

# 复变函数与积分变换

张神星

合肥工业大学

2022 年秋季学期

## 第二章 解析函数

# 本章作业

- 2, 3, 4
- 6, 8, 11
- 12, 15, 18

### 1 解析函数的概念

### 2 函数解析的充要条件

### 3 初等函数

# 复变函数的导数

由于  $\mathbb{C}$  是一个域, 我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

## 定义

设  $w = f(z)$  的定义域是区域  $D$ ,  $z_0 \in D$ . 如果极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  可导. 这个极限值称为  $f(z)$  在  $z_0$  的导数, 记作

$$f'(z_0) = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果  $f(z)$  在区域  $D$  内处处可导, 称  $f(z)$  在  $D$  内可导.


## 典型例题: 线性函数的不可导性

例

函数  $f(z) = x + 2yi$  在哪些点处可导?

解.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}. \end{aligned}$$

当  $\Delta x = 0$  时, 上述极限为 2; 当  $\Delta y = 0$  时, 上述极限为 1. 因此该极限不存在,  $f(z)$  处处不可导. 

若将  $f(z)$  视为二元实变量的函数, 则该函数在不同方向的方向导数不同.

## 例题: 复变函数的导数

### 练习

函数  $f(z) = x - yi$  在哪些点处可导?

答案.

处处不可导.

### 例

求  $f(z) = z^2$  的导数.

解.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z. \end{aligned}$$

和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:

## 定理

- $(c)' = 0$ , 其中  $c$  为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$ , 其中  $n$  为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$ ,  $(cf)' = cf'$ ;
- $(fg)' = f'g + fg'$ ,  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ ;
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z)$ ;
- $f'(z) = \frac{1}{(f^{-1})'(w)}, w = f(z)$ .



## 定理

若  $f(z)$  在  $z_0$  可导, 则  $f(z)$  在  $z_0$  连续.

## 证明.

该定理的证明和实变量情形完全相同. 设

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0),$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta z \\ &= f'(z_0) \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$



复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

## 定义

如果存在常数  $A$  使得函数  $w = f(z)$  满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

其中  $o(\Delta z)$  表示  $\Delta z$  的高阶无穷小量, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  处可微, 称  $A\Delta z$  为  $f(z)$  在  $z_0$  的微分, 记作  $dw = A\Delta z$ .

和一元实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且  $dw = f'(z_0)\Delta z$ ,  $dz = \Delta z$ . 故  $dw = f'(z_0) dz$ ,  $f'(z_0) = \frac{dw}{dz}$ .

## 定义

- 若函数  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 则称  $f(z)$  在  $z_0$  解析.
- 若  $f(z)$  在区域  $D$  内处处解析, 则称  $f(z)$  在  $D$  内解析, 或称  $f(z)$  是  $D$  内的一个解析函数(也叫全纯函数或正则函数).
- 若  $f(z)$  在  $z_0$  不解析, 则称  $z_0$  为  $f(z)$  的一个奇点.

由于区域  $D$  是一个开集, 其中的任意  $z_0 \in D$  均存在一个包含在  $D$  的邻域. 所以  $f(z)$  在  $D$  内解析和在  $D$  内可导是等价的. 如果  $f(z)$  在  $z_0$  解析, 则  $f(z)$  在  $z_0$  的一个邻域内处处可导, 从而在该邻域内解析. 因此  $f(z)$  解析点全体是一个开集.

## 例

研究函数  $f(z) = |z|^2$  的解析性.

解.

由于

$$\begin{aligned}\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} \\ &= \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\Delta x - \Delta y i}{\Delta x + \Delta y i},\end{aligned}$$

若  $z = 0$ , 则当  $\Delta z \rightarrow 0$  时该极限为 0.

若  $z \neq 0$ , 则当  $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$  时该极限为  $\bar{z} + z$ ; 当  $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$  时该极限为  $\bar{z} - z$ . 因此此时极限不存在.

故  $f(z)$  仅在  $z = 0$  处可导, 从而处处不解析.

### 1 解析函数的概念

### 2 函数解析的充要条件

### 3 初等函数

从上一节的例子中观察到: 解析函数往往可以直接表达为  $z$  的函数的形式, 而不解析的往往包含  $x, y, \bar{z}$  之类的内容. 这种直观印象实际上是有道理的.

我们知道, 给一个复变函数  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  等价于给两个二元实变函数. 我们将从  $u, v$  的偏导数来推导出  $f$  可导的充要条件.

为了简便我们用  $u_x, u_y, v_x, v_y$  等记号表示偏导数.  
设  $f$  在  $z$  处可导,  $f'(z) = a + bi$ , 则

$$\Delta u + i\Delta v = \Delta f = (a + bi)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

展开可知

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + o(\Delta z),$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + o(\Delta z).$$

由于  $o(\Delta z) = o(|\Delta z|) = o(\sqrt{x^2 + y^2})$ , 因此  $u, v$  可微且

$$du = a dx - b dy, \quad dv = b dx + a dy.$$

故  $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$ .

反过来, 假设  $u, v$  可微且  $u_x = v_y, u_y = -v_x$ . 由全微分公式

$$du = u_x dx + u_y dy = u_x dx - v_x dy,$$

$$dv = v_x dx + v_y dy = v_x dx + u_x dy,$$

$$\begin{aligned} df &= d(u + iv) = (u_x + iv_x) dx + (-v_x + iu_x) dy \\ &= (u_x + iv_x) d(x + iy) \\ &= (u_x + iv_x) dz = (v_y - iu_y) dz. \end{aligned}$$

故  $f(z)$  在  $z$  处可导, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$



# 可导的等价刻画: 柯西-黎曼方程

## 定理

函数  $f(z)$  在  $z$  可导当且仅当在  $z$  点  $u, v$  可微且满足柯西-黎曼方程 (C-R 方程)

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$



具体计算时, 我们先判断  $f(z)$  的  $u, v$  的偏导数是否存在. 然后把偏导数按次序依次写出

$$u_x = \cdots, \quad u_y = \cdots$$

$$v_x = \cdots, \quad v_y = \cdots$$

列出 C-R 方程, 求出所有的可导点.

如果一个点的一个邻域内都可导, 那么这个点是解析点. 如果一个区域  $D$  内所有点都可导, 那么区域  $D$  是解析区域.

当然, 如果能用求导法则直接说明  $f(z)$  在  $D$  内处处可导, 则也可以知道  $f(z)$  是  $D$  内的解析函数.

## 柯西-黎曼方程的极坐标形式 \*

设  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 则

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta, \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \sin \theta, \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cos \theta.$$

因此

$$u_r = u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \quad u_\theta = r(-u_x \sin \theta + u_y \cos \theta).$$

将 C-R 方程代入后, 我们可以得到 C-R 方程的极坐标形式:

$$ru_r = v_\theta, \quad rv_r = -u_\theta.$$

且

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = \frac{v_\theta - iu_\theta}{z}.$$

设  $w = f(z) = \rho e^{i\varphi}$ , 则类似可得 C-R 方程

$$\rho_r = \frac{\rho\varphi_\theta}{r}, \quad \varphi_r = -\frac{\rho_\theta}{\rho r}.$$

此时

$$f'(z) = \frac{w}{z}(\varphi_\theta + ir\varphi_r) = \frac{w}{z\rho}(r\rho_r - i\rho_\theta).$$

## 柯西-黎曼方程的 $z, \bar{z}$ 形式 \*

如果把复变函数  $f$  写成

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = f\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right),$$

把  $z, \bar{z}$  看作独立变量,  $f$  分别对  $z$  和  $\bar{z}$  的偏导数可定义为

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

那么 C-R 方程等价于

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (u_x - v_y) + i(v_x + u_y) = 0.$$

所以我們也可以把  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$  叫做 C-R 方程.

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

函数  $f(z) = \bar{z}$  在何处可导, 在何处解析?

解.

由  $u = x, v = -y$  可知

$$\begin{aligned}u_x &= 1, & u_y &= 0, \\v_x &= 0, & v_y &= -1.\end{aligned}$$

因为  $u_x = 1 \neq v_y = -1$ , 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

也可以从  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0$  看出.

不过这种方法由于课本上没有, 所以考试的时候最好只把它作为一种验算手段.

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

函数  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  在何处可导, 在何处解析?

解.

由  $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$  可知

$$\begin{aligned}u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\v_x &= y, & v_y &= x.\end{aligned}$$

由  $2x = x, 0 = -y$  可知只有  $x = y = 0, z = 0$  满足 C-R 方程. 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0) = (u_x + iv_x)|_{z=0} = 0.$$

也可从  $f(z) = \frac{z(z + \bar{z})}{2}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{2}$  看出.

## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

例

函数  $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$  在何处可导, 在何处解析?

解.

由  $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$  可知

$$\begin{aligned}u_x &= e^x \cos y, & u_y &= -e^x \sin y, \\v_x &= e^x \sin y, & v_y &= e^x \cos y.\end{aligned}$$

因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z).$$

实际上, 这个函数就是复变量的指数函数  $e^z$ .



## 典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

### 练习

求  $f(z) = 3x^2 + y^2 - 2xyi$  的可导点和解析点.

### 答案.

可导点为  $\operatorname{Re} z = 0$ , 没有解析点.

## 例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

### 例

设函数  $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$  在复平面内处处解析. 求实常数  $a, b, c, d$  以及  $f'(z)$ .

### 解.

由于

$$\begin{aligned}u_x &= 2x + ay, & u_y &= ax + 2by, \\v_x &= 2cx + dy, & v_y &= dx + 2y,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}2x + ay &= dx + 2y, & ax + 2by &= -(2cx + dy), \\a &= d = 2, & b &= c = -1, \\f'(z) &= u_x + iv_x = 2x + 2y + i(-2x + 2y) = (2 - 2i)z.\end{aligned}$$

## 例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

### 例

如果  $f'(z)$  在区域  $D$  内处处为零, 则  $f(z)$  在  $D$  内是一常数.

### 证明.

由于 
$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$

因此  $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$ ,  $u, v$  均为常数, 从而  $f(z) = u + iv$  是常数. ■

类似地可以证明, 若  $f(z)$  在  $D$  内解析, 则下述条件等价:

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| ■ $f(z)$ 是一常数,                   | ■ $f'(z) = 0$ ,                  |
| ■ $ f(z) $ 是一常数,                 | ■ $\arg f(z)$ 是一常数,              |
| ■ $\operatorname{Re} f(z)$ 是一常数, | ■ $\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数, |
| ■ $v = u^2$ ,                    | ■ $u = v^2$ .                    |

## 例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

### 例

如果  $f(z)$  解析且  $f'(z)$  处处非零, 则曲线族  $u(x, y) = c_1$  和曲线族  $v(x, y) = c_2$  互相正交.

### 证明.

由于  $f'(z) = u_x - iu_y$ , 因此  $u_x, u_y$  不全为零. 对  $u(x, y) = c_1$  使用隐函数求导法则得

$$u_x dx + u_y dy = 0,$$

从而  $(u_x, -u_y)$  是该曲线在  $z$  处的非零切向量.

同理  $(v_x, -v_y)$  是  $v(x, y) = c_2$  在  $z$  处的非零切向量. 由于

$$u_x v_x + u_y v_y = -u_x u_y + u_y u_x = 0,$$

因此二者正交.

当  $f'(z_0) \neq 0$  时, 经过  $z_0$  的两条曲线  $C_1, C_2$  的夹角和它们的像  $f(C_1), f(C_2)$  在  $f(z_0)$  处的夹角总是相同的. 这种性质被称为**保角性**.

这是因为  $df = f'(z_0) dz$ . 局部来看  $f$  把  $z_0$  附近的点以  $z_0$  为中心放缩  $|f'(z_0)|$  倍并逆时针旋转  $\arg f'(z_0)$ . 上述例子是该结论关于  $w$  复平面上曲线族  $u = c_1, v = c_2$  的一个特殊情形.

最后我们来看复数在求导中的一个应用.

例

求  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  的各阶导数.

## 复变函数在实变函数导数的应用 \*

解.

设  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ , 则它在除  $z = \pm i$  外处处解析. 当  $z = x$  为实数时,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{i}{2} \left[ \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i} \right]^{(n)} \\ &= \frac{i}{2} \cdot (-1)^n n! \left[ \frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}} \right] \\ &= (-1)^{n+1} n! \operatorname{Im} \frac{1}{(x+i)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n! \sin[(n+1) \operatorname{arccot} x]}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

### 1 解析函数的概念

### 2 函数解析的充要条件

### 3 初等函数

我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数. 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复. 现在我们来定义指数函数.

指数函数有多种等价的定义方式:

1  $\exp z = e^x (\cos y + i \sin y)$  (欧拉恒等式);

2  $\exp z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  (极限定义);

3  $\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$  (级数定义);

4  $\exp z$  是唯一的一个处处解析的函数, 使得当  $z = x \in \mathbb{R}$  时,  $\exp z = e^x$  ( $e^x$  的解析延拓).



有些人会从  $e^x, \cos x, \sin x$  的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

形式地代入得到欧拉恒等式  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ . 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义, 而不是欧拉恒等式的证明. 我们会在幂级数一节说明 **1** 和 **3** 等价.

我们来证明 1 和 2 等价.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left| 1 + \frac{z}{n} \right|^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \text{ 型不定式}) \\ &= \exp \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \left( \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2} \right) \right] = e^x.\end{aligned}$$

不妨设  $n > |z|$ , 这样  $1 + \frac{z}{n}$  落在右半平面,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \arg \left( 1 + \frac{z}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \arctan \frac{y}{n+x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ny}{n+x} = y.$$

故  $\exp z = e^x (\cos y + i \sin y)$ .

## 定义指数函数

$$\exp z = e^x (\cos y + i \sin y).$$

我们已经知道  $\exp z$  是一个处处解析的函数, 且  $(\exp z)' = \exp z$ .  
不难看出

- $\exp z \neq 0$ ;
- $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$ , 即  $\exp z$  周期为  $2\pi i$ ;
- $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$ ;
- $\exp z_1 = \exp z_2$  当且仅当  $z_1 = z_2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ ;
- $\lim_{z \rightarrow \infty} \exp z$  不存在也不为  $\infty$ .

为了方便, 我们也记  $e^z = \exp z$ .

## 指数函数的性质

指数函数将直线族  $\operatorname{Re} z = c$  映为圆周族  $|w| = e^c$ , 将直线族  $\operatorname{Im} z = c$  映为射线族  $\operatorname{Arg} w = c$ .

例

求函数  $f(z) = \exp[(1+i)z]$  的周期.

解.

设  $f(z_1) = f(z_2)$ , 则  $\exp[(1+i)z_1] = \exp[(1+i)z_2]$ . 因此存在  $k \in \mathbb{Z}$  使得

$$(1+i)z_1 = (1+i)z_2 + 2k\pi i,$$

从而  $z_1 - z_2 = k\pi(1+i)$ . 所以  $f(z)$  的周期是  $\pi(1+i)$ . ■

一般地,  $\exp(az + b)$  的周期是  $\frac{2\pi i}{a}$  (或写成  $-\frac{2\pi i}{a}$ ),  $a \neq 0$ .

对数函数定义为指数函数的反函数. 设  $z \neq 0$ , 满足方程  $\exp w = z$  的  $w = f(z)$  被称为对数函数, 记作  $w = \operatorname{Ln} z$ .

为什么我们用大写的  $\operatorname{Ln}$  呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支. 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写. 例如  $\operatorname{Arg} z$  和  $\arg z$ .

设  $\exp w = z = r \exp(i\theta) = \exp(\ln r + i\theta)$ , 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

所以

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

它是一个多值函数.

我们取它的主值为

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

对于每一个  $k$ ,  $\ln z + 2k\pi i$  都给出了  $\operatorname{Ln} z$  的一个单值分支. 特别地, 当  $z = x > 0$  是正实数时,  $\ln z$  就是实变的对数函数.

## 典型例题: 对数函数的计算

例

求  $\text{Ln } 2, \text{Ln}(-1)$  以及它们的主值.

解.

$\text{Ln } 2 = \ln 2 + 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ , 主值就是  $\ln 2$ .

$\text{Ln}(-1) = \ln 1 + i \text{Arg}(-1) = (2k + 1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$ , 主值是  $\pi i$ . ■

## 典型例题: 对数函数的计算

例

求  $\text{Ln}(-2 + 3i)$ ,  $\text{Ln}(3 - \sqrt{3}i)$ ,  $\text{Ln}(-3)$ .

解.

$$\begin{aligned}\text{Ln}(-2 + 3i) &= \ln |-2 + 3i| + i \text{Arg}(-2 + 3i) \\ &= \frac{1}{2} \ln 13 + \left( -\arctan \frac{3}{2} + \pi + 2k\pi \right) i, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Ln}(3 - \sqrt{3}i) &= \ln |3 - \sqrt{3}i| + i \text{Arg}(3 - \sqrt{3}i) \\ &= \ln 2\sqrt{3} + \left( -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right) i = \ln 2\sqrt{3} + \left( 2k - \frac{1}{6} \right) \pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\text{Ln}(-3) = \ln(-3) + i \text{Arg}(-3) = \ln 3 + (2k + 1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$



## 典型例题: 对数函数的计算

例

解方程  $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$ .

解.

由于  $1 + \sqrt{3}i = 2 \exp \frac{\pi i}{3}$ , 因此

$$z = \operatorname{Ln}(1 + \sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right) \pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

练习

求  $\ln(-1 - \sqrt{3}i)$ .

答案.

$$\ln 2 - \frac{2\pi i}{3}.$$

对数函数与其主值的关系是

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + \operatorname{Ln} 1 = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据辐角以及主辐角的相应等式, 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \operatorname{Ln} z.$$

而当  $|n| \geq 2$  时,  $\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z$  **不成立**. 以上等式换成  $\ln z$  均不一定成立.

设  $z_0 = x < 0$  是负实数. 由于

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(x + yi) = \ln(-x) + \pi, \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \ln(x + yi) = \ln(-x) - \pi,$$

因此  $\ln z$  在负实轴和零处不连续. 实际上,  $\lim_{z \rightarrow 0} \ln z = \infty$ .

而在其它地方  $-\pi < \arg z < \pi$ ,  $\ln z$  是  $e^z$  在区域  $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$  上的单值反函数, 从而

$$(\ln z)' = \frac{1}{z},$$

$\ln z$  在除负实轴和零处的区域解析.

对于其它分支  $\ln z + 2k\pi i$ , 性质也是类似的.

设  $a \neq 0, z \neq 0$ , 定义幂函数

$$\begin{aligned} w &= z^a = \exp(a \operatorname{Ln} z) \\ &= \exp[a \ln |z| + ia(\arg z + 2k\pi)], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

它的主值为

$$w = \exp(a \ln z) = \exp(a \ln |z| + ia \arg z).$$

如果  $\operatorname{Re} a > 0$ , 则当  $z \rightarrow 0$  时, 主值

$$|z^a| = |z|^a \cdot e^{-\operatorname{Im} a \cdot \arg z} \rightarrow 0.$$

因此此时我们定义  $0^a = 0$ . 约定  $0^0 = 1$ .

## 幂函数的性质: $a$ 为整数时

根据  $a$  的不同, 这个函数有着不同的性质.

当  $a$  为整数时, 因为  $\exp(2ak\pi i) = 1$ , 所以  $w = z^a$  是单值的.  
此时

$$z^a = |z|^a \exp(ia \arg z)$$

就是我们之前定义的方幂.

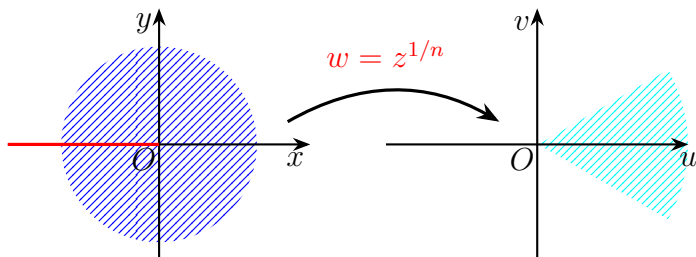
当  $a$  是非负整数时,  $z^a$  在复平面上解析; 当  $a$  是负整数时,  $z^a$  在  $\mathbb{C} - \{0\}$  上解析.

## 幂函数的性质: $a$ 为分数时

当  $a = \frac{p}{q}$  为分数,  $p, q$  为互质的整数且  $q > 1$  时,

$$z^{\frac{p}{q}} = |z|^{\frac{p}{q}} \exp \left[ \frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q} \right], \quad k = 0, 1, \dots, q-1$$

具有  $q$  个值. 去掉负实轴和  $0$  之后, 它的主值  $w = \exp(a \ln z)$  是处处解析的. 当  $a = \frac{1}{n}$  时,  $z^a$  就是方根  $\sqrt[n]{z}$ .



## 幂函数的性质: $a$ 为其他情形

对于其它的  $a$ ,  $z^a$  具有无穷多个值. 这是因为此时当  $k \neq 0$  时,  $2k\pi ai$  不可能是  $2\pi i$  的整数倍. 从而不同的  $k$  得到的是不同的值. 去掉负实轴和  $0$  之后, 它的主值  $w = \exp(a \ln z)$  也是处处解析的.

$a$	$z^a$ 的值	$z^a$ 的解析区域
整数 $n$	单值	$n \geq 0$ 时处处解析 $n < 0$ 时除零点外解析
分数 $p/q$	$q$ 值	除负实轴和零点外解析
无理数或虚数	无穷多值	除负实轴和零点外解析

## 典型例题: 幂函数的计算

例

求  $1^{\sqrt{2}}$  和  $i^i$ .

解.

$$\begin{aligned}1^{\sqrt{2}} &= \exp(\sqrt{2} \operatorname{Ln} 1) = \exp(\sqrt{2} \cdot 2k\pi i) \\&= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i \sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i^i &= \exp(i \operatorname{Ln} i) = \exp \left[ i \cdot \left( 2k + \frac{1}{2} \right) \pi i \right] \\&= \exp \left( -2k\pi - \frac{1}{2}\pi \right), \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

练习

求  $(-1)^i$ .

答案.

$$\exp(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



幂函数与其主值有如下关系:

$$z^a = \exp(a \ln z) \cdot 1^a = \exp(a \ln z) \cdot e^{2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对于幂函数的主值, 或者任意固定一个分支

$\text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i$ , 我们总有

$$(z^a)' = [\exp(a \ln z)]' = \frac{a \exp(a \ln z)}{z} = \frac{az^a}{z}.$$

对于整数  $n$ , 我们总有  $(z^a)^n = z^{an}$ . 这里换成主值也成立. 而  $z^a \cdot z^b = z^{a+b}$  仅对主值总成立.

我们来看  $\operatorname{Ln} z^a = a \operatorname{Ln} z$  何时成立. 由于

$$\operatorname{Ln} z^a = a \ln z + 2a\pi i \cdot \left(k + \frac{\ell}{a}\right) \pi i, \quad k, \ell \in \mathbb{Z},$$

$$a \operatorname{Ln} z = a \ln z + 2a\pi i \cdot k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

因此当且仅当  $a = \pm \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}_+$  时,  $\operatorname{Ln} z^a = a \operatorname{Ln} z$  成立. 对于除此之外的  $a$ , 该式子均不成立.

最后, 注意  $e^a$  作为指数函数  $f(z) = e^z$  在  $a$  处的值和作为  $g(z) = z^a$  在  $e$  处的值是**不同**的. 因为后者在  $a \notin \mathbb{Z}$  时总是多值的. 前者实际上是后者的主值. 为避免混淆, 以后我们总**默认**  $e^a$  **表示指数函数**  $\exp a$ .

我们知道

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

对于任意实数  $y$  成立, 我们将其推广到复数情形. 定义余弦和正弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

那么欧拉恒等式  $e^{iz} = \cos z + i \sin z$  对任意复数  $z$  均成立.

# 三角函数的性质

不难得到

$$\begin{aligned}\cos(x + iy) &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \\ \sin(x + iy) &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,\end{aligned}$$

其中  $\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \cos iy$ ,  $\operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = -i \sin iy$ .

当  $y \rightarrow \infty$  时,  $\sin iy = i \operatorname{sh} y$  和  $\cos iy = \operatorname{ch} y$  都  $\rightarrow \infty$ . 因此  $\sin z$  和  $\cos z$  并不有界. 这和实变情形完全不同.

容易看出  $\cos z$  和  $\sin z$  的零点都是实数. 于是我们可类似定义其它三角函数

$$\begin{aligned}\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, & \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z}, z \neq k\pi, \\ \sec z &= \frac{1}{\cos z}, z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, & \csc z &= \frac{1}{\sin z}, z \neq k\pi.\end{aligned}$$

这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

- $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$
- $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$

类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i.$$

它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

$\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$  的周期是  $2\pi i$ ,  $\operatorname{th} z$  的周期是  $\pi i$ .

## 反三角函数和反双曲函数

设  $z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$ , 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值).}$$

因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

显然它是多值的.

同理, 我们有:

- 反正弦函数  $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反正切函数  $\operatorname{Arctan} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$
- 反双曲余弦函数  $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反双曲正弦函数  $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$
- 反双曲正切函数  $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}$ .

## 例题: 解三角函数方程

例

解方程  $\sin z = 2$  和  $\cos z = 2$ .

解.

由于  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2$ , 我们有  $e^{2iz} - 4ie^{iz} - 1 = 0$ . 于是  
$$e^{iz} = (2 \pm \sqrt{3})i,$$

$$z = -i \operatorname{Ln}[(2 \pm \sqrt{3})i] = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

由于  $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$ , 我们有  $e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$ . 于是  
$$e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3},$$

$$z = -i \operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) = 2k\pi \pm i \ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$