2022 年合肥工业大学试卷（A）

2022～2023 学年第一学期　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. i^{-i} 的主值是________________.

2. 设 $z=-i$, 则 $1+z+z^2+z^3+z^4=$________________.

3. 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 则积分 $\oint_C \left(\frac{\overline{z}}{z}\right) \mathrm{d}z=$________________.

4. 设 a,b,c 为实数. 如果函数 $f(z)=x^2-2xy-y^2+i(ax^2+bxy+cy^2)$ 在复平面上处处解析, 则 $a+b+c=$________________.

5. 函数 $\sin t+j\cos t$ 的傅里叶变换为________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 方程 $\big||z+i|-|z-i|\big|=1$ 表示的曲线是 (　　).

A. 直线　　B. 不是圆的椭圆　　C. 双曲线　　D. 圆周

2. 不等式 $-1\leqslant \arg z\leqslant \pi-1$ 确定是的 (　　).

A. 有界多连通闭区域　　B. 有界单连通区域
C. 无界多连通区域　　D. 无界单连通闭区域

3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(iz)^n$ 的收敛半径是 (　　).

A. i　　B. $-i$　　C. 1　　D. $+\infty$

4. 下面哪个函数在 $z=0$ 处不可导? (　　)

A. $2x+3yi$　　B. $2x^2+3y^2i$　　C. x^2-xyi　　D. $e^x\cos y+ie^x\sin y$

5. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, $g(z)$ 的一阶零点, 则 z_0 是 $f(z)^3g(z)^2$ 的 (　　).

A. 一阶极点　　B. 一阶零点　　C. 可去奇点　　D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z=\dfrac{3+i}{i}-\dfrac{10i}{3-i}$, 求 z 的模和辐角.

2. (6 分) 解方程 $\sin z=2\cos z$.

3. (6 分) 设 C 为从 i 到 $i-\pi$ 再到 $-\pi$ 的折线, 求 $\displaystyle\int_C \cos^2 z\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z-3|=4$, 求 $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $v(x,y)=x^3+y^3-axy(x+y)$ 是调和函数，求参数 a 以及解析函数 $f(z)$ 使得 $v(x,y)$ 是它的虚部.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\frac{z+1}{(z-1)^2}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<1$; (2) $1<|z|<+\infty$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 求 $f(z)=\frac{\cos z}{z^2(z^2-\pi^2)}$ 在有限复平面内的奇点和相应的留数.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+2y(t)=\sin t, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

9. (3 分) 复变函数 $f(z)=\sin z$ 和实变量函数 $g(x)=\sin x$ 的性质有什么相似和不同之处？试列举一二.

2022 年合肥工业大学考试参考答案（A）

2022～2023 学年第一学期　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad e^{\pi/2} \quad}$, **2.** $\underline{\quad 1 \quad}$, **3.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **4.** $\underline{\quad 2 \quad}$, **5.** $\underline{\quad 2\pi j\delta(\omega+1) \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 **A, B, C, D** 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	C	D	C	A	A

三、解答题

1. （6 分）【解】

由于 $z=-3i+1-i(3+i)=2-6i$, ……………………………………………(2 分)

因此 $|z|=2\sqrt{10}$, ……………………………………………………(2 分)

$\operatorname{Arg} z=2k\pi-\arctan 3, k\in\mathbb{Z}$. ……………………………(2 分, 只有主值得 1 分)

2. （6 分）【解】

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=2\cdot\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$e^{iz}-e^{-iz}=2i(e^{iz}+e^{-iz}),$$

$$e^{2iz}=\frac{1+2i}{1-2i}=\frac{(1+2i)^2}{5}, \quad \cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

$$2iz=\operatorname{Ln}\frac{(1+2i)^2}{5}=(2\arctan 2+2k\pi)i, \quad \cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

$$z=\arctan 2+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分, 只有主值得 1 分})$$

另解: 设 $z_0=\arctan 2$, 则

$$\tan z=\tan z_0, \quad \sin z\cos z_0=\sin z_0\cos z, \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\sin(z-z_0)=0, \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$z=z_0+k\pi=\arctan 2+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分, 只有主值得 1 分})$$

其它答案: $z=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{4}{3}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

3. （6 分）【解】

由于 $\cos^2 z$ 解析, 且 ……………………………………………………(1 分)

$$\int\cos^2 z\,\mathrm{d}z=\int\frac{1+\cos(2z)}{2}\,\mathrm{d}z \quad \cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

$$=\frac{z}{2}+\frac{\sin(2z)}{4}+C, \quad \cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C \cos^2 z \,\mathrm{d}z &= \left[\frac{z}{2}+\frac{\sin(2z)}{4}\right]\Bigg|_i^{-\pi} && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\\ &= -\frac{\pi}{2}-\left[\frac{i}{2}+\frac{\sin(2i)}{4}\right] && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\\ &= -\frac{\pi}{2}+\frac{(e^{-2}-4-e^2)i}{8}. && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\end{aligned}$$

4. （10 分）【解】

由于 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}$ 在 $|z-3|\leqslant 4$ 内的奇点为 $\pi, 2\pi$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (3 分)

因此

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i\big[\mathrm{Res}[f(z),\pi]+\mathrm{Res}[f(z),2\pi]\big] && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &= 2\pi i\left[\frac{e^{iz}}{z-2\pi}\bigg|_{z=\pi}+\frac{e^{iz}}{z-\pi}\bigg|_{z=2\pi}\right] && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &= 2\pi i\left[\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right]=4i. && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})\end{aligned}$$

5. （10 分）【解】

由 $\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=6x-2ay+6y-2ax=0$ 可知 $a=3$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (3 分)

由

$$\begin{aligned}f'(z) &= v_y+iv_x && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &= (3y^2-3x^2-6xy)+i(3x^2-6xy-3y^2) && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &= 3(i-1)(x+iy)^2=3(i-1)z^2 && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\end{aligned}$$

可知 $f(z)=(i-1)z^3+C, C\in\mathbb{R}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (2 分, 没有常数项得 1 分)

其它解法: 由 $u_x=v_y=3y^2-3x^2-6xy$ 得 $u=3xy^2-x^3-3x^2y+\psi(y)$. $\cdots\cdots\cdots$ (2 分)

由 $u_y=-v_x=-(3x^2-6xy-3y^2)$ 得 $\psi'(y)=3y^2$,

$\psi(y)=y^3+C$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (3 分, 没有常数项得 2 分)

$$\begin{aligned}f(z) &= u+iv\\ &= 3xy^2-x^3-3x^2y+y^3+C+i(x^3+y^3-3xy^2-3x^2y)\\ &= (i-1)z^3+C, C\in\mathbb{R}. && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\end{aligned}$$

6. （10 分）【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 1, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{z-1+2}{(z-1)^2}=\frac{1}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}=-\frac{1}{1-z}+2\left(\frac{1}{1-z}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)'=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)z^n. \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}, \quad \cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-2\left(\frac{1}{z-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\left(\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}\right)' \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-n)z^{-n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n}-2\sum_{n=1}^{\infty}(-n+1)z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)z^{-n}. \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

7. （10 分）【解】

由于 0 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$

由于 $\pm\pi$ 是分母的一阶零点, 因此它们是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\left(\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}\right)'\bigg|_{z=0} \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\frac{-\sin z\cdot(z^2-\pi^2)-\cos z\cdot 2z}{(z^2-\pi^2)^2}\bigg|_{z=0}=0, \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z),\pi]=\frac{\cos z}{z^2(z+\pi)}\bigg|_{z=\pi}=-\frac{1}{2\pi^3}, \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-\pi]=\frac{\cos z}{z^2(z-\pi)}\bigg|_{z=-\pi}=\frac{1}{2\pi^3}. \quad \cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

8. （9 分）【解】

设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-2, \quad \cdots\cdots\cdots(3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 2 + 2Y = \mathscr{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$Y(s) = \frac{2}{s^2+2} + \frac{1}{(s^2+1)(s^2+2)} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+2}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+2}\right] = \sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin(\sqrt{2}t). \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

9. （3 分）【解】

例如 (每项 1 分)

- $f'(z) = \cos z, g'(x) = \cos x$. ⋯⋯(1 分)
- $\sin z$ 处处可导, $\sin x$ 处处可导. ⋯⋯(1 分)
- 麦克劳林展开的系数相同. ⋯⋯(1 分)
- $\sin z$ 无界, $\sin x$ 有界. ⋯⋯(1 分)

2022 年合肥工业大学试卷（B）

2022~2023 学年第一学期　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $-1+\sqrt{3}i$ 的辐角主值是________.

2. $i^{2022}-(-i)^{2022}=$________.

3. 如果函数 $f(z)=e^{ax}(\cos y - i\sin y)$ 在复平面上处处解析, 则实数 $a=$________.

4. 设 C 为正向圆周 $|z|=1$, 则积分 $\oint_C \left(\frac{1+z+z^2}{z^3}\right) \mathrm{d}z=$________.

5. 函数 e^{jt} 的傅里叶变换为________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 不等式 $1<|z|<2$ 确定是的 (　).

A. 有界多连通区域　B. 有界单连通区域　C. 无界多连通区域　D. 无界单连通区域

2. 方程 $|z+i|=|z-i|$ 表示的曲线是 (　).

A. 直线　B. 不是圆的椭圆　C. 双曲线　D. 圆周

3. 幂级数在其收敛圆周上 (　).

A. 一定处处绝对收敛　B. 一定处处条件收敛

C. 一定有发散的点　D. 可能处处收敛也可能有发散的点

4. 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处可导的充要条件是 (　).

A. u,v 均在 (x_0,y_0) 处连续

B. u,v 均在 (x_0,y_0) 处有偏导数

C. u,v 均在 (x_0,y_0) 处可微

D. u,v 均在 (x_0,y_0) 处可微且满足 C-R 方程

5. $z=\pi$ 是函数 $\frac{\sin z}{(z-\pi)^2}$ 的 (　).

A. 一阶极点　B. 一阶零点　C. 可去奇点　D. 本性奇点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z=\frac{2+i}{1-2i}$, 求 z 的模和辐角.

2. (6 分) 求 $\sqrt[3]{-8}$.

3. (7 分) 设 C 是从 i 到 $2+i$ 的直线, 求 $\displaystyle\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$.

4. (7 分) 求 $\displaystyle\int_{-\pi i}^{\pi i}(e^z+1)\,\mathrm{d}z$.

5. (7 分) 求 $\displaystyle\int_0^{\pi}(z+\cos 2z)\,\mathrm{d}z$.

6. (7 分) 设 C 为正向圆周 $|z|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{z-6}{z^2+9}\,\mathrm{d}z$.

7. (8 分) 已知 $f(z)=u+iv$ 是解析函数, 其中 $u(x,y)=x^2+axy-y^2, v=2x^2-2y^2+2xy$ 且 a 是实数. 求参数 a 以及解析函数 $f'(z)$, 其中 $f'(z)$ 需要写成 z 的表达式.

8. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{2}{z(z+2)}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<2$; (2) $2<|z|<+\infty$

内的洛朗级数展开式.

9. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)+2y'(t)=8e^{2t}, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=2. \end{cases}$$

10. (3 分) 复积分的计算方法或公式有哪些? 请给出至少三条.

2022 年合肥工业大学考试参考答案（B）

2022～2023 学年第一学期　　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad \frac{2\pi}{3} \quad}$, **2.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **3.** $\underline{\quad -1 \quad}$, **4.** $\underline{\quad 2\pi i \quad}$, **5.** $\underline{\quad 2\pi\delta(\omega-1) \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 **A, B, C, D** 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	A	A	D	D	A

三、解答题

1. （6 分）【解】 由于 $z = \dfrac{(2+i)(1+2i)}{5} = i$, ······ (2 分)

因此 $|z| = 1$, ······ (2 分)

$\operatorname{Arg} z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. ······ (2 分, 只有主值得 1 分)

2. （6 分）【解】 由于 $-8 = 8e^{\pi i}$, ······ (2 分)

因此

$$\sqrt[3]{-8} = 2e^{\frac{1}{3}(\pi i + 2k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2 \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

即

$$2e^{\frac{\pi i}{3}} = 1 + \sqrt{3}i, \quad 2e^{\pi i} = -2, \quad 2e^{\frac{5\pi i}{3}} = 1 - \sqrt{3}i. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

3. （7 分）【解】

直线 C 的方程为 $z = t + i, 0 \leqslant t \leqslant 2$. ······ (2 分)

因此 $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t, \overline{z} = t - i$. ······ (2 分)

$$\int \overline{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^2 (t-i)\,\mathrm{d}t \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} - it\right)\Big|_0^2 = 2 - 2i. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

4. （7 分）【解】 由于 $e^z + 1$ 处处解析, 因此 ······ (2 分)

$$\int_{-\pi i}^{\pi i} (e^z + 1)\,\mathrm{d}z = (e^z + z)\Big|_{-\pi i}^{\pi i} \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$= (e^{\pi i} + \pi i) - (e^{-\pi i} - \pi i) \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$= 2\pi i. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

5.（7 分）【解】 由于 $z+\cos 2z$ 处处解析, 因此 ······························(2 分)

$$\int_0^{\pi}(z+\cos 2z)\,\mathrm{d}z=\left(\frac{z^2}{2}+\frac{\sin 2z}{2}\right)\Big|_0^{\pi} \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\frac{\sin 2\pi}{2} \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\frac{\pi^2}{2}. \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

6.（7 分）【解】

由于 $f(z)=\dfrac{z-6}{z^2+9}$ 在 $|z|\leqslant 4$ 内的奇点为 $\pm 3i$, ······························(2 分)

因此

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\big[\mathrm{Res}[f(z),3i]+\mathrm{Res}[f(z),-3i]\big] \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=2\pi i\left[\frac{z-6}{z+3i}\bigg|_{z=3i}+\frac{z-6}{z-3i}\bigg|_{z=-3i}\right] \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=2\pi i\left(\frac{3i-6}{6i}+\frac{-3i-6}{-6i}\right)=2\pi i \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

7.（8 分）【解】

由 $u_x=2x+ay=v_y=-4y+2x$ 可知 $a=-4$. ······························(2 分)

由

$$f'(z)=u_x+iv_x \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=(-4y+2x)+i(4x+2y) \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=(2+4i)z. \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

8.（10 分）【解】

由于 $f(z)$ 的奇点是 $0,2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1)

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+2} \quad \cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}} \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}z^n. \quad \cdots\cdots(1\text{ 分})$$

(2)

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} && \cdots\cdots (2\text{ 分}) \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}} && \cdots\cdots (1\text{ 分}) \\
&= \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z}\right)^n && \cdots\cdots (1\text{ 分}) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{z^n}. && \cdots\cdots (1\text{ 分})
\end{aligned}
$$

9. （9 分）【解】

设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - 2, \quad \cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - 2 + 2sY = \mathscr{L}[8e^{2t}] = \frac{8}{s-2}, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+2s)} = \frac{2}{s(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s}, && \cdots\cdots (2\text{ 分}) \\
y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = e^{2t} - 1. && \cdots\cdots (2\text{ 分})
\end{aligned}
$$

10. （3 分）【解】例如

- 列出参数方程 $z=z(t)$ 并将积分表达为 t 的积分形式;
- 单连通区域内解析函数的积分可以用原函数计算;
- 利用柯西-古萨定理;
- 利用复合闭路定理;
- 利用柯西积分公式;
- 利用高阶导数的柯西积分公式;
- 利用留数;
- 利用长大不等式.

2023 年合肥工业大学试卷（A）

2023～2024 学年第一学期　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 2^{-i} 的辐角主值是________________.

2. $2023-i$ 绕 0 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到的复数是________________.

3. 如果函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+5)\sin z}$ 可以在圆环域 $0<|z|<R$ 内作洛朗展开, 则 R 的最大值为________________.

4. 设 $f(z)=e^{z}-|z|\cos z$, 则 $\oint_{|z|=1} f(z)\,\mathrm{d}z=$________________.

5. 函数 $f(t)=\cos(3t)$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=$________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z}$ 在下面哪个区域内有原函数? (　　)

A. $0<|z|<1$　　B. $\operatorname{Re} z>0$

C. $|z-1|>2$　　D. $|z+1|+|z-1|>4$

2. 设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=4} \dfrac{\sin\zeta-\cos\zeta}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 则 $f'(\pi)=$(　　)

A. 0　　B. $2\pi i$　　C. $-2\pi i$　　D. πi

3. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n}}z^{n}$ 的收敛半径是 (　　).

A. 0　　B. $+\infty$　　C. e　　D. 1

4. 下面哪个函数不能作为解析函数的虚部? (　　)

A. $2x+3y$　　B. $2x^2+3y^2$　　C. x^2-xy-y^2　　D. $e^{x}\cos y$

5. $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{(e^{z}-1)^2z^3}{\sin z^8}$ 的 (　　).

A. 一阶极点　　B. 本性奇点　　C. 可去奇点　　D. 三阶极点

三、解答题

1. (6 分) 计算 $(-1+i)^{10}-(-1-i)^{10}$.

2. (6 分) 解方程 $\cos z=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

3. (6 分) 设 C 为有向曲线 $z(t)=\sin t+it, 0\leqslant t\leqslant\pi$, 求 $\displaystyle\int_C ze^z\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z-1|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C\frac{\sin z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $u(x,y)=x^3+ax^2y+bxy^2-3y^3$ 是调和函数，求参数 a,b 以及 $v(x,y)$ 使得 $v(0,0)=0$ 且 $f(z)=u+iv$ 是解析函数.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{z}{z^2-3z+2}$ 在圆环域

(1) $|z|>2$;　　(2) $0<|z-2|<1$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 设 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-\pi i)(z-2\pi i)^2}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点以及 $\displaystyle\oint_{|z|=8}f(z)\,\mathrm{d}z$.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases}y''(t)+4y(t)=3\cos t,\\ y(0)=1,\quad y'(0)=2.\end{cases}$$

9. (3 分) 复变函数 $f(z)=e^z$ 和实变量函数 $g(x)=e^x$ 的性质有什么相似和不同之处? 试举出三点.

2023 年合肥工业大学考试参考答案（A）

2023～2024 学年第一学期　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad -\ln 2 \quad}$, **2.** $\underline{\quad 1+2023i \quad}$, **3.** $\underline{\quad \pi \quad}$, **4.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **5.** $\underline{\quad \pi[\delta(\omega+3)+\delta(\omega-3)] \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 **A, B, C, D** 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	B	C	C	B	D

三、解答题

1. （**6** 分）【解】由于

$$-1+i=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$(-1+i)^{10}=32e^{\frac{30\pi i}{4}}=-32i, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

$$(-1-i)^{10}=32e^{-\frac{30\pi i}{4}}=32i, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

故

$$(-1+i)^{10}-(-1-i)^{10}=-64i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

也可以直接计算 $(-1+i)^2=-2i$ 得到 $(-1+i)^{10}=-32i$.

2. （**6** 分）【解】由

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

整理得到

$$e^{2iz}-\frac{3\sqrt{2}}{2}e^{iz}+1=0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$e^{iz}=\frac{1}{2}\left[\frac{3\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-4}\right]=\sqrt{2}\text{ 或}\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$iz=\operatorname{Ln}\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2+2k\pi i\text{ 或 }\operatorname{Ln}\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{2}\ln 2+2k\pi i,$$

$$z=2k\pi\pm\frac{\ln 2}{2}i, k\in\mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

其它解法: 由 $\cos z=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 得

$$\sin z=\sqrt{1-\cos^2 z}=\pm\frac{\sqrt{2}i}{4}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z=\sqrt{2}\text{ 或}\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

下同.

3. （**6 分**）【**解**】由于 ze^z 解析, 且 ························ (1 分)

$$\int ze^z\,\mathrm{d}z=(z-1)e^z+C, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

而曲线 C 的起点是 0, 终点是 πi, 因此

$$\begin{aligned}\int_C ze^z\,\mathrm{d}z&=(z-1)e^z\Big|_0^{\pi i} &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\\ &=(\pi i-1)e^{\pi i}-(-1)=2-\pi i. &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\end{aligned}$$

4. （**10 分**）【**解**】由于 $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z+i)(z-i)}$ 在 $|z-1|\leqslant 4$ 内的奇点为 $\pm i$, 因此 ··(2 分)

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z&=2\pi i\big[\mathrm{Res}[f(z),-i]+\mathrm{Res}[f(z),-2i]\big] &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &=2\pi i\left[\frac{\sin z}{z+i}\bigg|_{z=i}+\frac{\sin z}{z-i}\bigg|_{z=-i}\right] &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &=2\pi i\left[\frac{\sin i}{2i}+\frac{\sin(-i)}{-2i}\right] &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &=2\pi\sin i=\pi i\big(e-\frac{1}{e}\big). &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\end{aligned}$$

5. （**10 分**）【**解**】由

$$\Delta u=u_{xx}+u_{yy}=6x+2ay+2bx-18y=0$$

可知 $a=9, b=-3$. 由 ································ (3 分)

$$\begin{aligned}f'(z)&=u_x-iu_y &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &=(3x^2+18xy-3y^2)-i(9x^2-6xy-9y^2) &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &=(3-9i)(x+iy)^2=(3-9i)z^2 &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\end{aligned}$$

可知

$$f(z)=(1-3i)z^3+C, C\in\mathbb{R}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

由 $v(0,0)=0, f(0)=0$ 可知 $C=0$,

$$v=-3x^3+3x^2y+9xy^2-y^3. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

其它解法: 由 $u_x=v_y=3x^2+18xy-3y^2$ 得

$$v=3x^2y+9xy^2-y^3+\psi(x). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

由 $v_x=-u_y=-(9x^2-6xy-9y^2)$ 得

$$\psi'(x)=-9x^2, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\psi(x)=-3x^3+C, \quad v=-3x^3+3x^2y+9xy^2-y^3+C. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

由 $v(0,0)=0$ 可知 $C=0$,

$$v=-3x^3+3x^2y+9xy^2-y^3. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

6. （10 分）【解】由于 $f(z)$ 的奇点是 $1,2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^n}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1+(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{2}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

7. （10 分）【解】由于 πi 是分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots$ (1 分)

由于 $2\pi i$ 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

$$\operatorname{Res}[f(z),\pi i]=\left.\frac{e^z}{(z-2\pi i)^2}\right|_{z=\pi i}=\frac{1}{\pi^2}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),2\pi i] &= \left(\frac{e^z}{z-\pi i}\right)'\Bigg|_{z=2\pi i} \qquad \cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &= \frac{e^z(z-\pi i-1)}{(z-\pi i)^2}\Bigg|_{z=2\pi i} = \frac{1-\pi i}{\pi^2}, \qquad \cdots\cdots (2\text{ 分})\end{aligned}$$

$$\oint_{|z|=8} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\big[\operatorname{Res}[f(z),\pi i]+\operatorname{Res}[f(z),2\pi i]\big] = 2+\frac{4}{\pi}i. \qquad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

8. （9 分）【解】设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y - s - 2, \qquad \cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2Y - s - 2 + 4Y = 3\mathscr{L}[\cos t] = \frac{3s}{s^2+1}, \qquad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{s+2}{s^2+4} + \frac{3s}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{s^3+2s^2+4s+2}{(s^2+1)(s^2+4)}\\ &= \frac{2}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+1}, \qquad \cdots\cdots (2\text{ 分})\\ y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right] = \sin 2t + \cos t. \qquad \cdots\cdots (2\text{ 分})\end{aligned}$$

9. （3 分）【解】例如 (每项 1 分)

- $f'(z)=e^z, g'(x)=e^x$. $\cdots\cdots$ (1 分)
- e^z 处处可导, e^x 处处可导. $\cdots\cdots$ (1 分)
- 麦克劳林展开的系数相同. $\cdots\cdots$ (1 分)
- e^z 无界, e^x 无界. $\cdots\cdots$ (1 分)
- e^z 是周期的, e^x 不是. $\cdots\cdots$ (1 分)

2023 年合肥工业大学试卷（B）

2023～2024 学年第一学期　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $-1-i$ 的辐角主值是________.

2. $\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^3}=$________.

3. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z+5)(z-3)}$ 在 $z_0=0$ 处展开的幂级数的收敛半径是________.

4. 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)^{2023}}$, 则 $\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z=$________.

5. 常值函数 $F(\omega)=2$ 的傅里叶逆变换为 $f(t)=$________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 区域 $0<\mathrm{Re}\,z<1$ 是 (　)

A. 有界单连通区域　B. 无界单连通区域　C. 有界多连通区域　D. 无界多连通区域

2. 设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=2}\dfrac{\zeta^3+3\zeta}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 则 $f'(i)=$(　)

A. 0　B. $3i$　C. $-3i$　D. $2i$

3. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{(1+i)^n}$ 的收敛半径是 (　).

A. 0　B. $+\infty$　C. $\sqrt{2}$　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

4. 下面哪个函数不是调和函数? (　)

A. $3x-y$　B. x^2-y^2　C. $\ln(x^2+y^2)$　D. $\sin x\cos y$

5. $z=\pi$ 是函数 $f(z)=\dfrac{z-\pi}{(\sin z)^3}$ 的 (　).

A. 一阶极点　B. 本性奇点　C. 可去奇点　D. 二阶极点

三、解答题

1. (6 分) 求 $z=\dfrac{5+i}{2+3i}$ 的模和辐角.

2. (6 分) 求 $\mathrm{Ln}(1+\sqrt{3}i)$.

3. (6 分) 设 C 为从 $1+i$ 到 $1-i$ 的直线, 求 $\displaystyle\int_C (3z^2+1)\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z+1|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z+2z}{(z+\pi)^2}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $v(x,y)=x^2+4xy+ay^2$ 是调和函数，求参数 a 以及解析函数 $f(z)=u+iv$, 使得 v 是 $f(z)$ 的虚部.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{z+1}{(z-1)(z-2)}$ 在圆环域

(1) $|z-1|>1$; (2) $0<|z-2|<1$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 设 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)^2}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点以及 $\displaystyle\oint_{|z|=3} f(z)\,\mathrm{d}z$.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases} y''(t)-4y(t)=3e^t, \\ y(0)=0, \quad y'(0)=1. \end{cases}$$

9. (3 分) 谈一谈复变函数在一点处连续、可导与解析之间的联系.

2023 年合肥工业大学考试参考答案（B）

2023～2024 学年第一学期　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\quad -\frac{3}{4}\pi \quad}$, **2.** $\underline{\quad -i \quad}$, **3.** $\underline{\quad 3 \quad}$, **4.** $\underline{\quad 0 \quad}$, **5.** $\underline{\quad 2\delta(t) \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 **A, B, C, D** 之一对应填在下列表格里：

题号	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
答案	B	A	C	D	D

三、解答题

1. （6 分）【解】 由于

$$z=\frac{5+i}{2+3i}=\frac{(5+i)(2-3i)}{13}=\frac{13-13i}{13}=1-i, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$|z|=\sqrt{2}, \quad \operatorname{Arg} z=2k\pi-\frac{1}{4}\pi, k\in\mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\text{各 } 2 \text{ 分, 没有 } k \text{ 减 } 1 \text{ 分})$$

2. （6 分）【解】 由于

$$1+\sqrt{3}i=2e^{\frac{\pi i}{3}}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$\operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}i)=\ln 2+\big(2k\pi+\frac{\pi}{3}\big)i, k\in\mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots\cdots (\text{实部虚部各 } 2 \text{ 分, 没有 } k \text{ 减 } 1 \text{ 分})$$

3. （6 分）【解】 由于 $3z^2+1$ 解析, 且 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$

$$\int (3z^2+1)\,\mathrm{d}z=z^3+z+C, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$\begin{aligned}\int_C (3z^2+1)\,\mathrm{d}z &= (z^3+z)\big|_{1+i}^{1-i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\\ &=(1-i)^3-(1+i)^3+(1-i)-(1+i)\\ &=-6i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\end{aligned}$$

4. （10 分）【解】 由于 $f(z)=\dfrac{\sin z+2z}{(z+\pi)^2}$ 在 $|z+1|\leqslant 4$ 内的奇点为 $-\pi$, $\cdots\cdots\cdots$ (2 分)
因此

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= 2\pi i\,\mathrm{Res}[f(z),-\pi] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &= 2\pi i(\sin z+2z)'\Big|_{z=-\pi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &= 2\pi i[\cos(-\pi)+2] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &= 2\pi i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\end{aligned}$$

5. （10 分）【解】 由

$$\Delta v = v_{xx}+v_{yy}=2+2a=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

可知 $a=-1$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)
由

$$\begin{aligned}f'(z) &= v_y+iv_x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &= (4x-2y)+i(2x+4y) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &= (4+2i)(x+iy)=(4+2i)z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})\end{aligned}$$

可知

$$f(z)=(2+i)z^2+C, C\in\mathbb{R}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分, 没有 } C \text{ 减一分})$$

其它解法: 由 $u_x=v_y=4x-2y$ 得

$$u=2x^2-2xy+\psi(y). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

由 $u_y=-v_x=-(2x+4y)$ 得

$$\psi'(y)=-4y, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\psi(y)=-2y^2+C,\quad u=2x^2-2xy-2y^2+C. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$f(z)=2x^2-2xy-2y^2+C+i(x^2+4xy-y^2)=(2+i)z^2+C. \quad \cdots\cdots\cdots (1\text{ 分})$$

6. （10 分）【解】 由于 $f(z)$ 的奇点是 $1, 2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z-1)-1} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{1}{z-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-1} = -\frac{2}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(z-1)^n}. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$f(z) = \frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-1} = \frac{3}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n (z-2)^n. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

7. （10 分）【解】 由于 -1 是分母的一阶零点, 因此它们是 $f(z)$ 的一阶极点. $\cdots\cdots$ (1 分)

由于 -2 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1 分)

$$\operatorname{Res}[f(z), -1] = \left.\frac{1}{(z+2)^2}\right|_{z=-1} = 1, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), -2] &= \left.\left(\frac{1}{z+1}\right)'\right|_{z=-2} && \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ &= -\left.\frac{1}{(z+1)^2}\right|_{z=-2} = -1, && \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\end{aligned}$$

$$\oint_{|z|=3} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\big[\operatorname{Res}[f(z), \pi i] + \operatorname{Res}[f(z), 2\pi i]\big] = 0. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

8. （9 分）【解】 设 $\mathscr{L}[y] = Y$, 则

$$\mathscr{L}[y''] = s^2 Y - s y(0) - y'(0) = s^2 Y - 1, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\text{ 分})$$

因此

$$s^2 Y - 1 - 4Y = 3\mathscr{L}[e^t] = \frac{3}{s-1}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{1}{s^2-4} + \frac{3}{(s-1)(s^2-4)} = \frac{s+2}{(s-1)(s^2-4)}\\ &= \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}, && \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\\ y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] = e^{2t} - e^t. && \cdots\cdots\cdots\cdots (2\text{ 分})\end{aligned}$$

9. （3 分）【解】 言之成理即可。

- 解析蕴含可导，但反过来不对。 ························ (1 分)
- $f(z)$ 需要在 z_0 的一个邻域内都可导才解析。 ························ (1 分)
- 可导蕴含连续，但反过来不对。 ························ (1 分)

2024 年合肥工业大学试卷（A）

2024~2025 学年第一学期　　　复变函数与积分变换（1400261B）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega+\omega^2=$________________.

2. 对数函数主值 $\ln(-i)=$________________.

3. 设 C 为正向圆周 $|z-1|=1$, 则积分 $\oint_C \overline{z}\,\mathrm{d}z=$________________.

4. 函数 $f(z)=\tan z$ 在 $z=\dfrac{\pi}{2}$ 处的留数等于________________.

5. 常值函数 $f(t)=-2$ 的傅里叶变换为 $F(\omega)=$________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 集合 $|z-1|\geqslant|z-i|$ 是 (　　).

A. 有界单连通区域　　B. 无界单连通闭区域
C. 有界多连通区域　　D. 无界多连通闭区域

2. 下面哪个数不是纯虚数?(　　)

A. $\ln(-1)$　　B. $\cos i$　　C. $\sin i$　　D. $\sqrt{-\pi}$ 主值

3. 设有向曲线 $C: z(t)=\sin 2t+2i\cos t, t\in[0,\pi]$, 则积分 $\int_C z\,\mathrm{d}z$ 等于 (　　)

A. 0　　B. $-2i$　　C. $-4i$　　D. $4i$

4. 函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2-z-2}$ 不能在 (　　) 内作洛朗展开.

A. $0<|z|<2$　　B. $2<|z|<4$　　C. $0<|z+1|<2$　　D. $1<|z+1|<3$

5. $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{z\sin z^3}{\ln(1-z^4)}$ 的 (　　).

A. 一阶极点　　B. 本性奇点　　C. 可去奇点　　D. 四阶极点

三、解答题

1. (6 分) 设 $z=\sqrt{2}(1-i)$. 计算 z^5.

2. (6 分) 解方程 $\sin z=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. (6 分) 设 C 为从 1 到 $1+i$ 再到 i 的折线段, 求 $\displaystyle\int_C(\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}z)\,\mathrm{d}z$.

4. (10 分) 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\displaystyle\oint_C\frac{\cos z}{z^2(z+i)}\,\mathrm{d}z$.

5. (10 分) 假设 $v(x,y)=x^2+xy+ay^2-2y$ 是调和函数，求参数 a 以及 $u(x,y)$ 使得 $f(z)=u+iv$ 是解析函数且满足 $f(0)=0$.

6. (10 分) 确定函数 $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2+3z+2}$ 在圆环域

(1) $0<|z|<1$; (2) $|z+1|>1$

内的洛朗级数展开式.

7. (10 分) 设 $f(z)=\dfrac{z^2-\pi^2}{z\sin z}$. 求 $f(z)$ 在有限复平面内的奇点和类型, 求出极点的阶, 并计算 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为正向圆周 $|z-6|=4$.

8. (9 分) 用拉普拉斯变换求解微分方程初值问题

$$\begin{cases}y''(t)-4y(t)=e^{3t},\\ y(0)=1,\quad y'(0)=-1.\end{cases}$$

9. (3 分) 复变函数 $f(z)=\sin z$ 和实变量函数 $g(x)=\sin x$ 的性质有什么相似和不同之处？试举出三点.

2024 年合肥工业大学考试参考答案（A）

2024~2025 学年第一学期　　　复变函数与积分变换 (1400261B)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\underline{\ -1\ }$, **2.** $\underline{\ -\frac{\pi i}{2}\ }$, **3.** $\underline{\ 2\pi i\ }$, **4.** $\underline{\ -1\ }$, **5.** $\underline{\ -4\pi\delta(\omega)\ }$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里：

题号	1	2	3	4	5
答案	B	B	A	A	C

三、解答题

1.（6 分）【解】 由于

$$z = 2e^{-\frac{\pi i}{4}}. \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$z^5 = 2^5 e^{-\frac{5\pi i}{4}} = -16\sqrt{2} + 16\sqrt{2}i. \quad \cdots\cdots (4\text{ 分})$$

也可直接计算得到.

2.（6 分）【解】 由

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

整理得到

$$e^{2iz} - \frac{4\sqrt{3}}{3} i e^{iz} - 1 = 0, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

$$e^{iz} = \frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} i \pm \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} i\right)^2 + 4}\right) = \sqrt{3} i \text{ 或} \frac{\sqrt{3}}{3} i, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$iz = \mathrm{Ln}(\sqrt{3} i) = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i \text{ 或} \mathrm{Ln}\,\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{2}\ln 3 + \frac{\pi i}{2} + 2k\pi i,$$

$$z = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\ln 3}{2} i, k \in \mathbb{Z}. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

另解: 由于

$$\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} i, \quad \cdots\cdots (2\text{ 分})$$

因此

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = \sqrt{3} i \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{3} i. \quad \cdots\cdots (3\text{ 分})$$

其余相同.

3.（6 分）【解】 分段计算. ⋯⋯ (1 分)

第一段 $C_1 : z = 1 + it, t \in [0,1],\ \mathrm{d}z = i\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = 1 + t$, 因此 ⋯⋯ (1 分)

$$\int_{C_1} (\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 (1+t) i\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2} i. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

第二段 $C_2 : z = 1 + i - t, t \in [0,1],\ \mathrm{d}z = -\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z = 2 - t$, 因此 ⋯⋯ (1 分)

$$\int_{C_2} (\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \big(-(2-t)\big)\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

因此

$$\int_C (\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, z)\,\mathrm{d}z = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} i. \quad \cdots\cdots (1\text{ 分})$$

4.（10 分）【解】 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z+i)}$ 在 $|z|\leqslant 2$ 内的奇点为 $0,-i$. ……………………(2 分)

$$\operatorname{Res}[f,0]=\left(\frac{\cos z}{z+i}\right)'\Big|_{z=0}=\frac{-(z+i)\sin z-\cos z}{(z+i)^2}\Big|_{z=0}=1, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f,-i]=\frac{\cos z}{z^2}\Big|_{z=-i}=-\cos i. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

故

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z&=2\pi i\big[\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),-i]\big] &\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})\\&=2\pi i(1-\cos i) &\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})\\&=(2-e-\frac{1}{e})\pi i. &\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})\end{aligned}$$

5.（10 分）【解】由

$$\Delta v=v_{xx}+v_{yy}=2+2a=0$$

可知 $a=-1$. 由 ……………………………………………………(3 分)

$$\begin{aligned}f'(z)&=v_y+iv_x &\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})\\&=(x-2y-2)+i(2x+y) &\cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})\\&=(1+2i)(x+yi)-2=(1+2i)z-2 &\cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})\end{aligned}$$

可知

$$f(z)=\frac{1+2i}{2}z^2-2z+C, C\in\mathbb{R}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

由 $f(0)=0$ 可知 $C=0$,

$$u=\frac{x^2-y^2}{2}-2xy-2x. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

其它解法: 由 $u_x=v_y=x-2y-2$ 得

$$u=\frac{1}{2}x^2-2xy-2x+\psi(y). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

由 $u_y=-v_x=-(2x+y)$ 得

$$\psi'(x)=-y, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

$$\psi(x)=-\frac{1}{2}y^2+C, \quad u=\frac{1}{2}x^2-2xy-2x-\frac{1}{2}y^2+C. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\text{ 分})$$

由 $f(0)=0$ 可知 $C=0$,

$$u=\frac{1}{2}x^2-2xy-2x-\frac{1}{2}y^2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\text{ 分})$$

6.（10 分）【解】由于 $f(z)$ 的奇点是 $-1,-2$, 因此 $f(z)$ 在这两个圆环域内都解析.

(1) 由于

$$\frac{1}{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{3}{z+2}-\frac{2}{z+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{3}{2^{n+1}}-2\Big)z^n. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

(2) 由于

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z+1)^n}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

因此

$$f(z)=\frac{3}{z+2}-\frac{2}{z+1}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z+1)^n}-\frac{2}{z+1}=\frac{1}{z+1}+3\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(z+1)^n}. \quad \cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

7. （10 分）【解】 由于 0 是分母的二阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的二阶极点. ········(1 分)
由于 $\pm\pi$ 是分子分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的可去极点. ·····················(1 分)
对于整数 $k\neq 0,\pm1$, $k\pi$ 是分母的一阶零点, 因此它是 $f(z)$ 的一阶极点. ···········(1 分)

$$\operatorname{Res}[f(z),\pi]=0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z),2\pi]=\frac{z^2-\pi^2}{\sin z+z\cos z}\bigg|_{z=2\pi}=\frac{3}{2}\pi, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\operatorname{Res}[f(z),3\pi]=\frac{z^2-\pi^2}{\sin z+z\cos z}\bigg|_{z=3\pi}=-\frac{8}{3}\pi, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\oint_{|z-6|=4}f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\Big[\operatorname{Res}[f(z),\pi]+\operatorname{Res}[f(z),2\pi]+\operatorname{Res}[f(z),3\pi]\Big]=-\frac{7}{3}\pi^2 i. \quad \cdots (2 \text{ 分})$$

8. （9 分）【解】 设 $\mathscr{L}[y]=Y$, 则

$$\mathscr{L}[y'']=s^2Y-sy(0)-y'(0)=s^2Y-s+1, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3 \text{ 分})$$

因此

$$s^2Y-s+1-4Y=\mathscr{L}[e^{3t}]=\frac{1}{s-3}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{1}{s^2-4}\Big(s-1+\frac{1}{s-3}\Big)\\&=\frac{s-2}{(s+2)(s-3)}=\frac{1}{5}\Big(\frac{1}{s-3}+\frac{4}{s+2}\Big), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})\end{aligned}$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{5}\Big(\frac{1}{s-3}+\frac{4}{s+2}\Big)\right]=\frac{1}{5}e^{3t}+\frac{4}{5}e^{-2t}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \text{ 分})$$

9. （3 分）【解】 每项 1 分, 例如

- 导数形式相同;
- 一个有界一个无界;
- 都是奇函数;
- 麦克劳林展开的系数相同;
- 都是处处可导;
- 都是周期函数.