



# 复变函数与积分变换

## 张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

# 第二章 解析函数

- 1 解析函数的概念
- 2 函数解析的充要条件
- 3 初等函数

# 第一节 解析函数的概念

- ■可导的函数
- ■可微的函数
- 解析的函数

#### 复变函数的导数

由于  $\mathbb C$  和  $\mathbb R$  一样是域,因此我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分。

#### 定义

设 w = f(z) 的定义域是区域  $D, z_0 \in D$ . 如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 f(z) 在  $z_0$  可导. 这个极限值称为 f(z) 在  $z_0$  的导数, 记作

$$f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果 f(z) 在区域 D 内处处可导, 称 f(z) 在 D 内可导.

#### 例

函数 f(z) = x + 2yi 在哪些点处可导?

#### 解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}.$$

当  $\Delta x = 0, \Delta y \to 0$  时,上述极限为 2;当  $\Delta y = 0, \Delta x \to 0$  时,上述极限为 1. 因此该极限不存在, f(z) 处处不可导.

例题: 复变函数的导数

#### 练习

函数 f(z) = x - yi 在哪些点处可导?

答案

处处不可导.

# 例

求  $f(z)=z^2$  的导数.

#### 解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z.$$

#### 和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

#### 定理

- (c)' = 0, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$ , 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$ , (cf)' = cf';
- $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g fg'}{g^2};$
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z)$ ;
- $f'(z) = \frac{1}{(f^{-1})'(w)}, w = f(z)$ .

#### 可导蕴含连续

#### 定理

若 f(z) 在  $z_0$  可导,则 f(z) 在  $z_0$  连续.

#### 证明

该定理的证明和实变量情形完全相同. 设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z$$

$$= f'(z_0) \cdot 0 = 0.$$

复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

#### 定义

如果存在常数 A 使得函数 w = f(z) 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

其中  $o(\Delta z)$  表示  $\Delta z$  的高阶无穷小量, 则称 f(z) 在  $z_0$  处可微, 称  $A\Delta z$  为 f(z) 在  $z_0$  的微分, 记作  $\mathrm{d} w = A\Delta z$ .

和一元实变函数情形一样,复变函数的可微和可导是等价的,且  $\mathrm{d}w = f'(z_0)\Delta z,\,\mathrm{d}z = \Delta z.$  故  $\mathrm{d}w = f'(z_0)\,\mathrm{d}z,\,f'(z_0) = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}.$ 

#### 定义

- 若函数 f(z) 在  $z_0$  的一个邻域内处处可导,则称 f(z) 在  $z_0$  解析.
- 若 f(z) 在区域 D 内处处解析, 则称 f(z) 在 D 内解析, 或称 f(z) 是 D 内的一个解析函数.
- 若 f(z) 在  $z_0$  不解析, 则称  $z_0$  为 f(z) 的一个奇点.

由于区域 D 是一个开集, 其中的任意  $z_0 \in D$  均存在一个包含在 D 的邻域. 所以 f(z) 在 D 内解析和在 D 内可导是等价的.

如果 f(z) 在  $z_0$  解析, 则 f(z) 在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此 f(z) 解析点全体是一个开集.

#### 解析函数

#### 练习

单选题: (2021 年 B 卷) 函数 f(z) 在点  $z_0$  处解析是 f(z) 在该点可导的(A).

(A) 充分条件

(B) 必要条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件

#### 答案

解析要求在  $z_0$  的一个邻域内都可导才行.

#### 例

研究函数  $f(z) = |z|^2$  的解析性.

# 解

由于

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\overline{z} + \overline{\Delta z}) - z\overline{z}}{\Delta z}$$
$$= \overline{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\Delta x - \Delta yi}{\Delta x + \Delta yi},$$

若 z=0, 则当  $\Delta z \to 0$  时该极限为 0.

若  $z \neq 0$ ,则当  $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$  时该极限为  $\overline{z} + z$ ; 当  $\Delta x = 0$ 

 $0, \Delta y \to 0$  时该极限为  $\overline{z} - z$ . 因此此时极限不存在. 故 f(z) 仅在 z = 0 处可导, 从而处处不解析.

# 第二节 函数解析的充要条件

#### 可导函数的特点

通过对一些简单函数的分析,我们会发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式,而不解析的往往包含  $x, y, \overline{z}$  等内容。这种现象并不是孤立的。我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系。

为了简便我们用  $u_x, u_y, v_x, v_y$  等记号表示偏导数.

#### 可导的等价刻画: 形式推导

设 
$$f$$
 在  $z$  处可导,  $f'(z) = a + bi$ , 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

#### 展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$
  
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

由于 
$$o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$$
, 因此

u, v 可微且  $u_x = v_y = a, v_x = -u_y = b$ .

#### 可导的等价刻画: 形式推导

# 反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$ . 由全微分公式

$$du = u_x dx + u_y dy = u_x dx - v_x dy,$$

$$dv = v_x dx + v_y dy = v_x dx + u_x dy,$$

$$df = d(u + iv) = (u_x + iv_x) dx + (-v_x + iu_x) dy$$

$$= (u_x + iv_x) d(x + iy)$$

$$= (u_x + iv_x) dz = (v_y - iu_y) dz.$$

故

$$f(z)$$
 在  $z$  处可导,且  $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ .

#### 可导的等价刻画: 柯西-黎曼方程

#### 由此我们得到

#### 柯西-黎曼方程 (C-R 方程)

f(z) 在 z 可导当且仅当在 z 点 u,v 可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$





由于二元函数的偏导数均连续蕴含可微, 因此我们有:

#### 定理

- 如果  $u_x, u_y, v_x, v_y$  在 z 处连续, 且满足 C-R 方程, 则 f(z) 在 z 可导.
- 如果  $u_x, u_y, v_x, v_y$  在区域 D 上处处连续, 且满足 C-R 方程, 则 f(z) 在 D 上可导 (从而解析).

## 柯西-黎曼方程的 $z, \overline{z}$ 形式 \*

注意到  $x=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z},y=-\frac{i}{2}z+\frac{i}{2}\overline{z}.$  如果我们定义 f 对 z 和  $\overline{z}$  的偏导数为

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

那么 C-R 方程等价于

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{u_x + iv_x + iu_y - v_y}{2} = 0.$$

所以我们也可以把  $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$  叫做 C-R 方程.

例

(1) 函数  $f(z) = \overline{z}$  在何处可导, 在何处解析?

#### 解

曲 u=x,v=-y 可知

$$u_x = 1, u_y = 0,$$
  

$$v_x = 0, v_y = -1.$$

因为  $u_x = 1 \neq v_y = -1$ , 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

也可以从  $\frac{\partial f}{\partial z} = 1 \neq 0$  看出. 不过这种方法由于课本上没有, 所以考试的时候最好只把它作为一种验算手段.

# 例 (续)

(2) 函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

#### 解

由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

$$u_x = 2x,$$
  $u_y = 0,$   
 $v_x = y,$   $v_y = x.$ 

由 2x = x, 0 = -y 可知只有 x = y = 0, z = 0 满足 **C-R** 方程. 因此该函数只在 0 可导. 处处不解析且

$$f'(0) = u_x(0) + iv_x(0) = 0.$$

也可从 
$$f(z) = \frac{z(z+\overline{z})}{2}, \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{z}{2}$$
 看出.

#### 例 (续)

(3) 函数  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  在何处可导, 在何处解析?

#### 解

由  $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$  可知

$$u_x = e^x \cos y,$$
  $u_y = -e^x \sin y,$   $v_x = e^x \sin y,$   $v_y = e^x \cos y.$ 

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z).$$

实际上,这个函数就是复变量的指数函数  $e^z$ .

#### 练习

单选题: (2022 年 A 卷) 下面哪个函数在 z=0 处不可导? ( A )

(A) 
$$2x + 3yi$$
 (B)  $2x^2 + 3y^2i$ 

(C)  $e^x \cos y + ie^x \sin y$  (D)  $x^2 - xyi$ 

#### 答案

根据 C-R 方程可知对于 A,  $u_x(0) = 2 \neq v_y(0) = 3$ . 对于 BD, 各 个偏导数在 0 处取值都是 0. C 则是处处都可导.

#### 例

设函数  $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$  在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 f'(z).

#### 解

由于

$$u_x = 2x + ay,$$
  $u_y = ax + 2by,$   
 $v_x = 2cx + dy,$   $v_y = dx + 2y,$ 

因此

$$2x + ay = dx + 2y$$
,  $ax + 2by = -(2cx + dy)$ ,  
 $a = d = 2$ ,  $b = c = -1$ ,  
 $f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2y + i(-2x + 2y) = (2 - 2i)z$ .

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 f'(z) 在区域 D 内处处为零, 则 f(z) 在 D 内是一常数.

#### 证明

由于  $f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y=0$ , 因此  $u_x=v_x=u_y=v_y=0$ , u,v 均为常数,从而 f(z)=u+iv 是常数.

类似地可以证明, 若 f(z) 在 D 内解析, 则下述条件等价:

- f(z) 是一常数,
- | *f*(*z*)| 是一常数,
- Re f(z) 是一常数,
- $v = u^2$ ,

- f'(z) = 0,
- $\arg f(z)$  是一常数,
- Im f(z) 是一常数,
- $u = v^2$ .

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

#### 例

如果 f(z) 解析且 f'(z) 处处非零, 则曲线族  $u(x,y)=c_1$  和曲线族  $v(x,y)=c_2$  互相正交.

#### 证明

由于  $f'(z)=u_x-iu_y$ , 因此  $u_x,u_y$  不全为零. 对  $u(x,y)=c_1$  使用隐函数求导法则得  $u_x\,\mathrm{d} x+u_y\,\mathrm{d} y=0$ , 从而  $(u_x,-u_y)$  是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理  $(v_x, -v_y)$  是  $v(x,y) = c_2$  在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0,$$

因此二者正交.

当  $f'(z_0) \neq 0$  时, 经过  $z_0$  的两条曲线  $C_1, C_2$  的夹角和它们的像  $f(C_1), f(C_2)$  在  $f(z_0)$  处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性.

这是因为  $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$ . 局部来看 f 把  $z_0$  附近的点以  $z_0$  为中心放缩  $f'(z_0)$  倍并逆时针旋转  $\mathrm{arg}\,f'(z_0)$ . 上述例子是该结论关于 w 复平面上曲线族  $u=c_1,v=c_2$  的一个特殊情形.

最后我们来看复数在求导中的一个应用.

夏变函数与积分变换 ▶第二章解析函数 ▶ 2 函数解析的充要条件

例

设  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ , 则它在除  $z = \pm i$  外处处解析. 当 z = x 为实数时,

$$\begin{split} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)} &= f^{(n)}(x) = \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right]^{(n)} \\ &= \frac{i}{2} \cdot (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right] \\ &= (-1)^{n+1} n! \operatorname{Im} \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n! \sin[(n+1) \operatorname{arccot} x]}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{split}$$

# 第三节 初等函数

- ■指数函数
- ■对数函数
- ■幂函数
- 三角函数和反三角函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

- (1)  $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$  (欧拉恒等式);
- (2)  $\exp z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  (极限定义);
- (3)  $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$  (级数定义);
- (4)  $\exp z$  是唯一的一个处处解析的函数, 使得当  $z = x \in \mathbb{R}$  时,  $\exp z = e^x$  ( $e^x$  的解析延拓).

#### 有些人会从 $e^x$ , $\cos x$ , $\sin x$ 的泰勒展开

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{3}}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^{2}}{2!} + \frac{x^{4}}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^{3}}{3!} + \frac{x^{5}}{5!} + \cdots$$

形式地带入得到欧拉恒等式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们在学习了幂级数之后就可知(1)和(3)是等价的.

#### 我们来证明(1)和(2)等价.

$$\lim_{n \to \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n = \lim_{n \to \infty} \left( 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^{\infty} \, \text{型不定式})$$

$$= \exp \left[ \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2} \left( \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.$$

不妨设 
$$n > |z|$$
, 这样  $1 + \frac{z}{n}$  落在右半平面,

$$\lim_{n \to \infty} n \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \lim_{n \to \infty} n \arctan\frac{y}{n+x} = \lim_{n \to \infty} \frac{ny}{n+x} = y.$$

故  $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$ .

#### 定义指数函数

 $\exp z = e^x(\cos y + i\sin y).$ 

我们已经知道  $\exp z$  是一个处处解析的函数, 且  $(\exp z)' = \exp z$ . 不难看出

- $\exp z \neq 0$ ;
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$ , 即  $\exp z$  周期为  $2\pi i$ ;
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$ ;
- $\exp z_1 = \exp z_2$  当且仅当  $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ . 为了方便, 我们也记  $e^z = \exp z$ .

#### 指数函数的性质

指数函数将直线族  $\operatorname{Re} z = c$  映为圆周族  $|w| = e^c$ , 将直线族  $\operatorname{Im} z = c$  映为射线族  $\operatorname{Arg} w = c$ .

#### 例

函数  $f(z) = e^{z/6}$  的周期是  $12\pi i$ .

#### 解

设  $f(z_1)=f(z_2)$ ,则  $e^{z_1/6}=e^{z_2/6}$ . 因此存在  $k\in\mathbb{Z}$  使得

$$\frac{z_1}{6} = \frac{z_2}{6} + 2k\pi i,$$

从而  $z_1 - z_2 = 12k\pi i$ . 所以 f(z) 的周期是  $12\pi i$ .

一般地, 
$$\exp(az+b)$$
 的周期是  $\frac{2\pi i}{a}$  (或写成  $-\frac{2\pi i}{a}$ ),  $a\neq 0$ .

对数函数定义为指数函数的反函数. 设  $z \neq 0$ , 满足方程  $e^w = z$  的 w = f(z) 被称为对数函数, 记作  $w = \operatorname{Ln} z$ .

为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中,很多函数是多值函数. 为了便于研究,我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写,而对应的单值的则是开头字母小写. 例如 Arg z 和

 $\arg z$ .

#### 对数函数及其主值

设 
$$e^w=z=re^{i\theta}=e^{\ln r+i\theta}$$
, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

所以

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数

我们取它的主值为

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z \,.$$

对于每一个 k,  $\ln z + 2k\pi i$  都给出了  $\ln z$  的一个单值分支. 特别地, 当 z = x > 0 是正实数时,  $\ln z$  就是实变的对数函数.

典型例题: 对数函数的计算

## 例

求 Ln 2, Ln(-1) 以及它们的主值.

#### 解

 $\operatorname{Ln} 2 = \operatorname{ln} 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ , 主值就是  $\operatorname{ln} 2$ .

 $Ln(-1) = ln 1 + i Arg(-1) = (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$ , 主值是  $\pi i$ .

例

 $\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\ln(-2+3i)}, \ln(3-\sqrt{3}i), \ln(-3).$ 

解

$$\operatorname{Ln}(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i\operatorname{Arg}(-2+3i)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} & \text{Ln}(3 - \sqrt{3}i) = \ln \left| 3 + \sqrt{3}i \right| + i \operatorname{Arg}(3 - \sqrt{3}i) \\ & = \ln 2\sqrt{3} + \left( -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right)i = \ln 2\sqrt{3} + \left( 2k - \frac{1}{6} \right)\pi i, \end{aligned}$$

 $\operatorname{Ln}(-3) = \ln(-3) + i \operatorname{Arg}(-3) = \ln 3 + (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$ 

 $k \in \mathbb{Z}$ .

# 例

解方程  $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$ .

## 解

由于  $1+\sqrt{3}i=2\exp\frac{\pi i}{3}$ ,因此

$$z = \text{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

# 练习

求  $\ln(-1-\sqrt{3}i) = \frac{\ln 2 - \frac{2\pi i}{3}}{3}$ .

#### 对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{ln} z + \operatorname{Ln} 1 = \operatorname{ln} z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## 根据辐角以及主辐角的相应等式,我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

而当  $|n| \ge 2$  时,  $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$  不成立. 以上等式换成  $\operatorname{ln} z$  均不一定成立.

#### 对数函数的导数

设 
$$z_0 = -x < 0$$
 是负实数. 由于

$$\lim_{y \to 0^+} \ln(-x + yi) = \ln x + \pi, \quad \lim_{y \to 0^-} \ln(-x + yi) = \ln x - \pi,$$

因此  $\ln z$  在负实轴和零处不连续. 实际上,  $\lim_{z\to 0} \ln z = \infty$ .

而在其它地方  $-\pi < \arg z < \pi$ ,  $\ln z$  是  $e^z$  在区域  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$  上的单值反函数. 从而

$$(\ln z)' = \frac{1}{z},$$

ln z 在除负实轴和零处的区域解析.

# 设 $a \neq 0$ , $z \neq 0$ , 定义幂函数

$$w = z^{a} = e^{a \operatorname{Ln} z}$$

$$= \exp \left[ a \ln |z| + ia(\arg z + 2k\pi) \right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## 它的主值为

$$w = e^{a \ln z} = \exp(a \ln |z| + ia \arg z).$$

当  $a \ge 0$  是非负实数时, 我们约定  $0^a = 0$ .

#### 幂函数的性质: a 为整数时

根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质. 当 a 为整数时, 因为  $e^{2ak\pi i}=1$ , 所以  $w=z^a$  是单值的. 此时

$$z^a = |z|^a e^{ia \arg z}$$

就是我们之前定义的方幂.

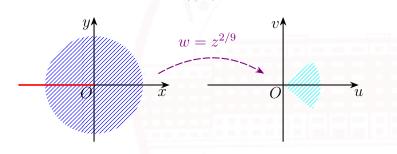
当 a 是非负整数时,  $z^a$  在复平面上解析; 当 a 是负整数时,  $z^a$  在  $\mathbb{C} - \{0\}$  上解析.

#### 幂函数的性质: a 为分数时

当 
$$a = \frac{p}{q}$$
 为分数,  $p, q$  为互质的整数且  $q > 1$  时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp\left[\frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q}\right], \quad k = 0, 1, \dots, q - 1$$

具有 q 个值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值  $w = \exp(a \ln z)$  是处处解析的. 事实上它就是  $\sqrt[q]{z^p} = (\sqrt[q]{z})^p$ .



#### 幂函数的性质: a 为其他情形

对于其它的 a,  $z^a$  具有无穷多个值. 这是因为此时当  $k \neq 0$  时,  $2k\pi ai$  不可能是  $2\pi i$  的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值. 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值  $w = \exp(a \ln z)$  也是处处解析的.

a	$z^a$ 的值	$z^a$ 的解析区域
整数 n	单值	$n \geqslant 0$ 时处处解析 $n < 0$ 时除零点外解析
分数 $p/q$	q 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

典型例题: 幂函数的计算

例

 $\overline{\mathbf{x}}$   $1^{\sqrt{2}}$  和  $i^i$ .

解

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1} = e^{\sqrt{2} \cdot 2k\pi i}$$

$$= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$i^{i} = e^{i \operatorname{Ln} i} = \exp\left[i \cdot \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i\right]$$

$$= \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## 练习

填空题: (2021 年 A 卷) 3<sup>i</sup> 的主辐角是 ln 3.

## 幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = e^{a \ln z} \cdot 1^a = e^{a \ln z} \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值,

$$(z^a)' = (e^{a \ln z})' = \frac{ae^{a \ln z}}{z} = az^{a-1}.$$

对于整数 n, 我们总有  $(z^a)^n = z^{an}$ . 这里换成主值也成立. 而  $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$  仅对主值总成立.

我们来看  $\operatorname{Ln} z^a = a \operatorname{Ln} z$  何时成立. 由于

$$\operatorname{Ln} z^{a} = a \operatorname{ln} z + 2a\pi i \cdot \left(k + \frac{\ell}{a}\right) \pi i, \quad k, \ell \in \mathbb{Z},$$

$$a \operatorname{Ln} z = a \operatorname{ln} z + 2a\pi i \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

因此当且仅当  $a = \pm \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}$  时,  $\operatorname{Ln} z^a = a \operatorname{Ln} z$  成立. 对于除此之外的 a, 该式子均不成立.

最后, 注意  $e^a$  作为指数函数  $f(z) = e^z$  在 a 处的值和作为  $g(z) = z^a$  在 e 处的值是不同的. 因为后者在  $a \notin \mathbb{Z}$  时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆, 以后我们总默认  $e^a$  表示指数函数  $\exp a$ .

#### 我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数 y 成立,我们将其推广到复数情形。定义余弦和正弦 函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

那么欧拉恒等式  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  对任意复数 z 均成立.

#### 三角函数的性质

#### 不难得到

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$
  
$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

其中 ch 
$$y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cos iy$$
, sh  $y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = -i\sin iy$ .

当  $y \to \infty$  时,  $\sin iy = i \operatorname{sh} y$  和  $\cos iy = \operatorname{ch} y$  都  $\to \infty$ . 因此

 $\sin z$  和  $\cos z$  并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出  $\cos z$  和  $\sin z$  的零点都是实数. 于是我们可类似定义 其它三角函数

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, z \neq k\pi,$$
$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}, z \neq k\pi.$$

#### 三角函数的性质

## 这些三角函数的奇偶性,周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

## 且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$ ,
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$ ,
- $\bullet \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$

## 类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

th 
$$z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz$$
,  $z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i$ .

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

 $\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$  的周期是  $2\pi i$ ,  $\operatorname{th} z$  的周期是  $\pi i$ .

## 反三角函数和反双曲函数

设 
$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$
,则 
$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双値)}.$$

#### 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

## 显然它是多值的.

同理, 我们有:

- 反正弦函数  $Arcsin z = -i Ln(iz + \sqrt{z^2 1})$
- 反正切函数  $\arctan z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$
- 反双曲余弦函数  $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 1})$
- 反双曲正弦函数  $Arsh z = Ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$
- 反双曲正切函数  $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z}$ .

例题: 解三角函数方程

## 例

解方程  $\sin z = 2$ .

## 解

由于 
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$$
, 我们有  $e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$ . 于是

$$e^{iz}=(2\pm\sqrt{3})i$$
 ,

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = (2k + \frac{1}{2})\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$