复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室：翡翠科教楼 *B1810* 东

Email：zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址：https://zhangshenxing.gitee.io

第一章　复数与复变函数

❶ 复变函数

第一节　复变函数

- 复变函数的定义
- 映照

复变函数的定义

所谓的映射, 就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f : A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f : A \to B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.

所谓的映射, 就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个复变函数.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

- 称 A 为函数 f 的定义域.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

- 称 A 为函数 f 的定义域.
- 称 $\{w = f(z) : z \in A\}$ 为它的值域.

复变函数的定义

所谓的映射，就是两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$，使得对于每一个 $a \in A$，有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时，它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时，它就是一个复变函数.

例

$f(z) = \operatorname{Re} z, \arg z, |z|, z^n, \dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义

- 称 A 为函数 f 的定义域.
- 称 $\{w = f(z) : z \in A\}$ 为它的值域.

上述函数的定义域和值域分别是什么?

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究，我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究，我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究，我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的，则称 f 是一一对应.

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的，则称 f 是一一对应.

例

$f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$.

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应．例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等．为了方便研究，我们常常需要对每一个 z，选取固定的一个 $f(z)$ 的值．这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支．

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支．

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数．如果 f 和 f^{-1} 都是单值的，则称 f 是一一对应．

例

$f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$．当 $n = \pm 1$ 时，f 是一一对应．

多值复变函数

在复变函数理论中，我们常常会遇到多值的复变函数，也就是说一个 $z \in G$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究，我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样我们得到了这个多值函数的一个单值分支.

例

$\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下，复变函数总有反函数. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的，则称 f 是一一对应.

例

$f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时，f 是一一对应.

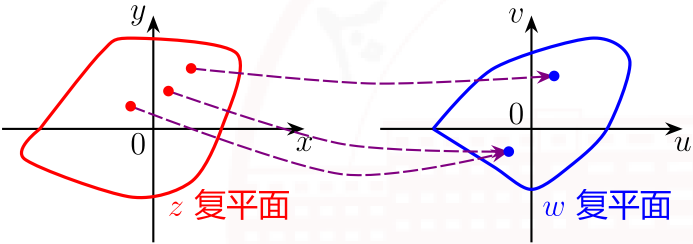
若无特别声明，复变函数总是指单值的复变函数.

在实变函数中，我们常常用函数图像直观来理解和研究函数.

　　在实变函数中，我们常常用函数图像直观来理解和研究函数．但是大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来．

在实变函数中，我们常常用函数图像直观来理解和研究函数．但是大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来．此时，我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系．

在实变函数中，我们常常用函数图像直观来理解和研究函数. 但是大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 此时，我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的映照来表示这种对应关系.



例

函数 $w = \overline{z}$.

例题: 映照

例

函数 $w=\overline{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 x 轴的翻转变换.

例题：映照

例

函数 $w = \overline{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置，则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域.

例题: 映照

例

函数 $w=\overline{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域.

例

函数 $w=az$.

例

函数 $w=\bar{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域.

例

函数 $w=az$. 设 $a=re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合.

例题: 映照

例

函数 $w = \bar{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域.

例

函数 $w = az$. 设 $a = re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.

例

函数 $w = z^2$.

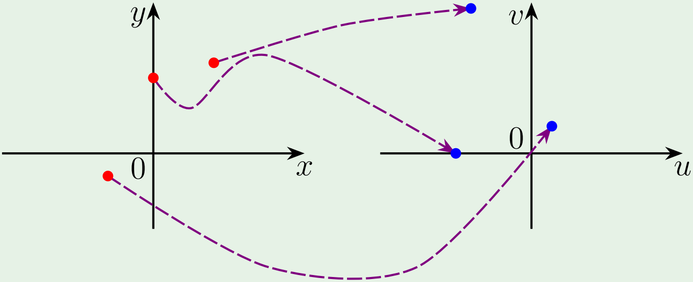
例题: 映照

例

函数 $w = z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.

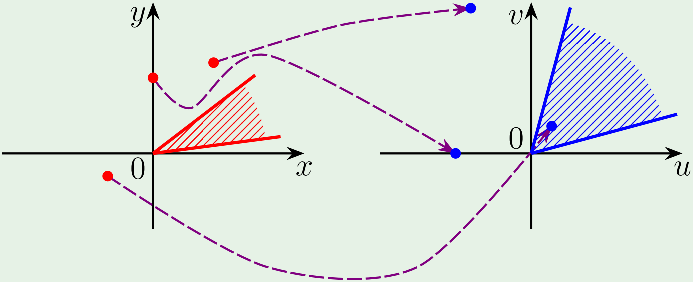
例

函数 $w = z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



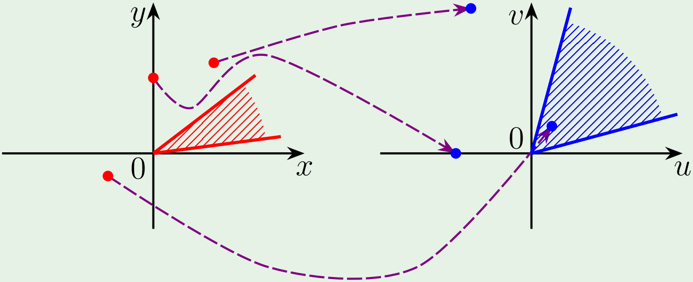
例

函数 $w=z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



例

函数 $w = z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.



这个映射对应两个实变函数 $u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$.

例题：映照

例（续）

因此它把 z 平面上两族分别以直线 $y = \pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2 - y^2 = c_1, \quad 2xy = c_2$$

例 (续)

因此它把 z 平面上两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2-y^2=c_1,\quad 2xy=c_2$$

分别映射为 w 平面上的两族平行直线

$$u=c_1,\quad v=c_2.$$

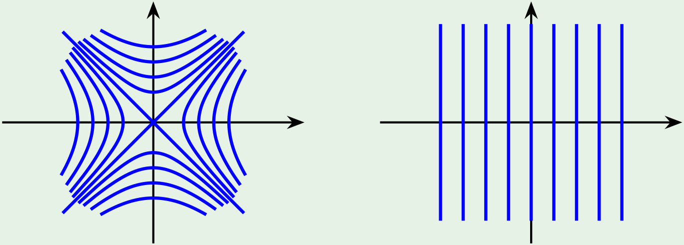
例 (续)

因此它把 z 平面上两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2-y^2=c_1,\quad 2xy=c_2$$

分别映射为 w 平面上的两族平行直线

$$u=c_1,\quad v=c_2.$$



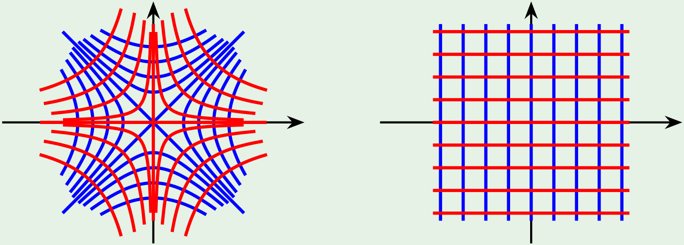
例（续）

因此它把 z 平面上两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线

$$x^2-y^2=c_1,\quad 2xy=c_2$$

分别映射为 w 平面上的两族平行直线

$$u=c_1,\quad v=c_2.$$



例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \dfrac{\pi}{2}$.

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\dfrac{\pi}{2}$.

解

设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=ir$, 则 $w=z^2=-r^2$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \dfrac{\pi}{2}$.

解

设 $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$，则 $w = z^2 = -r^2$. 因此它的像还是一条线段 $0 < |w| < 4, \arg w = -\pi$.

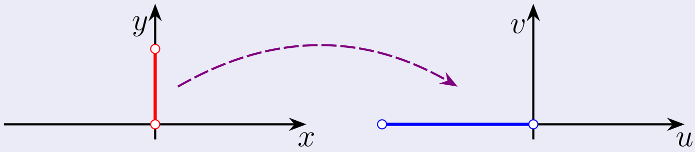
例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0<|z|<2, \arg z=\dfrac{\pi}{2}$.

解

设 $z=re^{\frac{\pi i}{2}}=ir$，则 $w=z^2=-r^2$. 因此它的像还是一条线段 $0<|w|<4, \arg w=-\pi$.



例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

解

由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

解

由于

$$w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi.$$

因此 $u=x^2-y^2=4, v=2xy$.

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.
(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

解

由于

$$w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi.$$

因此 $u=x^2-y^2=4, v=2xy$.

对于任意 $v\in\mathbb{R}$，存在 $z=x+yi\in\mathbb{C}$ 使得 $z^2=4+vi$，且 $x^2-y^2=4$.

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.
(2) 双曲线 $x^2-y^2=4$.

解

由于

$$w=u+iv=z^2=(x^2-y^2)+2xyi.$$

因此 $u=x^2-y^2=4, v=2xy$.

对于任意 $v\in\mathbb{R}$，存在 $z=x+yi\in\mathbb{C}$ 使得 $z^2=4+vi$，且 $x^2-y^2=4$. 因此这条双曲线的像是一条直线 $\operatorname{Re} w=4$.

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(3) 扇形区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}, 0<|z|<2$.

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(3) 扇形区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}, 0<|z|<2$.

解

例题：映照的像

例

求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(3) 扇形区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2.$

解

设 $z = re^{i\theta}$，则 $w = r^2 e^{2i\theta}$.

例

求下列集合在映照 $w=z^2$ 下的像.

(3) 扇形区域 $0<\arg z<\dfrac{\pi}{4}, 0<|z|<2$.

解

设 $z=re^{i\theta}$，则 $w=r^2e^{2i\theta}$．因此它的像是扇形区域 $0<\arg w<\dfrac{\pi}{2}, 0<|w|<4$.

例题：映照的像

例

求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = z + \dfrac{1}{z}$ 下的像.

例题：映照的像

例

求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = z + \dfrac{1}{z}$ 下的像.

解

设 $z = x + yi$，则

$$w = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\overline{z}}{4} = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}yi = u + vi,$$

例题: 映照的像

例

求圆周 $|z|=2$ 在映照 $w=z+\dfrac{1}{z}$ 下的像.

解

设 $z=x+yi$, 则

$$w=z+\frac{1}{z}=z+\frac{\overline{z}}{4}=\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}yi=u+vi,$$

$$x=\frac{4}{5}u,\quad y=\frac{4}{3}v,\quad \left(\frac{4}{5}u\right)^2+\left(\frac{4}{3}v\right)^2=4,$$

例题: 映照的像

例

求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = z + \dfrac{1}{z}$ 下的像.

解

设 $z = x + yi$, 则

$$w = z + \frac{1}{z} = z + \frac{\overline{z}}{4} = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}yi = u + vi,$$

$$x = \frac{4}{5}u, \quad y = \frac{4}{3}v, \quad \left(\frac{4}{5}u\right)^2 + \left(\frac{4}{3}v\right)^2 = 4,$$

$$\left(\frac{2u}{5}\right)^2 + \left(\frac{2v}{3}\right)^2 = 1.$$