



3.2 求导的运算法则

- 求导的四则运算法则

- 和极限、连续性类似, 函数的四则运算也可以继承可导性.

- **定理** 设函数 $u(x), v(x)$ 均在点 x 处可导, 则

- (1) 函数 $f(x) = u(x) \pm v(x)$ 在点 x 处可导, 且 $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

- (2) 函数 $f(x) = u(x)v(x)$ 在点 x 处可导, 且

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

- (3) 函数 $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ ($v(x) \neq 0$) 在点 x 处可导, 且

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$



- 证明 (1) 由于

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)] \pm [v(x + \Delta x) - v(x)] \\ &= \Delta u \pm \Delta v,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \\ &= u'(x) \pm v'(x).\end{aligned}$$



- (2) 由于

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\&= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) \\&= [u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)] \\&= \Delta u \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \Delta v\end{aligned}$$

- 因此

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \Delta v}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x) \right] + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[u(x) \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} \right] \\&= u'(x)v(x) + u(x)v'(x).\end{aligned}$$



- (3) 设 $g(x) = \frac{1}{v(x)}$. 由于

$$\begin{aligned}\Delta g &= g(x + \Delta x) - g(x) \\ &= -\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{v(x)v(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta v}{v(x)v(x + \Delta x)},\end{aligned}$$

- 因此

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \frac{1}{v(x)v(x + \Delta x)} = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

- 由(2)可知

$$f'(x) = u'(x)g(x) + u(x)g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$



- **推论** 设函数 $u(x), v(x)$ 均在点 x 处可导, 则
- (1) $(Cu)'(x) = Cu'(x)$. (因为 $C' = 0$)
- (2) $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$.
- 求导法则可以简记为

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad (Cu)'(x) = Cu' \quad (\text{线性})$$

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (\text{莱布尼兹法则})$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$



- 自然地, 对于有限个 u_1, \dots, u_n ,

$$(C_1 u_1 + C_2 u_2 \cdots + C_n u_n)' = C_1 u_1' + C_2 u_2' \cdots + C_n u_n' = \sum_{i=1}^n C_i u_i',$$

$$(u_1 u_2 \cdots u_n)' = u_1' u_2 \cdots u_n + u_1 u_2' \cdots u_n + \cdots + u_1 u_2 \cdots u_n' = \sum_{i=1}^n u_1 \cdots u_i' \cdots u_n,$$

- 例如

$$(u + 2v - w)' = u' + 2v' - w',$$

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$



- 例 $(x^2)' = 2x$.
- 证明 由函数乘法的求导法则(莱布尼兹法则)可知
- $(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = x + x = 2x$.
- 一般地, 对任意正整数 n , $(x^n)' = nx^{n-1}$. 我们后面会看到, n 取任意实数时它也成立.
- 例 求函数 $f(x) = 2x^n - e^x + \sin x + \cos \frac{\pi}{4}$ 的导数.
- 解
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x^n)' - (e^x)' + (\sin x)' + \left(\cos \frac{\pi}{4}\right)' \\ &= 2nx^{n-1} - e^x + \cos x. \end{aligned}$$
- 这里注意不要误写为 $\left(\cos \frac{\pi}{4}\right)' = -\sin \frac{\pi}{4}$.



• 例 求函数 $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$ 的导数.

• 解

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x)' \cdot (\sin x - \cos x) + e^x \cdot (\sin x - \cos x)' \\ &= e^x \cdot (\sin x - \cos x) + e^x \cdot (\cos x + \sin x) \\ &= 2e^x \sin x. \end{aligned}$$

• 例 求函数 $f(x) = \cos 2x$ 的导数.

• 解 由于 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$, 因此

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x + \sin x)' \cdot (\cos x - \sin x) + (\cos x + \sin x) \cdot (\cos x - \sin x)' \\ &= (-\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x) + (\cos x + \sin x) \cdot (-\sin x - \cos x) \\ &= (1 - 2\sin x \cos x) + (-1 - 2\sin x \cos x) = -2\sin 2x. \end{aligned}$$



- 例 求函数 $f(x) = \tan x$ 的导数.

- 解
$$\begin{aligned} f'(x) &= (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\ &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x. \end{aligned}$$

- 同理 $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$



- 例 求函数 $f(x) = \sec x$ 的导数.

- 解

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x} \right)' \\ &= -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \tan x \sec x. \end{aligned}$$

- 同理 $(\csc x)' = -\cot x \csc x$.



- 反函数的求导法则

- 定理** 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 局部单调连续, 且在 x_0 处可导, $f'(x_0) \neq 0$, 则其反函数 $x = \varphi(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 处可导, 且

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (\text{即 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx})$$

- 注** 从几何直观上看, φ 的图像是 f 的图像沿着 $y = x$ 翻转得到, 因此 φ 在 (x_0, y_0) 处的切线翻转过去就是 f 在 (y_0, x_0) 处的切线, 二者的斜率之积为 1, 即 $\varphi'(y_0) \cdot f'(x_0) = 1$.



- **证明** 设 $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. 由于 $y = f(x)$ 在 x_0 处连续, 因此 $\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0$.
- 由于 $y = f(x)$ 在 x_0 局部单调连续, 因此其反函数 $x = \varphi(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 局部连续, 从而 $\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x \rightarrow 0$. 所以

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y / \Delta x} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y / \Delta x} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

- 换言之,

$$\text{反函数的导数} = \frac{1}{\text{函数的导数}}.$$

- 如果 $f'(x_0) = 0$, 则 $\varphi'(y_0) = \infty$.



- **例** 求函数 $f(x) = \arcsin x$ ($-1 < x < 1$) 的导数.
- **注意** 这里是反函数在 y_0 处取导数, 而原本的函数时在 x_0 处取导数. 因此

$$(\sin x)' = \cos x \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos x}$$

- **是错误的.** 为避免错误, 我们可用 dx, dy 的语言.
- **解** 由于 $\frac{d(\sin y)}{dy} = \cos y$, 因此 $\frac{dx}{d(\arcsin x)} = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$, 即

$$(\arcsin x)' = \frac{d(\arcsin x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

- 这里注意当 $x = \pm 1$ 时导数不存在, 实际上 $f'_+(-1) = \infty, f'_-(1) = \infty$.



- 例 求函数 $f(x) = \arctan x$ 的导数.

- 解 由于 $\frac{d(\tan y)}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y}$, 因此

$$\frac{dx}{d(\arctan x)} = \frac{1}{\cos^2 (\arctan x)} = 1 + \tan^2 (\arctan x) = 1 + x^2,$$

- 即

$$(\arctan x)' = \frac{d(\arctan x)}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$



- 由于

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2},$$

- 因此

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1), \quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$



- **例** 求函数 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的导数.
- **解** 我们知道 $y = \log_a x$ 是单调可导函数 $x = a^y$ 的反函数.
- 由于 $\frac{da^y}{dy} = a^y \ln a$, 因此

$$\frac{dx}{d(\log_a x)} = a^{\log_a x} \ln a = x \ln a,$$

- 即

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

- 特别地, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.



- 复合函数的求导法则

- **定理** 设函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处可导, 函数 $y = f(u)$ 在点 $\varphi(x_0)$ 处可导, 则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处可导, 且

$$(f \circ \varphi)'(x_0) = f'[\varphi(x_0)] \cdot \varphi'(x_0) \quad (\text{即 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx})$$

- **证明** 设

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta u = \varphi(x) - \varphi(x_0), \quad \Delta y = f[\varphi(x)] - f[\varphi(x_0)].$$

- 由于函数 $u = \varphi(x)$ 在点 x_0 处连续, 函数 $y = f(u)$ 在点 $\varphi(x_0)$ 处连续, 因此

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta u \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta y \rightarrow 0.$$



- 故

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\&= \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\&= \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \cdot \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) \\&= f'[\varphi(x_0)] \cdot \varphi'(x_0).\end{aligned}$$

- 换言之,

复合函数的导数 = 外函数的导数 × 内函数的导数.



- 复合函数的求导法则也被称为**链式法则**, 它可以推广到多重复合函数的情形, 例如 $y = f(u), u = \varphi(v), v = \psi(x)$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

- 复合函数求导的**关键在于复合函数的分解**.
- 例** 求函数 $f(x) = \sin(1 - 2x^2)$ 的导数.
- 解** $f(x) = (\sin x)' \cdot (1 - x^2)' = -2x \cos x$.
- 这种解法是**错误**的, 因为一般 $(f \circ \varphi)'(x) \neq f'(x) \cdot \varphi'(x)$.



- **解** 令 $u(x) = 1 - 2x^2$, 则 $y = \sin u$, $\frac{dy}{du} = \cos u$, $\frac{du}{dx} = -2 \cdot 2x = -4x$, 再由链式法则得到

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos(1 - 2x^2) \cdot (-4x) = -4x \cos(1 - 2x^2).$$

- **注** 我们在计算时, 可以先把内层的函数看成一个整体的变量来处理, 这样就不容易出错了.
- **例** 求函数 $f(x) = \ln(2 + \sin x)$ 的导数.
- **解** $f'(x) = \frac{1}{2 + \sin x} \cdot (2 + \sin x)' = \frac{1}{2 + \sin x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2 + \sin x}.$



- 例 求函数 $f(x) = e^{x^2+1}$ 的导数.
- 解 $f'(x) = e^{x^2+1} \cdot (2x) = 2xe^{x^2+1}$.
- 例 求函数 $f(x) = 2^{\arctan(x^2+1)}$ 的导数.
- 解 $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^{\arctan(x^2+1)} \cdot \frac{1}{1+(x^2+1)^2} \cdot 2x = \frac{x 2^{\arctan(x^2+1)+1} \ln 2}{1+(x^2+1)^2}$.
- 例 求函数 $f(x) = \ln [\cos(e^x)]$ 的导数.
- 分析 这是一个三重复合函数.
- 解 $f'(x) = \frac{1}{\cos(e^x)} \cdot [-\sin(e^x)] \cdot e^x = -e^x \tan(e^x)$.



- 可导函数的奇偶性和周期性

- 定理** (1) 若奇函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 $-x_0$ 处可导, 且 $f'(-x_0) = f'(x_0)$, $f'(x)$ 是偶函数.
- (2) 若偶函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 $-x_0$ 处可导, 且 $f'(-x_0) = -f'(x_0)$, $f'(x)$ 是奇函数.
- 证明** (1)

$$\begin{aligned} f'(-x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-x_0 + \Delta x) - f(-x_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{-\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \end{aligned}$$



- (2) 类似可证.
- **定理** 若周期为 T 的函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则它在点 $x_0 + T$ 处可导, 且 $f'(x_0 + T) = f'(x_0)$, $f'(x)$ 是周期为 T 的函数.
- **证明**
$$\begin{aligned}f'(x_0 + T) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + T + \Delta x) - f(x_0 + T)}{\Delta x} \\&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\&= f'(x_0).\end{aligned}$$
- 注意该命题的逆命题不成立, 例如 $f(x) = x + \sin x$, $f'(x) = 1 + \cos x$.



- **例** 求函数 $f(x) = x^\mu$ 的导数.
- **解** 我们先考虑 $x > 0$ 情形. 由于 $f(x) = e^{\mu \ln x}$, 因此

$$f'(x) = e^{\mu \ln x} \cdot (\mu \ln x)' = x^\mu \cdot \frac{\mu}{x} = \mu x^{\mu-1}, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\mu}{x}.$$

- 当 $\mu = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ 时, 若 p, q 均为奇数, 则 $f(x)$ 为奇函数, $f'(x)$ 是偶函数.
若 p 为偶数, q 为奇数, 则 $f(x)$ 为偶函数, $f'(x)$ 为奇函数. 因此此时对于 $x > 0$,

$$\frac{f'(-x)}{f(-x)} = -\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{\mu}{x} = \frac{\mu}{-x}, \quad f'(-x) = \mu(-x)^{\mu-1}.$$

- 故 $x \neq 0$ 时, 总有 $f'(x) = \mu x^{\mu-1}$.



- 不难看出, 若 $\mu > 1$, 则 $f'(0) = 0$; 若 $\mu = 1$, 则 $f'(0) = 1$; 若 $0 < \mu < 1$, 则 $f'(0)$ 不存在.
- 综上所述, $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ 对任意 $\mu \in \mathbb{R}$ 以及任意属于该函数定义域开区间内的 x 成立.

- 设 $y = u^m v^n$, 则 $y = e^{m \ln u + n \ln v}$. 于是由链式法则,

$$y' = e^{m \ln u + n \ln v} (m \ln u + n \ln v)' = u^m v^n \left(m \frac{u'}{u} + n \frac{v'}{v} \right).$$

- 当 $m = n = 1$ 时, 我们得到莱布尼兹法则 $(uv)' = uv \left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} \right) = u'v + uv'$.
- 当 $m = 1, n = -1$ 时, 我们得到 $\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u}{v} \left(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} \right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. 这种对数技巧我们之后还会遇到.



- 例 求函数 $f(x) = \ln |x|$ ($x \neq 0$) 的导数.
- 解 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- 当 $x < 0$ 时, $f'(x) = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$. 也可由偶函数性质得到.
- 所以 $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).
- 例 求函数 $f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的导数.
- 解 $f'(x) = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-x)'}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$.
- 同理 $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$, $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.



- 我们发现它们和三角函数的导函数形式相似. 在引入复数后, 我们发现 $\operatorname{sh} x = -i \sin ix$, 于是 $(\operatorname{sh} x)' = -i \cdot i \cdot \cos ix = \cos ix = \operatorname{ch} x$. 因此二者本质上确实是一回事.
- 例** 求函数 $f(x) = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 的导数.
- 解** 由于 $\frac{d(\operatorname{sh} y)}{dy} = \operatorname{ch} y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}$, 因此

$$f'(x) = \frac{d(\operatorname{arsh} x)}{dx} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$



- 我们也可以直接计算

$$\begin{aligned}(\operatorname{arsh} x)' &= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot (x + \sqrt{1 + x^2})' \\&= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} (1 + x^2)' \right] \\&= \frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},\end{aligned}$$

- 这里 $(\sqrt{x^2 + C})' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + C}}$ 也是常见结论. 同理

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1 - x^2}.$$



• 基本导数公式

- $(C)' = 0$

- $(a^x)' = a^x \ln a, (e^x)' = e^x$

- $(\sin x)' = \cos x$

- $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

- **记忆技巧** 这里, 三角函数的**正**换成**余**, 导函数的**余**换成**正**, 且符号变成**负**的.

- $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$

- $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}, (\ln |x|)' = \frac{1}{x}$

- $(\cos x)' = -\sin x$

- $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

- $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- $(\text{arccot } x)' = -\frac{1}{1+x^2}$



- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
- $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
- $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
- $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$

求导法则

$$(u+v)' = u' + v', \quad (Cu)' = Cu'$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

$$(f \circ \varphi)'(x) = f'[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) \quad \text{或} \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$



- 现在我们可以自信地说, 任何一个初等函数的导函数我们都可以计算出了, 因为初等函数无非就是基本初等函数通过四则运算和复合得到的.

- **例** 求函数 $f(x) = x^2 \sin e^x$ 的导数.

- **解**
$$f'(x) = 2x \sin e^x + x^2 \cdot (\sin e^x)'$$
$$= 2x \sin e^x + x^2 \cdot \cos e^x \cdot e^x = 2x \sin e^x + x^2 e^x \cos e^x .$$

- **例** 求函数 $f(x) = \frac{1}{\ln \cos x^2}$ 的导数.

- **解**
$$f'(x) = -\frac{1}{(\ln \cos x^2)^2} \cdot \frac{1}{\cos x^2} \cdot (-\sin x^2) \cdot (2x)$$
$$= -\frac{2x \sin x^2}{\cos x^2 (\ln \cos x^2)^2} .$$



- 例 求函数 $f(x) = x \arctan(x^2)$ 的导数.

- 解

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan(x^2) + x \cdot [\arctan(x^2)]' \\ &= \arctan(x^2) + x \cdot \frac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot (x^2)' \\ &= \arctan(x^2) + \frac{2x^2}{1 + x^4}. \end{aligned}$$



- 例 求函数 $f(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ 的导数以及 $f'(1)$.
- 解 由于 $f(x) = -1 + \frac{2}{1+\sqrt{x}}$, 因此

$$f'(x) = \left[\frac{2}{1+\sqrt{x}} \right]' = -\frac{2}{(1+\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2},$$

$$f'(1) = -\frac{1}{4}.$$