



合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: <https://zhangshenxing.gitee.io>

课程安排

课时

本课程共 10 周 40 课时, 自 2023 年 9 月 12 日至 2023 年 11 月 16 日.

课程 QQ 群 (入群答案 1400261B)

003 班 (机器人、自动化) **871140152**

004 班 (力学、电气) **871141886**

教材



图: 西交高数教研室《复变函数》

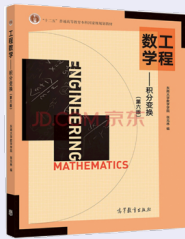


图: 张元林《积分变换》

成绩构成

作业 15 分

每章交一次, 作业及前一章答案每次发布在 QQ 群和个人主页中. 作业可以打印出来, 或使用薄作业本 (不用抄题目, 注明题号), 请勿使用厚笔记本!

作业不允许迟交. 没带的请当天联系助教补交, 迟一天交 -50% 当次作业分, 迟两天或以上 0 分. 请假需提前交给我请假条.

课堂测验 25 分

课堂测验共 3 次, 取最高的两次平均. 测验范围和时间会提前通知. **测验时在教室内作答, 否则按未考处理.**

期末报告 10 分

期末之前会告知主题. 请交手写纸质版, 并自行留存电子版本以免意外丢失.

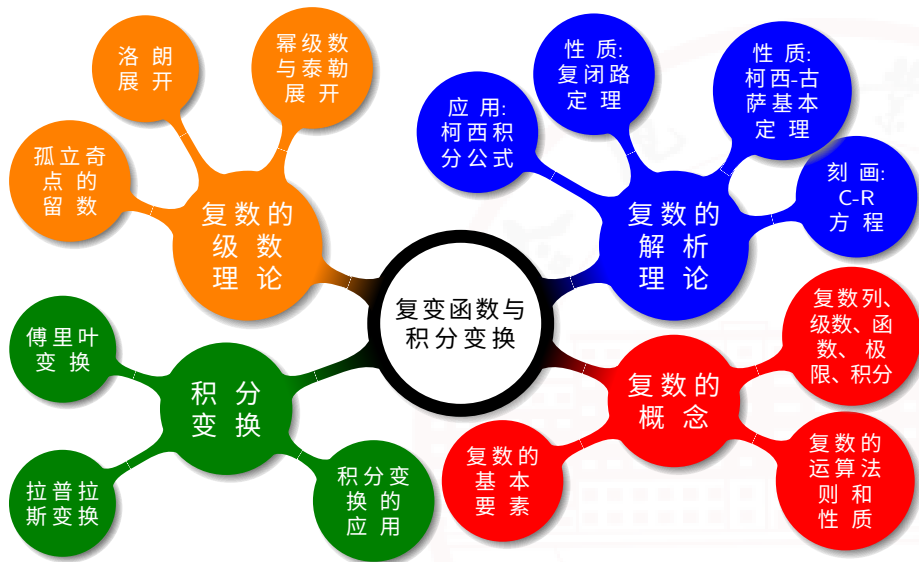
期末考试 50 分

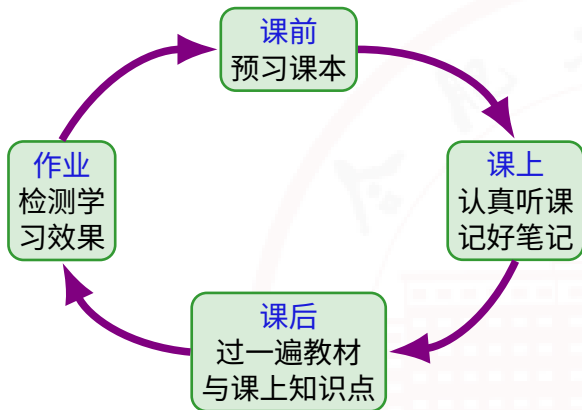
期末卷面需要达到 45 分才计算总评分数, 45 分以下直接不及格.

复变函数的应用非常广泛, 它包括:

- 数学中的代数、数论、几何、分析、动力系统……
- 物理学中流体力学、材料力学、电磁学、光学、量子力学……
- 信息学、电子学、电气工程……

可以说复变函数应用之广, 在大学数学课程中仅次于高等数学和线性代数.





第一章 复数与复变函数

- ① 复数及其代数运算
- ② 复数的三角与指数形式
- ③ 复数的乘除、乘幂与方根
- ④ 曲线和区域
- ⑤ 复变函数
- ⑥ 极限和连续性

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$, 配方可得

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 有两个不同的实根;
- (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 有一个二重的实根;
- (3) 当 $\Delta < 0$ 时, 无实根. 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根, 形式地计算可以发现它们满足原来的方程.

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

解

设 $x = u + v$, 则

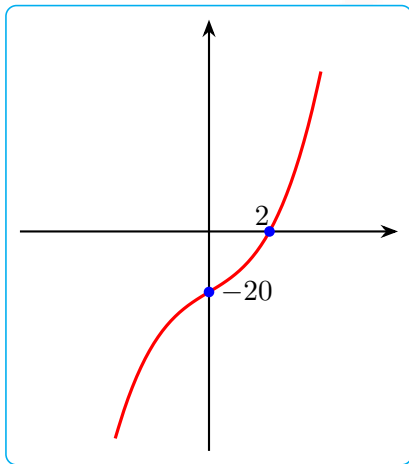
$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + 6(u + v) - 20 = 0.$$

我们希望 $u^3 + v^3 = 20$, $uv = -2$, 则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 - 20X - 8 = 0$. 解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$

所以 $u = 1 \pm \sqrt{3}, v = 1 \mp \sqrt{3}, x = u + v = 2$.

那么这个方程是不是真的只有 $x = 2$ 这一个解呢？由 $f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$ 可知其单调递增，因此确实只有一个解。



例

解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解

同样地我们有 $x = u + v$, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \quad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0$. 然而这个方程没有实数解.

我们可以强行解得

$$u^3 = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}.$$

续解

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

$$v = \frac{3 - 2\sqrt{-3}}{3}, \frac{-9 - \sqrt{-3}}{6}, \frac{3 + 5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x = u + v = 2, -3, 1.$$

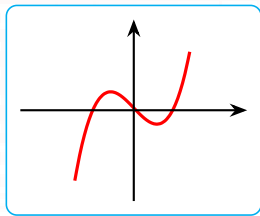
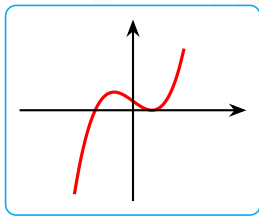
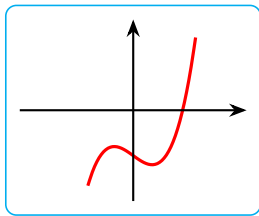
所以我们从一条“**错误的路径**”走到了正确的目的地？

对于一般的三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 而言, 类似可得:

$$x = u - \frac{p}{3u}, \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

由于 $p = 0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

- (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 有 1 个实根.
- (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 有 2 个实根 $x = -\sqrt[3]{4q}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).
- (3) 当 $\Delta < 0$ 时, 有 3 个实根.



所以我们想要使用求根公式的话, 就**必须接受负数开方**. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根。

莱布尼兹 (Leibniz)

我们将在下一节使用更为现代的语言来解释和运用复数.

第一节 复数及其代数运算

- 复数的概念
- 复数的代数运算
- 共轭复数

现在我们来正式介绍复数的概念.

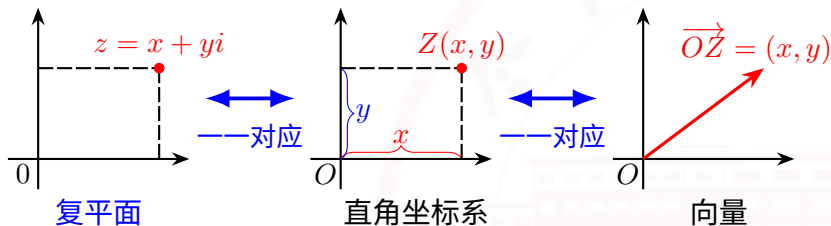
定义

固定一个记号 i , **复数** 就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

换言之, 每一个复数可以唯一地表达成 $x + yi$ 这样的形式. 也就是说, 复数全体构成一个二维实线性空间, 且 $\{1, i\}$ 是一组基.

我们将**全体复数**记作 \mathbb{C} , 全体实数记作 \mathbb{R} , 则 $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.

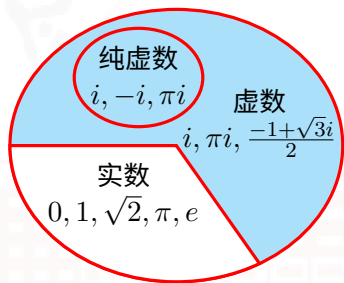
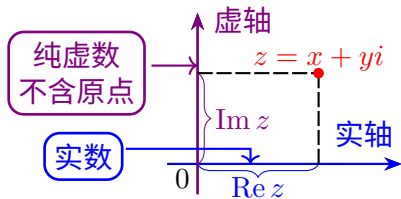
由于 \mathbb{C} 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



实部和虚部, 虚数和纯虚数

当 $y = 0$ 时, $z = x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们称 x 轴为**实轴**. 相应地, 称 y 轴为**虚轴**. 称 $z = x + yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的**实部** $\operatorname{Re} z = x$ 和**虚部** $\operatorname{Im} z = y$.

当 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, z 是实数. 不是实数的复数是**虚数**. 当 $\operatorname{Re} z = 0$ 且 $z \neq 0$ 时, 称 z 是**纯虚数**.



全体复数

典型例题：判断实数和纯虚数

例

实数 x 取何值时, $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是:

(1) 实数; (2) 纯虚数.

解

(1) $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6 .

(2) $\operatorname{Re} z = x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4 . 但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq -1$, $x = 4$.

练习

若 $x^2(1+i) + x(5+4i) + 4+3i$ 是纯虚数, 则实数 $x = \underline{-4}$.

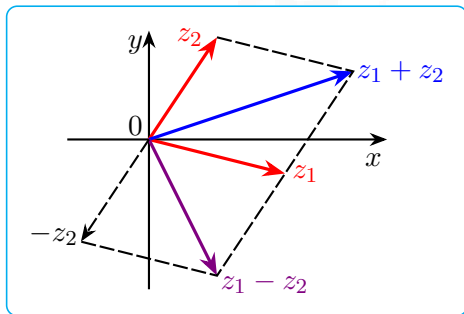
复数的加法与减法

设 $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$. 由 \mathbb{C} 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量 \overrightarrow{OZ} 的加减法是一致的.



规定 $i \cdot i = -1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i.$$

对于正整数 n , 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘. 当 $z \neq 0$ 时, 还可以定义 $z^0 = 1, z^{-n} = \frac{1}{z^n}$.

例

(1) $i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$. 一般地, 对于整数 n ,

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

(2) 令 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1$.

(3) 令 $z = 1 + i$, 则

$$z^2 = 2i, \quad z^3 = -2 + 2i, \quad z^4 = -4, \quad z^8 = 16 = 2^4.$$

我们把满足 $z^n = 1$ 的复数 z 称为 n 次单位根. 那么 $1, i, -1, -i$ 是 4 次单位根, $1, \omega, \omega^2$ 是 3 次单位根.

典型例题：常见复数的幂次

例

化简 $1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \underline{1}$.

解

根据等比数列求和公式,

$$1 + i + i^2 + i^3 + i^4 = \frac{i^5 - 1}{i - 1} = \frac{i - 1}{i - 1} = 1.$$

练习 (2020 年 A 卷)

化简 $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{2020} = \underline{1}$.

复数全体构成一个域. 所谓的域, 是指带有如下内容和性质的集合

- 包含 $0, 1$, 且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a , $a + 0 = a \times 1 = a$.

有理数全体 \mathbb{Q} , 实数全体 \mathbb{R} 也构成域, 它们是 \mathbb{C} 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任何次数 $n \geq 1$ 的复系数多项式

$$p(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \cdots + c_1z + c_0,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0) = 0$. 也就是说复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘积. 我们会在第五章证明该结论.

在 \mathbb{Q}, \mathbb{R} 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a \neq b$, 则要么 $a > b$, 要么 $b > a$;
- 若 $a > b$, 则对于任意 c , $a + c > b + c$;
- 若 $a > b, c > 0$, 则 $ac > bc$.

而 \mathbb{C} 却不是有序域. 如果 $i > 0$, 则

$$-1 = i \cdot i > 0, \quad -i = -1 \cdot i > 0.$$

于是 $0 > i$, 矛盾! 同理 $i < 0$ 也不可能.

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 \bar{z} . 换言之, $\bar{z} = x - yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

共轭复数性质汇总

- (1) z 是 \bar{z} 的共轭复数.
- (2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\overline{z_1/z_2} = \bar{z}_1/\bar{z}_2$.
- (3) $z\bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
- (4) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$.

(4)表明了 x, y 可以用 z, \bar{z} 表出. (2)表明共轭复数和四则运算交换. 这意味着使用共轭复数进行计算和证明, 往往比直接使用 x, y 表达的形式更简单.

例题：共轭复数证明等式

练习

z 关于虚轴的对称点是 $-\bar{z}$.

例

证明 $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$.

证明

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

由于 $\overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = \bar{z}_1 \cdot \overline{\bar{z}_2} = \bar{z}_1 \cdot z_2$, 因此

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2).$$

□

例题：共轭复数判断实数

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明

$\frac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2},$$

即

$$z(1+\bar{z}^2) = \bar{z}(1+z^2), \quad (z-\bar{z})(z\bar{z}-1) = 0.$$

由 $y \neq 0$ 可知 $z \neq \bar{z}$. 故上述等式等价于 $z\bar{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$. □

例题: 复数的代数计算

由于 $z\bar{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}, \text{ 求 } \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \text{ 以及 } z\bar{z}.$$

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

因此

$$\operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad z\bar{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

例题: 复数的代数计算

例

设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

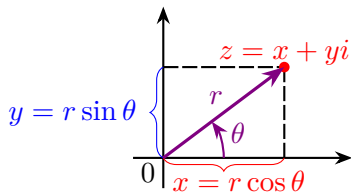
$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(5 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \frac{(-15 - 20) + (-20 + 15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

$$\text{因此 } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i.$$

第二节 复数的三角与指数形式

- 复数的模和辐角
- 复数的三角形式和指数形式

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.



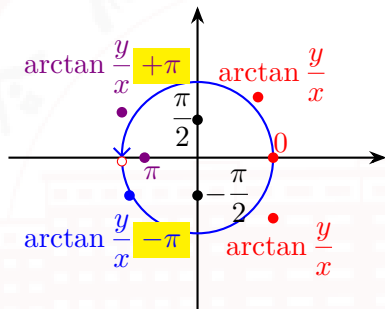
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\theta = \arctan \frac{y}{x} \text{ 或 } \arctan \frac{y}{x} \pm \pi$$

定义

- 称 r 为 z 的模, 记为 $|z| = r$.
- 称 θ 为 z 的辐角, 记为 $\text{Arg } z = \theta$. 0 的辐角没有意义.

任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**或辐角主值, 记作 $\arg z$.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geq 0; \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$



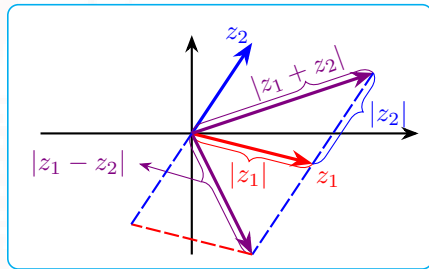
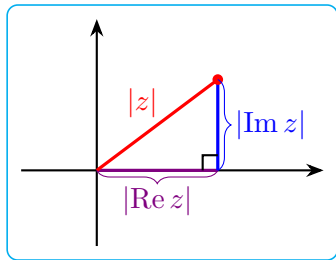
那么 $\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

注意 $\arg \bar{z} = -\arg z$ **未必成立**, 例如 z 是负实数.

复数的模满足如下性质:

模的性质汇总

- $z\bar{z} = |z|^2 = |\bar{z}|^2$;
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;
- $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.



例题：共轭复数解决模的等式

例

证明 (1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;

(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

证明

(1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(2) 因为

$$\text{左边} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2,$$

$$\text{右边} = z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2,$$

而 $\overline{z_1 \overline{z_2}} = \overline{z_1} z_2$, 所以两侧相等. □

由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可得复数的三角形式

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos \theta + i \sin \theta$ (欧拉恒等式), 则我们得到复数的指数形式

$$z = r e^{i\theta} = r \exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

求复数的三角/指数形式的关键在于计算模和辐角.

典型例题: 求复数的三角/指数形式

例

将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.

解

$r = |z| = \sqrt{12 + 4} = 4$. 由于 z 在第三象限, 因此

$$\arg z = \arctan \frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z = 4 \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right] = 4e^{-\frac{5\pi i}{6}}.$$

典型例题: 求复数的三角/指数形式

例

将 $z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解

$$|z| = 1, \quad \arg z = \arctan \frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \arctan \cot \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}.$$

$$\text{因此 } z = \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

另解

$$z = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

典型例题：求复数的三角/指数形式

求复数的三角或指数形式时，我们只需要任取一个辐角就可以了，不要求必须是主辐角.

练习

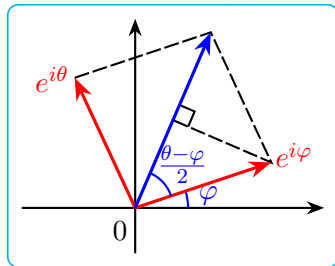
将 $z = \sqrt{3} - 3i$ 化成三角形式和指数形式.

答案

$$z = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{-\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi}{3} \right) = 2\sqrt{3} e^{-\frac{\pi i}{3}}, \text{ 写成 } \frac{5\pi}{3} \text{ 也可以.}$$

两个模相等的复数之和的三角/指数形式形式较为简单.

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2 \cos \frac{\theta - \varphi}{2} e^{\frac{\theta + \varphi}{2} i}.$$



例

如果 $|z| = 1$, $\arg z = \theta$, 则 $z + 1 = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{\theta i}{2}}$.

第三节 复数的乘除、乘幂与方根

- 复数的乘除与三角/指数表示
- 复数的乘幂
- 复数的方根

三角/指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

定理

设

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

换言之,

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

关于多值函数的等式的含义是指: 两边所能取到的值构成的集合相等. 例如此处关于辐角的等式的含义是:

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1 + \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \{\theta_1 - \theta_2 : \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

注意上述等式中 Arg 不能换成 \arg , 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

不一定成立. 这是因为 $\arg z_1 \pm \arg z_2$ 有可能不落在区间 $(-\pi, \pi]$ 上. 例如 $z_1 = z_2 = e^{0.99\pi i}$, $z_1 z_2 = e^{1.98\pi i}$,

$$\arg z_1 + \arg z_2 = 0.99\pi + 0.99\pi = 1.98\pi,$$

$$\arg(z_1 z_2) = -0.02\pi.$$

证明

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

因此乘法情形得证.

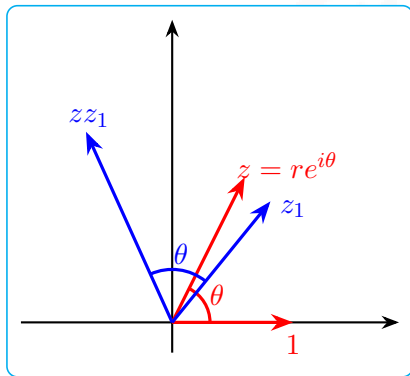
设 $\frac{z_1}{z_2} = r e^{i\theta}$, 则由乘法情形可知

$$r r_2 = r_1, \quad \theta + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} z_1.$$

因此 $r = \frac{r_1}{r_2}, \theta = \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$.



从该定理可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍, 并沿逆时针旋转角度 θ .



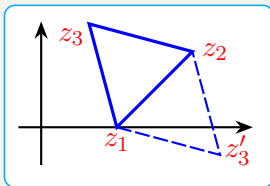
例题：复数解决平面几何问题

例

已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 1$ 和 $z_2 = 2 + i$, 求它的另一个顶点.

解

由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$,



续解

因此

$$\begin{aligned} z_3 - z_1 &= (z_2 - z_1) \exp\left(\pm \frac{\pi i}{3}\right) = (1 + i) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i, \\ z_3 &= \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

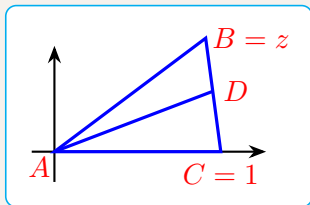
例题：复数解决平面几何问题

例

设 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 证明 $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$.

证明

不妨设 $A = 0, B = z, C = 1$. 则 $D = (1 - \lambda)z + \lambda$, 其中 $\lambda = \frac{DB}{BC} \in (0, 1)$.



续证

由于 $\angle BAD = \angle DAC$, 因此 $\frac{z}{(1-\lambda)z + \lambda}$ 是 $\frac{(1-\lambda)z + \lambda}{1}$ 的正实数倍. 即

$$\frac{((1-\lambda)z + \lambda)^2}{z} = (1-\lambda)^2 z + \frac{\lambda^2}{z} + 2\lambda(1-\lambda) \in \mathbb{R}.$$

从而

$$(1-\lambda)^2 z + \frac{\lambda^2}{z} = (1-\lambda)^2 \bar{z} + \frac{\lambda^2}{\bar{z}}, \quad ((1-\lambda)^2 |z|^2 - \lambda^2)(z - \bar{z}) = 0.$$

显然 $z \neq \bar{z}$. 又因为 $0 < \lambda < 1$, 故

$$\frac{AB}{AC} = |z| = \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{DB}{BC-DB} = \frac{DB}{DC}.$$

设 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \neq 0$. 根据复数三角/指数形式的乘法和除法运算法则, 我们有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地, 当 $r = 1$ 时, 我们得到棣莫弗 (De Moivre) 公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1,$$

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

$$\cos(4\theta) = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1,$$

$$\cos(5\theta) = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.$$

一般地, 可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式, 这个多项式

$$g_n(T) = 2^{n-1}T^n - n2^{n-3}T^{n-2} + \dots$$

叫做切比雪夫多项式. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

典型例题: 复数乘幂的计算

例

求 $(1+i)^n + (1-i)^n$.

解

由于 $1+i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$, $1-i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})$, 因此

$$\begin{aligned} & (1+i)^n + (1-i)^n \\ &= 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) = 2^{\frac{n}{2}+1} \cos \frac{n\pi}{4}. \end{aligned}$$

练习

求 $(\sqrt{3}+i)^{2022} = \underline{-2^{2022}}$.

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$.

为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为**算术根**.

由于 $n\varphi$ 和 θ 的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

故

$$\begin{aligned} w = w_k &= \sqrt[n]{r} \exp \frac{(\theta + 2k\pi)i}{n} \\ &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right). \end{aligned}$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 w_0, w_1, \dots, w_{n-1} 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \dots, n-1$. 故任意一个非零复数的 n 次方根有 n 个值.

这些根的模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\frac{2\pi}{n}$. 因此它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点.

典型例题: 复数方根的计算

例

求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解

由于 $1+i = \sqrt{2} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$, 因此

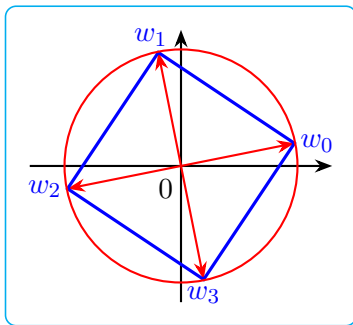
$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2} \exp \frac{(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)i}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

所以该方根所有值为

$$w_0 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{\pi i}{16}}, \quad w_1 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{9\pi i}{16}}, \quad w_2 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{17\pi i}{16}}, \quad w_3 = \sqrt[8]{2} e^{\frac{25\pi i}{16}}.$$

典型例题：复数方根的计算

显然 $w_{k+1} = iw_k$, 所以 w_0, w_1, w_2, w_3 形成了一个正方形.



练习

求 $\sqrt[6]{-1} = \underline{\pm \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \pm i, \pm \frac{\sqrt{3}-i}{2}}$.

注意当 $|n| \geq 2$ 时, $\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg } z$ 不成立. 这是因为

$$\text{Arg}(z^n) = n \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n \text{Arg } z = n \arg z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\text{Arg } \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \text{Arg } z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

其中左边表示 z 的所有 n 次方根的所有辐角.

现在我们来解三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 的根, $p \neq 0$.

$$x = u + v, \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, \quad uv = -\frac{p}{3}.$$

(1) 如果 $\Delta > 0$, 设实数 α 满足 $\alpha^3 = -q/2 + \sqrt{\Delta}$, $\omega = e^{2\pi i/3}$. 那么

$$u = \alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \quad x = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, \alpha\omega - \frac{p}{3\alpha}\omega^2, \alpha\omega^2 - \frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果 $\Delta < 0$, 则 $p < 0$, $|u|^2 = -p/3$. 从而 $v = \bar{u}$. 设 $\sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{\Delta}} = u_1, u_2, u_3$, 则我们得到 3 个实根

$$x = u_1 + \bar{u}_1, u_2 + \bar{u}_2, u_3 + \bar{u}_3.$$

第四节 曲线和区域

- 复数表平面曲线
- 区域的定义
- 区域的特性

典型例题：复数方程表平面图形

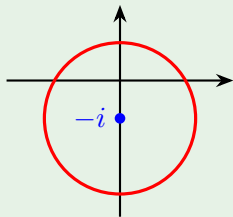
很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例

$$|z + i| = 2.$$

该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.

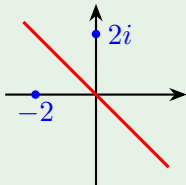
一般的圆方程为 $|z - z_0| = R$, 其中 z_0 是圆心, R 是半径.



例

$$|z - 2i| = |z + 2|.$$

该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点，即二者连线的垂直平分线。两边同时平方化简可得 $x + y = 0$ 。



例

$$\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 4.$$

设 $z = x + yi$, 则 $\operatorname{Im}(i + \bar{z}) = 1 - y = 4$, 因此 $y = -3$.

例

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a.$$

- 当 $2a > |z_1 - z_2|$ 时, 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆;
- 当 $2a = |z_1 - z_2|$ 时, 该方程表示连接 z_1, z_2 的线段;
- 当 $2a < |z_1 - z_2|$ 时, 该方程表示空集.

例

$$|z - z_1| - |z - z_2| = 2a.$$

- 当 $2a < |z_1 - z_2|$ 时, 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支;
- 当 $2a = |z_1 - z_2|$ 时, 该方程表示以 z_2 为起点, 与 z_2, z_1 连线反向的射线;
- 当 $2a > |z_1 - z_2|$ 时, 该方程表示空集.

练习

$z^2 + \bar{z}^2 = 1$ 和 $z^2 - \bar{z}^2 = i$ 分别表示什么图形？

答案

双曲线 $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$ 和双曲线 $xy = \frac{1}{4}$.

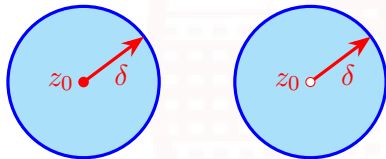
为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域. 类比于高等数学中的邻域和去心邻域, 我们在复变函数中, 称开圆盘

$$U(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

为 z_0 的一个 δ -邻域, 称去心开圆盘

$$\mathring{U}(z_0, \delta) = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

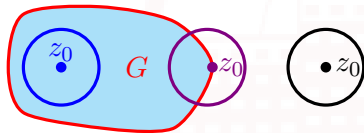
为 z_0 的一个去心 δ -邻域.



设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

- (1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
- (2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.
- (3) 如果 z_0 的任何一个邻域 U , 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

显然内点都属于 G , 外点都不属于 G , 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.



如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.
例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G , 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

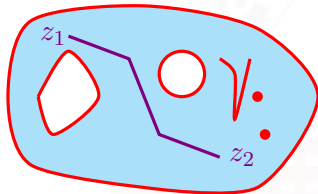
直观上看: 开集往往由 $>, <$ 的不等式给出, 闭集往往由 \geq, \leq 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的. 例如 $|z + 1| + |z - 1| \geq 1$ 表示整个复平面.

如果 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0, R)$ 中, 则称它是有界的. 否则称它是无界的.

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个 **区域**. 也就是说, 区域是连通的开集.

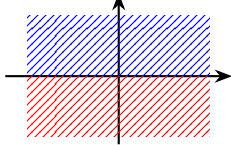
观察下侧的图案, 青色部分是一个区域 (不包含红色部分). 红色的线条和点是它的边界. 区域和它的边界一起构成了 **闭区域**, 记作 \bar{D} . 它是一个闭集.



数学中边界的概念与日常所说的边界是两码事. 例如区域 $|z| > 1$ 的边界是 $|z| = 1$, 其闭区域是 $|z| \geq 1$.

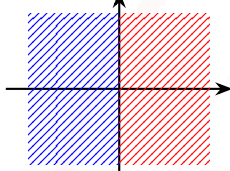
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定. 这些区域对应的闭区域是什么?

上半平面 $\text{Im } z > 0$



下半平面 $\text{Im } z < 0$

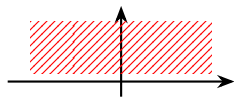
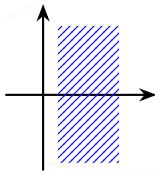
左半平面 $\text{Re } z < 0$



右半平面 $\text{Re } z > 0$

竖直带状区域

$$x_1 < \text{Re } z < x_2$$

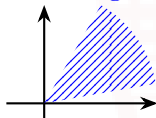


水平带状区域

$$y_1 < \text{Im } z < y_2$$

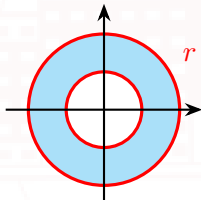
角状区域

$$\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$$



圆环域

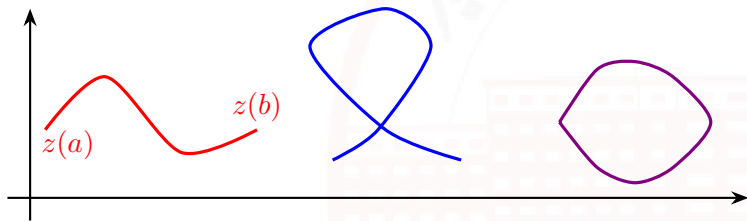
$$r < |z| < R$$



简单闭曲线 (闭路)

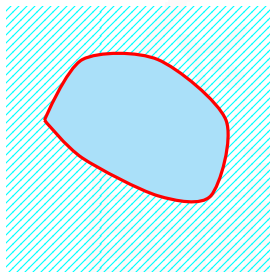
设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [a, b]$ 定义了一条连续曲线. 这也等价于 $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$.

如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线. 如果还满足两个端点重叠, 即 $z(a) = z(b)$, 则称 C 是简单闭曲线, 也简称为闭路.



闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界. 分别称这两个区域是 C 的**内部**和**外部**. C 是它们的公共边界.

这件事情的严格证明是十分困难的 (Veblen 1905).

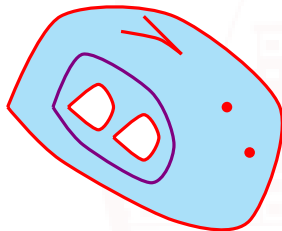


在前面所说的几个区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外, 闭路的内部仍然包含在这个区域内.

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中, 则称 D 是单连通域. 否则称之为多连通域.

单连通域内的任一闭路可以连续地变形为一个点. 这也等价于: 设 l_1, l_2 是从 A 到 B 的两条连续曲线, 则 l_1 可以连续地变形为 l_2 且保持端点不动.

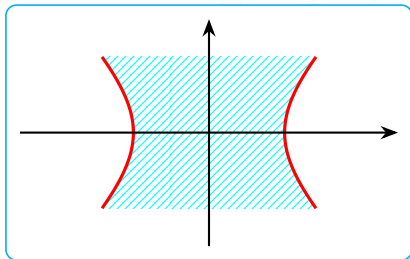


例题：区域的特性

例

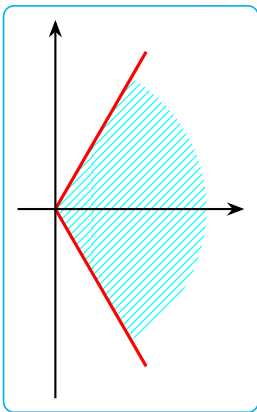
(1) $\operatorname{Re}(z^2) < 1$.

设 $z = x + yi$, 则 $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$. 这是无界的单连通域.



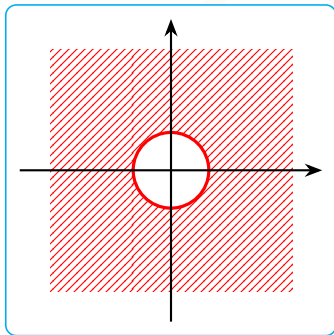
例 (续)

(2) $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$ (不含原点). 即角状区域 $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}$. 这是无界的单连通域.



例 (续)

(3) $\left|\frac{1}{z}\right| \leq 3$. 即 $|z| \geq \frac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.

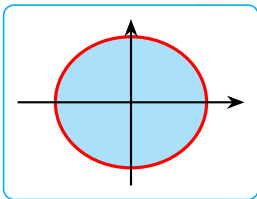


例题：区域的特性

例 (续)

$$(4) |z + 1| + |z - 1| < 4.$$

表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.



思考

$|z + 1| + |z - 1| \geq 1$ 表示什么集合?

答案

整个复平面.

第五节 复变函数

- 复变函数的定义
- 映照

所谓的映射, 就是两个集合之间的一种对应 $f: A \rightarrow B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \frac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

- 称 A 为函数 f 的定义域.
- 称 $\{w = f(z) : z \in A\}$ 为它的值域.

上述函数的定义域和值域分别是什么?

在复变函数理论中, 我们常常会遇到多值的复变函数, 也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z , 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是一一对应.

例

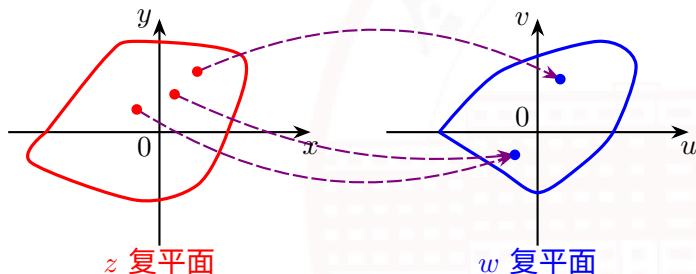
$f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时, f 是一一对应.

若无特别声明, 复变函数总是指单值的复变函数.

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系, 其中

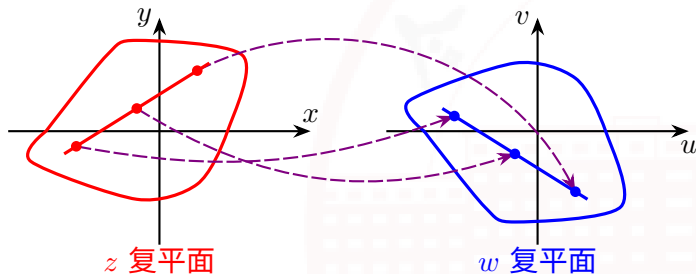
$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

的实部和虚部是两个二元实变函数.



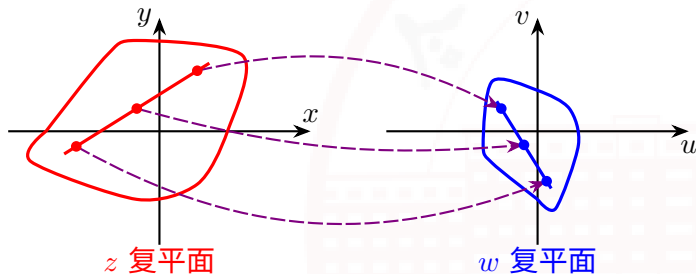
例

函数 $w = \bar{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域, 且 $u = x, v = -y$.



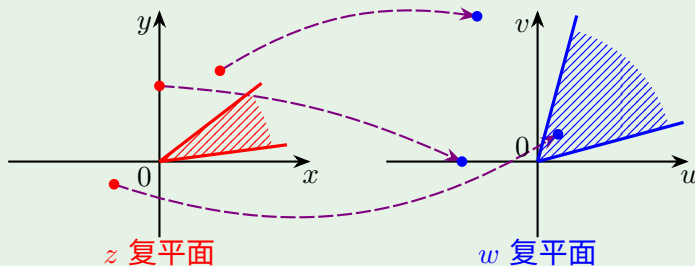
例

函数 $w = az$. 设 $a = re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.



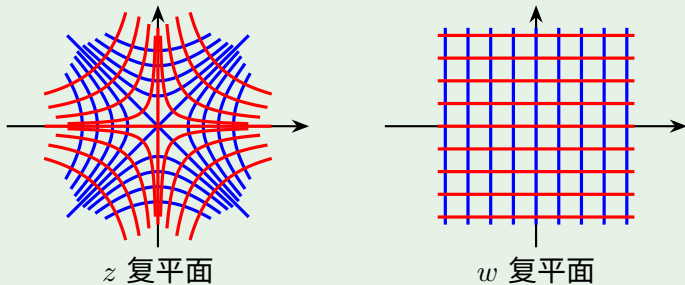
例

函数 $w = z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



例 (续)

由于 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. 因此它把 z 复平面上两族分别以直线 $y = \pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线 $x^2 - y^2 = c_1, 2xy = c_2$ 分别映射为 w 复平面上的两族平行直线 $u = c_1, v = c_2$.



例题：映照的像

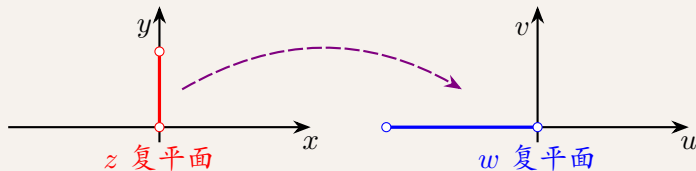
例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \frac{\pi}{2}$.

解

设 $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$, 则 $w = z^2 = -r^2$. 因此它的像还是一条线段 $0 < |w| < 4, \arg w = -\pi$.



例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

解

由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

因此 $u = x^2 - y^2 = 4, v = 2xy$.

可以说明当 $u = 4$ 时, 对任意 v , $u + iv$ 都是该双曲线上某一点的像. 所以这条双曲线的像是直线 $\operatorname{Re} w = 4$.

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(3) 扇形区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2$.

解

设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2 e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域 $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}, 0 < |w| < 4$.

例题: 映照的像

例

求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = \frac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解

由于 $z = \frac{w+1}{w-1}$, $\left| \frac{w+1}{w-1} \right| = 2$, 因此

$$|w+1| = 2|w-1|, \quad w\bar{w} + w + \bar{w} + 1 = 4w\bar{w} - 4w - 4\bar{w} + 4,$$

$$w\bar{w} - \frac{5}{3}w - \frac{5}{3}\bar{w} + 1 = 0, \quad \left| w - \frac{5}{3} \right|^2 = \frac{16}{9},$$

即 $\left| w - \frac{5}{3} \right| = \frac{4}{3}$, 是一个圆周.

第六节 极限和连续性

- 无穷远点
- 数列的极限
- 函数的极限
- 函数的连续性

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限. 我们先来看数列极限的定义.

定义

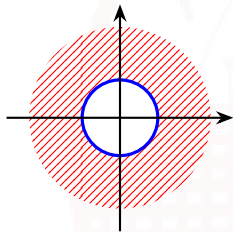
- 设 $\{z_n\}_{n \geq 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$.
- 如果 $\forall X > 0, \exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $|z_n| > X$, 则称 ∞ 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$.

如果我们称

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > X\}$$

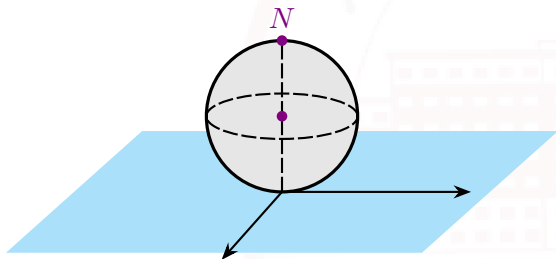
为 ∞ 的 (去心) 邻域, 那么 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 可统一表述为:

对 z 的任意邻域 U , $\exists N$ 使得当 $n \geq N$ 时 $z_n \in U$.

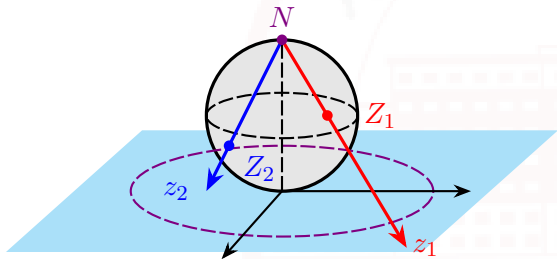


那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢？我们将介绍复球面的概念，它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞ 。这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的。

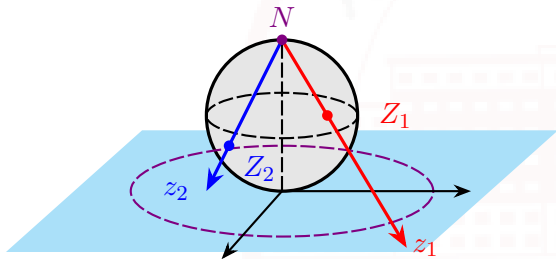
取一个与复平面相切于原点 $z = 0$ 的球面。过 O 做垂直于复平面的直线，并与球面相交于另一点 N ，称之为北极。



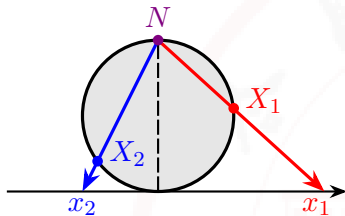
- 对于平面上的任意一点 z , 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z .
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z , 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点. 这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.



当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N . 如果我们在复平面上添加一个额外的"点"——**无穷远点**, 记作 ∞ . 那么**扩充复数集合** $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 正好和球面上的点一一对应. 称这样的球面为**复球面**, 称包含无穷远点的复平面为**扩充复平面**(**闭复平面**).



它和实数中 $\pm\infty$ 有什么联系呢？选取上述图形的一个截面来看，实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应。于是实数中的 $\pm\infty$ 在复球面上就是 ∞ 。



朴素地看，复球面上任意一点可以定义邻域的概念。特别地， ∞ 的开邻域通过前面所说的对应关系，可以对应到扩充复平面上 ∞ 的一个邻域。所以在复球面上，我们将普通复数和 ∞ 的开邻域可以视为相同的概念。

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

定理

设 $z_n = x_n + y_n i, z = x + y i$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y.$$

证明

由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证. □

例题：数列的敛散性

例

设 $z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解

由于

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{n} \rightarrow 1, \quad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{\pi}{n} \rightarrow 0.$$

因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1$.

定义

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义.

如果存在复数 A 使得对 A 的任意邻域 $U(A, \varepsilon)$, $\exists \delta > 0$ 使得

$$z \in \overset{\circ}{U}(z_0, \delta) \implies f(z) \in U(A, \varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ 当 $z \rightarrow z_0$ 时的极限, 记为 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \rightarrow A (z \rightarrow z_0)$.

此时我们称**极限存在**.

对于 $z_0 = \infty$ 或 $A = \infty$ 的情形, 也可以用上述定义统一描述.

不难看出, 变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的: 即 $z \rightarrow z_0$ 沿任一曲线趋向于 z_0 的极限都是相同的.

定理

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + y_0i$, $A = u_0 + v_0i$, 则

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

证明

由三角不等式

$$|u - u_0|, |v - v_0| \leq |f(z) - A| \leq |u - u_0| + |v - v_0|$$

易证.



由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理

设 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$, 则

$$(1) \lim_{z \rightarrow z_0} (f \pm g)(z) = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{z \rightarrow z_0} (fg)(z) = AB;$$

$$(3) \text{ 当 } B \neq 0 \text{ 时, } \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f}{g} \right) (z) = \frac{A}{B}.$$

在学习了复变函数的导数后, 我们也可以使用等价无穷小替换、洛必达法则等工具来计算极限.

例题: 判断函数极限是否存在

例

证明当 $z \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明

令 $z = x + yi$, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x, y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时, $u(x, y) \rightarrow \pm 1$. 因此 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y)$ 不存在, 从而

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在. □

定义

- 如果 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D 内连续.

根据前面的极限判定定理可知:

定理

函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

例

设 $f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2)$. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x, y) = x^2 - y^2$ 处处连续. 因此 $f(z)$ 在 $z \neq 0$ 处连续.

定理

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z), g(z)$ 之和、差、积、商 ($g(z_0) \neq 0$) 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f(g(z))$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z) = z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n$$

也处处连续, 有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

例题: 函数连续性的判定

例

证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$. 那么 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续. 从而 $-v(x, y)$ 也在 (x_0, y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 连续.

另一种看法是, 函数 $g(z) = \bar{z} = x - iy$ 处处连续, 从而 $g(f(z)) = \overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续. □

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 \mathbb{C} 是一个域, 上面可以做除法.

这就导致了复变函数有**导数**, 而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在下一章来逐步揭开它的神秘面纱.