

中国科学技术大学随堂测验

2020~2021 学年第__学期

复变函数 B(001548)

一、每题 1 分, 共 11 分.

1. 计算 $(\sqrt{3} + i)^{114514}$.
2. 计算 $(-4 + 4i)^{1/5}$.
3. 请问 $\arg(z + 1) = -\frac{\pi}{2}$ 的图像是什么?
4. 请问 $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{1919}$ 的图像是什么?
5. 请问 $\arg \frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{3}$ 的图像是什么?
6. 将 $x^2 + 6x + y^2 - 18y = 810$ 化为复数形式.
7. $x^2 - y^2 = 4$ 在 $w = z^2$ 下的像是什么?
8. $\arg z$ 是连续函数吗?
9. 证明: $f(z) = z\bar{z}^{-1} - \bar{z}z^{-1}$ 在 $z \rightarrow 0$ 时极限不存在.
10. 求出 $\frac{1}{\sin z - 2}$ 的解析区域.
11. 证明: 若整函数 (在整个复平面解析) f 将实轴和虚轴均映为实数, 则 $f'(0) = 0$.

二、每题 2 分, 共 4 分.

1. 证明: 如果 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ 且 $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, 则 z_1, z_2, z_3 构成一个正三角形, 且单位圆 (圆心为 0, 半径为 1 的圆) 是它的外接圆.
2. 证明: 设 $|a| < 1$. 证明 $|z| = 1$ 当且仅当 $|z - a| = |1 - \bar{a}z|$.

三、每题 3 分, 共 9 分.

1. 验证 $e^x(x \cos y - y \sin y) + ie^x(y \cos y + x \sin y)$ 在全平面解析, 并求出其导数. 它在无穷远解析吗? 为何?
2. 求下列全纯函数在 $\{z : |z| < 1\}$ 中的零点个数:
 - (1) $z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$;
 - (2) $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$;

(3) $e^z - 4z^n + 1$.

3. 设 4 维实向量空间 $\mathbb{H} = \{z + wj \mid z, w \in \mathbb{C}\}$ 上的乘法运算为

$$(z_1 + w_1j)(z_2 + w_2j) = (z_1z_2 - w_1\bar{w}_2) + (z_1w_2 + w_1\bar{z}_2)j,$$

定义 $\tau(z + wj) = \bar{z} - wj$. 证明

(1) 对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$, $\tau(\alpha\beta) = \tau(\alpha)\tau(\beta)$.

(2) 对于任意 $\alpha \in \mathbb{H}$, $\tau(\tau(\alpha)) = \alpha$ 且 $\alpha\tau(\alpha)$ 是非负实数. $\alpha\tau(\alpha) = 0$ 当且仅当 $\alpha = 0$.

(3) 对于任意非零 $\alpha \in \mathbb{H}$, 存在 $\beta \in \mathbb{H}$ 使得 $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$.

四、每题 4 分, 共 36 分.

1. 计算积分 $\int_{\gamma} \frac{3z-2}{z} dz$, 其中 γ 为圆周 $\{z : |z| = 2\}$ 的上半圆, 从 -2 到 2 .

2. 求 $\frac{1}{1-z-z^2}$ 在 $z=0$ 处的泰勒展开 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. 由此求得斐波那契数列

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

的通项公式.

3. 函数 $\sin \frac{1}{1-z}$ 有哪些奇点 (包括 ∞)? 并求其在 1 处的洛朗展开.

4. 计算 $\frac{e^z}{z(z-1)}$ 在其所有奇点处的留数.

5. 证明如果 f 在复平面解析且有界, 则对任意 $a \in \mathbb{C}$, 有 $\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz = 0$, 其中 $R > |a|$. 由此证明 f 是常数.

6. 证明 $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} \pi$.

7. 利用拉普拉斯变换解微分方程 $\begin{cases} y''(t) - y'(t) = e^t, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

8. 计算 $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^3(z-1)^3(z-3)^5}$.

9. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

中国科学技术大学试卷 (A)

2020~2021 学年第__学期

复变函数 B(001548)

一、计算题 (每题 5 分, 共 10 分)

1. 计算 $(2020 + i)(2 - i)$.

2. 计算 $\operatorname{Arccos} 2$.

二、计算题 (每题 6 分, 共 30 分), 所有路径均为逆时针.

1. $\int_C (e^z + 3z^2 + 1) dz$, $C : |z| = 2, \operatorname{Re} z > 0$.

2. $\int_C \frac{dz}{z(z-1)^2(z-5)}$, $C : |z| = 3$.

3. $\int_C \frac{dz}{(\sin z)(z+6)(z-5)}$, $C : |z| = 4$.

4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 5} dx$.

5. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + 2\sin^2 \theta)^2}$.

三、解答题 (每题 10 分, 共 60 分)

1. 求 α 使得 $v(x, y) = \alpha x^2 y - y^3 + x + y$ 是调和函数, 并求虚部为 $v(x, y)$ 且满足 $f(0) = 1$ 的解析函数 $f(z)$.

2. 将 $f(z) = \frac{1}{z-2} + e^{-z}$ 在 $z = 0$ 处展开为幂级数, 并指出其收敛半径.

3. 将 $f(z) = \frac{1}{z^3 + 2z^2}$ 在 $1 < |z+1| < +\infty$ 展开为洛朗级数.

4. 求方程 $z^8 + e^z + 6z + 1 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 中根的个数, 并说明理由.

5. 利用拉氏变换解微分方程

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = te^t \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

6. 设 f 是域 $|z| > r > 0$ 上的解析函数. 证明: 如果对于 $|a| > R > r$, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(a)$, 则积分

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0.$$

中国科学技术大学试卷参考答案 (A)

2020~2021 学年第 一 学期

复变函数 B(001548)

一、计算题 (每题 5 分, 共 10 分)

1. 【解】

$$(2020 + i)(2 - i) = 4040 + 1 + 2i - 2020i = 4041 - 2018i.$$

2. 【解】

设 $\cos z = 2$, 则

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2, \quad e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0.$$

于是

$$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3}, \quad iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2n\pi i,$$

即 $z = 2n\pi \pm \ln(2 + \sqrt{3})i, n \in \mathbb{Z}$.

二、计算题 (每题 6 分, 共 30 分), 所有路径均为逆时针.

1. 【解】

由于该函数解析, 因此

$$\int_C (e^z + 3z^2 + 1) dz = (e^z + z^3 + z) \Big|_{-2i}^{2i} = e^{2i} - e^{-2i} - 12i = (2\sin 2 - 12)i.$$

2. 【解】

该函数 $f(z)$ 在 $|z| < 3$ 中有 1 阶极点 0 和 2 阶极点 1, 且

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = -\frac{1}{5}, \quad \operatorname{Res}[f(z), 1] = \left[\frac{1}{z(z-5)} \right]' \Big|_{z=1} = \frac{5-2z}{z^2(z-5)^2} \Big|_{z=1} = \frac{3}{16},$$

因此

$$\int_C \frac{dz}{z(z-1)^2(z-5)} = 2\pi i \left(-\frac{1}{5} + \frac{3}{16} \right) = -\frac{\pi i}{40}.$$

3. 【解】

该函数 $f(z)$ 在 $|z| < 4$ 中有 1 阶极点 0, π 且

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = -\frac{1}{30}, \quad \operatorname{Res}[f(z), \pi] = \frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)},$$

因此

$$\int_C \frac{dz}{(\sin z)(z+6)(z-5)} = 2\pi i \left[-\frac{1}{30} + \frac{1}{(\pi+6)(5-\pi)} \right] = \frac{\pi^2(\pi+1)i}{15(\pi+6)(5-\pi)}.$$

4. 【解】

函数 $R(z) = \frac{1}{z^2 + 2z + 3}$ 在上半平面有 1 阶极点 $-1 + 2i$, 因此

$$\operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, -1 + 2i] = \frac{e^{-2-i}}{4i} = \frac{-\sin 1 - i \cos 1}{4e^2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 5} dx = \operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 2x + 5} dx \right) = \operatorname{Re} \left(2\pi i \frac{-\sin 1 - i \cos 1}{4e^2} \right) = \frac{\pi \cos 1}{2e^2}.$$

5. 【解】

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + 2\sin^2 \theta)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(2 - \cos 2\theta)^2} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2(2 - \cos \theta)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4(2 - \cos \theta)^2}.$$

令 $z = e^{i\theta}$, 则

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + 2\sin^2 \theta)^2} = \int_{|z|=1} \frac{z dz}{i(z^2 - 4z + 1)^2}.$$

设被积函数为 $f(z)$, 则 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 上有 2 阶极点 $2 - \sqrt{3}$, 且

$$\operatorname{Res}[f(z), 2 - \sqrt{3}] = \left[\frac{1}{i(z - 2 - \sqrt{3})^2} - \frac{2z}{i(z - 2 - \sqrt{3})^3} \right] \Big|_{z=2-\sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{3}i}.$$

从而

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + 2\sin^2 \theta)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

三、解答题 (每题 10 分, 共 60 分)

1. 【解】

由 $v_{xx} + v_{yy} = 0$ 可知 $2\alpha y - 6y = 0$, 因此 $\alpha = 3$. 设 $f = u + iv$, 则由柯西-黎曼方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 1,$$

因此 $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x + g(y)$. 由于

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

即 $-6xy + g'(y) = -(6xy + 1)$, $g(y) = -y + c$, 从而

$$u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + x - y + c,$$

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + x - y + c + i(3x^2y - y^3 + x + y) = z^3 + (1 + i)z + c.$$

由于 $f(0) = 1$, 因此 $c = 1$, $f(z) = z^3 + (1 + i)z + 1$.

2. 【解】

$$f(z) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} + e^{-z} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{z^m}{m!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[-2^{-n-1} + \frac{(-1)^n}{n!} \right] z^n,$$

收敛半径为 2.

3. 【解】

设 $w = \frac{1}{z+1}$, 则 $0 < |w| < 1$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^3 + 2z^2} &= \frac{w^3}{(1-w)^2(1+w)} = \frac{w^3}{2} \left[\frac{1}{1-w^2} + \frac{1}{(1-w)^2} \right] \\ &= \frac{w^3}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1+(-1)^n}{2} + n+1 \right] w^n = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2n-3-(-1)^n}{4} (z+1)^{-n}.\end{aligned}$$

4. 【解】

由于在 $|z| = 1$ 上

$$|z^8 + e^z + 1| \leq 1 + e + 1 < 6 = |6z|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z| < 1$ 中有 1 个根. 由于在 $|z| = 2$ 上

$$|6z + e^z + 1| \leq 12 + e^2 + 1 < 2^8 = |z^8|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z| < 2$ 中有 8 个根. 从而该方程在 $1 < |z| < 2$ 中有 7 个根.

5. 【解】

设 $Y = \mathcal{L}[y]$, 则

$$\begin{aligned}p^2 Y + 2pY + Y &= \frac{1}{(p-1)^2}, \\ Y &= \frac{1}{(1+p)^2(1-p)^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1} \right], \\ y &= \mathcal{L}^{-1}[Y] = \frac{1}{4}(te^t + te^{-t} + e^{-t} - e^t).\end{aligned}$$

6. 【证明】

设 $R' > |a|$, 则函数 $\frac{f(z)}{z-a}$ 在 $|z| > R'$ 上解析, 因此由多连通区域的柯西积分定理, 对任意 $R'' > R' + |a|$,

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

由长大不等式

$$\left| \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a} dz - 2\pi i f(a) \right| = \left| \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \leq 2\pi \max_{|z-a|=R''} |f(z) - f(a)|.$$

令 $R' \rightarrow +\infty$, 则

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{|z-a|=R''} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a).$$

设 D 为区域 $R < |z| < R'$, C 为其边界. 由多连通区域的柯西积分定理

$$\int_{|z|=R'} \frac{f(z)}{z-a} dz - \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a),$$

因此

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0.$$

中国科学技术大学试卷 (B)

2020~2021 学年第__学期

复变函数 B(001548)

一、计算题 (每题 5 分, 共 10 分)

1. 计算 $\ln(-i)$.
2. 计算 $(-64)^{1/4}$.

二、计算题 (每题 6 分, 共 30 分), 所有路径均为逆时针.

1. $\int_C (e^{-z} - 3z^2 + 1) dz, C: |z| = 2, \operatorname{Im} z > 0$.
2. $\int_C \frac{dz}{z(z+1)^2(z-4)}, C: |z| = 3$.
3. $\int_C \frac{dz}{(\cos z)(z-6)}, C: |z| = 3$.
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$.
5. $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + 2\cos^2 \theta)^2}$.

三、解答题 (每题 10 分, 共 60 分)

1. 求 α 使得 $u(x, y) = x^3 + \alpha xy^2 + x - y$ 是调和函数, 并求实部为 $u(x, y)$ 且满足 $f(0) = i$ 的解析函数 $f(z)$.
2. 将 $f(z) = \frac{1}{z-2} + e^{-z}$ 在 $z = 1$ 处展开为幂级数, 并指出其收敛半径.
3. 将 $f(z) = \frac{1}{z^3 + 2z^2}$ 在 $2 < |z| < +\infty$ 展开为洛朗级数.
4. 求方程 $z^3 + \frac{1}{z} + 4z + 1 = 0$ 在 $1 < |z| < 3$ 中根的个数, 并说明理由.
5. 利用拉氏变换解微分方程
$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = te^{-t} \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$
6. 设函数 f 在整个复平面解析, 若 f 将实轴和虚轴均映为实数, 则 f 是偶函数.

中国科学技术大学试卷参考答案 (B)

2020~2021 学年第 一 学期

复变函数 B(001548)

一、计算题 (每题 5 分, 共 10 分)

1. 【解】由于 $-i = \exp\left(-\frac{\pi}{2}i\right)$, 因此 $\ln(-i) = -\frac{\pi}{2}i$.

2. 【解】

由于 $-64 = 64e^{\pi i}$, 因此

$$(-64)^{1/4} = 2\sqrt{2} \exp\left[\frac{(2n+1)\pi i}{4}\right], \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

即 $2+2i, 2-2i, -2+2i, -2-2i$.

二、计算题 (每题 6 分, 共 30 分), 所有路径均为逆时针.

1. 【解】由于该函数解析, 因此

$$\int_C (e^z - 3z^2 + 1) dz = (e^z - z^3 + z) \Big|_2^{-2} = e^{-2} - e^2 + 12.$$

2. 【解】

该函数 $f(z)$ 在 $|z| < 3$ 中有 1 阶极点 0 和 2 阶极点 -1 , 且

$$\operatorname{Res}[f(z), 0] = -\frac{1}{4}, \quad \operatorname{Res}[f(z), -1] = \left[\frac{1}{z(z-4)} \right]' \Big|_{z=-1} = \frac{4-2z}{z^2(z-4)^2} \Big|_{z=-1} = \frac{6}{25},$$

因此

$$\int_C \frac{dz}{z(z+1)^2(z-4)} = 2\pi i \left(-\frac{1}{4} + \frac{6}{25} \right) = -\frac{\pi i}{50}.$$

3. 【解】

该函数 $f(z)$ 在 $|z| < 4$ 中有 1 阶极点 $\pm\pi/2$ 且

$$\operatorname{Res}[f(z), \frac{\pi}{2}] = -\frac{2}{\pi-12}, \quad \operatorname{Res}[f(z), -\frac{\pi}{2}] = -\frac{2}{\pi+12},$$

因此

$$\int_C \frac{dz}{(\cos z)(z-6)} = 2\pi i \left(-\frac{2}{\pi-12} - \frac{2}{\pi+12} \right) = \frac{8\pi^2 i}{\pi^2 - 144}.$$

4. 【解】

函数 $R(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 10}$ 在上半平面有 1 阶极点 $1+3i$, 因此

$$\operatorname{Res}[R(z)e^{iz}, 1+3i] = \frac{e^{-3+i}}{6i} = \frac{\sin 1 - i \cos 1}{6e^3},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - 2x + 10} dx = \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 - 2x + 10} dx \right] = \operatorname{Re} \left[2\pi i \frac{\sin 1 - i \cos 1}{6e^3} \right] = \frac{\pi \cos 1}{3e^3}.$$

5. 【解】

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+2\cos^2\theta)^2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(2+\cos 2\theta)^2} = \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2(2+\cos\theta)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{4(2+\cos\theta)^2}.$$

令 $z = e^{i\theta}$, 则原积分等于

$$\int_{|z|=1} \frac{z dz}{i(z^2 + 4z + 1)^2}.$$

设被积函数为 $f(z)$, 则 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 上有 2 阶极点 $-2 + \sqrt{3}$, 且

$$\text{Res}[f(z), -2 + \sqrt{3}] = \left[\frac{1}{i(z + 2 + \sqrt{3})^2} - \frac{2z}{i(z + 2 + \sqrt{3})^3} \right] \Big|_{z=-2+\sqrt{3}} = \frac{1}{6\sqrt{3}i}.$$

从而

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+2\cos^2\theta)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{6\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

三、解答题 (每题 10 分, 共 60 分)

1. 【解】

由 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ 可知 $6x + 2\alpha x = 0$, 因此 $\alpha = -3$. 设 $f = u + iv$, 则由柯西-黎曼方程,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 1,$$

因此 $v(x, y) = 3x^2y - y^3 + y + g(x)$. 由于

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

即 $-6xy - 1 = -(6xy + g'(x))$, $g(x) = x + c$, 从而

$$v(x, y) = 3x^2y - y^3 + x + y + c,$$

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + x - y + i(3x^2y - y^3 + x + y + c) = z^3 + (1+i)z + ci.$$

由于 $f(0) = i$, 因此 $c = 1$, $f(z) = z^3 + (1+i)z + i$.

2. 【解】

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{1-(z-1)} + e^{-1}e^{-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (z-1)^n + e^{-1} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m (z-1)^m}{m!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[-1 + \frac{(-1)^n}{n!} \right] (z-1)^n, \end{aligned}$$

收敛半径为 1.

3. 【解】

设 $w = 1/z$, 则 $0 < |w| < 1/2$,

$$\frac{1}{z^3 + 2z^2} = \frac{w^3}{1 + 2w} = w^3 \sum_{n=0}^{+\infty} (-2w)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n w^{n+3} = \sum_{n=3}^{+\infty} (-2)^{n-3} z^{-n}.$$

4. 【解】

由于 $z \neq 0$, 即要求 $z^4 + 4z^2 + z + 1 = 0$ 的根的个数. 在 $|z| = 1$ 上

$$|z^4 + z + 1| \leq 1 + 1 + 1 < 4 = |4z^2|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z| < 1$ 中有 2 个根. 由于在 $|z| = 3$ 上

$$|4z^2 + z + 1| \leq 36 + 3 + 1 < 81 = |z^4|,$$

由罗歇定理, 该方程在 $|z| < 3$ 中有 4 个根. 从而该方程在 $1 < |z| < 3$ 中有 2 个根.

5. 【解】

设 $Y = \mathcal{L}[y]$, 则

$$\begin{aligned} p^2 Y - 2pY + Y &= \frac{1}{(p+1)^2}, \\ Y &= \frac{1}{(1+p)^2(1-p)^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1} \right], \\ y &= \mathcal{L}^{-1}[Y] = \frac{1}{4}(te^t + te^{-t} + e^{-t} - e^t). \end{aligned}$$

6. 【证明】

设 $f(z)$ 在 $z = 0$ 处的幂级数展开为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

对于 $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \in \mathbb{R}, \\ f'(iy) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f((y + \Delta y)i) - f(yi)}{\Delta yi} \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \in \mathbb{R}, \\ f''(iy) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f'((y + \Delta y)i) - f'(yi)}{\Delta yi} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

因此 f'' 在整个复平面解析且将实轴和虚轴均映为实数. 归纳可知对任意非负整数 k , $f^{(2k)}$ 在整个复平面解析且将实轴和虚轴均映为实数, 且 $f^{(2k+1)}(x) \in \mathbb{R}$, $f^{(2k+1)}(iy) \in i\mathbb{R}$. 从而

$$a_{2k+1} = f^{(2k+1)}(0) = 0 \in \mathbb{R} \cap i\mathbb{R},$$

即 $f(z)$ 是偶函数.