线性代数

张神星 (合肥工业大学)
办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东
Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn
课件地址: https://zhangshenxing.github.io

第二章　矩阵及其运算

1. 矩阵的运算：线性运算和乘法
2. 矩阵的运算：转置、行列式和伴随

第一节　矩阵的运算：线性运算和乘法

- 矩阵的概念
- 矩阵的线性运算
- 矩阵的乘法
- 矩阵的幂

矩阵记号

我们已经在上一章知道了什么是矩阵和方阵, 并介绍了一些特殊形状的方阵. 分别用记号

- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 表示 m 行 n 列实矩阵, 即元素都是实数的矩阵;
- $M_n(\mathbb{R})$ 表示 n 阶实方阵;
- $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ 表示 m 行 n 列复矩阵;
- $M_n(\mathbb{C})$ 表示 n 阶复方阵.

不强调在系数是实数还是复数时, 就简单记作 $M_{m\times n}, M_n$.

方阵中

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n$$

分别为上三角矩阵, 下三角矩阵和对角矩阵. 对角矩阵也可记作

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

$$\mathbf{E}_n = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1) \in M_n$$

为单位矩阵.

元素全为零的矩阵为零矩阵 $\mathbf{O} \in M_{m\times n}$. 只有一行的矩阵

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in M_{1\times n}$$

称为 n 维行矩阵或行向量. 只有一行的矩阵

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}$$

称为 n 维列矩阵或列向量. 为了书写方便, 可以把列向量写成

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n)^{\mathrm{T}}.$$

如果两个矩阵的行列数都相同, 称之为同型矩阵.

定义

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 为同型矩阵. 定义

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵的加法满足通常数的加法的几条规律:

(1) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

(2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;

(3) $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$.

加法和行列式不交换

注意两个方阵的和的行列式 $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$ 一般不等于各自行列式的和 $|\mathbf{A}|+|\mathbf{B}|$.

例

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$, $|\mathbf{A}|=2, |\mathbf{B}|=1$. 计算 $|\mathbf{A}+\mathbf{B}|$.

解

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}| = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & 2c_1 & 2d_1 \\ a_2+b_2 & 2c_2 & 2d_2 \\ a_3+b_3 & 2c_3 & 2d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 2c_1 & 2d_1 \\ a_2 & 2c_2 & 2d_2 \\ a_3 & 2c_3 & 2d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & 2c_1 & 2d_1 \\ b_2 & 2c_2 & 2d_2 \\ b_3 & 2c_3 & 2d_3 \end{vmatrix}$$

$$= 4|\mathbf{A}| + 4|\mathbf{B}| = 12.$$

定义

数 λ 和矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 的数乘定义为

$$\lambda\mathbf{A} = (\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

数乘矩阵满足:

(1) $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A}) = \mu(\lambda\mathbf{A})$;

(2) $(\lambda+\mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$;

(3) $\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$;

(4) $1\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}, 0\cdot\mathbf{A} = \mathbf{O}, \lambda\mathbf{O} = \mathbf{O}$.

-1 与 $\mathbf{A}$ 的数乘称为 $\mathbf{A}$ 的负矩阵

$$-\mathbf{A} = (-a_{ij})_{m\times n}.$$

那么矩阵的减法就是

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}.$$

想一想: $|\lambda\mathbf{A}| = \lambda|\mathbf{A}|$? × 如果 $\mathbf{A} \in M_n$, 则 $|\lambda\mathbf{A}| = \lambda^n|\mathbf{A}|$.

矩阵线性运算的应用：图像处理

一张图片由一些像素构成，上图包含 512×341 个像素．在 RGB 颜色模式下，每个像素包含红绿蓝三个通道，每个通道为一个 $0 \sim 255$ 之间的数，数值越高对应颜色越饱满．如果三个通道相同，图片就是一张灰色的图 (无色彩)．此时图片对应一个 512×341 的矩阵 $\mathbf{A}$.

想一想：如何将这个图像变亮？

矩阵线性运算的应用：图像处理

$$\Longrightarrow$$

我们只需要增加每个分量的值，例如

$$\mathbf{A}+\begin{pmatrix} 50 & 50 & \cdots & 50 \\ 50 & 50 & \cdots & 50 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 50 & 50 & \cdots & 50 \end{pmatrix}, \qquad 1.5\mathbf{A}.$$

如何让图像反色?

$\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 255 & 255 & \cdots & 255 \\ 255 & 255 & \cdots & 255 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 255 & 255 & \cdots & 255 \end{pmatrix} - \mathbf{A}.$$

设 n 个变量 $x_1, \ldots, x_n$ 和 m 变量 $y_1, \ldots, y_m$ 满足关系:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad\qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}.$$

它的系数形成了一个矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

如果这些变量均取实数, 我们用 $\mathbb{R}^n$ 表示 n 个实数形成的数组. 那么上述关系定义了映射

$$\mathscr{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m.$$

这样的由线性关系给出的映射被称为线性变换.

如何用矩阵表示平面上的旋转？设 $A(x_1,x_2)$ 是平面上的一个点，沿着原点逆时针旋转角度 θ 变成 $B(y_1,y_2)$. 利用极坐标将 A 表示为

$$\begin{cases} x_1 = \rho\cos\alpha, \\ x_2 = \rho\sin\alpha, \end{cases}$$

那么

$$\begin{cases} y_1 = \rho\cos(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) = (\cos\theta)x_1 - (\sin\theta)x_2, \\ y_2 = \rho\sin(\alpha+\theta) = \rho(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta) = (\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_2. \end{cases}$$

因此上述旋转变换 $\mathscr{A}$ 对应的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

给定两个矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{B} = (b_{ij})_{n\times p}$, 其中 $\mathbf{A}$ 的列数和 $\mathbf{B}$ 的行数相等. 那么它们对应两个映射

$$\mathscr{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \mathscr{B} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n.$$

它们的复合

$$\mathscr{A} \circ \mathscr{B} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

是否还是一个线性变换呢? 如果是, 对应的矩阵是什么?

设 $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, 那么

$$y=(y_1,\ldots,y_n)=\mathscr{B}(x)\in\mathbb{R}^n \qquad \text{满足} \qquad y_k=\sum_{j=1}^{p} b_{kj}x_j.$$

$$z=(z_1,\ldots,z_m)=\mathscr{A}(y)\in\mathbb{R}^n$$

满足

$$z_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_k=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{j=1}^{p} b_{kj}x_j=\sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\Big)x_j.$$

所以 $\mathscr{A}\circ\mathscr{B}$ 是线性变换, 且对应的矩阵为

$$\mathbf{C}=(c_{ij})_{m\times p}, \qquad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

我们把它定义为矩阵的乘法 $\mathbf{C}=\mathbf{AB}$.

定义

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}, \mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. 定义矩阵的乘法为 $\mathbf{C}=\mathbf{AB}=(c_{ij})_{m\times p}$, 其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

只有第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数才能相乘.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = ? \times .$$

行向量与列向量的乘法

设 $\mathbf{A}=(a_1,\ldots,a_n)$ 是 n 为行向量, $\mathbf{B}=(b_1,\ldots,b_n)^{\mathrm{T}}$ 是 n 维列向量.
$\mathbf{AB},\mathbf{BA}=?$

$$\mathbf{AB}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i,\qquad \mathbf{BA}=(b_ia_j)_{n\times n}\in M_n.$$

对于矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n},\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times p}$. $\mathbf{AB}$ 的 (i,j) 元其实就是 $\mathbf{A}$ 第 i 行对应的行向量和 $\mathbf{B}$ 第 j 列对应的列向量相乘得到的数 (1 阶方阵).

例

求矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ 的乘积 $\mathbf{AB}$.

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 6 & 23 & 3 \end{pmatrix}.$$

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

的系数矩阵为 $\mathbf{A}$. 如果我们令

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1},$$

那么上述方程等价于矩阵方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. 对应的齐次方程为 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

矩阵乘法满足如下性质:

(1) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(2) $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$;

(3) $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$;

(4) 如果 $\mathbf{A} \in M_{m\times n}$, 则 $\mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}$.

(5) 如果 $\mathbf{A} \in M_{m\times n}$, 则 $\mathbf{O}_{p\times m}\mathbf{A} = \mathbf{O}_{p\times n}$, $\mathbf{A}\mathbf{O}_{n\times p} = \mathbf{O}_{m\times p}$.

矩阵的乘法不能随意交换顺序. 一般称 $\mathbf{AB}$ 为 $\mathbf{A}$ 左乘 $\mathbf{B}$, 或者 $\mathbf{B}$ 右乘 $\mathbf{A}$. 如果 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, 则称 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 是可交换的. 此时 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 必为同阶方阵. 例如

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 5\\0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}$$

矩阵乘法也没有消去律: $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ 推不出 $\mathbf{A}=\mathbf{O}$ 或 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$. 例如

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix}=\mathbf{O}_2.$$

由此可知: $\mathbf{AC}=\mathbf{BC}$ 推不出 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

练习

设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为 $n>1$ 阶方阵, 则 $\mathbf{A}+\mathbf{AB}=$(C)

(A) $\mathbf{A}(1+\mathbf{B})$ (B) $(\mathbf{E}+\mathbf{B})\mathbf{A}$ (C) $\mathbf{A}(\mathbf{E}+\mathbf{B})$ (D) 以上都不对

例

求与矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

解

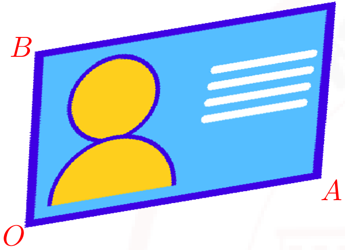
设 $\mathbf{B} = (a_{ij})_{3\times 3}$ 与 $\mathbf{A}$ 可交换，则

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0, \quad a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{23} = a_{12},$$

即 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{11} & a_{12} \\ & & a_{11} \end{pmatrix}$.

某位同学拍身份证照片拍成了下图的样子，如何能否修复好呢？



以左下角为原点，通过测量发现 A 坐标为 $(463, 88)$，B 坐标为 $(17, 311)$.

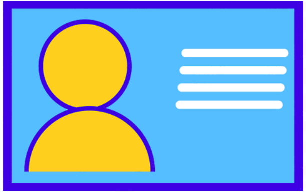
经过查询知道身份证长宽比为 $85.6 : 54$. 令 $A' = (427, 0), B' = (270, 0)$. 我们希望找到一个线性变换，将 A, B 变为 A', B'.

矩阵乘法的应用：图像校正

设该线性变换对应的矩阵为 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，那么

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 463 & 17 \\ 88 & 311 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 427 & 0 \\ 0 & 270 \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} 463a + 88b = 427 \\ 17a + 311b = 0 \\ 463c + 88d = 0 \\ 17c + 311d = 270 \end{cases}.$$

解得 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.932 & -0.051 \\ -0.167 & 0.877 \end{pmatrix}$.



定义

设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，定义 $\mathbf{A}$ 的幂

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}_n, \quad \mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdot\cdots\cdot\mathbf{A}}_{k\ \text{个}}.$$

矩阵幂满足如下性质 (k, ℓ 为正整数):

(1) $\mathbf{A}^{k+\ell} = \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A}^\ell$;

(2) $\mathbf{A}^{k\ell} = (\mathbf{A}^k)^\ell$.

注意 $(\mathbf{AB})^k$ 一般不等于 $\mathbf{A}^k \cdot \mathbf{B}^k$. 想一想下面的等式成立吗?

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2?$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2?$$

例

设 $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. 求 $\mathbf{A}^k$.

解

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \cdots, \lambda_n^2),$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1^3, \cdots, \lambda_n^3),$$

递推下去可知

$$\mathbf{A}^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k).$$

例

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}$. 求 $\mathbf{A}^k$.

解

$$\mathbf{A}^2=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ & \lambda & 1\\ & & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ & \lambda^2 & 2\lambda\\ & & \lambda^2\end{pmatrix}.$$

续解

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ & \lambda^2 & 2\lambda \\ & & \lambda^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ & & \lambda^3 \end{pmatrix}.$$

归纳可知

$$\mathbf{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ & & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

另解

设 $\mathbf{N}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ & 0 & 1\\ & & 0\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{N}^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}$，$\mathbf{N}^3=\mathbf{O}$. 由于 $\mathbf{A}=\lambda\mathbf{E}+\mathbf{N}$ 且 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{N}$ 可交换，因此

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k &= \lambda^k\mathbf{E}+\mathrm{C}_k^1\lambda^{k-1}\mathbf{N}+\mathrm{C}_k^2\lambda^{k-2}\mathbf{N}^2\\ &= \begin{pmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dfrac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ & & \lambda^k\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. 求 $\mathbf{A}^k$.

解

注意到 $\mathbf{A}$ 对应平面 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换是逆时针旋转 θ, 所以 $\mathbf{A}^k$ 就是逆时针旋转 $n\theta$, 对应的矩阵为

$$\mathbf{A}^k=\begin{pmatrix}\cos k\theta & -\sin k\theta\\ \sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}.$$

例

设 $\mathbf{A}=(1,2,3), \mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\end{pmatrix}$. 求 $(\mathbf{BA})^k$.

解

注意到 $\mathbf{AB}=3$, 因此

$$(\mathbf{BA})^k=\mathbf{B}(\mathbf{AB})^{k-1}\mathbf{A}=\mathbf{B}\cdots 3^{k-1}\cdot\mathbf{A}=3^{k-1}\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}-3^{k-1} & -2\cdot 3^{k-1} & -3^k\\ 2\cdot 3^{k-1} & 4\cdot 3^{k-1} & 2\cdot 3^k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

练习

设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. 求 $\mathbf{A}^k$.

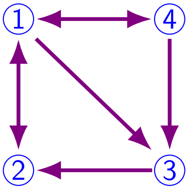
答案

注意到 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1, 2, 3)$, 因此 $\mathbf{A}^k = 14^{k-1}\mathbf{A}$.

想一想：$\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$ 能推出 $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ 或 $-\mathbf{E}$ 吗？

矩阵幂的应用：换乘

网上订票系统里记录了所有能直飞的航班线路. 对于不能直达的城市, 该怎么确定是否有换乘方案呢? 例如 4 个城市之间的航线如图所示:



$$\Longleftrightarrow \text{邻接矩阵 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

邻接矩阵中 $a_{ij} = 1$ 表示从 i 到 j 有直飞航线.

那么 $\mathbf{A}^2$ 的 (i,j) 元

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{4} a_{ik}a_{kj}$$

就是从 i 到 j 换乘一次的方案数. 例如从①$\Longrightarrow$③:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 $b_{23} = 1$, 因此可通过②$\Longrightarrow$①$\Longrightarrow$③换乘一次到达.

想一想: 如何从③到达④?

第二节　矩阵的运算：转置、行列式和伴随

- 矩阵的转置
- 方阵的行列式
- 方阵的伴随矩阵

上一章我们已经说过, 如果 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 称

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置, 它是 $n\times m$ 矩阵. 例如行向量的转置是列向量, 方阵的转置还是方阵, 上三角阵的转置是下三角阵. 矩阵的转置满足如下性质:

(1) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$;

(2) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\lambda\mathbf{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

例如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

两边取转置得到

$$(b_1, b_2, b_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = (c_1, c_2, c_3).$$

例

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$, 求 $|\mathbf{A}|$.

这题当然可以直接硬算，不过我们可以利用一点小技巧:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{pmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)\mathbf{E}.$$

定义

- 如果方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$, 称 $\mathbf{A}$ 为对称阵;
- 如果 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$, 称 $\mathbf{A}$ 为反对称阵.

例如 $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ 是对称阵. 对角矩阵都是对称阵.

例如 $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是反对称阵. 反对称阵的对角线均为 0.

例

证明：如果 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{AB}$ 都是对称阵，则 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

证明

由题设可知 $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}, \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}$,

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{BA}.$$

□

想一想：如果 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{AB}$ 中有一个对称阵和两个反对称阵呢？

练习

设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵，(A) 一定是对称阵？

(A) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$　(B) $\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$　(C) $\mathbf{A}^2$　(D) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}$

一般地，如果 $\mathbf{A} \in M_{m\times n}$, $\mathbf{AA}^{\mathrm{T}}$ 是 m 阶对称阵，$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ 是 n 阶对称阵.

例

证明：任一方阵均可写成一对称阵和一反对称阵之和.

证明

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2} + \frac{\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}}{2}.$$

□

想一想：如果函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，那么 $f(x)$ 一定可以表示成一个偶函数和一个奇函数之和.

方阵的行列式我们已在上一章详细研究过. 如果方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}|=0$, 称 $\mathbf{A}$ 为退化矩阵, 否则称为非退化矩阵. 行列式满足如下性质:

(1) $|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|=|\mathbf{A}|$;

(2) $|\lambda\mathbf{A}|=\lambda^n|\mathbf{A}|$, 其中 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵;

(3) $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|=|\mathbf{BA}|$.

行列式与乘法交换

我们来证明 $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{B} = (b_{ij})$,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & & & b_{11} & \cdots & b_{nn} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|.$$

经过变换 $c_{n+j} + b_{1j}c_1 + \cdots + b_{nj}, j = 1, \ldots, n$ 得到 $D = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{O} \end{vmatrix}$, 其中 $\mathbf{C} = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{ik}$. 换言之 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. 再进行变换 $r_i \leftrightarrow r_{n+j}, j = 1, \ldots, n$ 得到

$$D = (-1)^n \begin{vmatrix} -\mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{vmatrix} = (-1)^n|-\mathbf{E}|\cdot|\mathbf{C}| = |\mathbf{C}| = |\mathbf{AB}|.$$

练习

设 $\mathbf{A}$ 为 5 阶方阵, $|\mathbf{A}|=-1$, 则 $|2\mathbf{A}|=\underline{\ -32\ }$, $||\mathbf{A}|\mathbf{A}|=\underline{\ \ 1\ \ }$.

练习

设 $\alpha=(1,0,-1)$, $\mathbf{A}=\alpha^{\mathrm{T}}\alpha$, 则 $|5\mathbf{E}-\mathbf{A}^3|=\underline{\ -75\ }$.

练习

$$\begin{vmatrix} 2\sin a\cos a & \sin a\cos b+\cos a\sin b & \sin a\cos c+\cos a\sin c \\ \sin b\cos a+\cos b\sin a & 2\sin b\cos b & \sin b\cos c+\cos b\sin c \\ \sin c\cos a+\cos c\sin a & \sin c\cos b+\cos c\sin b & 2\sin c\cos c \end{vmatrix}=\underline{\ \ 0\ \ }.$$

答案

注意到

$$\begin{pmatrix} 2\sin a\cos a & \sin a\cos b+\cos a\sin b & \sin a\cos c+\cos a\sin c \\ \sin b\cos a+\cos b\sin a & 2\sin b\cos b & \sin b\cos c+\cos b\sin c \\ \sin c\cos a+\cos c\sin a & \sin c\cos b+\cos c\sin b & 2\sin c\cos c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin a & \cos a & 0 \\ \sin b & \cos b & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

设 $\mathbf{A} \in M_{m\times n}, \mathbf{B} \in M_{n\times m}$. 如果 $m > n$, 那么

$$|\mathbf{AB}| = \left| (\mathbf{A}, \mathbf{O}_{m\times(m-n)}) \begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{O}_{(m-n)\times m} \end{pmatrix} \right| = 0 = |\mathbf{BA}|.$$

定义

设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n\times n}$. 由 $\mathbf{A}$ 的代数余子式形成的矩阵

$$\mathbf{A}^* = (A_{ji}) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{21} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{21} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵.

注意，伴随矩阵的 (i,j) 元是代数余子式 A_{ji} 而不是 A_{ij}.

例

如果 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，那么 $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

伴随矩阵满足如下重要性质:

(1) $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A} = |\mathbf{A}|E_n.$

这是因为

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{21} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{21} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

的 (i,j) 元是

$$a_{i1}A_{j1} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

(2) $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$.
(3) $(k\mathbf{A})^* = k^{n-1}\mathbf{A}^*$.

如果 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$, 显然 $\mathbf{A}^* = \mathbf{O}$. 如果 $|\mathbf{A}| = 0$ 但 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, 那么

$$\mathbf{A}^* \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \mathbf{O}_{n\times 1}.$$

所以以 $\mathbf{A}^*$ 为系数的齐次线性方程组有非零解, 从而 $|\mathbf{A}^*| = 0$.
如果 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 由 $|\mathbf{A}^*| \cdot |\mathbf{A}| = ||\mathbf{A}|\mathbf{E}_n| = |\mathbf{A}|^n$ 可得.