合肥工业大学
HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

第五章　留数

❶ 孤立奇点

第一节　孤立奇点

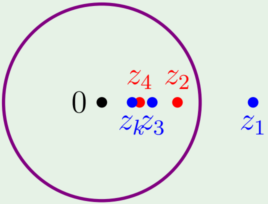
- 孤立奇点的类型
- 零点与极点
- 函数在 ∞ 的性态

孤立奇点

我们先根据奇点附近洛朗展开的形式来对其进行分类, 以便于分类计算留数.

例

考虑函数 $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$, 显然 $0, z_k = \dfrac{1}{k\pi}$ 是奇点, k 是非零整数. 因为 $\lim\limits_{k\to+\infty} z_k = 0$, 所以 0 的任何一个去心邻域内都有奇点. 此时无法选取一个圆环域 $0 < |z| < \delta$ 作 $f(z)$ 的洛朗展开, 因此我们不考虑这类奇点.



孤立奇点的定义

定义

如果 z_0 是 $f(z)$ 的一个奇点，且 z_0 的某个邻域内没有其它奇点，则称 z_0 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点.

例

- $z=0$ 是 $e^{\frac{1}{z}}, \dfrac{\sin z}{z}$ 的孤立奇点.
- $z=-1$ 是 $\dfrac{1}{z(z+1)}$ 的孤立奇点.
- $z=0$ 不是 $\dfrac{1}{\sin(1/z)}$ 的孤立奇点.

若 $f(z)$ 只有有限多个奇点，则这些奇点都是孤立奇点.

孤立奇点的分类

如果 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析，则可以作 $f(z)$ 的洛朗展开．根据该洛朗级数主要部分的项数，我们可以将孤立奇点分为三种：

孤立奇点类型	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
可去奇点	没有主要部分	存在且有限
m 阶极点	主要部分只有有限项非零 最低次为 $-m$ 次	∞
本性奇点	主要部分有无限项非零	不存在且不为 ∞

可去奇点的定义

定义

若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域的洛朗级数没有主要部分，即

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots, \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

是幂级数，则称 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点.

设 $g(z)$ 为右侧幂级数的和函数，则 $g(z)$ 在 $|z - z_0| < \delta$ 上解析，且除 z_0 外 $f(z) = g(z)$. 通过补充或修改定义 $f(z_0) = g(z_0) = c_0$，可使得 $f(z)$ 也在 z_0 解析. 这就是 “可去” 的含义.

定理

z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点 $\iff \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限

$\iff \lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = 0.$

例题: 可去奇点

例

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$$

没有负幂次项, 因此 0 是可去奇点.

也可以从 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=\sin 0=0$ 看出.

例

$$f(z)=\frac{e^z-1}{z}=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots$$

没有负幂次项, 因此 0 是可去奇点.

也可以从 $\lim\limits_{z\to 0} zf(z)=e^0-1=0$ 看出.

本性奇点的定义

定义

若 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域的洛朗级数主要部分有无限多项非零，则称 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点.

例

由于 $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{2z^2} + \cdots$, 因此 0 是本性奇点.

定理

z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点 $\iff \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ 不存在也不是 ∞.

事实上我们有皮卡大定理：对于本性奇点 z_0 的任何一个去心邻域，$f(z)$ 的像取遍所有复数，至多有一个取不到.

可去奇点的性质比较简单, 而本性奇点的性质又较为复杂, 因此我们主要关心的是极点的情形.

定义

如果 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域的洛朗级数主要部分只有有限多项非零, 即

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\cdots+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots,\ 0<|z-z_0|<\delta,$$

其中 $c_{-m}\neq 0, m\geqslant 1$, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点或 m 级极点.

极点的定义

令

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_0) + c_{-m+2}(z - z_0)^2 + \cdots ,$$

则 $g(z)$ 在 z_0 解析且非零, 且

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}, 0 < |z - z_0| < \delta.$$

定理

(1) z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点 $\iff \lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ 存在且非零.

(2) z_0 是 $f(z)$ 的极点 $\iff \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

典型例题：函数的极点

例

$f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$，由于 $\lim\limits_{z\to 0} z^2 f(z)=1$，因此 0 是二阶极点。 同理 -2 是一阶极点。

练习

求 $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^2-z+1}$ 的奇点，并指出极点的阶。

答案

-1 是一阶极点，1 是二阶极点。

函数的零点

我们来研究极点与零点的联系，并给出极点的阶的计算方法.

定义

如果 $f(z)$ 在解析点 z_0 处的泰勒级数最低次项幂次是 $m \geqslant 1$, 即

$$f(z) = c_m(z-z_0)^m + c_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + \cdots, \quad 0 < |z-z_0| < \delta,$$

其中 $c_m \neq 0$, 则称 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点.

此时 $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0) \neq 0$.

定理

设 $f(z)$ 在 z_0 解析. z_0 是 m 阶零点当且仅当

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \qquad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

例题：函数的零点

例

$f(z) = z(z-1)^3$ 有一阶零点 0 和三阶零点 1.

例

$f(z) = \sin z - z$. 由于

$$f(z) = \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

因此 0 是三阶零点.

定理

非零的解析函数的零点总是孤立的.

证明

设 $f(z)$ 是区域 D 上的非零解析函数, $z_0 \in D$ 是 $f(z)$ 的一个零点. 由于 $f(z)$ 不恒为零, 因此存在 $m \geqslant 1$ 使得在 z_0 的一个邻域内 $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, $g(z)$ 在 z_0 处解析且非零.

对于 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}|g(z_0)|$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $z \in \mathring{U}(z_0, \delta) \subseteq D$ 时, $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon$. 从而 $g(z) \neq 0$, $f(z) \neq 0$. □

由此可知, 一旦我们知道了解析函数在一串有极限的数列上的值, 这个解析函数本身就被唯一决定了.

为了统一地研究零点和极点, 我们引入下述记号. 设 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点、极点或解析点. 记 $\operatorname{ord}(f, z_0)$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的洛朗展开的最低次项幂次.

不难看出, 如果 $\operatorname{ord}(f, z_0) \geqslant 0$, 则 z_0 是可去奇点或解析点. 如果 $\operatorname{ord}(f, z_0) = -m < 0$, 则 z_0 是 m 阶极点.

可去奇点和极点判定方法

如果 $\operatorname{ord}(f, z_0) = m, \operatorname{ord}(g, z_0) = n$, 那么

$$\operatorname{ord}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = m - n, \quad \operatorname{ord}(fg, z_0) = m + n.$$

证明

设 $f_0(z)$ 为幂级数 $(z-z_0)^{-m}f(z)$ 的和函数, $g_0(z)$ 为幂级数 $(z-z_0)^{-n}g(z)$ 的和函数, 则 $f_0(z), g_0(z)$ 在 z_0 解析且非零. 因此 $\dfrac{f_0(z)}{g_0(z)}, f_0(z)g_0(z)$ 在 z_0 解析且非零. 由

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-z_0)^{m-n}\frac{f_0(z)}{g_0(z)}, \qquad f(z)g(z) = (z-z_0)^{m+n}f_0(z)g_0(z)$$

可知命题成立. □

典型例题：函数的极点

推论

设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，是 $g(z)$ 的 n 阶零点.

(1) 若 $m \geqslant n$，则 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点.

(2) 若 $m < n$ 时，则 z_0 是 $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ 的 $n-m$ 阶极点.

例

单选题：(2021 年 B 卷) $z=0$ 是函数 $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2}$ 的 (A) 阶极点.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

解

由于 $e^z-1=z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots$，所以 0 是 e^z-1 的一阶零点. 因此

典型例题: 函数的极点

例

$z=0$ 是 $f(z)=\dfrac{(e^z-1)^3z^2}{\sin z^7}$ 的几阶极点?

解

由于 $(\sin z)'(0)=cos0=1$, 所以 0 是 $\sin z$ 的一阶零点. 因此 $\mathrm{ord}(f,0)=3+2-7=-2$, 0 是二阶极点.

典型例题: 函数的极点

练习

求 $f(z)=\dfrac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2z^2(z+1)^3}$ 的奇点.

答案

1 是二阶极点, 0 是一阶极点, -1 是三阶极点.

函数在 ∞ 的性态

当我们把复平面扩充成闭复平面后, 从几何上看它变成了一个球面. 这样的一个球面是一种封闭的曲面, 它具有某些整体性质.

当我们需要计算一个闭路上函数的积分的时候, 我们需要研究闭路内部每一个奇点处的洛朗展开, 从而得到相应的小闭路上的积分. 如果在这个闭路内部的奇点比较多, 而外部的奇点比较少时, 这样计算就不太方便. 此时如果通过变量替换 $z = \dfrac{1}{t}$, 转而研究闭路外部奇点处的洛朗展开,便可减少所需考虑的奇点个数, 从而降低所需的计算量. 因此我们需要研究函数在 ∞ 的性态.

函数在 ∞ 的性态

定义

如果函数 $f(z)$ 在 ∞ 的去心邻域 $R < |z| < +\infty$ 内没有奇点, 则称 ∞ 是 $f(z)$ 的孤立奇点.

设 $g(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$, 则研究 $f(z)$ 在 ∞ 的性质可以转为研究 $g(t)$ 在 0 的性质. $g(t)$ 在圆环域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 上解析, 0 是它的孤立奇点.

定义

如果 0 是 $g(t)$ 的可去奇点 (m 阶极点、本性奇点), 则称 ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点 (m 阶极点、本性奇点).

设 $f(z)$ 在圆环域 $R < |z| < +\infty$ 的洛朗展开为

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

则 $g(t)$ 在圆环域 $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$ 的洛朗展开为

$$g(t) = \cdots + \frac{c_2}{t^2} + \frac{c_1}{t} + c_0 + c_{-1} t + c_{-2} t^2 + \cdots$$

∞ 类型	洛朗级数特点	$\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$
可去奇点	没有正幂次部分	存在且有限
m 阶极点	正幂次部分只有有限项非零 最高次为 m 次	∞
本性奇点	正幂次部分有无限项非零	不存在且不为 ∞

例

$f(z)=\dfrac{z}{z+1}$. 由 $f(\infty)=\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=1$ 可知 ∞ 是可去奇点. 事实上此时 $f(z)$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内的洛朗展开为

$$f(z)=\frac{1}{1+\dfrac{1}{z}}=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\cdots$$

例题: ∞ 的奇点类型

例

函数 $f(z)=z^2+\dfrac{1}{z}$ 含有正次幂项且最高次为 2, 因此 ∞ 是 2 阶极点.

例

设 $p(z)$ 是 $n\geqslant 1$ 次多项式, 则 ∞ 是 $p(z)$ 的 n 阶极点.

例

函数

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

含有无限多正次幂项，因此 ∞ 是本性奇点. 事实上，如果函数 $f(z)$ 在复平面上处处解析，且 $f(z)$ 不是多项式，则 ∞ 是它的本性奇点.

例

函数 $f(z) = \dfrac{(z^2-1)(z-2)^3}{(\sin \pi z)^3}$ 在扩充复平面内有哪些什么类型的奇点, 并指出奇点的阶.

解

- 整数 $z = k \neq \pm 1, 2$ 是 $\sin \pi z$ 的 1 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的 3 阶极点.
- $z = \pm 1$ 是 $z^2 - 1$ 的 1 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的 2 阶极点.
- $z = 2$ 是 $(z-2)^3$ 的 3 阶零点, 因此是 $f(z)$ 的可去奇点.
- 由于奇点 $1, 2, 3, \cdots \to \infty$, 因此 ∞ 不是孤立奇点.

典型例题：奇点的类型

练习

函数 $f(z) = \dfrac{z^2+4\pi^2}{z^3(e^z-1)}$ 在扩充复平面内有哪些什么类型的奇点，并指出奇点的阶.

答案

- $z = 2k\pi i, k \neq \pm 1, 0$ 是 1 阶极点.
- $z = 0$ 是 4 阶极点.
- $z = \pm 2\pi i$ 是可去奇点.
- $z = \infty$ 不是孤立奇点.

例

证明非常数复系数多项式 $p(z)$ 总有复零点.

证明

假设多项式 $p(z)$ 没有复零点, 那么 $f(z)=\dfrac{1}{p(z)}$ 在复平面上处处解析, 从而 $f(z)$ 在 0 处可以展开为幂级数.

由于 ∞ 是 $p(z)$ 的极点, $\lim\limits_{z\to\infty}p(z)=\infty$. 因此 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$, ∞ 是 $f(z)$ 的可去奇点. 这意味着 $f(z)$ 在 0 处的洛朗展开没有正幂次项. 二者结合可知 $f(z)$ 只能是常数, 矛盾! □

设 z_1 是 n 次多项式 $p(z)$ 的零点, 则 $\dfrac{p(z)}{z-z_1}$ 是 $n-1$ 次多项式. 归纳可知, $p(z)$ 可以分解为

$$p(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_n).$$