复变函数与积分变换

张神星

合肥工业大学

2022 年秋季学期

第五章　留数

本章作业

- **1**(2)(5)(7)(8), **8**(1)(3)(5), **9**(1)(2)(6)
- **11**, **12**, **13**(1)(4)(5)

1. 孤立奇点
2. 留数
3. 留数在定积分的应用

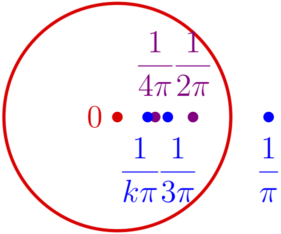
孤立奇点

- 我们先对奇点进行分类, 以便于分类计算留数.

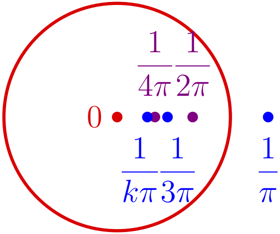
- 我们先对奇点进行分类, 以便于分类计算留数.
- 例 考虑函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$, 那么 $z=0$ 是一个奇点.

孤立奇点

- 我们先对奇点进行分类, 以便于分类计算留数.
- 例 考虑函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, 那么 $z=0$ 是一个奇点.
- 对于 $z=\dfrac{1}{k\pi}$, $\sin\dfrac{1}{z}=0$.

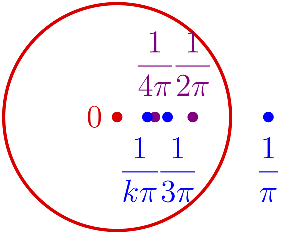


- 我们先对奇点进行分类, 以便于分类计算留数.
- 例 考虑函数 $f(z) = \dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{z}}$, 那么 $z = 0$ 是一个奇点.
- 对于 $z = \dfrac{1}{k\pi}, \sin\dfrac{1}{z} = 0$.
- 由于 $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{k\pi} = 0$, 因此 0 的任何一个去心邻域内都有奇点.

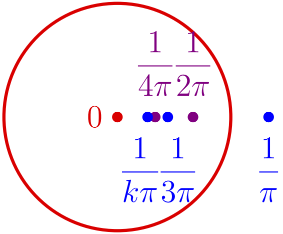


孤立奇点

- 我们先对奇点进行分类, 以便于分类计算留数.
- 例 考虑函数 $f(z)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, 那么 $z=0$ 是一个奇点.
- 对于 $z=\dfrac{1}{k\pi}, \sin\dfrac{1}{z}=0$.
- 由于 $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{1}{k\pi}=0$, 因此 0 的任何一个去心邻域内都有奇点.
- 此时无法选取一个圆环域 $0<|z|<\delta$ 作 $f(z)$ 的洛朗展开.



- 我们先对奇点进行分类, 以便于分类计算留数.
- 例 考虑函数 $f(z) = \dfrac{1}{\sin \frac{1}{z}}$, 那么 $z = 0$ 是一个奇点.
- 对于 $z = \dfrac{1}{k\pi}$, $\sin \dfrac{1}{z} = 0$.
- 由于 $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{1}{k\pi} = 0$, 因此 0 的任何一个去心邻域内都有奇点.
- 此时无法选取一个圆环域 $0 < |z| < \delta$ 作 $f(z)$ 的洛朗展开. 因此我们不考虑这类奇点.



孤立奇点的定义

定义

如果 z_0 是 $f(z)$ 的一个奇点, 且 z_0 的某个邻域内没有其它奇点, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点.

孤立奇点的定义

定义

如果 z_0 是 $f(z)$ 的一个奇点, 且 z_0 的某个邻域内没有其它奇点, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点.

- 例 $z=0$ 是 $e^{z^{-1}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.

孤立奇点的定义

定义

如果 z_0 是 $f(z)$ 的一个奇点, 且 z_0 的某个邻域内没有其它奇点, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点.

- 例 $z=0$ 是 $e^{z^{-1}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.
- 例 $z=-1$ 是 $\dfrac{1}{z+1}$ 的孤立奇点.

孤立奇点的定义

定义

如果 z_0 是 $f(z)$ 的一个奇点, 且 z_0 的某个邻域内没有其它奇点, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点.

- 例 $z=0$ 是 $e^{z^{-1}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.
- 例 $z=-1$ 是 $\dfrac{1}{z+1}$ 的孤立奇点.
- 例 $z=0$ 不是 $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 的孤立奇点.

- 如果 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, 则可以作 $f(z)$ 的洛朗级数.

- 如果 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, 则可以作 $f(z)$ 的洛朗级数.
- 根据该洛朗级数主要部分的项数, 我们可以将孤立奇点分为三种.

- 如果 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析，则可以作 $f(z)$ 的洛朗级数.
- 根据该洛朗级数主要部分的项数，我们可以将孤立奇点分为三种.

孤立奇点类型	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$

- 如果 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, 则可以作 $f(z)$ 的洛朗级数.
- 根据该洛朗级数主要部分的项数, 我们可以将孤立奇点分为三种.

孤立奇点类型	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	没有主要部分	存在且有限

孤立奇点的分类

- 如果 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析, 则可以作 $f(z)$ 的洛朗级数.
- 根据该洛朗级数主要部分的项数, 我们可以将孤立奇点分为三种.

孤立奇点类型	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	没有主要部分	存在且有限
m 阶极点	主要部分只有有限项非零 最低次为 $-m$ 次	∞

孤立奇点的分类

- 如果 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, 则可以作 $f(z)$ 的洛朗级数.
- 根据该洛朗级数主要部分的项数, 我们可以将孤立奇点分为三种.

孤立奇点类型	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$
可去奇点	没有主要部分	存在且有限
m 阶极点	主要部分只有有限项非零 最低次为 $-m$ 次	∞
本性奇点	主要部分有无限项非零	不存在且不为 ∞

孤立奇点的分类: 可去奇点

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数没有主要部分, 即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

是幂级数, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

孤立奇点的分类: 可去奇点

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数没有主要部分, 即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

是幂级数, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

- 此时幂级数的和函数 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析,

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数没有主要部分, 即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

是幂级数, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

- 此时幂级数的和函数 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析, 且除 z_0 外 $f(z) = g(z)$.

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数没有主要部分, 即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

是幂级数, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

- 此时幂级数的和函数 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析, 且除 z_0 外 $f(z) = g(z)$. 通过补充或修改定义 $f(z_0) = g(z_0) = c_0$, 可使得 $f(z)$ 也在 z_0 解析.

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数没有主要部分, 即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

是幂级数, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

- 此时幂级数的和函数 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析, 且除 z_0 外 $f(z) = g(z)$. 通过补充或修改定义 $f(z_0) = g(z_0) = c_0$, 可使得 $f(z)$ 也在 z_0 解析.
- 结论 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 存在且有限 $\iff$ z_0 是可去奇点.

- 例 $\dfrac{\sin z}{z} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} + \cdots$ 没有负幂次项, 因此 0 是可去奇点.

例题: 可去奇点

- 例 $\dfrac{\sin z}{z} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} + \cdots$ 没有负幂次项, 因此 0 是可去奇点.
- 也可以从

$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z - \sin 0}{z - 0} = (\sin z)'|_{z=0} = \cos 0 = 1$$

看出.

例题: 可去奇点

- 例 $\dfrac{\sin z}{z} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} + \cdots$ 没有负幂次项, 因此 0 是可去奇点.
- 也可以从

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z - \sin 0}{z - 0} = (\sin z)'|_{z=0} = \cos 0 = 1$$

看出.
- 例 $\dfrac{e^z - 1}{z} = 1 + \dfrac{z}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots$ 没有负幂次项, 因此 0 是可去奇点.

- 例 $\dfrac{\sin z}{z} = 1 - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^4}{5!} + \cdots$ 没有负幂次项，因此 0 是可去奇点.
- 也可以从
$$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z - \sin 0}{z - 0} = (\sin z)'|_{z=0} = \cos 0 = 1$$
看出.
- 例 $\dfrac{e^z - 1}{z} = 1 + \dfrac{z}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots$ 没有负幂次项，因此 0 是可去奇点.
- 也可以从
$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z - 1}{z} = (e^z)'|_{z=0} = 1$$
看出.

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数主要部分有无限多项非零, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点.

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数主要部分有无限多项非零, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点.

- 例 $e^{z^{-1}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2z^2} + \cdots$, 0 是本性奇点.

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数主要部分有无限多项非零, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点.

- 例 $e^{z^{-1}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2z^2} + \cdots$, 0 是本性奇点.
- 此时 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在也不是 ∞.

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数主要部分有无限多项非零, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点.

- 例 $e^{z^{-1}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2z^2} + \cdots$, 0 是本性奇点.
- 此时 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ 不存在也不是 ∞.
- 事实上对于任意扩充复数 A, 都可以找到数列 $z_n \to z_0$, 使得 $f(z_n) \to A$. 例如, $z_n = \dfrac{1}{\ln A + 2n\pi i}$, 则 $e^{z_n^{-1}} \to A$.

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数主要部分有无限多项非零, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点.

- 例 $e^{z^{-1}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2z^2} + \cdots$, 0 是本性奇点.
- 此时 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在也不是 ∞.
- 事实上对于任意扩充复数 A, 都可以找到数列 $z_n \to z_0$, 使得 $f(z_n) \to A$. 例如, $z_n = \dfrac{1}{\ln A + 2n\pi i}$, 则 $e^{z_n^{-1}} \to A$.
- 可去奇点的性质比较简单, 而本性奇点的性质又较为复杂, 因此我们主要关心的是极点的情形.

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数主要部分只有有限多项非零, 即

$$f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots ,$$

其中 $c_{-m} \neq 0, m \geqslant 1$, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的m 阶极点.

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数主要部分只有有限多项非零, 即

$$f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots,$$

其中 $c_{-m} \neq 0, m \geqslant 1$, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的m 阶极点.

- 此时, $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, 其中 $g(z)$ 在 z_0 解析且非零.

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数主要部分只有有限多项非零, 即

$$f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots ,$$

其中 $c_{-m} \neq 0, m \geqslant 1$, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的m 阶极点.

- 此时, $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, 其中 $g(z)$ 在 z_0 解析且非零.
- 结论 $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ 存在且非零 $\iff$ z_0 是 m 阶极点.

定义

如果 $f(z)$ 的洛朗级数主要部分只有有限多项非零, 即

$$f(z) = c_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots,$$

其中 $c_{-m} \neq 0, m \geqslant 1$, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的m 阶极点.

- 此时, $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, 其中 $g(z)$ 在 z_0 解析且非零.
- 结论 $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ 存在且非零 $\iff$ z_0 是 m 阶极点.
- 结论 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff z_0$ 是极点.

- 例 $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$, 0 是 2 阶极点, -2 是 1 阶极点.

- 例 $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$, 0 是 2 阶极点, -2 是 1 阶极点.
- 练习 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点, 并指出极点的阶.

- 例 $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$, 0 是 2 阶极点, -2 是 1 阶极点.
- 练习 求 $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点, 并指出极点的阶.
- 答案 由于 $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$, 所以 -1 是 1 阶极点, 1 是 2 阶极点.

函数的零点

- 我们知道, m 阶极点的洛朗展开最低次项是 $(z-z_0)^{-m}$.

- 我们知道, m 阶极点的洛朗展开最低次项是 $(z-z_0)^{-m}$.
- 如果 $f(z)$ 的洛朗级数的最低次项的幂次不是 $-m$, 而是 m, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, $m \geqslant 1$.

函数的零点

- 我们知道, m 阶极点的洛朗展开最低次项是 $(z-z_0)^{-m}$.
- 如果 $f(z)$ 的洛朗级数的最低次项的幂次不是 $-m$, 而是 m, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, $m \geqslant 1$.
- 此时 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0) \neq 0$.

函数的零点

- 我们知道, m 阶极点的洛朗展开最低次项是 $(z-z_0)^{-m}$.
- 如果 $f(z)$ 的洛朗级数的最低次项的幂次不是 $-m$, 而是 m, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, $m \geqslant 1$.
- 此时 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$.
- 例 $f(z)=z(z-1)^3$ 有 1 阶零点 0 和 3 阶零点 1.

- 我们知道, m 阶极点的洛朗展开最低次项是 $(z-z_0)^{-m}$.
- 如果 $f(z)$ 的洛朗级数的最低次项的幂次不是 $-m$, 而是 m, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, $m \geqslant 1$.
- 此时 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$.
- 例 $f(z)=z(z-1)^3$ 有 1 阶零点 0 和 3 阶零点 1.
- 练习 求 $f(z)=z^5(z^2+1)^2$ 的零点和阶数.

函数的零点

- 我们知道, m 阶极点的洛朗展开最低次项是 $(z-z_0)^{-m}$.
- 如果 $f(z)$ 的洛朗级数的最低次项的幂次不是 $-m$, 而是 m, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, $m \geqslant 1$.
- 此时 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$.
- 例 $f(z)=z(z-1)^3$ 有 1 阶零点 0 和 3 阶零点 1.
- 练习 求 $f(z)=z^5(z^2+1)^2$ 的零点和阶数.
- 答案 0 是 5 阶零点, $\pm i$ 是 2 阶零点.

- 我们知道, m 阶极点的洛朗展开最低次项是 $(z-z_0)^{-m}$.
- 如果 $f(z)$ 的洛朗级数的最低次项的幂次不是 $-m$, 而是 m, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, $m \geqslant 1$.
- 此时 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$.
- 例 $f(z)=z(z-1)^3$ 有 1 阶零点 0 和 3 阶零点 1.
- 练习 求 $f(z)=z^5(z^2+1)^2$ 的零点和阶数.
- 答案 0 是 5 阶零点, $\pm i$ 是 2 阶零点.
- 注意, 除了恒为零的函数以外, 解析函数的零点总是孤立的.

函数的零点

- 我们知道, m 阶极点的洛朗展开最低次项是 $(z-z_0)^{-m}$.
- 如果 $f(z)$ 的洛朗级数的最低次项的幂次不是 $-m$, 而是 m, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, $m \geqslant 1$.
- 此时 $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0) \neq 0$.
- 例 $f(z) = z(z-1)^3$ 有 1 阶零点 0 和 3 阶零点 1.
- 练习 求 $f(z) = z^5(z^2+1)^2$ 的零点和阶数.
- 答案 0 是 5 阶零点, $\pm i$ 是 2 阶零点.
- 注意, 除了恒为零的函数以外, 解析函数的零点总是孤立的.
- 由幂级数系数 $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ 可知:

- 我们知道, m 阶极点的洛朗展开最低次项是 $(z-z_0)^{-m}$.
- 如果 $f(z)$ 的洛朗级数的最低次项的幂次不是 $-m$, 而是 m, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点, $m \geqslant 1$.
- 此时 $f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0)\neq 0$.
- 例 $f(z)=z(z-1)^3$ 有 1 阶零点 0 和 3 阶零点 1.
- 练习 求 $f(z)=z^5(z^2+1)^2$ 的零点和阶数.
- 答案 0 是 5 阶零点, $\pm i$ 是 2 阶零点.
- 注意, 除了恒为零的函数以外, 解析函数的零点总是孤立的.
- 由幂级数系数 $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ 可知:

定理

如果 $f(z)$ 在 z_0 解析, 则 z_0 是 m 阶零点当且仅当

$$f(z_0)=f'(z_0)=\cdots=f^{(m-1)}(z_0)=0, \quad f^{(m)}(z_0)\neq 0.$$

- 我们称 m 阶零点的阶为 m, m 阶极点的阶为 $-m$, 其它情形的阶为 0.

- 我们称 m 阶零点的阶为 m, m 阶极点的阶为 $-m$, 其它情形的阶为 0. 这样我们可以统一地研究零点和极点.

- 我们称 m 阶零点的阶为 m, m 阶极点的阶为 $-m$, 其它情形的阶为 0. 这样我们可以统一地研究零点和极点.

定理

如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶点, $g(z)$ 的 n 阶点, 那么 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶点, $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶点.

- 我们称 m 阶零点的阶为 m, m 阶极点的阶为 $-m$, 其它情形的阶为 0. 这样我们可以统一地研究零点和极点.

定理

如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶点, $g(z)$ 的 n 阶点, 那么 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶点, $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶点.

- 证明 设 $f(z)=(z-z_0)^m f_0(z), g(z)=(z-z_0)^n g_0(z)$, 则 $f_0(z), g_0(z)$ 在 z_0 解析且非零.

- 我们称 m 阶零点的阶为 m, m 阶极点的阶为 $-m$, 其它情形的阶为 0. 这样我们可以统一地研究零点和极点.

定理

如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶点, $g(z)$ 的 n 阶点, 那么 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶点, $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶点.

- **证明** 设 $f(z)=(z-z_0)^m f_0(z), g(z)=(z-z_0)^n g_0(z)$, 则 $f_0(z), g_0(z)$ 在 z_0 解析且非零. 因此 $\dfrac{f_0(z)}{g_0(z)}, f_0(z)g_0(z)$ 在 z_0 解析且非零.

- 我们称 m 阶零点的阶为 m, m 阶极点的阶为 $-m$, 其它情形的阶为 0. 这样我们可以统一地研究零点和极点.

定理

如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶点, $g(z)$ 的 n 阶点, 那么 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 阶点, $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶点.

- **证明** 设 $f(z)=(z-z_0)^m f_0(z), g(z)=(z-z_0)^n g_0(z)$, 则 $f_0(z), g_0(z)$ 在 z_0 解析且非零. 因此 $\dfrac{f_0(z)}{g_0(z)}, f_0(z)g_0(z)$ 在 z_0 解析且非零. 由

$$\frac{f(z)}{g(z)}=(z-z_0)^{m-n}\frac{f_0(z)}{g_0(z)}, \quad f(z)g(z)=(z-z_0)^{m+n}f_0(z)g_0(z)$$

可知命题成立. ∎

推论

如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点 (零点), 那么 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点 (极点).

推论

如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点 (零点), 那么 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点 (极点).

- 例 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 有哪些奇点? 如果是极点指出它的阶.

推论

如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点 (零点), 那么 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点 (极点).

- 例 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 有哪些奇点? 如果是极点指出它的阶.
- 解 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的奇点是 $\sin z = 0$ 的点, 即 $z = k\pi$.

推论

如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点 (零点), 那么 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点 (极点).

- **例** 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 有哪些奇点? 如果是极点指出它的阶.
- **解** 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的奇点是 $\sin z = 0$ 的点, 即 $z = k\pi$.
- 这些点处

$$(\sin z)'|_{z=k\pi} = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0.$$

推论

如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点 (零点), 那么 z_0 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶零点 (极点).

- 例 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 有哪些奇点? 如果是极点指出它的阶.
- 解 函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的奇点是 $\sin z = 0$ 的点, 即 $z = k\pi$.
- 这些点处

$$(\sin z)'|_{z=k\pi} = \cos k\pi = (-1)^k \neq 0.$$

- 从而是 $\sin z$ 的一阶零点, 是 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的一阶极点. ■

- 例 $z=0$ 是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的几阶极点?

- 例 $z=0$ 是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的几阶极点?
- 解 由于 $e^z-1=z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots$, 所以 0 是 e^z-1 的 1 阶零点, 从而是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的 1 阶极点. ■

- **例** $z=0$ 是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的几阶极点?
- **解** 由于 $e^z-1=z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots$, 所以 0 是 e^z-1 的 1 阶零点, 从而是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的 1 阶极点. ■
- **练习** 求 $f(z)=\dfrac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2z^2(z+1)^3}$ 的奇点.

- **例** $z=0$ 是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的几阶极点?
- **解** 由于 $e^z-1=z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots$, 所以 0 是 e^z-1 的 1 阶零点, 从而是 $\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的 1 阶极点. ■
- **练习** 求 $f(z)=\dfrac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2z^2(z+1)^3}$ 的奇点.
- **答案** 1 是 2 阶极点, 0 是 2 阶极点, 1 是 3 阶极点.

- 当我们把复平面扩充成闭复平面后, 从几何上看它变成了一个球面.

函数在 ∞ 的性态

- 当我们把复平面扩充成闭复平面后, 从几何上看它变成了一个球面.
- 这样的一个球面是一种封闭的曲面, 它具有某种整体性质.

函数在 ∞ 的性态

- 当我们把复平面扩充成闭复平面后, 从几何上看它变成了一个球面.
- 这样的一个球面是一种封闭的曲面, 它具有某种整体性质.
- 例如当我们需要计算一个圆周上函数的积分的时候, 我们就需要研究圆周内部每一个奇点处的洛朗展开, 从而得到相应的小闭路上的积分.

函数在 ∞ 的性态

- 当我们把复平面扩充成闭复平面后, 从几何上看它变成了一个球面.
- 这样的一个球面是一种封闭的曲面, 它具有某种整体性质.
- 例如当我们需要计算一个圆周上函数的积分的时候, 我们就需要研究圆周内部每一个奇点处的洛朗展开, 从而得到相应的小闭路上的积分.
- 如果在这个圆周内部的奇点比较多, 而外部奇点比较少时, 这样计算就不太方便.

- 当我们把复平面扩充成闭复平面后，从几何上看它变成了一个球面.
- 这样的一个球面是一种封闭的曲面，它具有某种整体性质.
- 例如当我们需要计算一个圆周上函数的积分的时候，我们就需要研究圆周内部每一个奇点处的洛朗展开，从而得到相应的小闭路上的积分.
- 如果在这个圆周内部的奇点比较多，而外部奇点比较少时，这样计算就不太方便.
- 此时如果我们通过变量替换 $z = \dfrac{1}{t}$，转而研究圆周外部奇点处的洛朗展开，便可大大减少所需考虑的奇点个数.

- 当我们把复平面扩充成闭复平面后, 从几何上看它变成了一个球面.
- 这样的一个球面是一种封闭的曲面, 它具有某种整体性质.
- 例如当我们需要计算一个圆周上函数的积分的时候, 我们就需要研究圆周内部每一个奇点处的洛朗展开, 从而得到相应的小闭路上的积分.
- 如果在这个圆周内部的奇点比较多, 而外部奇点比较少时, 这样计算就不太方便.
- 此时如果我们通过变量替换 $z = \dfrac{1}{t}$, 转而研究圆周外部奇点处的洛朗展开, 便可大大减少所需考虑的奇点个数.
- 因此我们需要研究函数在 ∞ 的性态.

定义

如果函数 $f(z)$ 在 ∞ 的去心邻域 $R < |z| < +\infty$ 上没有奇点, 则称 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点.

定义

如果函数 $f(z)$ 在 ∞ 的去心邻域 $R < |z| < +\infty$ 上没有奇点, 则称 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点.

- 设 $g(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, 则研究 $f(z)$ 在 ∞ 的性质可以转为研究 $g(t)$ 在 0 的性质.

定义

如果函数 $f(z)$ 在 ∞ 的去心邻域 $R < |z| < +\infty$ 上没有奇点, 则称 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点.

- 设 $g(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, 则研究 $f(z)$ 在 ∞ 的性质可以转为研究 $g(t)$ 在 0 的性质.
- $g(t)$ 在圆环域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 上解析, 0 是它的孤立奇点.

定义

如果函数 $f(z)$ 在 ∞ 的去心邻域 $R < |z| < +\infty$ 上没有奇点, 则称 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点.

- 设 $g(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, 则研究 $f(z)$ 在 ∞ 的性质可以转为研究 $g(t)$ 在 0 的性质.
- $g(t)$ 在圆环域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 上解析, 0 是它的孤立奇点.

定义

如果 0 是 $g(t)$ 的可去奇点 (m 阶奇点、本性奇点), 则称 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点 (m 阶奇点、本性奇点).

- 设 $f(z)$ 在圆环域 $R < |z| < +\infty$ 的洛朗展开为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

- 设 $f(z)$ 在圆环域 $R < |z| < +\infty$ 的洛朗展开为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

则 $g(t)$ 在圆环域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 的洛朗展开为

$$g(t) = \cdots + \frac{c_2}{t^2} + \frac{c_1}{t} + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots$$

- 设 $f(z)$ 在圆环域 $R<|z|<+\infty$ 的洛朗展开为

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-2}}{z^2}+\frac{c_{-1}}{z}+c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$$

则 $g(t)$ 在圆环域 $0<|t|<\frac{1}{R}$ 的洛朗展开为

$$g(t)=\cdots+\frac{c_2}{t^2}+\frac{c_1}{t}+c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots$$

∞ 类型	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$

- 设 $f(z)$ 在圆环域 $R < |z| < +\infty$ 的洛朗展开为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

则 $g(t)$ 在圆环域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 的洛朗展开为

$$g(t) = \cdots + \frac{c_2}{t^2} + \frac{c_1}{t} + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots$$

∞ 类型	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$
可去奇点	没有正幂次部分	存在且有限

函数在 ∞ 的性态

- 设 $f(z)$ 在圆环域 $R < |z| < +\infty$ 的洛朗展开为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

则 $g(t)$ 在圆环域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 的洛朗展开为

$$g(t) = \cdots + \frac{c_2}{t^2} + \frac{c_1}{t} + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots$$

∞ 类型	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$
可去奇点	没有正幂次部分	存在且有限
m 阶极点	正幂次部分只有有限项非零 最高次为 m 次	∞

函数在 ∞ 的性态

- 设 $f(z)$ 在圆环域 $R < |z| < +\infty$ 的洛朗展开为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

则 $g(t)$ 在圆环域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 的洛朗展开为

$$g(t) = \cdots + \frac{c_2}{t^2} + \frac{c_1}{t} + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \cdots$$

∞ 类型	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$
可去奇点	没有正幂次部分	存在且有限
m 阶极点	正幂次部分只有有限项非零 最高次为 m 次	∞
本性奇点	正幂次部分有无限项非零	不存在且不为 ∞

- 当 ∞ 是可去奇点时, 我们可以认为 $f(z)$ 在 ∞ 解析, 只需要令 $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

- 当 ∞ 是可去奇点时, 我们可以认为 $f(z)$ 在 ∞ 解析, 只需要令 $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.
- 例 函数 $f(z) = \dfrac{z}{z+1}$ 在 $1 < |z| < +\infty$ 内的洛朗展开为

$$f(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots$$

例题: ∞ 的奇点类型

- 当 ∞ 是可去奇点时, 我们可以认为 $f(z)$ 在 ∞ 解析, 只需要令 $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)$.
- 例 函数 $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开为

$$f(z)=\frac{1}{1+z^{-1}}=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots$$

- 因此 ∞ 是可去奇点.

例题: ∞ 的奇点类型

- 当 ∞ 是可去奇点时，我们可以认为 $f(z)$ 在 ∞ 解析，只需要令 $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.
- 例 函数 $f(z) = \dfrac{z}{z+1}$ 在 $1 < |z| < +\infty$ 内的洛朗展开为

$$f(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots$$

- 因此 ∞ 是可去奇点.
- 或由 $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1$ 看出.

例题: ∞ 的奇点类型

- 当 ∞ 是可去奇点时, 我们可以认为 $f(z)$ 在 ∞ 解析, 只需要令 $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.
- 例 函数 $f(z) = \dfrac{z}{z+1}$ 在 $1 < |z| < +\infty$ 内的洛朗展开为

$$f(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots$$

- 因此 ∞ 是可去奇点.
- 或由 $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1$ 看出.
- 例 函数 $f(z) = z^2 + \dfrac{1}{z}$ 含有正次幂项且最高次为 2, 因此 ∞ 是 2 阶极点.

例题: ∞ 的奇点类型

- 当 ∞ 是可去奇点时, 我们可以认为 $f(z)$ 在 ∞ 解析, 只需要令 $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.
- 例 函数 $f(z) = \dfrac{z}{z+1}$ 在 $1 < |z| < +\infty$ 内的洛朗展开为

$$f(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots$$

- 因此 ∞ 是可去奇点.
- 或由 $f(\infty) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 1$ 看出.
- 例 函数 $f(z) = z^2 + \dfrac{1}{z}$ 含有正次幂项且最高次为 2, 因此 ∞ 是 2 阶极点.
- 例 函数

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

含有无限多正次幂项, 因此 ∞ 是本性奇点.

- 例 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内有哪些什么类型的奇点, 并指出奇点的阶.

典型例题: 奇点的类型

- 例 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内有哪些什么类型的奇点, 并指出奇点的阶.
- 解 整数 $z=k\neq\pm1,2$ 是 $\sin\pi z$ 的 1 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的 3 阶极点.

- 例 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin \pi z)^3}$ 在扩充复平面内有哪些什么类型的奇点, 并指出奇点的阶.
- 解 整数 $z=k\neq \pm 1, 2$ 是 $\sin \pi z$ 的 1 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的 3 阶极点.
- $z=\pm 1$ 是 z^2-1 的 1 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的 2 阶极点.

- 例 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内有哪些什么类型的奇点, 并指出奇点的阶.
- 解 整数 $z=k\neq\pm1,2$ 是 $\sin\pi z$ 的 1 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的 3 阶极点.
- $z=\pm1$ 是 z^2-1 的 1 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的 2 阶极点.
- $z=2$ 是 $(z-2)^3$ 的 3 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的可去奇点.

- 例 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内有哪些什么类型的奇点，并指出奇点的阶.
- 解 整数 $z=k\neq\pm1,2$ 是 $\sin\pi z$ 的 1 阶零点，因此是 $f(z)$ 的 3 阶极点.
- $z=\pm1$ 是 z^2-1 的 1 阶零点，因此是 $f(z)$ 的 2 阶极点.
- $z=2$ 是 $(z-2)^3$ 的 3 阶零点，因此是 $f(z)$ 的可去奇点.
- 由于奇点 $1,2,3,\cdots\to\infty$，因此 ∞ 不是孤立奇点. ∎

- 例 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内有哪些什么类型的奇点, 并指出奇点的阶.
- 解 整数 $z=k\neq\pm1,2$ 是 $\sin\pi z$ 的 1 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的 3 阶极点.
- $z=\pm1$ 是 z^2-1 的 1 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的 2 阶极点.
- $z=2$ 是 $(z-2)^3$ 的 3 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的可去奇点.
- 由于奇点 $1,2,3,\cdots\to\infty$, 因此 ∞ 不是孤立奇点. ■
- 练习 函数 $f(z)=\dfrac{z^2+4\pi^2}{z^3(e^z-1)}$ 在扩充复平面内有哪些什么类型的奇点, 并指出奇点的阶.

- 例 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内有哪些什么类型的奇点, 并指出奇点的阶.
- 解 整数 $z=k\neq\pm1,2$ 是 $\sin\pi z$ 的 1 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的 3 阶极点.
- $z=\pm1$ 是 z^2-1 的 1 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的 2 阶极点.
- $z=2$ 是 $(z-2)^3$ 的 3 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的可去奇点.
- 由于奇点 $1,2,3,\cdots\to\infty$, 因此 ∞ 不是孤立奇点. ■
- 练习 函数 $f(z)=\dfrac{z^2+4\pi^2}{z^3(e^z-1)}$ 在扩充复平面内有哪些什么类型的奇点, 并指出奇点的阶.
- 答案 $z=2k\pi i,k\neq\pm1,0$ 是 1 阶极点. $z=0$ 是 4 阶极点.

- 例 函数 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin\pi z)^3}$ 在扩充复平面内有哪些什么类型的奇点, 并指出奇点的阶.
- 解 整数 $z=k\neq\pm1,2$ 是 $\sin\pi z$ 的 1 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的 3 阶极点.
- $z=\pm1$ 是 z^2-1 的 1 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的 2 阶极点.
- $z=2$ 是 $(z-2)^3$ 的 3 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的可去奇点.
- 由于奇点 $1,2,3,\cdots\to\infty$, 因此 ∞ 不是孤立奇点. ∎
- 练习 函数 $f(z)=\dfrac{z^2+4\pi^2}{z^3(e^z-1)}$ 在扩充复平面内有哪些什么类型的奇点, 并指出奇点的阶.
- 答案 $z=2k\pi i,k\neq\pm1,0$ 是 1 阶极点. $z=0$ 是 4 阶极点.
- $z=\pm2\pi i$ 是可去奇点. $z=\infty$ 不是孤立奇点.

例题: 证明复数域是代数封闭的 *

- 例 证明非常数复系数多项式 $p(z)$ 总有复零点.

例题: 证明复数域是代数封闭的 *

- 例 证明非常数复系数多项式 $p(z)$ 总有复零点.
- 证明 假设多项式

$$p(z) = z^n + \cdots + c_1 z + c_0, \quad n \geqslant 1$$

没有复零点, 那么有理函数 $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ 在复平面上处处解析,

例题: 证明复数域是代数封闭的 *

- 例 证明非常数复系数多项式 $p(z)$ 总有复零点.
- 证明 假设多项式

$$p(z) = z^n + \cdots + c_1 z + c_0, \quad n \geqslant 1$$

没有复零点, 那么有理函数 $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ 在复平面上处处解析, 从而它在 0 处的洛朗展开没有负幂次项.

例题：证明复数域是代数封闭的 *

- 例 证明非常数复系数多项式 $p(z)$ 总有复零点.
- 证明 假设多项式

$$p(z) = z^n + \cdots + c_1 z + c_0, \quad n \geqslant 1$$

没有复零点, 那么有理函数 $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ 在复平面上处处解析, 从而它在 0 处的洛朗展开没有负幂次项.

- 另一方面,

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{1 + c_{n-1}z^{-1} + \cdots + c_1 z^{n-1} + c_0 z^{-n}} = 0,$$

因此 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点,

例题: 证明复数域是代数封闭的 *

- 例 证明非常数复系数多项式 $p(z)$ 总有复零点.
- 证明 假设多项式

$$p(z) = z^n + \cdots + c_1 z + c_0, \quad n \geqslant 1$$

没有复零点, 那么有理函数 $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ 在复平面上处处解析, 从而它在 0 处的洛朗展开没有负幂次项.

- 另一方面,

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{1 + c_{n-1}z^{-1} + \cdots + c_1 z^{n-1} + c_0 z^{-n}} = 0,$$

因此 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 这意味着它在 0 处的洛朗展开没有正幂次项.

例题: 证明复数域是代数封闭的 *

- 例 证明非常数复系数多项式 $p(z)$ 总有复零点.
- 证明 假设多项式

$$p(z) = z^n + \cdots + c_1 z + c_0, \quad n \geqslant 1$$

没有复零点, 那么有理函数 $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ 在复平面上处处解析, 从而它在 0 处的洛朗展开没有负幂次项.

- 另一方面,

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{1 + c_{n-1}z^{-1} + \cdots + c_1 z^{n-1} + c_0 z^{-n}} = 0,$$

因此 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点, 这意味着它在 0 处的洛朗展开没有正幂次项.

- 二者结合可知 $f(z)$ 只能是常数, 矛盾! ■

- 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点,

留数

- 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在某个 $0<|z-z_0|<\delta$ 上可以展开为洛朗级数

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$$

- 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在某个 $0<|z-z_0|<\delta$ 上可以展开为洛朗级数

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$$

- 其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$, C 为该圆环域中绕 z_0 的一条闭路.

留数

- 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在某个 $0 < |z - z_0| < \delta$ 上可以展开为洛朗级数

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$$

- 其中 $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z$, C 为该圆环域中绕 z_0 的一条闭路.
- 特别地,

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) \, \mathrm{d}z$$

被称为函数 $f(z)$ 在 z_0 的留数.

留数

- 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在某个 $0<|z-z_0|<\delta$ 上可以展开为洛朗级数

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$$

- 其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$, C 为该圆环域中绕 z_0 的一条闭路.
- 特别地,

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]:=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$$

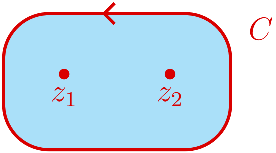
  被称为函数 $f(z)$ 在 z_0 的留数.
- 可以看出, 知道留数之后可以用来计算积分.

留数定理

定理

如果 $f(z)$ 在区域 D 内除 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 外处处解析, C 是 D 内包含这些奇点的一条闭路, 那么

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$



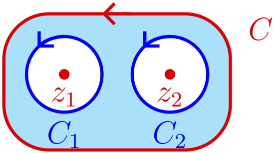
定理

如果 $f(z)$ 在区域 D 内除 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 外处处解析, C 是 D 内包含这些奇点的一条闭路, 那么

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

- **证明** 由复闭路定理可知,

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]. \qquad \blacksquare$$



- (1) z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 显然 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$.

留数的计算方法

- (1) z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 显然 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$.
- (2) z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般只能从定义计算.

留数的计算方法

- (1) z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 显然 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$.
- (2) z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般只能从定义计算.
- (3) z_0 为 $f(z)$ 的极点.

留数的计算方法

- (1) z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 显然 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$.
- (2) z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般只能从定义计算.
- (3) z_0 为 $f(z)$ 的极点. 如果 z_0 是 $\leqslant m$ 阶极点, 那么

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)].$$

留数的计算方法

- (1) z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 显然 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$.
- (2) z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般只能从定义计算.
- (3) z_0 为 $f(z)$ 的极点. 如果 z_0 是 $\leqslant m$ 阶极点, 那么

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)].$$

- 特别地, $m = 1$ 时, $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$.

留数的计算方法

- (1) z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 显然 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$.
- (2) z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般只能从定义计算.
- (3) z_0 为 $f(z)$ 的极点. 如果 z_0 是 $\leqslant m$ 阶极点, 那么

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)].$$

- 特别地, $m = 1$ 时, $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$.
- 这是由于 $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ 在 z_0 附近解析,

留数的计算方法

- (1) z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 显然 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = 0$.
- (2) z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般只能从定义计算.
- (3) z_0 为 $f(z)$ 的极点. 如果 z_0 是 $\leqslant m$ 阶极点, 那么

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)].$$

- 特别地, $m = 1$ 时, $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$.
- 这是由于 $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ 在 z_0 附近解析, 从而可以展开为幂级数

$$g(z) = c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \cdots$$

留数的计算方法

- (1) z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 显然 $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$.
- (2) z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点, 一般只能从定义计算.
- (3) z_0 为 $f(z)$ 的极点. 如果 z_0 是 $\leqslant m$ 阶极点, 那么

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)].$$

- 特别地, $m = 1$ 时, $\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$.
- 这是由于 $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ 在 z_0 附近解析, 从而可以展开为幂级数

$$g(z) = c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \cdots$$

- 故 $c_{-1} = \dfrac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0)$.

留数的计算方法

定理

设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z), Q(z)$ 都在 z_0 解析且 $P(z_0)\neq 0$, $Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$. 那么 z_0 是 $f(z)$ 的 1 阶极点且

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

定理

设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z),Q(z)$ 都在 z_0 解析且 $P(z_0)\neq 0$, $Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$. 那么 z_0 是 $f(z)$ 的 1 阶极点且

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

- **证明** 由于 z_0 是 $Q(z)$ 的 1 阶零点且 $P(z_0)\neq 0$, 因此 z_0 是 $f(z)$ 的 1 阶极点.

留数的计算方法

定理

设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z),Q(z)$ 都在 z_0 解析且 $P(z_0)\neq 0$, $Q(z_0)=0, Q'(z_0)\neq 0$. 那么 z_0 是 $f(z)$ 的 1 阶极点且

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

- **证明** 由于 z_0 是 $Q(z)$ 的 1 阶零点且 $P(z_0)\neq 0$, 因此 z_0 是 $f(z)$ 的 1 阶极点. 于是

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)}{z-z_0}}=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}. \qquad \blacksquare$$

典型例题: 留数的计算

- 例 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^z}{z^n}, 0\right]$.

典型例题: 留数的计算

- 例 求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^z}{z^n}, 0\right]$.
- 解 由于 $(e^z)(0) = 1$, 因此 0 是 n 阶极点,

典型例题: 留数的计算

- 例 求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{e^z}{z^n}, 0\right]$.
- 解 由于 $(e^z)(0) = 1$, 因此 0 是 n 阶极点,

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^z}{z^n}, 0\right] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}(e^z)^{(n-1)}$$

- 例 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^z}{z^n}, 0\right]$.
- 解 由于 $(e^z)(0) = 1$, 因此 0 是 n 阶极点,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^n}, 0\right] &= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}(e^z)^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0} e^z = \frac{1}{(n-1)!}.\end{aligned}$$

- 例 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^z}{z^n}, 0\right]$.
- 解 由于 $(e^z)(0)=1$, 因此 0 是 n 阶极点,

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^z}{z^n}, 0\right] = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0}(e^z)^{(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to 0} e^z = \frac{1}{(n-1)!}.$$

- 当然, 也可以从

$$\frac{e^z}{z^n} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k-n}}{k!} = \cdots + \frac{1}{(n-1)!z} + \cdots$$

看出.

典型例题: 留数的计算

- 例 求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.

- 例 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.
- 解 设 $P(z) = z - \sin z$, 则

$$P(0) = P'(0) = P''(0) = 0, \quad P'''(0) \neq 0.$$

典型例题: 留数的计算

- 例 求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.
- 解 设 $P(z)=z-\sin z$, 则

$$P(0)=P'(0)=P''(0)=0,\quad P'''(0)\neq 0.$$

- 因此 $z=0$ 是 $P(z)$ 的三阶零点,

典型例题: 留数的计算

- **例** 求 $\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.
- **解** 设 $P(z)=z-\sin z$, 则

$$P(0)=P'(0)=P''(0)=0, \quad P'''(0)\neq 0.$$

- 因此 $z=0$ 是 $P(z)$ 的三阶零点, 是 $\frac{z-\sin z}{z^6}$ 的 3 阶极点.

- 例 求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.
- 解 设 $P(z)=z-\sin z$, 则

$$P(0)=P'(0)=P''(0)=0, \quad P'''(0)\neq 0.$$

- 因此 $z=0$ 是 $P(z)$ 的三阶零点, 是 $\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 的 3 阶极点.
- 如果用公式

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right)''$$

计算会很繁琐.

- 例 求 $\mathrm{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.
- 解 设 $P(z) = z - \sin z$, 则

$$P(0) = P'(0) = P''(0) = 0, \quad P'''(0) \neq 0.$$

- 因此 $z = 0$ 是 $P(z)$ 的三阶零点, 是 $\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 的 3 阶极点.
- 如果用公式

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right)''$$

计算会很繁琐.

$$\mathrm{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] = \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(z-\sin z)^{(5)}$$

- 例 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]$.
- 解 设 $P(z)=z-\sin z$, 则

$$P(0)=P'(0)=P''(0)=0,\quad P'''(0)\neq 0.$$

- 因此 $z=0$ 是 $P(z)$ 的三阶零点, 是 $\dfrac{z-\sin z}{z^6}$ 的 3 阶极点.
- 如果用公式

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{z-\sin z}{z^3}\right)''$$

计算会很繁琐.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6}, 0\right] &= \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(z-\sin z)^{(5)}\\ &= \frac{1}{5!}\lim_{z\to 0}(-\cos z)=-\frac{1}{120}.\end{aligned}$$

- 也可以由 $\sin z$ 的泰勒展开得到

$$z-\sin z=\frac{z^3}{6}-\frac{z^5}{120}+\cdots,\ \frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{6z^3}-\frac{1}{120z}+\cdots$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=-\frac{1}{120}.$$

- 也可以由 $\sin z$ 的泰勒展开得到

$$z-\sin z=\frac{z^3}{6}-\frac{z^5}{120}+\cdots,\ \frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{6z^3}-\frac{1}{120z}+\cdots$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=-\frac{1}{120}.$$

- 练习 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^z-1}{z^5},0\right]$.

- 也可以由 $\sin z$ 的泰勒展开得到

$$z-\sin z=\frac{z^3}{6}-\frac{z^5}{120}+\cdots,\ \frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{6z^3}-\frac{1}{120z}+\cdots$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=-\frac{1}{120}.$$

- 练习 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^z-1}{z^5},0\right]$.
- 答案 $\dfrac{1}{24}$.

- 也可以由 $\sin z$ 的泰勒展开得到

$$z-\sin z=\frac{z^3}{6}-\frac{z^5}{120}+\cdots,\quad \frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{6z^3}-\frac{1}{120z}+\cdots$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=-\frac{1}{120}.$$

- 练习 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^z-1}{z^5},0\right]$.
- 答案 $\dfrac{1}{24}$.
- 例 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z}{z^4-1},i\right]$.

- 也可以由 $\sin z$ 的泰勒展开得到

$$z-\sin z=\frac{z^3}{6}-\frac{z^5}{120}+\cdots,\quad \frac{z-\sin z}{z^6}=\frac{1}{6z^3}-\frac{1}{120z}+\cdots$$

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z-\sin z}{z^6},0\right]=-\frac{1}{120}.$$

- 练习 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{e^z-1}{z^5},0\right]$.
- 答案 $\dfrac{1}{24}$.
- 例 求 $\operatorname{Res}\left[\dfrac{z}{z^4-1},i\right]$.
- 解 $z=i$ 是 z 的取值非零的点, 是 z^4-1 的 1 阶零点.

$$\operatorname{Res}\left[\frac{z}{z^4-1},i\right]=\frac{z}{(z^4-1)'}\bigg|_{z=i}=\frac{z}{4z^3}\bigg|_{z=i}=-\frac{1}{4}.\qquad \blacksquare$$

- 例 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z.$

- 例 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$.
- 解 $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2}$ 在 $|z| < 2$ 内有奇点 $z = 0, 1$.

- 例 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z.$
- 解 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$ 在 $|z|<2$ 内有奇点 $z=0,1.$

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1,$$

- 例 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$.
- 解 $f(z)=\frac{e^z}{z(z-1)^2}$ 在 $|z|<2$ 内有奇点 $z=0,1$.

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1,$$

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\left(\frac{e^z}{z}\right)'=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2}=0,$$

- 例 计算积分 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$.
- 解 $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)^2}$ 在 $|z|<2$ 内有奇点 $z=0,1$.

$$\operatorname{Res}[f(z),0] = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{(z-1)^2} = 1,$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1] = \lim_{z\to 1} \left(\frac{e^z}{z}\right)' = \lim_{z\to 1} \frac{e^z(z-1)}{z^2} = 0,$$

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \big[\operatorname{Res}[f(z),0] + \operatorname{Res}[f(z),1]\big]$$

- 例 计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z$.
- 解 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$ 在 $|z|<2$ 内有奇点 $z=0,1$.

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{(z-1)^2}=1,$$

$$\operatorname{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\left(\frac{e^z}{z}\right)'=\lim_{z\to 1}\frac{e^z(z-1)}{z^2}=0,$$

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-1)^2}\,\mathrm{d}z&=2\pi i\big[\operatorname{Res}[f(z),0]+\operatorname{Res}[f(z),1]\big]\\&=2\pi i(1+0)=2\pi i.\quad\blacksquare\end{aligned}$$

在 ∞ 的留数

- 设 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点,

在 ∞ 的留数

- 设 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在某个 $R < |z| < +\infty$ 上可以展开为洛朗级数

$$f(z) = \cdots + c_{-1}z^{-1} + c_0 + c_1 z + \cdots$$

- 设 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在某个 $R < |z| < +\infty$ 上可以展开为洛朗级数

$$f(z) = \cdots + c_{-1}z^{-1} + c_0 + c_1 z + \cdots$$

- 其中 $c_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$, C 为该圆环域中绕 0 的闭路.

在 ∞ 的留数

- 设 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在某个 $R<|z|<+\infty$ 上可以展开为洛朗级数

$$f(z)=\cdots+c_{-1}z^{-1}+c_0+c_1z+\cdots$$

- 其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$, C 为该圆环域中绕 0 的闭路. 称

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]:=-c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

为函数 $f(z)$ 在 ∞ 的留数.

- 设 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在某个 $R<|z|<+\infty$ 上可以展开为洛朗级数

$$f(z)=\cdots+c_{-1}z^{-1}+c_0+c_1z+\cdots$$

- 其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$, C 为该圆环域中绕 0 的闭路. 称

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]:=-c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

为函数 $f(z)$ 在 ∞ 的留数. 由于

$$f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}=\cdots+\frac{c_1}{z^3}+\frac{c_0}{z^2}+\frac{c_{-1}}{z}+c_{-2}+\cdots$$

- 设 ∞ 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在某个 $R<|z|<+\infty$ 上可以展开为洛朗级数

$$f(z)=\cdots+c_{-1}z^{-1}+c_0+c_1z+\cdots$$

- 其中 $c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta$, C 为该圆环域中绕 0 的闭路. 称

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]:=-c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

为函数 $f(z)$ 在 ∞ 的留数. 由于

$$f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}=\cdots+\frac{c_1}{z^3}+\frac{c_0}{z^2}+\frac{c_{-1}}{z}+c_{-2}+\cdots$$

- 因此

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right].$$

留数之和为 0

- 需要注意的是, 即便 ∞ 是可去奇点, 也不意味着 $\operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0$.

留数之和为 0

- 需要注意的是, 即便 ∞ 是可去奇点, 也不意味着 $\mathrm{Res}[f(z), \infty] = 0$.

定理

如果 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在各奇点处的留数之和为 0.

留数之和为 0

- 需要注意的是, 即便 ∞ 是可去奇点, 也不意味着 $\mathrm{Res}[f(z), \infty] = 0$.

定理

如果 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在各奇点处的留数之和为 0.

- 证明 设闭路 C 包含除 ∞ 外所有奇点 $z_1, \dots, z_n$,

- 需要注意的是, 即便 ∞ 是可去奇点, 也不意味着 $\operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0$.

定理

如果 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在各奇点处的留数之和为 0.

- 证明 设闭路 C 包含除 ∞ 外所有奇点 $z_1, \ldots, z_n$, 则由留数定理

$$-2\pi i \operatorname{Res}[f(z), \infty] = \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k].$$

留数之和为 0

- 需要注意的是, 即便 ∞ 是可去奇点, 也不意味着 $\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0$.

定理

如果 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点, 那么 $f(z)$ 在各奇点处的留数之和为 0.

- **证明** 设闭路 C 包含除 ∞ 外所有奇点 $z_1,\dots,z_n$, 则由留数定理

$$-2\pi i\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k].$$

- 故 $\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k]+\operatorname{Res}[f(z),\infty]=0.$ ■

- 例 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z^4-1}\,\mathrm{d}z.$

例题：留数的应用

- 例 求 $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}\,\mathrm{d}z$.
- 解 $f(z) = \frac{z^3}{z^4-1}$ 在 $|z|>2$ 内只有奇点 ∞.

- **例** 求 $\oint_{|z|=2} \dfrac{z^3}{z^4-1}\,\mathrm{d}z$.
- **解** $f(z)=\dfrac{z^3}{z^4-1}$ 在 $|z|>2$ 内只有奇点 ∞.

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(1-z^4)},0\right]=-1.$$

- 例 求 $\oint_{|z|=2} \frac{z^3}{z^4-1}\,\mathrm{d}z.$
- 解 $f(z) = \frac{z^3}{z^4-1}$ 在 $|z|>2$ 内只有奇点 ∞.

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty] = -\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right] = -\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(1-z^4)},0\right] = -1.$$

- 因此

$$\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^4-1}\,\mathrm{d}z = -2\pi i\mathrm{Res}[f(z),\infty] = 2\pi i. \quad \blacksquare$$

- 例 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z^4-1}\,\mathrm{d}z$.
- 解 $f(z)=\dfrac{z^3}{z^4-1}$ 在 $|z|>2$ 内只有奇点 ∞.

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]=-\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(1-z^4)},0\right]=-1.$$

- 因此

$$\oint_{|z|=2}\frac{z}{z^4-1}\,\mathrm{d}z=-2\pi i\mathrm{Res}[f(z),\infty]=2\pi i. \quad \blacksquare$$

- 练习 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^4}{z^5+1}\,\mathrm{d}z$.

例题: 留数的应用

- 例 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^3}{z^4-1}\,\mathrm{d}z$.
- 解 $f(z)=\dfrac{z^3}{z^4-1}$ 在 $|z|>2$ 内只有奇点 ∞.

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(1-z^4)},0\right]=-1.$$

- 因此

$$\oint_{|z|=2}\frac{z}{z^4-1}\,\mathrm{d}z=-2\pi i\operatorname{Res}[f(z),\infty]=2\pi i. \quad \blacksquare$$

- 练习 求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z^4}{z^5+1}\,\mathrm{d}z$. 答案 $2\pi i$.

例题：留数的应用

- 例 求 $\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$.

- 例 求 $\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$.
- 解 $f(z)$ 在 $|z|>2$ 内只有奇点 $3, \infty$.

例题：留数的应用

- 例 求 $\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$.
- 解 $f(z)$ 在 $|z|>2$ 内只有奇点 $3, \infty$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), \infty] &= -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}, 0\right] \\ &= -\operatorname{Res}\left[\frac{z^{10}}{(1+iz)^{10}(1-z)(1-3z)}, 0\right] = 0.\end{aligned}$$

例题: 留数的应用

- 例 求 $\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$.
- 解 $f(z)$ 在 $|z|>2$ 内只有奇点 $3,\infty$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),\infty] &= -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]\\ &= -\operatorname{Res}\left[\frac{z^{10}}{(1+iz)^{10}(1-z)(1-3z)},0\right]=0.\end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),3]=\lim_{z\to3}(z-3)f(z)=\frac{1}{2(3+i)^{10}}.$$

- 例 求 $\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$.
- 解 $f(z)$ 在 $|z|>2$ 内只有奇点 $3, \infty$.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),\infty] &= -\operatorname{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}, 0\right] \\ &= -\operatorname{Res}\left[\frac{z^{10}}{(1+iz)^{10}(1-z)(1-3z)}, 0\right] = 0.\end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),3] = \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \frac{1}{2(3+i)^{10}}.$$

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\big[\operatorname{Res}[f(z),-i] + \operatorname{Res}[f(z),1]\big]$$

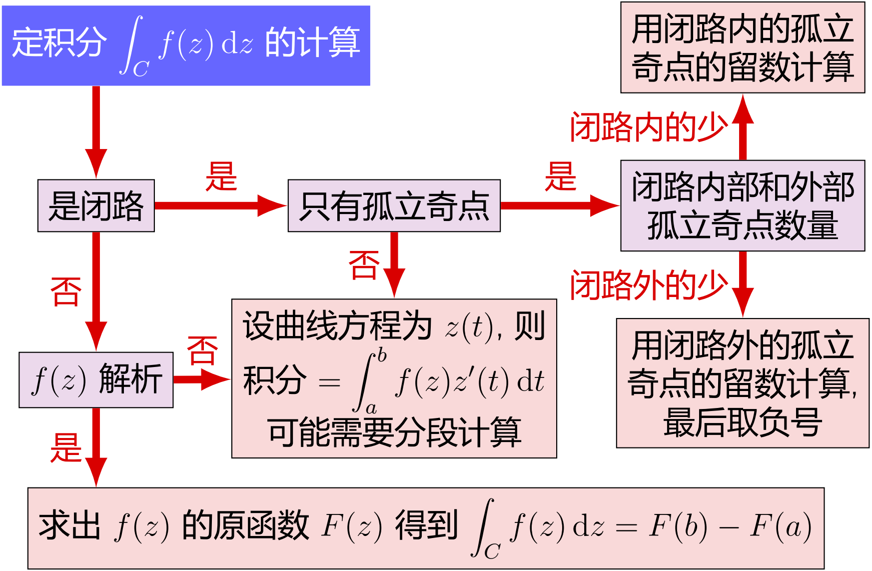
- 例 求 $\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$, 其中 $f(z)=\dfrac{1}{(z+i)^{10}(z-1)(z-3)}$.
- 解 $f(z)$ 在 $|z|>2$ 内只有奇点 $3,\infty$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),\infty]&=-\mathrm{Res}\left[f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2},0\right]\\&=-\mathrm{Res}\left[\frac{z^{10}}{(1+iz)^{10}(1-z)(1-3z)},0\right]=0.\end{aligned}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),3]=\lim_{z\to 3}(z-3)f(z)=\frac{1}{2(3+i)^{10}}.$$

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\big[\mathrm{Res}[f(z),-i]+\mathrm{Res}[f(z),1]\big]$$

$$=\ -2\pi i\big[\mathrm{Res}[f(z),3]+\mathrm{Res}[f(z),\infty]\big]=-\frac{\pi i}{(3+i)^{10}}.\quad\blacksquare$$


定积分 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ 的计算
是闭路
是
只有孤立奇点
是
闭路内部和外部孤立奇点数量
闭路内的少
用闭路内的孤立奇点的留数计算
闭路外的少
用闭路外的孤立奇点的留数计算，最后取负号
否
设曲线方程为 $z(t)$，则积分 $=\int_a^b f(z)z'(t)\,\mathrm{d}t$ 可能需要分段计算
否
$f(z)$ 解析
否
是
求出 $f(z)$ 的原函数 $F(z)$ 得到 $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = F(b)-F(a)$

1. 孤立奇点
2. 留数
3. 留数在定积分的应用

形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

- 本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算.

形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

- 本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算.
- 我们来考虑形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分, 其中 R 是一个有理函数.

形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

- 本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算.
- 我们来考虑形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分, 其中 R 是一个有理函数.
- 令 $z = e^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta$,

形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

- 本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算.
- 我们来考虑形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分, 其中 R 是一个有理函数.
- 令 $z = e^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta$,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2-1}{2iz},$$

形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

- 本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算.
- 我们来考虑形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分, 其中 R 是一个有理函数.
- 令 $z = e^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta$,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2-1}{2iz},$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z.$$

形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

- 本节中我们将对若干种在实变中难以计算的定积分和广义积分使用复变函数和留数的技巧进行计算.
- 我们来考虑形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分, 其中 R 是一个有理函数.
- 令 $z = e^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z = iz\,\mathrm{d}\theta$,

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \frac{z^2-1}{2iz},$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{1}{iz}\,\mathrm{d}z.$$

- 由于被积函数是一个有理函数, 它的积分可以由 $|z| < 1$ 内奇点留数得到.

例题: 第一类积分

- 例 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$

- 例 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
- 解 令 $z=e^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=iz\,\mathrm{d}\theta$,

- 例 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$
- 解 令 $z=e^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=iz\,\mathrm{d}\theta$,

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2+1}{2z},\quad \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2-1}{2iz},$$

- 例 求 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
- 解 令 $z=e^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z=iz\,\mathrm{d}\theta$,

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2+1}{2z},\quad \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2-1}{2iz},$$

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta&=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{-4z^2}\cdot\frac{1}{5-3\dfrac{z^2+1}{2z}}\frac{\mathrm{d}z}{iz}\\&=\oint_{|z|=1}\frac{-i(z^2-1)^2}{2z^2(3z^2-10z+3)}\,\mathrm{d}z\\&=-\frac{i}{6}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-3)(z-\frac{1}{3})}\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

例题：第一类积分

- 设 $f(z) = \dfrac{(z^2-1)^2}{z^2(z-3)(z-\frac{1}{3})}$,

例题：第一类积分

- 设 $f(z) = \dfrac{(z^2-1)^2}{z^2(z-3)(z-\frac{1}{3})}$, 则

$$\text{Res}[f(z), 0] = \frac{10}{3}, \quad \text{Res}[f(z), \frac{1}{3}] = -\frac{8}{3},$$

- 设 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)^2}{z^2(z-3)(z-\frac{1}{3})}$，则

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\frac{10}{3},\quad \mathrm{Res}[f(z),\frac{1}{3}]=-\frac{8}{3},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\theta}{5-3\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta=-\frac{i}{6}\cdot 2\pi i\Big[\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),\frac{1}{3}]\Big]$$
$$=\frac{2\pi}{9}.\quad \blacksquare$$

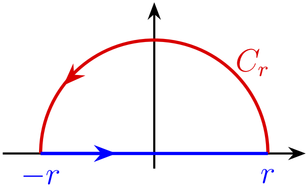
形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分

- 我们来考虑形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分, 其中 $R(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根.

形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分

- 我们来考虑形如 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分, 其中 $R(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根.
- 我们先考虑 $\displaystyle\int_{-r}^{r} R(x)\,\mathrm{d}x$.

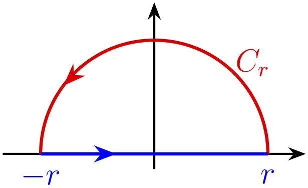
- 我们来考虑形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分, 其中 $R(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根.
- 我们先考虑 $\int_{-r}^{r} R(x)\,\mathrm{d}x$. 设 $f(z)=R(z), C=C_r+[-r,r]$ 如下图所示, 使得上半平面内 $f(z)$ 的奇点均在 C 内,



形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分

- 我们来考虑形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分, 其中 $R(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根.
- 我们先考虑 $\int_{-r}^{r} R(x)\,\mathrm{d}x$. 设 $f(z)=R(z), C=C_r+[-r,r]$ 如下图所示, 使得上半平面内 $f(z)$ 的奇点均在 C 内, 则

$$2\pi i\sum_{\operatorname{Im}a>0}\operatorname{Res}[f(z),a]=\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{-r}^{r}R(x)\,\mathrm{d}x+\int_{C_r}f(z)\,\mathrm{d}z.$$



形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分

- 由于 $P(x)$ 分母次数比分子至少高 2 次,

- 由于 $P(x)$ 分母次数比分子至少高 2 次, 当 $r \to +\infty$ 时,

$$\left|\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi r \max_{|z|=r} |f(z)| = \pi \max_{|z|=r} |zf(z)| \to 0.$$

- 由于 $P(x)$ 分母次数比分子至少高 2 次, 当 $r \to +\infty$ 时,

$$\left|\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi r \max_{|z|=r} |f(z)| = \pi \max_{|z|=r} |zf(z)| \to 0.$$

- 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, a>0} \mathrm{Res}[R(z), a].$$

- 例 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}, a>0.$

- 例 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}, a>0.$
- 解 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)^3}$ 在上半平面内的奇点为 ai.

- 例 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}, a>0.$
- 解 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)^3}$ 在上半平面内的奇点为 ai.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z),ai]&=\frac{1}{2!}\lim_{z\to ai}\left[\frac{1}{(z+ai)^3}\right]''\\&=\frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\frac{12}{(z+ai)^5}=\frac{3}{16a^5i},\end{aligned}$$

- 例 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3}, a > 0.$
- 解 $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^3}$ 在上半平面内的奇点为 ai.

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}[f(z), ai] &= \frac{1}{2!} \lim_{z \to ai} \left[\frac{1}{(z+ai)^3}\right]'' \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \to ai} \frac{12}{(z+ai)^5} = \frac{3}{16a^5 i},\end{aligned}$$

- 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), ai] = \frac{3\pi}{8a^5}. \quad \blacksquare$$

- 我们来考虑形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$, $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$ 的积分, 其中 $R(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根.

形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$ 的积分

- 我们来考虑形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x,\ \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x$ 的积分, 其中 $R(x)$ 是一个有理函数, 分母比分子至少高 2 次, 且分母没有实根.
- 和前一种情形类似, 我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos\lambda x\,\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left[2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,a>0} \mathrm{Res}[R(z)e^{i\lambda z}, a]\right],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left[2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,a>0} \mathrm{Res}[R(z)e^{i\lambda z}, a]\right].$$

例题: 第三类积分

- 例 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, a > 0.$

例题: 第三类积分

- 例 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, a>0.$
- 解 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}$ 在上半平面内的奇点为 ai,

- 例 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, a>0.$
- 解 $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}$ 在上半平面内的奇点为 ai,

$$\mathrm{Res}[f(z),ai]=\lim_{z\to ai}\left[\frac{e^{iz}}{(z+ai)^2}\right]'=-\frac{e^{-a}(a+1)i}{4a^3}.$$

- 例 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, a > 0.$
- 解 $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}$ 在上半平面内的奇点为 ai,

$$\operatorname{Res}[f(z), ai] = \lim_{z \to ai} \left[\frac{e^{iz}}{(z+ai)^2} \right]' = -\frac{e^{-a}(a+1)i}{4a^3}.$$

- 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} \, \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), ai] = \frac{\pi e^{-a}(a+1)}{2a^3},$$

例题: 第三类积分

- 例 求 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}, a > 0.$
- 解 $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}$ 在上半平面内的奇点为 ai,

$$\operatorname{Res}[f(z), ai] = \lim_{z \to ai} \left[\frac{e^{iz}}{(z+ai)^2}\right]' = -\frac{e^{-a}(a+1)i}{4a^3}.$$

- 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), ai] = \frac{\pi e^{-a}(a+1)}{2a^3},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi e^{-a}(a+1)}{2a^3}. \quad \blacksquare$$