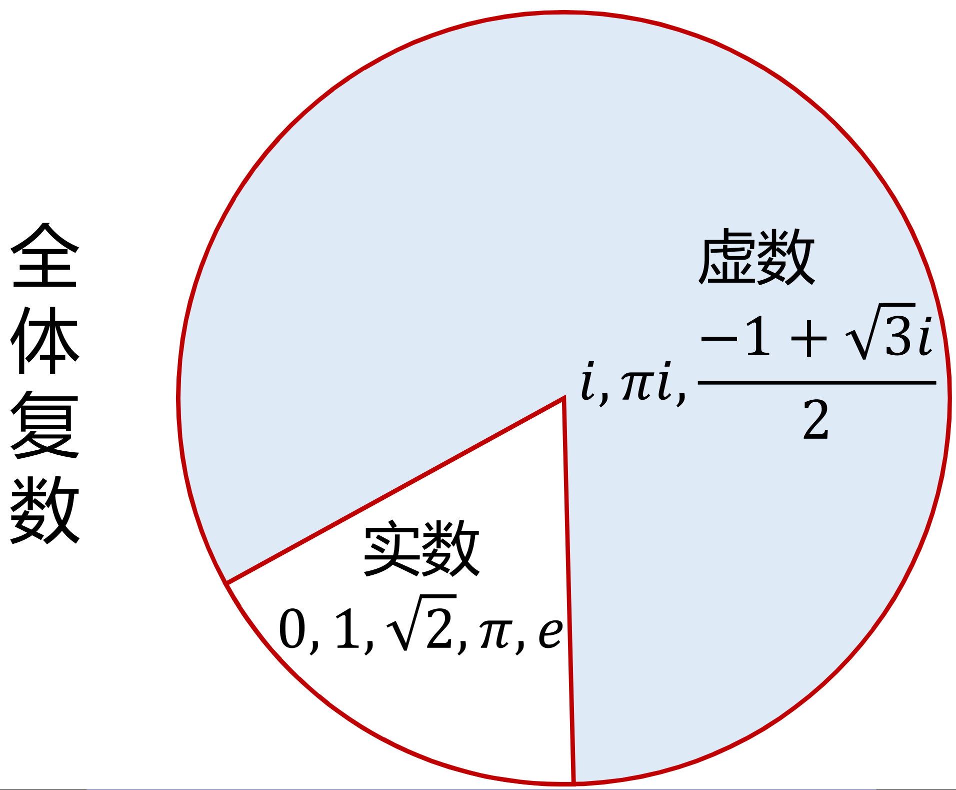


复数的实部和虚部，虚数和纯虚数

定义

称复数 $z = x + yi$ 的**实部**为 $\mathbf{Re}\,z = x$，**虚部**为 $\mathbf{Im}\,z = y$.

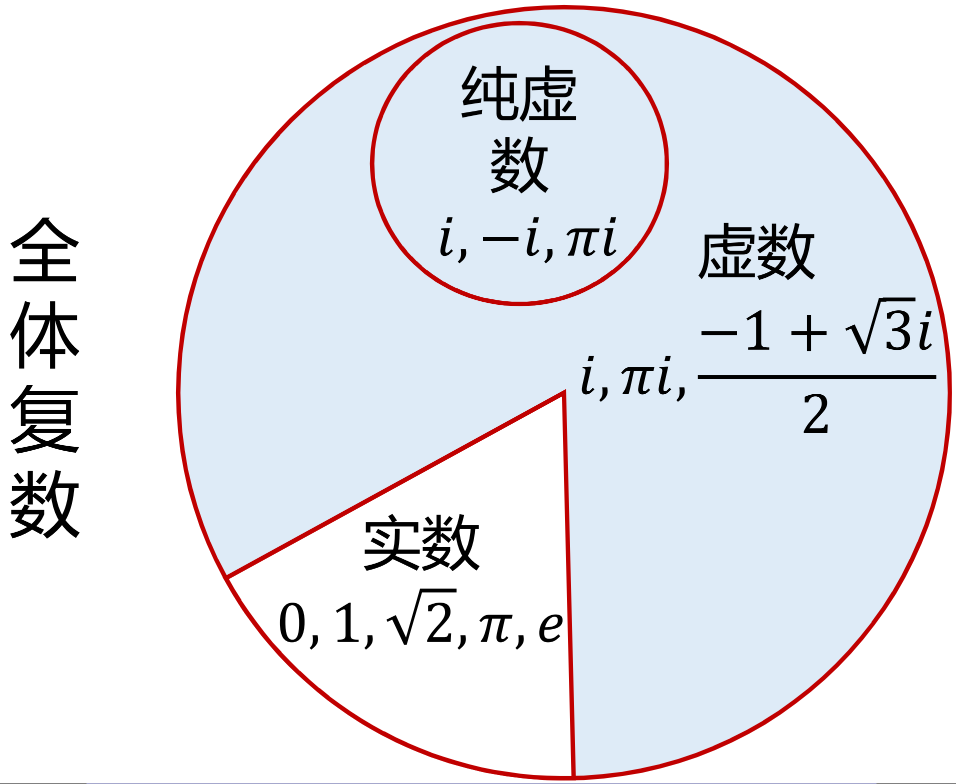
- 当 $\operatorname{Im} z = 0$ 时，z 是实数. 不是实数的复数是虚数.



定义

称复数 $z = x + yi$ 的**实部**为 $\mathrm{Re}\, z = x$, **虚部**为 $\mathrm{Im}\, z = y$.

- 当 $\mathrm{Im}\, z = 0$ 时, z 是实数. 不是实数的复数是虚数.
- 当 $\mathrm{Re}\, z = 0$ 且 $z \neq 0$ 时, 称 z 是纯虚数.



典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时, $\left(x^2-3x-4\right)+\left(x^2-5x-6\right)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.

典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时, $\left(x^2-3x-4\right)+\left(x^2-5x-6\right)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- 解 (1) $x^2-5x-6=0$, 即 $x=-1$ 或 6.

典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时, $\left(x^2-3x-4\right)+\left(x^2-5x-6\right)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- 解 (1) $x^2-5x-6=0$, 即 $x=-1$ 或 6.
- (2) $x^2-3x-4=0$, 即 $x=-1$ 或 4.

典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时, $(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- 解 (1) $x^2-5x-6=0$, 即 $x=-1$ 或 6.
- (2) $x^2-3x-4=0$, 即 $x=-1$ 或 4.
- 但同时要求 $x^2-5x-6\neq 0$, 因此 $x\neq -1, x=4$.

典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时, $\left(x^2-3x-4\right)+\left(x^2-5x-6\right)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- 解 (1) $x^2-5x-6=0$, 即 $x=-1$ 或 6.
- (2) $x^2-3x-4=0$, 即 $x=-1$ 或 4.
- 但同时要求 $x^2-5x-6\neq 0$, 因此 $x\neq -1, x=4$.
- 练习 实数 x 取何值时, $x^2(1+i)+x(5+4i)+4+3i$ 是纯虚数.

典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时, $(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- 解 (1) $x^2-5x-6=0$, 即 $x=-1$ 或 6.
- (2) $x^2-3x-4=0$, 即 $x=-1$ 或 4.
- 但同时要求 $x^2-5x-6\neq 0$, 因此 $x\neq -1, x=4$.
- 练习 实数 x 取何值时, $x^2(1+i)+x(5+4i)+4+3i$ 是纯虚数.
- 答案 $x=-4$.

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i.$

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i.$
- 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i.$
- 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

- 规定 $i \bullet i = -1.$

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.
- 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

- 规定 $i \bullet i = -1$. 由乘法分配律和数乘可得复数的乘除法

$$z_1 \bullet z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.
- 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

- 规定 $i \bullet i = -1$. 由乘法分配律和数乘可得复数的乘除法

$$z_1 \bullet z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

- 定义 z^n 为 n 个 z 相乘, 也就是 z 的 n 次幂.

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.
- 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

- 规定 $i \bullet i = -1$. 由乘法分配律和数乘可得复数的乘除法

$$z_1 \bullet z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

- 定义 z^n 为 n 个 z 相乘, 也就是 z 的 n 次幂.
- 当 $z \neq 0$ 时定义 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$
- 一般地 $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i.$

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$
- 一般地 $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i.$
- (2) $(1+i)^2 = 2i, (1+i)^3 = -2+2i, (1+i)^4 = -4.$

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1.$
- 一般地 $i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i.$
- (2) $(1+i)^2=2i, (1+i)^3=-2+2i, (1+i)^4=-4.$
- (3) 令 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1.$

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$
- 一般地 $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i.$
- (2) $(1+i)^2 = 2i, (1+i)^3 = -2+2i, (1+i)^4 = -4.$
- (3) 令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1.$
- (4) 令 $\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, 则

$$\zeta^2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \omega, \qquad \zeta^3 = -1, \qquad \zeta^6 = 1.$$

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1.$

$1, i, i^2, i^3$ 是四次单位根

- 一般地 $i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i.$
- (2) $(1+i)^2=2i, (1+i)^3=-2+2i, (1+i)^4=-4.$
- (3) 令 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1.$

$1, \omega, \omega^2$ 是三次单位根

- (4) 令 $\zeta=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, 则

$$\zeta^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega, \qquad \zeta^3=-1, \qquad \zeta^6=1.$$

$1, \zeta, \zeta^2, \dots$ 是六次单位根

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1.$

$1, i, i^2, i^3$ 是四次单位根

- 一般地 $i^{4n}=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=-1, i^{4n+3}=-i.$
- (2) $(1+i)^2=2i, (1+i)^3=-2+2i, (1+i)^4=-4.$
- (3) 令 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1.$

$1, \omega, \omega^2$ 是三次单位根

- (4) 令 $\zeta=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, 则

$$\zeta^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega, \qquad \zeta^3=-1, \qquad \zeta^6=1.$$

$1, \zeta, \zeta^2, \ldots$ 是六次单位根

$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 是单位根吗?

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$.

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$.
- 解

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{2}$$

- 例 化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$.
- 解

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{2}=-\frac{2i}{2}=-i,$$

- 例 化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$.
- 解

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{2}=-\frac{2i}{2}=-i,$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7=(-i)^7=i.$$

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 $\dfrac{i}{1-i}+\dfrac{1-i}{i}$.

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$.
- 解

$$\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{2}=\frac{-1+i}{2}$$

- 例 化简 $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$.
- 解

$$\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{2}=\frac{-1+i}{2}, \qquad \frac{1-i}{i}=-i-1,$$

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 $\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}$.
- 解

$$\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{2}=\frac{-1+i}{2},\qquad \frac{1-i}{i}=-i-1,$$

- 因此

$$\frac{i}{1-i}+\frac{1-i}{i}=\frac{-1+i}{2}-i-1=-\frac{3}{2}-\frac{i}{2}.$$

例题: 解复数方程

- 例 解方程 $z^2 - 2(1+i)z - 5 - 10i = 0.$

例题: 解复数方程

- **例** 解方程 $z^2 - 2(1+i)z - 5 - 10i = 0.$
- **解** 配方可得

$$(z-1-i)^2 = 5 + 10i + (1+i)^2 = 5 + 12i.$$

- **例** 解方程 $z^2-2(1+i)z-5-10i=0$.
- **解** 配方可得

$$(z-1-i)^2=5+10i+(1+i)^2=5+12i.$$

- 设 $z-1-i=x+yi$, 则 $(x+yi)^2=5+12i$,

例题: 解复数方程

- 例 解方程 $z^2 - 2(1+i)z - 5 - 10i = 0.$
- 解 配方可得

$$(z-1-i)^2 = 5 + 10i + (1+i)^2 = 5 + 12i.$$

- 设 $z - 1 - i = x + yi$, 则 $(x+yi)^2 = 5 + 12i$,

$$x^2 - y^2 = 5, \qquad 2xy = 12.$$

例题: 解复数方程

- 例 解方程 $z^2 - 2(1+i)z - 5 - 10i = 0$.
- 解 配方可得

$$(z-1-i)^2 = 5 + 10i + (1+i)^2 = 5 + 12i.$$

- 设 $z - 1 - i = x + yi$, 则 $(x+yi)^2 = 5 + 12i$,

$$x^2 - y^2 = 5, \qquad 2xy = 12.$$

- 将 $y = \frac{6}{x}$ 代入可解得 $(x, y) = \pm(3,2)$,

例题: 解复数方程

- **例** 解方程 $z^2-2(1+i)z-5-10i=0.$
- **解** 配方可得

$$(z-1-i)^2=5+10i+(1+i)^2=5+12i.$$

- 设 $z-1-i=x+yi$, 则 $(x+yi)^2=5+12i$,

$$x^2-y^2=5,\qquad 2xy=12.$$

- 将 $y=\frac{6}{x}$ 代入可解得 $(x,y)=\pm(3,2)$, 故

$$z-1-i=\pm(3+2i),\qquad z=4+3i\ \text{或}\ -2-i.$$

*复数域

$$\begin{array}{c}\boxed{\text{复数集合 } \mathbb{C}}\\ \Big\downarrow \\ \boxed{\text{域}}\end{array}$$

*复数域

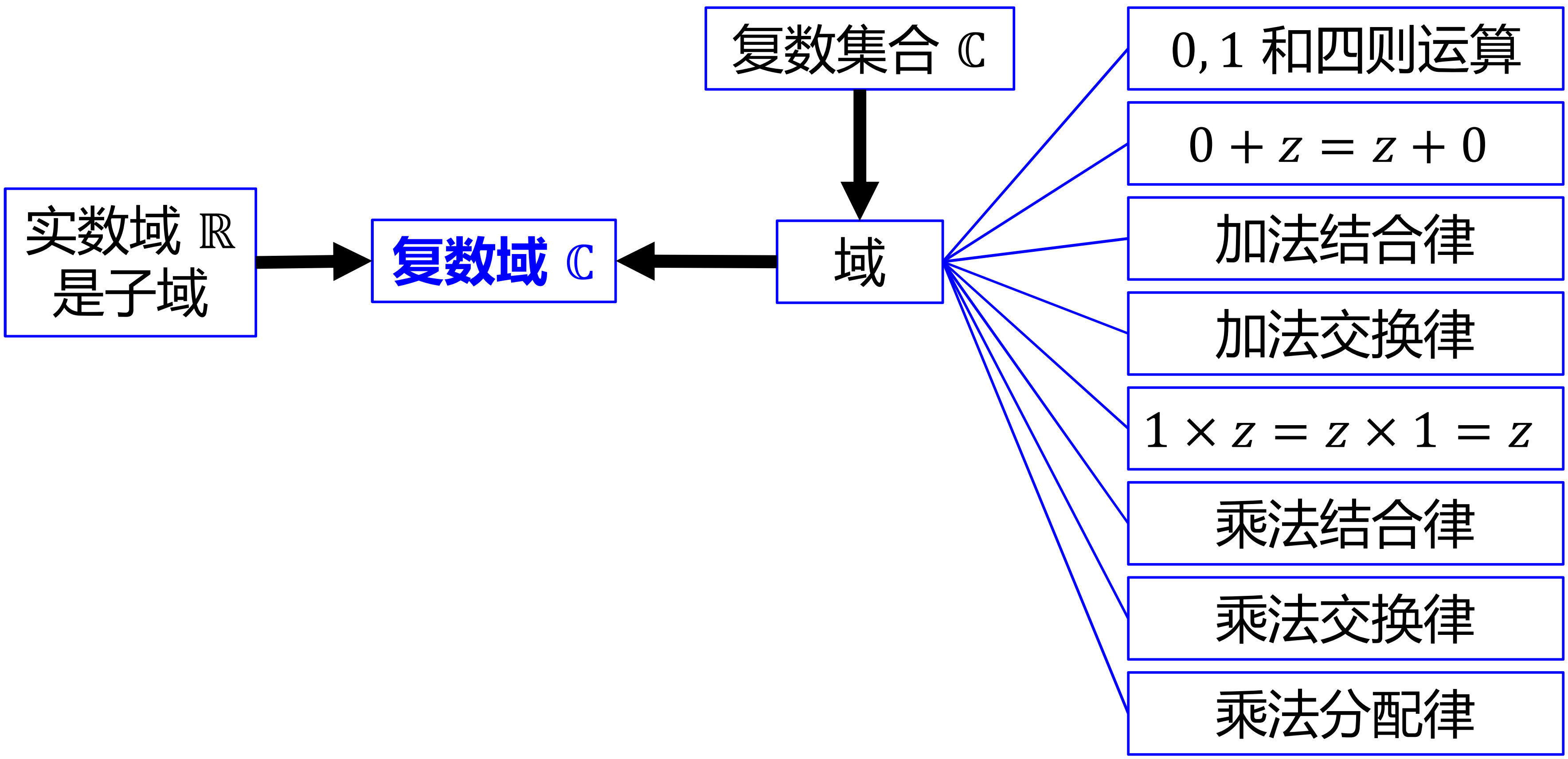
复数集合 $\mathbb{C}$

↓

域

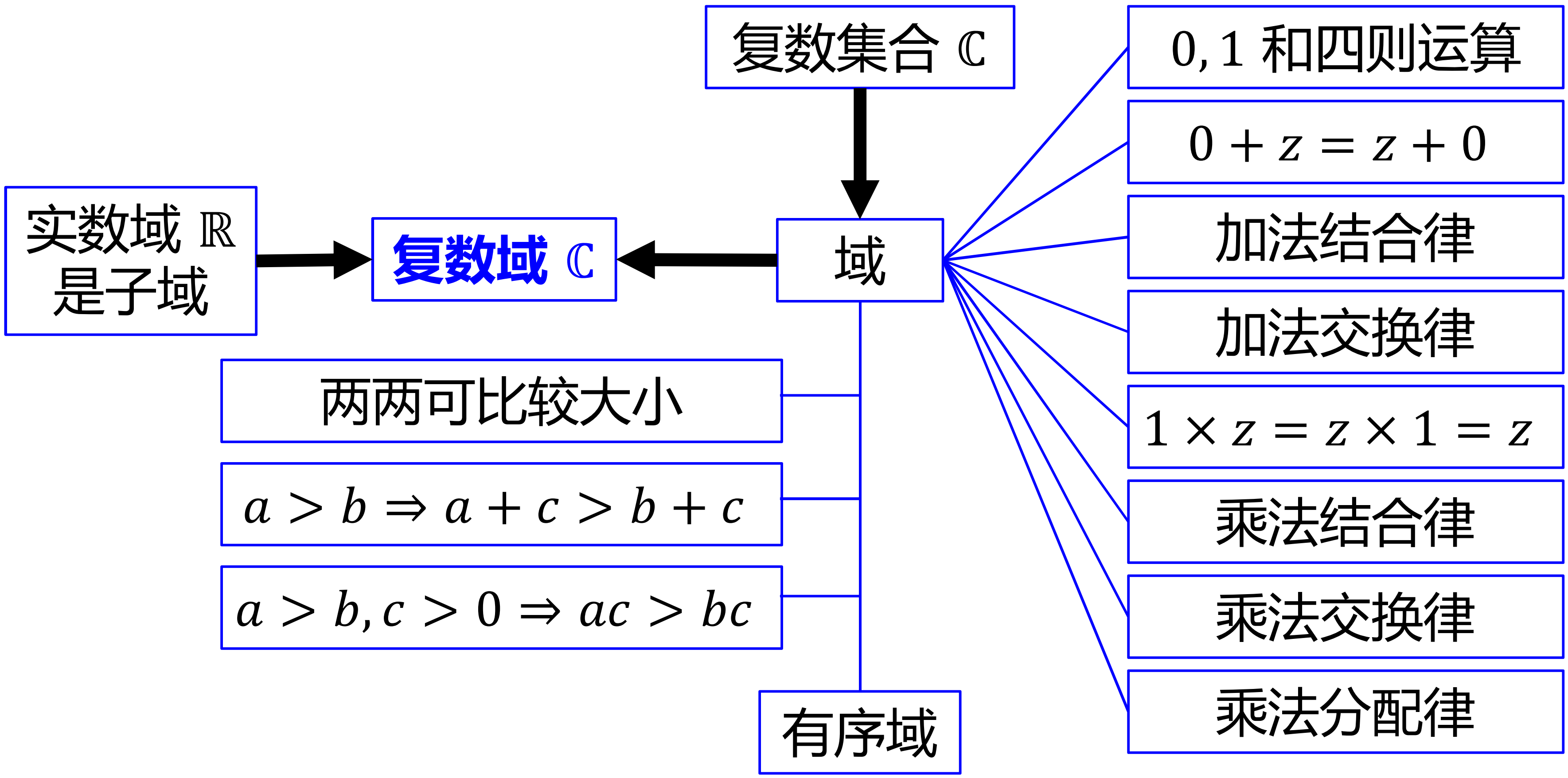
- $0, 1$ 和四则运算
- $0 + z = z + 0$
- 加法结合律
- 加法交换律
- $1 \times z = z \times 1 = z$
- 乘法结合律
- 乘法交换律
- 乘法分配律

*复数域



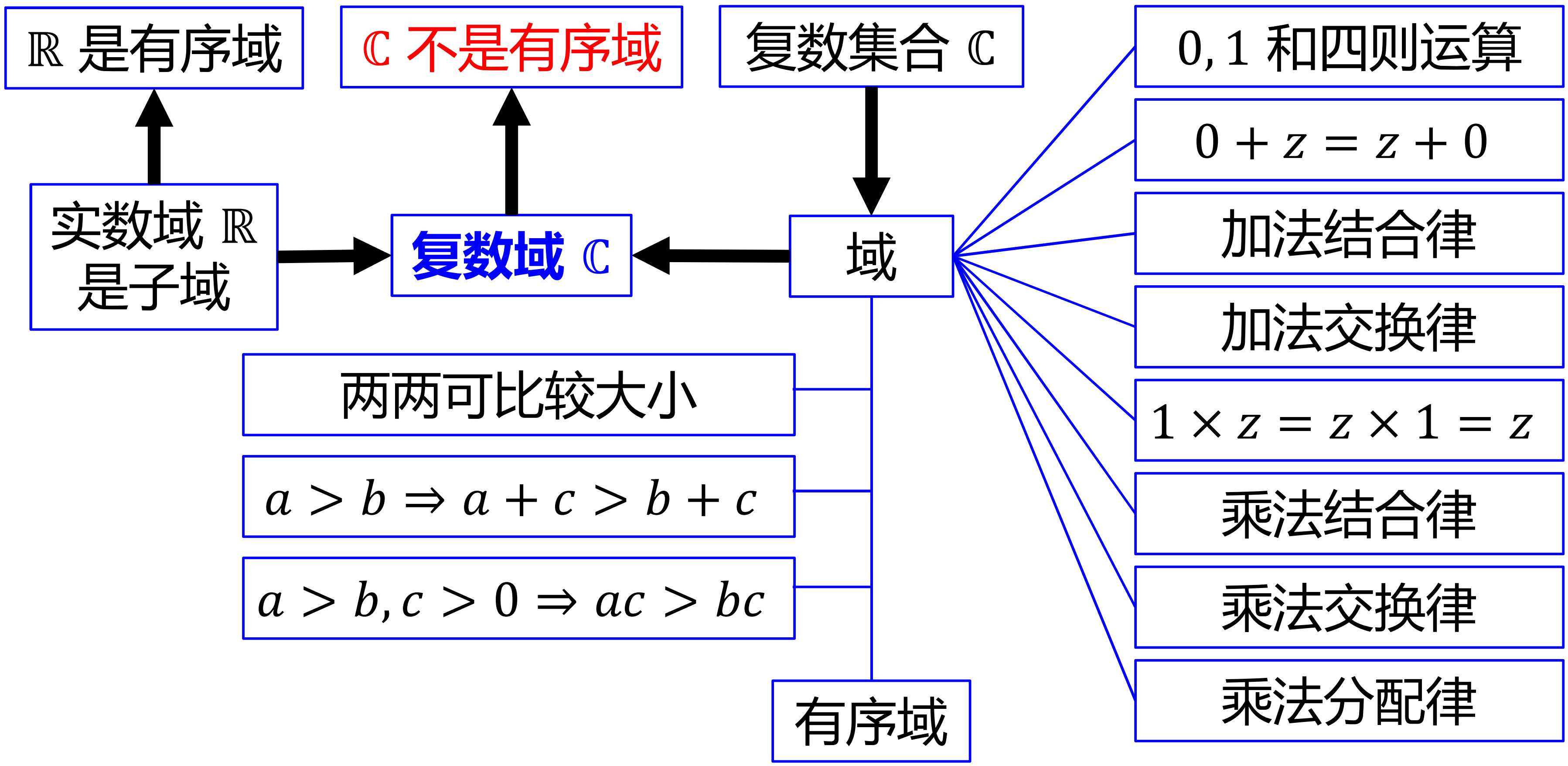
复数集合 $\mathbb{C}$
实数域 $\mathbb{R}$ 是子域
复数域 $\mathbb{C}$
域
0, 1 和四则运算
$0+z=z+0$
加法结合律
加法交换律
$1\times z=z\times 1=z$
乘法结合律
乘法交换律
乘法分配律

*复数域



复数集合 $\mathbb{C}$
0, 1 和四则运算
$0 + z = z + 0$
加法结合律
加法交换律
$1 \times z = z \times 1 = z$
乘法结合律
乘法交换律
乘法分配律
域
实数域 $\mathbb{R}$ 是子域
复数域 $\mathbb{C}$
两两可比较大小
$a > b \Rightarrow a + c > b + c$
$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$
有序域

*复数域



$\mathbb{R}$ 是有序域
$\mathbb{C}$ 不是有序域
复数集合 $\mathbb{C}$
实数域 $\mathbb{R}$ 是子域
复数域 $\mathbb{C}$
域
0, 1 和四则运算
$0 + z = z + 0$
加法结合律
加法交换律
$1 \times z = z \times 1 = z$
乘法结合律
乘法交换律
乘法分配律
两两可比较大小
$a > b \Rightarrow a + c > b + c$
$a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$
有序域

*复数域

$\mathbb{R}$ 是有序域

$\mathbb{C}$ 不是有序域

复数集合 $\mathbb{C}$

实数域 $\mathbb{R}$ 是子域

复数域 $\mathbb{C}$

域

- $0, 1$ 和四则运算
- $0 + z = z + 0$
- 加法结合律
- 加法交换律
- $1 \times z = z \times 1 = z$
- 乘法结合律
- 乘法交换律
- 乘法分配律

有序域

- 两两可比较大小
- $a > b \Rightarrow a + c > b + c$
- $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$

如果 $i > 0$, 则
$-1 = i \cdot i > 0$,
$-i = -1 \cdot i > 0$,
$0 > i$, 矛盾!
类似地, $i < 0$ 也不可能.

共轭复数

定义

称 $\bar{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

共轭复数

定义

称 $\bar{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

性质

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \bullet z_2} = \overline{z_1} \bullet \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

共轭复数

定义

称 $\overline{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

性质

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \bullet z_2} = \overline{z_1} \bullet \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.

共轭复数

定义

称 $\overline{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

性质

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \bullet z_2} = \overline{z_1} \bullet \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

共轭复数

定义

称 $\overline{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

性质

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \bullet z_2} = \overline{z_1} \bullet \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
- $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$.
- z 是实数当且仅当 $z = \overline{z}$.
- z 是纯虚数当且仅当 $z = -\overline{z}$ 且 $z \neq 0$.

共轭复数

- 由于 $z\bar{z}$ 是一个实数,

共轭复数

- 由于 $z\overline{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$$

将其转化为乘法.

例题: 复数的实部和虚部

- 例 设 $z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 以及 $z \bullet \bar{z}$.

例题: 复数的实部和虚部

- 例 设 $z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 以及 $z \bullet \bar{z}$.
- 解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = -\frac{i}{i \bullet i} - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

- 例 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 以及 $z \bullet \bar{z}$.
- 解

$$z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-\frac{i}{i \bullet i}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$$

例题: 复数的实部和虚部

- 例 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 以及 $z \bullet \bar{z}$.
- 解

$$z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-\frac{i}{i \bullet i}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$$

- 因此

$$\operatorname{Re} z=\frac{3}{2}, \qquad \operatorname{Im} z=-\frac{1}{2}$$

例题: 复数的实部和虚部

- 例 设 $z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 以及 $z\bullet\bar{z}$.
- 解

$$z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}=-\frac{i}{i\bullet i}-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,$$

- 因此

$$\operatorname{Re} z=\frac{3}{2},\qquad \operatorname{Im} z=-\frac{1}{2},\qquad z\bullet\bar{z}=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

- 例 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

例题: 复数的共轭复数

- 例 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.
- 解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2}$$

例题: 复数的共轭复数

- 例 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.
- 解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2}$$

$$= \frac{(-15-20)+(-20+15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,$$

例题: 复数的共轭复数

- 例 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.
- 解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2}$$

$$= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,$$

- 因此

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

典型例题：利用共轭复数证明等式

- 例 证明 $z_1 \bullet \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \bullet z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bullet \overline{z}_2)$.

典型例题：利用共轭复数证明等式

- 例 证明 $z_1 \bullet \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \bullet z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bullet \overline{z}_2)$.
- 解 由 $\overline{z_1 \bullet \overline{z}_2} = \overline{z}_1 \bullet z_2$ 得

$$z_1 \bullet \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \bullet z_2 = z_1 \bullet \overline{z}_2 + \overline{z_1 \bullet \overline{z}_2} = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bullet \overline{z}_2).$$

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- 例 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1.$

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- 例 设 $z=x+yi$ 且 $y\neq 0,\pm 1$. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- 例 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

- 解 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}$$

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- **例** 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

- **解** $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- 例 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

- 解 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

- 即 $z\left(1+\overline{z}^2\right) = \overline{z}(1+z^2), (z-\overline{z})(z\overline{z}-1) = 0.$

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- 例 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

- 解 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

- 即 $z\left(1+\overline{z}^2\right) = \overline{z}(1+z^2), (z-\overline{z})(z\overline{z}-1) = 0.$
- 由于 $y \neq 0$, 因此 $z \neq \overline{z}$.

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- 例 设 $z=x+yi$ 且 $y\neq 0,\pm 1$. 证明: $x^2+y^2=1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.
- 解 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}=\frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

- 即 $z\left(1+\bar{z}^2\right)=\bar{z}(1+z^2),(z-\bar{z})(z\bar{z}-1)=0.$
- 由于 $y\neq 0$, 因此 $z\neq\bar{z}$.
- 故 $z\bar{z}=1$, 即 $x^2+y^2=1$.

*复数的其它构造

- 复数也有其它的构造方式,

*复数的其它构造

- 复数也有其它的构造方式, 例如

$$\mathbb{C}=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}: x, y \in \mathbb{R}\right\}=\{xE+yJ: x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

其中 $E=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$.

*复数的其它构造

- 复数也有其它的构造方式, 例如

$$\mathbb{C}=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}: x,y\in\mathbb{R}\right\}=\{xE+yJ: x,y\in\mathbb{R}\}\subseteq M_2(\mathbb{R})$$

其中 $E=\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, J=\begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$.

- 此时自然地有加法、乘法、取逆等运算, 它和我们前面的定义没有本质差别.