复变函数与积分变换

张神星

2024 年 8 月 26 日

第一章　复数与复变函数

复数起源于多项式方程的求根问题. 我们考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=b^2-4c.$$

1. 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;
2. 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重的实根;
3. 当 $\Delta<0$ 时, 无实根. 然而, 如果我们接受负数开方的话, 此时仍然有两个根, 形式地计算可以发现它们满足原来的方程.

现在我们来考虑一元三次方程.

例

解方程 $x^3+6x-20=0$.

解

设 $x=u+v$, 则

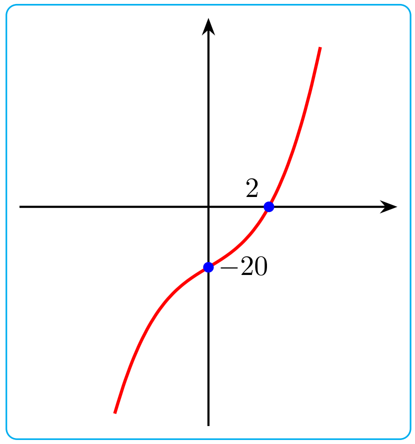
$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望 $u^3+v^3=20, uv=-2$, 则 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$. 解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

所以 $u=1\pm\sqrt{3}, v=1\mp\sqrt{3}, x=u+v=2$.

那么这个方程是不是真的只有 $x=2$ 这一个解呢? 由 $f'(x)=3x^2+6>0$ 可知其单调递增, 因此确实只有一个解.



例

解方程 $x^3-7x+6=0$.

解

同样地我们有 $x=u+v$, 其中

$$u^3+v^3=-6,\quad uv=\frac{7}{3}.$$

于是 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+\dfrac{343}{27}=0$. 然而这个方程没有实数解.

我们可以强行解得

$$u^3=-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}.$$

续解

$$u=\sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

$$v=\frac{3-2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9-\sqrt{-3}}{6},\frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

$$x=u+v=2,-3,1.$$

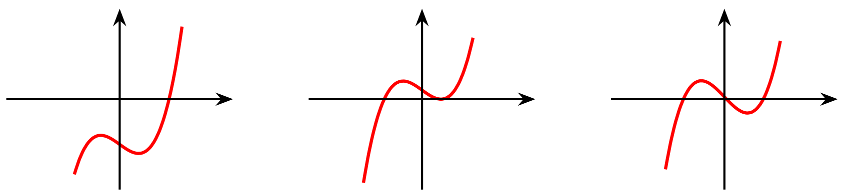
所以我们从一条 “错误的路径” 走到了正确的目的地?

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言, 类似可得:

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

由于 $p=0$ 情形较为简单, 所以我们不考虑这种情形. 通过分析函数图像的极值点可以知道:

1. 当 $\Delta > 0$ 时, 有 1 个实根.
2. 当 $\Delta = 0$ 时, 有 2 个实根 $x = -\sqrt[3]{4q}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$ (2 重).
3. 当 $\Delta < 0$ 时, 有 3 个实根.



所以我们想要使用求根公式的话, 就必须接受负数开方. 那么为什么当 $\Delta < 0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 在学习了第一章的内容之后我们就可以回答这个问题了.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受.

> 圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根。
>
> 莱布尼兹 *(Leibniz)*

我们将在下一节使用更为现代的语言来解释和运用复数.

1.1 复数及其代数运算

1.1.1 复数的概念

现在我们来正式介绍复数的概念.

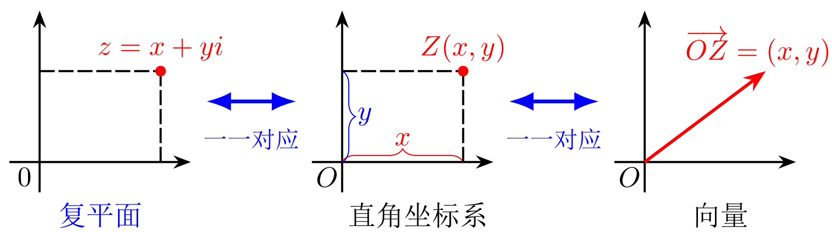
定义

固定一个记号 i, 复数就是形如 $z = x + yi$ 的元素, 其中 x, y 均是实数, 且不同的 (x, y) 对应不同的复数.

换言之, 每一个复数可以唯一地表达成 $x + yi$ 这样的形式. 也就是说, 复数全体构成一个二维实线性空间, 且 $\{1, i\}$ 是一组基.

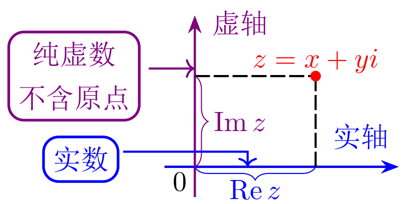
我们将全体复数记作 $\mathbb{C}$, 全体实数记作 $\mathbb{R}$, 则 $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$.

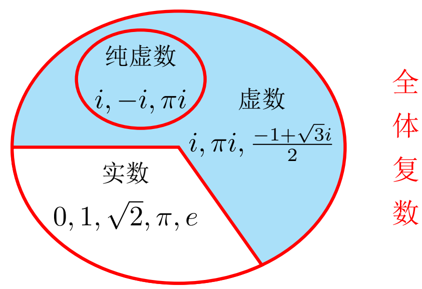
由于 $\mathbb{C}$ 是一个二维实向量空间, 1 和 i 构成一组基, 因此它和平面上的点可以建立一一对应.



当 $y = 0$ 时, $z = x$ 就是一个实数. 它对应复平面上的点就是直角坐标系的 x 轴上的点. 因此我们称 x 轴为实轴. 相应地, 称 y 轴为虚轴. 称 $z = x + yi$ 在实轴和虚轴的投影为它的实部 $\operatorname{Re} z = x$ 和虚部 $\operatorname{Im} z = y$.

当 $\operatorname{Im} z = 0$ 时, z 是实数. 不是实数的复数是虚数. 当 $\operatorname{Re} z = 0$ 且 $z \neq 0$ 时, 称 z 是纯虚数.





例

实数 x 取何值时, $z = (x^2 - 3x - 4) + (x^2 - 5x - 6)i$ 是:
enumerate item(1) 实数; enumerate item(2) 纯虚数.

解

1. $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6.
2. $\operatorname{Re} z = x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq -1$, $x = 4$.

练习

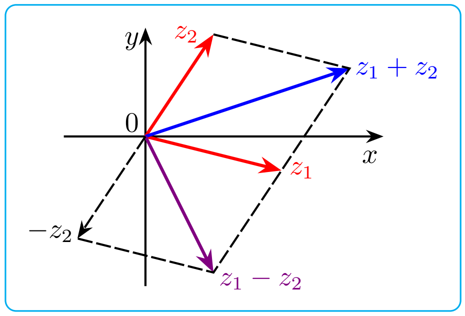
若 $x^2(1+i) + x(5+4i) + 4 + 3i$ 是纯虚数, 则实数 $x =$ __-4__.

1.1.2　复数的代数运算

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.



规定 $i\cdot i=-1$. 由线性空间的数乘和乘法分配律可得:

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=x_1\cdot x_2+x_1\cdot y_2i+y_1i\cdot x_2+y_1i\cdot y_2i\\&=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i,\end{aligned}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{x-yi}{x^2+y^2},\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 n 次幂为 n 个 z 相乘. 当 $z\neq 0$ 时, 还可以定义 $z^0=1, z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$.

例

1. $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

2. 令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, 则 $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \omega^3=1$.
3. 令 $z=1+i$, 则

$$z^2=2i,\quad z^3=-2+2i,\quad z^4=-4,\quad z^8=16=2^4.$$

我们把满足 $z^n=1$ 的复数 z 称为 n 次单位根. 那么 $1,i,-1,-i$ 是 4 次单位根, $1,\omega,\omega^2$ 是 3 次单位根.

例

化简 $1+i+i^2+i^3+i^4=$__1__.

解

根据等比数列求和公式,

$$1+i+i^2+i^3+i^4=\frac{i^5-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1.$$

练习 (2020 年 A 卷)

化简 $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2020} = \underline{\quad 1 \quad}$.

复数全体构成一个域. 所谓的域, 是指带有如下内容和性质的集合

- 包含 $0, 1$, 且有四则运算;
- 满足加法结合/交换律, 乘法结合/交换/分配律;
- 对任意 a, $a+0=a\times 1=a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任何次数 $n\geqslant 1$ 的复系数多项式

$$p(z)=z^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_1z+c_0,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0)=0$. 也就是说复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘积. 我们会在第五章证明该结论.

在 $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 上可以定义出一个好的大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a\neq b$, 则要么 $a>b$, 要么 $b>a$;
- 若 $a>b$, 则对于任意 c, $a+c>b+c$;
- 若 $a>b, c>0$, 则 $ac>bc$.

而 $\mathbb{C}$ 却不是有序域. 如果 $i>0$, 则

$$-1=i\cdot i>0, \quad -i=-1\cdot i>0.$$

于是 $0>i$, 矛盾! 同理 $i<0$ 也不可能.

1.1.3 共轭复数

定义

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 $\bar{z}$. 换言之, $\bar{z}=x-yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

1. z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.
2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{z_1/z_2} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$.
3. $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$.
4. $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$, $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$.

enumerate item(4) 表明了 x, y 可以用 $z, \overline{z}$ 表出. enumerate item(2) 表明共轭复数和四则运算交换. 这意味着使用共轭复数进行计算和证明，往往比直接使用 x, y 表达的形式更简单.

练习

z 关于虚轴的对称点是 $\underline{\ -\overline{z}\ }$.

例

证明 $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但我们利用共轭复数可以更简单地证明它.

证明. 由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$, 因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$

□

例

设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明. $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即

$$z(1+\overline{z}^2) = \overline{z}(1+z^2), \quad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1) = 0.$$

由 $y \neq 0$ 可知 $z \neq \overline{z}$. 故上述等式等价于 $z\overline{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$. □

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例

$z = -\dfrac{1}{i} - \dfrac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\bar{z}$.

解

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

因此

$$\operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad z\bar{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

例

设 $z_1 = 5-5i, z_2 = -3+4i$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解

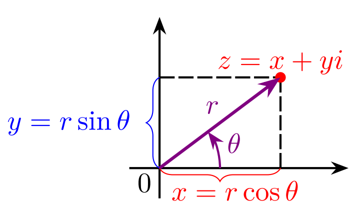
$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2} \\ &= \frac{(-15-20)+(-20+15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

因此 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = -\dfrac{7}{5} + \dfrac{1}{5}i$.

1.2 复数的三角与指数形式

1.2.1 复数的模和辐角

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.

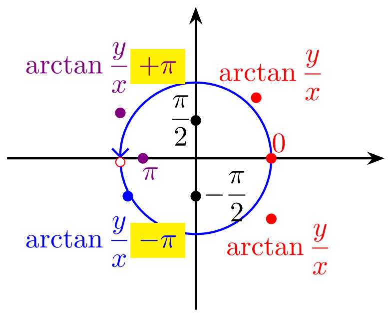


$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\theta = \arctan\frac{y}{x} \text{ 或 } \arctan\frac{y}{x} \pm \pi$$

定义

- 称 r 为 z 的模, 记为 $|z| = r$.
- 称 θ 为 z 的辐角, 记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$. 0 的辐角没有意义.

任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为主辐角或辐角主值, 记作 $\arg z$.



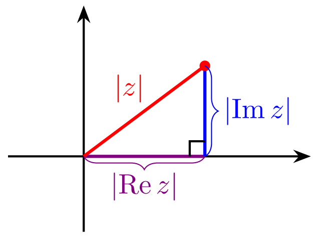
$$\arg z = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \\ \arctan \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

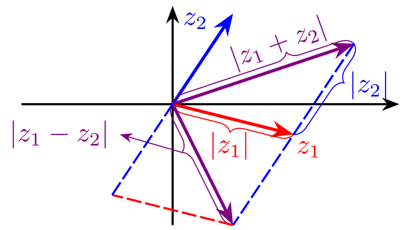
那么 $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

注意 $\arg \overline{z} = -\arg z$ 未必成立, 例如 z 是负实数.

复数的模满足如下性质:

- $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$;
- $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
- $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.





例

证明

1. $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;

2. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2})$.