第五章　留数

5.1　孤立奇点

作业 1. 单选题: (2020 年 A 卷) $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z}$ 的 (　).

(A) 一阶极点　　(B) 二阶极点　　(C) 解析点　　(D) 可去奇点

作业 2. 单选题: (2022 年 A 卷) 如果 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点, $g(z)$ 的一阶零点, 则 z_0 是 $f(z)^3g(z)^2$ 的 (　).

(A) 一阶极点　　(B) 一阶零点　　(C) 可去奇点　　(D) 三阶极点

作业 3. 下列函数有哪些奇点? 如果是极点, 请指出它的阶:

(1) $\dfrac{1}{(z-2)^3(z^2+1)^2}$;　(2) $\dfrac{\cos z-1}{z^3}$;　(3) $\dfrac{1}{z^3+z^2-z-1}$;

(4) $\dfrac{\ln(z+1)}{z}$;　(5) $\dfrac{z}{(1+z^2)(1+e^{\pi z})}$;　(6) $\dfrac{1}{e^{z-1}}$;

(7) $\dfrac{1}{z^2(e^z-1)}$;　(8) $\dfrac{z^6}{1+z^4}$;　(9) $\dfrac{1}{\sin z^2}$.

作业 4. 证明: 如果 z_0 是 $f(z)$ 的 $m>1$ 阶零点, 那么 z_0 是 $f'(z)$ 的 $m-1$ 阶零点.

作业 5. 证明: $\dfrac{\pi i}{2}$ 是 $\operatorname{ch} z$ 的一阶零点.

作业 6. 0 是 $(\sin z+\operatorname{sh} z-2z)^{-2}$ 的几阶极点?

作业 7. 设 a 是 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的 m 阶和 n 阶极点, 则 $z=a$ 是

(1) $\varphi(z)\psi(z)$;　(2) $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$;　(3) $\varphi(z)+\psi(z)$

的什么类型奇点?

5.2　留数

作业 8. 填空题: (2020 年 B 卷) 设 $f(z)=\dfrac{2021}{z}+\dfrac{\sin z}{z}$, 则 $\operatorname{Res}[f(z),0]=$__________.

作业 9. 填空题: (2021 年 B 卷) 设 $f(z)=\dfrac{z}{\sin z}$, 则 $\operatorname{Res}[f(z),0]=$__________.

作业 10. (2020 年 A 卷) 求函数 $f(z)=\dfrac{z-\sin z}{z^8}$ 在有限奇点处的留数.

作业 11. (2020 年 B 卷) 求函数 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{1+z^2}$ 在有限奇点处的留数.

作业 12. (2022 年 A 卷) 求 $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^2(z^2-\pi^2)}$ 在有限复平面内的奇点和相应的留数.

作业 13. (2022 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|z-3|=4$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2-3\pi z+2\pi^2}\,\mathrm{d}z$.

作业 14. (2021 年 A 卷) 设 C 为正向圆周 $|z|=2$, 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\sin z}{z(z-1)}\,\mathrm{d}z$.

作业 15. (2021 年 A 卷) 设 $f(z)=\dfrac{1}{z^2\cos z}$, C 为正向圆周 $|z|=2$.

(1) 求 $f(z)$ 在 C 内部的孤立奇点, 并给出其类型.

(2) 求 $f(z)$ 在上述奇点处的留数.

(3) 求 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$.

作业 16. (2021 年 B 卷) 设函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$.

(1) 求 $f(z)$ 在复平面上的所有孤立奇点, 并讨论其类型;

(2) 计算 $f(z)$ 在所有孤立奇点处的留数;

(3) 计算积分 $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中曲线 C 为正向圆周 $|z|=2$.

作业 17. 求下列各函数 $f(z)$ 在有限奇点处的留数:

(1) $\dfrac{z-1}{z^2+2z}$; (2) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^5}$; (3) $\dfrac{z}{\cos z}$; (4) $\cos\dfrac{1}{1-z}$; (5) $\dfrac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$.

作业 18. 9 利用留数计算下述积分:

(1) $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z(z-\pi)}\,\mathrm{d}z$; (2) $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{e^{2z}}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$;

(3) $\displaystyle\oint_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{1-\cos z}{z^5}\,\mathrm{d}z,\quad m\in\mathbb{Z}$; (4) $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-\frac{1}{2})^9(z-2)^9}\,\mathrm{d}z$.

作业 19. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-1)^2}$ 在 $z=1$ 处有一个二阶极点. 这个函数又有下列洛朗展开式

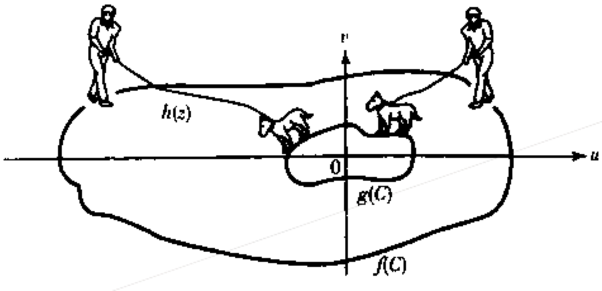
$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\cdots+\frac{1}{(z-1)^5}-\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{1}{(z-1)^3},\quad |z-1|>1,$$

所以 “$z=1$ 又是 $f(z)$ 的本性奇点”. 又其中不含 $(z-1)^{-1}$ 幂, 因此 $\operatorname{Res}[f(z),1]=0$. 这些说法对吗?

扩展阅读

该部分作业不需要交, 有兴趣的同学可以做完后交到本人邮箱.

作业 20. 根据辐角原理和下图简要解释下为何路西定理是对的: 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在闭路 C 及其内部解析, 且在 C 上满足 $|f(z)| > |f(z) - g(z)|$, 那么在 C 内部 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的零点个数相同.



作业 21. 设函数 $f(z)$ 在扩充复平面上的奇点都是极点.

(1) 证明 $f(z)$ 只有有限多个奇点.

(2) 设 $f(z)$ 在复平面内的奇点为 $z_1, \ldots, z_n$, 其中 z_k 为 d_k 阶极点. 定义

$$g(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{d_k} f(z).$$

根据 $g(z)$ 在 0 和 ∞ 处的洛朗展开的特点证明 $g(z)$ 是一个多项式, 从而 $f(z)$ 是有理函数.

(3) 证明 $\sum_{z \in \mathbb{C}^*} \operatorname{ord}(f, z) = 0$.