数学（下）

主讲教师: 汪任 (目前由张神星代课)
办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东
Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn
课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

第二章　极限和连续

❶ 数列的极限

❷ 函数的极限

❸ 极限的性质

❹ 无穷小和无穷大

❺ 极限的存在准则

❻ 函数的连续性

第一节　数列的极限

- 极限的引入
- 极限的朴素定义
- 数列极限的定义
- 收敛数列的性质

在数学中, 很多时候我们需要描述一个无限过程的变化行为. 为了严格地描述并研究它们, 我们需要引入极限的概念.

例

- 双曲线 $xy = 1$ 的图像的渐近线是 $x = 0, y = 0$.
- 指数函数 $y = a^x(a > 0, a \neq 1)$ 的图像的渐近线是 $y = 0$.
- 函数 $y = x + \dfrac{1}{x}$ 的图像的渐近线是什么呢?

为了回答这个问题, 我们需要明确 "渐近线" 的含义. 朴素地讲, 渐近线是指: 若曲线 C 上一点 M 沿曲线越来越无限接近无穷远时, 它到一条直线 l 的距离无限接近零, 则称直线 l 为曲线 C 的渐近线. 而想要严格地描述 "越来越无限接近" 的含义, 就需要引入极限的概念.

例

一个物体在空间中移动，它的位置坐标是 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$，其中 s_1, s_2, s_3 都是时间 t 的函数. 它在时间段 $[t, t']$ 内的平均速度定义为矢量

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \qquad v_i = \frac{s_i(t') - s_i(t)}{t' - t}.$$

当 t' 越来越无限接近 t 时，平均速度会无限接近它在时刻 t 的瞬时速度.

同样，我们需要利用极限来准确地描述它.

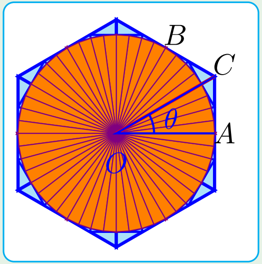
例

我国古代数学家刘徽为了计算圆周率 π, 采用无限逼近的思想建立了割圆法. 依次计算单位圆的内接和外切正 $n = 6, 12, 24, 48, \dots$ 边形的面积

$$A_n = \frac{1}{2} n \sin 2\theta, \qquad B_n = n \tan \theta, \qquad \theta = \frac{\pi}{n},$$

那么必定有 $A_n < \pi < B_n$. 这个数列的递推关系可以由半角公式推得:

n	A_n	B_n
12	3.00000000	3.21539031
24	3.10582854	3.15965994
48	3.13262861	3.14608622
12288	3.14159251	3.14159272
24576	3.14159262	3.14159267



由于 $A_n/B_n = \cos^2\theta$ 越来越趋近于 1, 所以 A_n, B_n 的"极限"就是 π.

极限可以按如下方式理解:

极限过程: $x \to$ 某个状态　　记为 $y \to A$

极限的朴素定义

给定一个函数 $y = f(x)$.
当 x 越来越无限接近于某个状态时, y 无限接近某个值 A, 则 A 就是 $y = f(x)$ 关于这个极限过程的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to \text{某个状态}} f(x) = A$ 或 $y \to A(x \to \text{某个状态})$.

我们来将该表述严格化. 先考虑数列的情形. 所谓的(无穷) 数列是指依次排列的无穷多个数

$$\{a_n\}_{n \geqslant 1} : a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

其中 a_n 被称为它的第 n 项, 用于描述所有项的式子 $a_n = f(n)$ 被称为它的通项.

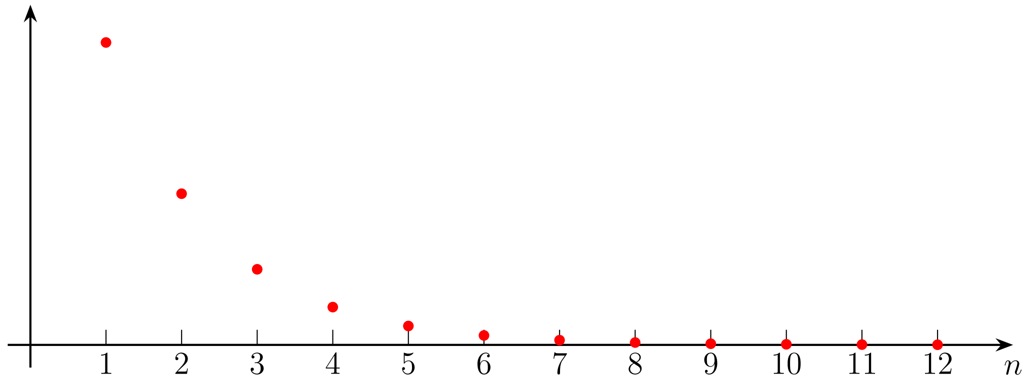
不难看出, 一个数列和一个定义域是全体正整数的函数

$$f : \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\} \to \mathbb{R}$$

是一回事.

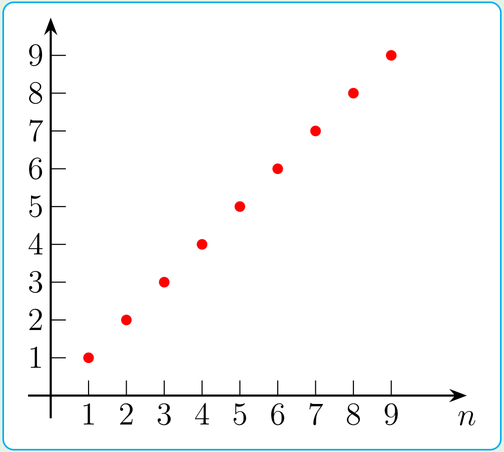
例

(1) $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}: \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \cdots$ 递减地 $\to 0.$



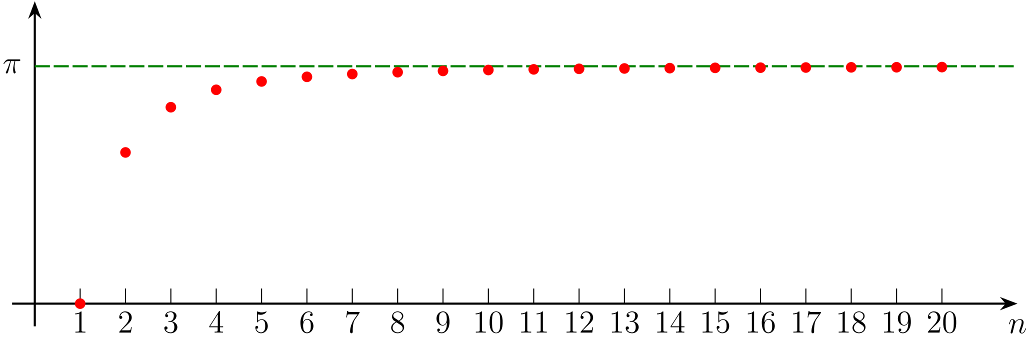
例

(2) $\{n\} : 1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 无限增大.



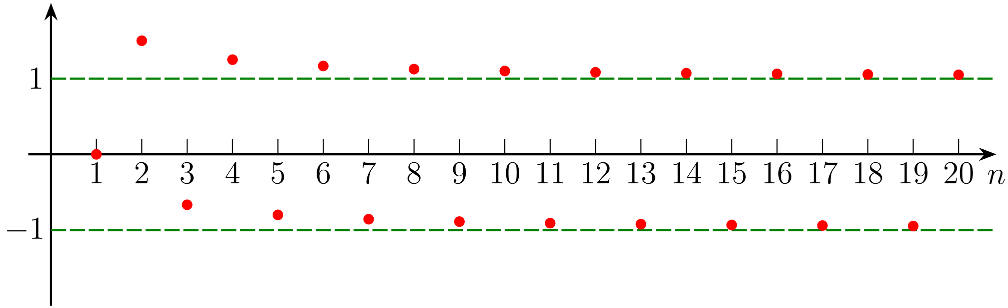
例

(3) $\left\{n\sin\dfrac{\pi}{n}\right\}$ 递增地 $\to \pi$.



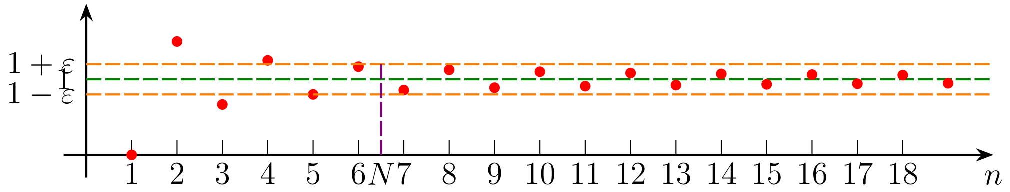
例

(4) $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}\right\}$ 奇数项和偶数项分别交错地越来越接近 1 和 -1.



例

(5) $\left\{1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 交错地 $\to 1$.



所谓“越来越无限接近”，是指“比任何正实数”都要接近. 换言之, 对任意的正实数 $\varepsilon>0$, $|a_n-a|$ 最终是要小于 ε 的. 即存在 $N=N_\varepsilon$ 使得当 $n>N$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon$.

定义

设有数列 $\{a_n\}$. 如果存在常数 a 满足:

$$\boxed{\forall\varepsilon>0, \exists N \text{ 使得当 } n>N \text{ 时, 有 } |a_n-a|<\varepsilon,} \quad \varepsilon\text{-}N \text{ 语言}$$

则称该数列收敛, a 为 a_n 当 $n\to\infty$ 时的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a (n\to\infty).$$

如果不存在这样的常数 a, 则称该数列发散(没有极限, 不收敛).

注意并不是 $\exists N, \forall\varepsilon$ 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

注意到当 $\varepsilon'>\varepsilon$ 时, 我们可以取 $N_{\varepsilon'}=N_\varepsilon$. 所以在证明极限的问题中, 可以只考虑例如 $\varepsilon<1$ 的情形. 同理, 我们可以只考虑例如 $n\geqslant 100$ 的情形.

例

单选题：“极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 存在”的充要条件是“$\forall \varepsilon > 0$,(C)”.

(A) 必有无穷多项 a_n 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$
(B) 所有项 a_n 满足 $|a_n - a| < \varepsilon$
(C) 只有有限项 a_n 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$
(D) 可能有无穷多项 a_n 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$

解

$\forall \varepsilon > 0$，存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 这等价于至多只有有限项 $a_1, \ldots, a_N$ 满足 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$. 故选 C，而 BD 均不正确. 对于 A，反例 $a_n = (-1)^n, a = 1$.

例

证明当 $|q|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

分析

分为两步:

- 估计 $|a_n - a|$, 得到它和 n 的不等式关系, 从而求得 $N = N_\varepsilon$. 这个过程中可以进行适当的放缩.
- 将上述 N 代入极限的定义中.

对于本题, 从 $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$ 解得 $n > \log_{|q|}\varepsilon$.

证明

$\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = \log_{|q|}\varepsilon$. 当 $n > N$ 时, 有 $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. □

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$.

证明

我们有 $\left|\dfrac{\sin n}{n} - 0\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$. $\forall \varepsilon > 0$, 令 $N = \dfrac{1}{\varepsilon}$. 当 $n > N$ 时，有

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$. □

例题: 极限的定义证明

例

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}=2.$

证明

我们有 $\left|\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}-2\right|=\left|\dfrac{2n+12}{n^2-8}\right|$. 若 $n\geqslant 12$, 则 $\left|\dfrac{2n+12}{n^2-8}\right|\leqslant\dfrac{3n}{n^2-n}=\dfrac{3}{n-1}$.

$\forall\varepsilon>0$, 令 $N=\max\left\{1+\dfrac{3}{\varepsilon},12\right\}$. 当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{2n^2+2n-4}{n^2-8}-2\right|\leqslant\frac{3}{n-1}<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n-4}{n^2-8}=0.$ □

定理 (唯一性)

收敛数列的极限是唯一的.

证明

设 a 和 b 都是 $\{a_n\}$ 的极限. $\forall\varepsilon>0,\exists N,M>0$ 使得

$$\text{当 } n>N \text{ 时}, |a_n-a|<\varepsilon; \text{ 当 } n>M \text{ 时}, |a_n-b|<\varepsilon.$$

对于 $n>\max\{N,M\}$, 由三角不等式有

$$|a-b|\leqslant|a-a_n|+|a_n-b|<2\varepsilon.$$

若 $a\neq b$, 则可取 $\varepsilon=\left|\dfrac{a-b}{2}\right|>0$ 代入得到 $2\varepsilon<2\varepsilon$, 矛盾! 因此 $a=b$. □

定理 (有界性)

收敛数列是有界数列.

证明

设数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a, 则对于 $\varepsilon = 1$, 存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时

$$|a_n - a| < \varepsilon = 1, \qquad |a_n| \leqslant |a| + |a_n - a| < |a| + 1.$$

因此对于 $M = \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, |a| + 1\}$, 有 $|a_n| \leqslant M$. 这说明 $\{a_n\}$ 是有界数列. $\square$

收敛数列一定有界, 但反之未必.

例

对于数列 $\{a_n\} = (-1)^n$, 该数列是有界的但是不收敛.

数列极限的保号性

定理 (保号性)

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n > 0$.

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a < 0$, 则 $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $a_n < 0$.

证明

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = \dfrac{a}{2}$, 则

$$|a_n - a| < \frac{a}{2}, \qquad a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

(2) 同理可得. $\square$

注意这里 > 0 不能换成 $\geqslant 0$, < 0 也不能换成 $\leqslant 0$. 例如 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

推论 (逆否命题)

(1) 如果收敛数列 $\{a_n\}$ 从某项起 $\geqslant 0$, 则它的极限 $\geqslant 0$.

(2) 如果收敛数列 $\{a_n\}$ 从某项起 $\leqslant 0$, 则它的极限 $\leqslant 0$.

同理, 这里 $\geqslant$ 也不能换成 $>$ (这很容易记错!), 例如 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

推论

如果收敛数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足从某项起 $a_n \geqslant b_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

数列的子数列

对于正整数集的一个无限子集合 $S \subseteq \mathbb{N}_+$, 将其中元素从小到大排成一列

$$S = \{k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots\},$$

则它对应了数列 $\{a_n\}$ 的一个子数列

$$\{a_{k_n}\}_{n\geqslant 1} : a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}, \ldots$$

特别地, 当 S 为全体正奇数时, 称 $\{a_{2n-1}\}_{n\geqslant 1}$ 为奇子数列; 当 S 为全体正偶数时, 称 $\{a_{2n}\}_{n\geqslant 1}$ 为偶子数列.

定理

$\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均收敛于 a.

证明

必要性 $(\Rightarrow)$: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall\varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 因此

$$|a_{2n-1} - a| < \varepsilon, \qquad |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

从而 $\{a_{2n-1}\}$ 和 $\{a_{2n}\}$ 均收敛于 a.

充分性 $(\Leftarrow)$: 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = a$, 则 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N, M$ 使得

$$\text{当 } n > N \text{ 时}, |a_{2n-1} - a| < \varepsilon; \qquad \text{当 } n > M \text{ 时}, |a_{2n} - a| < \varepsilon.$$

所以当 $n > \max\{2N-1, 2M\}$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 故数列 $\{a_n\}$ 收敛到 a. □

定理

$\{a_n\}$ 收敛于 a 当且仅当它的所有子数列均收敛于 a.

设 $S_1, \dots, S_m \subseteq \mathbb{N}_+$ 均是无限集合, 且

$$S_1 \cup \cdots \cup S_m = \mathbb{N}_+.$$

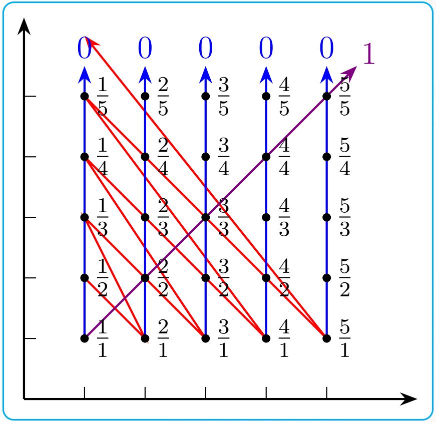
那么 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \iff$ 每个 S_i 对应子数列均收敛于 a.

这是因为 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_i$ 使得 S_i 中至多有 N_i 个元素 n 不满足 $|a_n - a| < \varepsilon$, 从而当

$$n > N_1 + N_2 + \cdots + N_m$$

时, $|a_n - a| < \varepsilon$.

然而对于无穷多个 S_i, 这是不对的. 下图中红色连线形成一个数列 $\{a_n\}$, 蓝色连线对应的子数列均收敛到 0, 但是 $\{a_n\}$ 本身却不收敛.



在数学中, 常常有这种在有限情形成立, 无限情形不成立的结论. 因此遇到涉及无限的情形要小心.

第二节　函数的极限

- 函数极限的定义
- 函数极限的证明

我们仿造数列的极限来定义 $x \to +\infty$ 时 $f(x)$ 的极限. 回忆数列的 ε-N 语言:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ 使得当 } n > N \text{ 时, 有 } |a_n - a| < \varepsilon.$$

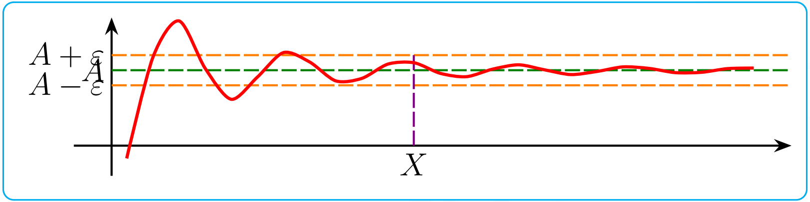
定义

设 $x > M$ 时函数 $f(x)$ 有定义. 如果存在常数 A 满足:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists X \text{ 使得当 } x > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon,} \quad \varepsilon\text{-}X \text{ 语言}$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to +\infty)$.

从图像上看, 就是函数在 $(X,+\infty)$ 上的图像被夹在直线 $y = A \pm \varepsilon$ 之间.



仿造上述定义, 我们有:

定义

设 $x < -M$ 时函数 $f(x)$ 有定义. 如果存在常数 A 满足:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X \text{ 使得当 } x < -X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

定义

设 $|x|>M$ 时函数 $f(x)$ 有定义. 如果存在常数 A 满足:

$$\forall\varepsilon>0,\exists X \text{ 使得当 } |x|>X \text{ 时, 有 } |f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

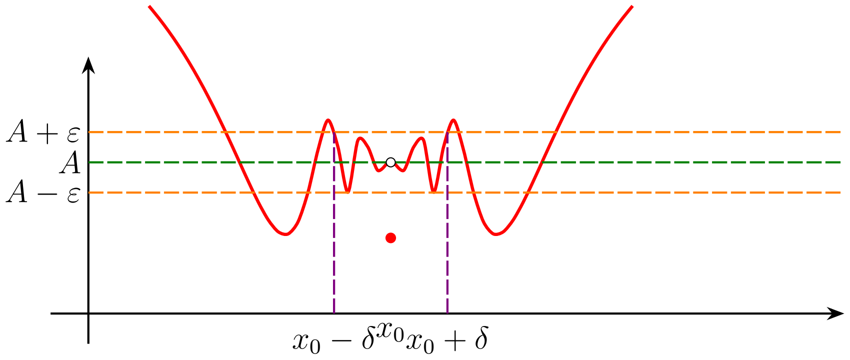
注意, 函数极限中需要分清 $x\to\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$, 而数列情形只有 $n\to\infty$, 因为 n 是正整数.

类似于数列极限与子数列极限的关系, 我们有

定理

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \iff \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

类似地，当 x 越来越接近 x_0 时，如果函数值 $f(x)$ 越来越接近常数 A，则 A 就是 $x \to x_0$ 时的极限.



为了陈述方便, 我们引入去心邻域的概念.

定义

设 $\delta > 0$. x_0 的去心 δ 邻域是指

$$\mathring{U}(x_0,\delta) = \{x : 0 < |x - x_0| < \delta\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta).$$

定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义. 如果存在常数 A 满足

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ 使得当 } x \in \mathring{U}(x_0,\delta) \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon,} \quad \varepsilon\text{-}\delta \text{ 语言}$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限, 记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A (x \to x_0)$.

类似地可以定义单侧极限:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \iff \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \text{ 使得当 } x\in(x_0,x_0+\delta) \text{ 时, 有 } |f(x)-A|<\varepsilon.$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \iff \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \text{ 使得当 } x\in(x_0-\delta,x_0) \text{ 时, 有 } |f(x)-A|<\varepsilon.$$

同样地, 我们有:

定理

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

为了简便, 我们记 $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$. 注意它们和 $f(x_0)$ 并无关系, f 甚至可以在 x_0 处无定义.

例

证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

分析

和数列极限类似，这种问题的证明通常也分为两步：

- 估计 $|f(x)-A|$，得到它和 $|x-x_0|<\delta$ 或 $|x|>X$ 的不等式关系．从而求得 δ 或 X．这个过程中可以进行适当的放缩．
- 将 δ 或 X 代入极限的定义中．

对于本题，从 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ 解得 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

证明

$\forall\varepsilon>0$，令 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$. 当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\dfrac{1}{x}-0\right|=\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$. □

例

证明 $a>1$ 时，$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.

分析

由于 $a>1$ 时，$\log_a x$ 是单调递增的．因此 $|a^x - 0| = a^x < \varepsilon \iff x < \log_a \varepsilon$.

证明

$\forall \varepsilon > 0$，令 $X = -\log_a \varepsilon$．当 $x < -X$ 时，有 $|a^x - 0| = a^x < \varepsilon$.
所以 $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$. $\square$

例

证明 $\lim_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b$.

分析

$|(ax+b) - (ax_0+b)| = a \cdot |x - x_0| < \varepsilon$, 因此我们可以取 $\delta = \varepsilon/a$. 注意我们需要单独考虑 $a = 0$ 的情形.

证明

我们有 $|(ax+b) - (ax_0+b)| = a \cdot |x - x_0|$. 如果 $a = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = 1$. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|(ax+b) - (ax_0+b)| = 0 < \varepsilon$.

如果 $a \neq 0$, $\forall \varepsilon > 0$, 令 $\delta = \frac{\varepsilon}{a}$. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|(ax+b) - (ax_0+b)| = a \cdot |x - x_0| < a\delta = \varepsilon.$$

所以 $\lim_{x \to x_0} (ax + b) = ax_0 + b$. □

例

证明 $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$.

与三角函数有关的放缩往往要用到和差化积公式

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}, \qquad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

然后将不含 $x - x_0$ 的项放缩到 1；以及三角函数基本不等式

$$|\sin x| \leqslant |x|, \forall x; \qquad |x| \leqslant |\tan x|, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

例题：三角函数在一点的极限

证明

我们有

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| = |x-x_0|.$$

$\forall \varepsilon > 0$，令 $\delta = \varepsilon$. 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$. □

例

证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

分析

从图像上可以看出 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\arctan x=\pm\dfrac{\pi}{2}$.

我们想要使用 $|x|$ 来控制 $\left|\arctan x-\dfrac{\pi}{2}\right|$, 不过这个形式不容易估计. 令 $t=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x$, 则问题变成了 $|x|=\left|\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)\right|=\dfrac{1}{|\tan t|}$ 和 $|t|$ 的关系. 而我们有 $|t|\leqslant|\tan t|$.

我们还需要估计 t 的范围. 由于我们考虑的是 $x\to+\infty$, 不妨设 $x>0$, 那么

$$\arctan x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\qquad t=\frac{\pi}{2}-\arctan x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

证明

我们来证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$. 当 $x>0$ 时, $0<\dfrac{\pi}{2}-\arctan x<\dfrac{\pi}{2}$. 因此

$$\left|\frac{\pi}{2}-\arctan x\right|\leqslant\left|\tan\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\right|=\frac{1}{|\tan(\arctan x)|}=\frac{1}{|x|}.$$

$\forall\varepsilon>0$, 令 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$. 当 $x>X$ 时, 有

$$\left|\frac{\pi}{2}-\arctan x\right|\leqslant\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}=\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$.

类似可证, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$. 因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在. □

例

证明 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$

分析

这种极限是 $\dfrac{f}{g}$ 型，其中 $f\to 0, g\to 0$. 我们称之为 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式. 它的极限可能存在，可能不存在. 这种一般要去掉公因式，将其变为定式.

证明

$\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x+2-4|=|x-2|$. $\forall\varepsilon>0$，令 $\delta=\varepsilon$. 当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x-2|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4.$ □

例

如果函数 $f(x)=\begin{cases} a\sin x, & x<\pi/2; \\ x+b, & x>\pi/2 \end{cases}$ 满足 $\lim\limits_{x\to\pi/2} f(x)=1$，求 a,b.

分析

本题是典型的由分段函数性质求待定参数的问题，我们后续会经常遇到．由于一点处极限等价于两侧极限都存在且为 1，因此我们会得到两个等式，从而可以解出两个未知参数．

由于 $f(x)$ 的两个分段都是我们已经求过极限的函数，因此我们可以直接用前面已经证明的结论．

解

由于 $f\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^+\right]=\frac{\pi}{2}+b$，$f\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^-\right]=a\sin\frac{\pi}{2}=a$，因此 $a=1, b=1-\frac{\pi}{2}$.

例

对于哪些 x_0，$\lim\limits_{x\to x_0}[x]$ 存在.

分析

与 $[x]$ 有关的问题往往需要用到两个不等式

$$[x]\leqslant x<x+1 \text{ 或 } x-1<[x]\leqslant x.$$

从 $[x]$ 的图像上可以看出 $x_0\in\mathbb{Z}$ 时左右极限不相等，从而极限不存在. 解答时，我们取 x_0 的 $\delta=1/2$ 邻域，则在这个邻域的左右各自半边内，$[x]$ 是常值函数，从而得到单侧极限.

当 $x_0\notin\mathbb{Z}$ 时，我们同样希望取一个小邻域使得 $[x]$ 是常值函数. 这需要 δ 不超过 x_0 和两边的最近的整数的距离. 所以

$$\delta=\min\{x_0-[x_0],[x_0]+1-x_0\}.$$

解

如果 $x_0 \in \mathbb{Z}$，则

- 当 $x \in (x_0, x_0 + 1/2)$ 时，$[x] = x_0$，所以 $\lim\limits_{x \to x_0^+} [x] = x_0$；
- 当 $x \in (x_0 - 1/2, x_0)$ 时，$[x] = x_0 - 1$，所以 $\lim\limits_{x \to x_0^-} [x] = x_0 - 1$.

因此 $\lim\limits_{x \to x_0} [x]$ 不存在.

如果 $x_0 \notin \mathbb{Z}$，令 $\delta = \min\{x_0 - [x_0], [x_0] + 1 - x_0\} > 0$. *name*

$$[x_0] \leqslant x_0 - \delta < x_0 + \delta \leqslant [x_0] + 1.$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$，从而 $[x_0] < x < [x_0] + 1$，$[x] = x_0$.
因此 $\lim\limits_{x \to x_0} [x] = x_0$.

故当且仅当 $x_0 \notin \mathbb{Z}$ 时，$\lim\limits_{x \to x_0} [x]$ 存在.

第三节　极限的性质

第四节　无穷小和无穷大

第五节　极限的存在准则

第六节　函数的连续性