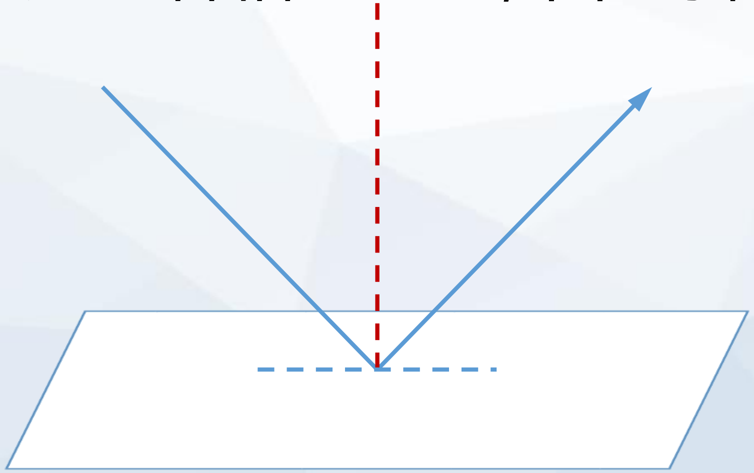
第三章 一元函数微分学

3.1 导数的概念

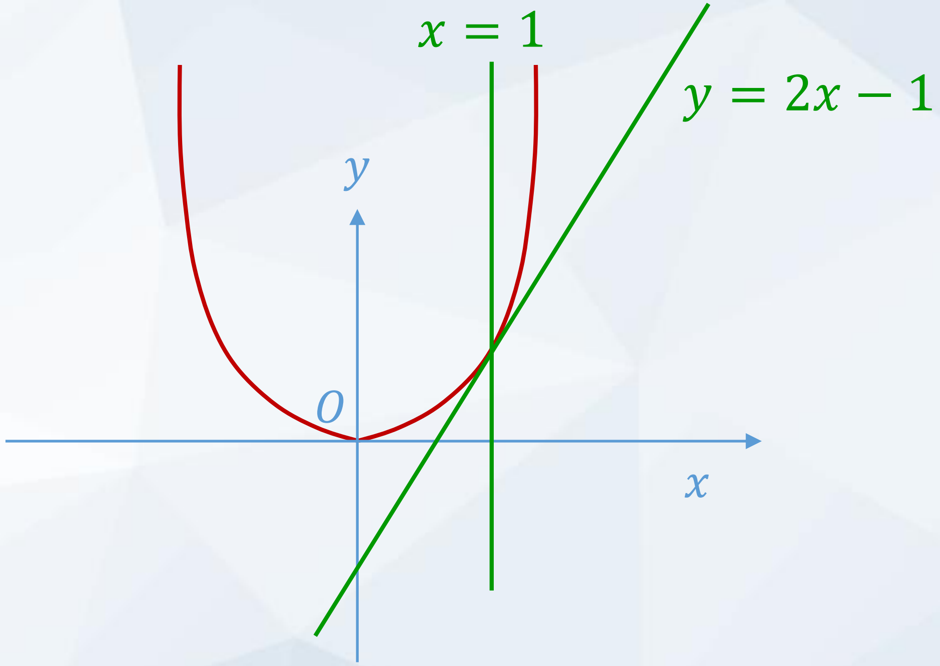
- 导数的思想最初是法国数学家费马为解决极大和极小问题而引入的. 它的建立则是英国数学家牛顿和德国数学家莱布尼兹分别在研究力学和几何学过程中建立的.
- 例 我们知道, 函数 $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ 的图像是一个抛物线, 顶点为 $P\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$.
- 当 $a > 0$ 时, 这个抛物线开口向上, 其顶点 P_0 是该图像的最低点, 对应的函数值是这个函数的最小值.
- 当 $a > 0$ 时, 这个抛物线开口向下, 其顶点P_0 是该图像的最高点, 对应的函数值是这个函数的最小值.

- 但如果换一个函数, 例如 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的函数值又是如何变化的呢?
- 如果 $a^2 \le 3b$, 则 y 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的单调递增函数.
- 如果 $a^2 > 3b$, 则存在 $x_1 < x_2$, y 在 $(-\infty, x_1)$ 上单增, 在 (x_1, x_2) 上单减, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单增.
- 这是如何得到的? x_1, x_2 又是如何确定的?? 这就需要用到导函数的概念和性质.

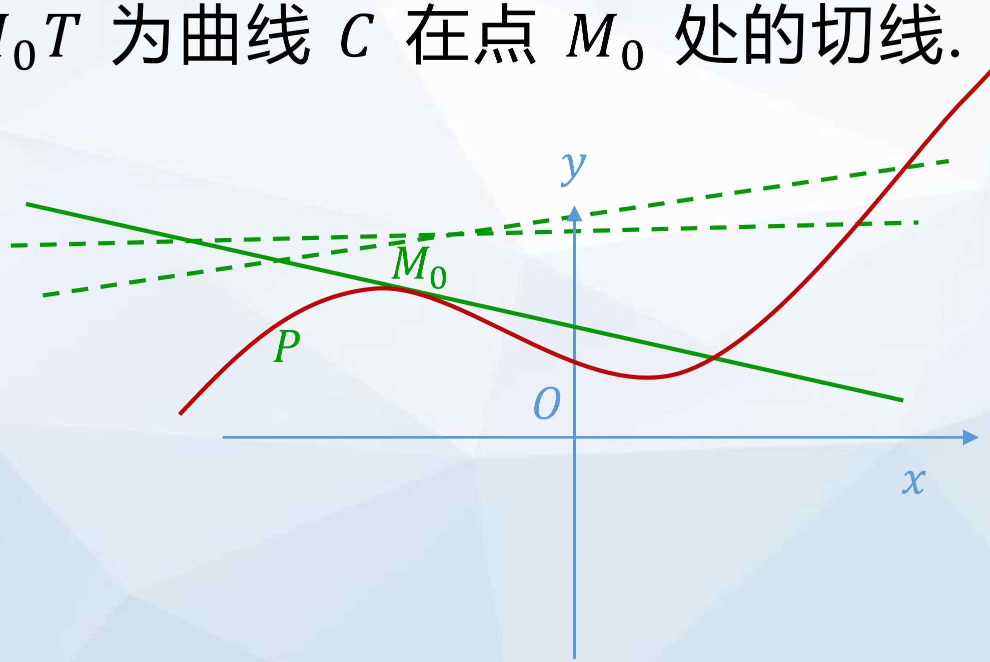
- 例 光的反射定律告诉我们, 如果光射在一个平面上, 那么反射的光线、入射的光线、以及与平面交点的法线三者在同一个平面，且反射的光线和入射的光线与法线的夹角相同. 其中法线是指与平面垂直的直线.
- 如果光线不是射在一个平面上而是一个曲面上呢?
- 我们只考虑入射光线和该点法线所形成的平面, 问题化归成了研究二维平面上曲线的切线和法线, 这二者相互垂直, 因此斜率之积为 -1.



- 圆的切线定义成与圆只有一个交点的直线，但对于一般的曲线，显然不能如此定义.
- 例如右图中抛物线 $y = x^2$ 在 $(1,1)$ 处就有两条直线与该抛物线只有一个交点，而根据我们的直观，应当是 $y = 2x - 1$ 作为切线而非 $x = 1$.



- 而像下图中的直线与曲线有多个交点却是它的切线.
- 定义 设在平面直角坐标系中, 有一条曲线 $C: y = f(x)$ 以及 C 上的一点 $M_0(x_0, y_0)$. 在 C 上另取一点 $P(x, y)$ 做割线 M_0P.
- 当点 P 沿着 C 无限趋向于点 M_0 时, 如果割线 M_0P 无限趋向于极限位置 M_0T, 就称直线 M_0T 为曲线 C 在点 M_0 处的切线.



- 由于直线 M_0P, M_0T 经过点 M_0, 因此我们只需要考虑它的斜率. 而点 P 沿着 C 无限趋向于点 M_0 的过程即 $x \to x_0$.
- 由于割线 M_0P 的斜率为

$$k_{M_0P} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- 因此 M_0T 的斜率为

$$k_{M_0T} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- 于是我们便可求得曲线 C 在点 M_0 处的切线.

- 例 设一物体在做直线运动, 位置函数为 $s = s(t)$, 其中 t 为时间. 那么在时间 $t = t_0$ 附近我们取很小一段 $(t_0, t_0 + \Delta t)$, 然后计算 $\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ 便是该物体在时间 $(t_0, t_0 + \Delta t)$ 内的平均速度, 而当 $\Delta t \to 0$, 即 $t \to t_0$ 时, 平均速度的极限就是瞬时速度

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- 这个例子在我们引入积分以及说明牛顿-莱布尼兹定理的时候还会用到.

- 从上述例子中可以看出 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 这种极限形式的重要地位.
- 如果我们用增量来表示: $\Delta y = f(x) - f(x_0), \Delta x = x - x_0$, 那么

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

- 它反映了 f 在 x_0 处随自变量变化而变化的快慢. 由此产生了导数的概念.
- 定义 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的在某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内有定义. 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在, 则称 f 在 x_0 处可导或有导数, 并称该极限为 f 在 x_0 处的导数, 记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$. 这里 $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ 都是等价写法.

- 换言之，

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

- 如果该极限不存在，则称 f 在 x_0 处不可导或没有导数.
- 第一种形式常常用在研究抽象函数性质与导函数关系时，而第三种形式则常常用在计算具体函数的导数，此时该极限是 $\frac{0}{0}$ 型不定式，我们可以利用等价无穷小来计算.
- 第二种形式则表明了导数和微分的关系，这种关系我们会在后面再介绍.

- 由导数定义知，如果函数 f 在 x_0 处可导，则曲线 $C: y = f(x)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处切线 M_0T 的斜率 $k_{M_0T} = f'(x_0)$，因此切线 M_0T 的方程为

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

- 相应的法线斜率为 $-\frac{1}{f'(x_0)}$ ($f'(x_0) = 0$ 时则为竖直直线)，方程为

$$x - x_0 + f'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

- 当 $f'(x_0) = \infty$ 时，切线为竖直直线，

切线方程为 $x = x_0$，法线方程为 $y = y_0$.

- 例 从正上方竖直向下的光线经过曲线 $y=\frac{x^2}{4a}$ 反射后一定经过它的焦点 $(0,a)$.

- 证明 设光线方程为 $x=x_0$. 则反射点为 $\left(x_0,\frac{x_0^2}{4a}\right)$. 由于

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{4a\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0+\Delta x}{4a}=\frac{x_0}{2a},$$

- 因此该点的切线斜率 $\tan n=-\frac{2a}{x_0}$, 反射光线的斜率为

$$\tan\left(2n-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\tan^2 n-1}{2\tan n}=\frac{x_0^2-4a^2}{4ax_0}.$$

- 因此反射光线的方程为 $y=\frac{x_0^2-4a^2}{4ax_0}(x-x_0)+y_0$, 它总经过 (x_0,y_0).

- 由此可知，凹面镜的表面是旋转抛物面.
- 对于凸透镜，我们也可以类似地运用折射定律来研究它的曲面方程，它的表面也是旋转抛物面. 不过在精度需要不高时，往往用更容易加工的球面镜来代替.
- 例 设一物体在做直线运动，位置函数为 $s=2t^2+5t$，其中 t 为时间. 那么在时间 t_0 时它的瞬时速度是

$$s'(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2(t_0+\Delta t)^2+5(t_0+\Delta t)-2t_0^2-5t_0}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}(4t_0+5+2\Delta t)=4t_0+5.$$

- 和极限以及连续性类似，我们也可以定义单侧导数.
- 定义 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在(这意味着 $f(x)$ 在某个 $(x_0-\delta, x_0)$ 上有定义)，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左可导，其极限值称为 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左导数，记作 $f_-'(x_0)$，即 $f_-'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- 定义 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在(这意味着 $f(x)$ 在某个 $(x_0, x_0+\delta)$ 上有定义)，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右可导，其极限值称为 $y=f(x)$ 在点 x_0 的右导数，记作 $f_+'(x_0)$，即 $f_+'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
- 如果函数在 x_0 处左右均可导，那么能推出在 x_0 处可导吗?

- **定理** 函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导当且仅当 f 在 x_0 处既左可导又右可导，且 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.
- 这由极限的存在性直接推出. 和连续性类似，该定理常用于讨论分段函数分点处的可导性.
- 当函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导时，$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.
- 和连续性类似，我们可以研究函数在区间上的可导性.
- **定义** 如果函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一个点都可导，则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，或称 $y=f(x)$ 是 (a,b) 上的可导函数.
- 如果函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且在 a 处左可导，在 b 处右可导，则称 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，或称 $y=f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可导函数.
- 类似地，我们可以定义在半开半闭区间上的可导性.

- 如果函数 $y=f(x)$ 在一段区间内(上)可导, 则在每一点 x 的导数会随着 x 的不同而变化, 其导数值仍然是 x 的函数, 称为函数 $y=f(x)$ 在该区间内(上)的导函数, 简称为函数的导数, 记作 $f'(x), y', \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, 即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

- 并有 $f'(x)|_{x=x_0}=f'(x_0)$.
- 由此可知左右导数不能写成 $f'(x_0^-)$ 和 $f'(x_0^+)$, 因为这种写法表示的是导函数在 x_0 的左右极限.

- 例 设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，则

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x}=0.$$

- 后续我们会看到 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$.
- 于是 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 不存在，即导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.
- 所以可导函数的**导函数不一定连续**.

- 例 求 $f(x)=ax+b$ 的导数, 其中 a,b 均为常数.
- 解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{[a(x+\Delta x)+b]-[ax+b]}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}a=a.$
- 即 $(ax+b)'=a.$
- 特别地, 若 $a=0$, 则 $b'=0$, 即常数的导数等于 0.
- 这说明了 $f'(x_0)\neq[f(x_0)]'$, 因此我们不可以将导数写成后一种形式.
- 若 $a=1,b=0$, 则 $x'=1$.

- 例 由于 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\cos x_0$, 因此 $(\sin x)'|_{x=x_0}=\cos x_0$, 即

$$(\sin x)'=\cos x\,.$$

- 同理, $(\cos x)'=-\sin x$.
- 例 求 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.
- 解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}$

$$=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\ln a}{\Delta x}(\text{等价无穷小替换})=a^x\ln a\,.$$

- 即 $(a^x)'=a^x\ln a$.
- 特别地, 若 $a=e$, 则 $(e^x)'=e^x$.

- 例 设函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0; \\ x+1, & x>0. \end{cases}$ 试讨论 $f(x)$ 在 0 处的可导性，若可导，求出 $f'(0)$，并求 $f'(x)$.
- 解 由于

$$f'_-(0)=(e^x)'\Big|_{x=0}=e^x\Big|_{x=0}=1, \qquad f'_+(0)=(x+1)'\Big|_{x=0}=1.$$

- 因此 $f'_-(0)=f'_+(0)=1$. 由定理3.1.1可知，函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=1$.
- 当 $x<0$ 时，$f(x)=e^x$，$f'(x)=(e^x)'=e^x$.
- 当 $x>0$ 时，$f(x)=x+1$，$f'(x)=(x+1)'=1$.

- 故 $f'(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0; \\ 1, & x>0. \end{cases}$

- 一般地, 如果 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\le x_0; \\ f_2(x), & x>x_0 \end{cases}$ 且 $f_1(x)$ 在 $(-\infty,x_0]$ 上可导,

  $f_2(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上可导, 是否有 $f'(x)=\begin{cases} f_1'(x), & x\le x_0; \\ f_2'(x), & x>x_0 \end{cases}$?

- 答案是否定的. 这是因为 $f'_{1,-}(x_0)$ 未必等于 $f'_{2,+}(x_0)$.

- **结论** 设 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\le x_0; \\ f_2(x), & x>x_0 \end{cases}$ 且 $f_1(x)$ 在 $(-\infty,x_0]$ 上可导, $f_2(x)$ 在 $[x_0,+\infty)$ 上可导.
- 如果 $f(x_0^-)=f_1(x_0)\neq f(x_0^+)=f_2(x_0)$, 则 f 在 x_0 处不连续, 自然不可导.
- 如果 $f_1(x_0)=f_2(x_0), f'_{1,-}(x_0)\neq f'_{2,+}(x_0)$, 则 $f'(x_0)$ 不存在.
- 如果 $f_1(x_0)=f_2(x_0), f'_{1,-}(x_0)=f'_{2,+}(x_0)$, 则

$$f'(x)=\begin{cases} f_1'(x), & x<x_0; \\ f'(x), & x=x_0; \\ f_2'(x), & x>x_0 \end{cases}=\begin{cases} f_1'(x), & x\le x_0; \\ f_2'(x), & x>x_0. \end{cases}$$

- **例** 若 $f'_+(x_0) > 0$, 证明 $\exists\delta > 0$ 使得当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时, 有 $f(x) > f(x_0)$.

- **证明** 由于 $f'_+(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$, 根据极限的保号性, $\exists\delta > 0$ 使得当 $x \in (x_0, x_0+\delta)$ 时, 有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. 由于 $x - x_0 > 0$, 因此 $f(x) > f(x_0)$.

- **注** 这里 $>$ 不能换成 $\geq$, 例如 $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

- 类似地，我们有
- $f'_+(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0, x_0+\delta), f(x) > f(x_0).$
- $f'_+(x_0) < 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0, x_0+\delta), f(x) < f(x_0).$
- $f'_-(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0-\delta, x_0), f(x) < f(x_0).$
- $f'_-(x_0) > 0 \Rightarrow \exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0-\delta, x_0), f(x) > f(x_0).$
- $\exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0, x_0+\delta), f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f'_+(x_0) \geq 0.$
- $\exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0, x_0+\delta), f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$
- $\exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0, x_0+\delta), f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f'_+(x_0) \leq 0.$
- $\exists\delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \in (x_0, x_0+\delta), f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f'_+(x_0) \geq 0.$

- 例 如果函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=($ $)$.
- (A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0
- 分析 我们在极限 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 中将 x 换成 x^3，则

$$f'(0)=\lim_{x^3\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}.$$

- 解 由题设可知，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{f(x^3)}{x^3}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y}=f'(0).$$

- 因此 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$，选 B.

- 函数的可导性与连续性的关系
- 定理 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，则函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.
- 证明 由于函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，因此 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在.
- 从而 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$
- 因此 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$，函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.
- 定理(逆否命题) 如果函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

- 注意，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，则函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处未必可导，即

可导一定连续，连续不一定可导.

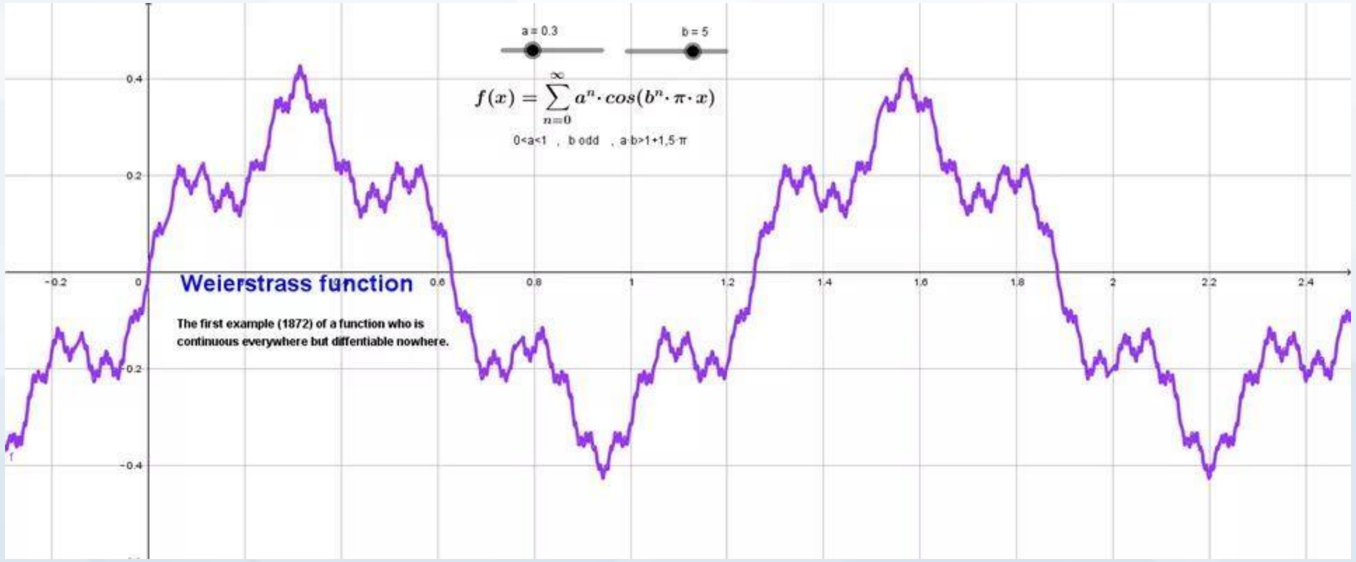
- 例 讨论 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.
- 解 我们已经知道 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续.
- 由于 $\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}-1, & \Delta x<0;\\ 1, & \Delta x>0,\end{cases}$ 因此

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=1,\qquad f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=-1.$$

- 由于 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$，因此 $f(x)=|x|$ 在点 0 处不可导.

- 不仅如此，魏尔斯特拉斯构造了一个处处连续却处处不可导的函数.
- 例 魏尔斯特拉斯函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \qquad 0<a<1, ab>1+1.5\pi, b \text{ 是奇数.}$$



- 例 设函数 $f(x)=\begin{cases}3^{-x}, & x<1;\\ ax+b, & x\geq 1,\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导, 求 a,b 的值以及 $f'(1)$.
- 分析 记 $f_1(x)=ax+b, f_2(x)=3^{-x}$.
- 当 $x\geq 1$ 时, $f(x)=f_1(x)$, 因此

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f_1(x)-f_1(1)}{x-1}=f'_{1,+}(1)=f'_1(1).$$

- 由于可导推出连续, 因此 $f(1)=f(1^-)=f_2(1^-)=f_2(1)$.
- 当 $x\leq 1$ 时, $f(x)=f_2(x)$, 因此 $f'_-(1)=f'_{2,-}(1)=f'_2(1)$.

- 解 我们知道, 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 因此

$$f(1^+)=f(1^-)=f(1),\qquad a+b=\frac{1}{3}.$$

- 又由于

$$f'_+(1)=(ax+b)'\Big|_{x=1}=a,$$

$$f'_-(1)=(3^{-x})'\Big|_{x=1}=\left[3^{-x}\ln\left(\frac{1}{3}\right)\right]\Big|_{x=1}=-\frac{1}{3}\ln 3,$$

- 因此 $a=-\frac{1}{3}\ln 3$, $b=\frac{1+\ln 3}{3}$, $f'(1)=-\frac{1}{3}\ln 3$.

- **例** 求曲线 $y=\cos x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.
- **解** 由于 $f'(x)=-\sin x$, 因此切线斜率为 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 切线方程为

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2},\qquad 3x+2\sqrt{3}y=\pi+\sqrt{3}.$$

- 法线方程为

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2},\qquad 12x-6\sqrt{3}y=4\pi-3\sqrt{3}.$$

- 例 设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续, 则下列命题错误的是(   ).
- (A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$;
- (B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$;
- (C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在;
- (D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

- 解 (A) $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0} x=0$
- (B) $2f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)+\lim\limits_{x\to 0} f(-x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0} x=0$
- (C) 由于 $f(0)=0$，因此 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.
- (D) 例如 $f(x)=|x|$. 不过，如果 $f'(0)$ 存在，可以知道
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0}\right]=2f'(0)$.
- 此时，我们可以推出 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)-f(-x)]=0$，但这没有用，因为左边等于 $f(0)-f(0)=0$.
- 想一想，如果是 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(-3x)}{x}$ 呢？

- 例 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导，则 $\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=(\quad)$.
- (A) $f'(a)$　(B) $2f'(a)$　(C) 0　(D) $f'(2a)$
- 解 由于 $f'(a)=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}$，因此

$$f'(a)=\lim_{-x\to 0}\frac{f(a-x)-f(a)}{-x}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(a-x)-f(a)}{x},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{[f(a+x)-f(a)]-[f(a-x)-f(a)]}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{f(a-x)-f(a)}{x}$$

- 我们也可以代入一个例子来进行判断，例如令 $f(x)=x$ 则可立知选 B.

- 变化率问题实例
- 导数实质上是函数 y 关于自变量 x 的变化率. 例如速度是路程 s 关于时间 t 的变化率.
- 下面我们将给出其它的关于变化率应用实例, 其目的在于使大家对导数有更深刻的认识.
- 另一方面也启示大家, 人们之所以研究这种形式的极限, 就在于数学就是把实际问题中最具有共性的东西提炼出来, 加以研究再应用于具体问题中去.

- **例** 设细棒位于区间 $[a,b]$ 上, 从点 a 到点 x 的一段细棒的质量是 x 的函数 $m=m(x)$ $(a\le x\le b)$, 求细棒的线密度 $\rho(x)$.
- **解** 区间 $[x,x+\Delta x]$ $(\Delta x>0, x, x+\Delta x\in[a,b])$ 上细棒的质量为 $\Delta m=m(x+\Delta x)-m(x)$, 其平均线密度为

$$\frac{\Delta m}{\Delta x}=\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}.$$

- 令 $\Delta x\to 0$, 于是棒在 x 处的线密度为 $\rho(x)=m'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}$.
- 它是质量对长度的变化率.

- 例 在热学中，一个有趣的问题是可压缩性.
- 某一气体在温度一定时，其体积 V 依赖于压力 P，可以考虑体积随压力的变化率. 人们定义

$$\beta=-\frac{1}{V}\cdot\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}$$

- 为等温压缩率，它反映了在温度一定时，单位体积的气体的体积随着压力的增大而体积减小的快慢.
- 例 经济学中的边际量. 当某经济量 $y=y(x)$ 的自变量 x 增加一个单位时，经济量的改变量称为该经济量的边际量.
- 例如边际成本、边际收益、边际利润等. 同样的道理，经济量的边际量为

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}.$$

- 例 设 $n = f(t)$ 是在时刻 t 某一生物或植物的数目.
- 我们考虑它的增长率. 在 t 到 $t + \Delta t$ 的平均增长率为

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

- 令 $\Delta t \to 0$,

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

- 便是该物种 t 时刻的增长率.