1.4 区域

邻域

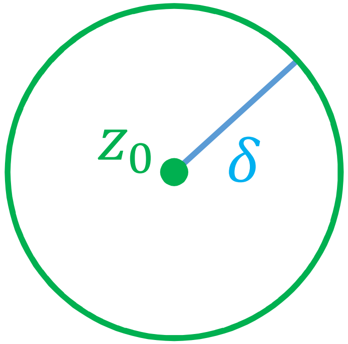
- 在高等数学中, 为了引入极限的概念, 需要考虑点的邻域.

邻域

- 在高等数学中，为了引入极限的概念，需要考虑点的邻域.
- 类似地，在复变函数中，自然地称开圆盘

$$U(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个δ-邻域，



邻域

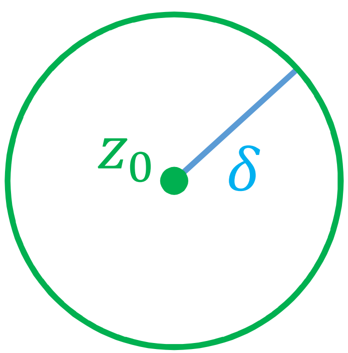
- 在高等数学中, 为了引入极限的概念, 需要考虑点的邻域.
- 类似地, 在复变函数中, 自然地称开圆盘

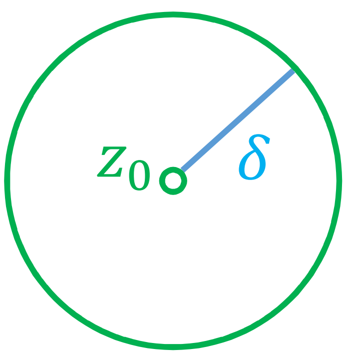
$$U(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个δ-邻域, 称去心开圆盘

$$\mathring{U}(z_0,\delta)=\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$$

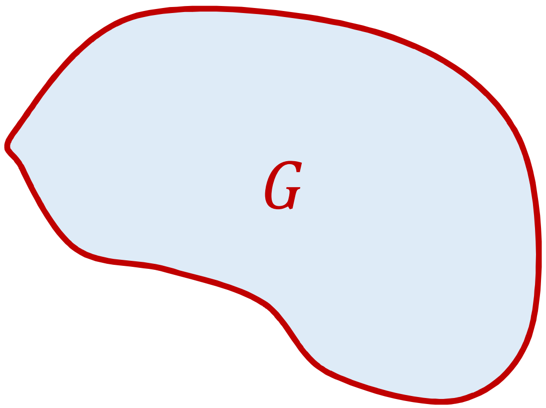
为 z_0 的一个去心δ-邻域.





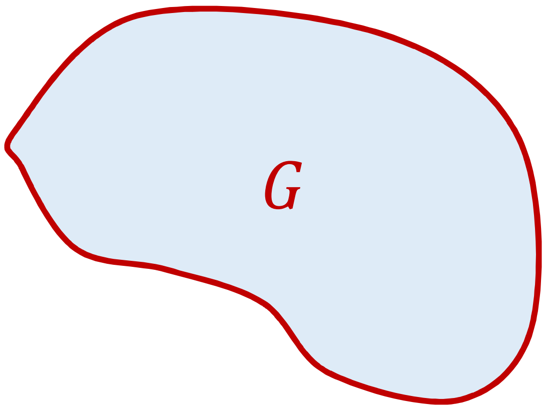
内部、外部、边界

- 设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$.



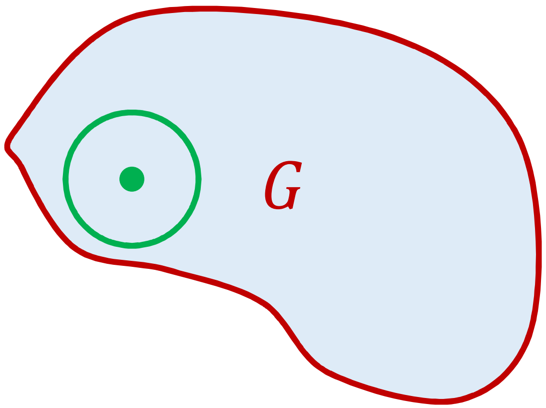
内部、外部、边界

- 设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$.
- 它们的位置关系有三种可能:



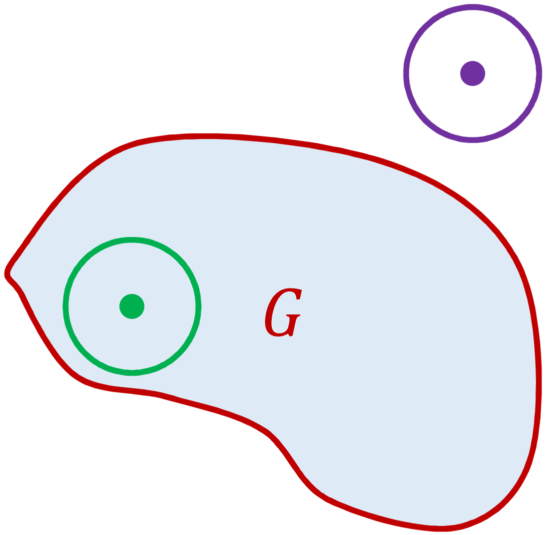
内部、外部、边界

- 设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$.
- 它们的位置关系有三种可能:
- 如果存在 z_0 的一个邻域 U 满足 $U \subseteq G$, 则称 z_0 是 G 的一个内点.



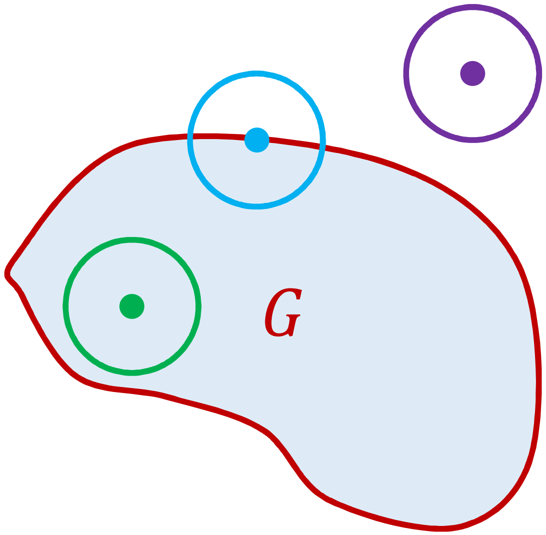
内部、外部、边界

- 设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$.
- 它们的位置关系有三种可能:
- 如果存在 z_0 的一个邻域 U 满足 $U \subseteq G$, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
- 如果存在 z_0 的一个邻域 U 满足 $U \subseteq (\mathbb{C} - G)$, 则称 z_0 是 G 的一个外点.



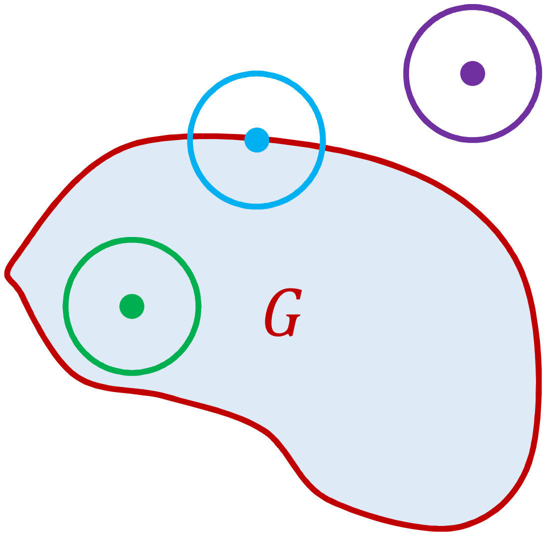
内部、外部、边界

- 设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$.
- 它们的位置关系有三种可能:
- 如果存在 z_0 的一个邻域 U 满足 $U \subseteq G$, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
- 如果存在 z_0 的一个邻域 U 满足 $U \subseteq (\mathbb{C} - G)$, 则称 z_0 是 G 的一个外点.
- 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有 $U \cap G \neq \emptyset, U \cap (\mathbb{C} - G) \neq \emptyset$, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

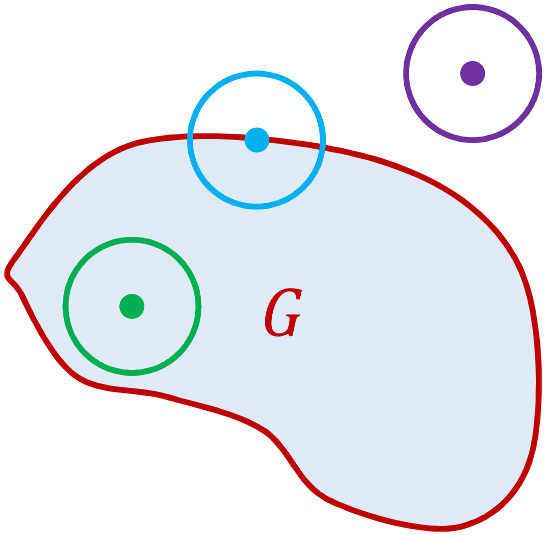


内部、外部、边界

- 设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$.
- 它们的位置关系有三种可能:
- 如果存在 z_0 的一个邻域 U 满足 $U \subseteq G$, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
- 如果存在 z_0 的一个邻域 U 满足 $U \subseteq (\mathbb{C} - G)$, 则称 z_0 是 G 的一个外点.
- 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有 $U \cap G \neq \emptyset, U \cap (\mathbb{C} - G) \neq \emptyset$, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.
- 显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能.



内部、外部、边界



- 设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$.
- 它们的位置关系有三种可能:
- 如果存在 z_0 的一个邻域 U 满足 $U \subseteq G$, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
- 如果存在 z_0 的一个邻域 U 满足 $U \subseteq (\mathbb{C} - G)$, 则称 z_0 是 G 的一个外点.
- 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有 $U \cap G \neq \emptyset, U \cap (\mathbb{C} - G) \neq \emptyset$, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.
- 显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.

开集和闭集

- 如果 G 的所有点都是内点,

开集和闭集

- 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个**开集**.

- 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个**开集**.
- 例如 $|z-z_0|<R, 1<\operatorname{Re} z<3, \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$ 都是开集.

开集和闭集

- 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个**开集**.
- 例如 $|z-z_0|<R, 1<\operatorname{Re} z<3, \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$ 都是开集.
- 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个**闭集**. 这等价于它的补集是开集.

开集和闭集

- 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个**开集**.
- 例如 $|z-z_0|<R, 1<\operatorname{Re} z<3, \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$ 都是开集.
- 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个**闭集**. 这等价于它的补集是开集.
- 直观上看: 开集往往由 $>, <$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant, \leqslant$ 的不等式给出.

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个**区域**.

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个**区域**.

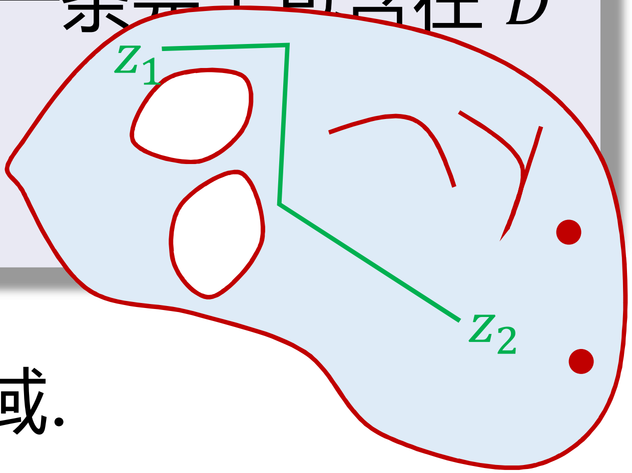
也就是说, 区域是连通的开集.

区域和闭区域

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个**区域**.

也就是说, 区域是连通的开集.



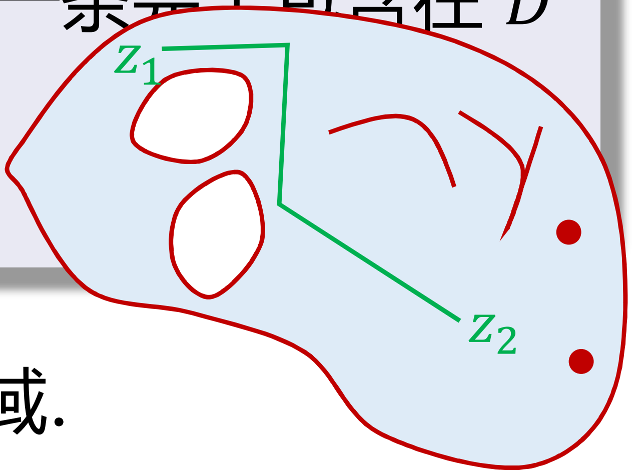
- 观察右侧的图案, 淡蓝色部分是一个区域.

  红色的线条和点是它的边界.

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个**区域**.

也就是说, 区域是连通的开集.

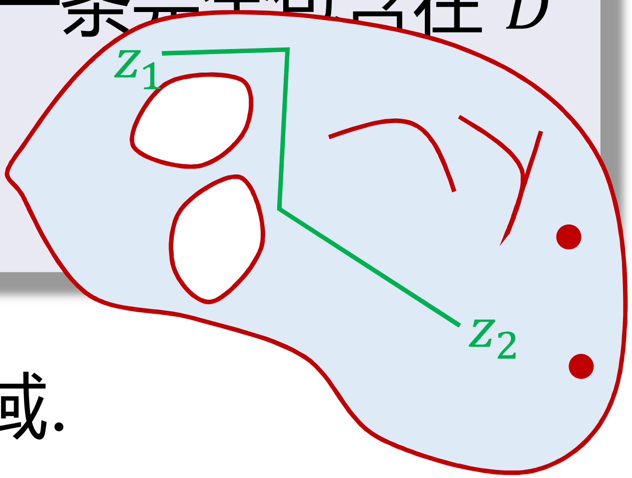


- 观察右侧的图案, 淡蓝色部分是一个区域.
  红色的线条和点是它的边界.
- 区域和它的边界一起构成了**闭区域**, 记作 $\overline{D}$.

定义

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个**区域**.

也就是说, 区域是连通的开集.



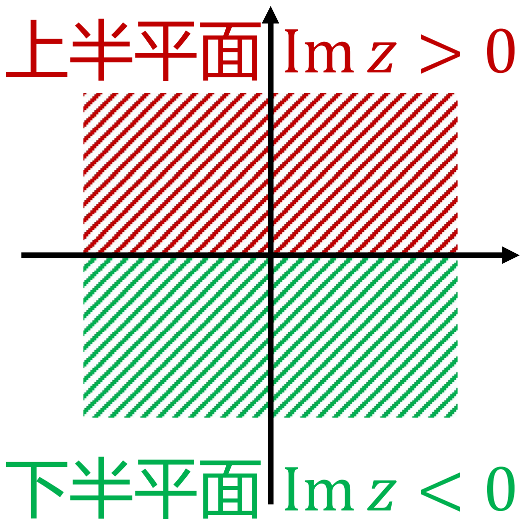
- 观察右侧的图案, 淡蓝色部分是一个区域.
  红色的线条和点是它的边界.
- 区域和它的边界一起构成了**闭区域**, 记作 $\overline{D}$.
- 自然地, 如果 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0,\delta)$ 中, 则称它是有界的. 否则称它是无界的.

常见区域

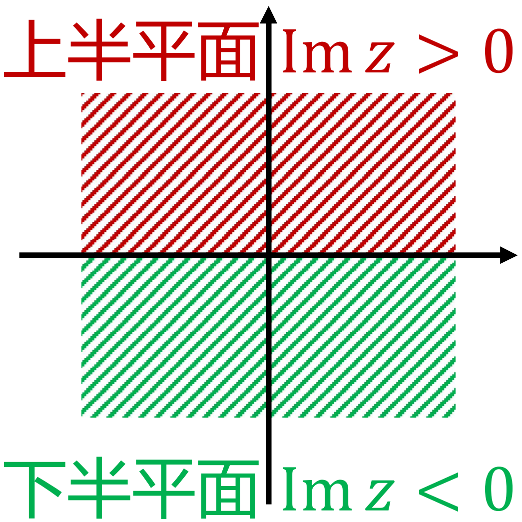
- 复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

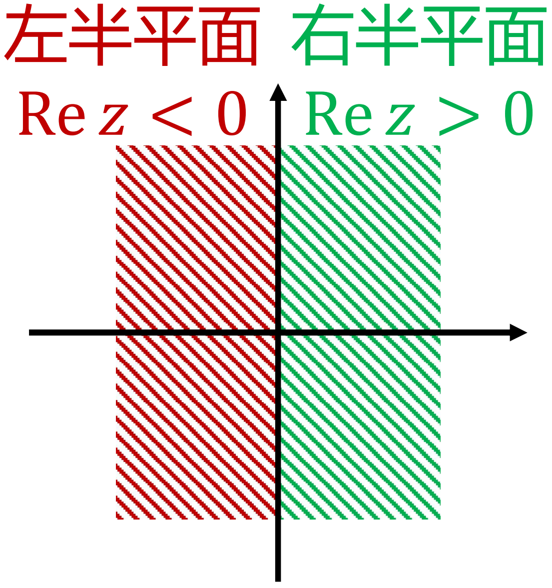
常见区域

- 复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.



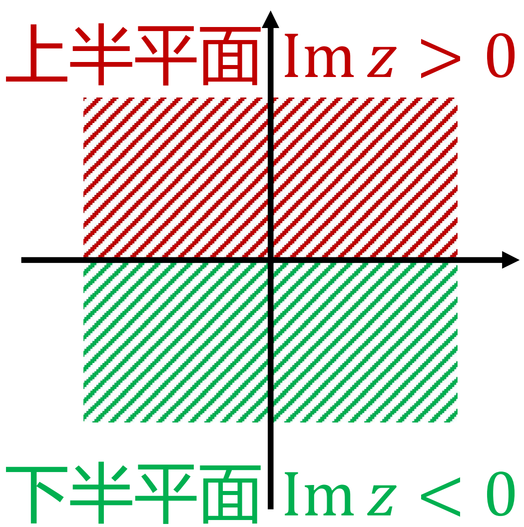
- 复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

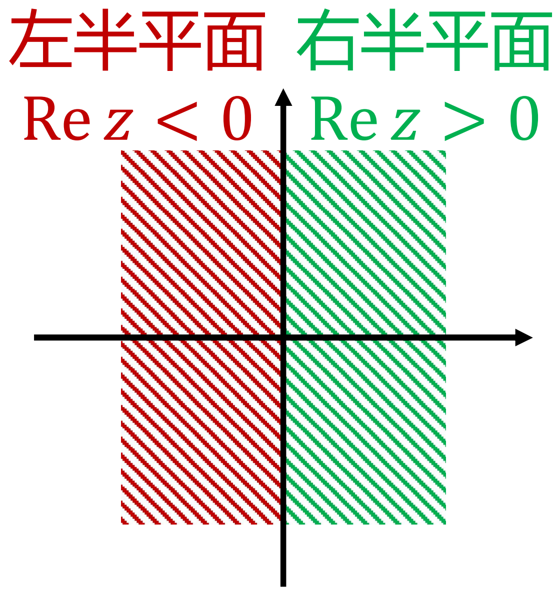


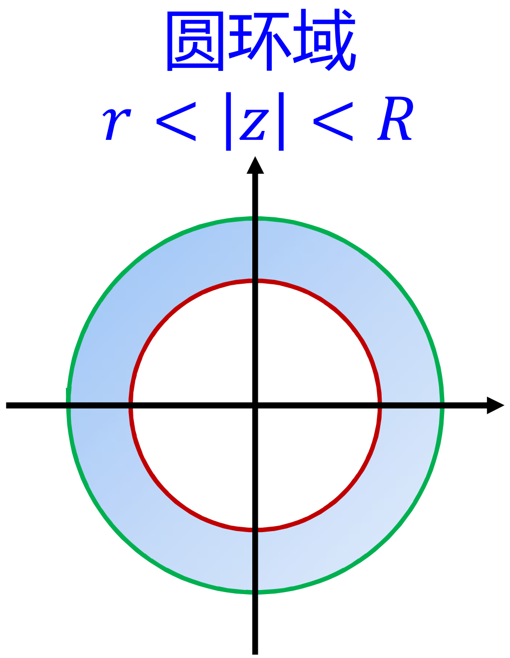


常见区域

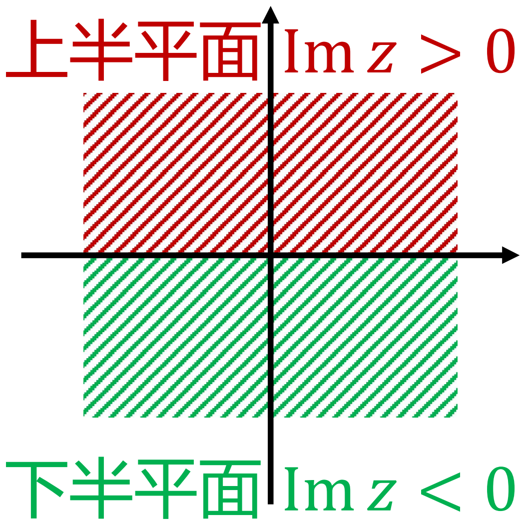
- 复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

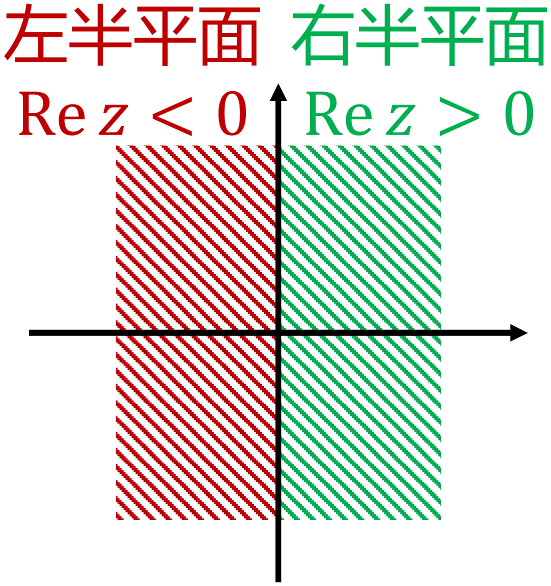


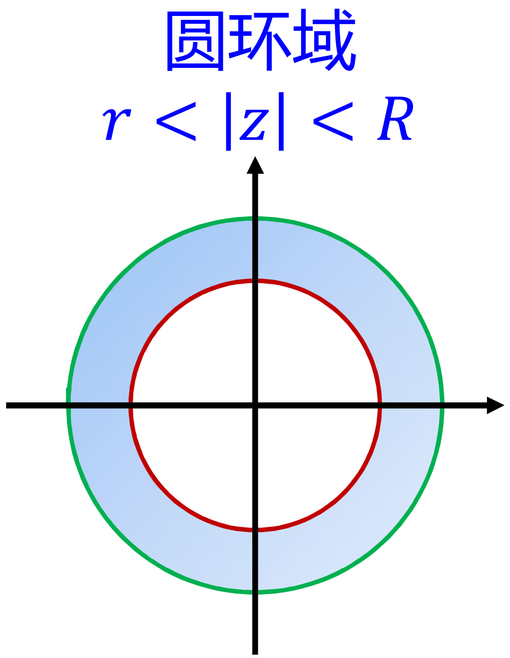




- 复平面上的区域大多由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.





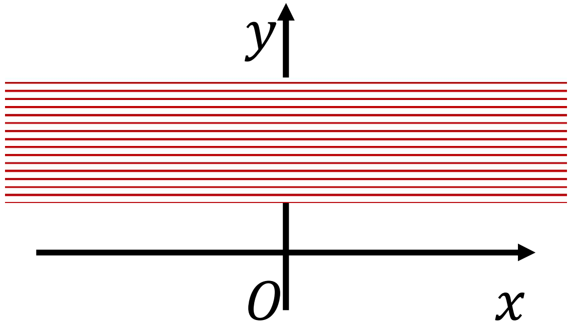


- 思考 它们的闭区域是什么?

常见区域

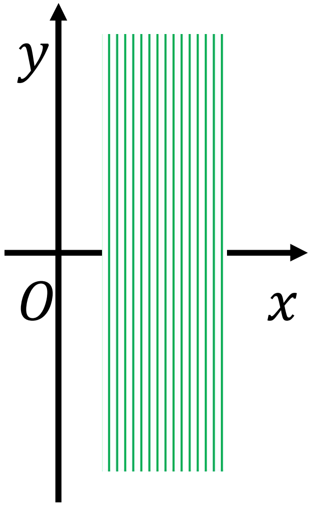
水平带状区域

$y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$



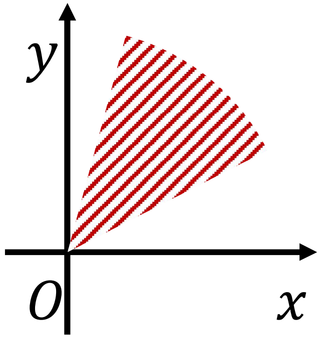
竖直带状区域

$x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$



角状区域

$\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$



连续区间、简单曲线和闭路

- 设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程

  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, a \leqslant t \leqslant b$ 定义了一条连续曲线.

连续区间、简单曲线和闭路

- 设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, a \leqslant t \leqslant b$$ 定义了一条连续曲线.

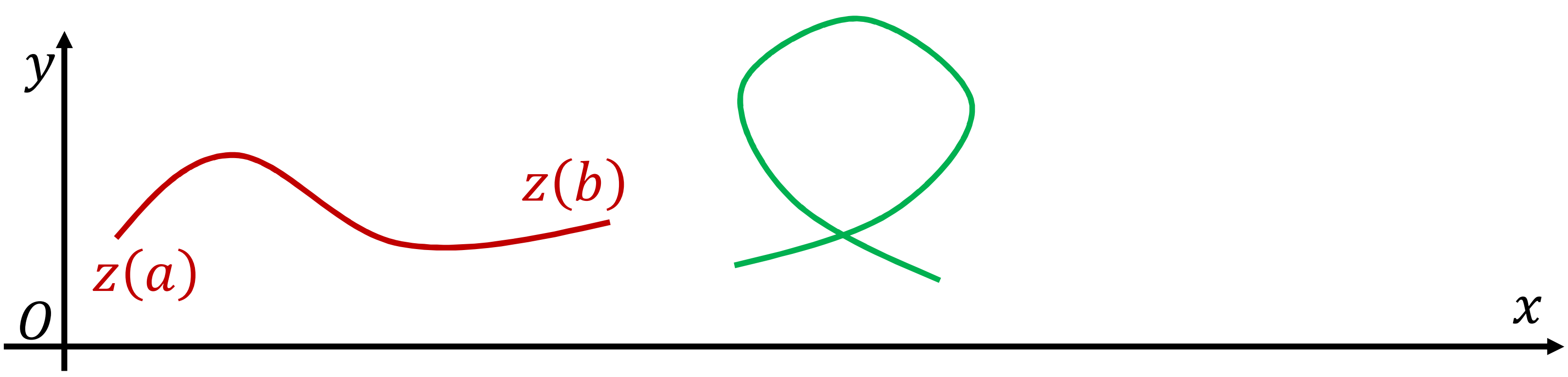
- 这也等价于 $C: z = z(t) = x(t) + iy(t),\ a \leqslant t \leqslant b$.

连续区间、简单曲线和闭路

- 设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程

  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, a \leqslant t \leqslant b$ 定义了一条连续曲线.

- 这也等价于 $C: z = z(t) = x(t) + iy(t),\ a \leqslant t \leqslant b$.
- 如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线.



连续区间、简单曲线和闭路

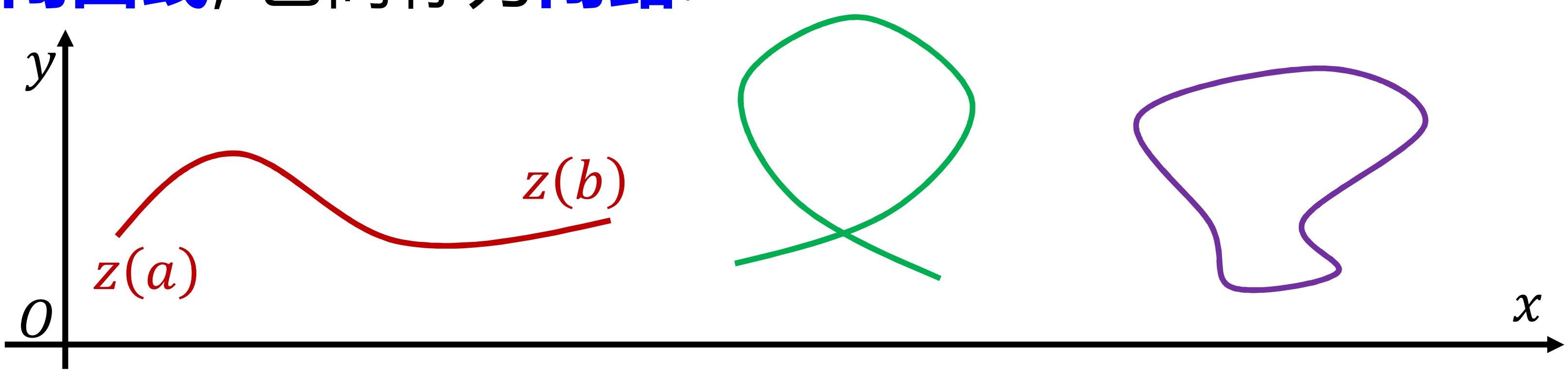
- 设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程

  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, a \leqslant t \leqslant b$ 定义了一条连续曲线.

- 这也等价于 $C: z = z(t) = x(t) + iy(t),\ a \leqslant t \leqslant b$.

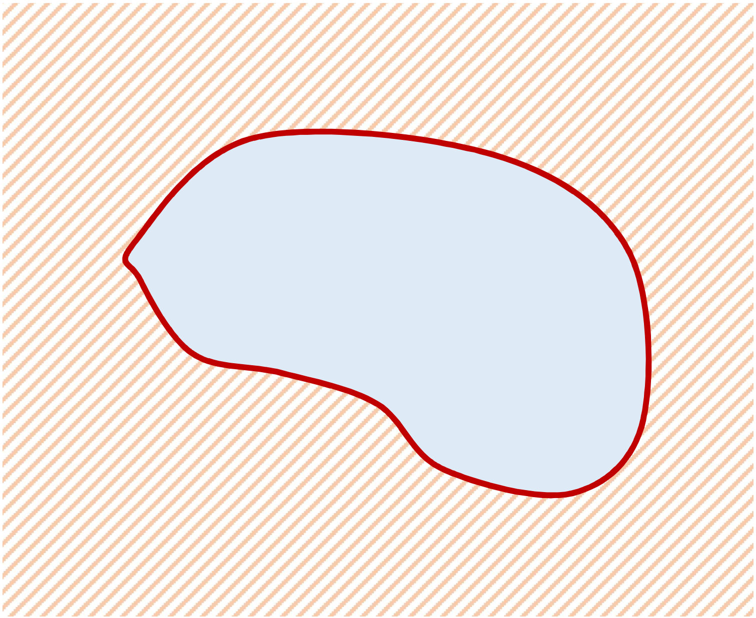
- 如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线.

- 如果还满足两个端点重叠, 即 $z(a) = z(b)$, 则称 C 是**简单闭曲线**, 也简称为**闭路**.



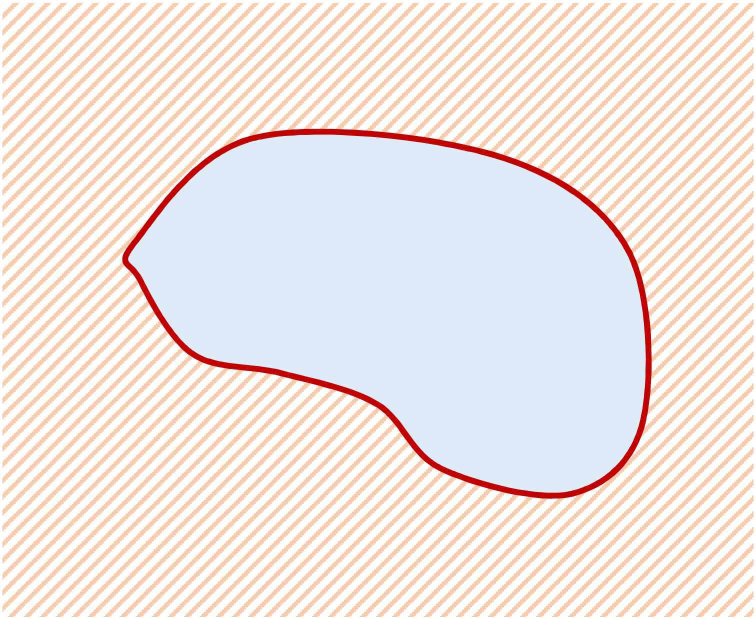
闭路的内部和外部

- 闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界.



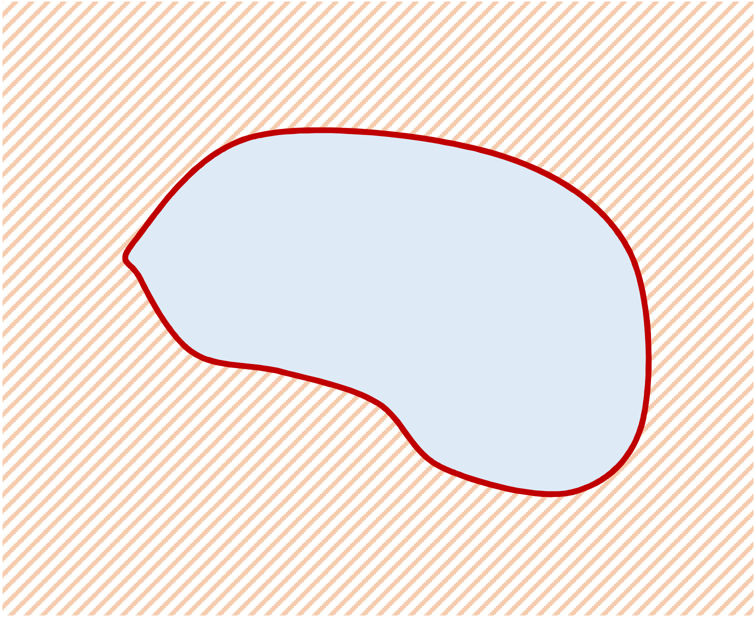
闭路的内部和外部

- 闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界.
- 这件事情的严格证明是十分困难的.



闭路的内部和外部

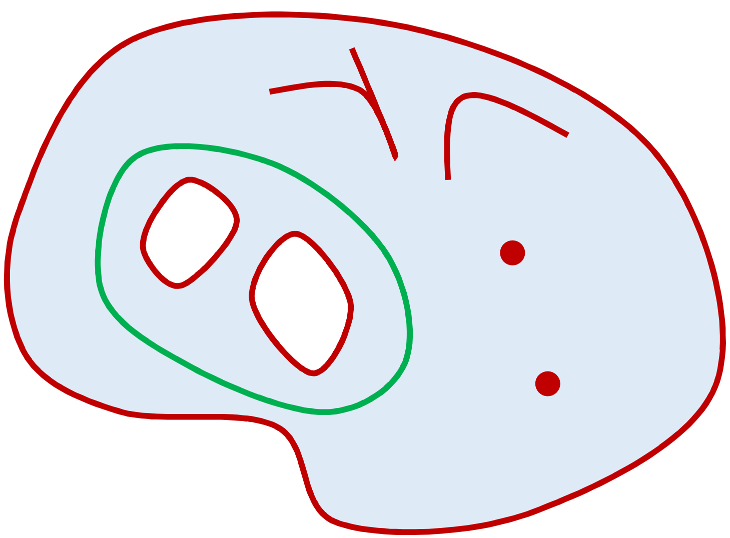
- 闭路 C 把复平面划分成了两个区域, 一个有界一个无界.
- 这件事情的严格证明是十分困难的.
- 分别称这两个区域是 C 的**内部**和**外部**.
- C 是它们的公共边界.



- 在前面所说的几个区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路.

- 在前面所说的几个区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外, 闭路的内部仍然包含在这个区域内.

- 在前面所说的几个区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外, 闭路的内部仍然包含在这个区域内.

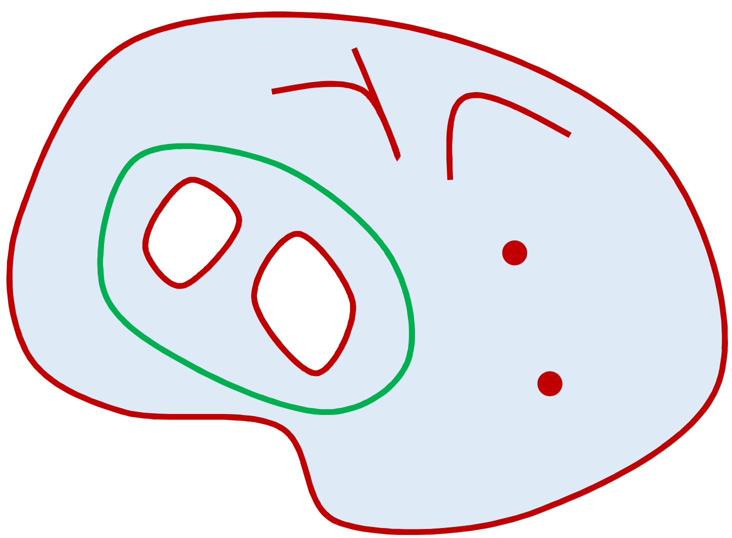


单连通域和多连通域

- 在前面所说的几个区域的例子中，我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内.

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中，则称 D 是**单连通域**. 否则称之为多连通域.



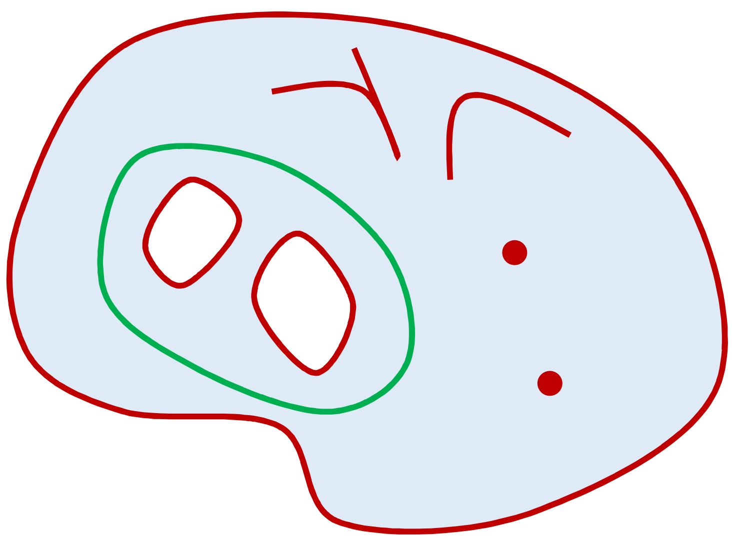
单连通域和多连通域

- 在前面所说的几个区域的例子中, 我们在区域中画一条闭路. 除了圆环域之外, 闭路的内部仍然包含在这个区域内.

定义

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中, 则称 D 是**单连通域**. 否则称之为多连通域.

- 单连通域内的任一闭路可以连续地变形成一个点.



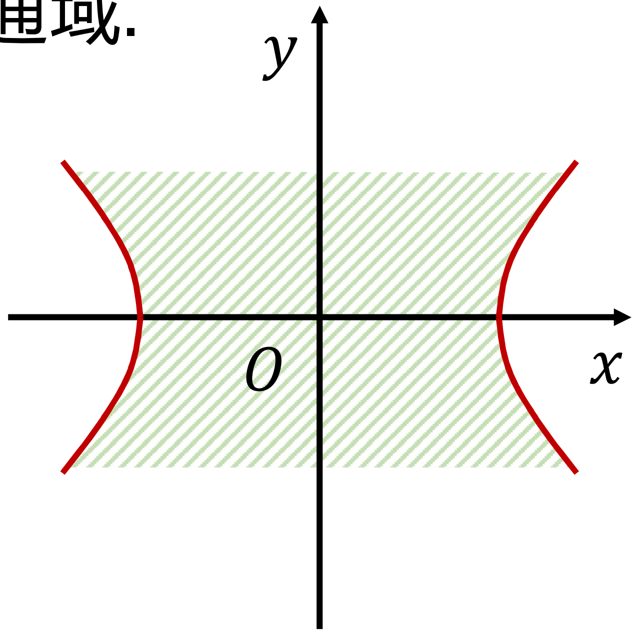
例题: 区域的特性

- 例 指出下列不等式所确定的区域, 是否有界以及是否单连通.
- (1) $\mathrm{Re}(z^2) < 1.$

例题: 区域的特性

- 例 指出下列不等式所确定的区域, 是否有界以及是否单连通.
- (1) $\mathrm{Re}(z^2) < 1.$
- 设 $z = x + yi$, 则 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1.$

- 例 指出下列不等式所确定的区域, 是否有界以及是否单连通.
- (1) $\mathrm{Re}(z^2) < 1$.
- 设 $z = x + yi$, 则 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 < 1$.
- 这是无界的单连通域.

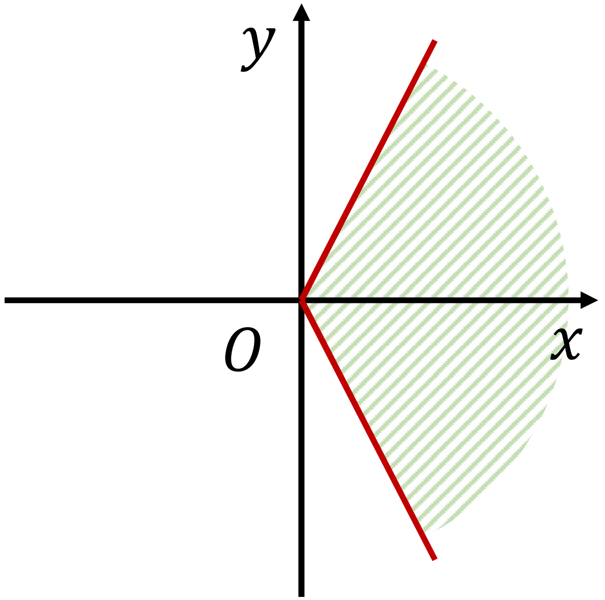


例题: 区域的特性

- (2) $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$.

例题: 区域的特性

- (2) $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$.
- 即 $-\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}$, 这是无界的单连通域.

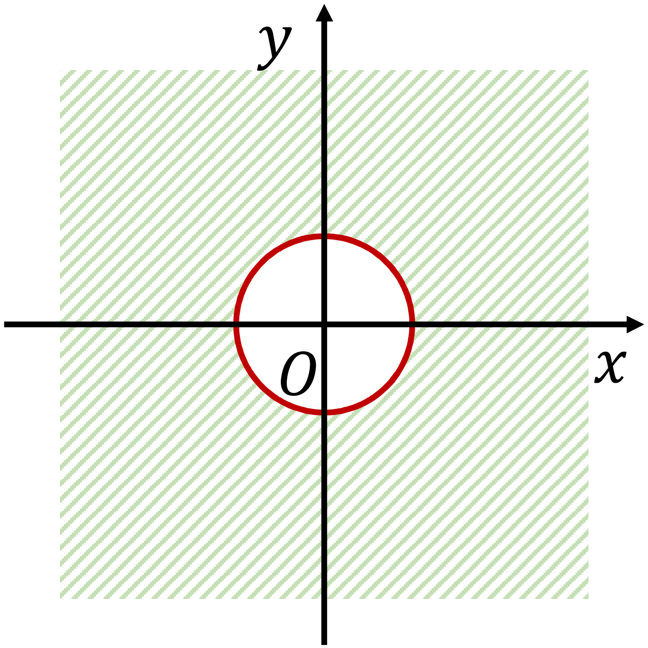


例题: 区域的特性

- (3) $\left|\frac{1}{z}\right| < 3.$

例题: 区域的特性

- (3) $\left|\frac{1}{z}\right| < 3.$
- 即 $|z| > \frac{1}{3}$, 这是无界的多连通域.



例题: 区域的特性

- (4) $|z+1|+|z-1|<4.$

- (4) $|z+1|+|z-1|<4$.
- 表示一个椭圆的内部, 这是有界的单连通域.