合肥工業大學
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)
办公室：翡翠科教楼 B1810 东
Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn
课件地址：https://zhangshenxing.gitee.io

第一章　复数与复变函数

❶ 曲线和区域

第一节　曲线和区域

- 复数表平面曲线
- 区域的定义
- 区域的特性

典型例题: 复数方程表平面图形

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

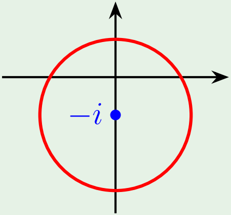
例

(1) $|z+i|=2$.

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例

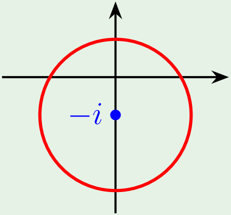
(1) $|z+i|=2$. 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.



很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

例

(1) $|z+i|=2$. 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆.
一般的圆方程为 $|z-z_0|=R$, 其中 z_0 是圆心, R 是半径.



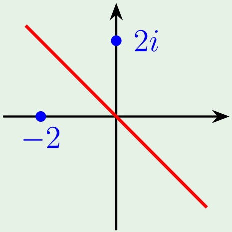
典型例题: 复数方程表平面图形

例 (续)

(2) $|z-2i| = |z+2|$.

例 (续)

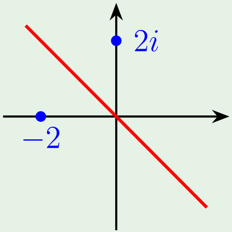
(2) $|z-2i|=|z+2|$. 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线.



典型例题: 复数方程表平面图形

例 (续)

(2) $|z-2i|=|z+2|$. 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 $x+y=0$.



典型例题: 复数方程表平面图形

例 (续)

(3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4.$

例 (续)

(3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

典型例题: 复数方程表平面图形

例 (续)

(3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$.

例 (续)

(3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

典型例题: 复数方程表平面图形

例 (续)

(3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

(5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$.

典型例题: 复数方程表平面图形

例 (续)

(3) $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

(5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

典型例题: 复数方程表平面图形

例 (续)

(3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

(5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

练习

$z^2+\overline{z}^2=1$ 和 $z^2-\overline{z}^2=i$ 分别表示什么图形?

例 (续)

(3) $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\operatorname{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆.

(5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$. 该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支.

练习

$z^2+\overline{z}^2=1$ 和 $z^2-\overline{z}^2=i$ 分别表示什么图形?

答案

双曲线 $x^2-y^2=\dfrac{1}{2}$ 和双曲线 $xy=\dfrac{1}{4}$.

邻域

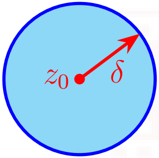
为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域.

邻域

为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域. 类比于高等数学中的邻域和去心邻域, 我们在复变函数中, 称开圆盘

$$U(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个 δ-邻域,



邻域

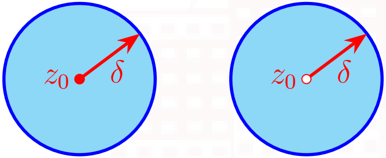
为了引入极限的概念，我们需要考虑点的邻域．类比于高等数学中的邻域和去心邻域，我们在复变函数中，称开圆盘

$$U(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个 δ-邻域，称去心开圆盘

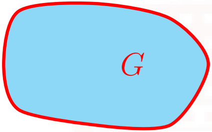
$$\mathring{U}\,(z_0,\delta)=z:0<|z-z_0|<\delta$$

为 z_0 的一个去心 δ-邻域．



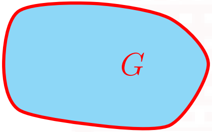
内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$.



内部、外部、边界

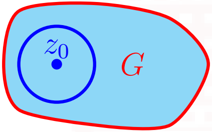
设 G 是复平面的一个子集，$z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:



内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

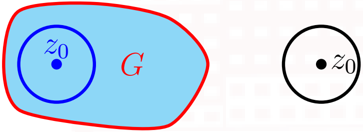


内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

(2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.



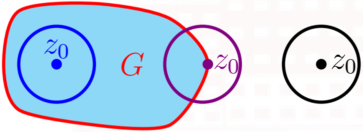
内部、外部、边界

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

(2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.

(3) 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.



内部、外部、边界

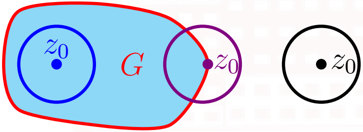
设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

(2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.

(3) 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能.



内部、外部、边界

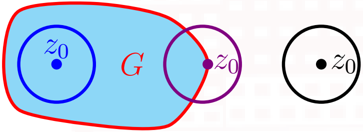
设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

(2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.

(3) 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.



开集和闭集

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集.

开集和闭集

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集.

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

直观上看: 开集往往由 $>, <$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant, \leqslant$ 的不等式给出.

开集和闭集

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

直观上看: 开集往往由 $>, <$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant, \leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

开集和闭集

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

直观上看: 开集往往由 $>, <$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant, \leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0, R)$ 中, 则称它是有界的.

开集和闭集

如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集. 例如

$$|z - z_0| < R, \quad 1 < \operatorname{Re} z < 3, \quad \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

都是开集. 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集. 这等价于它的补集是开集.

直观上看: 开集往往由 $>, <$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant, \leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0, R)$ 中, 则称它是有界的. 否则称它是无界的.

区域和闭区域

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域.

区域和闭区域

定义

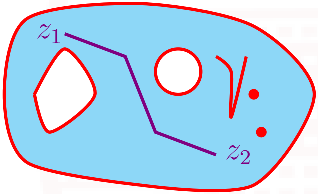
如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域．也就是说，区域是连通的开集．

区域和闭区域

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域. 也就是说，区域是连通的开集.

观察下侧的图案，青色部分是一个区域 (不包含红色部分).

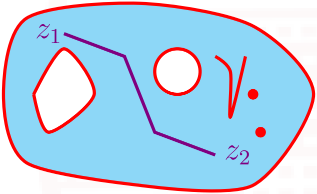


区域和闭区域

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个**区域**. 也就是说，区域是连通的开集.

观察下侧的图案，青色部分是一个区域 (不包含红色部分). 红色的线条和点是它的边界.

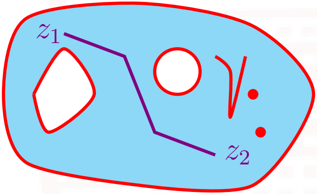


区域和闭区域

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个区域. 也就是说，区域是连通的开集.

观察下侧的图案，青色部分是一个区域 (不包含红色部分). 红色的线条和点是它的边界. 区域和它的边界一起构成了闭区域，记作 $\overline{D}$.

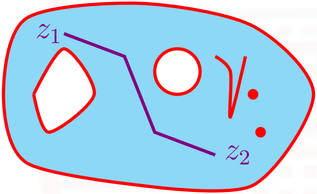


区域和闭区域

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来，则称 D 是一个**区域**．也就是说，区域是连通的开集．

观察下侧的图案，青色部分是一个区域 (不包含红色部分)．红色的线条和点是它的边界．区域和它的边界一起构成了**闭区域**，记作 $\overline{D}$．它是一个闭集．



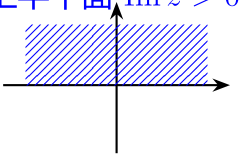
常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

常见区域

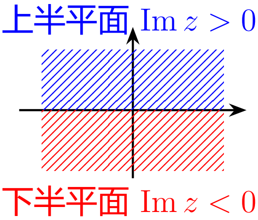
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

上半平面 $\mathrm{Im}\, z > 0$



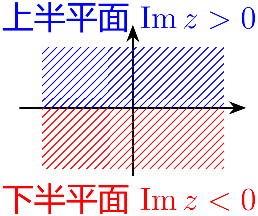
常见区域

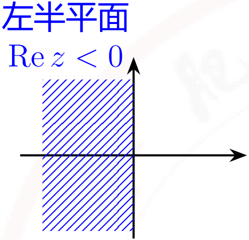
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.



常见区域

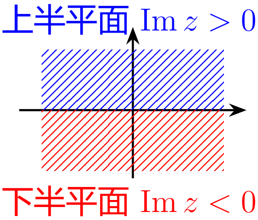
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

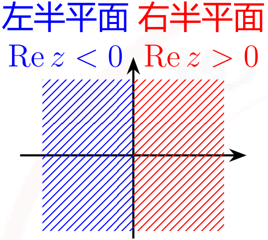




常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

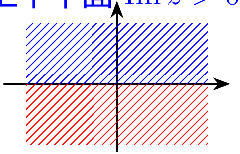




常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

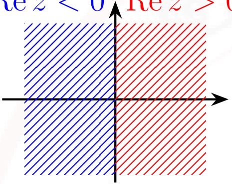
上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$



下半平面 $\operatorname{Im} z < 0$

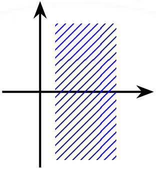
左半平面 右半平面

$\operatorname{Re} z < 0$ $\operatorname{Re} z > 0$



竖直带状区域

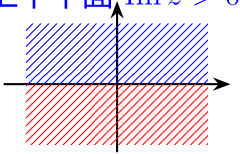
$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$



常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

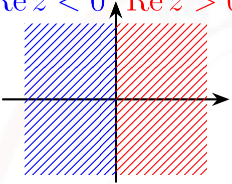
上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$



下半平面 $\operatorname{Im} z < 0$

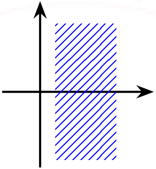
左半平面 右半平面

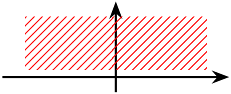
$\operatorname{Re} z < 0$ $\operatorname{Re} z > 0$



竖直带状区域

$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$





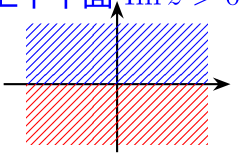
水平带状区域

$y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$

常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

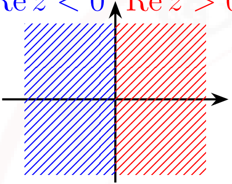
上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$



下半平面 $\operatorname{Im} z < 0$

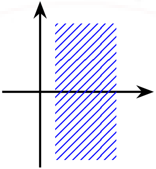
左半平面 右半平面

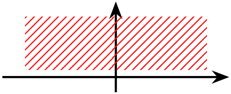
$\operatorname{Re} z < 0$ $\operatorname{Re} z > 0$



竖直带状区域

$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$



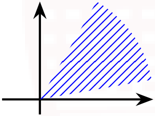


水平带状区域

$y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$

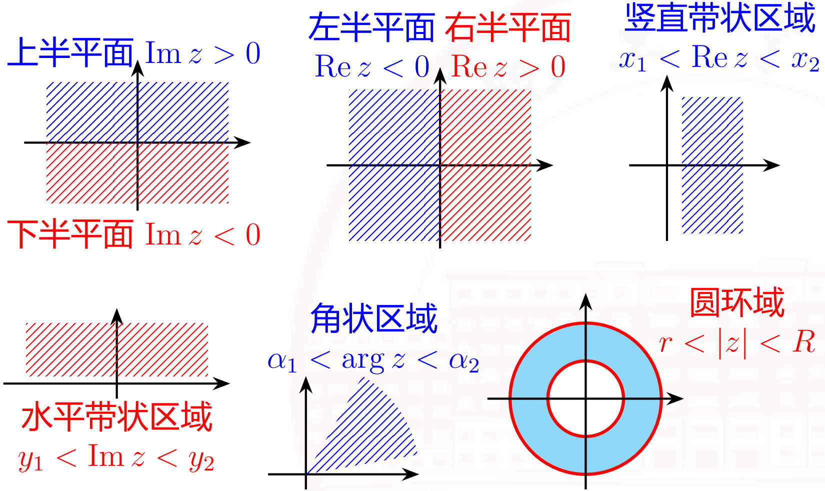
角状区域

$\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$



常见区域

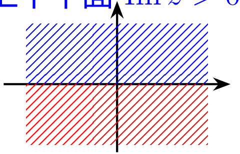
复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.



常见区域

复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定. 这些区域对应的闭区域是什么?

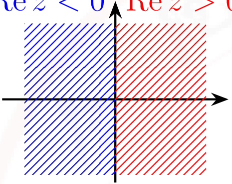
上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$



下半平面 $\operatorname{Im} z < 0$

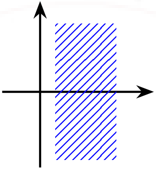
左半平面 右半平面

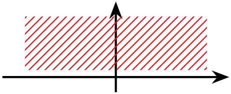
$\operatorname{Re} z < 0$ $\operatorname{Re} z > 0$



竖直带状区域

$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$



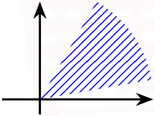


水平带状区域

$y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$

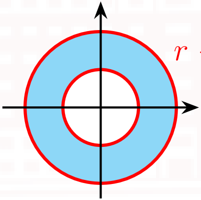
角状区域

$\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$



圆环域

$r < |z| < R$

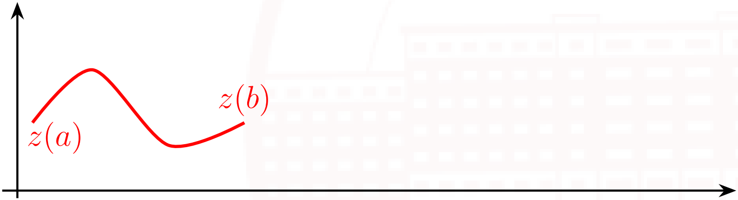


设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数,

连续区间、简单曲线和闭路

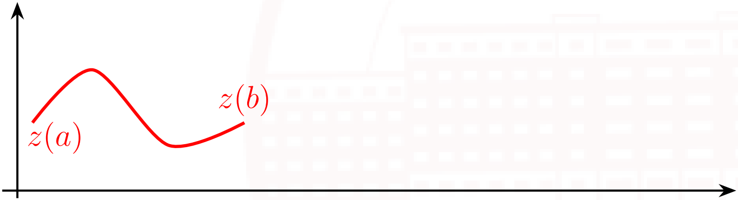
设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$$ 定义了一条连续曲线.



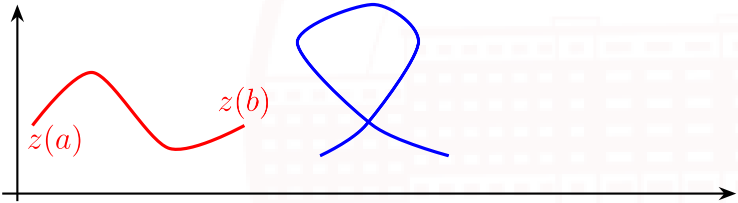
连续区间、简单曲线和闭路

设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$ 定义了一条连续曲线. 这也等价于
$C : z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$.



设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$ 定义了一条连续曲线. 这也等价于 $C: z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b]$.

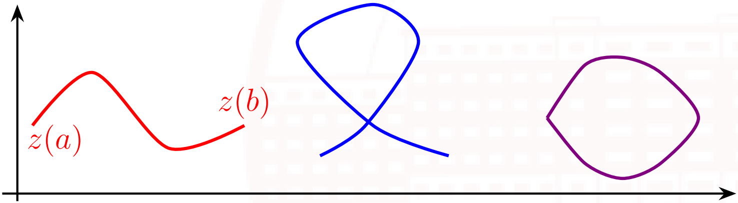
如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线.



连续区间、简单曲线和闭路

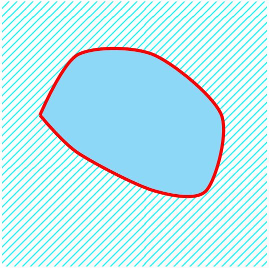
设 $x(t), y(t), t \in [a,b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程
$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a,b]$$
定义了一条连续曲线. 这也等价于
$C : z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a,b]$.

如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线. 如果还满足两个端点重叠, 即 $z(a) = z(b)$, 则称 C 是简单闭曲线, 也简称为闭路.



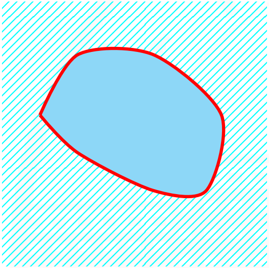
闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域，一个有界一个无界.



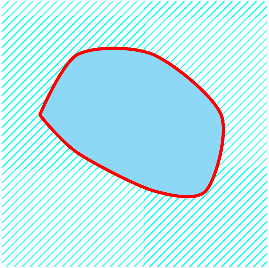
闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域，一个有界一个无界．分别称这两个区域是 C 的内部和外部．



闭路的内部和外部

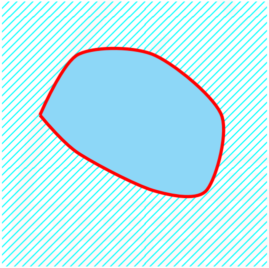
闭路 C 把复平面划分成了两个区域，一个有界一个无界．分别称这两个区域是 C 的内部和外部．C 是它们的公共边界．



闭路的内部和外部

闭路 C 把复平面划分成了两个区域，一个有界一个无界．分别称这两个区域是 C 的内部和外部．C 是它们的公共边界．

这件事情的严格证明是十分困难的．



单连通域和多连通域

在前面所说的几个区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路.

单连通域和多连通域

在前面所说的几个区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外, 闭路的内部仍然包含在这个区域内.

单连通域和多连通域

在前面所说的几个区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外, 闭路的内部仍然包含在这个区域内.

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中, 则称 D 是单连通域.

单连通域和多连通域

在前面所说的几个区域的例子中，我们在区域中画一条闭路。除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内。

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中，则称 D 是单连通域。否则称之为多连通域。

单连通域和多连通域

在前面所说的几个区域的例子中，我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内.

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中，则称 D 是单连通域. 否则称之为多连通域.

单连通域内的任一闭路可以连续地变形成一个点.

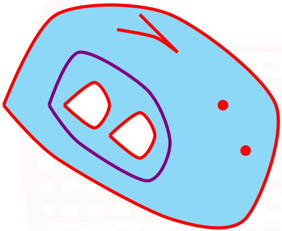
单连通域和多连通域

在前面所说的几个区域的例子中，我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内.

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中，则称 D 是单连通域. 否则称之为多连通域.

单连通域内的任一闭路可以连续地变形成一个点.



例题：区域的特性

例

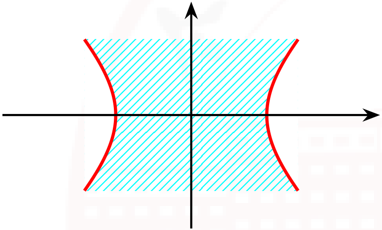
(1) $\mathrm{Re}(z^2) < 1.$

例题: 区域的特性

例

(1) $\mathrm{Re}(z^2) < 1.$

设 $z = x + yi$, 则 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1.$

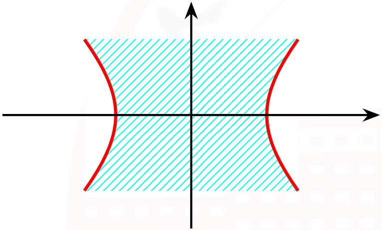


例题: 区域的特性

例

(1) $\mathrm{Re}(z^2) < 1.$

设 $z = x + yi$, 则 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$. 这是无界的单连通域.



例题: 区域的特性

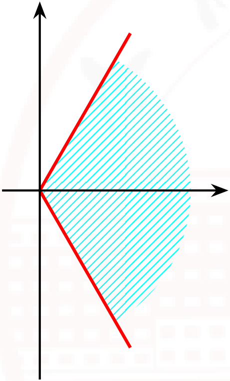
例 (续)

(2) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{3}$.

例题：区域的特性

例 (续)

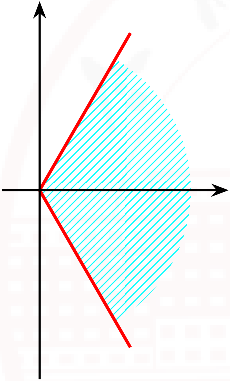
(2) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{3}$. 即角状区域 $-\dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$.



例题：区域的特性

例（续）

(2) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{3}$. 即角状区域 $-\dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$. 这是无界的单连通域.



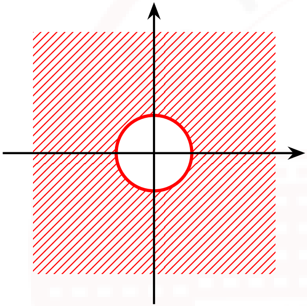
例题：区域的特性

例（续）

(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3.$

例（续）

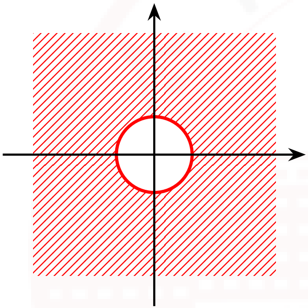
(3) $\left|\frac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \frac{1}{3}$.



例题：区域的特性

例 (续)

(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \dfrac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.



例题：区域的特性

例 (续)

(4) $|z+1|+|z-1|<4.$

例题: 区域的特性

例 (续)

(4) $|z+1|+|z-1|<4.$

表示一个椭圆的内部.

例题: 区域的特性

例 (续)

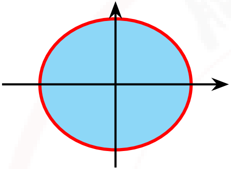
(4) $|z+1|+|z-1|<4$.

表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.

例题：区域的特性

例 (续)

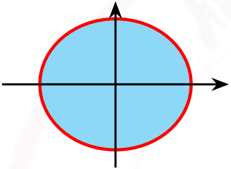
(4) $|z+1|+|z-1|<4.$
表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.



例题: 区域的特性

例 (续)

(4) $|z+1|+|z-1|<4$.
表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.



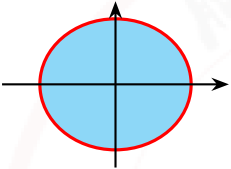
思考

$|z+1|+|z-1|\geqslant 1$ 表示什么集合?

例题: 区域的特性

例 (续)

(4) $|z+1|+|z-1|<4.$
表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通域.



思考

$|z+1|+|z-1|\geqslant 1$ 表示什么集合?

答案

整个复平面.