复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)
办公室：翡翠科教楼 *B1810* 东
Email：zhangshenxing@hfut.edu.cn
课件地址：https://zhangshenxing.gitee.io

第二章　解析函数

❶ 函数解析的充要条件

第一节　函数解析的充要条件

可导函数的特点

通过对一些简单函数的分析, 我们会发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 等内容.

可导函数的特点

通过对一些简单函数的分析, 我们会发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 等内容. 这种现象并不是孤立的.

可导函数的特点

通过对一些简单函数的分析, 我们会发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 等内容. 这种现象并不是孤立的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

可导函数的特点

通过对一些简单函数的分析, 我们会发现可导的函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 等内容. 这种现象并不是孤立的. 我们来研究二元实变量函数的可微性与复变函数可导的关系.

为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.

可导的等价刻画: 形式推导

设 f 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$,

设 f 在 z 处可导, $f'(z)=a+bi$, 则

$$\Delta u+i\Delta v=\Delta f=(a+bi)(\Delta x+i\Delta y)+o(\Delta z).$$

可导的等价刻画: 形式推导

设 f 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a+bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

可导的等价刻画: 形式推导

设 f 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a+bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

由于 $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$,

可导的等价刻画: 形式推导

设 f 在 z 处可导, $f'(z) = a + bi$, 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a+bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

由于 $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2+y^2})$, 因此

> u, v 可微且 $u_x = v_y = a, v_x = -u_y = b$.

可导的等价刻画: 形式推导

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$.

可导的等价刻画: 形式推导

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\mathrm{d}u = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y$$

可导的等价刻画: 形式推导

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\mathrm{d}u = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y,$$

可导的等价刻画: 形式推导

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\mathrm{d}u = u_x \,\mathrm{d}x + u_y \,\mathrm{d}y = u_x \,\mathrm{d}x - v_x \,\mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{d}v = v_x \,\mathrm{d}x + v_y \,\mathrm{d}y$$

可导的等价刻画: 形式推导

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\mathrm{d}u = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y,$$
$$\mathrm{d}v = v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y = v_x\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y,$$

可导的等价刻画: 形式推导

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}v &= v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y = v_x\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}f &= \mathrm{d}(u+iv) = (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}x + (-v_x + iu_x)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

可导的等价刻画: 形式推导

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}v &= v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y = v_x\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}f &= \mathrm{d}(u+iv) = (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}x + (-v_x + iu_x)\,\mathrm{d}y\\
&= (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}(x+iy)
\end{aligned}
$$

可导的等价刻画: 形式推导

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y, \\
\mathrm{d}v &= v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y = v_x\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y, \\
\mathrm{d}f &= \mathrm{d}(u+iv) = (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}x + (-v_x + iu_x)\,\mathrm{d}y \\
&= (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}(x+iy) \\
&= (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}z = (v_y - iu_y)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

反过来, 假设 u, v 可微且 $u_x = v_y, v_x = -u_y$. 由全微分公式

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}v &= v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y = v_x\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}f &= \mathrm{d}(u+iv) = (u_x+iv_x)\,\mathrm{d}x + (-v_x+iu_x)\,\mathrm{d}y\\
&= (u_x+iv_x)\,\mathrm{d}(x+iy)\\
&= (u_x+iv_x)\,\mathrm{d}z = (v_y-iu_y)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

故

$f(z)$ 在 z 处可导, 且 $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$.

可导的等价刻画：柯西-黎曼方程

由此我们得到

可导的等价刻画：柯西-黎曼方程

由此我们得到

柯西-黎曼方程 (C-R 方程)

$f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u, v 可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

由此我们得到

柯西-黎曼方程 (C-R 方程)

$f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u, v 可微且满足 C-R 方程:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

由于有时判断可微性不太方便, 因此我们常常用如下定理来判断.

由于有时判断可微性不太方便，因此我们常常用如下定理来判断.

定理

由于有时判断可微性不太方便, 因此我们常常用如下定理来判断.

定理

- 如果 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 **C-R** 方程, 则 $f(z)$ 在 z 可导.

可导的等价刻画: 柯西-黎曼方程

由于有时判断可微性不太方便, 因此我们常常用如下定理来判断.

定理

- 如果 u_x, u_y, v_x, v_y 在 z 处连续, 且满足 **C-R** 方程, 则 $f(z)$ 在 z 可导.
- 如果 u_x, u_y, v_x, v_y 在区域 D 上处处连续, 且满足 **C-R** 方程, 则 $f(z)$ 在 D 上可导 (从而解析).

柯西-黎曼方程的 $z, \overline{z}$ 形式 *

注意到 $x = \dfrac{1}{2}z + \dfrac{1}{2}\overline{z}, y = -\dfrac{i}{2}z + \dfrac{i}{2}\overline{z}$.

柯西-黎曼方程的 $z, \overline{z}$ 形式 *

注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z}, y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\overline{z}$. 如果我们定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

柯西-黎曼方程的 $z, \overline{z}$ 形式 *

注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z}, y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\overline{z}$. 如果我们定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

那么 C-R 方程等价于

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{u_x + iv_x + iu_y - v_y}{2} = 0.$$

柯西-黎曼方程的 $z, \overline{z}$ 形式 *

注意到 $x = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\overline{z}, y = -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2}\overline{z}$. 如果我们定义 f 对 z 和 $\overline{z}$ 的偏导数为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{\partial x}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial x}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial \overline{z}}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{i}{2}\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

那么 C-R 方程等价于

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{u_x + iv_x + iu_y - v_y}{2} = 0.$$

所以我们也可以把 $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ 叫做 C-R 方程.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

(1) 函数 $f(z)=\bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

例

(1) 函数 $f(z)=\bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u=x, v=-y$ 可知

$$u_x=1, \qquad u_y=0,$$
$$v_x=0, \qquad v_y=-1.$$

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

(1) 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u = x, v = -y$ 可知

$$u_x = 1, \qquad u_y = 0,$$
$$v_x = 0, \qquad v_y = -1.$$

因为 $u_x = 1 \neq v_y = -1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

例

(1) 函数 $f(z) = \bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u = x, v = -y$ 可知

$$u_x = 1, \qquad u_y = 0,$$
$$v_x = 0, \qquad v_y = -1.$$

因为 $u_x = 1 \neq v_y = -1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

也可以从 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$ 看出.

例

(1) 函数 $f(z)=\bar{z}$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u=x, v=-y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 1, & u_y &= 0, \\ v_x &= 0, & v_y &= -1. \end{aligned}$$

因为 $u_x=1\neq v_y=-1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

也可以从 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=1\neq 0$ 看出. 不过这种方法由于课本上没有, 所以考试的时候最好只把它作为一种验算手段.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例 (续)

(2) 函数 $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ 在何处可导, 在何处解析?

例 (续)

(2) 函数 $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例 (续)

(2) 函数 $f(z) = z \operatorname{Re} z$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\ v_x &= y, & v_y &= x. \end{aligned}$$

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例 (续)

(2) 函数 $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\ v_x &= y, & v_y &= x. \end{aligned}$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 **C-R 方程.**

例 (续)

(2) 函数 $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$
\begin{aligned}
u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\
v_x &= y, & v_y &= x.
\end{aligned}
$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 **C-R** 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0) = (u_x + iv_x)\Big|_{z=0} = \frac{1}{0}.$$

例 (续)

(2) 函数 $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\ v_x &= y, & v_y &= x. \end{aligned}$$

由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 **C-R** 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0) = (u_x + iv_x)\Big|_{z=0} = \frac{1}{0}.$$

也可从 $f(z) = \dfrac{z(z+\overline{z})}{2}, \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \dfrac{z}{2}$ 看出.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例 (续)

(3) 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

例 (续)

(3) 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$

例 (续)

(3) 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$u_x = e^x \cos y, \qquad u_y = -e^x \sin y,$$
$$v_x = e^x \sin y, \qquad v_y = e^x \cos y.$$

例 (续)

(3) 函数 $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u = e^x\cos y, v = e^x\sin y$ 可知

$$
\begin{aligned}
u_x &= e^x\cos y, & u_y &= -e^x\sin y,\\
v_x &= e^x\sin y, & v_y &= e^x\cos y.
\end{aligned}
$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z).$$

例 (续)

(3) 函数 $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ 在何处可导, 在何处解析?

解

由 $u=e^x\cos y, v=e^x\sin y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= e^x\cos y, & u_y &= -e^x\sin y, \\ v_x &= e^x\sin y, & v_y &= e^x\cos y. \end{aligned}$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z)=u_x+iv_x=e^x(\cos y+i\sin y)=f(z).$$

实际上, 这个函数就是复变量的指数函数 e^z.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

练习

求 $f(z) = 3x^2 + y^2 - 2xyi$ 的可导点和解析点.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

练习

求 $f(z)=3x^2+y^2-2xyi$ 的可导点和解析点.

答案

可导点为 $\operatorname{Re} z=0$, 没有解析点.

例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

设函数 $f(z)=(x^2+axy+by^2)+i(cx^2+dxy+y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.

解

由于

$$\begin{aligned} u_x &= 2x+ay, & u_y &= ax+2by, \\ v_x &= 2cx+dy, & v_y &= dx+2y, \end{aligned}$$

例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

解

由于

$$u_x = 2x + ay, \qquad u_y = ax + 2by,$$
$$v_x = 2cx + dy, \qquad v_y = dx + 2y,$$

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$

例

设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

解

由于

$$u_x = 2x + ay, \qquad u_y = ax + 2by,$$
$$v_x = 2cx + dy, \qquad v_y = dx + 2y,$$

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$
$$a = d = 2, \quad b = c = -1,$$

例

设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

解

由于

$$u_x = 2x + ay, \qquad u_y = ax + 2by,$$
$$v_x = 2cx + dy, \qquad v_y = dx + 2y,$$

因此

$$2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),$$
$$a = d = 2, \quad b = c = -1,$$
$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + 2y + i(-2x + 2y) = (2 - 2i)z.$$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明

由于

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$

$\square$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明

由于
$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$
因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, $\square$

例

如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明

由于
$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$
因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数. □

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明

由于
$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$
因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数. □

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件等价:

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明

由于
$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$
因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数. $\square$

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件等价:

- $f(z)$ 是一常数,
- $|f(z)|$ 是一常数,
- $\operatorname{Re} f(z)$ 是一常数,
- $v = u^2$,

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

证明

由于
$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$
因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数， 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数. □

类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件等价:

- $f(z)$ 是一常数,
- $|f(z)|$ 是一常数,
- $\operatorname{Re} f(z)$ 是一常数,
- $v = u^2$,
- $f'(z) = 0$,
- $\arg f(z)$ 是一常数,
- $\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数,
- $u = v^2$.

例

如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

例

如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明

由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零.

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明

由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明

由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

从而 $(u_x,-u_y)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明

由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

从而 $(u_x,-u_y)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理 $(v_x,-v_y)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量.

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明

由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

从而 $(u_x,-u_y)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理 $(v_x,-v_y)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_xv_x+u_yv_y=-u_xu_y+u_yu_x=0,$$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

例

如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

证明

由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零. 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

从而 $(u_x,-u_y)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

同理 $(v_x,-v_y)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量. 由于

$$u_xv_x+u_yv_y=-u_xu_y+u_yu_x=0,$$

因此二者正交. □

解析函数的保角性 *

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时,

解析函数的保角性 *

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的.

解析函数的保角性 *

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性.

解析函数的保角性 *

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性.

这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$.

解析函数的保角性 *

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性.

这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$.

当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性.

这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 上述例子是该结论关于 w 复平面上曲线族 $u = c_1, v = c_2$ 的一个特殊情形.

解析函数的保角性 *

当 $f'(z_0)\neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性.

这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 上述例子是该结论关于 w 复平面上曲线族 $u=c_1, v=c_2$ 的一个特殊情形.

最后我们来看复数在求导中的一个应用.

当 $f'(z_0)\neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的. 这种性质被称为保角性.

这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$. 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$. 上述例子是该结论关于 w 复平面上曲线族 $u=c_1, v=c_2$ 的一个特殊情形.

最后我们来看复数在求导中的一个应用.

例

求 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的各阶导数.

解

设 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$，则它在除 $z = \pm i$ 外处处解析.

解

设 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 则它在除 $z=\pm i$ 外处处解析. 当 $z=x$ 为实数时,

解

设 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$，则它在除 $z=\pm i$ 外处处解析. 当 $z=x$ 为实数时，

$$f^{(n)}(x)=\frac{i}{2}\left[\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x-i}\right]^{(n)}$$

复变函数在实变函数导数的应用 *

解

设 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$，则它在除 $z=\pm i$ 外处处解析. 当 $z=x$ 为实数时，

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{i}{2}\left[\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x-i}\right]^{(n)} \\
&= \frac{i}{2}\cdot(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x+i)^{n+1}}-\frac{1}{(x-i)^{n+1}}\right]
\end{aligned}
$$

复变函数在实变函数导数的应用 *

解

设 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$，则它在除 $z=\pm i$ 外处处解析．当 $z=x$ 为实数时，

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{i}{2}\left[\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x-i}\right]^{(n)} \\
&= \frac{i}{2}\cdot(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x+i)^{n+1}}-\frac{1}{(x-i)^{n+1}}\right] \\
&= (-1)^{n+1} n!\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{(x+i)^{n+1}}
\end{aligned}
$$

复变函数在实变函数导数的应用 *

解

设 $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$, 则它在除 $z=\pm i$ 外处处解析. 当 $z=x$ 为实数时,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \frac{i}{2}\left[\frac{1}{x+i}-\frac{1}{x-i}\right]^{(n)} \\
&= \frac{i}{2}\cdot(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x+i)^{n+1}}-\frac{1}{(x-i)^{n+1}}\right] \\
&= (-1)^{n+1}n!\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{(x+i)^{n+1}} \\
&= \frac{(-1)^n n!\sin[(n+1)\operatorname{arccot} x]}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}.
\end{aligned}$$