复变函数与积分变换

工程数学教材 初版 合肥工业大学

引言 ※

在当今科学与工程的广阔领域中,复变函数与积分变换作为数学工具的核心组成部分, 扮演着举足轻重的角色.它们不仅是理论研究的基石,更是解决实际问题的利器.本书旨在 为读者提供一本内容全面、结构清晰、易于理解的教材,旨在帮助读者系统地掌握这一领域 的基本理论和实际应用,为未来的学术研究和职业生涯打下坚实的基础.

复变函数,将函数的变量范围从实数域扩展到了复数域.这种推广看似平凡,却因为复变函数的解析理论能揭示许多在实数域中难以发现的数学规律和性质,而显得丰富多彩而极具生命力.通过复变函数,我们可以更加深入地理解自然界的许多现象,如电磁场的分布、流体的流动、振动与波动等.本书首先介绍了复数的基本概念、运算规则和几何意义,然后逐步将实数情形的极限与微积分理论推广到复数情形,并揭示这二者本质的差异所在.我们将深入探讨复变函数的可导性和解析性,并由此得到其积分表达、级数展开、奇点行为与留数等核心理论.

积分变换,特别是傅里叶变换和拉普拉斯变换,是现代科学与工程中广泛应用的数学工具.它们在函数变换方面的诸多性质,解释了处理信息的一般手段.不仅如此,它们还能够将复杂的微分、积分方程转化为易于求解的代数方程,将复杂的卷积运算化为简单的乘积运算.本书将在复变函数相关理论的基础上,深入探讨这两类积分变换的动机、原理、性质及应用,以便读者掌握积分变换的基本方法和技巧.

在本书编写过程中, 我们注重理论与实践的结合, 兼顾趣味性和可读性, 力求使内容既具有理论深度, 又易于理解和应用. 在本书中, 我们力求每一个概念引入背景都有所交代, 让读者能很容易地接受抽象的数学概念; 每一个性质都有所应用, 避免读者陷入为何而学的困惑中; 每一个定理都可以用简短的语言来解释, 并提供多视角的理解方式, 让读者理解而不仅只是记住一个个的知识点.

本书提供了丰富的例题和随堂练习, 让读者可以学练互动. 每一章的结尾对相应章节内容进行了总结, 并着重指出不易理解和易出错的知识点. 本书中的选读内容建议让感兴趣的学生自学, 而不必讲授. 若因课时不足而不能讲授全书, 可依次去掉保形映射、积分变换在积分和级数的应用、留数在级数的应用、留数在定积分的应用而不讲授.

最后感谢本书完成过程中学院领导和同事的大力支持,感谢本书的编辑、校对和审阅专家.由于水平有限,书中错误之处在所难免,敬请读者指正!

编者 2025 年 1 月 19 日

● 目录

引言		i
目录		iii
第一章	复数与	复变函数 1
1.1	复数及	其代数运算 1
	1.1.1	复数的产生
	1.1.2	复数的概念
	1.1.3	复数的代数运算5
	1.1.4	共轭复数 7
1.2	复数的	三角与指数形式
	1.2.1	复数的模和辐角
	1.2.2	复数的三角形式和指数形式11
1.3	复数的	乘除、乘幂和方根
	1.3.1	复数的乘除
	1.3.2	复数乘法的几何意义
	1.3.3	复数的乘幂
	1.3.4	复数的方根
	1.3.5	实系数三次方程根的情况(选读) 20
	1.3.6	单位根的应用 (选读)
1.4	曲线和	区域
	1.4.1	复数表平面曲线
	1.4.2	区域和闭区域
	1.4.3	区域的特性
1.5	复变函	数
	1.5.1	复变函数的定义
	1.5.2	复平面的变换
1.6	极限和	连续性
	1.6.1	数列的极限
	1.6.2	无穷远点和复球面 36

iv 目录

1.6.3	函数的极限 .		 										38
1.6.4	函数的连续性		 										40
1.6.5	复数域的性质	(选读)	 										41
本章作业			 										47
练习答案													51
参考文献													5 3
中外人名对照	表												5 5

第一章 复数与复变函数

本章中我们将学习复数和复变函数的基本概念,以及复数列和复变函数的极限.我们将从解一元三次方程问题出发,逐步展示引入复数的必要性.然后介绍复数的运算规则,并展示复数的三角形式和指数形式在运算中所起的关键作用.最后,我们仿照实数情形引入复变函数、复数列以及极限的概念,并讨论它们与实数情形的联系.

1.1 复数及其代数运算

1.1.1 复数的产生

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$, 配方可得

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \Delta = b^2 - 4c.$$

- (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 有两个不同的实根;
- (2) 当 $\Delta = 0$ 时, 有一个二重的实根:^①
- (3) 当 $\Delta < 0$ 时, 无实根.

可以看出,当我们考虑在实数范围内解一元二次方程时,可以直接舍去包含负数开平方的解.这样不会影响我们得到方程的实数解.然而在一元三次方程中,即便只考虑实数解也会不可避免地引入负数开平方.

例 1.1 解方程 $x^3 + 6x - 20 = 0$.

我们将使用由费罗最先发现,并由卡尔达诺最先公开的解法.②

解: 设 x = u + v, 则

$$u^{3} + v^{3} + 3uv(u+v) + 6(u+v) - 20 = 0.$$

我们希望

$$u^3 + v^3 = 20, \qquad uv = -2,$$

① 若 x_0 是多项式方程 f(x) = 0 的根, 则 $x - x_0$ 是 f(x) 的因式, 即存在多项式 g(x) 使得 $f(x) = (x - x_0)g(x)$. 若 $(x - x_0)^k$ 是 f(x) 的因式, 但 $(x - x_0)^{k+1}$ 不是, 则称 x_0 是 f(x) 或该方程的 k **重根**. 在定义 ?? 中我们将会定义一般函数零点的重数. ② 费罗发现了该方法后, 并没有发表他的结果, 因为当时人们常把他们的发现保密, 而向对手们提出挑战. 参考 [5, 第 13 章 4 节].

则 u^3, v^3 满足一元二次方程 $X^2 - 20X - 8 = 0$. 解得

$$u^3 = 10 \pm \sqrt{108} = (1 \pm \sqrt{3})^3$$
.

所以

$$u = 1 \pm \sqrt{3}$$
, $v = 1 \mp \sqrt{3}$, $x = u + v = 2$.

这个方程是不是真的只有 x=2 这一个实数解呢?由方程左侧多项式导数为 $3x^2+6>0$ 可知其单调递增,因此确实只有这一个实数解.

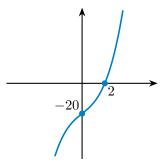
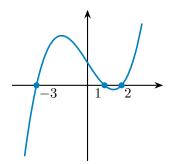


图 1.1 $y = x^3 + 6x - 20$



8 1.2 $y = x^3 - 7x + 6$

例 1.2 解方程 $x^3 - 7x + 6 = 0$.

解: 同样地我们有 x = u + v, 其中

$$u^3 + v^3 = -6, \qquad uv = \frac{7}{3}.$$

于是 u^3, v^3 满足一元二次方程

$$X^2 + 6X + \frac{343}{27} = 0.$$

然而这个方程没有实数解.

我们可以强行解得

$$u^{3} = -3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3},$$

$$u = \sqrt[3]{-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}} = \frac{3 + 2\sqrt{-3}}{3}, \ \frac{-9 + \sqrt{-3}}{6}, \ \frac{3 - 5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地,

$$v = \frac{3 - 2\sqrt{-3}}{3}, \ \frac{-9 - \sqrt{-3}}{6}, \ \frac{3 + 5\sqrt{-3}}{6},$$

从而

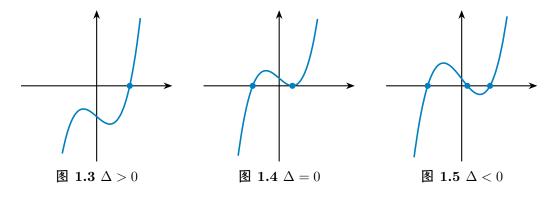
$$x = u + v = 2, -3, 1.$$

对于一般的三次方程 $x^3 + px + q = 0$ 而言, 类似可得:^①

$$x = u - \frac{p}{3u}, \quad u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}, \quad \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

通过分析函数图像的极值点可以知道:

- (1) 当 $\Delta > 0$ 时, 有 1 个实根;
- (2) 当 $\Delta \leq 0$ 时,有 3 个实根 (含重根情形).



所以我们想要使用一元三次方程求根公式的话, 就必须接受负数开方. 为什么当 $\Delta < 0$ 时,从求根公式一定能得到3个实根呢?我们将在1.3.5小节利用复数回答这个问题.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的带负数平方 根的所谓虚数, 却是难以接受. 对复数没有清楚认识的这种情况, 反映在常被人引述的莱布 尼茨的一段话中: 圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那 个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根. $^{\textcircled{0}}$ 直到后来通过十 七、十八世纪一系列数学家对复变函数理论的发展和完善,才使得人们逐渐接受复数并将其 应用到数学和科学的各个角落. 科学发现的过程总是这样充满了曲折与挑战, 只有通过不断 的研究、实验和修正,才能逐步逼近真理.

1.1.2 复数的概念

现在我们来正式介绍复数的概念. 由于方程 $x^2 = -1$ 在复数范围内有两个不同的根. 为 了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们引入符号 i 来表示其中一个根.

定义 1.1

固定一个记号 i, 复数就是形如 z = x + yi 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对 应不同的复数. 分别称 x 和 y 为 z 的实部和虚部, 并记作 Re z = x, Im z = y.

① 若 p=0, q>0,则选择 $u^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}$ 以避免 u=0.

②参考 [5, 第 13 章 2 节].

本书中, 我们将不言自明地使用 x,y,x_1,y_1,\cdots 等记号表示实数. 复数 x+yi 也可表达为形式 x+iy.

记号 i 叫作**虚数单位**,它最先是由欧拉引入并使用. 将全体复数记作 \mathbb{C} ,全体实数记作 $\mathbb{R}^{\mathbb{C}}$ 由于实数 x 可以自然地看成复数 x+0i,在此观点下,我们有 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. 我们简记 x+0i = x,0+yi = yi.

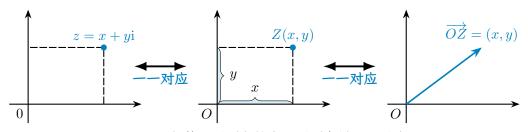


图 1.6 复数、平面上的点、平面向量一一对应

由定义可知,每一个复数都可以唯一地表达成 x+yi 这样的形式. 对于建立了直角坐标系的平面,平面上的点 (x,y) 和复数 x+yi 一一对应. 将建立起这种对应的平面称为**复平面**. 于是,我们可将复数 z 与它对应的点 Z 等同起来. 复数 z 还可与复平面上起于原点、终于点 Z 的向量 \overrightarrow{OZ} ——对应.

为了强调表示复数的字母 z, w 等的不同, 也可将对应复平面称之为 z 平面、w 平面等等.

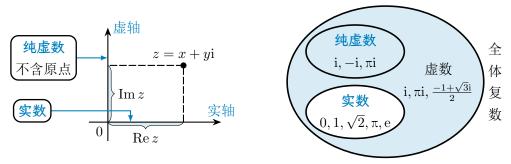


图 1.7 实数、纯虚数与复数、复平面的关系

将复平面的 x 轴和 y 轴分别称为**实轴**和**虚轴**. 当 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, z = x 是实数, 它落在实轴上. 称不是实数的复数是**虚数**. 当 $\operatorname{Re} z = 0$ 且 $z \neq 0$ 时, 称 $z = yi \neq 0$ 是纯虚数, 它落在虚轴上. 注意虚轴上的点并不都是纯虚数, 因为 0 也在虚轴上.

例 1.3 实数 x 取何值时, $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)$ i 是:

① 全体复数、实数、有理数、整数、自然数构成的集合分别记作 $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$,整数集合记号来自其德语 Zahlen, 其余来自它们的 英文名称 complex number, real number, rational number, natural number. 这些符号叫做空心体或白粗体, 手写时, 可在普通字母格式上添加一条竖线 (对于 \mathbb{Z} 是斜线) 来区分. 有些文献使用黑粗体字母 $\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ 来表示这些集合.

- (i) 实数;
- (ii) 纯虚数.

解: (i) 由题设有 $\text{Im } z = x^2 - 5x - 6 = 0$, 解得 x = -1 或 6.

(ii) 由题设有 $\text{Re } z = x^2 - 3x - 4 = 0$, 解得 x = -1 或 4. 但同时要求 $\text{Im } z = x^2 - 5x - 6 \neq 0$ 0, 因此 $x \neq -1$, x = 4.

练习 1.1 若
$$x^2(1+i) + x(5+4i) + 4 + 3i$$
 是纯虚数, 则实数 $x =$.

1.1.3 复数的代数运算

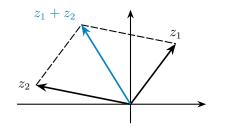
设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i.$ 由向量的加法和减法可以自然定义出复数的加法和减 法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

 $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$

由向量加法的性质可知复数加法满足交换律和结合律:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$
, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.



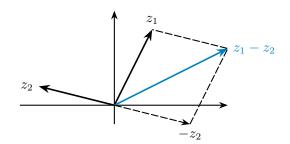


图 1.8 复数的加法和减法

规定 $i \cdot i = -1$. 若我们希望 \mathbb{C} 上的运算满足乘法交换律、结合律和分配律,则复数乘法 应当定义为

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 \mathbf{i})(x_2 + y_2 \mathbf{i})$$

= $x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{i} \cdot x_2 + y_1 \mathbf{i} \cdot y_2 \mathbf{i}$
= $(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) \mathbf{i}$.

容易证明, 这样定义的复数乘法的确满足交换律、结合律和分配律:

$$z_1z_2 = z_2z_1$$
, $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$, $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2+z_1z_3$.

当 $z = x + yi \neq 0$ 时, 可以发现

$$(x + yi) \cdot \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = 1.$$

从而复数除法定义为

$$\frac{z_1}{z_2} = (x_1 + y_1 \mathbf{i}) \cdot \frac{x_2 - y_2 \mathbf{i}}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \mathbf{i}.$$

不难看出, 当 z_1, z_2 是实数时, 相应的四则运算与实数的四则运算结果是相同的.

对于正整数 n, 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n \ \uparrow \ z}.$$

当 $z \neq 0$ 时, 还可以定义

$$z^0 = 1, \qquad z^{-n} = \frac{1}{z^n}.$$

例 1.4 (i) 容易知道 $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$. 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n} = 1$$
, $i^{4n+1} = i$, $i^{4n+2} = -1$, $i^{4n+3} = -i$.

- (ii) $\diamondsuit z = -1 + \sqrt{3}i$, $\bigcup z^3 = 8$.

$$z^2 = 2i$$
, $z^3 = -2 + 2i$, $z^4 = -4$, $z^8 = 16 = 2^4$.

练习 1.2 若 $z^2 = 1 + 2\sqrt{6}i$, 则 z =

实数范围内的诸多代数恒等式如等差数列求和公式、等比数列求和公式、二项式展开、平方 (立方) 差公式等在复数情形也是成立的. ①

例 1.5 计算
$$1+i+i^2+i^3+i^4$$
.

解: 根据等比数列求和公式,

$$1+i+i^2+i^3+i^4=\frac{i^5-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1.$$

练习 1.3 化简
$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{1000} =$$
_____.

① 这里的代数恒等式是指只包含四则运算的、在实数范围内恒成立的等式. 我们可以利用定理?? 说明这些等式为何在复数情形也是成立的.

1.1.4 共轭复数

定义 1.2

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 \overline{z} . 换言之, $\overline{x+yi}=x-yi$.

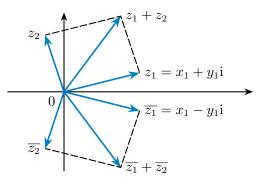


图 1.9 共轭复数

练习 1.4 z 关于虚轴的对称点是什么?关于原点的对称点是什么?

从定义出发,不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 \overline{z} 的共轭复数, 即 $\overline{\overline{z}} = z$.

(2)
$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}, \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}}.$$

- (3) $z\overline{z} = (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2$.
- (4) $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$, $z \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$.
- (5) $z = \overline{z}$ 当且仅当 z 是实数; $z = -\overline{z}$ 当且仅当 z 是纯虚数或 z = 0.
- (2) 表明共轭运算和四则运算交换. (4) 表明了复数 z 的实部 x 和虚部 y 可以与 z,\overline{z} 相 互线性表示. 这意味着使用共轭复数进行计算和证明, 往往比直接使用 x, y 的表达式更简单.

例 1.6 证明:
$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$$
.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i,$ 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部来证 明. 但利用共轭复数可以更简单地证明它.

证明: 根据性质 (1) 和 (2),

$$\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2.$$

再由性质 (4) 可得

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2 \operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$

例 1.7 设 z = x + yi 且 $y \neq 0$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $z + \frac{1}{z}$ 是实数.

证明: 由题设可知 $z \neq 0$. 由性质 (5) 可知, $z + \frac{1}{z}$ 是实数当且仅当

$$z+\frac{1}{z}=\overline{\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}.$$

化简可知上述等式等价于

$$(z - \overline{z})(z\overline{z} - 1) = 0.$$

由 $y \neq 0$ 可知 $z \neq \overline{z}$. 故上述等式等价于 $z\overline{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$.

由于 zz 是一个实数, 因此在作复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例 1.8 设
$$z_1 = 10 - 5i, z_2 = 4 + 3i, 求 \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}.$$

解: 由于

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{10 - 5i}{4 + 3i} = \frac{(10 - 5i)(4 - 3i)}{4^2 + 3^2} = \frac{(40 - 15) + (-20 - 30)i}{25} = 1 - 2i,$$

故
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = 1 + 2i.$$

练习 1.5 计算
$$\frac{2-3i}{2-i} =$$
_______.

1.2 复数的三角与指数形式

1.2.1 复数的模和辐角

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系. 设复数 z=x+yi 对应点的极坐标为 (r,θ) . 由极坐标和直角坐标的转化关系可知:

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta,$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta=\arctan\frac{y}{x}+2k\pi \ \ \vec{\boxtimes} \ \arctan\frac{y}{x}+\pi+2k\pi, \ k\in\mathbb{Z}.$$

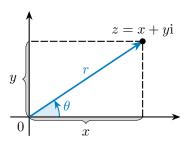


图 1.10 复数的模和辐角

- (1) 称 r 为 z 的模, 记为 $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (2) 称 θ 为 z 的**辐角**, 记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$.

约定 () 的辐角没有意义.

任意非零复数 z 的辐角有无穷多个. 这是因为若 θ 是 z 的辐角, 则 $\theta + 2k\pi$ 也是 z 的辐 角, 其中 k 是任意整数. 不难知道^①

$$\operatorname{Arg} \overline{z} = \operatorname{Arg} \frac{1}{z} = -\operatorname{Arg} z.$$

我们固定选择 $\operatorname{Arg} z$ 中位于区间 $(-\pi,\pi]$ 的那个,并称之为**辐角主值**^②,记作 $\operatorname{arg} z$.那么

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{arg} z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

根据 z 所处的位置, 我们有

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \ge 0, \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$
(1.1)

等式
$$\arg \overline{z} = \arg \frac{1}{z} = -\arg z$$
 不一定成立.

练习 1.6 上述等式何时成立?

① 这里等式两边都可以取很多值, 相等是指两边所能取到的值构成的集合相等. 可以看出

$$\operatorname{Arg} \overline{z} = \operatorname{Arg} \frac{1}{z} = \{ -\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}, \qquad -\operatorname{Arg} z = \{ -\theta - 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

从而有 ${\rm Arg}\, \overline{z}={\rm Arg}\, \frac{1}{z}=-{\rm Arg}\, z$. 后文中包含 ${\rm Arg}, {\rm Ln}, \sqrt[n]{z}$ 等函数的等式的含义也是类似的. ② 实际上我们可以任选长度为 2π 的半开半闭区间作为辐角主值范围. 常见的选择还有 $[0,2\pi)$.



辐角主值的计算

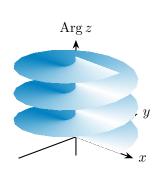


图 1.11 复数 z 的辐角 Arg z

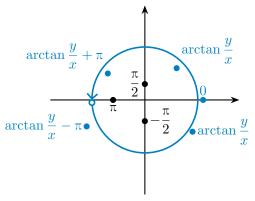


图 1.12 辐角主值与复数位置的关系

复数的模满足如下性质:

- $(1) \ z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2;$
- (2) $|\operatorname{Re} z| \not | \operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|;$
- (3) $||z_1| |z_2|| \le |z_1 \pm z_2| \le |z_1| + |z_2|$;
- (4) $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$.

这些性质可通过图 1.13 使用几何直观证明, 也可利用代数方法证明.

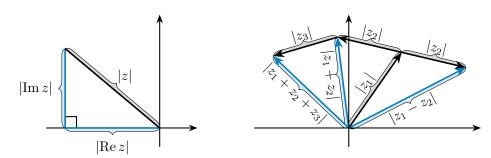


图 1.13 复数模的不等式关系

例 1.9 证明: (i) $|z_1z_2| = |z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;

- (ii) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}).$
- (iii) $||z_1| |z_2|| \le |z_1 + z_2|$.

证明: (i) 根据性质 (1),

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2.$$

由于复数模是非负实数, 因此 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$. 将 z_2 换成 $\overline{z_2}$ 得到

$$|z_1\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

(ii) 我们有

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2,$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}\overline{z_2}.$$

由于 $\overline{z_1\overline{z_2}} = \overline{z_1}z_2$, 因此两式相等.

(iii) 根据 (i), 我们有

$$||z_1| - |z_2||^2 = |z_1|^2 - 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = |z_1|^2 - 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2,$$
$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2.$$

因此我们只需证明 $-|z_1\overline{z_2}| \leq \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$, 即 $|-z_1\overline{z_2}| \geq \operatorname{Re}(-z_1\overline{z_2})$. 这由性质 (2) 得到.

练习 1.7 什么时候
$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|=|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$$
 成立?

1.2.2 复数的三角形式和指数形式

由 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 可得

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

我们把这种形式称为复数的**三角形式**. 定义 $e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$. 则上述形式可改写为复数 的指数形式:①

$$z = r e^{i\theta}$$

这两种形式是等价的,目前我们将指数形式视为三角形式的一种缩写方式.指数形式也可写 作 $z = r \exp(i\theta)$. 求复数的三角形式和指数形式的关键在于计算模和辐角.

例 1.10 将 $z = -2 - \sqrt{12}$ i 化成三角形式和指数形式.

解: 显然 $|z| = \sqrt{4+12} = 4$. 由于 z 在第三象限, 由公式 (1.1) 可知

$$\arg z = \arctan \frac{-\sqrt{12}}{-2} - \pi = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

因此 z 的三角形式和指数形式为

$$z = 4\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = 4e^{-\frac{2\pi i}{3}}.$$

求复数的三角形式或指数形式时,可以任取一个辐角,不要求必须是辐角主值.

① $e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$ 叫作**欧拉恒等式**, 它最先由科茨于 1714 年提出 [6, 第 19 章 3 节], 后被欧拉于 1748 年重新发现. 我们会 在??说明为何如此定义,并给出指数函数的一般形式.



欧拉 (Leonhard Euler),瑞士数学家,被誉为数学史上的巨匠. 欧拉是数学史上最多产的数学家,平均每年写出八百多页的论文,还写了大量的力学、分析学、几何学、变分法等的课本,如《无穷小分析引论》、《微分学原理》、《积分学原理》等,都成为数学界中的经典著作. 欧拉在数学的研究领域非常广泛,因此在许多数学的分支中也可经常见到以他的名字命名的重要常数、公式和定理,如欧拉线、欧拉定理、欧拉变换公式、欧拉函数、欧拉方程、欧拉公式等. 欧拉还创造了一批数学符号,如 f(x), \sum , i, e 等,使得数学更容易表述、推广. 除此之外,欧拉还是刚体力学和流体力学的奠基者,弹性系统稳定性理论的开创人. 欧拉的一生都在为科学、工程学和数学做贡献,他的著述浩瀚,不仅包含科学创见,而且富有科学思想,给后人留下了极其丰富的科学遗产和为科学献身的精神. "读读欧拉,他是我们大家的老师."

例 1.11 设 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. 将 $z = \sin \theta - i \cos \theta$ 化成三角形式和指数形式.

解法一: 显然 $|z| = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} = 1$. 由于 z 在第四象限, 由公式 (1.1) 可知

$$\arg z = \arctan\left(-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = -\arctan\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \theta - \frac{\pi}{2}.$$

因此 z 的三角形式和指数形式为

$$z = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}.$$

解法二: 利用三角函数间的等式关系得到

$$\sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),$$
$$-\cos \theta = -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

因此 z 的三角形式和指数形式为

$$z = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}.$$

练习 1.8 将 $z = \sqrt{3} - 3i$ 化成三角形式和指数形式.

例 1.12 设 $z = e^{i\theta}$, 其中 $-\pi < \theta < \pi$. 求 1+z 的三角形式和指数形式.

解: 我们有

$$1+z=(1+\cos\theta)+\mathrm{i}\sin\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{\theta}{2}\Big(\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\Big).$$

由 $-\pi < \theta < \pi$ 可知 $\cos \frac{\theta}{2} > 0$. 因此 1+z 的三角形式和指数形式为

$$1 + z = 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{i\theta}{2}}.$$

同理, 从图 1.14 容易得到:

$$re^{i\theta} + re^{i\varphi} = 2r\cos\left(\frac{\theta - \varphi}{2}\right)e^{\frac{i(\theta + \varphi)}{2}}.$$
 (1.2)

注意当 $\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)<0$ 时, 这离指数形式还差一步变形.

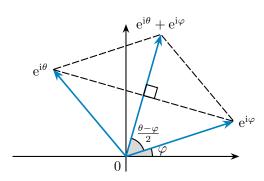


图 1.14 模相等的复数之和

复数的乘除、乘幂和方根 1.3

三角形式和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

1.3.1 复数的乘除

定理 1.4

设非零复数 21,22 的三角形式分别为

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2),$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

若表达为指数形式, 上述等式变为

$$r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \qquad \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

该定理表明

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \quad \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \tag{1.3}$$

等式 $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$ 不一定成立. 事实上、当

且仅当等式右侧落在区间 $(-\pi,\pi]$ 内时上述等式才成立,否则等式两侧会相差 $\pm 2\pi$. 例如 $z_1=z_2=\mathrm{e}^{0.99\pi\mathrm{i}},\,z_1z_2=\mathrm{e}^{1.98\pi\mathrm{i}},$

$$\arg z_1 + \arg z_2 = 0.99\pi + 0.99\pi = 1.98\pi, \quad \arg(z_1 z_2) = -0.02\pi.$$

证明:根据和差的正弦、余弦公式可知

$$z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

= $r_1 r_2 ((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2))$
= $r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)),$

由此乘法情形得证.

设 $z_1=z_2\cdot r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则由乘法情形可知 $rr_2=r_1$ 且 $\theta+\theta_2$ 是 z_1 的辐角. 因此 $r=\frac{r_1}{r_2}$, θ 可取 $\theta_1-\theta_2$.

复数乘法的几何意义 1.3.2

从定理 1.4 可以看出, 乘以复数 $z = re^{i\theta}$ 可以理解为模放大为 r 倍, 并沿逆时针旋转角 g θ . 由此我们可以利用复数来解决平面几何中的问题.

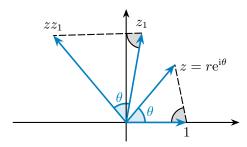


图 1.15 复数乘法的几何意义

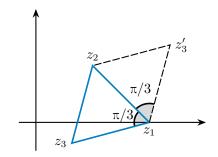
例 1.13 已知正三角形的两个顶点为 $z_1 = 2$ 和 $z_2 = 1 + i$, 求它的第三个顶点.

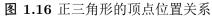
解: 由于 $\overline{z_1z_3}$ 为 $\overline{z_1z_2}$ 逆时针或顺时针旋转 $\frac{\pi}{3}$, 根据复数乘法的几何意义,

$$\begin{split} z_3 - z_1 &= (z_2 - z_1) \mathrm{e}^{\pm \frac{\pi \mathrm{i}}{3}} = (-1 + \mathrm{i}) \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \mathrm{i} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \mathrm{i} \, \, \, \mathring{\!\!\!\!/} \, \, \, \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \mathrm{i}. \end{split}$$

因此

$$z_3 = \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \mathrm{i} \ \ \dot{x} \ \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2} \mathrm{i}.$$





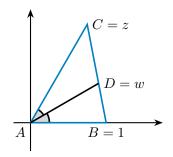


图 1.17 三角形角平分线与顶点位置关系

例 1.14 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 证明: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.

证明: 不妨设 A=0, B=1, C=z, D=w. 由于 B, C, D 共线, 因此

$$\lambda = \frac{BD}{BC} = \frac{w-1}{z-1} \in (0,1),$$

于是

$$w = 1 + \lambda(z - 1) = \lambda z + (1 - \lambda).$$

由于 $\angle BAD = \angle CAD$, 根据复数乘法的几何意义, $\frac{z-0}{w-0}$ 是 $\frac{w-0}{1-0}$ 的正实数倍, 即

$$\frac{w^2}{z} = \lambda^2 z + 2\lambda(1-\lambda) + \frac{(1-\lambda)^2}{z} \in \mathbb{R},$$

于是

$$\lambda^2 z + \frac{(1-\lambda)^2}{z} = \lambda^2 \overline{z} + \frac{(1-\lambda)^2}{\overline{z}}, \qquad (\lambda^2 |z|^2 - (1-\lambda)^2)(z - \overline{z}) = 0.$$

显然 $z \neq \overline{z}$. 又因为 $0 < \lambda < 1$, 所以

$$\frac{AC}{AB} = |z| = \frac{1 - \lambda}{\lambda} = \frac{BC - BD}{BD} = \frac{CD}{BD}.$$

1.3.3 复数的乘幂

由定理 1.4 归纳可知

定理 1.5

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ 是一非零复数. 对任意整数 n, 有

$$z^{n} = r^{n}(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^{n}e^{in\theta}.$$

特别地, 当 r=1 时, 我们得到棣莫弗公式

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

例 1.15 求
$$(1+i)^n + (1-i)^n$$
.

解: 由于

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad 1 - i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right),$$

因此

$$(1+\mathrm{i})^n + (1-\mathrm{i})^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\frac{n\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

练习 1.10 计算 (√3+i)⁴⁸ =____.

当 $|n| \ge 2$ 时, 等式 $\operatorname{Arg}(z^n) = n \operatorname{Arg} z$ 总不成立, 等式 $\operatorname{arg}(z^n) = n \operatorname{arg} z$ 不一定成立. 这是因为

$$\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{arg} z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

 $n \operatorname{Arg} z = n \operatorname{arg} z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$

二者能取到所有值形成的集合不相等. 而等式 $\arg z^n = n \arg z$ 也仅在 $\arg z \in (-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}]$ 时成 立.

复数的乘幂可用干计算三角函数有关的求和式.

例 1.16 设 $0 < \theta < 2\pi$, n 是正整数. 计算

- (i) $A_n = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta$;
- (ii) $B_n = \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta$.

解: 设 $z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$, 则 $z \neq 1$,

$$A_n + iB_n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

由公式 (1.2) 可知

$$e^{i\varphi}-1=e^{i\varphi}+e^{i\pi}=2\cos\Bigl(\frac{\pi-\varphi}{2}\Bigr)\exp\Bigl(\frac{\varphi+\pi}{2}i\Bigr)=2\sin\frac{\varphi}{2}\exp\Bigl(\frac{\varphi+\pi}{2}i\Bigr),$$

于是

$$z^{n+1} - 1 = e^{i(n+1)\theta} - 1 = 2\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right) \exp\left(\frac{(n+1)\theta + \pi}{2}i\right),$$
$$z - 1 = e^{i\theta} - 1 = 2\sin\frac{\theta}{2} \exp\left(\frac{\theta + \pi}{2}i\right).$$

两式相除得到

$$A_n + iB_n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \exp\left(\frac{n\theta}{2}i\right).$$

它的实部和虚部分别为

$$A_n = \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\cos\frac{n\theta}{2}, \qquad B_n = \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\sin\frac{n\theta}{2}.$$

1.3.4 复数的方根

我们利用复数乘幂公式来计算非零复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$, 其中 n 是正整数. 设

$$w^n = z = re^{i\theta}, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos \theta + i\sin \theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$. 为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的 唯一的 n 次正实根, 称之为**算术根**^①.

由于 $n\varphi$ 与 θ 的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

故

$$w = w_k = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right).$$

不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 w_0, w_1, \dots, w_{n-1} 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \dots, n-1$.

定理 1.6

任意非零复数 $z = re^{i\theta}$ 的 n 次方根有 n 个值:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right) = \sqrt[n]{r} \left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right),$$

其中 $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

例 1.17 求 $\sqrt[4]{1-i}$.

解: 由于

$$1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

因此

$$\sqrt[4]{1-\mathrm{i}} = \sqrt[8]{2} \exp\left(\frac{-\pi/4 + 2k\pi}{4}\mathrm{i}\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

于是该方根全部值为

$$w_0 = \sqrt[8]{2}e^{-\frac{\pi i}{16}}, \quad w_1 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{7\pi i}{16}}, \quad w_2 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{15\pi i}{16}}, \quad w_3 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{23\pi i}{16}}.$$

显然 $w_{k+1} = iw_k$, 所以如图 1.18 所示, w_0, w_1, w_2, w_3 形成了一个正方形.

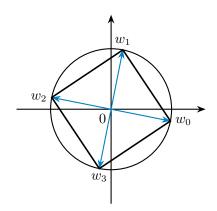


图 1.18 ∜1 − i 的所有值

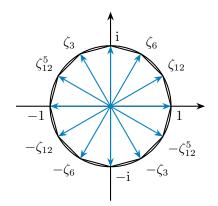


图 1.19 所有的 12 次单位根

① 部分文献会使用 (√r) 来表示算术根, 以示区分.

烽 练习 1.11 计算 ∜─1 = ...

我们总有

$$\operatorname{Arg}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\operatorname{Arg}z = \frac{\arg z + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$
(1.4)

其中左边表示 z 的所有 n 次方根的所有辐角. 当 $n \ge 2$ 时, $\arg \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \arg z$ 总不成立. 这 是因为等式左侧是多值的.

我们称 1 的 n 次方根为 n 次单位根. 所有的 n 次方根为

$$\zeta^k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

其中 $\zeta=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$. 对于任意非零复数 z, 它的 n 次方根满足 $w_k=w_0\zeta^k$. 于是 z 的 n 次方根的 模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\frac{2\pi}{n}$. 因此它们均匀分布在以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆 周上, 它们构成该圆的一个内接正 n 边形的顶点.

例 1.18 显然 n 次单位根都是 nk 次单位根.

(i) 16 次单位根全体为

$$\pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad \pm \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$
$$\pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \pm i \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

(ii) 12 次单位根全体为

$$\underbrace{\frac{3 \, \text{ x \'e} \, \text{det}}{1, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{3} i}{2}, \quad -1, \quad \frac{1 \pm \sqrt{3} i}{2}}_{6 \, \text{ x \'e} \, \text{det}}, \quad \pm i, \quad \pm \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \quad \pm \frac{\sqrt{3} - i}{2}.$$

(iii) 令 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, 则我们有

$$1 + \zeta + \zeta^{2} + \dots + \zeta^{n-1} = \frac{\zeta^{n} - 1}{\zeta - 1} = 0,$$

$$x^{n} - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (x - \zeta^{k}) = (x - 1)(x - \zeta)(x - \zeta^{2}) \cdots (x - \zeta^{n-1}).$$

1.3.5 实系数三次方程根的情况(选读)

现在我们来看三次方程 $z^3+pz+q=0$ 的根, 其中 $p\neq 0$. 回顾 1.1.1 小节中的求根公式:

$$z = u + v$$
, $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$, $uv = -\frac{p}{3}$, $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$.

设该方程的三个根为 z_1, z_2, z_3 , 则^①

$$z^{3} + pz + q = (z - z_{1})(z - z_{2})(z - z_{3})$$

$$= z^{3} - (z_{1} + z_{2} + z_{3})z^{2} + (z_{1}z_{2} + z_{2}z_{3} + z_{3}z_{1})z - z_{1}z_{2}z_{3}.$$

设 $a = z_1 z_2$, 则 $z_1 + z_2 = -z_3$, $p = a - z_3^2$, $q = -az_3$. 于是

$$((z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1))^2 = (z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2)(z_3^2 - (z_1 + z_2)z_3 + z_1z_2)^2$$

$$= (z_3^2 - 4a)(2z_3^2 + a)^2$$

$$= 4z_3^6 - 12az_3^4 - 15a^2z_3^2 - 4a^3$$

$$= 4(z_3^2 - a)^3 - 27a^2z_3^2$$

$$= -4p^3 - 27a^2 = -108\Delta.$$

(1) 若 $\Delta > 0$, 设 $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ 为三次单位根, 设实数 α 满足

$$\alpha^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta},$$

则

$$u = \alpha, \ \alpha \omega, \ \alpha \omega^2, \qquad z = \alpha - \frac{p}{3\alpha}, \ \alpha \omega - \frac{p}{3\alpha}\omega^2, \ \alpha \omega^2 - \frac{p}{3\alpha}\omega.$$

由于

$$((z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1))^2 = -108\Delta < 0,$$

因此该方程无重根,且不能有三个实根.注意到第一个根是实根,后两个根互为共轭.因此此时只有一个实根.

(2) 若 $\Delta \leq 0$, 则 p < 0,

$$|u|^6 = \left| -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta} \right|^2 = -\frac{p^3}{27}.$$

于是 $|u|^2 = -\frac{p}{3} = uv$, $v = \overline{u}$. 设

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}} = u_1, u_2, u_3,$$

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (z_i - z_j)^2,$$

其中 z_1, \cdots, z_n 表示其所有复数根. 判别式总可以表示为多项式系数的多项式形式. 这里, 三次多项式 z^3+pz+q 的判别式 就是 $-108\Delta=-4p^3-27q^2$.

① 一般 n 次多项式的判别式定义为

则 u_1, u_2, u_3 都是虚数. 从而得到 3 个实根

$$x = u_1 + \overline{u_1}, \ u_2 + \overline{u_2}, \ u_3 + \overline{u_3}.$$

当且仅当 $\Delta = 0$ 时有重根.

单位根的应用 (选读)

单位根在代数、数论、组合等领域有着丰富的应用. 本小节中我们将试举几例.

1. 单位根在三角函数运算中的应用

例 1.19 设 $m = 2n + 1 \ge 3$ 是一个奇数, 计算

$$I = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi}{m} = \cos \frac{\pi}{m} \cos \frac{2\pi}{m} \cdots \cos \frac{n\pi}{m}.$$

解:设

$$J = \prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k\pi}{m} = \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{k\pi}{m} \cos \frac{(m-k)\pi}{m} = (-1)^{n} I^{2}.$$

设 $\zeta=\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{m}}$ 是 2m 次单位根,则 $\zeta^k\cdot\zeta^{m-k}=\zeta^m=-1$. 由于 $\overline{\zeta}=\zeta^{-1}$,因此

$$J = \prod_{k=1}^{m-1} \cos \frac{k\pi}{m} = \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\zeta^k + \overline{\zeta}^k}{2} = \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\zeta^k + \zeta^{-k}}{2}$$
$$= 2^{1-m} (\zeta\zeta^2 \cdots \zeta^{m-1})^{-1} \prod_{k=1}^{m-1} (\zeta^{2k} + 1)$$
$$= 2^{1-m} (-1)^n \prod_{k=1}^{m-1} (\zeta^{2k} + 1).$$

注意到 (2k 都是 m 次单位根, 且不包括 1, 因此

$$x^{m} - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^{m-1} (x - \zeta^{2k}).$$

令 x = -1 得到

$$\prod_{k=1}^{m-1} (\zeta^{2k} + 1) = (-1)^{m-1} = 1,$$

于是 $J=2^{1-m}(-1)^n$. 由 I>0 得到 $I=2^{\frac{1-m}{2}}=2^{-n}$.

例 1.20 求 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}_{n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的特征值.

解:设

$$f_n(\lambda) = |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}_n| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ & -1 & \lambda & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

是 A_n 的特征多项式. 沿着第一行作拉普拉斯展开得到

$$f_{n} = \lambda f_{n-1} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & & & \\ & \lambda & -1 & & \\ & -1 & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda f_{n-1} - f_{n-2}.$$

设 t 是方程 $x^2 - \lambda x + 1 = 0$ 的一个根, 则另一个根是 t^{-1} . 显然

$$f_1 = \lambda = t + t^{-1},$$

 $f_2 = \lambda^2 - 1 = t^2 + 1 + t^{-2}.$

归纳可得

$$f_n = t^{-n} + t^{-n+2} + \dots + t^{n-2} + t^n = \begin{cases} \frac{t^{2n+2} - 1}{t^n (t^2 - 1)}, & \not\Xi \ t \neq \pm 1, \\ (n+1)t^n, & \not\Xi \ t = \pm 1. \end{cases}$$

若 $f_n(\lambda) = 0$, 则 $t \neq \pm 1$ 且 $t^{2n+2} = 1$, 即

$$t = \exp\left(\frac{k\pi i}{n+1}\right), \quad k = \pm 1, \cdots, \pm n, \qquad \lambda = t + t^{-1} = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

由于 k 和 -k 对应相同的 λ , 因此 A_n 的所有特征值为

$$\lambda = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

2. 单位根在因式分解中的应用

例 1.21 将多项式 $x^{12}-1$ 因式分解成有理系数多项式的乘积.

解: 设 $\zeta = e^{\frac{\omega}{6}}$ 是 12 次单位根. 设集合 S_k 由 k 次单位根组成, 但不包括更低次的单位 根. 那么所有的 12 次单位根可以分组为:

$$S_{1} = \{1\},$$

$$S_{2} = \{-1\},$$

$$S_{3} = \{\zeta^{4}, \zeta^{8}\},$$

$$S_{4} = \{\zeta^{3}, \zeta^{9}\},$$

$$S_{6} = \{\zeta^{2}, \zeta^{10}\},$$

$$S_{12} = \{\zeta, \zeta^{5}, \zeta^{7}, \zeta^{11}\}.$$

令

$$\Phi_k(x) = \prod_{t \in S_k} (x - t).$$

由单位根的性质可知

$$\begin{split} P_1(x) &= x - 1 = \Phi_1(x), \\ P_2(x) &= x^2 - 1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x), \\ P_3(x) &= x^3 - 1 = \Phi_1(x)\Phi_3(x), \\ P_4(x) &= x^4 - 1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_4(x), \\ P_6(x) &= x^6 - 1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)\Phi_6(x), \\ P_{12}(x) &= x^{12} - 1 = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)\Phi_4(x)\Phi_6(x)\Phi_{12}(x). \end{split}$$

计算可得

$$\Phi_1(x) = P_1 = x - 1, \qquad \qquad \Phi_2(x) = \frac{P_2}{P_1} = x + 1,$$

$$\Phi_3(x) = \frac{P_3}{P_1} = x^2 + x + 1, \qquad \qquad \Phi_4(x) = \frac{P_4}{P_2} = x^2 + 1,$$

$$\Phi_6(x) = \frac{P_6 P_1}{P_3 P_2} = x^2 - x + 1, \qquad \qquad \Phi_{12}(x) = \frac{P_{12} P_2}{P_6 P_4} = x^4 - x^2 + 1.$$

故

$$x^{12} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

一般地,

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x),$$

其中

是不可约有理系数多项式, 叫作分圆多项式.

3. 单位根在组合计数的应用

例 1.22 集合

$$A = \{1, 2, \cdots, 1001\}$$

有多少个子集满足元素之和是 5 的倍数?

解: 对于集合 A 的每个元素 $a \in A$ 和每个子集 $S \subseteq A$, 有 $a \in S$ 和 $a \notin S$ 两种情形, 因此

$$N(x) := \prod_{a \in A} (1 + x^a) = \sum_{S \subseteq A} \prod_{a \in S} x^a = \sum_{S \subseteq A} x^{\sum_{a \in S} a}.$$

由此可知, N(x) 中 x^k 的系数就是 A 的那些满足元素之和是 k 的子集的个数.

设 N_k 为元素之和是 5m+k 型的子集个数. 那么对于任意 5 次单位根 x,

$$N(x) = N_0 + N_1 x + N_2 x^2 + N_3 x^3 + N_4 x^4.$$

显然 $N(1)=2^{1001}$. 当 $x\neq 1$ 是 5 次单位根时, $x,x^2,x^3,x^4,x^5=1$ 是所有的 5 次单位根, 从 面

$$T^5 - 1 = (T - x)(T - x^2)(T - x^3)(T - x^4)(T - x^5).$$

令 T=-1 可得

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5) = 2.$$

所以

$$N(x) = ((1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5))^{200} \cdot (1+x^{1001}) = 2^{200}(1+x).$$

我们希望找到 c_k 使得

$$N(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$$
(1.5)

对所有的 5 次单位根 x 都成立. 注意到当 $x \neq 1$ 是 5 次单位根时, $1+x+x^2+x^3+x^4=0$. 若

$$c_0 = c_1 = 2^{200} + t,$$
 $c_2 = c_3 = c_4 = t,$

则 (1.5) 对任意 5 次单位根 $x \neq 1$ 都成立, 且

$$N(1) = 2^{201} + 5t = 2^{1001}, \quad t = \frac{2^{1001} - 2^{201}}{5}.$$

设 $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, 则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta & \zeta^2 & \zeta^3 & \zeta^4 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta^4 & \zeta^6 & \zeta^8 \\ 1 & \zeta^3 & \zeta^6 & \zeta^9 & \zeta^{12} \\ 1 & \zeta^4 & \zeta^8 & \zeta^{12} & \zeta^{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 - c_0 \\ N_1 - c_1 \\ N_2 - c_2 \\ N_3 - c_3 \\ N_4 - c_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

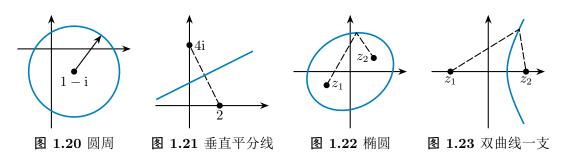
由于该线性方程组的系数行列式是范德蒙行列式, 所以它只有零解, 即

$$N_k = c_k = \begin{cases} \frac{1}{5} (2^{1001} + 3 \times 2^{200}), & k = 0, 1, \\ \frac{1}{5} (2^{1001} - 2 \times 2^{200}), & k = 2, 3, 4. \end{cases}$$

曲线和区域 1.4

1.4.1 复数表平面曲线

很多平面图形能用复数形式的方程来表示,这种表示方式有时候会显得更加直观和易于 理解.



(i) |z-1+i|=2. 该方程表示与 1-i 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 1-i, 例 1.23 半径为 2 的圆.

一般的圆方程为 $|z-z_0|=R$, 其中 z_0 是圆心, R>0 是半径. 设 z=x+yi, $z_0=x_0+y_0$ i, 两边同时平方化简可得

$$R^2 = |z - z_0|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

(ii) |z - 4i| = |z - 2|. 该方程表示与 4i 和 2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直 平分线. 设 z = x + yi, 两边同时平方化简可得 x - 2y + 3 = 0. 该方程也可以表达为 $(1+2i)z + (1-2i)\overline{z} + 6 = 0.$

一般地, 方程 $|z-z_1|=|z-z_2|$, $\overline{w}z+w\overline{z}+c=0$ 和 $\operatorname{Re}(\overline{w}z)=c$ 都表示直线.

(iii)
$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$$
.

- 当 $2a > |z_1 z_2|$ 时,该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆;
- 当 $2a = |z_1 z_2|$ 时, 该方程表示连接 z_1, z_2 的线段;
- 当 $2a < |z_1 z_2|$ 时, 该方程表示空集.

(iv)
$$|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$$
.

- 当 $2a < |z_1 z_2|$ 时,该方程表示以 z_1, z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线一支;
- 当 $2a = |z_1 z_2|$ 时, 该方程表示以 z_2 为起点, 与 z_2, z_1 连线反向的射线;

• 当 $2a > |z_1 - z_2|$ 时, 该方程表示空集.

练习 1.12 $z^2 + \overline{z}^2 = 1$ 和 $z^2 - \overline{z}^2 = i$ 分别表示什么图形?

设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

定义了一条**连续曲线**^①. 这也等价于

$$C: z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [a, b].$$

若除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是简单曲线 $^{\circ}$.

若连续曲线 C 满足两个端点重叠, 即 z(a)=z(b), 则称 C 是闭合曲线. 称闭合的简单曲线为闭路^③.

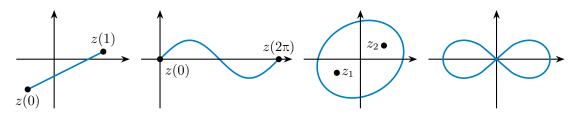


图 1.24 连续曲线

例 1.24 (i) 直线段的参数方程可以写成

$$z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)t, \quad t \in [0, 1],$$

其中 z₀, z₁ 为两个端点. 它是简单曲线.

(ii) 正弦函数曲线段

$$z(t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

是简单曲线.

(iii) 圆 $|z-1+{\rm i}|=2$ 和椭圆 $|z-\sqrt{5}|+|z+\sqrt{5}|=6$ 是简单闭曲线, 其参数方程可分别选为

$$z = 1 - i + 2e^{i\theta}$$
, $z = 3\cos\theta + 2i\sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

(iv) 双纽线 $|z^2 - 1| = 1$ 不是简单闭曲线.

由于复数 z 的实部 x 和虚部 y 可以与 z, \overline{z} 相互线性表示, 因此 x, y 的方程总可以改写为 z, \overline{z} 的方程, 反之亦然.

① 这里考虑的都是连续曲线段, 对于无限长的曲线也可类似定义连续曲线和简单曲线的概念,

② 也叫若尔当曲线.

③ 也叫简单闭曲线或若尔当闭曲线或围道.

1.4.2 区域和闭区域

为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域. 类比高等数学中的邻域和去心邻域, 在复平面中, 称开圆盘^①

$$U(z_0, \delta) = \{z : |z - z_0| < \delta\}$$

为 z_0 的一个 δ **邻域**, 称去心开圆盘

$$\overset{\circ}{U}(z_0, \delta) = \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$$

为 z_0 的一个去心 δ 邻域.



图 1.25 邻域和去心邻域

设 G 是复平面的一个子集, $z_0 \in \mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

- (1) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
- (2) 若存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.
- (3) 若对于 z_0 的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

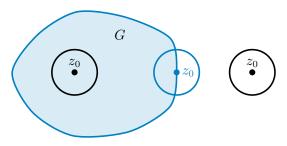


图 1.26 点与集合的位置关系

显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能. 这可类比于区间的端点和区间的关系.

① 为了避免混淆集合中的分割符号和复数的模, 此处用:而不是 | 作为集合的分割符号.

定义 1.7

- (1) 若 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.
- (2) 若 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集.

例如

$$|z - z_0| < R$$
, $1 < \text{Re } z < 3$, $\frac{\pi}{4} < \text{arg } z < \frac{3\pi}{4}$

都给出开集. ① G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集. 直观上看, 由 >, < 的不等式给出的集合往往是开集, 由 >, < 的不等式给出的集合往往是闭集. ②

若 D 是某个开圆盘 U(0,R) 的子集,则称它是有界的. 否则称它是无界的.

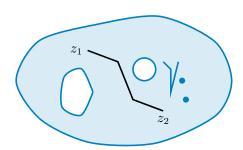


图 1.27 区域和它的边界

定义 1.8

若开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线段连接起来, 则称 D 是一个区域.

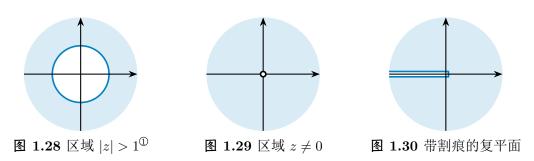
对于区域 D 内的任意两点 z_1, z_2 , 可以在 D 中画一条从 z_1 到 z_2 的折线段. 换言之, 区域是 "连通"的开集.^③ 区域和它的边界的并集叫作闭区域^④, 记作 \overline{D} . 它是一个闭集.

① 注意最后一个集合不包括原点.

② 当不等式中的函数都是连续函数时,由 >, < 的不等式给出的集合是开集,否则未必成立。 连续函数的定义见定义 1.19. 例如 $\arg z > \frac{\pi}{2}$ 包含了负实轴,它既不是开集也不是闭集,因为 $\arg z$ 在负实轴上不连续。例如 $\left|\frac{1}{z}\right| \geqslant 1$ 表示的不是闭集,因为它等价于 $0 < |z| \leqslant 1$.

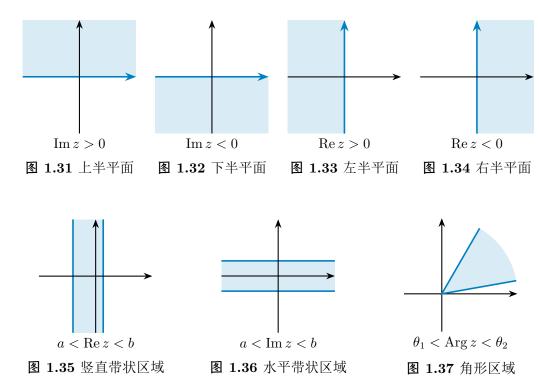
③ 该定义中的折线段可以换成连续曲线段. 它也等价于开集 D 不能写成 $D_1 \cup D_2$, 其中 D_1, D_2 是两个非空开集且 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, 即 D 不能拆成多个"独立"的开集.

④ 也叫闭域.



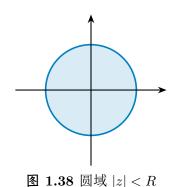
例 1.25 (i) 在图 1.27 中, 阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接, 因 此它是一个区域. 这些线条割痕^②和点构成了它的边界.

- (ii) 区域 D: |z| > 1 是一个无界区域, 它的边界是 |z| = 1, 闭区域是 $|z| \ge 1$. 注意数学 中边界的概念与日常所说的边界是两码事,它并不表示集合被包含在边界内部.
- (iii) 区域 $D_1: z \neq 0$ 表示复平面去掉原点, 它的边界是 $\{0\}$. 区域 $D_2: \arg z \neq \pi$ 表示 带有割痕为负实轴和零的复平面, 它的边界是负实轴和零. D_1 和 D_2 的闭区域都是 \mathbb{C} . 不同 的区域可以拥有相同的闭区域.
- (iv) 图 1.31 至图 1.39 列出了几种常见区域,它们由实部、虚部、模和辐角的不等式所 表示. 其中角形区域中 $\theta_1 < \operatorname{Arg} z < \theta_2$ 表示 z 有一个辐角值 θ 满足 $\theta_1 < \theta < \theta_2$.



① 对于这种向外无限延伸的, 阴影部分描成圆形或方形是无关紧要的, 都表示同一个区域.

② 割痕是指在区域内去掉的一条曲线.



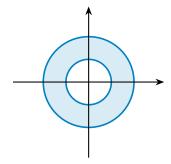


图 1.39 圆环域 r < |z| < R

炼习 1.13 图 1.31 至图 1.39 中的区域对应的闭区域是什么?

1.4.3 区域的特性

闭路 C 把复平面划分成了两个区域,一个有界一个无界. 分别称这两个区域是 C 的内部和外部. C 是它们的公共边界. ①

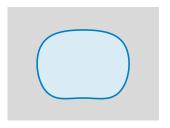


图 1.40 闭路的内部和外部

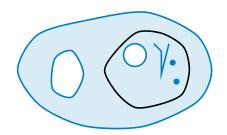


图 1.41 多连通区域

对于一些区域 D, 我们在区域中画一条闭路, 闭路的内部完全包含在 D 中. 而对于另外一些区域 D, 却存在闭路使得其内部不完全包含在 D 中.

定义 1.9

若区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中, 则称 D 是单连通区域. 否则称之为多连通区域.

单连通区域内的任意一条闭路可以"连续地变形"成一个点^②. 这也等价于: 对区域内的任意两点 A, B, 若 ℓ_0 , ℓ_1 是从 A 到 B 的两条连续曲线, 则 ℓ_0 可以"连续地变形"为 ℓ_1 且保

① 波尔查诺最早明确陈述了这个定理,并指出它是需要证明的. 1893 年,若尔当首次给出了证明,其中假设了该定理对于简单多边形成立 (这个情形并不难证明). 不过,数学家普遍认为他的证明是有缺陷的. 不少数学家认为第一个完备证明是由维布伦于1905 年给出的. 参考 [14].

② 即对任一闭路 $\ell: z = \varphi(t), t \in [0,1]$, 存在连续函数 $F: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ (即实部虚部都是连续函数), 使得对 $0 \leqslant s < 1$, $\ell_s: z = F(s,t), t \in [0,1]$ 都是闭路, 且 $F(0,t) = \varphi(t)$, 而 F(1,t) 是常值函数.

持端点不动^①.

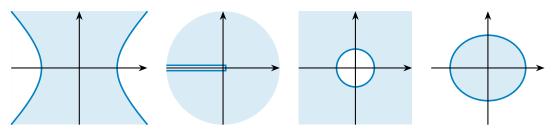


图 1.42 不同的区域特征

例 1.26 (i) $\operatorname{Re}(z^2) \leq 1$. 设 z = x + yi, 则 $\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2 \leq 1$. 这是无界的单连通 闭区域.

- (ii) $\arg z \neq \pi$ 表示角形区域 $-\pi < \arg z < \pi$. 这是无界的单连通区域.
- (iii) $\left|\frac{1}{z}\right| \leq 2$. 即 $|z| \geq \frac{1}{2}$. 这是无界的多连通闭区域.
- (iv) |z+1| + |z-1| < 4 表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通区域.

练习 1.14 集合 |z+1| > |z-i| 是().

(A) 有界单连通区域

(B) 有界多连通闭区域

(C) 无界单连通区域

(D) 无界多连通闭区域

1.5 复变函数

1.5.1 复变函数的定义

回忆**映射**是指两个集合之间的一种对应 $f: A \to B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯 一确定的 b = f(a) 与之对应.

- (1) 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变量函数.
- (2) 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个复变量函数, 简称为复变函数.

例 1.27 以下表达式

 $f_1(z) = \text{Re } z, \quad f_2(z) = \text{arg } z, \quad f_3(z) = z^n \ (n \ 为非零整数), \quad f_4(z) = \frac{z+i}{z^2+1}$

都定义了复变函数.

定义 1.10

- (1) 称 A 为函数 f 的定义域.
- (2) 称 $\{w = f(z) \mid z \in A\}$ 为它的值域.^②

① 即存在连续函数 $F:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{C}$ 使得 $\ell_0:z=F(0,t),\ \ell_1:z=F(1,t),t\in[0,1],\ \exists\ F(s,0)\equiv A,\ F(s,1)\equiv B.$

练习 1.15 上述函数的定义域和值域分别是什么?

在复变函数理论中, 常常会遇到**多值复变函数**, 也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应. 为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 f(z) 的值. 这样便得到了这个多值函数的一个单值分支.

例 1.28 (i) $\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支. 复变函数中常常用开头字母大写来表示多值函数, 对应的单值分支则使用开头字母小写来表示.

(ii) 函数

$$f(z) = \sqrt[n]{|z|} \exp\left(\frac{\mathrm{i}\arg z}{n}\right)$$

是 n 值函数 $\sqrt[n]{z}$ 的一个单值分支, 其中 $z \neq 0$.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 若 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是**一一对** o.

例 1.29 $f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时, f 是一一对应.

若无特别声明, 本书中复变函数总是指单值的复变函数.

1.5.2 复平面的变换

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用 z 平面上的点表示自变量 z 的值, w 平面上的点表示函数 w=f(z) 的值, 然后用这两个复平面之间的变换或映射来表示这种对应关系. 注意到 w 的实部和虚部可以看作 z 的实部和虚部的函数, 即

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y),$$

其中 u,v 是两个二元实函数.

例 1.30 函数 $w = \overline{z}$. 这个映射对应的是沿着 x 轴的翻转映射. 它把任一区域映成和它全等的区域, 且 u = x, v = -y.

② 值域和**陪域** B 往往不相同. 高等数学课程中的函数陪域总可选为 \mathbb{R} , 复变函数课程中的函数陪域总可选为 \mathbb{C} . 尽管在某些情形下,具有不同陪域的函数视为不同的函数,但在高等数学和复变函数课程中,不考虑陪域是否相同,只要定义域和对应关系相同,就视为同一函数.

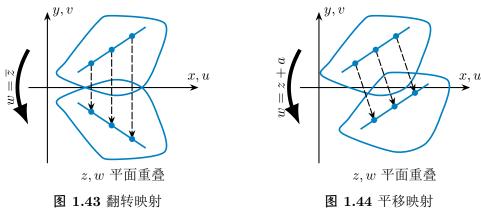


图 1.44 平移映射

例 1.31 函数 w = z + c, 其中 c = a + bi. 这个映射对应的是平移映射. 它把任一区域 映成和它全等的区域,且 u = x + a, v = y + b.

例 1.32 函数 w=az. 设 $a=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则这个映射对应的是一个旋转映射 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映射 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.

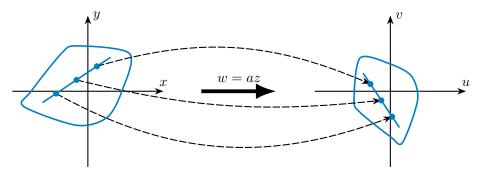


图 1.45 旋转与相似映射复合

例 1.33 函数 $w=z^2$. 这个映射把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域映为角形 区域,并将夹角放大一倍.

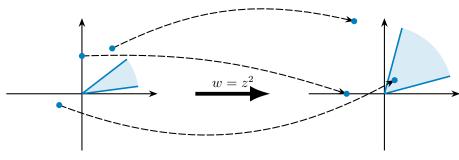


图 1.46 映射 $w=z^2$

由于 $u=x^2-y^2, v=2xy$. 因此它把 z 平面上两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线 $x^2-y^2=c_1, 2xy=c_2$ 分别映成 w 平面上的两族平行直线 $u=c_1, v=c_2$.

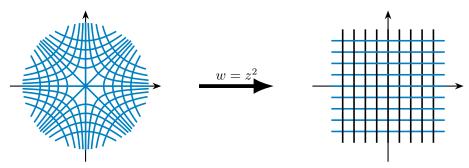


图 1.47 直线在映射 $w = z^2$ 下的原像

例 1.34 求下列集合在映射 $w=z^2$ 下的像.

- (i) 线段 0 < |z| < 3, $\arg z = \frac{\pi}{4}$.
- (ii) 双曲线 $x^2 y^2 = 2$.
- (iii) 扇形区域 $0 < \arg z < \frac{\pi}{3}, \ 0 < |z| < 2.$

解: (i) 设 $z=r\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{4}}$, 则 $w=z^2=r^2\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}}=\mathrm{i}r^2$. 因此它的像是连接 0 和 $9\mathrm{i}$ 的线段 (不含端点).

(ii) 由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

因此 $u=x^2-y^2=2, v=2xy$. 由于任何 $2+\mathrm{i}v$ 均存在平方根 $x+y\mathrm{i}$, 且 $x^2-y^2=2$, 因此 这条双曲线的像的确就是直线 $\mathrm{Re}\,w=2.^{\mathbb{O}}$

(iii) 设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域

$$0 < \arg w < \frac{2\pi}{3}, \quad 0 < |w| < 4.$$

例 1.35 求圆周 |z| = 2 在映射 $w = \frac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解: 不难看出
$$z=\frac{w+1}{w-1}$$
. 由 $\left|\frac{w+1}{w-1}\right|=2$ 可知

$$|w+1| = 2|w-1|, \quad w\overline{w} + w + \overline{w} + 1 = 4w\overline{w} - 4w - 4\overline{w} + 4,$$

化简得到

$$w\overline{w} - \frac{5}{3}w - \frac{5}{3}\overline{w} + 1 = 0, \quad |w - \frac{5}{3}|^2 = \frac{16}{9},$$

① 前面的推理仅说明这条双曲线的像是 Re w = 2 的子集, 还需要说明 Re w = 2 中的每个元素都有原像落在该双曲线内.

即 $\left|w-\frac{5}{3}\right|=\frac{4}{3}$, 它是一个圆周.

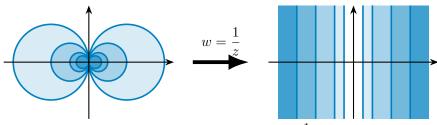


图 1.48 分式线性映射 $w = \frac{1}{z}$

形如 $\frac{az+b}{cz+d}$ 的映射叫作**分式线性映射**, 它总把直线和圆映成直线或圆.

练习 1.16 若分式线性映射 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 将圆周 C 映成直线, 则 C 一定经过哪个复数?

此外, 也有分别用 Re w 和 Im w 图像来表现复变函数映射的, 还有用 |w| 并给不同辐角 的 w 涂上不同颜色来表现复变函数映射的方法.

1.6 极限和连续性

类似于实数的情形, 我们可以定义复数列和复变函数的极限.

1.6.1 数列的极限

定义 1.11

设 $\{z_n\}_{n\geq 1}$ 是一个复数列. 若存在复数 z 满足对任意 $\varepsilon>0$, 存在 N 使得当 $n\geqslant N$ 时, $|z_n-z|<arepsilon$,则称 z 是数列 $\{z_n\}$ 的极限, 记作 $\lim_{n o\infty}z_n=z$.

此时称极限存在或数列收敛. 若不存在这样的 z,则称极限不存在或数列发散. 可以看 出, $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ 等价于实极限 $\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$.

由于复数列极限的定义和实数列极限的定义在形式上完全相同, 因此类似地, 极限的四 则运算法则对于复数列也是成立的.

定理 1.12

设 $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, $\lim_{n\to\infty} w_n = w$, 则 (1) $\lim_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w$; (2) $\lim_{n\to\infty} z_n w_n = zw$;

- (3) 当 $w \neq 0$ 时, $\lim_{n \to \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w}$

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定方法来研究复数列的敛散性.

定理 1.13

设 $z_n = x_n + y_n i, z = x + y i$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x \ \mathbb{H} \ \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

证明: 显然我们只需说明

$$\lim_{n \to \infty} |z_n - z| = 0 \iff \lim_{n \to \infty} |x_n - x| = \lim_{n \to \infty} |y_n - y| = 0.$$

若 $\lim_{n\to\infty} |z_n-z|=0$, 则由三角不等式

$$0 \leqslant |x_n - x|, |y_n - y| \leqslant |z_n - z|$$

和夹逼准则可知 $\lim_{n\to\infty}|x_n-x|=\lim_{n\to\infty}|y_n-y|=0.$ 反之,若 $\lim_{n\to\infty}|x_n-x|=\lim_{n\to\infty}|y_n-y|=0$,则由极限的四则运算法则可知

$$\lim_{n\to\infty} |x_n - x| + |y_n - y| = 0.$$

由三角不等式

$$0 \leqslant |z_n - z| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$$

和夹逼准则可知 $\lim_{n\to\infty} |z_n-z|=0$. 由此定理得证.

例 1.36 设
$$z_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} e^{\frac{\pi i}{n}}$$
. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解: 由于

$$x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \cos \frac{\pi}{n} \to 1, \quad y_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \sin \frac{\pi}{n} \to 0.$$

因此 $\{z_n\}$ 收敛且极限为 1

练习 1.17 设
$$z_n = \frac{(1+i)^n}{2^n}$$
. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

1.6.2 无穷远点和复球面

数列极限的定义可以用邻域的语言重新表述为:

定义 1.14

 $\lim z_n = z$ 是指: 对 z 的任意 δ 邻域 U, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $z_n \in U$. ①

① 一般地,一个点的邻域是指包含它的任意一个开集. 可以说明, $\lim z_n = z \in \mathbb{C}$ 当且仅当对 z 的任意邻域 U, 存在 N 使得当 $n \ge N$ 时, $z_n \in U$. 因为包含 z 的开集一定也包含 z 的一个 δ 邻域.



黎曼 (Bernhard Riemann), 德国数学家, 复变函数理论主要建立者之一. 他对复变函数理 论做出了卓越贡献. 他提出的柯西-黎曼方程是复变函数论中的一项基础性工作, 揭示了 复变函数在某点可导的充要条件. 他阐述了黎曼映射定理, 该定理表明了复球面上的任何 单连通区域都可以相互共形映射.同时,黎曼还引入了黎曼曲面的概念,这是一种描述多 值函数的几何工具. 黎曼曲面在代数几何等领域有着广泛的应用, 为现代数学尤其是几何 和数论的发展做出了重要贡献,他提出的关于刻画素数分布的黎曼猜想,也是千禧年百万 数学奖七大难题之一.

若 $\lim |z_n| = +\infty$, 我们将其记为 $\lim z_n = \infty$. 这也等价于: 对任意 X > 0, 存在 N使得当 $n \to \infty$ 时, $|z_n| > X$. 我们能不能也用邻域的语言来描述 $\lim_{n \to \infty} z_n = \infty$ 呢? 我们将介 绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示方式且自然地包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎 曼研究多值复变函数时引入的.

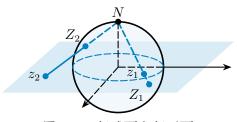


图 1.49 复球面和复平面

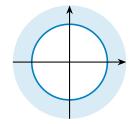


图 1.50 ∞ 的 (去心) 邻域

在三维空间中以复平面原点 O 为球心作一半径为 1 的球面

$$S = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; \big| \; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \big\}.$$

过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于它的北极 N=(0,0,1). 对于复平面上的任意 一点 z, 连接 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 $Z=\varphi(z)$. 反之, 球 面上除了 N 外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点. 也就是说, 球极投影

$$\varphi: \mathbb{C} \longrightarrow S$$

$$z = x + y\mathbf{i} \longmapsto \left(\frac{2x}{|z|^2 + 1}, \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)$$

$$\tag{1.6}$$

将 $S - \{N\}$ 和 \mathbb{C} 建立了一一对应.^①

当 |z| 越来越大时,其对应球面上点也越来越接近 N. 若我们在复平面上添加一个额外的"点"——无穷远点,记作 ∞ ,则**扩充复数集合** $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 就正好和球面上的点一一对应. 称这样的球面为**复球面**,称包含无穷远点的复平面为**扩充复平面**②. 若约定 $|\infty| = +\infty$,则分别称

$$U(\infty, X) = \{ z \in \mathbb{C}^* : |z| > X \}, \qquad \mathring{U}(\infty, X) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| > X \}$$

为 ∞ 的 X 邻域和去心 X 邻域. 这样, 前述极限可统一表述为: 若对 $z \in \mathbb{C}^*$ 的任意 δ 邻域 U, 存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时, $z_n \in U$, 则记 $\lim_{n \to \infty} z_n = z$.

朴素地看,复球面上任意一点可以定义 δ 邻域为与其距离小于 δ 的所有点. 那么在复球面上,普通复数和 ∞ 的邻域具有同等地位. 特别地,复球面上 ∞ 的 δ 邻域通过球极投影对应到扩充复平面上 ∞ 的邻域 $U\left(\infty,\sqrt{\frac{4}{\delta^2}-1}\right)$. ③

注意我们在考虑实数极限的时候有 $\pm \infty$, 但复数情形只有 ∞ . 实际上实数情形的 ∞ 和复数情形的 ∞ 是一回事,考虑球极投影在实轴上的限制, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 可以和圆周建立一一对应. 但 $\mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$ 则对应一种不同的几何表示方式.

1.6.3 函数的极限

定义 1.15

设函数 f(z) 在 z_0 的某个去心邻域内有定义. 若存在复数 A 满足对任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$ 使得当 $0 < |z-z_0| < \delta$ 时, $|f(z)-A| < \varepsilon$,则称 A 为 f(z) 当 $z \to z_0$ 时的极限,记为 $\lim_{} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A$ $(z \to z_0)$.

此时称极限存在. 若不存在这样的 A, 则称极限不存在.

该定义可用邻域的语言重新表述为:

① 集合 A - B 表示**差集**. 即属于 A 但不属于 B 的元素全体形成的集合. 也可记作 $A \setminus B$.

② 也叫闭复平面. 相应地, 将原来的复平面叫作有限复平面或开复平面.

③ 对于有限复数 z, 复球面上 z 的 δ 邻域对应到复平面上一包含 z 的圆域, 但圆心不是 z.

定义 1.16

设函数 f(z) 在 z_0 的某个去心邻域内有定义. 若存在复数 A 满足: 对 A 的任意邻域 V, 存在 z_0 的去心邻域 $\overset{\circ}{U}$ 使得当 $z\in\overset{\circ}{U}$ 时, $f(z)\in V$, 则称 A 为 f(z) 当 $z\to z_0$ 时的极限, 记 为 $\lim f(z) = A$ 或 $f(z) \to A(z \to z_0)$.

在此表述下, 将上述定义中的 z_0 或 A 换成 ∞ , 即可得到 $z \to \infty$ 时的极限定义, 以及 $\lim f(z) = \infty$ 的含义.

类似于复数列情形, 极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理 1.17

对于 $z_0 \in \mathbb{C}^*$, 若极限 $\lim_{z \to z} f(z) = A$, $\lim_{z \to z} g(z) = B$ 都存在, 则

- (1) $\lim_{z \to z} (f \pm g)(z) = A \pm B;$
- (2) $\lim_{z \to z} (fg)(z) = AB;$
- (3) 当 $B \neq 0$ 时, $\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f}{a}\right)(z) = \frac{A}{R}$.

下述定理表明, 研究复变函数极限, 只需研究其实部、虚部两个二元实函数的极限.

定理 1.18

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z_0 = x_0 + y_0 i, A = u_0 + v_0 i,$ 则

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0 \ \mathbb{L} \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0.$$

证明: 我们有

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left| u(x, y) + iv(x, y) - u_0 - iv_0 \right| = 0.$$

其余推导和定理 1.13 的证明类似, 我们省略之.

在学习了复变函数的导数后, 我们也可以使用等价无穷小替换、洛必达法则等工具来计 算极限. 相应结论的证明与高等数学中相应结论的证明类似, 此处不再赘述.

例 1.37 证明: 当
$$z \to 0$$
 时, 函数 $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明: 令
$$z = x + yi$$
, 则 $f(z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 因此

$$u(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad v(x,y) = 0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时, $u(x,y)\to\pm 1$. 因此 $\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}u(x,y)$ 不存在, 从而 $\lim_{z\to z_0}f(z)$ 不存在.

1.6.4 函数的连续性

有了复变函数的极限之后,可自然地定义复变函数的连续性.

定义 1.19

- (1) 若 $\lim_{z \to z} f(z) = f(z_0)$, 则称 f(z) 在 z_0 处连续.
- (2) 若 f(z) 在区域 D 内处处连续, 则称 f(z) 在 D 内连续.

由定理 1.18 可知:

定理 1.20

函数 f(z) = u(x,y) + iv(x,y) 在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续当且仅当 u(x,y) 和 v(x,y) 在 (x_0,y_0) 处连续.

由于复变函数极限和连续的定义和实变量函数情形在形式上完全相同, 因此类似地有:

定理 1.21

- (1) 在 z_0 处连续的两个函数 f(z), g(z) 之和、差、积、商 $(g(z_0) \neq 0)$ 仍然在 z_0 处连续.
- (2) 若函数 g(z) 在 z_0 处连续, 函数 f(w) 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 f(g(z)) 在 z_0 处连续.

例 1.38 (i) 设

$$f(z) = \ln(x^2 + y^2) + i(x^2 - y^2),$$

则 $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x,y) = x^2 - y^2$ 处处连续. 因此 f(z) 在 $z \neq 0$ 处连续.

(ii) 显然 f(z) = z 是处处连续的. 由连续函数的四则运算还连续可知, 多项式函数

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

也处处连续, 有理函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 在 Q(z) 的零点以外处处连续.

例 1.39 证明: 若 f(z) 在 z_0 处连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 处也连续.

证法一: 设

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

那么 u(x,y),v(x,y) 在 (x_0,y_0) 处连续, 从而 -v(x,y) 也在 (x_0,y_0) 处连续. 所以

$$\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$$

在 (x_0, y_0) 处连续.

证法二: 函数 $g(z) = \overline{z} = x - iy$ 处处连续, 从而 $g(f(z)) = \overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续.

可以看出, 由于 ℂ 和 ℝ 类似, 也是一个域, 因此复变函数与单变量实函数的极限和连续 具有类似形式与结论. 另一方面, 由于 ℂ 和 №2 一一对应, 复变函数与两个二元实函数的极 限和连续也没有太大区别. 这是复数这一数学对象和 \mathbb{R} 以及 \mathbb{R}^2 这两个不同的数学对象的 共性. 数学家们正是从这一体两面的现象中发现了复数函数的独特之处, 一方面它具有和单 变量实函数类似的导数和微分, 另一方面它的实部和虚部又具有偏导数和全微分. 这种特性 使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将在接下来的章节逐步揭开它的神秘面纱.

1.6.5 复数域的性质 (选读)

1. 复数域的特点

若集合 F 带有元素 0.1 以及四则运算^①, 且

- (1) 满足加法交换、结合律, 乘法交换、结合、分配律^②;
- (2) 对任意 $a \in F$, $a + 0 = a \times 1 = a$,

则称 F 构成一个域. 有理数全体 \mathbb{Q} , 实数全体 \mathbb{R} , 复数全体 \mathbb{C} 均构成域.

与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域. 也就是说, 对于任意 $n \ge 1$ 个复数 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$, 复系数多项式

$$P(z) = z^{n} + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_{1}z + c_{0}$$

总有复数根,即存在复数 z_0 使得 $P(z_0) = 0$. 由此归纳可知,复系数多项式可以因式分解成 一次多项式的乘积. 我们会在例?? 中证明该结论.

在 ℚ 和 ℝ 上可以定义出一个"好的"大小关系. 换言之它们是**有序域**, 即存在一个满足 下述性质的 >:

- (1) 若 $a \neq b$, 则要么 a > b, 要么 b > a;
- (2) 若 a > b, 则对于任意 c, a + c > b + c;
- (3) 若 a > b, c > 0, 则 ac > bc.

而 C 却不是有序域. 这是因为: 若 i > 0, 则

$$-1 = i \cdot i > 0$$
, $-i = -1 \cdot i > 0$.

于是 0 > i, 矛盾! 同理 i < 0 也不可能.

2. 复数域的自同构

若 F, K 是两个域, 映射 $f: F \to K$ 满足

① 即有运算 + 和 \times , 且对任意 $a \in S$, 存在 $b \in S$ 使得 a + b = b + a = 0; 对任意非零 $a \in F$, 存在 $c \in F$ 使得 $a \times c = c \times a = 1.$

② 即对任意 $a, b, c \in F$, 有 a + b = b + a, a + (b + c) = (a + b) + c, ab = ba, a(bc) = (ab)c, a(b + c) = ab + ac.

- (1) f(0) = 0, f(1) = 1 (注意两组 0,1 分别位于 F 和 K 中);
- (2) 对任意 $a, b \in F$, f(a + b) = f(a) + f(b);
- (3) 对任意 $a, b \in F$, f(ab) = f(a)f(b),

则称 f 是一个同态. 若 f 还是一一对应, 则称 f 是一个同构. 称域 F 到自身的同态和同构分别为 F 的自同态和自同构.

例 1.40 (i) 设 $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ 是有理数域的自同构. 那么对于正整数 n,

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \uparrow}) = \underbrace{f(1)+f(1)+\cdots+f(1)}_{n \uparrow} = nf(1) = n.$$

于是 f(-n) = f(0) - f(n) = -n. 对于有理数 $r = \frac{p}{q}$, 有 $f(r) = \frac{f(p)}{f(q)} = \frac{p}{q} = r$. 因此 f 是 恒等映射.

(ii) 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是实数域的连续自同构. 那么对于有理数 r, 有 f(r) = r. 对于任意实数 x, 存在有理数列 $\{r_n\}_{n\geqslant 1}$ 使得 $x=\lim_{n \to \infty} r_n$. 于是由连续性可知

$$f(x) = f\left(\lim_{n \to \infty} r_n\right) = \lim_{n \to \infty} f(r_n) = \lim_{n \to \infty} r_n = x.$$

因此 f 是恒等映射.

定理 1.22

设 f 是复数域的连续自同构, 则 f 为恒等映射或共轭.

证明: 由前面的讨论可知, 对于实数 x, f(x) = x. 于是由 $f(i^2) = f(-1) = -1$ 可知 $f(i) = \pm i$. 故

$$f(x + y\mathbf{i}) = f(x) + f(y)f(\mathbf{i}) = x \pm y\mathbf{i},$$

即 f 为恒等映射或共轭.

该定理表明了共轭是唯一一个非平凡的、与四则运算交换的复变函数, 共轭的重要作用由此可见一斑.

复数也可以利用矩阵来构造. 设

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

那么集合

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \boldsymbol{E} + y \boldsymbol{J} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$$

上有零矩阵 O、单位阵 E、矩阵加法和矩阵乘法. 设

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow F$$
$$x + y\mathbf{i} \longmapsto x\mathbf{E} + y\mathbf{J}.$$

由于 $J^2 = E$, 不难说明 f 是满足

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2),$$
 $f(z_1 z_2) = f(z_1) f(z_2)$

的一一对应. 从而 F 上也有域的结构, 且 f 是域同构. 这样就用矩阵构造了复数域.

可以看出 $f(\overline{z}) = f(z)^{\mathrm{T}} = f(z)^*$, 即复共轭对应 F 中矩阵的转置 (也是伴随), 而且矩阵 f(z) 对应的线性变换将平面向量逆时针旋转 θ 并将模长放缩至 r 倍.

3. 四元数

用复数的乘法可以表示平面的旋转,如何表示三维空间的旋转呢? 为此,哈密顿发明 了四元数:

$$\mathbb{H} = \{ a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \},\$$

其中两个四元数相等当且仅当对应的四个系数都相等. 田 上可以自然定义加法. 而它的乘法 由如下规律所决定

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.

这些运算满足除乘法交换律外的域的各种性质.

定义四元数的共轭为:

$$\tau(a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) = a_0 - a_1 \mathbf{i} - a_2 \mathbf{j} - a_3 \mathbf{k}.$$

不难发现 $\tau(\tau(A)) = A$,

$$A\tau(A) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \tau(A)A$$

是非负实数, 且 $A\tau(A) = 0 \iff A = 0$. 定义 A 的模为

$$|A| = \sqrt{A\tau(A)} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

对于任意非零四元数 A, 存在四元数 $B = \frac{\tau(A)}{|A|^2}$ 使得 AB = BA = 1.

和复数情形类似, 四元数也可以表达为矩阵形式:

$$f: \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} M_2(\mathbb{C})$$

$$a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \longmapsto \begin{pmatrix} a_0 + a_1 \mathbf{i} & -a_2 - a_3 \mathbf{i} \\ a_2 - a_3 \mathbf{i} & a_0 - a_1 \mathbf{i} \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

也就是将 A = z + wj 映为 $\begin{pmatrix} z & -w \\ \overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$, 其中 $z, w \in \mathbb{C}$.

当 $a_0 = 0$ 时, $A = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ 对应一个三维向量 (a_1, a_2, a_3) . 因此我们可以用四元数来表示三维向量,并把四元数分为标量部分与向量部分之和 $A = a_0 + a$. 对于三维向量 $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, $b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$, 定义数量积

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

和向量积

$$m{a} imes m{b} = egin{array}{cccc} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \ a_1 & a_2 & a_3 \ b_1 & b_2 & b_3 \ \end{array}.$$

定理 1.23

四元数 $A = a_0 + \mathbf{a}$ 与 $B = b_0 + \mathbf{b}$ 的乘积为

$$AB = (a_0b_0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + (a_0\boldsymbol{b} + b_0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

证明: 由 $AB = a_0b_0 + a_0\mathbf{b} + b_0\mathbf{a} + \mathbf{ab}$ 可知我们只需证明

$$ab = -a \cdot b + a \times b$$
,

而这是因为

$$ab = a_1b_1i^2 + a_2b_2j^2 + a_3b_3k^2$$

$$+ (a_2b_3jk + a_3b_2kj) + (a_3b_1ki + a_1b_3ik) + (a_1b_2ij + a_2b_1ji)$$

$$= -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_2b_3 - a_3b_2)i + (a_3b_1 - a_1b_3)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

$$= -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

设 q 是模为 1 的四元数, 定义

$$\Phi_{q}(A) = qAq^{-1} = qA\tau(q). \tag{1.8}$$

显然 $\Phi_q(AB) = \Phi_q(A)\Phi_q(B)$ 且 $\Phi_q(a_0 + \mathbf{a}) = a_0 + \Phi_q(\mathbf{a})$. 由于

$$\begin{split} & \Phi_q(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = \Phi_q(-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \Phi_q(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}), \\ & \Phi_q(\boldsymbol{a})\Phi_q(\boldsymbol{b}) = -\Phi_q(\boldsymbol{a})\cdot\Phi_q(\boldsymbol{b}) + \Phi_q(\boldsymbol{a})\times\Phi_q(\boldsymbol{b}), \end{split}$$

因此

$$egin{aligned} \Phi_q(oldsymbol{a}) \cdot \Phi_q(oldsymbol{b}) &= oldsymbol{a} \cdot oldsymbol{b}, & \Phi_q(oldsymbol{a}) imes \Phi_q(oldsymbol{a}) imes \Phi_q(oldsymbol{a}) &= \Phi_q(oldsymbol{a}) imes \Phi_q(oldsymbol{b}) = \Phi_q(oldsymbol{a}) \cdot \Phi_q(oldsymbol{b} imes oldsymbol{c}), & \Phi_q(oldsymbol{b}) &= \Phi_q(oldsymbol{a}) imes \Phi_q(oldsymbol{b}) imes \Phi_q(oldsymbol{b}) imes \Phi_q(oldsymbol{b}) &= \Phi_q(oldsymbol{a} imes oldsymbol{b}), & \Phi_q(oldsymbol{b}) imes \Phi_q(oldsymbol{b}) imes \Phi_q(oldsymbol{b}) imes \Phi_q(oldsymbol{b}), & \Phi_q(oldsymbol{b}) imes \Phi_q(oldsymbol{b}) imes \Phi_q(oldsymbol{b}) imes \Phi_q(oldsymbol{b}), & \Phi_q(oldsymbol{b}) imes \Phi_q(oldsymbol{b}) imes \Phi_q(oldsymbol{b}) imes \Phi_q(oldsymbol{b}), & \Phi_q(oldsym$$

由于 Φ_a 保持了向量的内积, 因此它是 \mathbb{R}^3 上的一个正交变换. 注意到 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三个行向量的三阶方阵的行列式,而 Φ_q 不改变这个行列式,从而它一定是 \mathbb{R}^3 上的一个旋 转变换. 可以计算得到 q = w + xi + yj + zk 对应的旋转矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2wz & 2xz + 2wy \\ 2xy + 2wz & 1 - 2z^2 - 2x^2 & 2yz - 2wx \\ 2xz - 2wy & 2yz + 2wx & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}.$$

定理 1.24

若 a 是单位向量,

$$q = \cos\frac{\theta}{2} + a\sin\frac{\theta}{2},$$

则 Φ_a 是绕 α 逆时针旋转 θ 的变换.

证明: 显然 |q|=1 且 qa=aq, 因此 $\Phi_q(a)=a$, Φ_q 是绕 a 的旋转变换. 设单位向量 v 和 a 正交, 即 $v \cdot a = 0$. 设 $u = a \times v$, 则 a, v, u 构成右手直角坐标系, 且

$$av = a \times v = u = -v \times a = -va$$
, $ava = ua = u \times a = v$.

因此

$$\begin{split} \Phi_q(\boldsymbol{v}) &= (\cos\frac{\theta}{2} + \boldsymbol{a}\sin\frac{\theta}{2})\boldsymbol{v}(\cos\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{a}\sin\frac{\theta}{2}) \\ &= \boldsymbol{v}\cos^2\frac{\theta}{2} - \boldsymbol{a}\boldsymbol{v}\boldsymbol{a}\sin^2\frac{\theta}{2} + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\boldsymbol{a})\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= \boldsymbol{v}(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}) + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u})\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= \boldsymbol{v}\cos\theta + \boldsymbol{u}\sin\theta. \end{split}$$

故 Φ_a 是绕 α 逆时针旋转 θ 的变换.

由于 №3 上的旋转变换都可以分解成绕坐标轴的旋转, 因此它们都可以用四元数来表示. 由于三维矩阵乘法需要计算 27 次实数乘法, 四元数的乘法只需要计算 16 次, 因此四元数乘 法的计算复杂度比对应矩阵乘法的计算复杂度要低. 在计算机图形学中, 尤其是三维物体的 旋转中, 四元数发挥着重要的作用.

→ ★ 本章小结 ★ →

本章所需掌握的知识点如下:

- 一、熟练掌握复数的四则运算.
- 二、熟练掌握复数的三角形式与指数形式.
- (1) 三角形式和复数形式的核心是计算复数的模和辐角. 模 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 相对容易计算, 辐角一般是 $\arctan \frac{y}{x}$ 或 $\arctan \frac{y}{x} \pm \pi$, 具体根据象限来判断. 注意看清楚是求辐角还是主辐角.
 - (2) 得到三角形式与指数形式后,复数的乘除、乘幂都很容易计算得到.
 - (3) 对于方根, 需要注意非零复数 z 的 n 次方根 $\sqrt[n]{z}$ 总有 n 个值.
 - (4) 知道辐角与复数运算有关的等式.
 - 三、会利用复数乘法的几何意义解决简单的平面几何问题.
 - (1) 夹角可转化为相邻两条线段对应的复数相除的辐角, 注意辐角可正可负.
 - (2) 长度可转化为复数模的关系.
 - (3) 逆时针或顺时针旋转 θ 对应乘 $e^{i\theta}$ 或 $e^{-i\theta}$.
 - 四、能熟练地将曲线的方程、参数方程和平面图形相互转化.
 - (1) 如果有较好的几何直观, 可以利用几何直观直接写出对应 z 的方程.
 - (2) 如果是一般的 x, y 的方程形式, 将 x, y 分别用 z, \overline{z} 表示并化简; 反之亦然.
- (3) 如果是参数方程 x=x(t),y=y(t), 对应的就是 $z=x(t)+\mathrm{i}y(t),$ 注意 t 的取值范围.
 - 五、了解连续曲线、简单曲线和闭路的概念.
 - 六、能熟练判断一个集合是否是区域,是否有界,是否是单连通.
 - (1) 将对应集合的草图画出来, 通过集合是否包含了它的边界来判断是区域还是闭区域,
 - (2) 对于常见的半平面、带状、角状、圆域、圆环域等, 应当能迅速判断它的特性.
 - (3) 如果集合可以被一条闭路围住, 那它就是有界的.
- (4) 单连通是指区域内任意一条闭路的内部都包含在该区域中. 一块区域挖去内部的一些点、线条或区域往往是多连通的, 但需要注意挖去的线条或区域连接到边界时, 未必是多连通的.
 - 七、熟知共轭复数的有关性质.
 - (1) 知道共轭和四则运算交换.
 - (2) 会 z,\overline{z} 和 x,y 的相互转化.
 - (3) 会利用共轭复数判断实数和纯虚数.
- 八、了解数列和函数的极限,了解函数的连续性. 这些内容大多和单变量实函数情形类似,但需要注意函数极限中 $z \to z_0$ 可以是以任意方式趋于 z_0 .
 - 九、知道 ∞ 和复球面的含义.

本章中不易理解和易错的知识点包括:

- (1) 误将 0 视为纯虚数. 具体的 0 不容易弄错, 但若是判断包含未知数的复数是不是纯 虚数, 容易忘记实部和虚部不能都是零.
 - (2) 0 没有辐角, 关于 $\arg z$ 或 $\operatorname{Arg} z$ 的式子中 z 总是非零的.
- (3) 辐角 Arg z 和辐角主值 arg z 的计算. 辐角是一个多值函数, 而辐角主值是我们人为 选出来的一个单值分支, 为了方便选取 $(-\pi,\pi]$ 作为它的范围. 计算时, 需要根据复数所在的 象限来确定主辐角是 $\arctan \frac{y}{x}$, 还是需要 $\pm \pi$. 容易算错第二和第四象限内复数的辐角.
- (4) 辐角有关等式. 多值函数的等式含义应当理解为等式两边所能取到的值形成的集合 是相同的. 若其中包含了多值函数的复合, 则每一层都要取遍所有可能的值. 容易判断错误 的是: $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z$ 一般不成立; $\operatorname{Arg} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{2} \operatorname{Arg} z$ 总成立.
- (5) 单连通是为了刻画区域在连续变形下的一种不变的特性. 通常情形下, 一个开集挖 去一些更小的开集、线段或点往往会变得不再单连通. 容易判断错误的是: 复平面挖去负实 轴和零是单连通的.

→ 本章作业 长一

一、单选题.

1. 以下条件中()**不是** z 是实数的充要条件.

(A) $\operatorname{Im} z = 0$

B)
$$\arg z = 0.7$$

$$= \overline{z}$$

(B) $\arg z = 0, \pi$ (C) $z = \overline{z}$ (D) $z^2 = |z|^2$

2. 以下条件中()是 z 是纯虚数的充要条件.

(A) $\operatorname{Re} z = 0$

(B)
$$\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$$
 (C) $z = -\overline{z}$ (D) $z^2 = -|z|^2$

(C)
$$z = -\overline{z}$$

3. 以下函数中()不是其定义域上的连续函数.

(A) $\arg z$

(B)
$$|z|$$

(D) $\ln(z\overline{z})$

4. 若 f(z) 在 0 处连续且 f(0) = 0, g(z) 在 0 处连续, 则下述命题**未必成立**的是().

(A) f(z) + g(z) 在 0 处连续

(B) f(z)g(z) 在 0 处连续

(C) f(g(z)) 在 0 处连续

(D) g(f(z)) 在 0 处连续

5. 下述方程表示的是圆周的是().

(A) $z\overline{z} - (2+i)z - (2-i)\overline{z} = 4$

(B) $\operatorname{Re} \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

(C) $\arg \frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{3}$

(D) $z = i + 2e^{i\theta}, \theta \in (0, 2\pi)$

6. 下述命题**错误**的是(

(A) |z| = Re z + 1 是抛物线

(B) |z + i| = |z - i| 是直线

(C) |z+i| - |z-i| = 1 是双曲线

(D) |z| + |z - 2i| = 2 是一条线段

7. (()是多连通区域.
------	---	----------

(A)
$$-1 < \arg z < \pi - 1$$

(B)
$$\arg z < \frac{3\pi}{4}$$

(C)
$$1 < |z| < 2$$

(D)
$$0 < \text{Re } z < 1$$

8. 下述命题错误的是(

(A)
$$z\overline{z} - (2+i)z - (2-i)\overline{z} \leq 4$$
 是有界单连通闭区域

(B)
$$\operatorname{Im} z \leq 0, \operatorname{Re} z \geq 0$$
 是无界单连通闭区域

(C)
$$|z-1| < |z+3|$$
 是无界单连通区域

(D)
$$\left| \frac{z+1}{z-1} \right| < 2$$
 是无界多连通区域

二、填空题.

2.
$$\[\] z = -i, \] \] 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \underline{\qquad} .$$

3. 化简
$$\frac{(1+i)^{101}}{(1-i)^{99}} =$$
_____.

4. 化简
$$(-1+i)^{10}-(-1-i)^{10}=$$
_____.

5.
$$\left(\frac{(1+i)^2}{2}\right)^{21}$$
 的模是_____.

6.
$$\frac{3+i}{i} - \frac{10i}{3-i}$$
 的模是_____.

8.
$$-1 + \sqrt{3}$$
i 的辐角主值是_____.

8.
$$-1 + \sqrt{3}i$$
 的辐角主值是_____.
9. $100 - i$ 绕 0 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到的复数是_____.

10.
$$-3 + 2i$$
 绕 0 顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后得到的复数是_____.

11. 区域
$$0 < \arg z < \frac{\pi}{3}$$
 在映射 $w = z^3$ 下的像是_____

12. 已知映射
$$w = z^3$$
, 则 $z = \sqrt{3} + i$ 在 w 平面上的像是_____.

13. 极限
$$\lim_{z \to 1+i} (1 + z^2 + 2z^4) =$$
______.

14. 极限
$$\lim_{z \to \infty} \frac{2z^2 - 1 - i}{z^2 + iz + 1} = \underline{\hspace{1cm}}$$

三、解答题.

1. 求下列复数 z 的实部与虚部, 共轭复数, 模和辐角主值.

$$(i) \qquad \frac{4i}{1-i} + \frac{1}{i};$$

(ii)
$$\frac{(3-2i)(4+5i)}{2i}$$
;

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \frac{4i}{1-i} + \frac{1}{i}; \\ \text{(iii)} & \Big(\frac{3-2i}{2+i}\Big)^2; \end{array}$$

(iv)
$$(2+i)^3$$
;

(v)
$$i + i^7 - 2i^9$$
;

(vi)
$$-2i(3+i)(4+2i)(1-i)$$
.

- 2. 求下列复数 z 的三角和指数形式.
 - (i) -i;

- (ii) $3 + \sqrt{3}i$;

- (iv) $\overline{\left(\frac{4-3i}{1-2i}\right)};$
- $(\mathrm{v})\quad \left(\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{6}}\right)^{-11};$
- (vi) $\frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^5}{(\sin \theta i \cos \theta)^4}.$

- 3. 计算下列表达式.
 - (i) $(\sqrt{3} i)^{-5}$;
- (ii) $(-1+i)^{-7}$; (iii) $\sqrt[4]{-2+2i}$; (v) $(-4-4i)^{\frac{1}{5}}$; (vi) $(1-i)^{\frac{1}{3}}$.

- 4. 利用共轭复数将 $(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)$ 表达为两个多项式的平方和.
- 5. 设 |a| < 1. 证明: |z| = 1 当且仅当 $|z a| = |1 \overline{a}z|$.
- 6. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 的模都小于 $1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是非负实数且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. 证明:

$$|\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \dots + \lambda_n z_n| < 1.$$

7. 证明: 若复数 a + bi 是实系数方程

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

的根,则 a-bi 也是它的根.

8. 设 $z = e^{it}$, 证明:

(i)
$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos nt;$$

(ii)
$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin nt$$
.

- 9. $z_1 = -z, z_2 = \overline{z}, z_3 = -\overline{z}$ 在复平面上对应的点分别与 z 在复平面上对应的点是什么关 系?
- 10. 已知点 z_1, z_2, z_3 不共线. 点 $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ 和 $\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ 分别表示什么点?
- 11. 设正方形的两个顶点分别为复数 a, b, 求它的其它两个顶点的所有可能.
- 12. 用复参数方程表示连接 -1 + i 与 1 4i 的直线段.
- 13. 用 z, \bar{z} 的方程表示经过 -1 + i 与 1 4i 的直线.
- 14. 设 $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$. 证明: $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$ 并说明这些等式的几何意义.
- 15. 证明: 若 $z_1+z_2+z_3=0$ 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, 则 z_1,z_2,z_3 构成一个正三角形, 且 单位圆 (圆心为 0, 半径为 1 的圆) 是它的外接圆.
- 16. 证明: $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ 并说明其几何意义.
- 17. 下列数列 $\{z_n\}$ 是否收敛? 若收敛求出它们的极限.

(i)
$$z_n = \frac{1+n\mathrm{i}}{1-n\mathrm{i}};$$
 (ii) $z_n = \left(1+\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n;$

(iii)
$$z_n = (-1)^n + \frac{i}{n+1};$$
 (iv) $z_n = \frac{(3+2i)^n}{(3+4i)^n};$

(v)
$$z_n = \frac{n^2 + in}{n^2 - in};$$
 (vi) $z_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) e^{-\frac{n\pi i}{2}}.$

- 18. 证明: $f(z) = z\overline{z}^{-1} \overline{z}z^{-1}$ 在 $z \to 0$ 时极限不存在.
- 19. 证明: $f(z) = \begin{cases} 1, & \text{若 } y = x^2, \\ 0, & \text{其它情形.} \end{cases}$ 在 z 沿着任意一条直线趋于 0 时极限都存在, 但 $z \to 0$ 时极限不存在.
- 20. (选做) 利用单位根计算下列表达式.

(i)
$$I = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

(ii)
$$I = \sum_{k=1}^{n} \tan^2 \frac{k\pi}{m} = \tan^2 \frac{\pi}{m} + \tan^2 \frac{2\pi}{m} + \dots + \tan^2 \frac{n\pi}{m}, \ \text{其中 } m = 2n+1 \ \text{是奇数}.$$

- 21. (选做) 设集合 $A = \{1, 2, \cdots, 999\}$, 令 N_k 为元素之和是 5m + k 型的 A 的子集个数. 利用单位根计算 N_0, N_1, N_2, N_3, N_4 .
- 22. (选做) 利用单位根将下列多项式因式分解成有理系数多项式的乘积.

(i)
$$x^{10} + x^5 + 1$$
; (ii) $x^8 - 1$.

- 23. (选做)证明:
 - (i) $\mathbb{Q}(i) = \{x + yi \mid x, y, \in \mathbb{Q}\}$ 是一个域;
 - (ii) 若 F 是一个域且 $\mathbb{R} \subseteq F \subseteq \mathbb{C}$, 则 $F = \mathbb{C}$.
- 24. (选做) 证明: 对任意 A, B ∈ Ⅲ, 有

(i)
$$f(AB) = f(A)f(B), f(\tau(A)) = \overline{f(A)}^{\mathrm{T}};$$

(ii)
$$\tau(AB) = \tau(B)\tau(A)$$
.

练习答案

- 1.1 -4.
- 1.2 $\pm(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)$.
- **1.3** 1.
- **1.4** 分别是 $-\overline{z}$ 和 -z.
- $\frac{7-4i}{5}$.
- **1.6** 仅当 z 不是负实数和 0 时成立, 即 $\arg z \neq \pi$.
- **1.7** z_1, z_2, \dots, z_n 中的非零元辐角都相等.
- **1.8** $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 1.17$ 收敛到 0. $2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{3}}$, 辐角写成 $\frac{5\pi}{3}$ 也可以.
- **1.9** $4 + i \implies 2 i$.
- **1.10** 2⁴⁸.
- 1.11 $\pm \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \pm i, \pm \frac{\sqrt{3}-i}{2}.$
- **1.12** 双曲线 $x^2 y^2 = \frac{1}{2}$ 和双曲线 $xy = \frac{1}{4}$.
- **1.13**(i) 上半平面对应 $\text{Im } z \ge 0$.
 - (ii) 下半平面对应 $\text{Im } z \leq 0$.
 - (iii) 左半平面对应 $\text{Re } z \leq 0$.
 - (iv) 右半平面对应 $\text{Re } z \geq 0$.
 - (v) 竖直带状区域对应 $x_1 \leq \text{Re } z \leq x_2$.
 - (vi) 水平带状区域对应 $y_1 \leq \text{Im } z \leq y_2$.
 - (vii) 角形区域对应 $\alpha_1 \leqslant \operatorname{Arg} z \leqslant \alpha_2$ 以 及原点.
 - (viii) 圆域对应 $|z| \leq R$.
 - (ix) 圆环域对应 $r \leq |z| \leq R$.
- **1.14** C
- **1.15**(i) Re z 的定义域为 ℂ, 值域为 ℝ.

- (ii) $\arg z$ 的定义域为 $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$, 值域为 (-π,π].
- (iii) 当 n > 0 时, z^n 的定义域为 \mathbb{C} , 值 域为 \mathbb{C} . 当 n < 0 时, z^n 的定 义域为 $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$, 值域为 $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}.$
- (iv) $\frac{z+i}{z^2+1}$ 的定义域为 $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq z\}$ ±*i*}, 值域为 ℂ.
- **1.16** $-\frac{d}{c}$.
- ?? 处处不可导.

- ?? $\ln 2 \frac{2\pi i}{3}$
- **??** ln 3.
- **??** (i) 0. (ii) 0.
- **??** πi.
- ?? $\sin 1 \cos 1$.
- ?? $-2\pi i$.
- ?? $2\pi i$.
- ?? $2uv + C, C \in \mathbb{R}$.
- ?? 当且仅当非零的 z_n 的辐角全都相同时成
-)
- ?? 条件收敛.
- ?? 收敛半径为 1, 和函数为 $-\ln(1-z)$.

- ?? $\sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} 1)z^n$, $|z| < \frac{1}{2}$. ?? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{z^n}$.
- ?? -1 是一阶极点, 1 是二阶极点.
- ?? 1是二阶极点, 0是一阶极点, -1是三阶 极点.
- ?? $z = 2k\pi i$ 是一阶极点, $k \neq 0, \pm 1; z = 0$ 是四阶极点; $z=\pm 2\pi i$ 是可去奇点; $z=\infty$ 不是孤立奇点.
- ?? $\frac{1}{24}$.
- **??** 4i.
- ?? $2\pi i$.

- ?? 4 个.
- ?? D
- ?? 先通过幂函数 $s=\sqrt{z}$ 将其映成上半圆 域,再通过分式线性变换 $t=i\frac{1-s}{1+s}$ 将其映成第一象限区域,再通过幂函数 $w=t^2$ 将其 映成 Ⅲ.
- ?? 下半平面 Im w < 0.
- ?? $-2\pi\delta(\omega+\omega_0)$.
- ?? $i\omega$.
- ?? $\frac{n}{s^2 + 4k^2}$.
- ?? $1 e^{-t}$.

参考文献 参考文献

- [1] 阿尔福斯. 复分析 [M]. 赵志勇, 薛运华, 杨旭, 译. 北京: 机械工业出版社, 2022.
- [2] CONWAY J B. Functions of One Complex Variable I. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [3] CONWAY J B. Functions of One Complex Variable II. New York: Springer-Verlag, 1996.
- [4] 范莉莉, 何成奇. 复变函数论 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1987.
- [5] 克莱因. 古今数学思想(第一册)[M]. 张理京, 张锦炎, 江泽涵. 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2013.
- [6] 克莱因. 古今数学思想(第二册)[M]. 张理京, 张锦炎, 江泽涵. 译. 上海: 上海科学技术 出版社, 2013.
- [7] 李红, 谢松法. 复变函数与积分变换 [M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [8] 刘建亚, 吴臻. 复变函数与积分变换 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2019.
- [9] 史济怀, 刘太顺. 复变函数 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1998.
- [10] STEIN E M, SHAKARCHI R. Complex Analysis[M]. New Jersey: Princeton University Press, 2003.
- [11] 西安交通大学高等数学教研室. 工程数学: 复变函数. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2011.
- [12] 严镇军. 数学物理方法 [M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1999.
- [13] 庄圻泰, 张南岳. 复变函数 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1984.
- [14] BERG G O, JULIAN W, MINES R, RICHMAN F. The constructive Jordan curve theorem[J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1975, 5(2):225–236. https://doi.org/10.1216/RMJ-1975-5-2-225.

- [15] 王元, 乔建永, 杨静. 杨乐在函数值分布论上的贡献 [J]. 内蒙古师范大学学报 (自然科学版), 2019, 48(6):471-478. https://nmsb.cbpt.cnki.net/portal/journal/portal/client/paper/c728f22a7a49175e3655e43a691fc9d4.
- [16] WU D, JIANG Y-F, GU X-M, HUANG L, BAI B, SUN Q-C, ZHANG X, GONG S-Q, MAO Y, ZHONG H-S, CHEN M-C, ZHANG J, ZHANG Q, LU C-Y, PAN J-W Experimental Refutation of Real-Valued Quantum Mechanics under Strict Locality Conditions[J]. Phys. Rev. Lett., 2022, 129(14):140401. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.140401.
- [17] YANG L. Value distribution theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [18] YANG L, Zhang G H. Recherches sur le nombre des valeurs deficientes et le nombre des directions de Borel des fonctions méromorphes[J]. Sci Sinica, 1975, 18:23–37.
- [19] YANG L, Zhang G H. Sur la construction des fonctions méromorphes ayant des directions singulieres donnès[J]. Sci Sinica, 1976, 19:445–459.
- [20] 袁志杰, 张神星. 复变函数在不同圆环域内洛朗展开的探究 [J/OL]. 南阳师范学院学报, 2024, 23(3). https://publish.cnki.net/journal/portal/nysf/client/paper/01eb42a7419d144c7a0459345f42f130.
- [21] 3Blue1Brown. 奥数级别的数数问题 [DB/OL]. (2022-06-26)[2024-12-08]. https://www.bilibili.com/video/BV1R34y1W7Xn/.
- [22] 3Blue1Brown. 研究人员觉得这里有个 bug... (Borwein 积分)[DB/OL]. (2022-12-07)[2024-12-08]. https://www.bilibili.com/video/BV18e4y1u7BH/.

中外人名对照表 中外人名对照表

为便于读者查找相关英文资料, 在此列出本书中出现过的人名的外文名. 以下人名中不注明其爵位, 加粗为姓氏部分.

- 阿贝尔 (Niels Henrik Abel, 1802-1829), 挪威数学家.
- 波尔文 (Jonathan Michael Borwein, 1951-2016), 苏格兰数学家.
- 波尔文 (Peter Benjamin Borwein, 1953–2020), 苏格兰数学家.
- 波尔查诺 (Bernard Placidus Johann Gonzal Nepomuk Bolzano, 1781–1848), 捷克数 学家.
- 泊松 (Siméon-Denis Poisson, 1781–1840), 法国数学家、物理学家.
- 达朗贝尔 (Jean Le Rond d'Alembert, 1717–1783), 法国数学家.
- 狄拉克 (Paul Adrien Maurice Dirac, 1902–1984), 英国理论物理学家.
- 狄利克雷 (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805–1859), 德国数学家.
- 棣莫弗 (Abraham de Moivre, 1667–1754), 法国数学家.
- 范德蒙 (Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735–1796), 法国数学家.
- 费罗 (Scipione del Ferro, 1465-1526), 意大利数学家.
- 菲涅耳 (Augustin Jean Fresnel, 1788-1827), 法国物理学家.
- 傅里叶 (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830), 法国数学家.
- 高斯 (Johann Carl Friedrich Gauß, 英文为 Gauss, 1777-1855), 德国数学家.
- 格林 (George Green, 1793-1841), 英国数学物理学家.
- 古萨 (Édouard Jean-Baptiste Goursat, 1858–1936), 法国数学家.
- 哈密顿 (William Rowan Hamilton, 1805–1865), 爱尔兰数学家、物理学家、天文学家.
- 赫维赛德 (Oliver **Heaviside**, 1850-1925), 英国物理学家、数学家.
- 莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646-1716), 德国哲学家、数学家.
- 黎曼 (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866), 德国数学家.
- 卡尔达诺 (Girolamo 或 Hieronimo Cardano, 又名 Hieronymus Cardanus 或 Jerome Cardan, 1501–1576), 意大利数学家、物理学家、天文学家、哲学家.
- 科茨 (Roger Cotes, 1682–1716), 英国数学家.
- 柯西 (Augustin-Louis Cauchy, 1789–1857), 法国数学家、物理学家.
- 拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827), 法国数学家、天文学家、物理学家.
- 洛朗 (Pierre Alphonse Laurent, 1813–1854), 法国数学家.
- 列维 (Paul Pierre Lévy, 1886-1971), 法国数学家.

- 刘维尔 (Joseph Liouville, 1809–1182), 法国数学家.
- 洛必达 (Guillaume-François-Antoine Marquis de l'Hôpital, 1661–1704), 法国数学家.
- 麦克劳林 (Colin Maclaurin, 1698–1746), 苏格兰数学家.
- 麦克斯韦 (James Clerk Maxwell, 1831-1879), 苏格兰物理学家、数学家.
- 莫比乌斯 (August Ferdinand Möbius, 1790–1868), 德国数学家、天文学家.
- 莫累拉 (Giacinto Morera, 1856-1907), 意大利数学家.
- 牛顿 (Isaac Newton, 1643-1727), 英国数学家.
- 欧拉 (Leonhard Euler, 1707-1783), 瑞士数学家、物理学家.
- 帕塞瓦尔 (Marc-Antoine Parseval des Chênes 1755–1836), 法国数学家.
- 皮卡 (Charles Émile **Picard**, 1856–1941), 法国数学家.
- 儒科夫斯基 (Николай Егорович Жуковский, 英文为 **Zhukovsky**, 1847–1921), 俄罗斯力学家.
- 儒歇 (Eugène Rouché, 1832-1910), 法国数学家.
- 若尔当 (Marie Ennemond Camille Jordan, 1838-1922), 法国数学家.
- 绍德尔 (Julius Pawel Schauder, 1899–1943), 波兰数学家.
- 斯坦尼兹 (Ernst Steinitz, 1871-1928), 德国数学家.
- 泰勒 (Brook Taylor, 1685-1731), 英国数学家.
- 维布伦 (Oswald Veblen, 1880-1960), 美国数学家.
- 魏尔斯特拉斯 (Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 1815–1897), 德国数学家.