

第一章 复数与复变函数

第一章 复数与复变函数

- 复数、实部、虚部、模、辐角、共轭复数
- 复平面、复球面、 ∞
- 复数的四则运算、乘幂、方根
- 区域、复变函数
- 复变函数的极限和连续性

- **1, 5, 7(2)(4)(6), 8(1)(3)**
- **11, 12(3), 13, 14(1)(3), 19**
- **21(4)(7), 22(5) (10), 27(2)**

1.1 复数及其代数运算

- 复数起源于多项式方程的求根问题.

复数的引入

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$,

复数的引入

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$, 由求根公式可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{其中 } \Delta = b^2 - 4c.$$

复数的引入

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$, 由求根公式可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{其中 } \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当 $\Delta \geq 0$ 时, 有两个实根(计算重数);

复数的引入

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$, 由求根公式可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{其中 } \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当 $\Delta \geq 0$ 时, 有两个实根(计算重数);
- (2) 当 $\Delta < 0$, 无实根.

复数的引入

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$, 由求根公式可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{其中 } \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当 $\Delta \geq 0$ 时, 有两个实根(计算重数);
- (2) 当 $\Delta < 0$, 无实根.
- 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根,

复数的引入

- 复数起源于多项式方程的求根问题.
- 考虑二次方程 $x^2 + bx + c = 0$, 由求根公式可知

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{其中 } \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当 $\Delta \geq 0$ 时, 有两个实根(计算重数);
- (2) 当 $\Delta < 0$, 无实根.
- 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根, 形式地计算可以发现它们满足原来的方程.

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$,

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$, 我们也有求根公式

$$x = u + \frac{p}{u}, \quad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = q^2 - p^3.$$

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$, 我们也有求根公式

$$x = u + \frac{p}{u}, \quad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = q^2 - p^3.$$

- (1) 当 $\Delta > 0$, 有一个实根.

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$, 我们也有求根公式

$$x = u + \frac{p}{u}, \quad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = q^2 - p^3.$$

- (1) 当 $\Delta > 0$, 有一个实根.
- (2) 当 $\Delta = 0$, $x = 2\sqrt[3]{q}, -\sqrt[3]{q}$ (2重).

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$, 我们也有求根公式

$$x = u + \frac{p}{u}, \quad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = q^2 - p^3.$$

- (1) 当 $\Delta > 0$, 有一个实根.
- (2) 当 $\Delta = 0$, $x = 2\sqrt[3]{q}, -\sqrt[3]{q}$ (2重).
- (3) 当 $\Delta < 0$, 看上去没有根, 实际上有3个实根.

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$, 我们也有求根公式

$$x = u + \frac{p}{u}, \quad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = q^2 - p^3.$$

- (1) 当 $\Delta > 0$, 有一个实根.
- (2) 当 $\Delta = 0$, $x = 2\sqrt[3]{q}, -\sqrt[3]{q}$ (2重).
- (3) 当 $\Delta < 0$, 看上去没有根, 实际上有3个实根. 这可以通过分析函数单调性得到.

三次方程的根

- 对于三次方程 $x^3 - 3px - 2q = 0$, 我们也有求根公式

$$x = u + \frac{p}{u}, \quad u^3 = q + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = q^2 - p^3.$$

- (1) 当 $\Delta > 0$, 有一个实根.
- (2) 当 $\Delta = 0$, $x = 2\sqrt[3]{q}, -\sqrt[3]{q}$ (2重).
- (3) 当 $\Delta < 0$, 看上去没有根, 实际上有3个实根. 这可以通过分析函数单调性得到.
- 但我们必须接受负数开方.

三次方程的根

- 尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

三次方程的根

- 尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

“圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根。”

——Leibniz

三次方程的根

- 例 $x^3 + 6x - 20 = 0$

三次方程的根

- 例 $x^3 + 6x - 20 = 0,$

$$p = -2, q = 10, \Delta = 108 > 0,$$

三次方程的根

- 例 $x^3 + 6x - 20 = 0,$

$$p = -2, q = 10, \Delta = 108 > 0,$$

$$u = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = 1 + \sqrt{3},$$

三次方程的根

- 例 $x^3 + 6x - 20 = 0,$

$$p = -2, q = 10, \Delta = 108 > 0,$$

$$u = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} = 1 + \sqrt{3},$$

$$x = u - \frac{2}{u} = 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2.$$

三次方程的根

- 例 $x^3 - 7x + 6 = 0$

三次方程的根

- 例 $x^3 - 7x + 6 = 0,$

$$p = \frac{7}{3}, q = -3, \Delta = -\frac{100}{27} < 0,$$

三次方程的根

- 例 $x^3 - 7x + 6 = 0$,

$$p = \frac{7}{3}, q = -3, \Delta = -\frac{100}{27} < 0,$$

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

三次方程的根

- 例 $x^3 - 7x + 6 = 0,$

$$p = \frac{7}{3}, q = -3, \Delta = -\frac{100}{27} < 0,$$

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x = u + \frac{7}{3u} = 2, -3, 1.$$

三次方程的根

- 例 $x^3 - 7x + 6 = 0,$

$$p = \frac{7}{3}, q = -3, \Delta = -\frac{100}{27} < 0,$$

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x = u + \frac{7}{3u} = 2, -3, 1.$$

- 为什么这样做一定会得到三个实根？

三次方程的根

- 例 $x^3 - 7x + 6 = 0,$

$$p = \frac{7}{3}, q = -3, \Delta = -\frac{100}{27} < 0,$$

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x = u + \frac{7}{3u} = 2, -3, 1.$$

- 为什么这样做一定会得到三个实根？在学习了第一章的内容之后我们就可以回答了.

定义

固定一个记号 i , **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数,

定义

固定一个记号 i , **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

定义

固定一个记号 i , **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

- 换言之, 复数全体构成一个二维实线性空间, $\{1, i\}$ 是一组基.

定义

固定一个记号 i , **复数**就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

- 换言之, 复数全体构成一个二维实线性空间, $\{1, i\}$ 是一组基.
- 将**全体复数集合**记作 \mathbb{C} , 全体实数集合记作 \mathbb{R} , 则 $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.

复数的实部和虚部, 虚数和纯虚数

定义

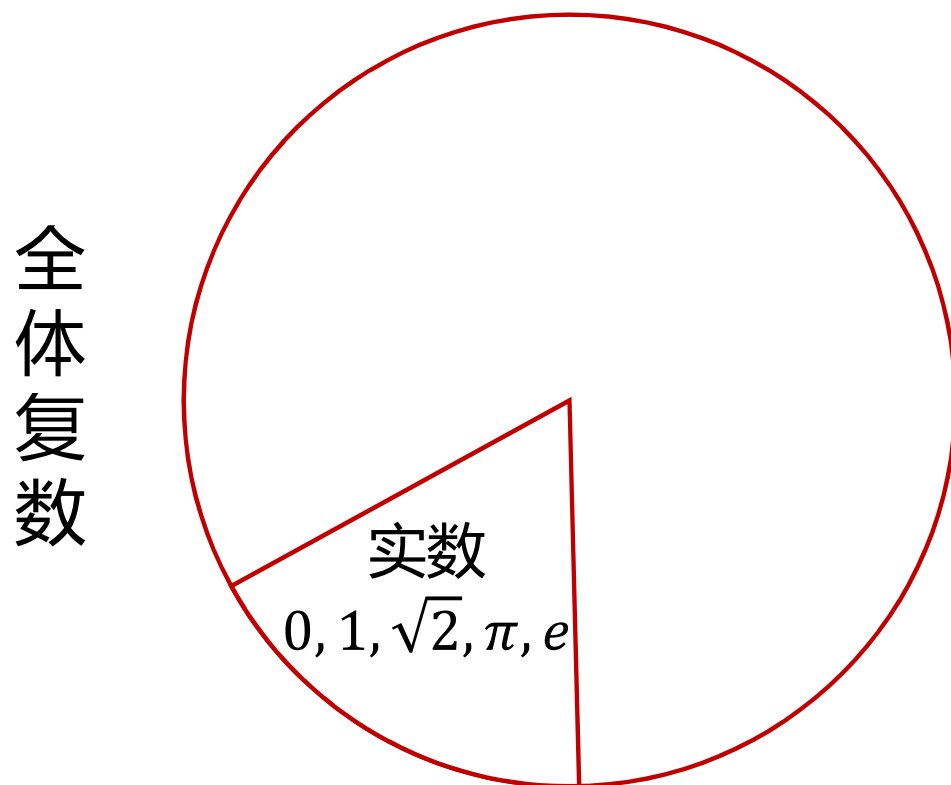
称复数 $z = x + yi$ 的**实部**为 $\operatorname{Re} z = x$, **虚部**为 $\operatorname{Im} z = y$.

复数的实部和虚部, 虚数和纯虚数

定义

称复数 $z = x + yi$ 的**实部**为 $\operatorname{Re} z = x$, **虚部**为 $\operatorname{Im} z = y$.

- 当 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, z 是实数.

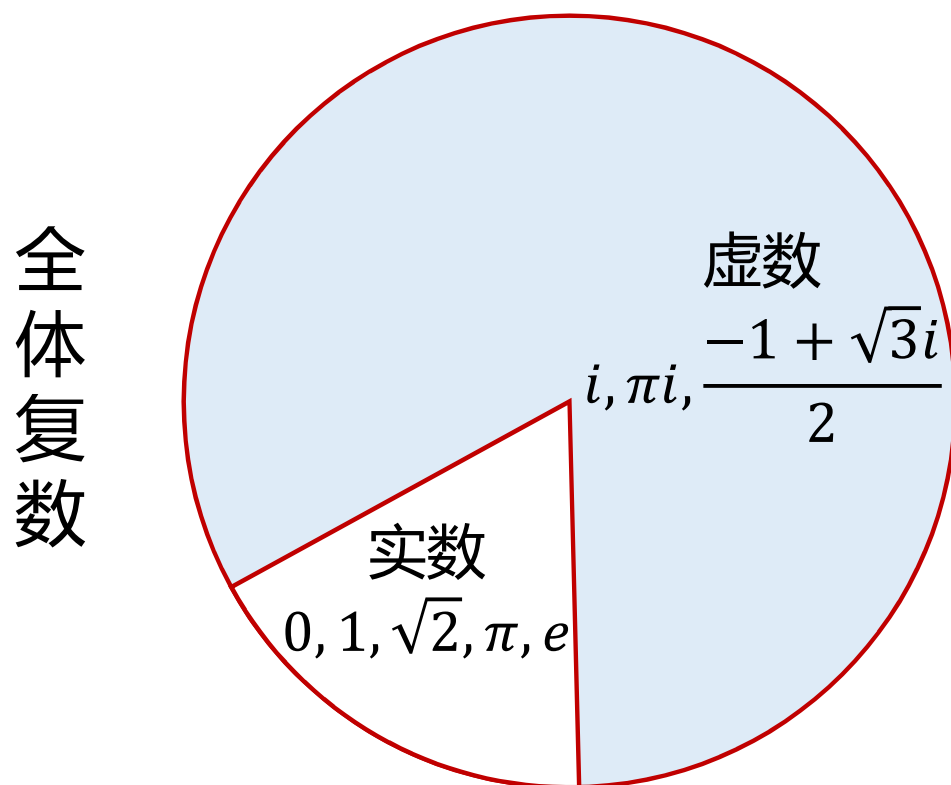


复数的实部和虚部, 虚数和纯虚数

定义

称复数 $z = x + yi$ 的**实部**为 $\operatorname{Re} z = x$, **虚部**为 $\operatorname{Im} z = y$.

- 当 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, z 是实数. 不是实数的复数是**虚数**.

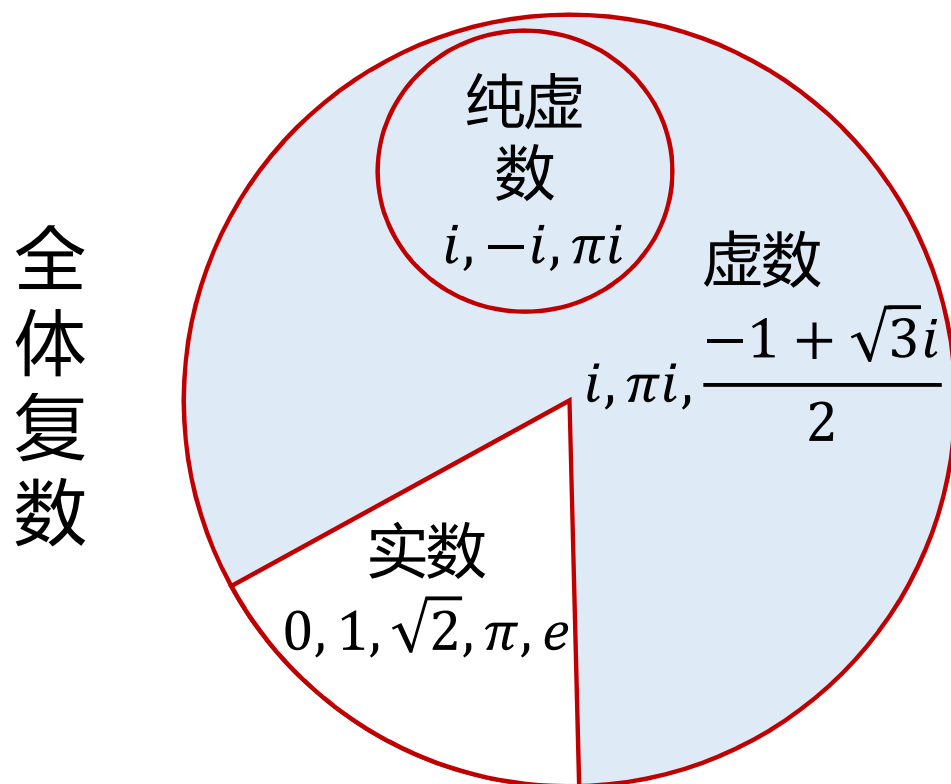


复数的实部和虚部, 虚数和纯虚数

定义

称复数 $z = x + yi$ 的**实部**为 $\operatorname{Re} z = x$, **虚部**为 $\operatorname{Im} z = y$.

- 当 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, z 是实数. 不是实数的复数是**虚数**.
- 当 $\operatorname{Re} z = 0$ **且 $z \neq 0$ 时**, 称 z 是**纯虚数**.



典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时, $(x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.

典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时, $(x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- 解 (1) $x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .

典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时, $(x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- 解 (1) $x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .
- (2) $x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4 .

典型例题：判断实数和纯虚数

- 例 实数 x 取何值时, $(x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- 解 (1) $x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .
- (2) $x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4 .
- 但同时要求 $x^2 - 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq -1, x = 4$.

典型例题：判断实数和纯虚数

- **例** 实数 x 取何值时, $(x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- **解** (1) $x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .
- (2) $x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4 .
- 但同时要求 $x^2 - 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq -1, x = 4$.
- **练习** 实数 x 取何值时, $x^2(1 + i) + x(5 + 4i) + 4 + 3i$ 是纯虚数.

典型例题：判断实数和纯虚数

- **例** 实数 x 取何值时, $(x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是:
- (1) 实数; (2) 纯虚数.
- **解** (1) $x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .
- (2) $x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4 .
- 但同时要求 $x^2 - 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq -1, x = 4$.
- **练习** 实数 x 取何值时, $x^2(1 + i) + x(5 + 4i) + 4 + 3i$ 是纯虚数.
- **答案** $x = -4$.

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.
- 由 \mathbb{C} 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.
- 由 \mathbb{C} 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

- 规定 $i \cdot i = -1$.

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.

- 由 \mathbb{C} 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

- 规定 $i \cdot i = -1$. 由乘法分配律和数乘可得复数的乘除法

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$.

- 由 \mathbb{C} 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

- 规定 $i \cdot i = -1$. 由乘法分配律和数乘可得复数的乘除法

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

- 定义 z^n 为 n 个 z 相乘, 也就是 z 的 n 次幂.

复数的代数运算

- 设 $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i$.

- 由 \mathbb{C} 是二维实线性空间可得复数的加法和减法

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i.$$

- 规定 $i \cdot i = -1$. 由乘法分配律和数乘可得复数的乘除法

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

- 定义 z^n 为 n 个 z 相乘, 也就是 z 的 n 次幂.

- 当 $z \neq 0$ 时定义 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.
- 一般地 $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$.

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.
- 一般地 $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$.
- (2) $(1+i)^2 = 2i, (1+i)^3 = -2+2i, (1+i)^4 = -4$.

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.
- 一般地 $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$.
- (2) $(1+i)^2 = 2i, (1+i)^3 = -2+2i, (1+i)^4 = -4$.
- (3) 令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$.

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$.
- 一般地 $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i$.
- (2) $(1+i)^2 = 2i, (1+i)^3 = -2+2i, (1+i)^4 = -4$.
- (3) 令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$.
- (4) 令 $\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, 则

$$\zeta^2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \omega, \quad \zeta^3 = -1, \quad \zeta^6 = 1.$$

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$

$1, i, i^2, i^3$ 是四次单位根

- 一般地 $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i.$

- (2) $(1+i)^2 = 2i, (1+i)^3 = -2+2i, (1+i)^4 = -4.$

- (3) 令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1.$

$1, \omega, \omega^2$ 是三次单位根

- (4) 令 $\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, 则

$$\zeta^2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \omega, \quad \zeta^3 = -1, \quad \zeta^6 = 1.$$

$1, \zeta, \zeta^2, \dots$ 是六次单位根

例题: 常见复数的幂次

- 例 (1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1.$

$1, i, i^2, i^3$ 是四次单位根

- 一般地 $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i.$

- (2) $(1+i)^2 = 2i, (1+i)^3 = -2+2i, (1+i)^4 = -4.$

- (3) 令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1.$

$1, \omega, \omega^2$ 是三次单位根

- (4) 令 $\zeta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, 则

$$\zeta^2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \omega, \quad \zeta^3 = -1, \quad \zeta^6 = 1.$$

$1, \zeta, \zeta^2, \dots$ 是六次单位根

$\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 是单位根吗?

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$.

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$.

- 解

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{2}$$

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$.

- 解

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{2} = -\frac{2i}{2} = -i,$$

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7$.

- 解

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{2} = -\frac{2i}{2} = -i,$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7 = (-i)^7 = i.$$

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 $\frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i}$.

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 $\frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i}$.

- 解

$$\frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{-1+i}{2}$$

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 $\frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i}$.

- 解

$$\frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{-1+i}{2}, \quad \frac{1-i}{i} = -i-1,$$

例题: 复数的代数运算

- 例 化简 $\frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i}$.

- 解

$$\frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{-1+i}{2}, \quad \frac{1-i}{i} = -i-1,$$

- 因此

$$\frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i} = \frac{-1+i}{2} - i - 1 = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2}.$$

例题: 解复数方程

- 例 解方程 $z^2 - 2(1 + i)z - 5 - 10i = 0$.

例题: 解复数方程

- 例 解方程 $z^2 - 2(1 + i)z - 5 - 10i = 0$.
- 解 配方可得

$$(z - 1 - i)^2 = 5 + 10i + (1 + i)^2 = 5 + 12i.$$

例题: 解复数方程

- 例 解方程 $z^2 - 2(1 + i)z - 5 - 10i = 0$.

- 解 配方可得

$$(z - 1 - i)^2 = 5 + 10i + (1 + i)^2 = 5 + 12i.$$

- 设 $z - 1 - i = x + yi$, 则 $(x + yi)^2 = 5 + 12i$,

例题: 解复数方程

- 例 解方程 $z^2 - 2(1 + i)z - 5 - 10i = 0$.

- 解 配方可得

$$(z - 1 - i)^2 = 5 + 10i + (1 + i)^2 = 5 + 12i.$$

- 设 $z - 1 - i = x + yi$, 则 $(x + yi)^2 = 5 + 12i$,

$$x^2 - y^2 = 5, \quad 2xy = 12.$$

例题: 解复数方程

- 例 解方程 $z^2 - 2(1 + i)z - 5 - 10i = 0$.

- 解 配方可得

$$(z - 1 - i)^2 = 5 + 10i + (1 + i)^2 = 5 + 12i.$$

- 设 $z - 1 - i = x + yi$, 则 $(x + yi)^2 = 5 + 12i$,

$$x^2 - y^2 = 5, \quad 2xy = 12.$$

- 将 $y = \frac{6}{x}$ 代入可解得 $(x, y) = \pm(3, 2)$,

例题: 解复数方程

- 例 解方程 $z^2 - 2(1 + i)z - 5 - 10i = 0$.

- 解 配方可得

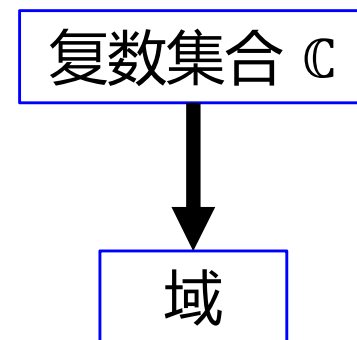
$$(z - 1 - i)^2 = 5 + 10i + (1 + i)^2 = 5 + 12i.$$

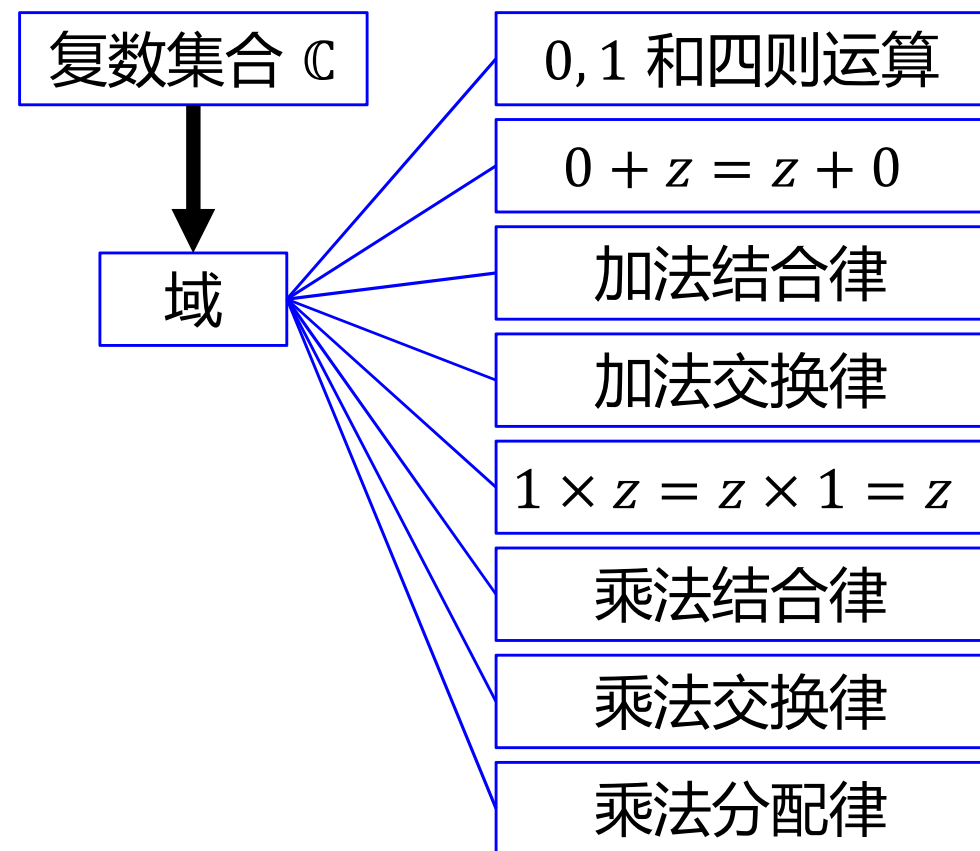
- 设 $z - 1 - i = x + yi$, 则 $(x + yi)^2 = 5 + 12i$,

$$x^2 - y^2 = 5, \quad 2xy = 12.$$

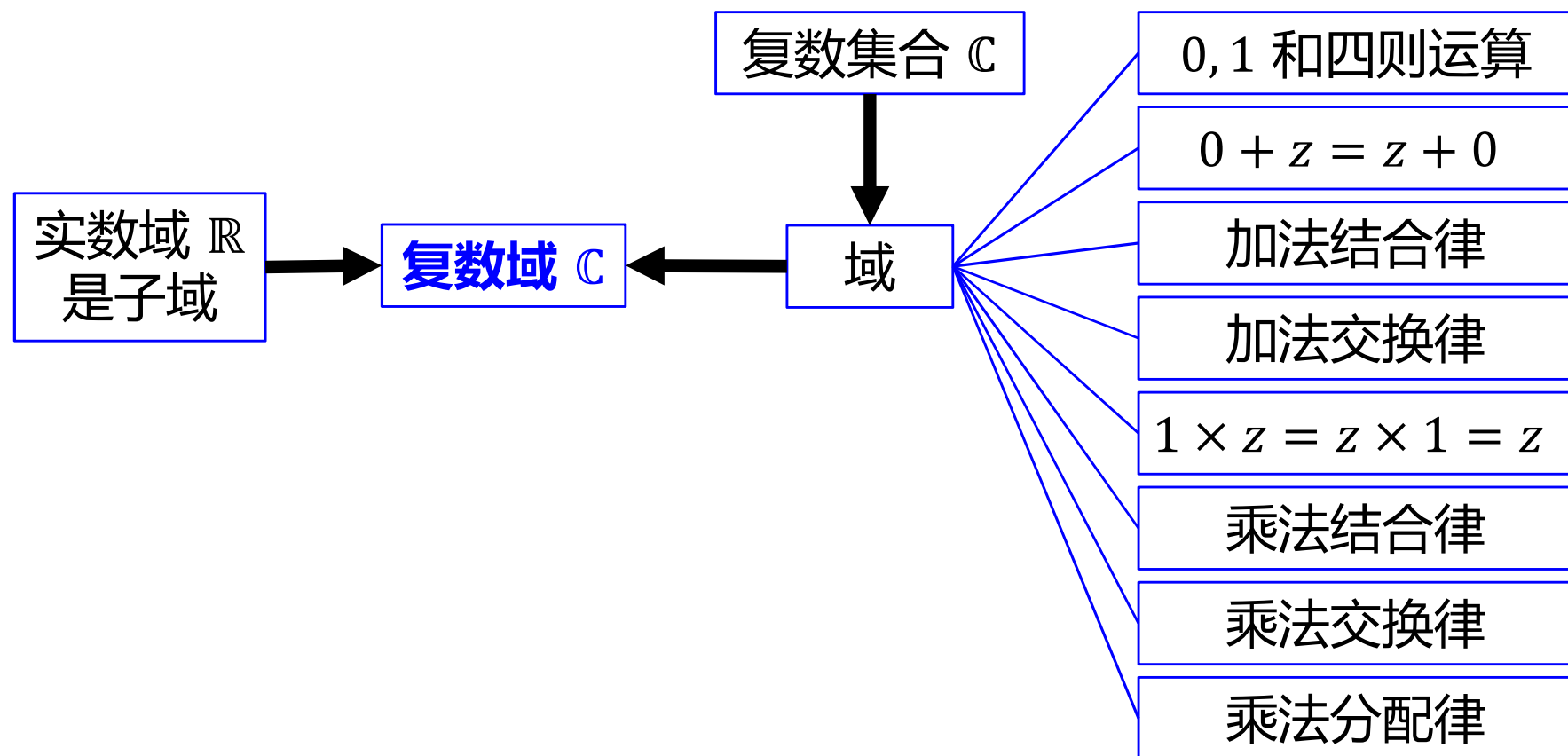
- 将 $y = \frac{6}{x}$ 代入可解得 $(x, y) = \pm(3, 2)$, 故

$$z - 1 - i = \pm(3 + 2i), \quad z = 4 + 3i \text{ 或 } -2 - i.$$

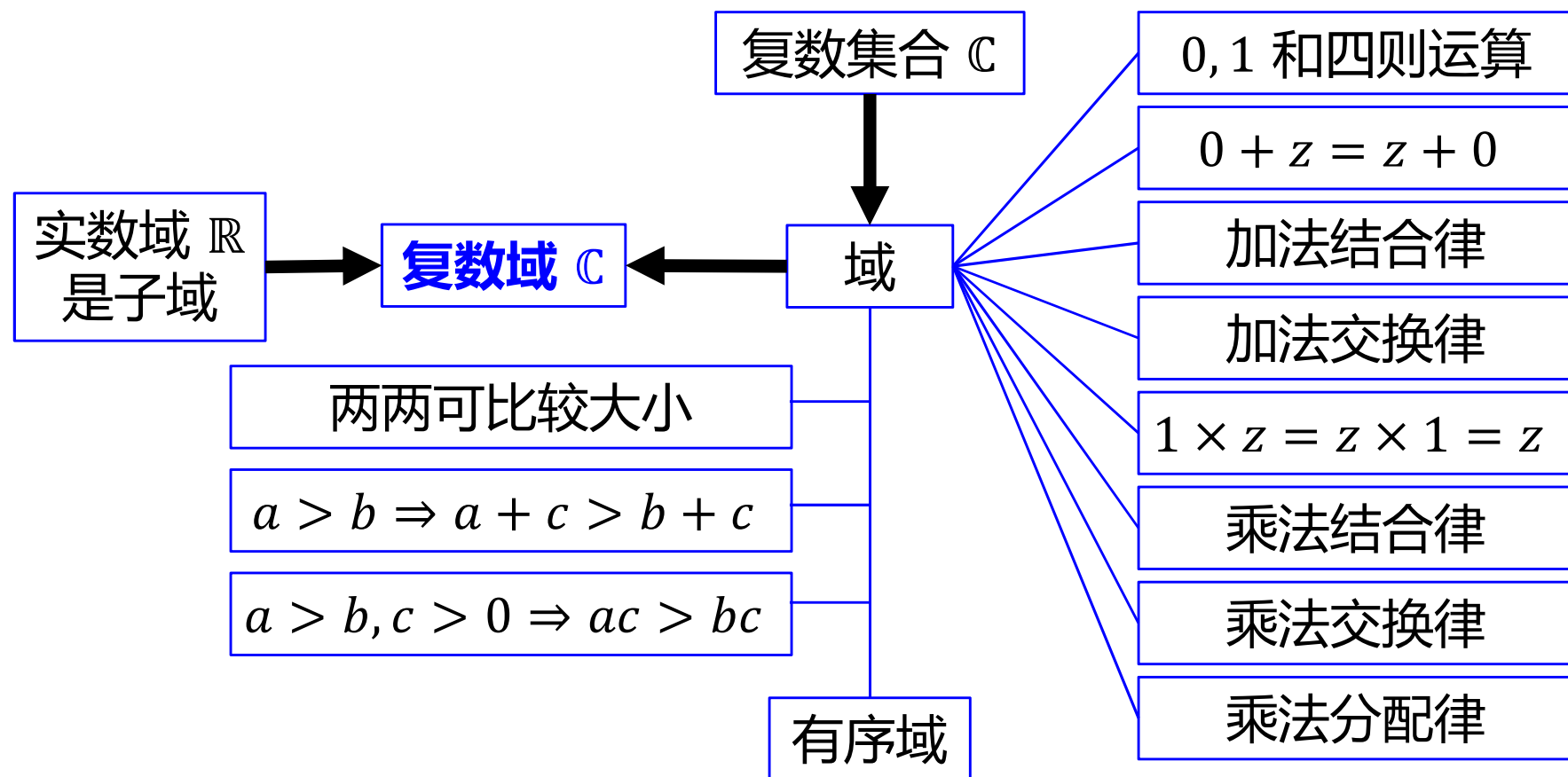




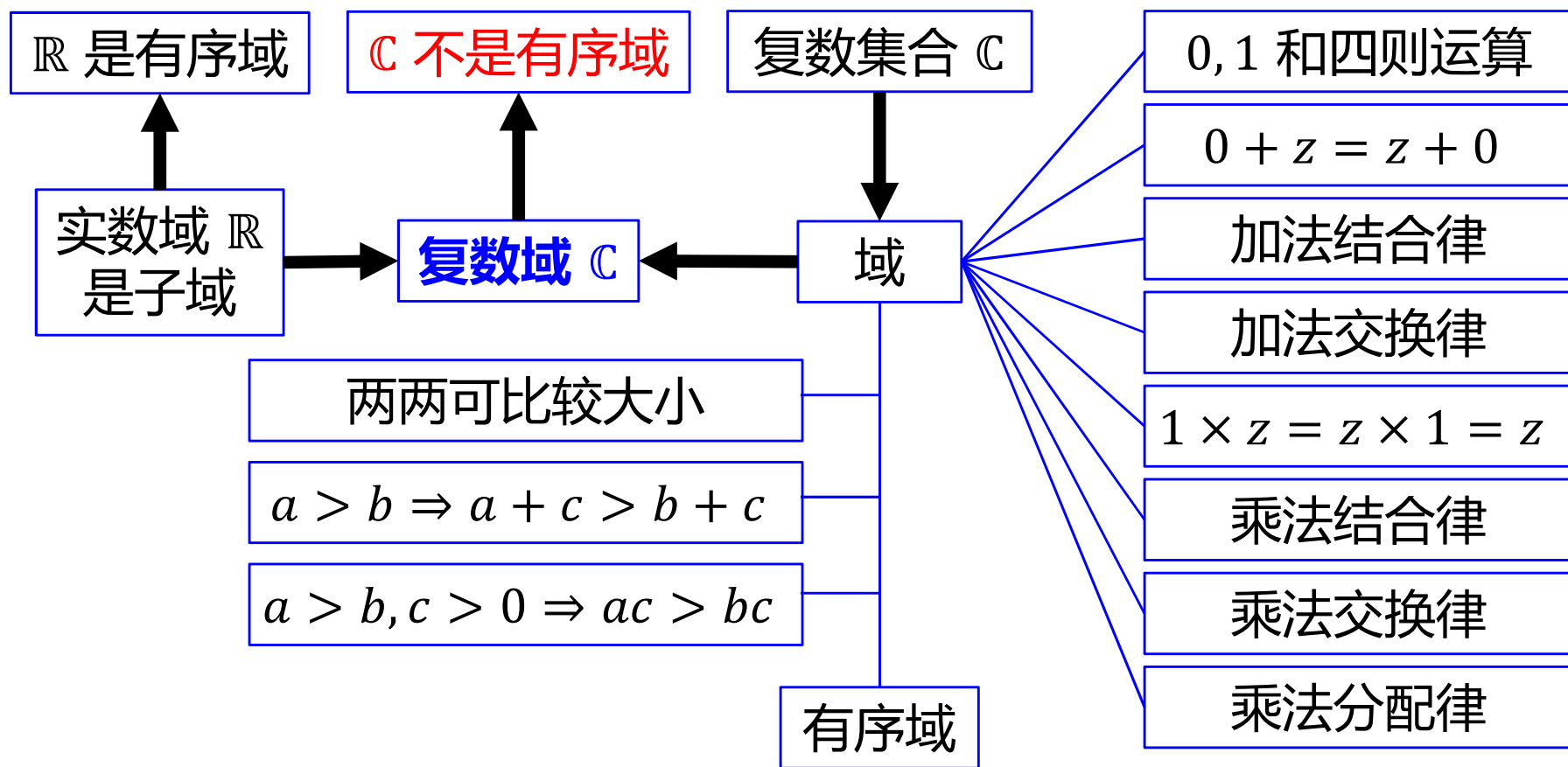
*复数域



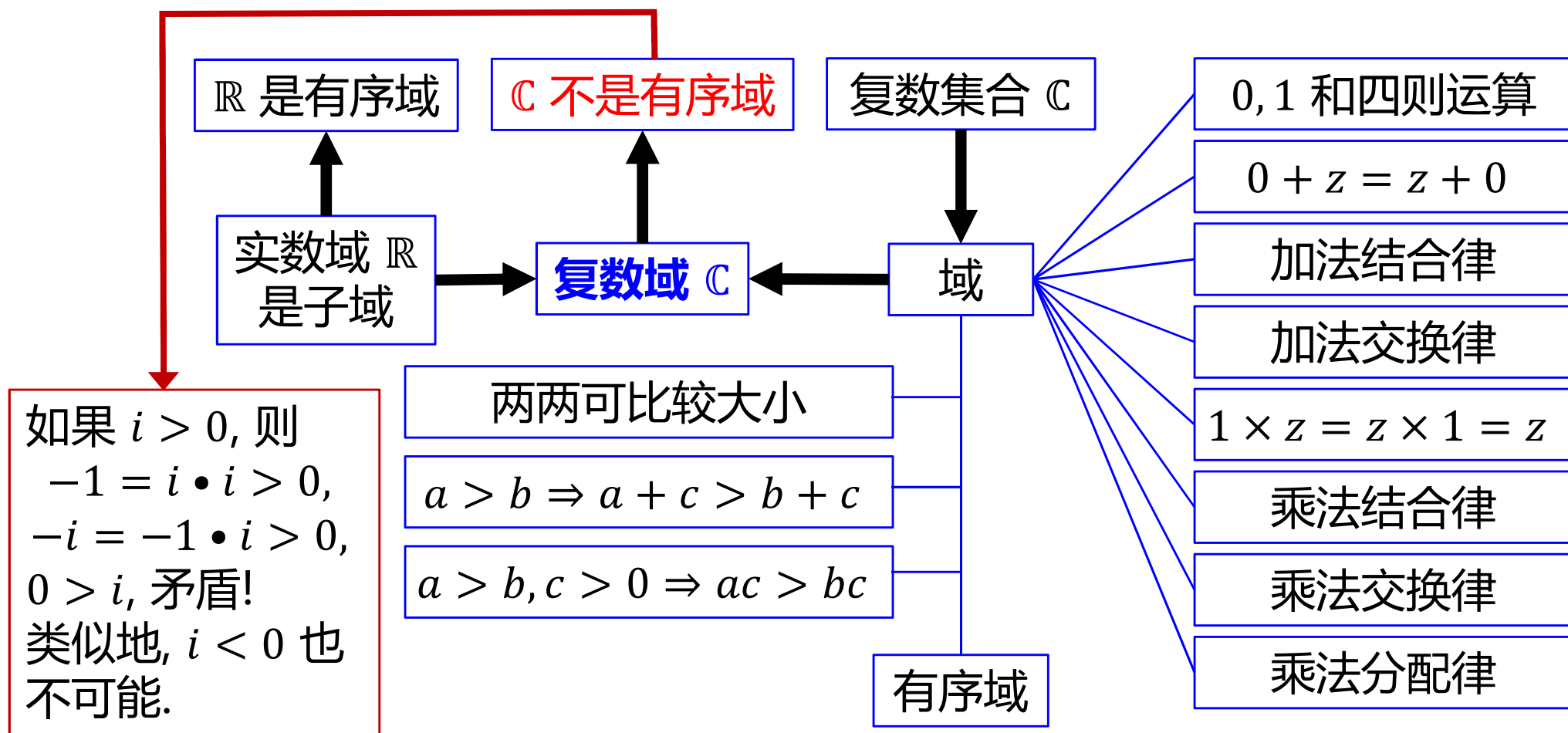
*复数域



*复数域



*复数域



定义

称 $\bar{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

定义

称 $\bar{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

性质

$$\bullet \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

定义

称 $\bar{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

性质

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$
- z 是 \bar{z} 的共轭复数.

定义

称 $\bar{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

性质

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$
- z 是 \bar{z} 的共轭复数.
- $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2.$
- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z.$

定义

称 $\bar{z} = x - yi$ 是复数 $z = x + yi$ 的**共轭复数**.

性质

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$
- z 是 \bar{z} 的共轭复数.
- $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2.$
- $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z.$
- z 是实数当且仅当 $z = \bar{z}.$
- z 是纯虚数当且仅当 $z = -\bar{z}$ 且 $z \neq 0.$

- 由于 $z\bar{z}$ 是一个实数,

- 由于 $z\bar{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$$

将其转化为乘法.

例题: 复数的实部和虚部

- 例 设 $z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z \cdot \bar{z}$.

例题: 复数的实部和虚部

- 例 设 $z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z \cdot \bar{z}$.

- 解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = -\frac{i}{i \cdot i} - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)}$$

例题: 复数的实部和虚部

- 例 设 $z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 以及 $z \cdot \bar{z}$.

- 解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = -\frac{i}{i \cdot i} - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

例题: 复数的实部和虚部

- 例 设 $z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 以及 $z \cdot \bar{z}$.

- 解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = -\frac{i}{i \cdot i} - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

- 因此

$$\operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}$$

例题: 复数的实部和虚部

- 例 设 $z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ 以及 $z \cdot \bar{z}$.

- 解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = -\frac{i}{i \cdot i} - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

- 因此

$$\operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad z \cdot \bar{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

例题: 复数的共轭复数

- 例 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

例题: 复数的共轭复数

• 例 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

• 解

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2}$$

例题: 复数的共轭复数

• 例 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

• 解

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

例题: 复数的共轭复数

- 例 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

- 解

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

- 因此

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

典型例题：利用共轭复数证明等式

- 例 证明 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$.

典型例题：利用共轭复数证明等式

- 例 证明 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$.
- 解 由 $\overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = \bar{z}_1 \cdot z_2$ 得

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$$

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- 例 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$.

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- 例 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- 例 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.
- 解 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)}$$

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- **例** 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.
- **解** $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- **例** 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.
- **解** $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

- 即 $z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2), (z-\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0.$

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- **例** 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.
- **解** $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

- 即 $z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2), (z-\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0$.
- 由于 $y \neq 0$, 因此 $z \neq \bar{z}$.

典型例题：共轭复数判断实数和纯虚数

- **例** 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.
- **解** $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

- 即 $z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2), (z-\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0$.
- 由于 $y \neq 0$, 因此 $z \neq \bar{z}$.
- 故 $z\bar{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$.

*复数的其它构造

- 复数也有其它的构造方式,

*复数的其它构造

- 复数也有其它的构造方式, 例如

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

$$\text{其中 } E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}.$$

*复数的其它构造

- 复数也有其它的构造方式, 例如

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

$$\text{其中 } E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}.$$

- 此时自然地有加法、乘法、取逆等运算, 它和我们前面的定义没有本质差别.