第三章　复变函数的积分

3.1　复变函数积分的概念

作业 1. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\oint_C \frac{\overline{z}}{|z|}\,\mathrm{d}z$.

作业 2. 求 $\int_C z^2\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为:

(1) 从 0 到 $3+i$ 的直线段;

(2) 从 0 到 3 再到 $3+i$ 的折线段;

3.2　柯西-古萨基本定理和复合闭路定理

作业 3. 试用观察法得出下列积分的值, 并说明为什么, 其中 $C:|z|=1$.

(1) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-2}$;

(2) $\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{\cos z}$;

(3) $\oint_C \frac{e^z}{(z-2i)^2}\,\mathrm{d}z$;

(4) $\oint_C e^z \sin z\,\mathrm{d}z$;

(5) $\oint_C \frac{1}{\overline{z}}\,\mathrm{d}z$;

(6) $\oint_C (|z|+e^z\cos z)\,\mathrm{d}z$.

作业 4. 设 C 为正向圆周 $|z|=4$, 求 $\oint_C \frac{\sin z}{|z|^2}\,\mathrm{d}z$.

3.3　原函数和不定积分

作业 5. (2021 年 B 卷) 设 C 为从原点到 $1+i$ 的直线段, 求 $\int_C (z+1)^2\,\mathrm{d}z$.

作业 6. (2022 年 A 卷) 设 C 为从 i 到 $i-\pi$ 再到 $-\pi$ 的折线, 求 $\int_C \cos^2 z\,\mathrm{d}z$.

作业 7. (2020 年 A 卷) 设 C 为从原点到 2 再到 $2+i$ 的折线段, 求 $\int_C z^2\,\mathrm{d}z$.

作业 8. 求 $\int_{-\pi i}^{3\pi i} e^{2z}\,\mathrm{d}z$.

作业 9. 求 $\displaystyle\int_{-\pi i}^{\pi i} \sin^2 z \,\mathrm{d}z$.

作业 10. 求 $\displaystyle\int_0^i (z-i)e^{-z} \,\mathrm{d}z$.

3.4 柯西积分公式

作业 11. 选择题: (2021 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|\zeta|=2$, $f(z)=\displaystyle\oint \frac{\sin\zeta}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 则 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=$ ( ).

(A) πi (B) $-\pi i$ (C) 0 (D) $2\pi i$

作业 12. 填空题: (2021 年 A 卷) 设 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析且不为零, C 为 D 内任何一条简单闭曲线, 则 $\displaystyle\oint_C \frac{f''(z)+2f'(z)+f(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=$__________.

作业 13. 填空题: 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 则 $\displaystyle\oint_C \overline{z}\,\mathrm{d}z=$__________.

作业 14. 填空题: (2022 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 则 $\displaystyle\oint_C \left(\frac{\overline{z}}{z}\right)\mathrm{d}z=$__________.

作业 15. 设 C 为以 $\pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{6}{5}i$ 为顶点的菱形, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z$.

作业 16. (2021 年 B 卷) 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z^2+1)(z^2+9)}\,\mathrm{d}z$.

作业 17. (2022 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|z-3|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z$.

作业 18. 设 C_1 为正向圆周 $|z|=2$, C_2^- 为负向圆周 $|z|=3$, $C=C_1+C_2^-$ 为复合闭路, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\cos z}{z^3}\,\mathrm{d}z$.

作业 19. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}z$.

作业 20. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\cos z}{z^{2023}}\,\mathrm{d}z$.

作业 21. 设 C 为正向圆周 $|z|=1.5$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\ln(z+2)}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z$.

作业 22. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, $f(z)=\displaystyle\oint_C \frac{\zeta^3+\zeta+1}{(z-\zeta)^2}\,\mathrm{d}\zeta$. 求 $f'(1+i)$ 和 $f'(4)$.

作业 23. 设 C_1 和 C_2 为两条分离的闭路, 证明

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1}\frac{z^2\,\mathrm{d}z}{z-z_0}+\oint_{C_2}\frac{\sin z\,\mathrm{d}z}{z-z_0}\right]=\begin{cases} z_0^2, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_1 \text{ 内时}, \\ \sin z_0, & \text{当 } z_0 \text{ 在 } C_2 \text{ 内时}. \end{cases}$$

作业 24. 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 为 D 内任意一条闭路, 且 C 的内部完全包含在 D 中. 如果 $f(z)=g(z)$ 在 C 上所有的点处成立, 证明在 C 内部所有点处 $f(z)=g(z)$ 也成立.

作业 25. (2021 年 B 卷) 请谈一谈复积分与实积分的区别.

3.5 解析函数与调和函数的关系

作业 26. (2021 年 A 卷) 下列命题中, 正确的是 (　).

(A) 设 v_1, v_2 在区域 D 内均为 u 的共轭调和函数, 则必有 $v_1=v_2$
(B) 解析函数的实部是虚部的共轭调和函数
(C) 以调和函数为实部与虚部的函数是解析函数
(D) 若 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，则 u_x 为 D 内的调和函数

作业 27. (2022 年 A 卷) 已知 $v(x,y)=x^3+y^3-axy(x+y)$ 为调和函数, 求参数 a 以及解析函数 $f(z)$ 使得 $v(x,y)$ 是它的虚部.

作业 28. (2021 年 A 卷) 已知 $f(z)=y^3+ax^2y+i(bx^3-3xy^2)$ 为解析函数, a,b 为实数, 求参数 a,b 和 $f'(z)$.

作业 29. 设 u 为区域 D 内的调和函数, $f(z)=u_x-iu_y$. 那么 $f(z)$ 是不是 D 内的解析函数? 为什么?

作业 30. 证明一对共轭调和函数的乘积仍为调和函数.

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 31. 设 $f(z)=u+iv$. 当 u,v 是二元可微函数时, 我们也可以使用格林公式来计算 $f(z)$ 绕闭路的积分.

(1) 设 C 是一条光滑或逐段光滑的闭路, D 是其内部区域. 函数 $u(x,y), v(x,y)$ 在 D 及其边界上连续可微. 证明

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=-\iint_D (v_x+u_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+i\iint_D (u_x-v_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

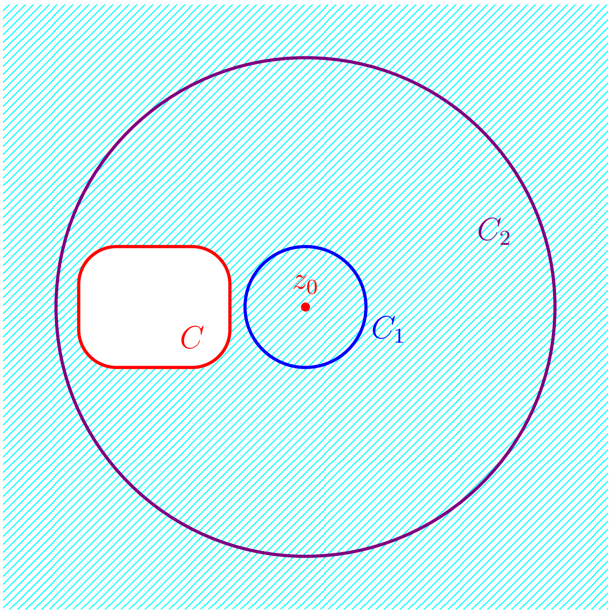
并由此计算 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\operatorname{Re}z\,\mathrm{d}z$.

(2) 证明

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=-\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\bar z=2i\iint_D \frac{\partial f}{\partial \bar z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

并由此计算 $\oint_{|z|=1} \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$.

作业 32. 设 $f(z)$ 在闭路 C 及其外部区域 D 解析, $z_0 \in D$. 是否有类似的柯西积分公式? 我们假设 $\lim_{z\to\infty} f(z) = A$ 存在.



(1) 选取以 z_0 为圆心的圆 C_1, C_2 如图所示. 利用长大不等式证明 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \dfrac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = A$.

(2) 利用复合闭路定理证明 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C} \dfrac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z = A - f(z_0)$.