



### 3.4 隐函数与参数方程确定函数的求导方法

- 隐函数的求导方法
- 关于隐函数的导数, 我们很自然地想到求出隐函数的显式表达, 然后按显函数的求导方法来求.
- 例如二元方程  $x^2 + y^2 = 1, y > 0$  确定的  $y$  是  $x$  的隐函数, 我们可以得到  $y = \sqrt{1 - x^2}$ , 则  $y' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ .
- 然而并不是所有的隐函数都有显式表达, 例如开普勒方程
$$x - y + \varepsilon \sin y = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1).$$
- 此时我们该如何求其导数?



- 一般而言, 在一定条件下, 二元方程  $F(x, y) = 0$  确定了  $y$  是  $x$  的隐函数  $y = y(x)$ , 代入方程可以得到  $F[x, y(x)] = 0$ .
- 方法** 如果隐函数  $y = y(x)$  可导, 我们可以在上式两边同时对  $x$  求导, 则有

$$\frac{dF[x, y(x)]}{dx} = 0, \quad \text{即} \quad \frac{dF[x, y]}{dx} = 0.$$

- 然后从中解出  $\frac{dy}{dx}$  即可.
- 注意** 在求导过程中, 应始终将  $y = y(x)$  视为  $x$  的函数, 因此  $F(x, y)$  是  $x$  的复合函数.
- 即便从  $F(x, y) = 0$  确定的  $y$  是一个多值函数, 我们也可以用此方法确定所有导数存在的点处的导数值.



- 例 设  $x^2 + 2y^2 = 1$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .
- 解 在方程两边同时对  $x$  求导得  $2x + 4y \frac{dy}{dx} = 0$ ,
- 解得  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$  ( $y \neq 0$ ).
- 注意  $\frac{d}{dx}(2y^2) = 4y \frac{dy}{dx}$  而不是  $4y$ , 实际上  $\frac{d}{dy}(2y^2) = 4y$ .
- 例 设  $x - y + \varepsilon \sin y = 0$ , 求  $y'$ .
- 解 在方程两边同时对  $x$  求导得

$$1 - y' + \varepsilon \cos y \cdot y' = 0,$$

- 解得  $y' = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}$  ( $\cos y \neq \frac{1}{\varepsilon}$ ).



- 例 设  $xy = e^{x+y}$ , 求  $y'$ .
- 解 在方程两边同时对  $x$  求导得

$$y + xy' = e^{x+y}(1 + y'),$$

- 解得  $y' = \frac{e^{x+y}-y}{x-e^{x+y}} \quad (x \neq e^{x+y})$ .
- 也可以写成  $y' = \frac{xy-y}{x-xy} = \frac{(x-1)y}{x(1-y)} \quad (x \neq 0, y \neq 1)$ .
- 隐函数的导数表达方式不唯一, 但本质上是唯一的.
- 在这个例子中实际上,  $x \neq 0, y \neq 1$  恒成立.



- 例 求椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  上点  $(1, \frac{3}{2})$  处的切线方程.
- 解 在方程两边同时对  $x$  求导得

$$\frac{x}{2} + \frac{2yy'}{3} = 0,$$

- 解得  $y' = -\frac{3x}{4y}$  ( $y \neq 0$ ).
- 因此该椭圆在点  $(1, \frac{3}{2})$  处的切线斜率为  $-\frac{3 \times 1}{4 \times \frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}$ , 切线方程为

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1), \quad \text{即 } x + 2y = 4.$$



• 例 设  $x^2 - xy + 1 = e^y$ , 则  $\frac{dy}{dx} \big|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

• 解 在方程两边同时对  $x$  求导得

$$2x - y - xy' = e^y y',$$

• 解得  $y' = \frac{2x-y}{e^y+x}$ . 所以  $y'(0) \neq -\frac{y}{e^y}$ .

• 这并不正确, 我们还需要计算出  $x = 0$  时  $y$  的值.

• 当  $x = 0$  时,  $1 = e^y, y = 0$ , 故  $y'(0) = 0$ .



• 例 设  $x + y + \sin y = 0$ , 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

• 解 两边同时对  $x$  求导得  $1 + y' + \cos y \cdot y' = 0$ , 解得  $y' = -\frac{1}{\cos y + 1}$ , 所以

$$y'' = \frac{1}{(\cos y + 1)^2} \cdot (-\sin y) \cdot y' = \frac{\sin y}{(\cos y + 1)^3}.$$

• 也可以由上述等式再次求导得

$$y'' - \sin y \cdot y' \cdot y' + \cos y \cdot y'' = 0,$$

• 所以  $y'' = \frac{1}{\cos y + 1} \cdot \sin y \cdot (y')^2 = \frac{\sin y}{(\cos y + 1)^3}.$



- 设  $y = f(x)$  有反函数, 则它的反函数为  $x = f(y)$ .
- 于是  $1 = f'(y)y', y' = \frac{1}{f'(y)}$ . 此即反函数求导法则.
- 对数求导法
- 当  $f(x)$  较复杂, 而  $\ln f(x)$  较简单时, 将  $y = f(x)$  两边取对数得  $\ln y = \ln f(x)$ , 再利用隐函数求导法求出  $f'(x)$ .





• 例 设  $y = \sqrt{\frac{(x+5)(x-4)^2}{(x-2)^3 \sqrt[3]{x+4}}}$ , 求  $y'$ .

• 解  $\ln y = \frac{1}{2} \left[ \ln(x+5) + 2 \ln(x-4) - 3 \ln(x-2) - \frac{1}{3} \ln(x+4) \right],$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-4} - \frac{3}{x-2} - \frac{1}{3(x+4)} \right],$$

• 因此  $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(x+5)(x-4)^2}{(x-2)^3 \sqrt[3]{x+4}}} \left[ \frac{1}{x+5} + \frac{2}{x-4} - \frac{3}{x-2} - \frac{1}{3(x+4)} \right].$

• 注意, 由于  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ , 故可不比讨论对数中真数的正负号. 虽然过程不严谨, 但此解法已经默认为常用方法.



- 例 设  $y = x^x$ , 求  $y'$ .

- 解  $\ln y = x \ln x, \frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1, y' = x^x (\ln x + 1).$

- 这种方法等价于对  $y = e^{\ln y}$  利用复合函数求导法则.

$$y' = e^{\ln y} \cdot (\ln y)' = y(\ln y)'.$$

- 例如

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \left( \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1).$$



- 由参变量方程所确定的函数的求导法则

- 设函数满足参数方程  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ ,  $t$  为参数. 如果能从中消去参数, 化为显函数或隐函数, 则可利用前面介绍的方法求其导数.

- 例 设  $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$ , 则  $y = x^{\frac{2}{3}}$ ,  $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} (x \neq 0)$ .

- 例 设  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ , 则  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y' = -\frac{x}{y} (y \neq 0)$ .

- 如果不能从中消去参数, 我们该如何求其导数呢?



- 设  $\varphi(t), \psi(t)$  均可导, 且  $x = \varphi(t)$  在  $t$  的某个区间内单调, 则由反函数存在定理知, 存在连续、可导的反函数  $t = \varphi^{-1}(x)$ , 这样  $y = \psi(t)$  与  $t = \varphi^{-1}(x)$  就构成了复合函数  $y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$ . 于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

- 直观理解就是, 当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $\Delta x \rightarrow 0$ , 于是

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y / \Delta t}{\Delta x / \Delta t} = \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta y / \Delta t}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x / \Delta t} = \frac{dy/dt}{dx/dt}.$$



- 如果  $\varphi(t), \psi(t)$  具有二阶导数, 则

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{dx/dt} = \left[ \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right]' \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

- 注意不是  $\frac{\psi''(t)}{\varphi''(t)}$  也不是  $\frac{\psi''(t)}{[\varphi'(t)]^2}$ .



• 例 设  $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ , 求  $y''$ .

• 解

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{3t^2 + 3} = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 1 - \frac{2}{t^2 + 1},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{2}{(t^2 + 1)^2} \cdot 2t}{3t^2 + 3} = \frac{4t}{3(t^2 + 1)^3}.$$



• 例 设  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ , 求  $y''$ .

• 解

$$y' = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{[\cos t (1 - \cos t) - \sin t \cdot \sin t](1 - \cos t)^{-2}}{a(1 - \cos t)} \\ &= \frac{\cos t - 1}{a(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{(1 - \cos t)^2}. \end{aligned}$$



• 例 曲线  $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$  上对应于  $t = 1$  的点处的法线方程为\_\_\_\_\_.

• 解  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = t$ , 因此  $y'|_{t=1} = 1$ , 法线斜率为  $\frac{-1}{1} =$

$-1$ . 由于  $x|_{t=1} = \frac{\pi}{4}$ ,  $y|_{t=1} = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$ , 因此法线方程为

$$y - \frac{1}{2} \ln 2 = - \left( x - \frac{\pi}{4} \right), \quad \text{即 } x + y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$





- 极坐标系中的问题可以转化为直角坐标中的参数方程问题

极坐标中  $r = r(\theta) \Leftrightarrow$  直角坐标系中  $\begin{cases} x = r(\theta) \cos \theta \\ y = r(\theta) \sin \theta \end{cases}$ ,  $\theta$  为参数.

- 例** 求对数螺旋线  $r = e^\theta$  在  $\left(e^{\frac{\pi}{2}}, \frac{\pi}{2}\right)$  处的切线的极坐标方程.

- 解** 由题意得  $\begin{cases} x = e^\theta \cos \theta \\ y = e^\theta \sin \theta \end{cases}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{e^\theta \sin \theta + e^\theta \cos \theta}{e^\theta \cos \theta - e^\theta \sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta}, \quad y' \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1.$$



- 当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时,  $x = 0, y = e^{\frac{\pi}{2}}$ , 相应的切线方程为  $x + y = e^{\frac{\pi}{2}}$ .
- 化成极坐标为  $r \cos \theta + r \sin \theta = e^{\frac{\pi}{2}}$ , 即  $r = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\cos \theta + \sin \theta}$ .
- 一般地, 设曲线  $r = r(\theta)$ ,  $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta}{r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta}$ .
- 于是在  $[r(\theta_0), \theta_0]$  处的切线极坐标方程为

$$\begin{aligned} & [r'(\theta_0) \sin \theta_0 + r(\theta_0) \cos \theta_0] \cdot [r \cos \theta - r(\theta_0) \cos \theta] \\ &= [r'(\theta_0) \cos \theta_0 - r(\theta_0) \sin \theta_0] \cdot [r \sin \theta - r(\theta_0) \sin \theta], \end{aligned}$$

$$\text{即 } r = \frac{r(\theta_0)}{\cos(\theta - \theta_0) - r(\theta_0)^{-1} r'(\theta_0) \sin(\theta - \theta_0)}.$$