



# 复变函数与积分变换

### 张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.github.io

# 第二章 解析函数

- 1 解析函数的概念
- 2 函数解析的充要条件
- 3 初等函数

# 第一节 解析函数的概念

- 可导的函数
- ■可微的函数
- 解析的函数

由于  $\mathbb C$  和  $\mathbb R$  一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分。

由于  $\mathbb C$  和  $\mathbb R$  一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分。

#### 定义

设 w = f(z) 的定义域是区域  $D, z_0 \in D$ .

由于  $\mathbb C$  和  $\mathbb R$  一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分。

#### 定义

设 w = f(z) 的定义域是区域  $D, z_0 \in D$ . 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在,

由于  $\mathbb C$  和  $\mathbb R$  一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

#### 定义

设 w = f(z) 的定义域是区域  $D, z_0 \in D$ . 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 f(z) 在  $z_0$  可导.

由于  $\mathbb C$  和  $\mathbb R$  一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

#### 定义

设 w = f(z) 的定义域是区域  $D, z_0 \in D$ . 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 f(z) 在  $z_0$  可导. 这个极限值称为 f(z) 在  $z_0$  的导数,

由于  $\mathbb C$  和  $\mathbb R$  一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

#### 定义

设 w = f(z) 的定义域是区域  $D, z_0 \in D$ . 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 f(z) 在  $z_0$  可导. 这个极限值称为 f(z) 在  $z_0$  的导数, 记作

$$f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

由于  $\mathbb C$  和  $\mathbb R$  一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

#### 定义

设 w = f(z) 的定义域是区域  $D, z_0 \in D$ . 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 f(z) 在  $z_0$  可导. 这个极限值称为 f(z) 在  $z_0$  的导数, 记作

$$f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果 f(z) 在区域 D 内处处可导, 称 f(z) 在 D 内可导.

例

函数 f(z) = x + 2yi 在哪些点处可导?

例

函数 
$$f(z) = x + 2yi$$
 在哪些点处可导?

解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

函数 f(z) = x + 2yi 在哪些点处可导?

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z}$$

例

函数 f(z) = x + 2yi 在哪些点处可导?

解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}.$$

例

函数 f(z) = x + 2yi 在哪些点处可导?

### 解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}.$$

当  $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$  时, 上式  $\to 2$ ;

例

函数 f(z) = x + 2yi 在哪些点处可导?

## 解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}.$$

当  $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$  时, 上式  $\to 2$ ; 当  $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$  时, 上式  $\to 1$ .

例

函数 f(z) = x + 2yi 在哪些点处可导?

#### 觯

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}.$$

当  $\Delta x=0, \Delta y\to 0$  时, 上式  $\to 2$ ; 当  $\Delta y=0, \Delta x\to 0$  时, 上式  $\to 1$ . 因此该极限不存在, f(z) 处处不可导.

练习

函数 f(z) = x - yi 在哪些点处可导?

练习

函数 f(z) = x - yi 在哪些点处可导?

## 答案

处处不可导.

#### 练习

函数 f(z) = x - yi 在哪些点处可导?

#### 答案

处处不可导.

#### 例

求  $f(z) = z^2$  的导数.

#### 练习

函数 f(z) = x - yi 在哪些点处可导?

## 答案

处处不可导.

## 例

求  $f(z) = z^2$  的导数.

#### 解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

#### 练习

函数 f(z) = x - yi 在哪些点处可导?

#### 答案

处处不可导.

## 例

求  $f(z) = z^2$  的导数.

#### 解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

函数 f(z) = x - ui 在哪些点处可导?

处处不可导.

求  $f(z) = z^2$  的导数.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

#### 定理

• (c)' = 0, 其中 c 为复常数;

和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

- (c)' = 0, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$ , 其中 n 为整数;

和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

- (c)' = 0, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$ , 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$ , (cf)' = cf';

### 和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

- (c)' = 0, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$ , 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$ , (cf)' = cf';
- $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g fg'}{g^2};$

### 和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

- (c)' = 0, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$ , 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$ , (cf)' = cf';
- $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g fg'}{g^2};$
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z);$

### 和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

- (c)' = 0, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$ , 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$ , (cf)' = cf';
- $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g fg'}{g^2};$
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z);$
- $g'(z) = \frac{1}{f'(w)}, g = f^{-1}, w = g(z).$

定理

若 f(z) 在  $z_0$  可导, 则 f(z) 在  $z_0$  连续.

定理

若 f(z) 在  $z_0$  可导, 则 f(z) 在  $z_0$  连续.

该定理的证明和实变量情形完全相同.

#### 定理

若 f(z) 在  $z_0$  可导, 则 f(z) 在  $z_0$  连续.

该定理的证明和实变量情形完全相同.

# 证明

设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

#### 定理

若 f(z) 在  $z_0$  可导, 则 f(z) 在  $z_0$  连续.

该定理的证明和实变量情形完全相同.

# - 证明

设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z$$

#### 定理

若 f(z) 在  $z_0$  可导, 则 f(z) 在  $z_0$  连续.

该定理的证明和实变量情形完全相同.

# - 证明

设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z$$

### 可导蕴含连续

若 f(z) 在  $z_0$  可导, 则 f(z) 在  $z_0$  连续.

该定理的证明和实变量情形完全相同

# 证明

设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z = f'(z_0) \cdot 0 = 0.$$

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

### 复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

#### 定义

如果存在常数 A 使得函数 w = f(z) 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

其中  $o(\Delta z)$  表示  $\Delta z$  的高阶无穷小量,

#### 复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

#### 定义

如果存在常数 A 使得函数 w = f(z) 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

其中  $o(\Delta z)$  表示  $\Delta z$  的高阶无穷小量, 则称 f(z) 在  $z_0$  处可微,

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

#### 定义

如果存在常数 A 使得函数 w = f(z) 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

其中  $o(\Delta z)$  表示  $\Delta z$  的高阶无穷小量, 则称 f(z) 在  $z_0$  处可微, 称  $A\Delta z$  为 f(z) 在  $z_0$  的微分, 记作  $\mathrm{d} w = A\Delta z$ .

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

#### 定义

如果存在常数 A 使得函数 w = f(z) 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

其中  $o(\Delta z)$  表示  $\Delta z$  的高阶无穷小量, 则称 f(z) 在  $z_0$  处可微, 称  $A\Delta z$  为 f(z) 在  $z_0$  的微分, 记作  $\mathrm{d} w = A\Delta z$ .

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且

$$dw = f'(z_0)\Delta z, dz = \Delta z.$$

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

### 定义

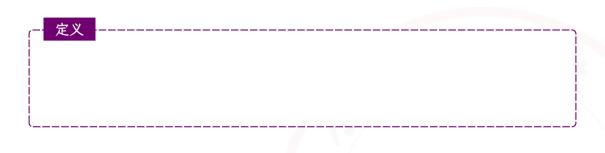
如果存在常数 A 使得函数 w = f(z) 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

其中  $o(\Delta z)$  表示  $\Delta z$  的高阶无穷小量, 则称 f(z) 在  $z_0$  处可微, 称  $A\Delta z$  为 f(z) 在  $z_0$  的微分, 记作  $\mathrm{d} w = A\Delta z$ .

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且

$$dw = f'(z_0)\Delta z, dz = \Delta z.$$
 故 
$$dw = f'(z_0) dz, f'(z_0) = \frac{dw}{dz}.$$



定义

• 若函数 f(z) 在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称 f(z) 在  $z_0$  解析.

#### 定义

- 若函数 f(z) 在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称 f(z) 在  $z_0$  解析.
- 若 f(z) 在区域 D 内处处解析, 则称 f(z) 在 D 内解析, 或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.

#### 定义

- 若函数 f(z) 在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称 f(z) 在  $z_0$  解析.
- 若 f(z) 在区域 D 内处处解析, 则称 f(z) 在 D 内解析, 或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.

#### 定义

- 若函数 f(z) 在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称 f(z) 在  $z_0$  解析.
- 若 f(z) 在区域 D 内处处解析, 则称 f(z) 在 D 内解析, 或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.
- 若 f(z) 在 z<sub>0</sub> 不解析, 则称 z<sub>0</sub> 为 f(z) 的一个奇点.

无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生.

#### 定义

- 若函数 f(z) 在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称 f(z) 在  $z_0$  解析.
- 若 f(z) 在区域 D 内处处解析, 则称 f(z) 在 D 内解析, 或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.
- 若 f(z) 在 z<sub>0</sub> 不解析, 则称 z<sub>0</sub> 为 f(z) 的一个奇点.

无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生.

由于区域 D 是一个开集, 其中的任意  $z_0 \in D$  均存在一个包含在 D 的邻域.

#### 定义

- 若函数 f(z) 在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称 f(z) 在  $z_0$  解析.
- 若 f(z) 在区域 D 内处处解析, 则称 f(z) 在 D 内解析, 或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.
- 若 f(z) 在 z<sub>0</sub> 不解析, 则称 z<sub>0</sub> 为 f(z) 的一个奇点.

无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生.

由于区域 D 是一个开集, 其中的任意  $z_0 \in D$  均存在一个包含在 D 的邻域. 所以 f(z) 在 D 内解析和在 D 内可导是等价的.

#### 定义

- 若函数 f(z) 在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称 f(z) 在  $z_0$  解析.
- 若 f(z) 在区域 D 内处处解析, 则称 f(z) 在 D 内解析, 或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.
- 若 f(z) 在 z<sub>0</sub> 不解析, 则称 z<sub>0</sub> 为 f(z) 的一个奇点.

无定义、不连续、不可导、可导但不解析,都会导致奇点的产生.

由于区域 D 是一个开集, 其中的任意  $z_0 \in D$  均存在一个包含在 D 的邻域. 所以 f(z) 在 D 内解析和在 D 内可导是等价的.

如果 f(z) 在  $z_0$  解析, 则 f(z) 在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析.

#### 定义

- 若函数 f(z) 在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称 f(z) 在  $z_0$  解析.
- 若 f(z) 在区域 D 内处处解析, 则称 f(z) 在 D 内解析, 或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.

无定义、不连续、不可导、可导但不解析, 都会导致奇点的产生.

由于区域 D 是一个开集, 其中的任意  $z_0 \in D$  均存在一个包含在 D 的邻域. 所以 f(z) 在 D 内解析和在 D 内可导是等价的.

如果 f(z) 在  $z_0$  解析, 则 f(z) 在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 f(z) 解析点全体是一个开集.

#### 练习

函数 f(z) 在点  $z_0$  处解析是 f(z) 在该点可导的 (

(A) 充分条件

(B) 必要条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件

#### 练习

函数 f(z) 在点  $z_0$  处解析是 f(z) 在该点可导的 (

(A) 充分条件

(B) 必要条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件

#### 答案

解析要求在 20 的一个邻域内都可导才行.

#### 练习

函数 f(z) 在点  $z_0$  处解析是 f(z) 在该点可导的 (A).

(A) 充分条件

(B) 必要条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件

#### 答案

解析要求在 20 的一个邻域内都可导才行.

例

研究函数  $f(z) = |z|^2$  的解析性.

#### 例

研究函数  $f(z) = |z|^2$  的解析性.

# 解

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z} = \overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi},$$

#### 例

研究函数  $f(z) = |z|^2$  的解析性.

# 解

由于

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi},$$

(1) 若 z=0, 则当  $\Delta z \to 0$  时该极限为 0.

#### 例

研究函数  $f(z) = |z|^2$  的解析性.

# 解

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi},$$

- (1) 若 z=0, 则当  $\Delta z \rightarrow 0$  时该极限为 0.
- (2) 若  $z \neq 0$ , 则当  $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$  时该极限为  $\overline{z} + z$ ;

例

研究函数  $f(z) = |z|^2$  的解析性.

# 解

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi},$$

- (1) 若 z=0, 则当  $\Delta z \to 0$  时该极限为 0.
- (2) 若  $z \neq 0$ , 则当  $\Delta y = 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  时该极限为  $\overline{z} + z$ ; 当  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  时该极限为  $\overline{z} z$ .

例

研究函数  $f(z) = |z|^2$  的解析性.

# 解

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi},$$

- (1) 若 z=0, 则当  $\Delta z \rightarrow 0$  时该极限为 0.
- (2) 若  $z \neq 0$ , 则当  $\Delta y = 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  时该极限为  $\overline{z} + z$ ; 当  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  时该极限为  $\overline{z} z$ . 因此此时极限不存在.

例

研究函数  $f(z) = |z|^2$  的解析性.

# 解

由于

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z})-z\overline{z}}{\Delta z}=\overline{z}+\overline{\Delta z}+z\frac{\Delta x-\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi},$$

- (1) 若 z=0, 则当  $\Delta z \rightarrow 0$  时该极限为 0.
- (2) 若  $z \neq 0$ , 则当  $\Delta y = 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  时该极限为  $\overline{z} + z$ ; 当  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$  时该极限为  $\overline{z} z$ . 因此此时极限不存在.

故 f(z) 仅在 z=0 处可导, 从而处处不解析.

# 第二节 函数解析的充要条件

- 柯西-黎曼方程
- 柯西-黎曼方程的应用

通过对一些简单函数的分析,我们会发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式,而不解析的往往包含  $x,y,\overline{z}$  等内容.

通过对一些简单函数的分析, 我们会发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含  $x, y, \overline{z}$  等内容. 这种现象并不是孤立的.

通过对一些简单函数的分析,我们会发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式,而不解析的往往包含  $x,y,\overline{z}$  等内容. 这种现象并不是孤立的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

通过对一些简单函数的分析,我们会发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式,而不解析的往往包含  $x,y,\overline{z}$  等内容. 这种现象并不是孤立的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

为了简便我们用  $u_x, u_y, v_x, v_y$  等记号表示偏导数.

设 f 在 z 处可导, f'(z) = a + bi,



设 
$$f$$
 在  $z$  处可导,  $f'(z) = a + bi$ , 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a+bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

设 
$$f$$
 在  $z$  处可导,  $f'(z) = a + bi$ , 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

#### 展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$
  
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

设 
$$f$$
 在  $z$  处可导,  $f'(z) = a + bi$ , 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$
  
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

由于 
$$o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2}),$$

设 
$$f$$
 在  $z$  处可导,  $f'(z) = a + bi$ , 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$
  
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

由于 
$$o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$$
, 因此  $u, v$  可微且  $u_x = v_y = a, v_x = -u_y = b$ .

反过来, 假设 u, v 可微且  $u_x = v_y, v_x = -u_y$ .

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z),$$

$$+ o(\Delta z)$$

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z),$$
  

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\Delta z) = v_x \Delta x + u_x \Delta y + o(\Delta z),$$
  

$$+ o(\Delta z)$$

$$\begin{split} \Delta u &= u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta v &= v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\Delta z) = v_x \Delta x + u_x \Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta f &= \Delta (u + iv) = (u_x + iv_x) \Delta x + (-v_x + iu_x) \Delta y + o(\Delta z) \end{split}$$

$$\begin{split} \Delta u &= u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta v &= v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\Delta z) = v_x \Delta x + u_x \Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta f &= \Delta (u + iv) = (u_x + iv_x) \Delta x + (-v_x + iu_x) \Delta y + o(\Delta z) \\ &= (u_x + iv_x) \Delta (x + iy) + o(\Delta z) \end{split}$$

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\Delta z) = v_x \Delta x + u_x \Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta f = \Delta (u + iv) = (u_x + iv_x) \Delta x + (-v_x + iu_x) \Delta y + o(\Delta z)$$

$$= (u_x + iv_x) \Delta (x + iy) + o(\Delta z)$$

$$= (u_x + iv_x) \Delta z + o(\Delta z).$$

# 反过来, 假设 u,v 可微且 $u_x=v_y,v_x=-u_y$ . 由全微分公式

$$\begin{split} \Delta u &= u_x \Delta x + u_y \Delta y + o(\Delta z) = u_x \Delta x - v_x \Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta v &= v_x \Delta x + v_y \Delta y + o(\Delta z) = v_x \Delta x + u_x \Delta y + o(\Delta z), \\ \Delta f &= \Delta (u + iv) = (u_x + iv_x) \Delta x + (-v_x + iu_x) \Delta y + o(\Delta z) \\ &= (u_x + iv_x) \Delta (x + iy) + o(\Delta z) \\ &= (u_x + iv_x) \Delta z + o(\Delta z). \end{split}$$

故 f(z) 在 z 处可导, 且  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ .

# 可导的等价刻画: 柯西-黎曼方程

由此得到



#### 可导的等价刻画: 柯西-黎曼方程

#### 由此得到

#### 柯西-黎曼定理

f(z) 在 z 可导当且仅当在 z 点 u,v 可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

## 可导的等价刻画: 柯西-黎曼方程

#### 由此得到

#### 柯西-黎曼定理

f(z) 在 z 可导当且仅当在 z 点 u,v 可微且满足柯西-黎曼方程 (简称为 C-R 方程):

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$





注意到 
$$x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z}, y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\overline{z}.$$

注意到  $x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}, y=-\frac{i}{2}z+\frac{i}{2}\overline{z}$ . 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 我们定义 f 对 z 和  $\overline{z}$  的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

注意到  $x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}, y=-\frac{i}{2}z+\frac{i}{2}\overline{z}$ . 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 我们定义 f 对 z 和  $\overline{z}$  的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

如果把  $z,\overline{z}$  看成独立变量, 那么当 f 在 z 处可导时,  $\mathrm{d}f=f'\,\mathrm{d}z$ . 当 f 关于  $z,\overline{z}$  可微时 (即 u,v 可微),

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z} \, \mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \, \mathrm{d}\overline{z}.$$

注意到  $x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}, y=-\frac{i}{2}z+\frac{i}{2}\overline{z}$ . 仿照着二元实函数偏导数在变量替换下的变换规则, 我们定义 f 对 z 和  $\overline{z}$  的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

如果把  $z,\overline{z}$  看成独立变量, 那么当 f 在 z 处可导时,  $\mathrm{d}f=f'\,\mathrm{d}z$ . 当 f 关于  $z,\overline{z}$  可微时 (即 u,v 可微),

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z} \, \mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \, \mathrm{d}\overline{z}.$$

所以 f 在 z 处可导当且仅当 u,v 可微且  $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$ , 此时  $f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z}$ .

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:



由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

定理

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

#### 定理

• 如果  $u_x, u_y, v_x, v_y$  在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 f(z) 在 z 可导.

由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

#### 定理

- 如果  $u_x, u_y, v_x, v_y$  在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 f(z) 在 z 可导.
- 如果  $u_x, u_y, v_x, v_y$  在区域 D 上处处连续, 且满足 C-R 方程, 则 f(z) 在 D 上可导 (从而解析).

例

函数  $f(z) = \overline{z}$  在何处可导, 在何处解析?

#### 例

函数  $f(z) = \overline{z}$  在何处可导, 在何处解析?

#### 解

由 u = x, v = -y 可知

$$u_x = 1,$$

$$v_x = 0$$
,

$$u_y = 0,$$

$$v_y = -1.$$

#### 例

函数  $f(z) = \overline{z}$  在何处可导, 在何处解析?

#### 解

由 u = x, v = -y 可知

$$u_x = 1,$$
  $u_y = 0,$   $v_x = 0,$   $v_y = -1.$ 

因为  $u_x = 1 \neq v_y = -1$ , 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

#### 例

函数  $f(z) = \overline{z}$  在何处可导, 在何处解析?

#### 解

由 u = x, v = -y 可知

$$u_x = 1,$$
 
$$u_y = 0,$$
 
$$v_x = 0,$$
 
$$v_y = -1.$$

因为  $u_x = 1 \neq v_y = -1$ , 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

也可由 
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 1 \neq 0$$
 看出.

例

函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

# 例

函数  $\overline{f}(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

#### 解

**b** $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 

#### 例

函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

#### 解

由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

$$u_x = 2x$$

$$v_x = y$$
,

$$u_y = 0,$$

$$v_y = x$$
.

函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

$$u_x = 2x,$$
  $u_y = 0,$   $v_x = y,$   $v_y = x.$ 

$$v_x = y,$$
  $v_y = x$ 

由 
$$2x = x, 0 = -y$$
 可知只有  $x = y = 0, z = 0$  满足  $C-R$  方程.

#### 例

函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

#### 解

由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

$$u_x = 2x,$$
  $u_y = 0,$   $v_x = y,$   $v_y = x.$ 

由 2x=x,0=-y 可知只有 x=y=0,z=0 满足  $\emph{C-R}$  方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0) = u_x(0) + iv_x(0) = 0.$$

例

函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

#### 解

由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

$$u_x = 2x,$$
  $u_y = 0,$   $v_x = y,$   $v_y = x.$ 

由 2x=x,0=-y 可知只有 x=y=0,z=0 满足  $\emph{C-R}$  方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0) = u_x(0) + iv_x(0) = 0.$$

也可由 
$$f = \frac{1}{2}z(z+\overline{z}), \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}z$$
 看出,  $f'(0) = \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_{z=0} = z|_{z=0} = 0.$ 

- 例

函数  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  在何处可导, 在何处解析?



函数  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  在何处可导, 在何处解析?

# 解

由  $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 

#### 例

函数  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  在何处可导, 在何处解析?

#### 解

由 
$$u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$$
 可知

$$u_x = e^x \cos y,$$

$$v_x = e^x \sin y,$$

$$u_y = -e^x \sin y,$$

$$v_y = e^x \cos y.$$

例

函数  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  在何处可导, 在何处解析?

#### 解

由  $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$  可知

$$u_x = e^x \cos y,$$

$$\sin y$$
,

$$v_x = e^x \sin y,$$

$$u_y = -e^x \sin y,$$

$$v_y = e^x \cos y.$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z).$$

例

函数  $\overline{f}(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  在何处可导, 在何处解析?

#### 解

由  $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$  可知

$$u_x = e^x \cos y,$$

$$u_y = -e^x \sin y,$$

$$v_x = e^x \sin y,$$

$$v_y = e^x \cos y.$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z).$$

实际上, 这个函数就是复变量的指数函数  $e^z$ .

#### 练习

函数 ( ) 在 z=0 处不可导.

(A) 
$$2x + 3yi$$

(B) 
$$2x^2 + 3y^2i$$

(C) 
$$e^x \cos y + ie^x \sin y$$

(D) 
$$x^2 - xyi$$

# 练习

函数 ( ) 在 z=0 处不可导.

(A) 
$$2x + 3yi$$

(B) 
$$2x^2 + 3y^2i$$

(C) 
$$e^x \cos y + ie^x \sin y$$

(D) 
$$x^2 - xyi$$

#### 答案

根据 C-R 方程可知对于 A,  $u_x(0) = 2 \neq v_y(0) = 3$ .

# 练习

函数 ( ) 在 z=0 处不可导.

(A) 
$$2x + 3yi$$

(B) 
$$2x^2 + 3y^2i$$

(C) 
$$e^x \cos y + ie^x \sin y$$

(D) 
$$x^2 - xyi$$

#### 答案

根据 C-R 方程可知对于 A,  $u_x(0) = 2 \neq v_y(0) = 3$ . 对于 BD, 各个偏导数在 0 处取值 都是 0.

## 练习

函数 (A) 在 z=0 处不可导.

(A) 
$$2x + 3yi$$

(B) 
$$2x^2 + 3y^2i$$

(C) 
$$e^x \cos y + ie^x \sin y$$

(D) 
$$x^2 - xyi$$

## 答案

根据 C-R 方程可知对于 A,  $u_x(0) = 2 \neq v_y(0) = 3$ . 对于 BD, 各个偏导数在 0 处取值 都是 0. C 则是处处都可导.



设函数  $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$  在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 f'(z).

### 例

设函数  $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$  在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 f'(z).

# 解

由于

$$u_x = 2x + ay,$$
  $u_y = ax + 2by,$   
 $v_x = 2cx + dy,$   $v_y = dx + 2y,$ 

### 例

设函数  $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$  在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 f'(z).

# 解

由于

$$u_x = 2x + ay,$$
  $u_y = ax + 2by,$   
 $v_x = 2cx + dy,$   $v_y = dx + 2y,$ 

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$

### 例

设函数  $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$  在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 f'(z).

# 解

由于

$$u_x = 2x + ay,$$
  $u_y = ax + 2by,$   
 $v_x = 2cx + dy,$   $v_y = dx + 2y,$ 

因此

$$2x + ay = dx + 2y$$
,  $ax + 2by = -(2cx + dy)$ ,  
 $a = d = 2$ ,  $b = c = -1$ .

### 例

设函数  $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$  在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 f'(z).

## 解

由于

$$u_x = 2x + ay,$$
  $u_y = ax + 2by,$   
 $v_x = 2cx + dy,$   $v_y = dx + 2y,$ 

因此

$$2x + ay = dx + 2y$$
,  $ax + 2by = -(2cx + dy)$ ,  
 $a = d = 2$ ,  $b = c = -1$ ,  
 $f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2y + i(-2x + 2y) = (2 - 2i)z$ .



如果 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 则 f(z) 在 D 内是一常数.

例

如果 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 则 f(z) 在 D 内是一常数.

## 证明

由于  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$ ,

例

如果 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 则 f(z) 在 D 内是一常数.

### 证明

由于  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$ , 因此  $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ , u, v 均为常数,

例

如果 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 则 f(z) 在 D 内是一常数.

## 证明

由于  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$ , 因此  $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ , u, v 均为常数, 从而 f(z) = u + iv 是常数.

## 例

如果 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 则 f(z) 在 D 内是一常数.

## 证明

由于  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$ , 因此  $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ , u, v 均为常数, 从而 f(z) = u + iv 是常数.

类似地可以证明, 若 f(z) 在 D 内解析, 则下述条件均可推出 f(z) 是常数:

## 例

如果 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 则 f(z) 在 D 内是一常数.

### 证明

由于  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0$ , 因此  $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ , u, v 均为常数, 从而 f(z) = u + iv 是常数.

类似地可以证明, 若 f(z) 在 D 内解析, 则下述条件均可推出 f(z) 是常数:

- f'(z) = 0,
- | *f*(*z*)| 是一常数,
- arg f(z) 是一常数,

- Re f(z) 是一常数,
- Im f(z) 是一常数,
- $v = u^2$ .

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零, 则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正交.

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零, 则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正文.

### 证明

由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零.

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零, 则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正交.

## 证明

由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x,y) = c_1$  使用隐函数求导法则得  $u_x dx + u_y dy = 0$ ,

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零, 则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正交.

## 证明

由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x,y) = c_1$  使用隐函数求导法则得  $u_x dx + u_y dy = 0$ , 从而  $(u_y, -u_x)$  是该曲线在 z 处的非零切向量.

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零,则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正交.

### 证明

由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x,y) = c_1$  使用隐函数求导法则得  $u_x dx + u_y dy = 0$ , 从而  $(u_y, -u_x)$  是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理  $(v_y, -v_x)$  是  $v(x,y) = c_2$  在 z 处的非零切向量.

复变函数与积分变换 ▶ 第二章 解析函数 ▶ 2 函数解析的充要条件 ▶ B 柯西-黎曼方程的应用 田□□□□□□□□□□□□□□□

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零,则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正交.

### 证明

由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x,y) = c_1$  使用隐函数求导法则得  $u_x dx + u_y dy = 0$ , 从而  $(u_y, -u_x)$  是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理  $(v_y, -v_x)$  是  $v(x,y) = c_2$  在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零,则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正交.

### 证明

由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x,y) = c_1$  使用隐函数求导法则得  $u_x dx + u_y dy = 0$ , 从而  $(u_y, -u_x)$  是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理  $(v_y, -v_x)$  是  $v(x, y) = c_2$  在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

因此二者正交.

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零,则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正交.

## 证明

由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x,y) = c_1$  使用隐函数求导法则得  $u_x dx + u_y dy = 0$ , 从而  $(u_y, -u_x)$  是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理  $(v_y, -v_x)$  是  $v(x,y) = c_2$  在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

因此二者正交.

当  $f'(z_0) \neq 0$  时.

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零,则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正交.

### 证明

由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x,y) = c_1$  使用隐函数求导法则得  $u_x dx + u_y dy = 0$ , 从而  $(u_y, -u_x)$  是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理  $(v_y, -v_x)$  是  $v(x,y) = c_2$  在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

因此二者正交.

当  $f'(z_0) \neq 0$  时, 经过  $z_0$  的两条曲线  $C_1, C_2$  的夹角和它们的像  $f(C_1), f(C_2)$  在  $f(z_0)$  处的夹角总是相同的.

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零,则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正交.

### 证明

由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x,y) = c_1$  使用隐函数求导法则得  $u_x dx + u_y dy = 0$ , 从而  $(u_y, -u_x)$  是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理  $(v_y, -v_x)$  是  $v(x,y) = c_2$  在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

因此二者正交.

当  $f'(z_0) \neq 0$  时, 经过  $z_0$  的两条曲线  $C_1, C_2$  的夹角和它们的像  $f(C_1), f(C_2)$  在  $f(z_0)$  处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性.

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零,则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正交.

#### 证明

由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x,y) = c_1$  使用隐函数求导法则得  $u_x dx + u_y dy = 0$ , 从而  $(u_y, -u_x)$  是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理  $(v_y, -v_x)$  是  $v(x,y) = c_2$  在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

因此二者正交.

当  $f'(z_0) \neq 0$  时, 经过  $z_0$  的两条曲线  $C_1, C_2$  的夹角和它们的像  $f(C_1), f(C_2)$  在  $f(z_0)$  处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性. 这是因为  $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$ .

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零, 则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正交.

### 证明

由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x,y) = c_1$  使用隐函数求导法则得  $u_x \, \mathrm{d} x + u_y \, \mathrm{d} y = 0$ , 从而  $(u_y, -u_x)$  是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理  $(v_y, -v_x)$  是  $v(x,y) = c_2$  在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

因此二者正交.

当  $f'(z_0) \neq 0$  时, 经过  $z_0$  的两条曲线  $C_1, C_2$  的夹角和它们的像  $f(C_1), f(C_2)$  在  $f(z_0)$  处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性. 这是因为  $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$ . 局部来看 f 把  $z_0$  附近的点以  $z_0$  为中心放缩  $f'(z_0)$  倍并逆时针旋转  $\mathrm{arg}\,f'(z_0)$ .

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零, 则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正交.

#### 证明

由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x,y) = c_1$  使用隐函数求导法则得  $u_x \, \mathrm{d} x + u_y \, \mathrm{d} y = 0$ , 从而  $(u_y, -u_x)$  是该曲线在 z 处的非零切向量. 同理  $(v_y, -v_x)$  是  $v(x,y) = c_2$  在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_y v_y + u_x v_x = u_y u_x - u_x u_y = 0,$$

因此二者正交.

当  $f'(z_0) \neq 0$  时, 经过  $z_0$  的两条曲线  $C_1, C_2$  的夹角和它们的像  $f(C_1), f(C_2)$  在  $f(z_0)$  处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性. 这是因为  $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$ . 局部来看 f 把  $z_0$  附近的点以  $z_0$  为中心放缩  $f'(z_0)$  倍并逆时针旋转  $\mathrm{arg}\,f'(z_0)$ . 由 w 复平面上曲线族  $u=c_1, v=c_2$  正交可知上述例题成立.

## 例

设 
$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$
, 则它在除  $z = \pm i$  外处处解析.

### 例

### 例

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right]^{(n)}$$

#### 例

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right]^{(n)}$$
$$= \frac{i}{2} \cdot (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right]$$

#### 例

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right]^{(n)}$$
$$= \frac{i}{2} \cdot (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right]$$
$$= (-1)^{n+1} n! \operatorname{Im} \frac{1}{(x+i)^{n+1}}$$

#### 例

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right]^{(n)}$$

$$= \frac{i}{2} \cdot (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right]$$

$$= (-1)^{n+1} n! \operatorname{Im} \frac{1}{(x+i)^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n n! \sin[(n+1) \operatorname{arccot} x]}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

#### 例

设  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ , 则它在除  $z = \pm i$  外处处解析. 当 z = x 为实数时,

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right]^{(n)}$$

$$= \frac{i}{2} \cdot (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right]$$

$$= (-1)^{n+1} n! \operatorname{Im} \frac{1}{(x+i)^{n+1}}$$

$$= \frac{(-1)^n n! \sin[(n+1) \operatorname{arccot} x]}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

任意有理函数的高阶导数均可按此法计算.

# 第三节 初等函数

- ■指数函数
- 对数函数
- ■幂函数
- 三角函数和反三角函数

## 指数函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数.

## 指数函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复.

#### 指数函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

(1) 
$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$$
 (欧拉恒等式);

(1) 
$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$$
 (欧拉恒等式);

(2) 
$$\exp z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$
 (极限定义);

(1) 
$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$$
 (欧拉恒等式);

(2) 
$$\exp z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$
 (极限定义);

(3) 
$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$$
 (级数定义);

- (1)  $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$  (欧拉恒等式);
- (2)  $\exp z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  (极限定义);
- (3)  $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$  (级数定义);
- (4)  $\exp z$  是唯一的一个处处解析的函数, 使得当  $z=x\in\mathbb{R}$  时,  $\exp z=e^x$  ( $e^x$  的解析 延拓).

### 有些人会从 $e^x$ , $\cos x$ , $\sin x$ 的泰勒展开

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

#### 有些人会从 $e^x$ , $\cos x$ , $\sin x$ 的泰勒展开

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明.

#### 有些人会从 $e^x$ , $\cos x$ , $\sin x$ 的泰勒展开

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们将在第四章说明(1)、(3)和(4)是等价的.

# 指数函数的定义



$$\lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{r}{2}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \text{ 型不定式})$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^{\infty} \text{ 型不定式})$$

$$= \exp \left[ \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2} \left( \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^{\infty}$$
 型不定式)
$$= \exp \left[ \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2} \left( \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.$$

不妨设 n > |z|, 这样  $1 + \frac{z}{n}$  落在右半平面,

$$\lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^{\infty}$$
 型不定式)
$$= \exp\left[ \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2} \left( \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.$$

不妨设 n > |z|, 这样  $1 + \frac{z}{n}$  落在右半平面,

$$\lim_{n \to \infty} n \arg \left( 1 + \frac{z}{n} \right) = \lim_{n \to \infty} n \arctan \frac{y}{n+x}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^{\infty} \text{ 型不定式})$$

$$= \exp\left[ \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2} \left( \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.$$

不妨设 n > |z|, 这样  $1 + \frac{z}{n}$  落在右半平面,

$$\lim_{n \to \infty} n \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} n \arctan\frac{y}{n+x} = \lim_{n \to \infty} \frac{ny}{n+x} = y.$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^{\infty}$$
 型不定式)
$$= \exp \left[ \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2} \left( \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.$$

不妨设 n > |z|, 这样  $1 + \frac{z}{n}$  落在右半平面,

$$\lim_{n \to \infty} n \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} n \arctan\frac{y}{n+x} = \lim_{n \to \infty} \frac{ny}{n+x} = y.$$

故  $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$ .

指数函数

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

# 指数函数

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

为了方便, 我们也记  $e^z = \exp z$ .

# 指数函数

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

# 指数函数

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

为了方便, 我们也记  $e^z = \exp z$ . 指数函数有如下性质:

•  $\exp z$  处处解析, 且  $(\exp z)' = \exp z$ .

# 指数函数

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

- $\exp z$  处处解析, 且  $(\exp z)' = \exp z$ .
- $\exp z \neq 0$ .

### 指数函数

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

- $\exp z$  处处解析, 且  $(\exp z)' = \exp z$ .
- $\exp z \neq 0$ .
- $\bullet \exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2.$

### 指数函数

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

- $\exp z$  处处解析, 且  $(\exp z)' = \exp z$ .
- $\exp z \neq 0$ .
- $\bullet \exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2.$
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$ , 即  $\exp z$  周期为  $2\pi i$ .

### 指数函数

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

- $\exp z$  处处解析, 且  $(\exp z)' = \exp z$ .
- $\exp z \neq 0$ .
- $\bullet \exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2.$
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$ , 即  $\exp z$  周期为  $2\pi i$ .
- $\exp z_1 = \exp z_2$  当且仅当  $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ .

### 指数函数

$$\exp z := e^x(\cos y + i\sin y).$$

- $\exp z$  处处解析, 且  $(\exp z)' = \exp z$ .
- $\exp z \neq 0$ .
- $\bullet \exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2.$
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$ , 即  $\exp z$  周期为  $2\pi i$ .
- $\exp z_1 = \exp z_2$  当且仅当  $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ .
- 指数函数将直线族  $\operatorname{Re} z=c$  映为圆周族  $|w|=e^c$ , 将直线族  $\operatorname{Im} z=c$  映为射线族  $\operatorname{Arg} w=c$ .

例

计算函数  $f(z) = \exp(z/6)$  的周期.

例

计算函数  $f(z) = \exp(z/6)$  的周期.

解

设  $f(z_1) = f(z_2)$ , 则  $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$ .

例

计算函数  $f(z) = \exp(z/6)$  的周期.

解

设 $\overline{f(z_1)} = f(z_2)$ ,则  $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$ .因此存在  $k \in \mathbb{Z}$  使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

例

计算函数  $f(z) = \exp(z/6)$  的周期.

解

设 $f(z_1)=f(z_2)$ ,则 $e^{z_1/6}=e^{z_2/6}$ .因此存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

从而  $z_1 - z_2 = 12k\pi i$ .

例

计算函数  $f(z) = \exp(z/6)$  的周期.

#### 解

设 $f(z_1)=f(z_2)$ ,则 $e^{z_1/6}=e^{z_2/6}$ .因此存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

从而  $z_1 - z_2 = 12k\pi i$ . 所以 f(z) 的周期是  $12\pi i$ .

例

计算函数  $f(z) = \exp(z/6)$  的周期.

#### 解

设 $\overline{f(z_1)} = f(z_2)$ ,则  $e^{z_1/6} = e^{z_2/6}$ .因此存在  $k \in \mathbb{Z}$  使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

从而  $z_1 - z_2 = 12k\pi i$ . 所以 f(z) 的周期是  $12\pi i$ .

一般地, 
$$\exp(az+b)$$
 的周期是  $\frac{2\pi i}{a}$  (或写成  $-\frac{2\pi i}{a}$ ),  $a\neq 0$ .

对数函数  $\operatorname{Ln} z$  定义为指数函数  $\exp z$  的反函数.

对数函数  $\operatorname{Ln} z$  定义为指数函数  $\exp z$  的反函数. 为什么我们用大写的  $\operatorname{Ln}$  呢?

对数函数  $\operatorname{Ln} z$  定义为指数函数  $\exp z$  的反函数. 为什么我们用大写的  $\operatorname{Ln}$  呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数.

对数函数  $\operatorname{Ln} z$  定义为指数函数  $\exp z$  的反函数. 为什么我们用大写的  $\operatorname{Ln}$  呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支.

#### 对数函数

对数函数  $\operatorname{Ln} z$  定义为指数函数  $\exp z$  的反函数. 为什么我们用大写的  $\operatorname{Ln}$  呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写. 而对应的单值的则是开头字母小写.

#### 对数函数

对数函数  $\operatorname{Ln} z$  定义为指数函数  $\operatorname{exp} z$  的反函数. 为什么我们用大写的  $\operatorname{Ln}$  呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如  $\operatorname{Arg} z$  和  $\operatorname{arg} z$ .

设  $z \neq 0, e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$ ,



设 
$$z \neq 0, e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$$
, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

设 
$$z \neq 0, e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$$
, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

# 对数函数

设 
$$z \neq 0, e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$$
, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

# 对数函数 -

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

设 
$$z \neq 0, e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$$
, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

# 对数函数 ---

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

设 
$$z \neq 0, e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$$
, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

# 对数函数 -

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

(2) 定义对数函数主值

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

对于每一个整数 k,  $\ln z + 2k\pi i$  都给出了  $\ln z$  的一个单值分支.

设 
$$z \neq 0, e^w = z = re^{i\theta} = e^{\ln r + i\theta}$$
, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

# 对数函数 ---

(1) 定义对数函数

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

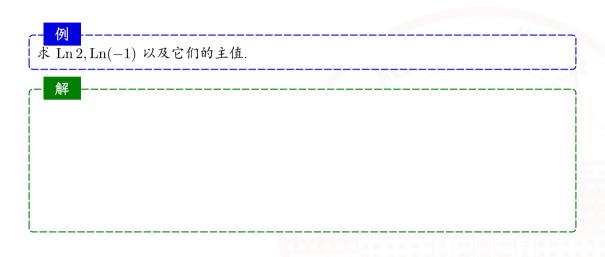
它是一个多值函数.

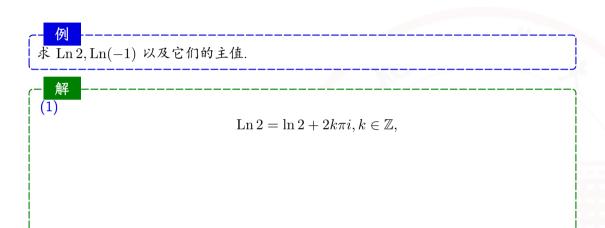
(2) 定义对数函数主值

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

对于每一个整数 k,  $\ln z + 2k\pi i$  都给出了  $\ln z$  的一个单值分支. 特别地, 当 z = x > 0 是正实数时,  $\ln z$  就是实变的对数函数.

-<mark> 例 </mark>------求 Ln 2, Ln(-1) 以及它们的主值.





 $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$ 

主值为 ln 2.

求 Ln 2, Ln(-1) 以及它们的主值.  $\operatorname{Ln} 2 = \operatorname{ln} 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$ 主值为 ln 2. (2) $Ln(-1) = ln 1 + i Arg(-1) = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z},$ 

--<mark> 例 ------</mark> 求 Ln 2, Ln(-1) 以及它们的主值.

(1)

$$\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为 ln 2.

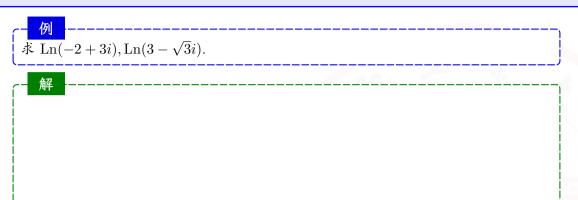
(2)

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z},$$

主值为  $\pi i$ .

例

 $\stackrel{\stackrel{\cdot}{\cancel{\times}}}{\text{Ln}}(-2+3i), \text{Ln}(3-\sqrt{3}i).$ 







 $Ln(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i Arg(-2+3i)$ 



 $\bar{\cancel{x}} \operatorname{Ln}(-2+3i), \operatorname{Ln}(3-\sqrt{3}i).$ 

# 解

(1)

$$\operatorname{Ln}(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i\operatorname{Arg}(-2+3i)$$
  
=  $\frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan \frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$ 

 $\not = \text{Ln}(-2+3i), \text{Ln}(3-\sqrt{3}i).$ 

$$\operatorname{Ln}(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i\operatorname{Arg}(-2+3i)$$
  
=  $\frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$ 

(2)

$$\text{Ln}(3 - \sqrt{3}i) = \ln |3 + \sqrt{3}i| + i \operatorname{Arg}(3 - \sqrt{3}i)$$

例

用 (1)

$$\operatorname{Ln}(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i\operatorname{Arg}(-2+3i)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2)

$$\operatorname{Ln}(3 - \sqrt{3}i) = \ln |3 + \sqrt{3}i| + i \operatorname{Arg}(3 - \sqrt{3}i)$$
  
=  $\ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)i = \ln 2\sqrt{3} + \left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$ 



解方程  $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$ .



解方程  $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$ .



由于 
$$1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi i}{3}}$$
,

#### 例

解方程  $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$ .

#### 解

由于  $1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi i}{3}}$ ,因此

$$z = \operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

例

解方程  $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0.$ 

#### 解

由于  $1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$ ,因此

$$z = \text{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

#### 练习

#### 例

解方程  $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$ .

#### 解

由于  $1 + \sqrt{3}i = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$ ,因此

$$z = \text{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

#### 练习

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{ln} z + \operatorname{Ln} 1 = \operatorname{ln} z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{ln} z + \operatorname{Ln} 1 = \operatorname{ln} z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

#### 根据辐角以及主辐角的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{ln} z + \operatorname{Ln} 1 = \operatorname{ln} z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及主辐角的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

而当  $|n| \ge 2$  时,  $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$  不成立.

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{ln} z + \operatorname{Ln} 1 = \operatorname{ln} z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及主辐角的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

而当  $|n| \ge 2$  时,  $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$  不成立. 以上等式换成  $\operatorname{ln} z$  均不一定成立.

设 x 是正实数,



设 x 是正实数,则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i, \quad \lim_{y \to 0^{-}} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i,$$

设 x 是正实数,则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i, \quad \lim_{y \to 0^{-}} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i,$$

因此  $\ln z$  在负实轴和零处不连续.



设 x 是正实数,则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i, \quad \lim_{y \to 0^{-}} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i,$$

因此 ln z 在负实轴和零处不连续.

而在其它地方  $-\pi < \arg z < \pi$ ,  $\ln z$  是  $e^z$  在区域  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$  上的单值反函数,

设 x 是正实数,则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i, \quad \lim_{y \to 0^{-}} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i,$$

因此  $\ln z$  在负实轴和零处不连续.

而在其它地方  $-\pi < \arg z < \pi$ ,  $\ln z \in e^z$  在区域  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$  上的单值反函数,

从而  $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ ,  $\ln z$  在除负实轴和零处的区域解析.

设 x 是正实数,则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i, \quad \lim_{y \to 0^{-}} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i,$$

因此  $\ln z$  在负实轴和零处不连续.

而在其它地方  $-\pi < \arg z < \pi$ ,  $\ln z$  是  $e^z$  在区域  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$  上的单值反函数,

从而  $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ ,  $\ln z$  在除负实轴和零处的区域解析.

也可以通过 C-R 方程来得到  $\ln z$  的解析性和导数: 当 x > 0 时,

$$\ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\arctan\frac{y}{x},$$

### 对数函数的导数

设 x 是正实数, 则

$$\ln(-x) = \ln x + \pi i$$
,  $\lim_{y \to 0^{-}} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi i$ ,

因此  $\ln z$  在负实轴和零处不连续.

而在其它地方  $-\pi < \arg z < \pi$ ,  $\ln z$  是  $e^z$  在区域  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$  上的单值反函数, 从而  $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ ,  $\ln z$  在除负实轴和零处的区域解析.

也可以通过 C-R 方程来得到  $\ln z$  的解析性和导数: 当 x > 0 时,

$$\ln z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x},$$

$$u_x = v_y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad v_x = -u_y = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$(\ln z)' = (x - yi)/(x^2 + y^2) = \frac{1}{z}.$$

其它情形可取虚部为  $\operatorname{arccot} \frac{x}{y}$  或  $\operatorname{arccot} \frac{x}{y} - \pi$  类似证明.



## 幂函数

(1) 设  $a \neq 0$ ,  $z \neq 0$ , 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp[a \operatorname{ln} |z| + ia(\arg z + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

### 幂函数

(1) 设  $a \neq 0$ ,  $z \neq 0$ , 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp[a \ln |z| + ia(\arg z + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln |z| + ia \arg z).$$

### 幂函数

(1) 设  $a \neq 0$ ,  $z \neq 0$ , 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \ln z} = \exp[a \ln |z| + ia(\arg z + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln |z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

### 幂函数

(1) 设  $a \neq 0$ ,  $z \neq 0$ , 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp[a \operatorname{ln} |z| + ia(\arg z + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln |z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为  $e^{2ak\pi i}=1$ , 所以  $w=z^a$  是单值的.

#### 幂函数

(1) 设  $a \neq 0$ ,  $z \neq 0$ , 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp[a \operatorname{ln} |z| + ia(\arg z + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln |z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为  $e^{2ak\pi i}=1$ , 所以  $w=z^a$  是单值的. 此时  $z^a$  就是我们之前定义的乘幂.

### 幂函数

(1) 设  $a \neq 0$ ,  $z \neq 0$ , 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp[a \operatorname{ln} |z| + ia(\arg z + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln |z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同. 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为  $e^{2ak\pi i}=1$ , 所以  $w=z^a$  是单值的. 此时  $z^a$  就是我们之前定义的乘幂.

当 a 是非负整数时,  $z^a$  在复平面上解析;

#### 幂函数

(1) 设  $a \neq 0$ ,  $z \neq 0$ , 定义幂函数

$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z} = \exp[a \operatorname{ln} |z| + ia(\arg z + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) 幂函数的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln |z| + ia \arg z).$$

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

当 a 为整数时, 因为  $e^{2ak\pi i}=1$ , 所以  $w=z^a$  是单值的. 此时  $z^a$  就是我们之前定义的乘幂.

当 a 是非负整数时,  $z^a$  在复平面上解析; 当 a 是负整数时,  $z^a$  在  $\mathbb{C}-\{0\}$  上解析.

当 
$$a=\frac{p}{q}$$
 为分数,  $p,q$  为互质的整数且  $q>1$  时,

当 
$$a=rac{p}{q}$$
 为分数,  $p,q$  为互质的整数且  $q>1$  时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left[\frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q}\right], \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

具有 q 个值.

当 
$$a=rac{p}{q}$$
 为分数,  $p,q$  为互质的整数且  $q>1$  时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left[\frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q}\right], \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值  $w = \exp(a \ln z)$  是处处解析的.

当  $a=rac{p}{q}$  为分数, p,q 为互质的整数且 q>1 时,

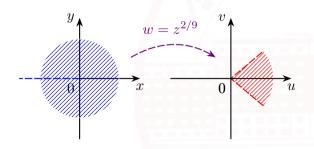
$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left[\frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q}\right], \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值  $w=\exp(a\ln z)$  是处处解析的. 事实上它就是  $\sqrt[q]{z^p}=(\sqrt[q]{z})^p$ .

当  $a=\frac{p}{q}$  为分数, p,q 为互质的整数且 q>1 时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left[\frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q}\right], \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值  $w=\exp(a\ln z)$  是处处解析的. 事实上它就是  $\sqrt[q]{z^p}=(\sqrt[q]{z})^p$ .



对于其它的 a,  $z^a$  具有无穷多个值.



对于其它的 a,  $z^a$  具有无穷多个值. 这是因为此时当  $k \neq 0$  时,  $2k\pi ai$  不可能是  $2\pi i$  的整数倍.

对于其它的 a,  $z^a$  具有无穷多个值. 这是因为此时当  $k \neq 0$  时,  $2k\pi ai$  不可能是  $2\pi i$  的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值.

对于其它的 a,  $z^a$  具有无穷多个值. 这是因为此时当  $k \neq 0$  时,  $2k\pi ai$  不可能是  $2\pi i$  的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后.

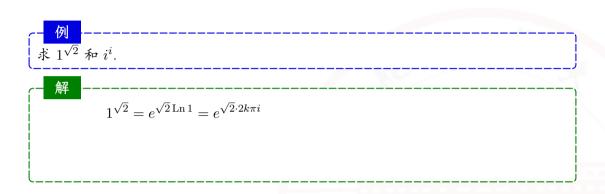
对于其它的 a,  $z^a$  具有无穷多个值. 这是因为此时当  $k \neq 0$  时,  $2k\pi ai$  不可能是  $2\pi i$  的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值  $w = \exp(a \ln z)$  也是处处解析的.

对于其它的 a,  $z^a$  具有无穷多个值. 这是因为此时当  $k \neq 0$  时,  $2k\pi ai$  不可能是  $2\pi i$  的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值  $w = \exp(a \ln z)$  也是处处解析的.

$\overline{a}$	$z^a$ 的值	$z^a$ 的解析区域
整数 n	单值	$n\geqslant 0$ 时处处解析 $n<0$ 时除零点外解析
	q 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

 $\left\{ \begin{array}{c} -$  例  $\\ \stackrel{\cdot}{\cancel{\times}} \ 1^{\sqrt{2}} \ \stackrel{\cdot}{\cancel{\wedge}} \ i^i. \end{array} \right\}$ 





例  $1^{\sqrt{2}}$  和  $i^i$ .

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

例

 $1^{\sqrt{2}} \not = i^i$ .

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i}$$

例

$$1^{\sqrt{2}} \approx i^i$$
.

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$i^{i} = e^{i \operatorname{Ln} i} = \exp \left[ i \cdot \left( 2k + \frac{1}{2} \right) \pi i \right]$$

例

求 
$$1^{\sqrt{2}}$$
 和  $i^i$ .

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = \exp\left[i \cdot \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i\right] = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

例

义
$$1^{\sqrt{2}}$$
和 $i^i$ 

解

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = \exp\left[i \cdot \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i\right] = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

练习

填空题:  $3^i$  的主辐角是\_\_\_\_.

例

 $1^{\sqrt{2}} \approx i^i$ 

#### 解

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i} = \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = \exp\left[i \cdot \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i\right] = \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

#### 练习

填空题:  $3^i$  的主辐角是  $\ln 3$ .

### 幂函数的性质

#### 幂函数与其主值有如下关系:

$$z^{a} = e^{a \ln z} \cdot 1^{a} = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

### 幂函数的性质

#### 幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

### 幂函数的性质

#### 幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言,  $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$  和  $(z^a)^b = z^{ab}$  都是不成立的.

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言,  $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$  和  $(z^a)^b = z^{ab}$  都是不成立的.

最后, 注意  $e^a$  作为指数函数  $f(z)=e^z$  在 a 处的值和作为  $g(z)=z^a$  在 e 处的值是不同的.

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言,  $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$  和  $(z^a)^b = z^{ab}$  都是不成立的.

最后, 注意  $e^a$  作为指数函数  $f(z)=e^z$  在 a 处的值和作为  $g(z)=z^a$  在 e 处的值是不同的. 因为后者在  $a \notin \mathbb{Z}$  时总是多值的.

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言,  $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$  和  $(z^a)^b = z^{ab}$  都是不成立的.

最后, 注意  $e^a$  作为指数函数  $f(z)=e^z$  在 a 处的值和作为  $g(z)=z^a$  在 e 处的值是不同的. 因为后者在  $a\not\in\mathbb{Z}$  时总是多值的. 前者实际上是后者的主值.

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

一般而言,  $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$  和  $(z^a)^b = z^{ab}$  都是不成立的.

最后, 注意  $e^a$  作为指数函数  $f(z)=e^z$  在 a 处的值和作为  $g(z)=z^a$  在 e 处的值是不同的. 因为后者在  $a \notin \mathbb{Z}$  时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆,以后我们总默认  $e^a$  表示指数函数  $\exp a$ .

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 x 成立,

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 x 成立, 我们将其推广到复数情形.

#### 我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 x 成立, 我们将其推广到复数情形.

# 定义

定义余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

#### 我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 x 成立, 我们将其推广到复数情形.

# 定义

定义余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

那么欧拉恒等式  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  对任意复数 z 均成立.

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2},$$

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \sin(iy) = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \sin(iy) = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

当  $y \to \infty$  时,  $\cos(iy)$  和  $\sin(iy)$  都  $\to \infty$ .

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \sin(iy) = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当  $y \to \infty$  时,  $\cos(iy)$  和  $\sin(iy)$  都  $\to \infty$ . 因此  $\sin z$  和  $\cos z$  并不有界.

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \sin(iy) = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当  $y \to \infty$  时,  $\cos(iy)$  和  $\sin(iy)$  都  $\to \infty$ . 因此  $\sin z$  和  $\cos z$  并不有界. 这和实变情形 完全不同.

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \sin(iy) = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当  $y \to \infty$  时,  $\cos(iy)$  和  $\sin(iy)$  都  $\to \infty$ . 因此  $\sin z$  和  $\cos z$  并不有界. 这和实变情形 完全不同.

容易看出  $\cos z$  和  $\sin z$  的零点都是实数.

不难得到

$$\cos(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \qquad \sin(iy) = i\frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

当  $y \to \infty$  时,  $\cos(iy)$  和  $\sin(iy)$  都  $\to \infty$ . 因此  $\sin z$  和  $\cos z$  并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出  $\cos z$  和  $\sin z$  的零点都是实数. 于是我们可类似定义其它三角函数

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, z \neq k\pi,$$
$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}, z \neq k\pi.$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立,

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

•  $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$ ,

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$ ,
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$ ,

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$ ,
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$ ,
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ .

### 双曲函数

### 双曲函数

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

### 双曲函数

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

th 
$$z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz$$
,  $z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i$ .

#### 类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

th 
$$z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz$$
,  $z \neq (k + \frac{1}{2}) \pi i$ .

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

#### 类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

th 
$$z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz$$
,  $z \neq (k + \frac{1}{2}) \pi i$ .

它们的奇偶性和导数与实变情形类似,在定义域范围内是处处解析的。

 $\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$  的周期是  $2\pi i, \operatorname{th} z$  的周期是  $\pi i$ .

设 
$$z = \cos w = \frac{e^{\imath w} + e^{-\imath w}}{2}$$
,



设 
$$z=\cos w=rac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$$
,则 
$$e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0,$$

设 
$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$
, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
,  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$  (双值).

设 
$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$
,则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
,  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$  (双值).

#### 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

设 
$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$
,则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
,  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$  (双值).

### 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的.

设 
$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$
, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
,  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$  (双值).

### 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

设 
$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$
, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
,  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$  (双值).

### 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的. 同理, 我们有:

• 反正弦函数  $Arcsin z = -i Ln(iz + \sqrt{1-z^2});$ 

设 
$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$
, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
,  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$  (双值).

#### 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 反正弦函数  $Arcsin z = -i Ln(iz + \sqrt{1-z^2});$
- 反正切函数  $\arctan z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz}, z \neq \pm i;$

设 
$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$
,则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
,  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$  (双值).

#### 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 反正弦函数  $Arcsin z = -i Ln(iz + \sqrt{1-z^2});$
- 反正切函数  $\arctan z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz}, z \neq \pm i;$
- 反双曲余弦函数  $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 1});$

设 
$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$
, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
,  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$  (双值).

#### 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 反正弦函数  $Arcsin z = -i Ln(iz + \sqrt{1-z^2});$
- 反正切函数  $\arctan z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz}, z \neq \pm i;$
- 反双曲余弦函数  $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 1});$
- 反双曲正弦函数  $Arsh z = Ln(z + \sqrt{z^2 + 1});$

设 
$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$
,则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
,  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$  (双值).

#### 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 反正弦函数  $Arcsin z = -i Ln(iz + \sqrt{1-z^2});$
- 反正切函数  $\arctan z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}, z \neq \pm i;$
- 反双曲余弦函数  $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 1});$
- 反双曲正弦函数  $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1});$
- 反双曲正切函数  $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}, z \neq \pm 1.$

例

解方程  $\sin z = 2$ .

#### 例

解方程  $\sin z = 2$ .

#### 解

由于 
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$
,

#### 例

解方程  $\sin z = 2$ .

#### 解

由于  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$ , 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

#### 例

解方程  $\sin z = 2$ .

#### 解

由于 
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$
, 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

于是 
$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$$
,

#### 例

解方程  $\sin z = 2$ .

#### 解

由于 
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$
, 我们有

$$e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0.$$

于是 
$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i$$
,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

### 另解

由  $\sin z = 2$  可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

#### 另解

由  $\sin z = 2$  可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

于是 
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = (2 \pm \sqrt{3})i$$
,

#### 另解

由  $\sin z = 2$  可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

于是 
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = (2 \pm \sqrt{3})i$$
,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = (2k + \frac{1}{2})\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

#### 另解

由  $\sin z = 2$  可知

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \sqrt{3}i.$$

于是  $e^{iz} = \cos z + i \sin z = (2 \pm \sqrt{3})i$ ,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = (2k + \frac{1}{2})\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

#### 我们总有形式

$$Arcsin z = (2k + \frac{1}{2})\pi \pm \theta,$$

$$\operatorname{Arccos} z = 2k\pi \pm \theta,$$

Arctan  $z = k\pi + \theta$ .