合 肥 工 业 大 学 期 中 试 卷

2021～2022 学年第二学期　　　　数学（下）(034Y01)

1. (10 分) 求函数 $f(x) = \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \arctan \dfrac{1}{x}$ 的定义域.

2. (5 分) 求函数 $y = \begin{cases} 1/x, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 1 + e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ 的反函数.

3. (10 分) 求极限 $\lim\limits_{x \to 0^-} (1-x)^{1/x}$.

4. (5 分) 求极限 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4}{x^3+8}$.

5. (5 分) 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(e^{-x}-1)}{\arctan(1-\cos x)}$.

6. (5 分) 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x-x^2} - \sqrt{1-2x+x^2}}{x}$.

7. (5 分) 求极限 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)-2\ln x}}$.

8. (5 分) 求极限 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{\pi}{e^x-1} - \arctan \dfrac{x}{2}\right)$.

9. (5 分) 求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n^2+2} + \dfrac{2}{n^2+4} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+2n}\right)$.

10. (5 分) 设 $a_1 = 4, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$, 证明 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ 存在并求之.

11. (10 分) 证明 $e^x + x = 4$ 在 $(0, +\infty)$ 内有零点.

12. (5 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 且 $f(-1) \leqslant 1 \leqslant f(1)$. 证明存在 $\xi \in [-1, 1]$, 使得 $f(\xi) = \xi^2$.

13. (10 分) 求 $y = e^{x+1} \sin x - e^2 \sin 1$ 的导数.

14. (5 分) 求 $y = \arctan e^x$ 的导数.

15. (5 分) 求曲线 $y = \tan x$ 在点 $\left(-\dfrac{\pi}{4}, -1\right)$ 处的切线方程和法线方程.

16. (5 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x}-1}{\arctan x}, & x < 0, \\ 2x + a, & x \geqslant 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 求常数 a.

合 肥 工 业 大 学 试 卷 （A）

2021～2022 学年第二学期　　　　数学（下）(034Y01)

一、填空题（每题 3 分，共 18 分）

1. 如果 $f(x)>0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+f(x)\right]^{1/f(x)}=$____________.

2. 设 $y=\sin(x^2+1)$, 则 $\mathrm{d}y=$____________.

3. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2-1}+\dfrac{2}{n^2-2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2-n}\right)=$____________.

4. 曲线 $y=2\ln(x+1)$ 在点 $(1,2\ln 2)$ 处的切线方程为____________.

5. 若 $e^{y-1}=1+xy$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$____________.

6. 如果函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$, 且 $x=0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线, 那么 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}=$____________.

二、选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. 当 $x\to+\infty$ 时, $\dfrac{1}{x}$ 和 (　　) 是等价无穷小.

A. $\sin\dfrac{1}{x}$　　B. $\sin x$　　C. e^{-x}　　D. $e^{1/x}$

2. 若当 $x\to 0$ 时, $\arctan(e^x-1)\cdot(\cos x-1)$ 和 x^n 是同阶无穷小, 则 $n=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

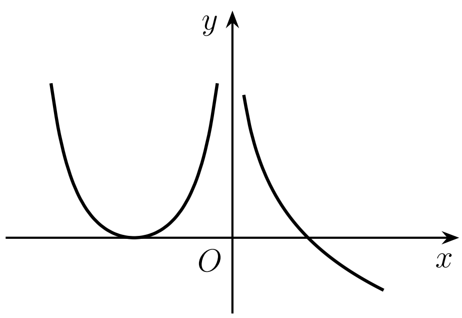
3. 设 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x(x-1)^2}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 (　　).

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 第二类间断点　　D. 连续点

4. 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数, 且 $f'(x)$ 的图像如下图所示, 则 $f(x)$ 有 (　　).

A. 一个极大值点，没有极小值点　　B. 没有极大值点，一个极小值点

C. 一个极大值点和一个极小值点　　D. 一个极大值点和两个极小值点



5. 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f(0)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^{2022})+x^{2021}f(x)}{x^{2022}}=($ $)$.

A. 0　　B. $f'(0)$　　C. $2f'(0)$　　D. $2022f'(0)$

6. 如果点 (x_0,y_0) 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点, 则 $f''(x_0)=($ $)$.

A. 0　　B. ∞　　C. 不存在　　D. 0 或不存在

三、解答题（每题 8 分，共 64 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{\arcsin x^2}$.

3. 设 $\begin{cases} x=t^2+t \\ y=t^3+t \end{cases}$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0, \\ x^2+ax+b, & x\geqslant 0. \end{cases}$ 求常数 a,b 使得函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 并求出此时曲线 $y=f(x)$ 的渐近线.

5. 求函数 $f(x)=x^3-x^2-x$ 在区间 $[-2,2]$ 上的最大值和最小值.

6. 证明: 当 $-\dfrac{\pi}{2}<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\tan x_2-\tan x_1\geqslant x_2-x_1$.

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且 $f(1)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $\xi f'(\xi)+2022f(\xi)=0$.

8. 设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{2}{x^2}, x\in(0,+\infty)$. 求

(1) 函数 $f(x)$ 的增减区间及极值；

(2) 曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间及拐点.

合 肥 工 业 大 学 试 卷 参 考 答 案 （A）

2021～2022 学年第二学期　　　　数学（下）(034Y01)

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. e, **2.** $2x\cos(x^2+1)\,\mathrm{d}x$, **3.** $1/2$,

4. $y=x-1+2\ln 2$, **5.** 1, **6.** 0.

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里：

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	D	B	A	C	D

三、解答题（每小题 8 分，共 64 分）

1. （8 分）【解】

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)}\quad\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{x+2}\quad\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

$$=\frac{-2}{1}=-2.\quad\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

2. （8 分）【解】

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{\arcsin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\quad\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x}\quad\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}.\quad\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

3. （8 分）【解】

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t}\quad\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\frac{3t^2+1}{2t+1},\quad\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t}\quad\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\frac{6t(2t+1)-(3t^2+1)2}{(2t+1)^3}=\frac{6t^2+6t-2}{(2t+1)^3}.\quad\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

4. （**8 分**）【**解**】

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 因此

$$f(0) = f(0^+) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$
$$= b = \lim_{x\to 0^-} x\arctan\frac{1}{x} = 0\times\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 因此

$$f'_-(0) = f'_+(0), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{x\arctan\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$
$$f'_+(0) = (2x+a)|_{x=0} = a, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

因此 $a = -\frac{\pi}{2}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = +\infty, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{1}{x} = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x\arctan\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^-}\frac{\arctan t}{t} = 1,$$

因此曲线 $y=f(x)$ 的渐近线只有 $y=1$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

5. （**8 分**）【**解**】

由

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

可得驻点 $x = -\frac{1}{3}, 1$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2 分)

由于

$$f(-2) = -10, \quad f(2) = 2, \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}, \quad f(1) = -1, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此最大值为 2, 最小值为 -10. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2 分)

6. （**8 分**）【**证明**】

证法一: 设 $f(x) = \tan x - x$, 则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2 分)

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \geqslant 0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 从而 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2 分)

$$f(x_2) \geqslant f(x_1), \quad \tan x_2 - \tan x_1 \geqslant x_2 - x_1. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

证法二: 设 $f(x)=\tan x$, 则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上连续, (x_1,x_2) 内可导. ··············(2 分)

由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2 \text{ 分})$$

即

$$\frac{\tan x_2-\tan x_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{\cos^2\xi}\geqslant 1. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2 \text{ 分})$$

所以 $\tan x_2-\tan x_1\geqslant x_2-x_1$. ··············(2 分)

7. (8 分)【证明】

设 $F(x)=x^{2022}f(x)$, ··············(2 分)

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $(0,1)$ 内可导, ··············(1 分)

且 $F(0)=0,F(1)=f(1)=0$. ··············(1 分)

由罗尔中值定理, 存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F'(\xi)=0$. ··············(2 分)

由于 $F'(x)=x^{2022}f'(x)+2022x^{2021}f(x)$ 且 $\xi\neq 0$, ··············(1 分)

所以 $\xi f'(\xi)+2022f(\xi)=1$. ··············(1 分)

8. (8 分)【解】

(1)

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{x^3}=\frac{x^2-4}{x^3}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^3}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1 \text{ 分})$$

当 $0<x<2$ 时, $f'(x)<0$. 当 $x>2$ 时, $f'(x)>0$. ··············(1 分)

因此 $(0,2]$ 是 $f(x)$ 的单减区间,

$[2,+\infty)$ 是 $f(x)$ 的单增区间. ··············(1 分, 写成开区间不扣分)

所以 $f(x)$ 只有唯一的极小值 $f(2)=\ln 2+\dfrac{1}{2}$. ··············(1 分)

(2)

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{12}{x^4}=-\frac{x^2-12}{x^4}=-\frac{(x-2\sqrt{3})(x+2\sqrt{3})}{x^4}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1 \text{ 分})$$

当 $0<x<2\sqrt{3}$ 时, $f''(x)>0$. 当 $x>2\sqrt{3}$ 时, $f''(x)<0$. ··············(1 分)

因此 $(0,2\sqrt{3}]$ 是曲线 $y=f(x)$ 的凹区间,

$[2\sqrt{3},+\infty)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的凸区间, ··············(1 分, 写成开区间不扣分)

拐点为 $\left(2\sqrt{3},\ln(2\sqrt{3})+\dfrac{1}{6}\right)$. ··············(1 分)