合 肥 工 业 大 学 试 卷 参 考 答 案 （A）

2021～2022 学年第 二 学期　课程代码 034Y01　课程名称 数学（下）　命题教师 集体　系主任审批＿＿＿＿
教学班级＿＿＿＿　学生姓名＿＿＿＿　学号＿＿＿＿　考试日期 2022 年 6 月 18 日 8:00-10:00　成绩＿＿＿＿

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. e, **2.** $2x\cos(x^2+1)\,\mathrm{d}x$, **3.** $1/2$,

4. $y=x-1+2\ln 2$, **5.** 1, **6.** 0.

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里：

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	D	B	A	C	D

三、解答题（每小题 8 分，共 64 分）

1. （8 分）【解】

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} \quad\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{x+2} \quad\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

$$=\frac{-2}{1}=-2. \quad\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

2. （8 分）【解】

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{\arcsin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x^2} \quad\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{2x} \quad\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}. \quad\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

3. （8 分）【解】

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} \quad\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\frac{3t^2+1}{2t+1}, \quad\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}y'/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} \quad\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\frac{6t(2t+1)-(3t^2+1)2}{(2t+1)^3}=\frac{6t^2+6t-2}{(2t+1)^3}. \quad\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

4. （8 分）【解】

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 因此

$$f(0)=f(0^+) \quad\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$=b=\lim_{x\to0^-}x\arctan\frac{1}{x}=0\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0. \quad\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 因此

$$f'_-(0)=f'_+(0), \quad\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x\arctan\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2} \quad\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$f'_+(0)=(2x+a)|_{x=0}=a, \quad\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

因此 $a=-\dfrac{\pi}{2}$. ……(1 分)

由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=+\infty, \quad\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{1}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}x\arctan\frac{1}{x}=\lim_{t\to0^-}\frac{\arctan t}{t}=1,$$

因此曲线 $y=f(x)$ 的渐近线只有 $y=1$. ……(1 分)

合 肥 工 业 大 学 试 卷 参 考 答 案 （A）

2021 ~ 2022 学年第 二 学期　课程代码 034Y01　课程名称 数学（下）　命题教师 集体　系主任审批______

教学班级______　学生姓名______　学号______　考试日期 2022 年 6 月 18 日 8:00-10:00　成绩______

5. （8 分）【解】

由

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1) = 0$$ ……（2 分）

可得驻点 $x = -\frac{1}{3}, 1.$ ……（2 分）

由于

$$f(-2) = -10, \quad f(2) = 2, \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{27}, \quad f(1) = -1,$$ ……（2 分）

因此最大值为 2, 最小值为 -10. ……（2 分）

6. （8 分）【证明】

证法一: 设 $f(x) = \tan x - x$, 则 ……（2 分）

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x \geqslant 0.$$ ……（2 分）

因此 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 从而 ……（2 分）

$$f(x_2) \geqslant f(x_1), \quad \tan x_2 - \tan x_1 \geqslant x_2 - x_1.$$ ……（2 分）

证法二: 设 $f(x) = \tan x$, 则 $f(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上连续, (x_1, x_2) 内可导. ……（2 分）

由拉格朗日中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi),$$ ……（2 分）

即

$$\frac{\tan x_2 - \tan x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\cos^2 \xi} \geqslant 1.$$ ……（2 分）

所以 $\tan x_2 - \tan x_1 \geqslant x_2 - x_1$. ……（2 分）

7. （8 分）【证明】

设 $F(x) = x^{2022} f(x)$, ……（2 分）

则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 内可导, ……（1 分）

且 $F(0) = 0, F(1) = f(1) = 0$. ……（1 分）

由罗尔中值定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $F'(\xi) = 0$. ……（2 分）

由于 $F'(x) = x^{2022} f'(x) + 2022 x^{2021} f(x)$ 且 $\xi \neq 0$, ……（1 分）

所以 $\xi f'(\xi) + 2022 f(\xi) = 1$. ……（1 分）

8. （8 分）【解】

(1)

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{x^3} = \frac{x^2 - 4}{x^3} = \frac{(x+2)(x-2)}{x^3}.$$ ……（1 分）

当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$. 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$. ……（1 分）

因此 $(0, 2]$ 是 $f(x)$ 的单减区间, $[2, +\infty)$ 是 $f(x)$ 的单增区间. ……（1 分）

所以 $f(x)$ 只有唯一的极小值 $f(2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$. ……（1 分）

(2)

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{12}{x^4} = -\frac{x^2 - 12}{x^4} = -\frac{(x - 2\sqrt{3})(x + 2\sqrt{3})}{x^4}.$$ ……（1 分）

当 $0 < x < 2\sqrt{3}$ 时, $f''(x) > 0$. 当 $x > 2\sqrt{3}$ 时, $f''(x) < 0$. ……（1 分）

因此 $(0, 2\sqrt{3}]$ 是曲线 $y = f(x)$ 的凹区间, $[2\sqrt{3}, +\infty)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的凸区间,. ……（1 分）

拐点为 $\left(2\sqrt{3}, \ln(2\sqrt{3}) + \frac{1}{6}\right)$. ……（1 分）