第一章　复变函数

本章中我们将学习复数和复变函数的基本概念, 以及复数列和复变函数的极限. 我们将从解一元三次方程问题出发, 逐步展示引入复数的必要性. 然后介绍复数的运算规则, 并展示复数的三角形式和指数形式在运算中所起的关键作用. 最后, 我们仿照实数情形引入复变函数、复数列以及极限的概念, 并讨论它们与实数情形的联系.

1.1　复数及其代数运算

1.1.1　复数的产生

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=b^2-4c.$$

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;

(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;①

(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.

可以看出, 当我们考虑在实数范围内解一元二次方程时, 可以直接舍去包含负数开平方的解. 这样不会影响我们得到方程的实数解. 然而在一元三次方程中, 即便只考虑实数解也会不可避免地引入负数开平方.

例 1.1 解方程 $x^3+6x-20=0$.

---

① 若 x_0 是多项式方程 $f(x)=0$ 的根, 则 $x-x_0$ 是 $f(x)$ 的因式, 即存在多项式 $g(x)$ 使得 $f(x)=(x-x_0)g(x)$. 若 $(x-x_0)^k$ 是 $f(x)$ 的因式, 但 $(x-x_0)^{k+1}$ 不是, 则称 x_0 是 $f(x)$ 或该方程的 k **重根**. 在定义 **??** 中我们将会定义一般函数零点的重数.

我们将使用由费罗最先发现, 并由卡尔达诺最先公开的解法.①②

解: 设 $x = u + v$, 则

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + 6(u+v) - 20 = 0.$$

我们希望

$$u^3 + v^3 = 20, \qquad uv = -2,$$

则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 - 20X - 8 = 0$. 解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3.$$

所以

$$u = 1 \pm \sqrt{3}, \quad v = 1 \mp \sqrt{3}, \quad x = u + v = 2.$$

这个方程是不是真的只有 $x = 2$ 这一个实数解呢? 由方程左侧多项式导数为 $3x^2 + 6 > 0$ 可知其单调递增, 因此确实只有这一个实数解.

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

---

① 费罗发现了该方法后, 并没有发表他的结果, 因为当时人们常把他们的发现保密, 而向对手们提出挑战. 参考 [**?**, 第 13 章 4 节].

② A footnote goes here in the footer and should stretch right across the page to include the right margin.

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

啊

1.1.2 区域和闭区域

为了避免混淆集合中的分割符号和复数的模, 此处用 : 而不是 | 作为集合的分割符号.

为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域. 类比高等数学中的邻域和去心邻域, 在复平面中, 称开圆盘

$$U(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个 δ **邻域**, 称去心开圆盘

$$\overset{\circ}{U}(z_0,\delta)=\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个**去心 δ 邻域**.

设 G 是复平面的一个子集, $z_0\in\mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

(1) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个**内点**.

(2) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个**外点**.

(3) 若对于 z_0 的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个**边界点**.

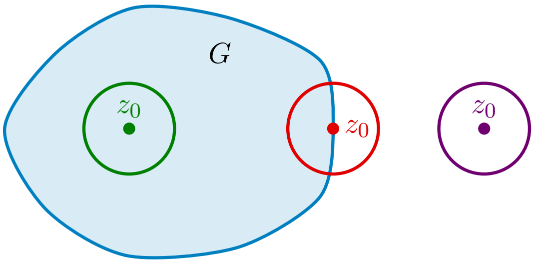

图 1.1 点与集合的位置关系

显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能. 这可类比于区间的端点和区间的关系.

定义 1.1

(1) 若 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个**开集**.

(2) 若 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个**闭集**.

注意 $\arg z$ 的不等式不包括原点.

例如

$$|z-z_0|<R,\quad 1<\operatorname{Re} z<3,\quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都给出开集. 集合 G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集. 直观上看, 由 $>, <$ 的不等式给出的集合往往是开集, 由 $\geqslant, \leqslant$ 的不等式给出的集合往往是闭集.①

若集合 G 是某个开圆盘 $U(0, R)$ 的子集, 则称它是**有界**的. 否则称它是**无界**的.

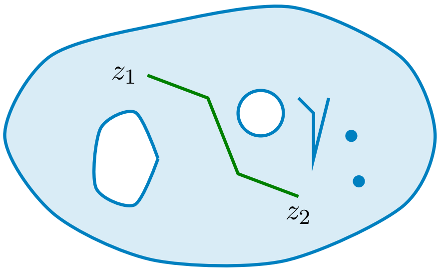

图 1.2 区域和它的边界

定义 1.2

若开集 D 的任意两个点都可以用一条完全包含在 D 中的折线段连接起来, 则称 D 是一个**区域**.

对于区域 D 内的任意两点 z_1, z_2, 可以在 D 中画一条从 z_1 到 z_2 的折线段. 换言之, 区域是 “连通” 的开集.② 区域和它的边界的并集叫作**闭区域**③, 记作 $\overline{D}$. 它是一个闭集.

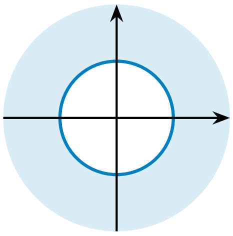

图 1.3 区域 $|z| > 1$

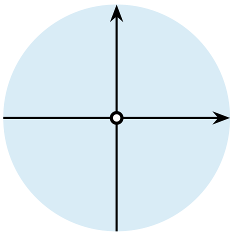

图 1.4 区域 $z \neq 0$

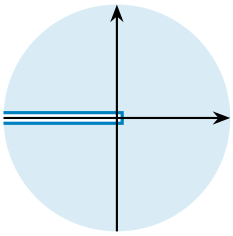

图 1.5 带割痕的复平面

---

① 当不等式中的函数都是连续函数时, 由 $>, <$ 的不等式给出的集合是开集, 否则未必成立. 连续函数的定义见定义 **??**. 例如 $\arg z > \dfrac{\pi}{2}$ 包含了负实轴, 它既不是开集也不是闭集, 因为 $\arg z$ 在负实轴上不连续. 例如 $\left|\dfrac{1}{z}\right| \geqslant 1$ 表示的不是闭集, 因为它等价于 $0 < |z| \leqslant 1$.

② 该定义中的折线段可以换成连续曲线段. 它也等价于开集 D 不能写成 $D_1 \cup D_2$, 其中 D_1, D_2 是两个非空开集且 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, 即 D 不能拆成多个 “独立” 的开集.

③ 也叫**闭域**.