HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 *B1810* 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: https://zhangshenxing.gitee.io

第三章　复变函数的积分

第一节　柯西积分公式

柯西积分定理是解析函数理论的基础, 但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分定理是解析函数理论的基础，但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式

设

- 函数 $f(z)$ 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析,
- $z_0 \in D$,

柯西积分定理是解析函数理论的基础, 但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式

设

- 函数 $f(z)$ 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析,
- $z_0 \in D$,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z.$$

柯西积分定理是解析函数理论的基础, 但在很多情形下它由柯西积分公式表现.

柯西积分公式

设

- 函数 $f(z)$ 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析,
- $z_0 \in D$,

则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z.$$

如果 $z_0 \notin D$, 由柯西-古萨基本定理, 右侧的积分是 0.

柯西积分公式: 注记

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

柯西积分公式: 注记

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一.

柯西积分公式: 注记

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值.

柯西积分公式: 注记

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设 $z = z_0 + Re^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z = iRe^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$,

解析函数可以用一个积分

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta, \quad z \in D$$

来表示, 这是研究解析函数理论的强有力工具.

解析函数在闭路 C 内部的取值完全由它在 C 上的值所确定. 这也是解析函数的特征之一. 特别地, 解析函数在圆心处的值等于它在圆周上的平均值. 设 $z = z_0 + Re^{i\theta}$, 则 $\mathrm{d}z = iRe^{i\theta} \, \mathrm{d}\theta$,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) \, \mathrm{d}\theta.$$

证明

由连续性可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| \leqslant \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

柯西积分公式: 证明

证明

由连续性可知, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得当 $|z-z_0|\leqslant\delta$ 时, $z\in D$ 且 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. 设 $\Gamma:|z-z_0|=\delta$.

柯西积分公式: 证明

证明

由连续性可知, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得当 $|z-z_0|\leqslant\delta$ 时, $z\in D$ 且 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. 设 $\Gamma:|z-z_0|=\delta$. 由复合闭路定理和长大不等式

$$\left|\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z-2\pi i f(z_0)\right|=\left|\oint_\Gamma\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z-2\pi i f(z_0)\right|$$

证明

由连续性可知, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 使得当 $|z-z_0|\leqslant\delta$ 时, $z\in D$ 且 $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. 设 $\Gamma:|z-z_0|=\delta$. 由复合闭路定理和长大不等式

$$\left|\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z-2\pi i f(z_0)\right|=\left|\oint_\Gamma\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z-2\pi i f(z_0)\right|$$
$$=\left|\oint_\Gamma\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z-\oint_\Gamma\frac{f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right|=\left|\oint_\Gamma\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z\right|$$

柯西积分公式: 证明

证明

由连续性可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| \leqslant \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. 设 $\Gamma : |z - z_0| = \delta$. 由复合闭路定理和长大不等式

$$\left|\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0)\right| = \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0)\right|$$

$$= \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\oint_\Gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon.$$

柯西积分公式: 证明

证明

由连续性可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得当 $|z - z_0| \leqslant \delta$ 时, $z \in D$ 且 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. 设 $\Gamma : |z - z_0| = \delta$. 由复合闭路定理和长大不等式

$$\begin{aligned}
\left|\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0)\right| &= \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - 2\pi i f(z_0)\right| \\
&= \left|\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z - \oint_\Gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\right| = \left|\oint_\Gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z\right| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} \cdot 2\pi\delta = 2\pi\varepsilon.
\end{aligned}$$

由 ε 的任意性可知 $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(z_0)$. □

典型例题: 柯西积分公式的应用

求积分 $\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z$ 时, 如果 $g(z)$ 在 C 内部只有一个奇点 z_0, 且 $(z-z_0)g(z)$ 解析, 那么我们就可以使用柯西积分公式来计算该积分.

典型例题: 柯西积分公式的应用

求积分 $\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z$ 时, 如果 $g(z)$ 在 C 内部只有一个奇点 z_0, 且 $(z-z_0)g(z)$ 解析, 那么我们就可以使用柯西积分公式来计算该积分.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$.

典型例题: 柯西积分公式的应用

求积分 $\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z$ 时, 如果 $g(z)$ 在 C 内部只有一个奇点 z_0, 且 $(z-z_0)g(z)$ 解析, 那么我们就可以使用柯西积分公式来计算该积分.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z.$

解

函数 $\sin z$ 处处解析.

典型例题：柯西积分公式的应用

求积分 $\oint_C g(z)\,\mathrm{d}z$ 时，如果 $g(z)$ 在 C 内部只有一个奇点 z_0，且 $(z-z_0)g(z)$ 解析，那么我们就可以使用柯西积分公式来计算该积分.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z$.

解

函数 $\sin z$ 处处解析. 取 $f(z)=\sin z$, $z_0=0$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=4}\frac{\sin z}{z}\,\mathrm{d}z=2\pi i\sin z\big|_{z=0}=0.$$

典型例题: 柯西积分公式的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\,\mathrm{d}z.$

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\,\mathrm{d}z.$

解

由于函数 e^z 处处解析,

例

求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\,\mathrm{d}z$.

解

由于函数 e^z 处处解析，取 $f(z)=e^z, z_0=1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i e^z\big|_{z=1} = 2\pi e i.$$

典型例题：柯西积分公式的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\,\mathrm{d}z$.

解

由于函数 e^z 处处解析，取 $f(z)=e^z, z_0=1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i e^z\big|_{z=1} = 2\pi e i.$$

练习

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2\pi} \frac{\cos z}{z-\pi}\,\mathrm{d}z =$______.

典型例题：柯西积分公式的应用

例

求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \mathrm{d}z$.

解

由于函数 e^z 处处解析，取 $f(z) = e^z, z_0 = 1$ 并应用柯西积分公式得

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z-1} \mathrm{d}z = 2\pi i e^z\big|_{z=1} = 2\pi e i.$$

练习

求 $\oint_{|z|=2\pi} \frac{\cos z}{z-\pi} \mathrm{d}z = \underline{-2\pi i}$.

典型例题: 柯西积分公式的应用

例

设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \dfrac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$, 求 $f'(1+i)$.

典型例题：柯西积分公式的应用

例

设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \dfrac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$，求 $f'(1+i)$.

解

当 $|z| < \sqrt{3}$ 时，取 $g(\zeta) = 3\zeta^2 + 7\zeta + 1, \zeta_0 = z$ 并应用柯西积分公式得

$$f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta$$

例

设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=\sqrt{3}}\dfrac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 求 $f'(1+i)$.

解

当 $|z|<\sqrt{3}$ 时, 取 $g(\zeta)=3\zeta^2+7\zeta+1, \zeta_0=z$ 并应用柯西积分公式得

$$\begin{aligned}f(z)&=\oint_{|\zeta|=\sqrt{3}}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\\&=2\pi i(3\zeta^2+7\zeta+1)\big|_{\zeta=z}=2\pi i(3z^2+7z+1).\end{aligned}$$

典型例题：柯西积分公式的应用

例

设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \dfrac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$，求 $f'(1+i)$.

解

当 $|z| < \sqrt{3}$ 时，取 $g(\zeta) = 3\zeta^2 + 7\zeta + 1, \zeta_0 = z$ 并应用柯西积分公式得

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2 + 7\zeta + 1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= 2\pi i(3\zeta^2 + 7\zeta + 1)\big|_{\zeta=z} = 2\pi i(3z^2 + 7z + 1).
\end{aligned}
$$

因此
$$f'(z) = 2\pi i(6z + 7),$$

典型例题: 柯西积分公式的应用

例

设 $f(z)=\oint_{|\zeta|=\sqrt{3}}\dfrac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 求 $f'(1+i)$.

解

当 $|z|<\sqrt{3}$ 时, 取 $g(\zeta)=3\zeta^2+7\zeta+1, \zeta_0=z$ 并应用柯西积分公式得

$$\begin{aligned}f(z)&=\oint_{|\zeta|=\sqrt{3}}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta\\&=2\pi i(3\zeta^2+7\zeta+1)\big|_{\zeta=z}=2\pi i(3z^2+7z+1).\end{aligned}$$

因此

$$f'(z)=2\pi i(6z+7),$$

$$f'(1+i)=2\pi i(13+6i)=-12\pi+26\pi i.$$

典型例题: 柯西积分公式的应用

例

设 $f(z) = \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \dfrac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta$, 求 $f'(1+i)$.

解

当 $|z|<\sqrt{3}$ 时, 取 $g(\zeta)=3\zeta^2+7\zeta+1, \zeta_0=z$ 并应用柯西积分公式得

$$\begin{aligned} f(z) &= \oint_{|\zeta|=\sqrt{3}} \frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= 2\pi i(3\zeta^2+7\zeta+1)\big|_{\zeta=z} = 2\pi i(3z^2+7z+1). \end{aligned}$$

因此

$$f'(z) = 2\pi i(6z+7),$$

$$f'(1+i) = 2\pi i(13+6i) = -12\pi+26\pi i.$$

注意当 $|z|>\sqrt{3}$ 时, $f(z)\equiv 0$.

典型例题: 柯西积分公式的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=3}\frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z.$

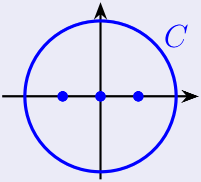
典型例题：柯西积分公式的应用

例

求 $\oint_{|z|=3} \dfrac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z$.

解

被积函数的奇点为 $0, \pm 1$.



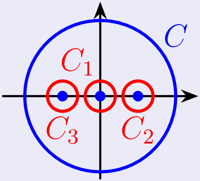
典型例题: 柯西积分公式的应用

例

求 $\oint_{|z|=3} \dfrac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z$.

解

被积函数的奇点为 $0, \pm 1$. 设 C_1, C_2, C_3 分别为绕 $0, 1, -1$ 的分离圆周.



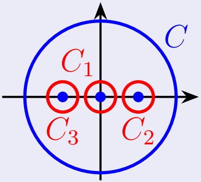
例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z.$

解

被积函数的奇点为 $0, \pm 1$. 设 C_1, C_2, C_3 分别为绕 $0, 1, -1$ 的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z$$



典型例题：柯西积分公式的应用

例

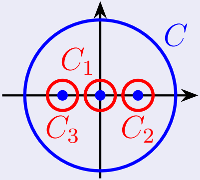
求 $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z.$

解

被积函数的奇点为 $0, \pm 1$. 设 C_1, C_2, C_3 分别为绕 $0, 1, -1$ 的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i \left[\frac{e^z}{z^2-1}\bigg|_{z=0} + \frac{e^z}{z(z+1)}\bigg|_{z=1} + \frac{e^z}{z(z-1)}\bigg|_{z=-1} \right]$$



典型例题: 柯西积分公式的应用

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z$.

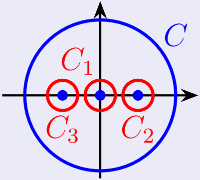
解

被积函数的奇点为 $0, \pm 1$. 设 C_1, C_2, C_3 分别为绕 $0, 1, -1$ 的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式

$$\oint_{|z|=3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1+C_2+C_3} \frac{e^z}{z(z^2-1)}\,\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi i \left[\frac{e^z}{z^2-1}\bigg|_{z=0} + \frac{e^z}{z(z+1)}\bigg|_{z=1} + \frac{e^z}{z(z-1)}\bigg|_{z=-1} \right]$$

$$= 2\pi i \left(-1 + \frac{e}{2} + \frac{e^{-1}}{2} \right) = \pi i (e + e^{-1} - 2).$$



高阶导数的柯西积分公式

解析函数可以由它的积分所表示.

高阶导数的柯西积分公式

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数存在任意阶解析的导数.

高阶导数的柯西积分公式

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数存在任意阶解析的导数.

柯西积分公式

设函数 $f(z)$ 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析, 则对任意 $z_0 \in D$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z.$$

解析函数可以由它的积分所表示. 不仅如此, 通过积分表示, 还可以说明解析函数存在任意阶解析的导数.

柯西积分公式

设函数 $f(z)$ 在闭路或复合闭路 C 及其内部 D 解析, 则对任意 $z_0 \in D$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z.$$

其中右侧被积函数可以记忆成公式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$

右侧被积函数对 z_0 求导 n 次得到.

证明

先证明 $n=1$ 的情形.

证明

先证明 $n=1$ 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离.

证明

先证明 $n = 1$ 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离. 当 $|h| < \delta$ 时, $z_0 + h \in D$.

证明

先证明 $n=1$ 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离. 当 $|h|<\delta$ 时, $z_0+h\in D$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,$$

$$f(z_0+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0-h}\,\mathrm{d}z.$$

高阶导数的柯西积分公式

证明

先证明 $n=1$ 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离. 当 $|h|<\delta$ 时, $z_0+h\in D$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,$$

$$f(z_0+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0-h}\,\mathrm{d}z.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z.$$

证明

先证明 $n=1$ 的情形. 设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离. 当 $|h|<\delta$ 时, $z_0+h\in D$. 由柯西积分公式,

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,$$

$$f(z_0+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0-h}\,\mathrm{d}z.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z.$$

当 $h\to 0$ 时, 左边的极限是 $f'(z_0)$.

证明

先证明 $n=1$ 的情形．设 δ 为 z_0 到 C 的最短距离．当 $|h|<\delta$ 时，$z_0+h\in D$．由柯西积分公式，

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z,$$

$$f(z_0+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{z-z_0-h}\,\mathrm{d}z.$$

两式相减得到

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z.$$

当 $h\to 0$ 时，左边的极限是 $f'(z_0)$．因此我们只需要证明右边的极限等于 $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z$．

高阶导数的柯西积分公式

续证

二者之差 $= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z.$

□

高阶导数的柯西积分公式

续证

二者之差 $= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续，故存在 M 使得 $|f(z)| \leqslant M$.

□

高阶导数的柯西积分公式

续证

二者之差 $= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续，故存在 M 使得 $|f(z)| \leqslant M$. 注意到 $z \in C$, $|z-z_0| \geqslant \delta$, $|z-z_0-h| \geqslant \delta - |h|$.

□

高阶导数的柯西积分公式

续证

二者之差 $= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续，故存在 M 使得 $|f(z)| \leqslant M$. 注意到 $z \in C$, $|z-z_0| \geqslant \delta$, $|z-z_0-h| \geqslant \delta - |h|$. 由长大不等式，

$$\left|\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. □

续证

二者之差 $= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续，故存在 M 使得 $|f(z)| \leqslant M$. 注意到 $z \in C$, $|z-z_0| \geqslant \delta$, $|z-z_0-h| \geqslant \delta - |h|$. 由长大不等式，

$$\left|\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h \to 0$ 时，它的极限为 0，因此 $n=1$ 情形得证. □

续证

二者之差 $= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续，故存在 M 使得 $|f(z)| \leqslant M$. 注意到 $z \in C$, $|z-z_0| \geqslant \delta$, $|z-z_0-h| \geqslant \delta - |h|$. 由长大不等式，

$$\left|\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h \to 0$ 时，它的极限为 0，因此 $n=1$ 情形得证.

对于一般的 n，我们通过归纳法将 $f^{(n)}(z_0)$ 和 $f^{(n)}(z_0+h)$ 表达为积分形式.

□

续证

二者之差 $= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续，故存在 M 使得 $|f(z)| \leqslant M$. 注意到 $z \in C$, $|z-z_0| \geqslant \delta$, $|z-z_0-h| \geqslant \delta - |h|$. 由长大不等式，

$$\left|\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h \to 0$ 时，它的极限为 0，因此 $n=1$ 情形得证.

对于一般的 n，我们通过归纳法将 $f^{(n)}(z_0)$ 和 $f^{(n)}(z_0+h)$ 表达为积分形式. 然后利用长大不等式证明 $h \to 0$ 时，$\dfrac{f^{(n)}(z_0+h)-f^{(n)}(z_0)}{h}$ 趋于积分公式右侧. □

续证

二者之差 $= \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C \dfrac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z$. 由于 $f(z)$ 在 C 上连续, 故存在 M 使得 $|f(z)| \leqslant M$. 注意到 $z \in C$, $|z-z_0| \geqslant \delta$, $|z-z_0-h| \geqslant \delta - |h|$. 由长大不等式,

$$\left|\oint_C \frac{hf(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{M|h|}{\delta^2(\delta-|h|)} \cdot L,$$

其中 L 是闭路 C 的长度. 当 $h \to 0$ 时, 它的极限为 0, 因此 $n = 1$ 情形得证.

对于一般的 n, 我们通过归纳法将 $f^{(n)}(z_0)$ 和 $f^{(n)}(z_0+h)$ 表达为积分形式. 然后利用长大不等式证明 $h \to 0$ 时, $\dfrac{f^{(n)}(z_0+h) - f^{(n)}(z_0)}{h}$ 趋于积分公式右侧. 具体过程省略. □

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

柯西积分公式的作用不在于计算高阶导数，而是用高阶导数来计算积分.

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

柯西积分公式的作用不在于计算高阶导数，而是用高阶导数来计算积分.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z.$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

柯西积分公式的作用不在于计算高阶导数，而是用高阶导数来计算积分.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z.$

解

由于 $\cos(\pi z)$ 在 $|z|<2$ 处处解析，

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

柯西积分公式的作用不在于计算高阶导数, 而是用高阶导数来计算积分.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z.$

解

由于 $\cos(\pi z)$ 在 $|z|<2$ 处处解析, 因此由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{4!}[\cos(\pi z)]^{(4)}\Big|_{z=1}$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

柯西积分公式的作用不在于计算高阶导数，而是用高阶导数来计算积分.

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z.$

解

由于 $\cos(\pi z)$ 在 $|z|<2$ 处处解析，因此由柯西积分公式，

$$\oint_{|z|=2}\frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi i}{4!}[\cos(\pi z)]^{(4)}\Big|_{z=1}$$

$$=\frac{2\pi i}{24}\cdot\pi^4\cos\pi=-\frac{\pi^5 i}{12}.$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z.$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z.$

解

$\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 $|z|<2$ 的奇点为 $z=\pm i$.

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z.$

解

$\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 $|z|<2$ 的奇点为 $z=\pm i$. 取 C_1, C_2 为以 $i, -i$ 为圆心的分离圆周.

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z.$

解

$\dfrac{e^z}{(z^2+1)^2}$ 在 $|z|<2$ 的奇点为 $z=\pm i$. 取 C_1, C_2 为以 $i, -i$ 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理,

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z.$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解

由柯西积分公式，

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i}$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解

由柯西积分公式，

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Bigg|_{z=i}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^z}{(z+i)^2} - \frac{2e^z}{(z+i)^3}\right]\Bigg|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i\pi}{2}.$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解

由柯西积分公式，

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Big|_{z=i}$$

$$= 2\pi i\left[\frac{e^z}{(z+i)^2} - \frac{2e^z}{(z+i)^3}\right]\Big|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i\pi}{2}.$$

类似地，$\displaystyle\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-(1+i)e^{-i}\pi}{2}.$

续解

由柯西积分公式，

$$\oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1}\left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'\Big|_{z=i}$$
$$= 2\pi i\left[\frac{e^z}{(z+i)^2} - \frac{2e^z}{(z+i)^3}\right]\Big|_{z=i} = \frac{(1-i)e^i\pi}{2}.$$

类似地，$\displaystyle\oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{-(1+i)e^{-i}\pi}{2}$. 故

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{(1-i)e^i\pi}{2} + \frac{-(1+i)e^{-i}\pi}{2}$$
$$= \pi i(\sin 1 - \cos 1).$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\oint_{|z|=1} z^n e^z \, \mathrm{d}z$，其中 n 是整数.

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\displaystyle\oint_{|z|=1} z^n e^z \,\mathrm{d}z$, 其中 n 是整数.

解

当 $n \geqslant 0$ 时, $z^n e^z$ 处处解析.

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\oint_{|z|=1} z^n e^z \,\mathrm{d}z$, 其中 n 是整数.

解

当 $n \geqslant 0$ 时, $z^n e^z$ 处处解析. 由柯西-古萨基本定理,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \,\mathrm{d}z = 0.$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\oint_{|z|=1} z^n e^z \, \mathrm{d}z$，其中 n 是整数.

解

当 $n \geqslant 0$ 时，$z^n e^z$ 处处解析. 由柯西-古萨基本定理，

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \, \mathrm{d}z = 0.$$

当 $n \leqslant -1$ 时，e^z 处处解析.

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\oint_{|z|=1} z^n e^z \,\mathrm{d}z$, 其中 n 是整数.

解

当 $n \geqslant 0$ 时, $z^n e^z$ 处处解析. 由柯西-古萨基本定理,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \,\mathrm{d}z = 0.$$

当 $n \leqslant -1$ 时, e^z 处处解析. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z|=1} z^n e^z \,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(-n-1)!}(e^z)^{(-n-1)}\Big|_{z=0} = \frac{2\pi i}{(-n-1)!}.$$

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\displaystyle\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,\mathrm{d}z$ 和 $\displaystyle\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,\mathrm{d}z$.

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,\mathrm{d}z$ 和 $\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,\mathrm{d}z$.

解

(1) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-3|<2$ 的奇点为 $z=2$.

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

例

求 $\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,\mathrm{d}z$ 和 $\oint_{|z-1|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,\mathrm{d}z.$

解

(1) $\frac{1}{(z-2)^2 z^3}$ 在 $|z-3|<2$ 的奇点为 $z=2$. 由柯西积分公式,

$$\oint_{|z-3|=2} \frac{1}{(z-2)^2 z^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z^3}\right)'\bigg|_{z=2} = -\frac{3\pi i}{8}.$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解

(2) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-1|<3$ 的奇点为 $z=0,2$.

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解

(2) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-1|<3$ 的奇点为 $z=0,2$. 取 C_1, C_2 分别为以 0 和 2 为圆心的分离圆周.

典型例题: 使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解

(2) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-1|<3$ 的奇点为 $z=0,2$. 取 C_1, C_2 分别为以 0 和 2 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式,

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解

(2) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-1|<3$ 的奇点为 $z=0,2$．取 C_1,C_2 分别为以 0 和 2 为圆心的分离圆周．由复合闭路定理和柯西积分公式，

$$\oint_{|z-1|=3}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解

(2) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-1|<3$ 的奇点为 $z=0,2$. 取 C_1,C_2 分别为以 0 和 2 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式,

$$\oint_{|z-1|=3}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,dz=\oint_{C_1}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,dz+\oint_{C_2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,dz$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right]''\bigg|_{z=0}+\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z^3}\right)'\bigg|_{z=2}=0.$$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解

(2) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-1|<3$ 的奇点为 $z=0,2$. 取 C_1, C_2 分别为以 0 和 2 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式,

$$\oint_{|z-1|=3}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right]''\bigg|_{z=0}+\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z^3}\right)'\bigg|_{z=2}=0.$$

练习

求 $\displaystyle\oint_{|z-2i|=3}\frac{1}{z^2(z-i)}\,\mathrm{d}z.$

典型例题：使用高阶导数的柯西积分公式计算积分

续解

(2) $\dfrac{1}{(z-2)^2z^3}$ 在 $|z-1|<3$ 的奇点为 $z=0,2$. 取 C_1, C_2 分别为以 0 和 2 为圆心的分离圆周. 由复合闭路定理和柯西积分公式,

$$\oint_{|z-1|=3}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z=\oint_{C_1}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z+\oint_{C_2}\frac{1}{(z-2)^2z^3}\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{2\pi i}{2!}\left[\frac{1}{(z-2)^2}\right]''\bigg|_{z=0}+\frac{2\pi i}{1!}\left(\frac{1}{z^3}\right)'\bigg|_{z=2}=0.$$

练习

求 $\displaystyle\oint_{|z-2i|=3}\frac{1}{z^2(z-i)}\,\mathrm{d}z$.

答案

0.

例题: 使用柯西积分公式证明莫累拉定理

例 (莫累拉定理)

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

例题: 使用柯西积分公式证明莫累拉定理

例 (莫累拉定理)

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

该定理可视作柯西-古萨基本定理的逆定理.

例 (莫累拉定理)

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内连续，且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$，则 $f(z)$ 在 D 内解析.

该定理可视作柯西-古萨基本定理的逆定理.

证明

由题设可知 $f(z)$ 的积分与路径无关.

$\square$

例题: 使用柯西积分公式证明莫累拉定理

例 (莫累拉定理)

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

该定理可视作柯西-古萨基本定理的逆定理.

证明

由题设可知 $f(z)$ 的积分与路径无关. 固定的 $z_0 \in D$, 则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

定义了 D 内一个单值函数.

□

例题: 使用柯西积分公式证明莫累拉定理

例 (莫累拉定理)

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

该定理可视作柯西-古萨基本定理的逆定理.

证明

由题设可知 $f(z)$ 的积分与路径无关. 固定的 $z_0 \in D$, 则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

定义了 D 内一个单值函数. 类似于原函数的证明可知 $F'(z) = f(z)$. □

例题: 使用柯西积分公式证明莫累拉定理

例 (莫累拉定理)

设 $f(z)$ 在单连通域 D 内连续, 且对于 D 中任意闭路 C 都有 $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, 则 $f(z)$ 在 D 内解析.

该定理可视作柯西-古萨基本定理的逆定理.

证明

由题设可知 $f(z)$ 的积分与路径无关. 固定的 $z_0 \in D$, 则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$$

定义了 D 内一个单值函数. 类似于原函数的证明可知 $F'(z) = f(z)$. 故 $f(z)$ 作为解析函数 $F(z)$ 的导数也是解析的. □

解析函数与实函数的差异

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同?

解析函数与实函数的差异

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同？高阶柯西积分公式说明，函数 $f(z)$ 只要在闭区域 $\overline{D}$ 中处处可导，它就一定无限次可导，并且各阶导数仍然在 $\overline{D}$ 中解析.

解析函数与实函数的差异

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数 $f(z)$ 只要在闭区域 $\overline{D}$ 中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在 $\overline{D}$ 中解析. 这一点与实变量函数有本质的区别.

解析函数与实函数的差异

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同? 高阶柯西积分公式说明, 函数 $f(z)$ 只要在闭区域 $\overline{D}$ 中处处可导, 它就一定无限次可导, 并且各阶导数仍然在 $\overline{D}$ 中解析. 这一点与实变量函数有本质的区别.

同时我们也可以看出, 如果一个二元实函数 $u(x, y)$ 是一个解析函数的实部或虚部, 则 u 也是具有任意阶偏导数.

解析函数与实函数的差异

高阶柯西积分公式说明解析函数的导数与实函数的导数有何不同？高阶柯西积分公式说明，函数 $f(z)$ 只要在闭区域 $\overline{D}$ 中处处可导，它就一定无限次可导，并且各阶导数仍然在 $\overline{D}$ 中解析. **这一点与实变量函数有本质的区别.**

同时我们也可以看出，如果一个二元实函数 $u(x,y)$ 是一个解析函数的实部或虚部，则 u 也是具有任意阶偏导数. 这便引出了调和函数的概念.