漫谈指数和与 L 函数

张神星 (合肥工业大学)
首都师范大学
zhangshenxing@hfut.edu.cn

1

指数和与 L 函数的特征根

设 p 是素数, $\mathbb{F}_q$ 是含有 $q=p^a$ 个元素的有限域. 设 $\psi:\mathbb{F}_p\to\mathbb{Q}(\zeta_p)$ 是一非平凡加性特征, 那么 $\psi_k=\psi\circ\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_p}$ 是 $\mathbb{F}_{q^k}$ 的加性特征.

对于多项式 $f(x)\in\mathbb{F}_q[x]$, 定义指数和

$$S_k(f):=\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^k}}\psi_k(f(x))\in\mathbb{Z}[\zeta_p]$$

以及L 函数

$$L(s,f):=\exp\left(\sum_k S_k(f)\frac{s^k}{k}\right)=\prod_{x\in\overline{\mathbb{F}}_p}\left(1-\psi_{\deg x}(f(x))s^{\deg x}\right)^{-1}.$$

我们关心，作为一个代数整数, $S_k(f)$ 的各种性质, 以及 L 函数的各种性质.

L 函数的有理性

定理 (Dwork-Bombieri-Grothendick)

$L(s,f)$ 是有理函数.

$$L(s,f)=\frac{\prod_j(1-\beta_j s)}{\prod_i(1-\alpha_i s)},\quad \alpha_i\neq\beta_j \implies S_k(f)=\sum_i \alpha_i^k-\sum_j \beta_j^k.$$

称 α_i,β_j 为特征根. 为了估计特征根, 我们需要 ℓ 进方法.

ℓ 进方法

设 $E \supseteq \mu_p$ 是一 $\ell \neq p$ 进域. Deligne 在 $\mathbb{G}_{a,\overline{\mathbb{F}}_p}$ 上构造了一个局部自由秩 1 的 E 系数 ℓ 进 lisse 层 $\mathcal{F}_\ell(f)$, 它满足

$$L(s,f) = \prod_i \det\left(1 - s\mathrm{Frob}, \mathrm{H}_c^i\right)^{(-1)^{i+1}},$$

$$S_k(f) = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}(\mathrm{Frob}^k, \mathrm{H}_c^i).$$

这里 Frob 是几何 Frobenius, $\mathrm{H}_c^i = \mathrm{H}_c^i(\mathbb{G}_{a,\overline{\mathbb{F}}_p}, \mathcal{F}_\ell(f))$ 是紧支撑上同调.

ℓ 进方法（续）

记 ω_{ij} 为 Frob 在 H_c^i 上的特征值, 则

$$S_k(f) = \sum_{ij} (-1)^i \omega_{ij}^k.$$

定理 (Deligne)

ω_{ij} 是代数整数, 且存在整数 $0 \leqslant r_{ij} \leqslant i$ 使得它的所有 $\mathbb{Q}$ 共轭的绝对值均为 $q^{r_{ij}/2}$.

我们把 r_{ij} 就叫做对应特征根 ω_{ij} 的权.
记 $b_i = \dim_E \mathrm{H}_c^i$ 为 Betti 数, 则

$$|S_k(f)| \leqslant \sum_i b_i q^{ki/2}.$$

一般地，设

- $V \subseteq \mathbb{A}^N$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的闭子簇，
- $f \in \mathbb{F}_q[V]$，$g \in \mathbb{F}_q[V]^\times$，
- χ 是 $\mathbb{F}_q^\times$ 上乘性特征.

定义指数和和 L 函数

$$S_k = \sum_{x \in V(\mathbb{F}_{q^k})} \psi_{k \log_p q}(f(x)) \chi\left(\mathbf{N}_{\mathbb{F}_{q^n}/\mathbb{F}_q}(g(x))\right), \quad L(s, V, f) = \exp\left(\sum_k S_k \frac{s^k}{k}\right).$$

前述结论依然成立.

定理 (Bombieri1978)

特征根个数不超过 $(4\max\{\deg V + 1, \deg f\} + 5)^{2N+1}$.

例 (Deligne SGA4$\frac{1}{2}$, Serre1977)

设 $\chi = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ 是 $\mathbb{F}_q^\times$ 上的 n 个特征, $a \in \mathbb{F}_q^\times$. 定义 Kloosterman 和

$$\mathrm{Kl}_k = \sum_{\substack{x_1 \cdots x_n = a \\ x_i \in \mathbb{F}_{q^k}}} \chi_1(x_1) \cdots \chi_n(x_n) \psi_k(x_1 + \cdots + x_n).$$

它是 $V = V(X_1 \cdots X_n - a)$ 上 $f = X_1 + \cdots + X_n$ 的指数和.
此时 $L(s, V, f)^{(-1)^n}$ 是 n 次多项式, 即

$$\mathrm{Kl}_k = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \omega_i^k,$$

且特征根权均为 $n-1$. 因此 $|\mathrm{Kl}_k| \leqslant nq^{(n-1)k/2}$.

例 (Serre1977)

设 X 是一几何不可约仿射光滑曲线，$\widehat{X}$ 为其对应的射影曲线，$X_\infty = \widehat{X} - X$. 设 $X' \to X$ 是方程 $y^p - y = f(x)$ 给出的 $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 平展覆盖，并延拓至 $\widehat{X}' \to \widehat{X}$. 对于 $P \in X_\infty$，如果该覆盖在 P 处非分歧，记 $n_P = 0$；否则记

$$n_P = 1 - \sup_{\varphi \in \mathbb{F}_q(\widehat{X})} v_P(f - \varphi^p + \varphi) \geqslant 2.$$

那么

- $L(s, X, f)$ 是多项式；$b_i = 0, \forall i \neq 1$；
- (X, f) 权全为 $1 \iff n_P \neq 0, \forall P$，此时 $b_1 = 2g - 2 + \sum n_P \deg P$.

例 (Serre1977)

对于仿射平面 $\mathbb{A}^n$, $f \in \mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ 是 d 次多项式且 $p \nmid d$, 有

- $L(s, X, f)^{(-1)^{n-1}}$ 是多项式; $b_i = 0, \forall i \neq n$;
- (X, f) 权全为 n, $b_n = (d-1)^r$.

此时 $|S_k| \leqslant (d-1)^n q^{nk/2}$.

2

L 函数的牛顿折线

现在我们来考虑指数和的 p 进性质.
设 $f \in \mathbb{F}_q[x]$ 是 d 次多项式. 我们可以考虑更一般点. 设

- $\psi_m : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p^\times$ 是一个阶为 p^m 的加性特征;
- $\omega^{-u} : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{C}_p^\times$ 是一个乘性特征, 其中 ω 是 Teichmüller 提升, $0 \leqslant u \leqslant q-2$.

定义

$$S_{k,u}(f,\psi_m) = \sum_{x \in \mathbb{F}_{q^k}^\times} \psi_m\left(\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_{q^k}/\mathbb{Q}_p}(\hat{f}(\hat{x}))\right) \omega^{-u}\left(\mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_q}(x)\right),$$

$$L_u(s,f,\psi_m) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} S_{k,u}(f,\psi_m)\frac{s^m}{m}\right).$$

定理 (Adolphson-Sperber, 李文卿, 刘春雷-魏达盛, 刘春雷)

如果 $p \nmid d = \deg f$, 则 $L_u(s, f, \psi_m)$ 是次数为 $p^{m-1}d$ 的多项式.

记

$$L_u(s, f, \psi_m) = \sum_{n=0}^{p^{m-1}d} a_n s^n = \prod_i (1 - \alpha_i s), \quad S_{u,k}(f) = -\sum_i \alpha_i^k.$$

为了了解 $S_{u,k}(f)$ 的 p 进性质, 我们需要了解 α_i 的赋值. 而它们正是该 L 函数的牛顿折线的斜率, 其中牛顿折线是指所有

$$(n, v_p(a_n))$$

的下凸包.

为了统一考虑不同 m 对应的牛顿折线，我们引入 T 进指数和和 T 进 L 函数:

$$S_{k,u}(f,T)=\sum_{x\in\mathbb{F}_{q^k}^{\times}}(1+T)^{\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}_{q^k}/\mathbb{Q}_p}(\hat{f}(\hat{x}))}\omega^{-u}\left(\mathrm{Nm}_{\mathbb{F}_{q^k}/\mathbb{F}_q}(x)\right),$$

$$L_u(s,f,T)=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}S_{k,u}(f,T)\frac{s^k}{k}\right)\in 1+s\mathbb{Z}_q[\![T]\!][\![s]\!].$$

我们有 $L_u(s,f,\psi_m)=L_u(s,f,\pi_m)$，其中 $\pi_m=\psi_m(1)-1$.

定义特征函数

$$C_u(s,f,T)=\prod_{j=0}^{\infty}L_u(q^j s,f,T)\in 1+s\mathbb{Z}_q[\![T]\!][\![s]\!],$$

则

$$L_u(s,f,T)=\frac{C_u(s,f,T)}{C_u(qs,f,T)}.$$

牛顿折线的关系

记

- $\mathrm{NP}_{u,m}(f) = C_u(s, f, \pi_m)$ 的 $\pi_m^{a(p-1)}$ 进牛顿折线 (不依赖 ψ_m), $a = \log_p q$;
- $\mathrm{NP}_{u,T}(f) = C_u(s, f, T)$ 的 $T^{a(p-1)}$ 进牛顿折线.
- $H^{\infty}_{[0,d],u}$ 为扭霍奇折线, 其斜率为 $\frac{n}{d} + \frac{1}{bd(p-1)} \sum_{k=1}^{b} u_k$, $n \in \mathbb{N}$, 其中 b 是满足 $p^b u \equiv u \bmod (q-1)$ 的最小正整数,

$$u = u_0 + u_1 p + \cdots + u_{a-1} p^{a-1}, \ 0 \leqslant u_i \leqslant p-1.$$

这样规范化后的牛顿折线满足

$$\mathrm{NP}_{u,m}(f) \geqslant \mathrm{NP}_{u,T}(f) \geqslant H^{\infty}_{[0,d],u}.$$

由定义可知 $\mathrm{NP}_{u,m}(f)$ 完全由它在 $[0, d-1]$ 上的值决定.

不妨设

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d} a_i x^i.$$

我们需要 T 进 Dwork 迹公式来计算牛顿折线. 定义

$$E(X) = \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} p^{-i} X^{p^i}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n X^n \in \mathbb{Z}_p[\![X]\!],$$

$$E_f(X) = \prod_{i=1}^{d} E(\pi \hat{a}_i X^i) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n X^n,$$

则

$$\gamma_k = \sum \pi^{x_1+\cdots+x_d} \prod_{i=1}^{d} \lambda_{x_i} \hat{a}_i^{x_i},$$

其中 $(x_1, \ldots, x_d)$ 取遍 $\sum i x_i = k$ 的所有非负整数解.

T 进 Dwork 半线性算子

定义

$$\mathcal{B}_u = \left\{ \sum_{v \in M_u} b_v \pi^{\frac{v}{d}} X^v \mid b_v \in \mathbb{Z}_q[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!] \to 0(\pi\text{进}) \right\}, \quad M_u = \frac{u}{q-1} + \mathbb{N},$$

$$\psi : \mathcal{B}_u \longrightarrow \mathcal{B}_{p^{-1}u}, \quad \sum_{v \in M_u} b_v X^v \longmapsto \sum_{v \in M_{p^{-1}u}} b_{pv} X^v,$$

则

$$\Psi := \sigma^{-1} \circ \psi \circ E_f : \mathcal{B}_u \to \mathcal{B}_{p^{-1}u}$$

是一个半线性算子, 其中 $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_q/\mathbb{Q}_p)$ 是 Frobenius. 那么它定义了 $\mathcal{B} := \bigoplus_{i=0}^{b-1} \mathcal{B}_{p^i u}$ 上的算子, 且 Ψ^a 是 $\mathbb{Z}_q[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!]$ 线性的.

T 进 Dwork 迹公式

定理

我们有

$$C_u(s,f,T)=\det\left(1-\Psi^a s \mid \mathcal{B}_u/\mathbb{Z}_q[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!]\right).$$

因此 $C_u(s,f,T)$ 的 T 进牛顿折线是

$$\left(n,\frac{1}{b}\mathrm{ord}_T(c_{abn})\right),\ n\in\mathbb{N},$$

的凸包，其中

$$\det\left(1-\Psi s \mid \mathcal{B}/\mathbb{Z}_p[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!]\right)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^n c_n s^n.$$

矩阵表达

记 $s_k \equiv p^k u \bmod q-1$, $0 \leqslant s_k \leqslant q-2$. 设 $\xi_1, \dots, \xi_a$ 为 $\mathbb{Q}_q/\mathbb{Q}_p$ 的一组正规基, 则

$$\left\{\xi_v\left(\pi^{\frac{1}{d}} X\right)^{\frac{s_k}{q-1}+i}\right\}_{(i,v,k)\in\mathbb{N}\times I_a\times I_b}$$

是 $\mathcal{B}/\mathbb{Z}_p[\![\pi^{\frac{1}{d(q-1)}}]\!]$ 的一组基, 对应的矩阵为

$$\Gamma = \left(\gamma_{(v,\frac{s_k}{q-1}+i),(w,\frac{s_\ell}{q-1}+j)}\right)_{\mathbb{N}\times I_a\times I_b} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma^{(2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \Gamma^{(b-1)} \\ \Gamma^{(b)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

因此 $c_{bn} = \sum_{A\in\mathcal{A}_n} \det(A)$, $\mathcal{A}_n$ 为全体 bn 阶主子式, 且 $A^{(k)} = A \cap \Gamma^{(k)}$ 均为 n 阶.

我们有

$$\xi_w^{\sigma^{-1}} \gamma_{\left(\frac{s_{k-1}}{q-1}+i, \frac{s_k}{q-1}+j\right)}{}^{\sigma^{-1}} = \sum_{u=1}^{a} \gamma_{\left(v, \frac{s_{k-1}}{q-1}+i\right), \left(w, \frac{s_k}{q-1}+j\right)} \xi_v,$$

其中

$$\gamma_{\left(\frac{s_{k-1}}{q-1}+i, \frac{s_k}{q-1}+j\right)} = \pi^{\frac{s_k - s_{k-1}}{d(q-1)} + \frac{j-i}{d}} \gamma_{pi-j+u_{-k}}.$$

于是

$$\operatorname{ord}_\pi\left(\gamma_{\left(v, \frac{s_{k-1}}{q-1}+i\right), \left(w, \frac{s_k}{q-1}+j\right)}\right) \geqslant \operatorname{ord}_\pi\left(\gamma_{\left(\frac{s_{k-1}}{q-1}+i, \frac{s_k}{q-1}+j\right)}\right)$$
$$= \frac{s_k - s_{k-1}}{d(q-1)} + \frac{j-i}{d} + \phi(pi - j + u_{-k}),$$

其中 $\phi(n) = \min\left\{x_1 + \cdots + x_d \mid \sum i x_i = n, x_i \geqslant 0\right\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

二项式情形的已知结果

对于一般的多项式, 上述方法可以得到牛顿折线的下界. 对于二项式情形, 这个下界是否能否达到, 取决于对应赋值项的系数是否为零.

设 $f(x) = x^d + \lambda x^e$ 的情形. 由于 $(d, e) > 1$ 时可以化归到扭的情形, 我们不妨设 $(d, e) = 1$. 此时最低赋值项为

$$\pm\mathrm{Nm}\left(\prod_{k=1}^{b} \hat{\lambda}^{(*)} h_{n,k}\right), \quad h_{n,k} := \sum_{\tau \in S^\circ_{u_k,n}} \mathrm{sgn}(\tau) \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{x^\tau_{u_k,i}!\, y^\tau_{u_k,i}!},$$

其中 $S^\circ_{u_k,n}$ 是 $\{0, 1, \ldots, n\}$ 上满足 $e^{-1}(pi - \tau(i) + u_k) \bmod d$ 所有最小非负剩余之和达到最小的置换全体,

$$dx^\tau_{u_k,i} + ey^\tau_{u_k,i} = pi - \tau(i) + u_k, 0 \leqslant y^\tau_{u_k,i} \leqslant d - 1.$$

因此当且仅当所有的 $h_{n,k} \in \mathbb{Z}_p^\times$ 时,

$$\mathrm{NP}_{u,m}(f) = \mathrm{NP}_{u,T}(f)$$

达到应有的下界.

二项式情形的已知结果

如下情形是已知的 ($p \gg 0$):

- $u = 0$:
  - $p \equiv 1 \bmod d$, 此时 $\mathrm{NP}_{u,m}(f) = H^{\infty}_{[0,d],u}$.
  - $e = 1$, 有很多人计算过, 不在此列举.
  - $e = d-1, p \equiv -1 \bmod d$, 欧阳毅-张 2016.
  - $e = 2, p \equiv 2 \bmod d$, Zhang Qingjie-牛传择 2021.
- 任意 u:
  - $e = 1$, 刘春雷-牛传择 2011.
  - $e = d-1$, 张 2022.

例如, 当 $e = d-1$ 时, 若 $p > (d^2-d-1)\mathrm{order}(\omega^{-u})$, 我们有

$$h_{n,k} \equiv \det\left(\frac{1}{(-d^{-1}ev_i + u_k(1-d^{-1}e)-j)!(v_i+j)!}\right)$$
$$\equiv \prod_{i=0}^{n} \frac{(d^{-1}e(i-t)+t)_i}{(-d^{-1}ev_i + u_k(1-d^{-1}e))! \cdot (v_i+n)!} \cdot \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n} (v_i - v_j) \not\equiv 0 \bmod p.$$

因此此时 $\mathrm{NP}_{u,m}(f) = \mathrm{NP}_{u,T}(f) = P_{u,e,d}$.

3

指数和的生成域

Swan 导子

为了刻画 lisse 层的一些性质, 我们需要 Swan 导子的概念. 设 K 是完备离散赋值域, $I^{(x)}, x \geqslant 0$ 为其高阶分歧群. 对于分歧群 P 的 E 表示 M, 我们有满足如下性质的分解 $M = \oplus M(x)$,

$$M(0) = M^P, \quad M(x)^{I^{(x)}} = 0, \quad M(x)^{I^{(y)}} = M(x), \ y > x > 0.$$

称 $M(x) \neq 0$ 的 x 为 M 的断点. 定义 M 的 Swan 导子为

$$\mathrm{Sw}(M) = \sum x \dim M(x).$$

它总是一个整数.

曲线

令 C 是特征 p 完全域 $\mathbb{F}$ 上一射影光滑几何连通代数曲线, $K=\mathbb{F}(C)$ 为其函数域. 对于任意闭点 $x\in C(\mathbb{F})$, 我们有完备化 K_x.

对于非空开集 $U\subset C$, 我们有阿贝尔范畴等价

$$\begin{aligned}\{U\ \text{上的 lisse}\ E\ \text{层}\} &\longrightarrow \mathrm{Rep}_E^c\pi_1(U,\overline{\eta})\\ \mathcal{F} &\longmapsto \mathcal{F}_{\overline{\eta}}.\end{aligned}$$

由于基本群 $\pi_1(U,\overline{\eta})$ 是伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ 的商, 因此分解群 D_x 作用在 $\mathcal{F}_{\overline{\eta}}$ 上. 于是我们可以定义 $\mathcal{F}$ 在 x 处的 Swan 导子. 对于 $x\in U$, 由于惯性群 I_x 作用平凡, 因此 $\mathrm{Sw}_x(\mathcal{F})=0$.

我们将会取 $C=\mathbb{P}^1$ and $U=\mathbb{G}_m$.

一个猜想

猜想

若 p 相对 d 和 ω^{-u} 的阶都很大, 则 $\mathrm{NP}_{u,m}(f) = \mathrm{NP}_{u,T}(f) = P_{u,e,d}$.

谢 谢!