复变函数与积分变换

张神星

合肥工业大学

2022 年秋季学期

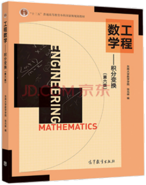
课程安排

本课程共 10 周 40 课时, 自 2022 年 9 月 30 日至 2022 年 11 月 3 日. **课程 QQ 群**为 (入群答案 **1400261B**)

- 009 班 (电信工) **476993411**
- 010 班 (光信息和智感工) **672903188**

教材为

- 西交高数教研室《复变函数》
- 张元林《积分变换》



成绩构成:

- 作业 15%, 每章交一次
- 课堂测验 25%, 一共 3 次, 取最高的两次
- 期末报告 10%
- 期末考试 50%, 至少 45 分才计算总评

复变函数的应用非常广泛，它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

可以说复变函数应用之广，在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.

课程内容和学习方法

本课程主要研究下述问题:

- 什么是复数? 为什么要引入复数?
- 复变量函数和实变量函数有什么差异?
- 我们应该研究哪一类复变量函数?
- 复变函数的微积分理论是怎样的? 这也包括级数和留数理论.
- 如何用傅里叶/拉普拉斯变换解微分方程?

课前预习 → 认真听课记好笔记 → 课后先阅读一遍教材 → 结合笔记汇总知识点 → 再用作业检测学习效果

第一章　复数与复变函数

本章作业

- **1**, **5**, **8**(1)(3)
- **12**(3), **13**, **14**(1)(3)
- **21**(4)(7), **22**(5)(10), **27**(2)

1 复数及其代数运算

2 复数的三角与指数形式

3 复数的乘除、方幂与方根

4 曲线和区域

5 复变函数

6 极限和连续性

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$, 由求根公式可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

1. 当 $\Delta > 0$ 时, 有两个不同的实根;
2. 当 $\Delta = 0$ 时, 有一个二重的实根;
3. 当 $\Delta < 0$ 时, 无实根. 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根, 形式地计算可以发现它们满足原来的方程.

对于三次方程 $x^3+ax^2+bx+c=0$, 通过变量替换 $x \mapsto x-\dfrac{a}{3}$ 可将其二次项系数化为零. 因此可不妨设其方程为

$$x^3-3px-2q=0.$$

当 $p=0$ 时它的可解性和解容易得到. 我们不妨设 $p\neq 0$. 此时我们有求根公式

$$x=u+\frac{p}{u},\quad u^3=q+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=q^2-p^3.$$

1. 当 $\Delta>0$ 时, 有一个实根.
2. 当 $\Delta=0$ 时, 有两个实根 $x=2\sqrt[3]{q},-\sqrt[3]{q}$ $(2$ 重).
3. 当 $\Delta<0$ 时, 看上去没有根, 实际上有 3 个实根. 这可以通过分析函数单调性得到. 但我们必须接受负数开方.

三次方程的根

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

> 圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 1 的平方根。
>
> ——莱布尼兹 (*Leibniz*)

三次方程的根

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解.

此时 $p=-2, q=10, \Delta=108>0$, 因此

$$u=\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}=1+\sqrt{3},$$

$$x=u-\frac{2}{u}=1+\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=2.$$

■

三次方程的根

例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解.

此时 $p = \dfrac{7}{3}, q = -3, \Delta = -\dfrac{100}{27} < 0$, 因此

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3+2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9+\sqrt{-3}}{6}, \frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x = u + \frac{7}{3u} = 2, -3, 1.$$

■

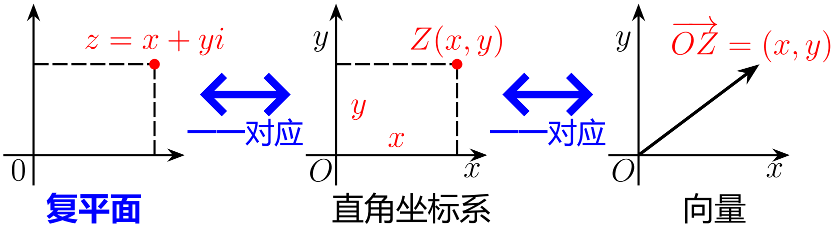
为什么 $\Delta < 0$ 时从求根公式一定会得到三个实根? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答了.

定义

固定一个记号 i, 复数就是形如 $z=x+yi$ 的元素, 其中 x,y 均是实数, 且不同的 (x,y) 对应不同的复数.

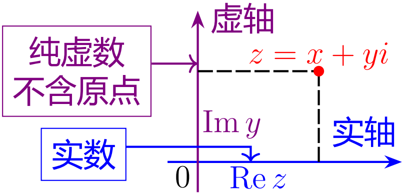
换言之, 复数全体构成一个二维实线性空间, $\{1,i\}$ 是一组基. 我们将全体复数记作 $\mathbb{C}$, 全体实数记作 $\mathbb{R}$, 则 $\mathbb{C}=\mathbb{R}+\mathbb{R}i$.

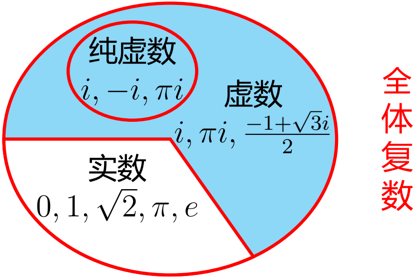
由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



当 $y=0$ 时, $z=x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们将直线 $y=0$ 称为实轴. 相应地, 直线 $x=0$ 被称为虚轴. 我们称 $z=x+yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的实部 $\operatorname{Re} z=x$ 和虚部 $\operatorname{Im} z=y$.

当 $\operatorname{Im} z=0$ 时, z 是实数. 不是实数的复数是虚数. 当 $\operatorname{Re} z=0$ 且 $z\neq 0$ 时, 称 z 是纯虚数.





典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是: (1) 实数; (2) 纯虚数.

解.

(1) $x^2-5x-6=0$, 即 $x=-1$ 或 6.
(2) $x^2-3x-4=0$, 即 $x=-1$ 或 4. 但同时要求 $x^2-5x-6\neq 0$, 因此 $x\neq -1$, $x=4$. ■

练习

实数 x 取何值时, $x^2(1+i)+x(5+4i)+4+3i$ 是纯虚数.

答案.

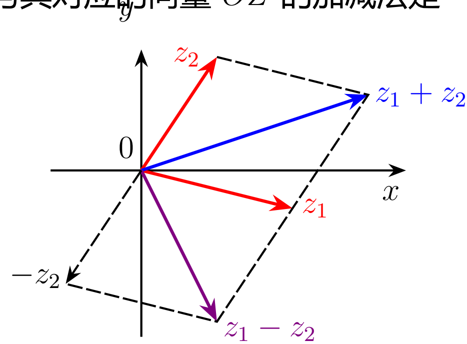
$x=-4$.

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.



规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得复数的乘除法:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i,$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘. 当 $z \neq 0$ 时, 还可以定义 $z^0 = 1, z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

例题：常见复数的幂次

例

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地，对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1$.

我们把满足 $z^n=1$ 的复数 z 称为 n 次单位根. 那么 $1, i, -1, -i$ 是 4 次单位根, $1, \omega, \omega^2$ 是 3 次单位根.

思考

$\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ 是单位根吗？如果是，是几次单位根？

答案.

它是 8 次单位根.

例题：解复数方程

例

解方程 $z^2 - 2(1+i)z - 5 - 10i = 0$.

解.

配方可得 $(z-1-i)^2 = 5 + 10i + (1+i)^2 = 5 + 12i$.
设 $(x+yi)^2 = 5 + 12i$, 则

$$x^2 - y^2 = 5, \quad 2xy = 12, \quad y = \frac{6}{x},$$

$$x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5, \quad x^4 - 5x^2 - 36 = 0, \quad x^2 = 9,$$

故 $(x,y) = (3,2)$ 或 $(-3,-2)$,

$$z = 1 + i \pm (3+2i) = 4 + 3i \text{ 或 } -2 - i.$$

复数集合全体构成一个域. 所谓的域, 是指一个集合

- 包含 $0, 1$, 且在它之内有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域. 也就是说, 对于任何一个非常数的复系数多项式

$$p(z) = z^n + \cdots + c_1 z + c_0, \quad n \geqslant 1,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0) = 0$. 我们会在第五章证明该结论.

复数域不是有序域 *

在 $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则 $a > b$ 或 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c, $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

而 $\mathbb{C}$ 却不是有序域. 如果 $i > 0$, 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

于是 $0 > i$, 矛盾! 同理 $i < 0$ 也不可能.

共轭复数

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 $\overline{z}$. 换言之, $\overline{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

结论

- z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
- $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.
- z 是实数当且仅当 $z = \overline{z}$.
- z 是纯虚数当且仅当 $z = -\overline{z}$ 且 $z \neq 0$.

例题：共轭复数证明等式

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

证明.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$, 因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2\,\mathrm{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$

■

例题：共轭复数判断实数

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明.

$\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即 $$z(1+\overline{z}^2) = \overline{z}(1+z^2), \quad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1) = 0.$$

由于 $y \neq 0$, 因此 $z \neq \overline{z}$. 故上述等式等价于 $z\overline{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$. ∎

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$ 将其转化为乘法.

例

$z=-\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\bar{z}$.

解.

$$
\begin{aligned}
z=-\frac{1}{i}-\frac{3i}{1-i}&=i-\frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}\\
&=i-\frac{3i-3}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i,
\end{aligned}
$$

因此 $\operatorname{Re} z=\dfrac{3}{2},\quad \operatorname{Im} z=-\dfrac{1}{2},\quad z\bar{z}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}.$ ■

典型例题：复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{z_1/z_2}$.

解.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2}$$
$$= \frac{(-15-20)+(-20+15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,$$

因此 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$ ∎

练习

计算 $\mathrm{Re}\left(\frac{1+2i}{8+i}\right)$.

答案.

$\frac{2}{13}$.

复数也有其它的构造方式, 例如

$$\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$$

其中 $E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$.

此时自然地有加法、乘法 (满足交换律)、取逆等运算, 从而这个集合构成一个域. 由于 $J^2 = -E$, 所以 J 实际上就相当于虚数单位, 这个域就是我们前面定义的复数域 $\mathbb{C}$.

1 复数及其代数运算

2 复数的三角与指数形式

3 复数的乘除、方幂与方根

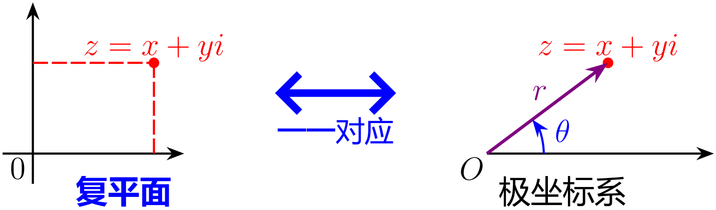
4 曲线和区域

5 复变函数

6 极限和连续性

复数的极坐标形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



定义

- 称 r 为 z 的模, 记为 $|z| = r$.
- 称 θ 为 z 的辐角, 记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$. 0 的辐角没有意义.

由极坐标和直角坐标的对应可知

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

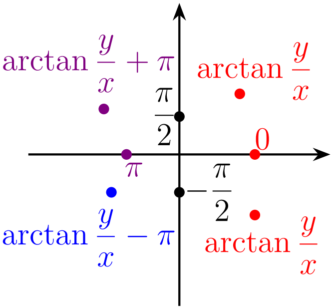
$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} + 2k\pi, & x > 0; \\ \arctan\dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi, & x < 0; \\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, & x = 0, y < 0; \\ \text{任意/无意义}, & z = 0, \end{cases}$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$.

主辐角

任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为主辐角, 记作 $\arg z$.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



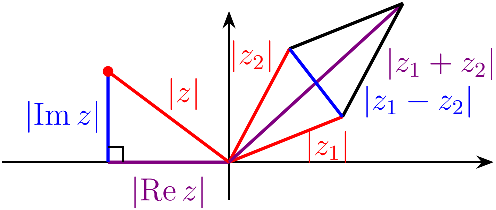
z 是实数当且仅当 $\arg z = 0, \pi$ 或 $z = 0$. z 是纯虚数当且仅当 $\arg z = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

结论

复数的模满足如下性质:

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;
- $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$;
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.

这些不等式均可以用三角不等式证明, 也可以用代数方法证明.



例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$.

证明.

(1) 因为

$$|z_1z_2|^2 = z_1z_2 \cdot \overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.
(2)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}). \end{aligned}$$

■

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$ (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

例

将 $z=-\sqrt{12}-2i$ 化成三角形式和指数形式.

解.

$r=|z|=\sqrt{12+4}=4$. 由于 z 在第三象限，因此

$$\arg z=\arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=4\exp\left(-\frac{5\pi i}{6}\right).$$

■

例

将 $z=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解.

$$
\begin{aligned}
z&=\sin\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5}\\
&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)\\
&=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}=\exp\left(\frac{3\pi i}{10}\right). \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

典型例题：求复数的三角/指数形式

练习

将 $z = \sqrt{3} - 3i$ 化成三角形式和指数形式.

答案.

$$z = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 2\sqrt{3}\exp\left(\frac{5\pi i}{3}\right).$$

求复数的三角或指数形式时，我们只需要任取一个辐角就可以了，不要求必须是主辐角.

例

将 $z = 1 - \cos\alpha + i\sin\alpha$ 化成三角形式和指数形式，并求出它的主辐角，其中 $0 < \alpha \leqslant \pi$.

典型例题：求复数的三角/指数形式

解.

$$|z|^2 = (1-\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 2 - 2\cos\alpha = 4\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

因此 $|z| = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$. 由于

$$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \cot\frac{\alpha}{2} = \tan\frac{\pi-\alpha}{2},$$

且 $\operatorname{Re} z = 1-\cos\alpha > 0$, 因此 $\arg z = \dfrac{\pi-\alpha}{2}$,

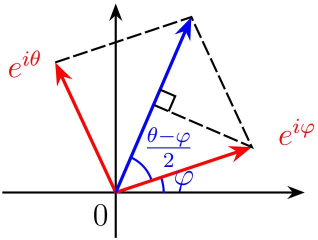
$$z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2} + i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}e^{\frac{(\pi-\alpha)i}{2}}.$$

■

模为 1 的复数

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}\exp\left[\frac{i(\theta+\varphi)}{2}\right].$$



1 复数及其代数运算

2 复数的三角与指数形式

3 复数的乘除、方幂与方根

4 曲线和区域

5 复变函数

6 极限和连续性

三角形式和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_1} \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

这里关于辐角的两个等式的含义是指: 两边所能取到的值构成的集合相等, 即

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \{\theta_1 - \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

注意

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 \pm \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上. 例如

$$(-1+i)(-1+i) = 2i,$$

$$\arg(-1+i) + \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2},$$

$$\arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}.$$

证明.

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\
&= r_1r_2\big[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)\\
&\qquad + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)\big]\\
&= r_1r_2\big[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\big]
\end{aligned}$$

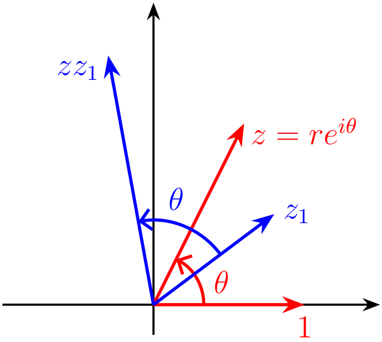
因此乘法情形得证.

设 $\dfrac{z_1}{z_2} = re^{i\theta}$, 则由乘法情形可知

$$rr_2 = r_1,\quad \theta + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1.$$

因此 $r = \dfrac{r_1}{r_2}, \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$. ■

从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍, 并按逆时针旋转角度 θ.



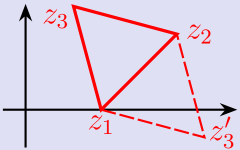
例题: 复数解决平面几何问题

例

已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

解.

由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$,



例题：复数解决平面几何问题

续解.

因此

$$z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)\exp\left(\pm\frac{\pi i}{3}\right) = (1+i)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i.$$

■

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \neq 0$. 根据复数三角形式的乘法和除法运算法则, 我们有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地, 当 $r = 1$ 时, 我们得到棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

注意 $\operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg} z$ 一般不成立, 除非 $n = \pm 1$. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n\arg z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n\operatorname{Arg} z = n\arg z + 2nk\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \operatorname{Re}\left[\sum_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k \cos^{n-k}\theta(i\sin\theta)^k\right] \\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} C_n^{2k}\cos^{n-2k}\theta(-\sin^2\theta)^k \\ &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n/2} C_n^{2k}\cos^{n-2k}\theta(\cos^2\theta-1)^k.\end{aligned}$$

因此 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的多项式. 这个多项式

$$g_n(T) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n/2} C_n^{2k} T^{n-2k}(T^2-1)^k.$$

叫做切比雪夫多项式. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

例

求 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解.

由于

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\quad 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

因此

$$\begin{aligned}&(1+i)^n+(1-i)^n\\&=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right)\\&=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.\end{aligned}$$ ■

典型例题：复数乘幂的计算

练习

求 $(\sqrt{3}+i)^{2022}$.

答案.

-2^{2022}.

我们利用复数方幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = r\exp(i\theta) \neq 0, \quad w = \rho\exp(i\varphi),$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$.

为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为算术根. 由于 $n\varphi$ 和 θ 的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

故

$$w=w_k=\sqrt[n]{r}\exp\frac{(\theta+2k\pi)i}{n}$$
$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right).$$

不难看出, $w_k=w_{k+n}$, 而 $w_0,w_1,\ldots,w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k=0,1,\ldots,n-1$. 故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值.

这些根的模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\frac{2\pi}{n}$. 因此它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的正接 n 边形的顶点.

典型例题：复数方根的计算

例

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解.

由于 $1+i=\sqrt{2}\exp\left(\dfrac{\pi i}{4}\right)$, 因此

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\exp\left[\frac{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)i}{4}\right],\qquad k=0,1,2,3.$$

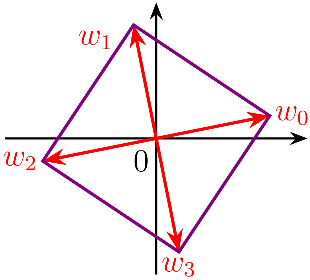
所以该方根所有值为

$$w_0=\sqrt[8]{2}\exp\frac{\pi i}{16},\qquad w_1=\sqrt[8]{2}\exp\frac{9\pi i}{16},$$

$$w_2=\sqrt[8]{2}\exp\frac{17\pi i}{16},\qquad w_3=\sqrt[8]{2}\exp\frac{25\pi i}{16}.$$

∎

$w_0, w_1 = iw_0, w_2 = -w_0, w_3 = -iw_0$ 形成了一个正方形.



典型例题: 复数方根的计算

练习

求 $\sqrt[6]{-1}$.

答案.

$$\pm\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \pm i, \pm\frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

思考

$i=\sqrt{-1}$ 吗?

答案.

$\sqrt{-1}$ 是多值的, 此时 $\sqrt{-1}=\pm i$. 除非给定单值分支 $\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\exp\left(\frac{i\arg z}{2}\right)$, 否则不能说 $\sqrt{-1}=i$.

现在我们来看三次方程 $x^3-3px-2q=0$ 的根.

$$x=u+\frac{p}{u},\quad u^3=q+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=q^2-p^3.$$

1 如果 $\Delta>0$, 设 $\alpha=\sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}}$ 是算术根. 则

$$x=\alpha+\frac{p}{\alpha},\quad \alpha\omega+\frac{p}{\alpha}\omega^2,\quad \alpha\omega^2+\frac{p}{\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

2 如果 $\Delta<0$, 则 $p>0$. 设 $\sqrt[3]{q+\sqrt{\Delta}}=u_1,u_2,u_3$, 则 u_i 都是虚数, 且

$$|u_i|^6=\left|q+\sqrt{\Delta}\right|^2=p^3,\quad u_i\overline{u_i}=|u_i|^2=p.$$

于是我们得到 3 个实根 $x=u_i+\overline{u_i}$.

1 复数及其代数运算

2 复数的三角与指数形式

3 复数的乘除、方幂与方根

4 曲线和区域

5 复变函数

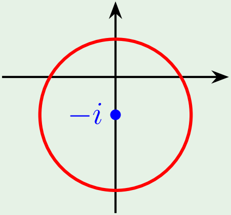
6 极限和连续性

典型例题: 复数方程表平面图形

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解. 由于 $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2i}, y = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, 因此很容易将 x, y 的方程和 z 的方程相互转化.

例

$|z+i| = 2$. 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆. 设 $z = x + yi$, 则方程可以化为 $x^2 + (y+1)^2 = 4$.

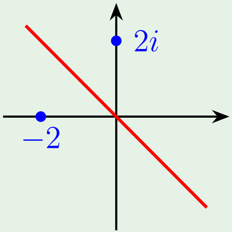


一般的圆方程为 $|z - z_0| = R$, 其中 z_0 是圆心, R 是半径.

典型例题: 复数方程表平面图形

例

$|z-2i|=|z+2|$. 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 $z+i\bar{z}=0$ 或 $x+y=0$.



例

- (3) $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\bar{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.
- (4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.
- (5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

练习

$z^2+\bar{z}^2=1$ 和 $z^2-\bar{z}^2=i$ 表示什么图形?

答案.

双曲线 $x^2-y^2=\dfrac{1}{2}$ 和双曲线 $xy=\dfrac{1}{4}$.

邻域

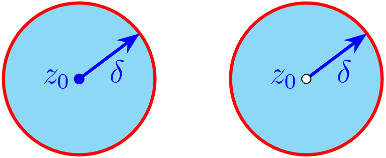
在高等数学中，为了引入极限的概念，需要考虑点的邻域. 类似地，在复变函数中，称开圆盘

$$U(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

为 z_0 的一个 δ-邻域，称去心开圆盘

$$\mathring{U}(z_0, \delta) = z : 0 < |z - z_0| < \delta$$

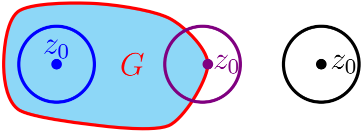
为 z_0 的一个去心 δ-邻域.



设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

1. 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
2. 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.
3. 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.



如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z-z_0|<R, \quad 1<\operatorname{Re} z<3, \quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

直观上看: 开集往往由 $>,<$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant,\leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

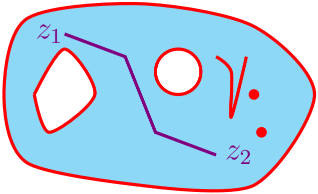
如果 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0,\delta)$ 中, 则称它是有界的. 否则称它是无界的.

区域和闭区域

定义

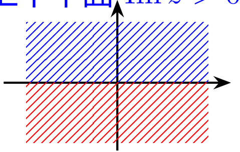
如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个区域. 也就是说, 区域是连通的开集.

观察下侧的图案, 淡蓝色部分是一个区域. 红色的线条和点是它的边界. 区域和它的边界一起构成了闭区域, 记作 $\overline{D}$. 它是一个闭集.



复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定. 这些区域对应的闭区域是什么?

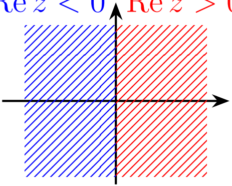
上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$



下半平面 $\operatorname{Im} z < 0$

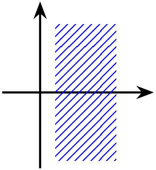
左半平面 右半平面

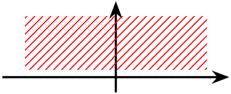
$\operatorname{Re} z < 0$ $\operatorname{Re} z > 0$



竖直带状区域

$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$



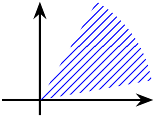


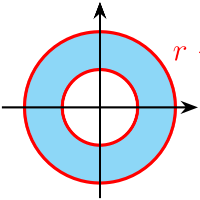
水平带状区域

$y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$

角状区域

$\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$



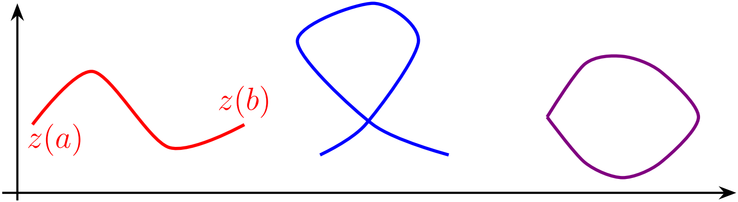


圆环域

$r < |z| < R$

设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程
$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t \in [a,b]$ 定义了一条连续曲线. 这也等价于
$C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b]$.

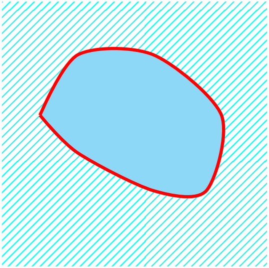
如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线. 如果还满足两个端点重叠, 即 $z(a) = z(b)$, 则称 C 是简单闭曲线, 也简称为闭路.



闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域，一个有界一个无界．分别称这两个区域是 C 的内部和外部．C 是它们的公共边界．

这件事情的严格证明是十分困难的．



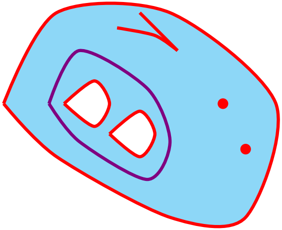
单连通域和多连通域

在前面所说的几个区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外, 闭路的内部仍然包含在这个区域内.

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中, 则称 D 是单连通域. 否则称之为多连通域.

单连通域内的任一闭路可以连续地变形成一个点.

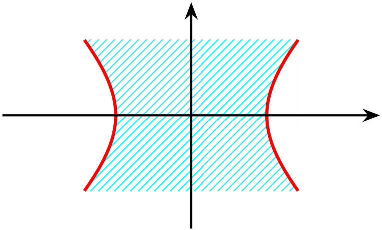


例题：区域的特性

例

$\mathrm{Re}(z^2) < 1.$

设 $z = x + yi$, 则 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$. 这是无界的单连通域.

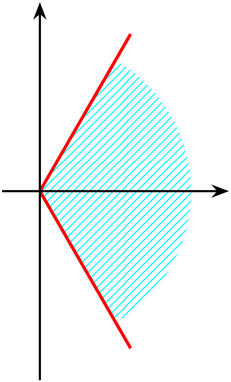


例题：区域的特性

例

$|\arg z| < \dfrac{\pi}{3}$.

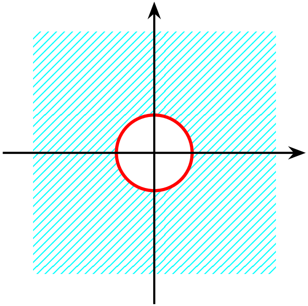
即角状区域 $-\dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$. 这是无界的单连通域.



例

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 3.$$

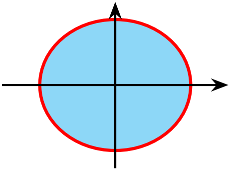
即 $|z| > \dfrac{1}{3}$. 这是无界的单连通域.



例题：区域的特性

例

$|z+1|+|z-1|<4.$
表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.



思考

$|z+1|+|z-1|\geqslant 1$ 表示什么区域?

答案.

整个复平面.

1 复数及其代数运算

2 复数的三角与指数形式

3 复数的乘除、方幂与方根

4 曲线和区域

5 复变函数

6 极限和连续性

复变函数的定义

复变函数就是复数集合 $G \subseteq C$ 上的一个映射 $f : G \to \mathbb{C}$. 换言之, 对于每一个 $z \in G$, 有一个唯一确定的复数 $w = f(z)$ 与之对应. 例如 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \arg z, |z|, z^n$ 都是复变函数.

f 的定义域是指 G, 值域是指 $\{w = f(z) : z \in G\}$.

如果 $z_1 \neq z_2 \implies f(z_1) \neq f(z_2)$, 则称 f 是单射.

不过在复变函数中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 如果对每一个定义域范围内的 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值，则我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数：对于任意点 $w \in$, 存在一个或多个 $z \in G$ 使得 $w = f(z)$. 这样 w 到 z 的就定义了 f 的反函数 f^{-1}. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的，则称 f 是一一对应. 若无特别声明，复变函数总是指单值的复变函数.

每一个复变函数 $w=f(z)=u+iv$ 等价于给了两个二元实变函数

$$u=u(x,y), \qquad v=v(x,y).$$

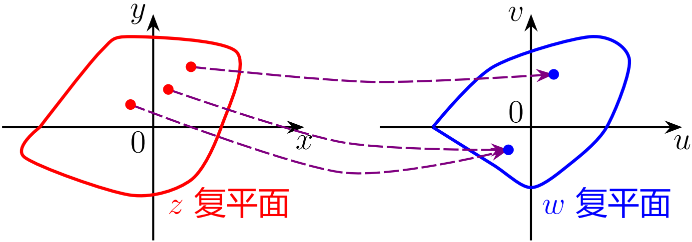
例如

$$w=z^2=(x^2-y^2)+i\cdot 2xy,$$

$$u(x,y)=x^2-y^2, \quad v(x,y)=2xy.$$

其实我们也可以把 $f(z)$ 看成一个二元实变量复值函数.

在实变函数中, 我们常常用函数图像直观来理解和研究函数. 在复变函数中, 我们可以用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映射 (称之为映照) 来表示这种对应关系.



例题: 映照

例

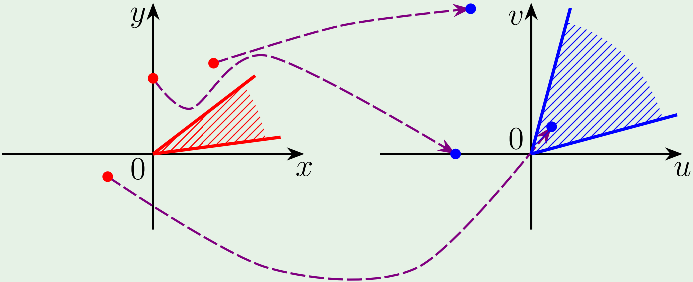
函数 $w=\bar{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域.

例

函数 $w=az$. 设 $a=re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.

例

函数 $w = z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



这个映射对应两个实变函数 $u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$

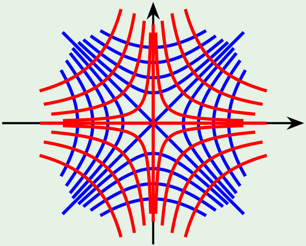
例 (续)

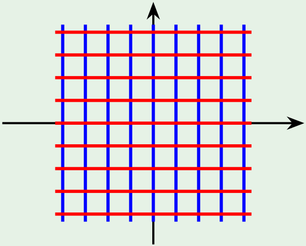
因此它把 z 平面上两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2-y^2=c_1,\quad 2xy=c_2$$

分别映射为 w 平面上的两族平行直线

$$u=c_1,\quad v=c_2.$$





例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

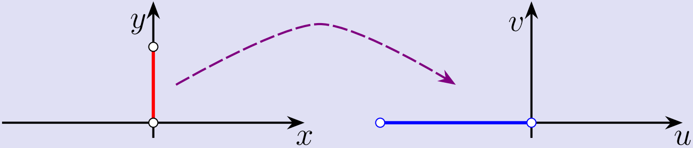
(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

(3) 扇形区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}, 0<|z|<2$.

解.

(1) 设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=ir$, 则 $w=z^2=-r^2$. 因此它的像还是一条线段 $0<|w|<4, \arg w=-\pi$.



续解.

(2) 由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

因此 $u = x^2 - y^2 = 4, v = 2xy$.

对于任意 $v \in \mathbb{R}$, 存在 $z = x + yi \in \mathbb{C}$ 使得 $z^2 = 4 + vi$, 且 $x^2 - y^2 = 4$. 因此这条双曲线的像是一条直线 $\operatorname{Re} w = 4$.

(3) 设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2 e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域 $0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}, 0 < |w| < 4$. ■

例题：映照的像

例

求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = z + \dfrac{1}{z}$ 下的像.

解.

设 $z = x + yi$, 则

$$w = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\overline{z}}{4} = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}yi = u + vi,$$

$$x = \frac{4}{5}u, \quad y = \frac{4}{3}v, \quad \left(\frac{4}{5}u\right)^2 + \left(\frac{4}{3}v\right)^2 = 4,$$

$$\left(\frac{u}{5/2}\right)^2 + \left(\frac{v}{3/2}\right)^2 = 1.$$

∎

1 复数及其代数运算

2 复数的三角与指数形式

3 复数的乘除、方幂与方根

4 曲线和区域

5 复变函数

6 极限和连续性

复变函数的极限和连续性的定义和实函数情形是类似的. 我们先来看数列极限的定义.

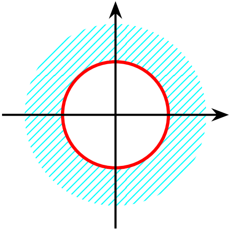
定义

- 设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall\varepsilon>0, \exists N$ 使得当 $n\geqslant N$ 时 $|z_n-z|<\varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$.
- 如果 $\forall X>0, \exists N$ 使得当 $n\geqslant N$ 时 $|z_n|>X$, 则称 ∞ 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\infty$.

如果我们称

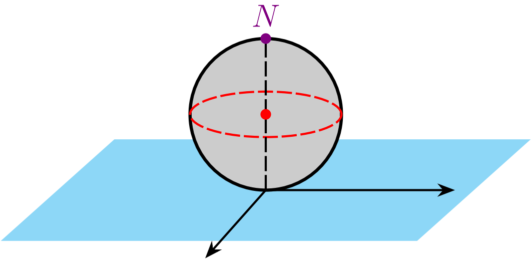
$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

为 ∞ 的 (去心) 邻域. 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 可统一表述为:
对 z 的任意邻域 U, $\exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $z_n \in U$.

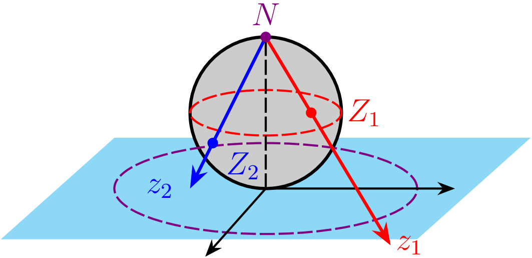


那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

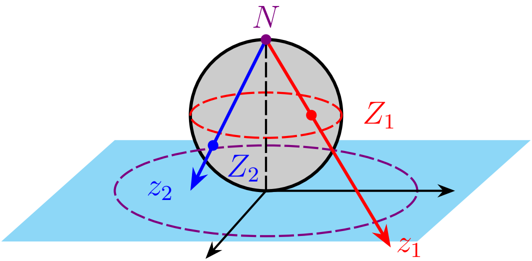
取一个与复平面相切于原点 $z=0$ 的球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于另一点 N, 称之为北极.



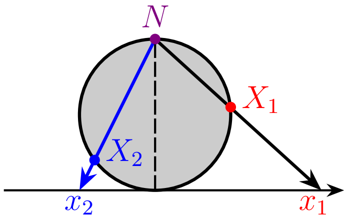
对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z. 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点. 这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.



当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的" 点"——无穷远点, 记作 ∞. 那么扩充复数集合 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应. 称这样的球面为复球面, 称包含无穷远点的复平面为扩充复平面(闭复平面).



它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 同样的, 当 $|x|$ 越来越大时, 其对应圆周上点也越来越接近 N. 所以实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上或闭复平面上就是 ∞, 只是在实数时我们往往还关心它的符号, 所以区分正负.



∞ 的性质

∞ 的实部、虚部和辐角无意义, 规定 $|\infty| = +\infty$. 约定

$$z \pm \infty = \infty \pm z = \infty \quad (z \neq \infty),$$

$$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty \quad (z \neq 0),$$

$$\frac{z}{\infty} = 0 \ (z \neq \infty), \quad \frac{\infty}{z} = \infty \ (z \neq 0), \quad \frac{z}{0} = \infty \ (z \neq 0).$$

根据开集的定义可知, 包含 z 的任何一个开集均包含 z 的一个邻域. 由此可知, 将极限定义中的 ε-邻域换成开邻域 (包含 z 的开集) 并不影响极限的定义. 在复球面上的任意一点, 可以自然地定义 $z \in \mathbb{C}^*$ 的开邻域. 它在上述对应下的像便是 z 的一个开邻域.

数列收敛的等价刻画

定理

设 $z_n = x_n + y_n i, z = x + yi$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

证明.

由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leqslant |z_n - z| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证. ∎

例

设 $z_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \exp\left(\frac{\pi i}{n}\right)$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解.

由于

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \to 1, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \to 0.$$

因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$. ∎

函数的极限

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义. 如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U, \exists\delta > 0$ 使得当 $z \in \mathring{U}(z_0, \delta)$ 时, 有 $f(z) \in U$, 则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \to z_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A(z \to z_0)$.

对于 $z_0 = \infty$ 或 $A = \infty$ 的情形, 也可以用上述定义统一描述. 通常我们说极限存在是不包括 $\lim f(z) = \infty$ 的情形的.

与实函数极限之联系

通过与二元实函数的极限对比可知，复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的. $z \to z_0$ 可以是沿着任意一条曲线趋向于 z_0，或者看成 z 是在一个开圆盘内任意的点逐渐地靠拢 z_0.

定理

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + y_0 i, A = u_0 + v_0 i$，则

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

证明.

由三角不等式

$$|u-u_0|, |v-v_0| \leqslant |z-z_0| \leqslant |u-u_0| + |v-v_0|$$

易证. ■

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = B$, 则

1. $\lim\limits_{z\to z_0}(f \pm g)(z) = A \pm B$;
2. $\lim\limits_{z\to z_0}(fg)(z) = AB$;
3. 当 $B \neq 0$ 时, $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(z) = \dfrac{A}{B}$.

例

证明当 $z \to 0$ 时, 函数 $f(z) = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明.

令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad v(x,y) = 0.$$

当 z 沿着直线 $y = 0$ 左右两侧趋向于 0 时, 则 $u(x,y) \to \pm 1$. 因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)$ 不存在, 从而 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在. ■

函数的连续性

定义

- 如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

定理

函数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

例如 $f(z) = \ln(x^2+y^2) + i(x^2-y^2)$. $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x,y) = x^2 - y^2$ 处处连续. 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

也处处连续, 有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

有时候我们会遇到在曲线上连续的函数, 它指的是当 z 沿着该曲线趋向于 z_0 时, $f(z) \to f(z_0)$. 对于闭合曲线或包含端点的曲线段, 其之上的连续函数 $f(z)$ 是有界的.

例题：函数连续性的判定

例

证明：如果 $f(z)$ 在 z_0 连续，则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明.

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$. 那么 $u(x,y),v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续.

另一种看法是，函数 $g(z)=\bar{z}=x-iy$ 处处连续，从而 $g(f(z))=\overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续. ∎

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法.

这就导致了复变函数有导数, 而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.