复变函数与积分变换

张神星

合肥工业大学

2022 年秋季学期

第二章　解析函数

本章作业

- **2，3，4**
- **6，8，11**
- **12，15，18**

1. 解析函数的概念
2. 函数解析的充要条件
3. 初等函数

复变函数的导数

- 由于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

- 由于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义

设 $w = f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0 \in D$.

复变函数的导数

- 由于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义

设 $w=f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0\in D$. 如果极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导.

复变函数的导数

- 由于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义

设 $w=f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0\in D$. 如果极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作

$$f'(z_0)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

复变函数的导数

- 由于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 我们可以像一元实变函数一样去定义复变函数的导数和微分.

定义

设 $w=f(z)$ 的定义域是区域 D, $z_0\in D$. 如果极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

存在, 则称 $f(z)$ 在 z_0 可导. 这个极限值称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数, 记作

$$f'(z_0)=\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_0}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}.$$

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导, 称 $f(z)$ 在 D 内可导.

- 例 函数 $f(z) = x + 2yi$ 是否可导?

典型例题: 线性函数的不可导性

- 例 函数 $f(z) = x + 2yi$ 是否可导?
- 解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

典型例题: 线性函数的不可导性

- 例 函数 $f(z) = x + 2yi$ 是否可导?
- 解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+\Delta x) + 2(y+\Delta y)i - (x+2yi)}{\Delta z}$$

典型例题：线性函数的不可导性

- 例 函数 $f(z) = x + 2yi$ 是否可导?
- 解

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+\Delta x) + 2(y+\Delta y)i - (x+2yi)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i}.
\end{aligned}
$$

典型例题：线性函数的不可导性

- 例 函数 $f(z) = x + 2yi$ 是否可导？
- 解

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+\Delta x) + 2(y+\Delta y)i - (x+2yi)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i}.
\end{aligned}
$$

- 当 $\Delta x = 0$ 时，上述极限为 2；当 $\Delta y = 0$ 时，上述极限为 1.

典型例题: 线性函数的不可导性

- 例 函数 $f(z) = x + 2yi$ 是否可导?
- 解

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+\Delta x) + 2(y+\Delta y)i - (x+2yi)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i}. \end{aligned}$$

- 当 $\Delta x = 0$ 时, 上述极限为 2; 当 $\Delta y = 0$ 时, 上述极限为 1.
- 因此该极限不存在, $f(z)$ 处处不可导. ■

典型例题: 线性函数的不可导性

- 例 函数 $f(z) = x + 2yi$ 是否可导?
- 解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x + \Delta x) + 2(y + \Delta y)i - (x + 2yi)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta yi}{\Delta x + \Delta yi}.$$

- 当 $\Delta x = 0$ 时, 上述极限为 2; 当 $\Delta y = 0$ 时, 上述极限为 1.
- 因此该极限不存在, $f(z)$ 处处不可导. ■
- 若将其视为二元实变量的函数, 则该函数在不同方向的方向导数不同.

- 例 函数 $f(z)=x+2yi$ 是否可导?
- 解

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(x+\Delta x)+2(y+\Delta y)i-(x+2yi)}{\Delta z}$$
$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}.$$

- 当 $\Delta x=0$ 时, 上述极限为 2; 当 $\Delta y=0$ 时, 上述极限为 1.
- 因此该极限不存在, $f(z)$ 处处不可导. ■
- 若将其视为二元实变量的函数, 则该函数在不同方向的方向导数不同.
- 练习 函数 $f(z)=x-yi$ 是否可导?

典型例题: 线性函数的不可导性

- **例** 函数 $f(z) = x + 2yi$ 是否可导?
- **解**

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(x+\Delta x) + 2(y+\Delta y)i - (x+2yi)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta x + 2\Delta y i}{\Delta x + \Delta y i}.
\end{aligned}
$$

- 当 $\Delta x = 0$ 时, 上述极限为 2; 当 $\Delta y = 0$ 时, 上述极限为 1.
- 因此该极限不存在, $f(z)$ 处处不可导. ■
- 若将其视为二元实变量的函数, 则该函数在不同方向的方向导数不同.
- **练习** 函数 $f(z) = x - yi$ 是否可导? **答案** 不可导.

- 例 求 $f(z) = z^2$ 的导数.

例题: 复变函数的导数

- 例 求 $f(z) = z^2$ 的导数.
- 解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

- 例 求 $f(z) = z^2$ 的导数.
- 解

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$
$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z}$$

例题：复变函数的导数

- 例 求 $f(z) = z^2$ 的导数.
- 解

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

- 和一元实变函数情形类似，我们有如下求导法则:

求导运算法则

- 和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:
- $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;

- 和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:
- $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;

求导运算法则

- 和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:
- $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf'$;

- 和一元实变函数情形类似，我们有如下求导法则:
- $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf';$
- $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2};$

求导运算法则

- 和一元实变函数情形类似, 我们有如下求导法则:
- $(c)' = 0$, 其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$, 其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf'$;
- $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$;
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z)$;

求导运算法则

- 和一元实变函数情形类似，我们有如下求导法则:
- $(c)' = 0$，其中 c 为复常数;
- $(z^n)' = nz^{n-1}$，其中 n 为整数;
- $(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (cf)' = cf'$;
- $(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$;
- $[f(g(z))]' = f'[g(z)] \cdot g'(z)$;
- $f'(z) = \dfrac{1}{(f^{-1})'[f(z)]}$.

可导蕴含连续

定理

若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

可导蕴含连续

定理

若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

- 证明 该定理的证明和实变量情形完全相同.

定理

若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

- 证明 该定理的证明和实变量情形完全相同.
- 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$,

可导蕴含连续

定理

若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

- **证明** 该定理的证明和实变量情形完全相同.
- 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, 则

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z$$

可导蕴含连续

定理

若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

- 证明 该定理的证明和实变量情形完全相同.
- 设 $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \Delta z \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \Delta z\end{aligned}$$

可导蕴含连续

定理

若 $f(z)$ 在 z_0 可导, 则 $f(z)$ 在 z_0 连续.

- 证明 该定理的证明和实变量情形完全相同.
- 设 $\Delta w = f(z_0+\Delta z) - f(z_0)$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z\to 0}\Delta w &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\cdot\Delta z\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}\cdot\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z\\ &= f'(z_0)\cdot 0 = 0. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

复变函数的微分

- 复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.

- 复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.
- 如果存在常数 A 使得函数 $w=f(z)$ 满足

$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\Delta z+o(\Delta z),$$

复变函数的微分

- 复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.
- 如果存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

- 其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}w = A\Delta z$.

- 复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.
- 如果存在常数 A 使得函数 $w=f(z)$ 满足

$$\Delta w=f(z_0+\Delta z)-f(z_0)=A\Delta z+o(\Delta z),$$

- 其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}w=A\Delta z$.
- 和实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $\mathrm{d}w=f'(z_0)\Delta z, \mathrm{d}z=\Delta z$.

- 复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.
- 如果存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

- 其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}w = A\Delta z$.
- 和实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $\mathrm{d}w = f'(z_0)\Delta z, \mathrm{d}z = \Delta z$.
- 故 $\mathrm{d}w = f'(z_0)\,\mathrm{d}z, f'(z_0) = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$.

- 复变函数的微分也和一元实变函数情形类似.
- 如果存在常数 A 使得函数 $w = f(z)$ 满足

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A\Delta z + o(\Delta z),$$

- 其中 $o(\Delta z)$ 表示 Δz 的高阶无穷小量, 则称 $f(z)$ 在 z_0 处可微, 称 $A\Delta z$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的微分, 记作 $\mathrm{d}w = A\Delta z$.
- 和实变函数情形一样, 复变函数的可微和可导是等价的, 且 $\mathrm{d}w = f'(z_0)\Delta z, \mathrm{d}z = \Delta z$.
- 故 $\mathrm{d}w = f'(z_0)\,\mathrm{d}z, f'(z_0) = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$.
- 如果此刻你想到了二元实变函数的全微分公式, 那么你就快要接触到解析函数本质了.

定义

解析函数

定义

- 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 那么称 $f(z)$ 在 z_0 解析.

定义

- 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 那么称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 那么称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数(也叫全纯函数或正则函数).

定义

- 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 那么称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 那么称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数(也叫全纯函数或正则函数).
- 如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

定义

- 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 那么称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 那么称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数(也叫全纯函数或正则函数).
- 如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

- 由于区域 D 是一个开集, 其中的任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 的邻域.

定义

- 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 那么称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 那么称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数(也叫全纯函数或正则函数).
- 如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

- 由于区域 D 是一个开集, 其中的任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 的邻域. 所以 $f(z)$ 在 D 内解析和在 D 内可导是等价的.

定义

- 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 那么称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 那么称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数(也叫全纯函数或正则函数).
- 如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

- 由于区域 D 是一个开集, 其中的任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 的邻域. 所以 $f(z)$ 在 D 内解析和在 D 内可导是等价的.
- 如果 $f(z)$ 在 z_0 解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而解析.

定义

- 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 那么称 $f(z)$ 在 z_0 解析.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, 那么称 $f(z)$ 在 D 内解析, 或称 $f(z)$ 是 D 内的一个解析函数(也叫全纯函数或正则函数).
- 如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析, 称 z_0 为 $f(z)$ 的一个奇点.

- 由于区域 D 是一个开集, 其中的任意 $z_0 \in D$ 均存在一个包含在 D 的邻域. 所以 $f(z)$ 在 D 内解析和在 D 内可导是等价的.
- 如果 $f(z)$ 在 z_0 解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内处处可导, 从而解析. 因此 $f(z)$ 解析点全体是一个开集.

解析函数的特点

- 从上一节的例子中观察到:

- 从上一节的例子中观察到: 解析函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \overline{z}$ 之类的内容.

解析函数的特点

- 从上一节的例子中观察到: 解析函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \overline{z}$ 之类的内容.
- 这种直观印象实际上是有道理的.

- 从上一节的例子中观察到: 解析函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 之类的内容.
- 这种直观印象实际上是有道理的.
- 我们知道, 给一个复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 等价于给两个二元实变函数, 也可以直接把 f 看成是 x, y 的二元实变量复值函数.

解析函数的特点

- 从上一节的例子中观察到: 解析函数往往可以直接表达为 z 的函数的形式, 而不解析的往往包含 $x, y, \bar{z}$ 之类的内容.
- 这种直观印象实际上是有道理的.
- 我们知道, 给一个复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 等价于给两个二元实变函数, 也可以直接把 f 看成是 x, y 的二元实变量复值函数.
- 我们将从 f 的偏导数来推导出 f 可导的充要条件.

可导的等价刻画: 形式推导

- 为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.

可导的等价刻画: 形式推导

- 为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.
- 设 $f(z)$ 在 z 处可导,

- 为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.
- 设 $f(z)$ 在 z 处可导, 则

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

可导的等价刻画: 形式推导

- 为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.
- 设 $f(z)$ 在 z 处可导, 则

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

- 令 $\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x,$

可导的等价刻画: 形式推导

- 为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.
- 设 $f(z)$ 在 z 处可导, 则

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

- 令 $\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x$, 我们得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x} = u_x + iv_x.$$

可导的等价刻画: 形式推导

- 为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.
- 设 $f(z)$ 在 z 处可导, 则

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

- 令 $\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x$, 我们得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x} = u_x + i v_x.$$

- 令 $\Delta x = 0, \Delta z = \Delta y i$,

可导的等价刻画: 形式推导

- 为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.
- 设 $f(z)$ 在 z 处可导, 则

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

- 令 $\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x$, 我们得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x} = u_x + iv_x.$$

- 令 $\Delta x = 0, \Delta z = \Delta yi$, 我们得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z+\Delta yi) - f(z)}{\Delta yi} = -i(u_y + iv_y).$$

- 为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.
- 设 $f(z)$ 在 z 处可导, 则

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

- 令 $\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x$, 我们得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x} = u_x + i v_x.$$

- 令 $\Delta x = 0, \Delta z = \Delta y i$, 我们得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z+\Delta y i) - f(z)}{\Delta y i} = -i(u_y + i v_y).$$

- 因此 $u_x + i v_x = -i(u_y + i v_y)$,

可导的等价刻画: 形式推导

- 为了简便我们用 u_x, u_y, v_x, v_y 等记号表示偏导数.
- 设 $f(z)$ 在 z 处可导, 则

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

- 令 $\Delta y = 0, \Delta z = \Delta x$, 我们得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z+\Delta x) - f(z)}{\Delta x} = u_x + iv_x.$$

- 令 $\Delta x = 0, \Delta z = \Delta yi$, 我们得到

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z+\Delta yi) - f(z)}{\Delta yi} = -i(u_y + iv_y).$$

- 因此 $u_x + iv_x = -i(u_y + iv_y)$, 即 $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$.

可导的等价刻画: 形式推导

- 反过来, 假设 $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$

可导的等价刻画: 形式推导

- 反过来, 假设 $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$.
- 那么由全微分公式

$$\mathrm{d}u = u_x \,\mathrm{d}x + u_y \,\mathrm{d}y$$

可导的等价刻画: 形式推导

- 反过来, 假设 $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$.
- 那么由全微分公式

$$\mathrm{d}u = u_x \,\mathrm{d}x + u_y \,\mathrm{d}y = u_x \,\mathrm{d}x - v_x \,\mathrm{d}y,$$

- 反过来, 假设 $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$.
- 那么由全微分公式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}v &= v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

可导的等价刻画: 形式推导

- 反过来, 假设 $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$.
- 那么由全微分公式

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}v &= v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y = v_x\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

可导的等价刻画: 形式推导

- 反过来, 假设 $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$.
- 那么由全微分公式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}v &= v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y = v_x\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}f &= \mathrm{d}(u+iv) = (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}x + (-v_x + iu_x)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

- 反过来, 假设 $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$.
- 那么由全微分公式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}v &= v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y = v_x\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}f &= \mathrm{d}(u+iv) = (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}x + (-v_x + iu_x)\,\mathrm{d}y\\
&= (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}(x+iy)
\end{aligned}
$$

- 反过来, 假设 $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$.
- 那么由全微分公式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= u_x \,\mathrm{d}x + u_y \,\mathrm{d}y = u_x \,\mathrm{d}x - v_x \,\mathrm{d}y, \\
\mathrm{d}v &= v_x \,\mathrm{d}x + v_y \,\mathrm{d}y = v_x \,\mathrm{d}x + u_x \,\mathrm{d}y, \\
\mathrm{d}f &= \mathrm{d}(u + iv) = (u_x + iv_x) \,\mathrm{d}x + (-v_x + iu_x) \,\mathrm{d}y \\
&= (u_x + iv_x) \,\mathrm{d}(x + iy) \\
&= (u_x + iv_x) \,\mathrm{d}z = (v_y - iu_y) \,\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

- 反过来, 假设 $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$.
- 那么由全微分公式

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y = u_x\,\mathrm{d}x - v_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}v &= v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y = v_x\,\mathrm{d}x + u_x\,\mathrm{d}y,\\
\mathrm{d}f &= \mathrm{d}(u+iv) = (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}x + (-v_x + iu_x)\,\mathrm{d}y\\
&= (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}(x+iy)\\
&= (u_x + iv_x)\,\mathrm{d}z = (v_y - iu_y)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

- 故 $f(z)$ 在 z 处可导, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

可导的等价刻画: 柯西-黎曼方程

定理

- 函数 $f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u_x, u_y, v_x, v_y 存在且满足柯西-黎曼方程 *(C-R 方程)*

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

可导的等价刻画: 柯西-黎曼方程

定理

- 函数 $f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u_x, u_y, v_x, v_y 存在且满足柯西-黎曼方程 *(C-R 方程)*

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

- 此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

可导的等价刻画: 柯西-黎曼方程

定理

- 函数 $f(z)$ 在 z 可导当且仅当在 z 点 u_x, u_y, v_x, v_y 存在且满足柯西-黎曼方程 *(C-R 方程)*

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

- 此时

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

可导的判定方法

- 具体计算时, 我们先判断 $f(z)$ 的 u, v 的偏导数是否存在.

可导的判定方法

- 具体计算时, 我们先判断 $f(z)$ 的 u, v 的偏导数是否存在.
- 然后把偏导数按次序依次写出

$$u_x = \cdots, \quad u_y = \cdots$$

$$v_x = \cdots, \quad v_y = \cdots$$

可导的判定方法

- 具体计算时，我们先判断 $f(z)$ 的 u, v 的偏导数是否存在.
- 然后把偏导数按次序依次写出

$$u_x = \cdots, \quad u_y = \cdots$$

$$v_x = \cdots, \quad v_y = \cdots$$

- 列出 C-R 方程求出所有的可导点.

可导的判定方法

- 具体计算时, 我们先判断 $f(z)$ 的 u, v 的偏导数是否存在.
- 然后把偏导数按次序依次写出

$$u_x = \cdots, \quad u_y = \cdots$$

$$v_x = \cdots, \quad v_y = \cdots$$

- 列出 C-R 方程求出所有的可导点.
- 如果一个点的一个邻域内都可导, 那么这个点是解析点.

可导的判定方法

- 具体计算时, 我们先判断 $f(z)$ 的 u, v 的偏导数是否存在.
- 然后把偏导数按次序依次写出

$$u_x = \cdots, \quad u_y = \cdots$$

$$v_x = \cdots, \quad v_y = \cdots$$

- 列出 C-R 方程求出所有的可导点.
- 如果一个点的一个邻域内都可导, 那么这个点是解析点.
- 如果一个区域 D 内所有点都可导, 那么区域 D 是解析区域.

可导的判定方法

- 具体计算时, 我们先判断 $f(z)$ 的 u, v 的偏导数是否存在.
- 然后把偏导数按次序依次写出

$$u_x = \cdots, \quad u_y = \cdots$$

$$v_x = \cdots, \quad v_y = \cdots$$

- 列出 C-R 方程求出所有的可导点.
- 如果一个点的一个邻域内都可导, 那么这个点是解析点.
- 如果一个区域 D 内所有点都可导, 那么区域 D 是解析区域.
- 当然, 如果能用求导法则直接说明 $f(z)$ 在 D 内处处可导, 则也可以知道 $f(z)$ 是 D 内的解析函数.

柯西-黎曼方程的另一种形式 *

- 注意到 $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}, y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$,

柯西-黎曼方程的另一种形式 *

- 注意到 $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}, y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, C-R 方程等价于

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (u_x - v_y) + i(v_x + u_y) = 0.$$

柯西-黎曼方程的另一种形式 *

- 注意到 $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}, y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$, C-R 方程等价于

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = (u_x - v_y) + i(v_x + u_y) = 0.$$

- 所以我们也可以把 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$ 叫做 C-R 方程.

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (1) $f(z) = \overline{z}$.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (1) $f(z)=\overline{z}$.
- 解 由 $u=x, v=-y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 1, & u_y &= 0, \\ v_x &= 0, & v_y &= -1. \end{aligned}$$

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (1) $f(z)=\overline{z}$.
- 解 由 $u=x, v=-y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 1, & u_y &= 0, \\ v_x &= 0, & v_y &= -1. \end{aligned}$$

- 因为 $u_x=1\neq v_y=-1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (1) $f(z)=\overline{z}$.
- 解 由 $u=x, v=-y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 1, & u_y &= 0, \\ v_x &= 0, & v_y &= -1. \end{aligned}$$

- 因为 $u_x=1\neq v_y=-1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.
- 或者: 由于 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=1\neq 0$, 因此该函数处处不可导, 处处不解析.

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (1) $f(z) = \overline{z}$.
- 解 由 $u = x, v = -y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 1, & u_y &= 0, \\ v_x &= 0, & v_y &= -1. \end{aligned}$$

- 因为 $u_x = 1 \neq v_y = -1$, 所以该函数处处不可导, 处处不解析.
- 或者: 由于 $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 1 \neq 0$, 因此该函数处处不可导, 处处不解析.
- 不过这种方法由于课本上没有, 所以考试的时候最好只把它作为一种验算手段.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (2) $f(z) = z\operatorname{Re} z$.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (2) $f(z) = z \operatorname{Re} z$.
- 解 由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (2) $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$.
- 解 由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\ v_x &= y, & v_y &= x. \end{aligned}$$

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (2) $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$.
- 解 由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\ v_x &= y, & v_y &= x. \end{aligned}$$

- 由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 C-R 方程.

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (2) $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z$.
- 解 由 $f(z) = x^2 + ixy, u = x^2, v = xy$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\ v_x &= y, & v_y &= x. \end{aligned}$$

- 由 $2x = x, 0 = -y$ 可知只有 $x = y = 0, z = 0$ 满足 C-R 方程.
- 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0) = (u_x + iv_x)\Big|_{z=0} = 0.$$

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (2) $f(z)=z\,\mathrm{Re}\,z$.
- 解 由 $f(z)=x^2+ixy, u=x^2, v=xy$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= 0, \\ v_x &= y, & v_y &= x. \end{aligned}$$

- 由 $2x=x, 0=-y$ 可知只有 $x=y=0, z=0$ 满足 C-R 方程.
- 因此该函数只在 0 可导, 处处不解析且

$$f'(0)=(u_x+iv_x)\Big|_{z=0}=0.$$

- 也可从 $f(z)=\dfrac{z(z+\overline{z})}{2}, \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\dfrac{z}{2}$ 看出.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (3) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$.

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (3) $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$.
- 解 由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (3) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$.
- 解 由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y, & u_y &= -e^x \sin y, \\ v_x &= e^x \sin y, & v_y &= e^x \cos y. \end{aligned}$$

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (3) $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$.
- 解 由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y, & u_y &= -e^x \sin y, \\ v_x &= e^x \sin y, & v_y &= e^x \cos y. \end{aligned}$$

- 因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i\sin y) = f(z).$$

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (3) $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$.
- 解 由 $u=e^x\cos y, v=e^x\sin y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= e^x\cos y, & u_y &= -e^x\sin y,\\ v_x &= e^x\sin y, & v_y &= e^x\cos y. \end{aligned}$$

- 因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z)=u_x+iv_x=e^x(\cos y+i\sin y)=f(z).$$

- 实际上, 这个函数就是复变量的指数函数 e^z. ■

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (3) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$.
- 解 由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y, & u_y &= -e^x \sin y, \\ v_x &= e^x \sin y, & v_y &= e^x \cos y. \end{aligned}$$

- 因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z).$$

- 实际上, 这个函数就是复变量的指数函数 e^z. ■
- 练习 求 $f(z) = 3x^2 + y^2 - 2xyi$ 的可导点和解析点.

典型例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- 例 判断下列函数在何处可导, 在何处解析:
- (3) $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$.
- 解 由 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ 可知

$$u_x = e^x \cos y, \qquad u_y = -e^x \sin y,$$
$$v_x = e^x \sin y, \qquad v_y = e^x \cos y.$$

- 因此该函数处处可导, 处处解析, 且

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \sin y) = f(z).$$

- 实际上, 这个函数就是复变量的指数函数 e^z. ■
- 练习 求 $f(z) = 3x^2 + y^2 - 2xyi$ 的可导点和解析点.
- 解 可导点为 $\operatorname{Re} z = 0$, 没有解析点.

例题: 利用 C-R 方程判断可导和解析

- 例 设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.

- 例 设函数 $f(z)=(x^2+axy+by^2)+i(cx^2+dxy+y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.
- 解 由于

$$\begin{aligned} u_x &= 2x+ay, & u_y &= ax+2by, \\ v_x &= 2cx+dy, & v_y &= dx+2y, \end{aligned}$$

- 例 设函数 $f(z)=(x^2+axy+by^2)+i(cx^2+dxy+y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.
- 解 由于

$$\begin{aligned} u_x &= 2x+ay, & u_y &= ax+2by,\\ v_x &= 2cx+dy, & v_y &= dx+2y, \end{aligned}$$

- 因此

$$2x+ay=dx+2y, \quad ax+2by=-(2cx+dy),$$

- 例 设函数 $f(z) = (x^2 + axy + by^2) + i(cx^2 + dxy + y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a, b, c, d 以及 $f'(z)$.
- 解 由于

$$
\begin{aligned}
u_x &= 2x + ay, & u_y &= ax + 2by, \\
v_x &= 2cx + dy, & v_y &= dx + 2y,
\end{aligned}
$$

- 因此

$$
2x + ay = dx + 2y, \quad ax + 2by = -(2cx + dy),
$$

$$
a = d = 2, \quad b = c = -1,
$$

- 例 设函数 $f(z)=(x^2+axy+by^2)+i(cx^2+dxy+y^2)$ 在复平面内处处解析. 求实常数 a,b,c,d 以及 $f'(z)$.
- 解 由于

$$\begin{aligned} u_x &= 2x+ay, & u_y &= ax+2by, \\ v_x &= 2cx+dy, & v_y &= dx+2y, \end{aligned}$$

- 因此

$$2x+ay=dx+2y, \quad ax+2by=-(2cx+dy),$$

$$a=d=2, \quad b=c=-1,$$

$$f'(z)=u_x+iv_x=2x+2y+i(-2x+2y)=(2-2i)z. \quad \blacksquare$$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

- 例 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

- 例 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.
- 证明 由于

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

- 例 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.
- 证明 由于

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$

- 因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数,

- 例 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.
- 证明 由于
$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$
- 因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数. ∎

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

- 例 如果 $f'(z)$ 在区域 D 内处处为零, 则 $f(z)$ 在 D 内是一常数.
- 证明 由于

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = 0,$$

- 因此 $u_x = v_x = u_y = v_y = 0$, u, v 均为常数, 从而 $f(z) = u + iv$ 是常数. ■
- 类似地可以证明, 若 $f(z)$ 在 D 内解析, 则下述条件等价:

$f(z)$ 是一常数,	$f'(z) = 0$,
$\lvert f(z)\rvert$ 是一常数,	$\arg f(z)$ 是一常数,
$\operatorname{Re} f(z)$ 是一常数,	$\operatorname{Im} f(z)$ 是一常数,
$v = u^2$,	$u = v^2$.

- 例 如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.

- 例 如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.
- 证明 由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零.

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

- 例 如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.
- 证明 由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零.
- 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

- 例 如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.
- 证明 由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零.
- 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

- 从而 $(u_x,-u_y)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

- 例 如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.
- 证明 由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零.
- 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

- 从而 $(u_x,-u_y)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.
- 同理 $(v_x,-v_y)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量.

- 例 如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.
- 证明 由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零.
- 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

- 从而 $(u_x,-u_y)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.
- 同理 $(v_x,-v_y)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量.
- 由于

$$u_xv_x+u_yv_y=-u_xu_y+u_yu_x=0,$$

例题: 利用 C-R 方程证明解析函数结论

- 例 如果 $f(z)$ 解析且 $f'(z)$ 处处非零, 则曲线族 $u(x,y)=c_1$ 和曲线族 $v(x,y)=c_2$ 互相正交.
- 证明 由于 $f'(z)=u_x-iu_y$, 因此 u_x,u_y 不全为零.
- 对 $u(x,y)=c_1$ 使用隐函数求导法则得

$$u_x\,\mathrm{d}x+u_y\,\mathrm{d}y=0,$$

- 从而 $(u_x,-u_y)$ 是该曲线在 z 处的非零切向量.
- 同理 $(v_x,-v_y)$ 是 $v(x,y)=c_2$ 在 z 处的非零切向量.
- 由于

$$u_xv_x+u_yv_y=-u_xu_y+u_yu_x=0,$$

- 因此二者正交. ■

解析函数的保角性 *

- 当 $f'(z_0) \neq 0$ 时,

- 当 $f'(z_0)\neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的.

- 当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的.
- 这种性质被称为保角性.

- 当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的.
- 这种性质被称为保角性.
- 这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$.

解析函数的保角性 *

- 当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的.
- 这种性质被称为保角性.
- 这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$.
- 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$.

- 当 $f'(z_0) \neq 0$ 时, 经过 z_0 的两条曲线 C_1, C_2 的夹角和它们的像 $f(C_1), f(C_2)$ 在 $f(z_0)$ 处的夹角总是相同的.
- 这种性质被称为保角性.
- 这是因为 $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$.
- 局部来看 f 把 z_0 附近的点以 z_0 为中心放缩 $f'(z_0)$ 倍并逆时针旋转 $\arg f'(z_0)$.
- 上述例子是该结论关于 w 复平面上曲线族 $u = c_1, v = c_2$ 的一个特殊情形.

1. 解析函数的概念
2. 函数解析的充要条件
3. 初等函数

指数函数

- 我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数.

指数函数

- 我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数.
- 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复.

指数函数

- 我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数.
- 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复.
- 现在我们来定义指数函数.

指数函数

- 我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数.
- 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复.
- 现在我们来定义指数函数.
- 指数函数有多种等价的定义方式:

指数函数

- 我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数.
- 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复.
- 现在我们来定义指数函数.
- 指数函数有多种等价的定义方式:
- (1) $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$; (欧拉恒等式)

指数函数

- 我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数.
- 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复.
- 现在我们来定义指数函数.
- 指数函数有多种等价的定义方式:
- (1) $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$; (欧拉恒等式)
- (2) $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z = x \in \mathbb{R}$ 时, $\exp z = e^x$;

指数函数

- 我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数.
- 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复.
- 现在我们来定义指数函数.
- 指数函数有多种等价的定义方式:
- (1) $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$; (欧拉恒等式)
- (2) $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z = x \in \mathbb{R}$ 时, $\exp z = e^x$;
- (3) $\exp z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$;

- 我们将实变函数中的初等函数推广到复变函数.
- 多项式函数和有理函数的解析性质已经介绍过, 这里不再重复.
- 现在我们来定义指数函数.
- 指数函数有多种等价的定义方式:
- (1) $\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$; (欧拉恒等式)
- (2) $\exp z$ 是唯一的一个处处解析的函数, 使得当 $z = x \in \mathbb{R}$ 时, $\exp z = e^x$;
- (3) $\exp z = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$;
- (4) $\exp z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots$

指数函数

- 有些人会从 $e^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

- 有些人会从 $e^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

- 形式地带入得到欧拉恒等式 $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.

指数函数

- 有些人会从 $e^x, \cos x, \sin x$ 的泰勒展开

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots$$

- 形式地带入得到欧拉恒等式 $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.
- 事实上我们可以把它当做复指数函数的定义，而不是欧拉恒等式的证明.

指数函数的定义

- 我们来证明 (1) 和 (3) 是一回事.

指数函数的定义

- 我们来证明 (1) 和 (3) 是一回事.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

指数函数的定义

- 我们来证明 (1) 和 (3) 是一回事.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\qquad(1^\infty\text{ 型不定式})$$

- 我们来证明 (1) 和 (3) 是一回事.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \quad (1^\infty \text{ 型不定式})$$
$$= \exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right] = e^x.$$

指数函数的定义

- 我们来证明 (1) 和 (3) 是一回事.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\qquad(1^\infty\text{ 型不定式})$$
$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right]=e^x.$$

- 不妨设 $n>|z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

指数函数的定义

- 我们来证明 (1) 和 (3) 是一回事.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\qquad (1^\infty \text{ 型不定式})$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right]=e^x.$$

- 不妨设 $n>|z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n\to\infty} n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\arctan\frac{y}{n+x}$$

指数函数的定义

- 我们来证明 (1) 和 (3) 是一回事.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\qquad(1^\infty\text{ 型不定式})$$

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right]=e^x.$$

- 不妨设 $n>|z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n\to\infty}n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\arctan\frac{y}{n+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x}=y.$$

指数函数的定义

- 我们来证明 (1) 和 (3) 是一回事.

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\quad(1^\infty\text{ 型不定式})$$
$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)\right]=e^x.$$

- 不妨设 $n>|z|$, 这样 $1+\dfrac{z}{n}$ 落在右半平面,

$$\lim_{n\to\infty}n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}n\arctan\frac{y}{n+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{ny}{n+x}=y.$$

- 故 $\exp z=e^x(\cos y+i\sin y)$.

- 指数函数

$$\exp z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- 指数函数

$$\exp z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- 我们已经知道 $\exp z$ 是一个处处解析的函数, 且 $(\exp z)' = \exp z$.

- 指数函数
$$\exp z = e^x(\cos y + i \sin y).$$
- 我们已经知道 $\exp z$ 是一个处处解析的函数, 且 $(\exp z)' = \exp z$.
- 不难看出

- 指数函数
$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y).$$
- 我们已经知道 $\exp z$ 是一个处处解析的函数，且 $(\exp z)' = \exp z$.
- 不难看出
    - $\exp z \neq 0$;

- 指数函数
$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y).$$
- 我们已经知道 $\exp z$ 是一个处处解析的函数, 且 $(\exp z)' = \exp z$.
- 不难看出
  - $\exp z \neq 0$;
  - $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$;

- 指数函数
$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y).$$
- 我们已经知道 $\exp z$ 是一个处处解析的函数, 且 $(\exp z)' = \exp z$.
- 不难看出
  - $\exp z \neq 0$;
  - $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$;
  - $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$.

指数函数的性质

- 指数函数
$$\exp z = e^x(\cos y + i\sin y).$$
- 我们已经知道 $\exp z$ 是一个处处解析的函数, 且 $(\exp z)' = \exp z$.
- 不难看出
  - $\exp z \neq 0$;
  - $\exp(z + 2k\pi i) = \exp z$, 即 $\exp z$ 周期为 $2\pi i$;
  - $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$.
- 为了方便, 我们也记 $e^z = \exp z$.

- 指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$,

指数函数的性质

- 指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.

- 指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.
- 例 求函数 $f(z) = \exp \dfrac{z}{5}$ 的周期.

指数函数的性质

- 指数函数将直线族 $\mathrm{Re}\, z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\mathrm{Im}\, z = c$ 映为射线族 $\mathrm{Arg}\, w = c$.
- 例 求函数 $f(z) = \exp \dfrac{z}{5}$ 的周期.
- 解 由于 $\exp z$ 的周期是 $2\pi i$, 因此

- 指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.
- 例 求函数 $f(z) = \exp \dfrac{z}{5}$ 的周期.
- 解 由于 $\exp z$ 的周期是 $2\pi i$, 因此

$$f(z) = \exp \frac{z}{5} = \exp\left(\frac{z}{5} + 2\pi i\right)$$

- 指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.
- 例 求函数 $f(z) = \exp \dfrac{z}{5}$ 的周期.
- 解 由于 $\exp z$ 的周期是 $2\pi i$, 因此

$$f(z) = \exp \frac{z}{5} = \exp \left(\frac{z}{5} + 2\pi i \right) = \exp \frac{z + 10\pi i}{5} = f(z+10\pi i),$$

- 指数函数将直线族 $\operatorname{Re} z = c$ 映为圆周族 $|w| = e^c$, 将直线族 $\operatorname{Im} z = c$ 映为射线族 $\operatorname{Arg} w = c$.
- 例 求函数 $f(z) = \exp \dfrac{z}{5}$ 的周期.
- 解 由于 $\exp z$ 的周期是 $2\pi i$, 因此

$$f(z) = \exp \frac{z}{5} = \exp\left(\frac{z}{5} + 2\pi i\right) = \exp \frac{z + 10\pi i}{5} = f(z+10\pi i),$$

- 所以 $f(z)$ 的周期是 $10\pi i$. ■

对数函数

- 对数函数定义为指数函数的反函数.

对数函数

- 对数函数定义为指数函数的反函数.
- 设 $z \neq 0$, 满足方程 $e^w = z$ 的 $w = f(z)$ 被称为对数函数, 记作 $w = \operatorname{Ln} z$.

- 对数函数定义为指数函数的反函数.
- 设 $z \neq 0$, 满足方程 $e^w = z$ 的 $w = f(z)$ 被称为对数函数, 记作 $w = \operatorname{Ln} z$.
- 为什么我们用大写的 Ln 呢?

对数函数

- 对数函数定义为指数函数的反函数.
- 设 $z \neq 0$, 满足方程 $e^w = z$ 的 $w = f(z)$ 被称为对数函数, 记作 $w = \operatorname{Ln} z$.
- 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数.

- 对数函数定义为指数函数的反函数.
- 设 $z \neq 0$, 满足方程 $e^w = z$ 的 $w = f(z)$ 被称为对数函数, 记作 $w = \operatorname{Ln} z$.
- 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支.

- 对数函数定义为指数函数的反函数.
- 设 $z \neq 0$, 满足方程 $e^w = z$ 的 $w = f(z)$ 被称为对数函数, 记作 $w = \operatorname{Ln} z$.
- 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支.
- 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写.

- 对数函数定义为指数函数的反函数.
- 设 $z \neq 0$, 满足方程 $e^w = z$ 的 $w = f(z)$ 被称为对数函数, 记作 $w = \operatorname{Ln} z$.
- 为什么我们用大写的 Ln 呢? 在复变函数中, 很多函数是多值函数. 为了便于研究, 我们会固定它的一个单值分支.
- 我们将多值的这个开头字母大写, 而对应的单值的则是开头字母小写.
- 例如 $\operatorname{Arg} z$ 和 $\arg z$.

对数函数及其主值

- 设 $e^w = z = re^{i\theta} = \exp(\ln r + i\theta)$, 则

- 设 $e^w = z = re^{i\theta} = \exp(\ln r + i\theta)$, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

对数函数及其主值

- 设 $e^w = z = re^{i\theta} = \exp(\ln r + i\theta)$, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 所以

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

- 设 $e^w = z = re^{i\theta} = \exp(\ln r + i\theta)$, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 所以

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

- 它是一个多值函数.

对数函数及其主值

- 设 $e^w = z = re^{i\theta} = \exp(\ln r + i\theta)$, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 所以

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

- 它是一个多值函数.
- 我们取它的主值为

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

对数函数及其主值

- 设 $e^w = z = re^{i\theta} = \exp(\ln r + i\theta)$, 则
$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
- 所以
$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$
- 它是一个多值函数.
- 我们取它的主值为
$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$
- 那么 $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$.

对数函数及其主值

- 设 $e^w = z = re^{i\theta} = \exp(\ln r + i\theta)$, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 所以

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

- 它是一个多值函数.
- 我们取它的主值为

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

- 那么 $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$.
- 对于每一个 k, $\ln z + 2k\pi i$ 都给出了 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支.

- 设 $e^w = z = re^{i\theta} = \exp(\ln r + i\theta)$, 则

$$w = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 所以

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

- 它是一个多值函数.
- 我们取它的主值为

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

- 那么 $\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i$.
- 对于每一个 k, $\ln z + 2k\pi i$ 都给出了 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值分支.
- 特别地, 当 $z = x > 0$ 是正实数时, $\ln z$ 就是实变的对数函数.

- 例 求 $\mathrm{Ln}\,2, \mathrm{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.

- 例 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.
- 解 $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i$, 主值就是 $\ln 2$.

典型例题: 对数函数的计算

- 例 求 $\mathrm{Ln}\,2, \mathrm{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.
- 解 $\mathrm{Ln}\,2 = \ln 2 + 2k\pi i$, 主值就是 $\ln 2$.

$$\mathrm{Ln}(-1) = \ln 1 + i\,\mathrm{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

典型例题: 对数函数的计算

- 例 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.
- 解 $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i$, 主值就是 $\ln 2$.

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 主值是 πi. ■

典型例题: 对数函数的计算

- 例 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.
- 解 $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i$, 主值就是 $\ln 2$.

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 主值是 πi. ■
- 例 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3} i = 0$.

典型例题: 对数函数的计算

- 例 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.
- 解 $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i$, 主值就是 $\ln 2$.

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 主值是 πi. ■
- 例 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.
- 解 由于 $1 + \sqrt{3}i = 2 \exp \dfrac{\pi i}{3}$,

- 例 求 $\operatorname{Ln} 2, \operatorname{Ln}(-1)$ 以及它们的主值.
- 解 $\operatorname{Ln} 2 = \ln 2 + 2k\pi i$, 主值就是 $\ln 2$.

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i \operatorname{Arg}(-1) = (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 主值是 πi. ■
- 例 解方程 $e^z - 1 - \sqrt{3}i = 0$.
- 解 由于 $1 + \sqrt{3}i = 2\exp\dfrac{\pi i}{3}$, 因此

$$z = \operatorname{Ln}(1+\sqrt{3}i) = \ln 2 + \left(2k + \frac{1}{3}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad ■$$

典型例题：对数函数的计算

- 例 求 $\mathrm{Ln}(-2+3i), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i), \mathrm{Ln}(-3)$.

- 例 求 $\mathrm{Ln}(-2+3i), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i), \mathrm{Ln}(-3)$.
- 解

$$\mathrm{Ln}(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i\,\mathrm{Arg}(-2+3i)$$

典型例题：对数函数的计算

- 例 求 $\mathrm{Ln}(-2+3i), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i), \mathrm{Ln}(-3)$.
- 解

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}(-2+3i) &= \ln|-2+3i| + i\,\mathrm{Arg}(-2+3i) \\ &= \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- 例 求 $\mathrm{Ln}(-2+3i), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i), \mathrm{Ln}(-3)$.
- 解

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(-2+3i) &= \ln|-2+3i| + i\,\mathrm{Arg}(-2+3i)\\ &= \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2}+\pi+2k\pi\right)i, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i) = \ln|3+\sqrt{3}i| + i\,\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}i)$$

典型例题: 对数函数的计算

- 例 求 $\mathrm{Ln}(-2+3i), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i), \mathrm{Ln}(-3)$.
- 解

$$\mathrm{Ln}(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i\,\mathrm{Arg}(-2+3i)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i) = \ln|3+\sqrt{3}i| + i\,\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}i)$$
$$= \ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)i = \ln 2\sqrt{3} + \left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

典型例题: 对数函数的计算

- 例 求 $\mathrm{Ln}(-2+3i), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i), \mathrm{Ln}(-3)$.
- 解

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(-2+3i) &= \ln|-2+3i| + i\,\mathrm{Arg}(-2+3i) \\ &= \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i) = \ln|3+\sqrt{3}i| + i\,\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}i)$$

$$= \ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)i = \ln 2\sqrt{3} + \left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{Ln}(-3) = \ln(-3) + i\,\mathrm{Arg}(-3)$$

典型例题: 对数函数的计算

- 例 求 $\mathrm{Ln}(-2+3i), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i), \mathrm{Ln}(-3)$.
- 解

$$\mathrm{Ln}(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i\,\mathrm{Arg}(-2+3i)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right) i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i) = \ln|3+\sqrt{3}i| + i\,\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}i)$$
$$= \ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) i = \ln 2\sqrt{3} + \left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{Ln}(-3) = \ln(-3) + i\,\mathrm{Arg}(-3) = \ln 3 + (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

典型例题: 对数函数的计算

- **例** 求 $\mathrm{Ln}(-2+3i), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i), \mathrm{Ln}(-3)$.
- **解**

$$\mathrm{Ln}(-2+3i) = \ln|-2+3i| + i\,\mathrm{Arg}(-2+3i)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i) = \ln|3+\sqrt{3}i| + i\,\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}i)$$
$$= \ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right)i = \ln 2\sqrt{3} + \left(2k - \frac{1}{6}\right)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathrm{Ln}(-3) = \ln(-3) + i\,\mathrm{Arg}(-3) = \ln 3 + (2k+1)\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

- **练习** 求 $\ln(-1-\sqrt{3}i)$.

典型例题: 对数函数的计算

- 例 求 $\mathrm{Ln}(-2+3i), \mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i), \mathrm{Ln}(-3)$.
- 解

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(-2+3i) &= \ln|-2+3i| + i\,\mathrm{Arg}(-2+3i)\\ &= \frac{1}{2}\ln 13 + \left(-\arctan\frac{3}{2} + \pi + 2k\pi\right)i, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ln}(3-\sqrt{3}i) &= \ln|3+\sqrt{3}i| + i\,\mathrm{Arg}(3-\sqrt{3}i)\\ &= \ln 2\sqrt{3} + \left(-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)i = \ln 2\sqrt{3} + \left(2k-\frac{1}{6}\right)\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\mathrm{Ln}(-3) = \ln(-3) + i\,\mathrm{Arg}(-3) = \ln 3 + (2k+1)\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

- 练习 求 $\ln(-1-\sqrt{3}i)$. 答案 $\ln 2 - \dfrac{2\pi i}{3}$.

对数函数的性质

- 我们有

$$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2, \quad \mathrm{Ln}\, \frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2.$$

- 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

- 注意 $\operatorname{Ln} z$ 不能换成 $\ln z$,

对数函数的性质

- 我们有

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

- 注意 $\operatorname{Ln} z$ 不能换成 $\ln z$, 原因乘除的主辐角不一定等于主辐角的加减.

对数函数的性质

- 我们有

$$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2, \quad \mathrm{Ln}\, \frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2.$$

- 注意 $\mathrm{Ln}\, z$ 不能换成 $\ln z$, 原因乘除的主辐角不一定等于主辐角的加减.
- 同理, 当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\mathrm{Ln}\, z^n = n\,\mathrm{Ln}\, z$ 也不成立.

- 设 $z_0 < 0$ 是负实数.

对数函数的导数

- 设 $z_0 < 0$ 是负实数.
- 由于

$$\lim_{y\to 0^+} \ln(z_0 + yi) = \ln|z_0| + \pi, \quad \lim_{y\to 0^-} \ln(z_0 + yi) = \ln|z_0| - \pi,$$

对数函数的导数

- 设 $z_0 < 0$ 是负实数.
- 由于

$$\lim_{y\to 0^+} \ln(z_0 + yi) = \ln|z_0| + \pi, \quad \lim_{y\to 0^-} \ln(z_0 + yi) = \ln|z_0| - \pi,$$

- 因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.

- 设 $z_0 < 0$ 是负实数.
- 由于

$$\lim_{y\to 0^+} \ln(z_0 + yi) = \ln|z_0| + \pi, \quad \lim_{y\to 0^-} \ln(z_0 + yi) = \ln|z_0| - \pi,$$

- 因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.
- 而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数,

对数函数的导数

- 设 $z_0 < 0$ 是负实数.
- 由于

$$\lim_{y\to 0^+} \ln(z_0 + yi) = \ln|z_0| + \pi, \quad \lim_{y\to 0^-} \ln(z_0 + yi) = \ln|z_0| - \pi,$$

- 因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.
- 而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数, 从而 $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$, $\ln z$ 解析.

对数函数的导数

- 设 $z_0 < 0$ 是负实数.
- 由于

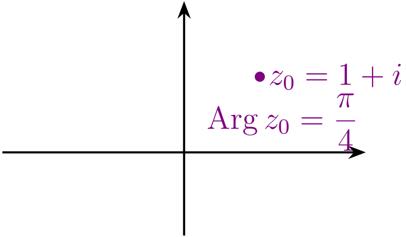
$$\lim_{y\to 0^+} \ln(z_0 + yi) = \ln|z_0| + \pi, \quad \lim_{y\to 0^-} \ln(z_0 + yi) = \ln|z_0| - \pi,$$

- 因此 $\ln z$ 在负实轴和零处不连续.
- 而在其它地方 $-\pi < \arg z < \pi$, $\ln z$ 是 e^z 在区域 $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$ 上的单值反函数, 从而 $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$, $\ln z$ 解析.
- 对于其它分支 $\ln z + 2k\pi i$, 性质也是类似的.

多值函数的单值化与支点 *

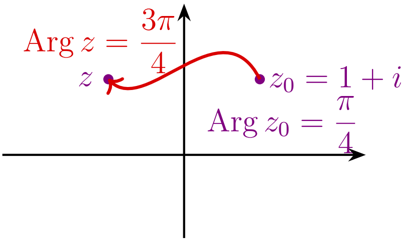
- 我们以辐角函数为例简说明为什么要去掉这样一条线.

- 我们以辐角函数为例简说明为什么要去掉这样一条线.
- 为了确定 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支, 固定 $\operatorname{Arg} z_0$ 的一个值.

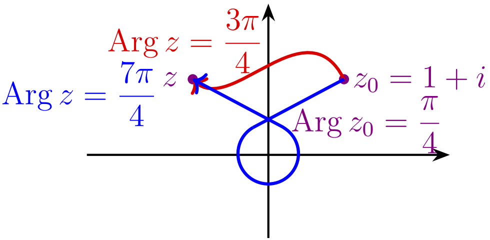


多值函数的单值化与支点 *

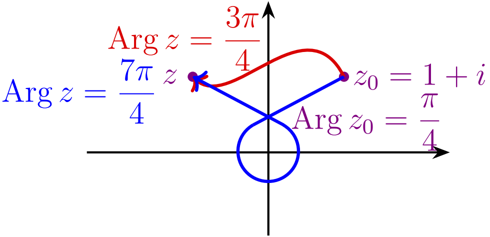
- 我们以辐角函数为例简说明为什么要去掉这样一条线.
- 为了确定 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支, 固定 $\operatorname{Arg} z_0$ 的一个值.
- 然后让 z 从 z_0 出发连续地变化, 并让 $\operatorname{Arg} z$ 也连续地变化.



- 我们以辐角函数为例简说明为什么要去掉这样一条线.
- 为了确定 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支, 固定 $\operatorname{Arg} z_0$ 的一个值.
- 然后让 z 从 z_0 出发连续地变化, 并让 $\operatorname{Arg} z$ 也连续地变化.

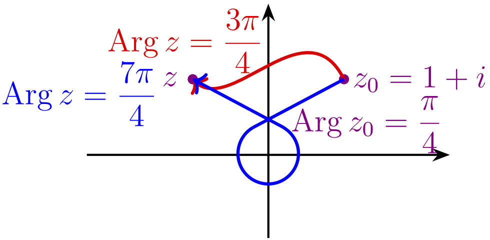


- 我们以辐角函数为例简说明为什么要去掉这样一条线.
- 为了确定 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支, 固定 $\operatorname{Arg} z_0$ 的一个值.
- 然后让 z 从 z_0 出发连续地变化, 并让 $\operatorname{Arg} z$ 也连续地变化.
- 当 z 沿着原点逆时针绕一圈时, $\operatorname{Arg} z$ 会增加 2π.

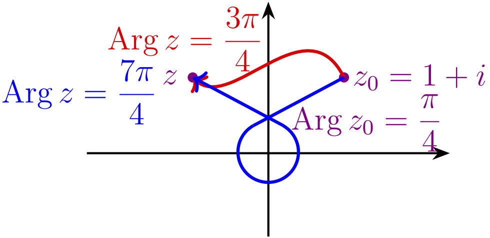


多值函数的单值化与支点 *

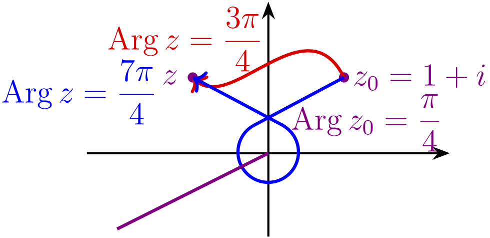
- 我们以辐角函数为例简说明为什么要去掉这样一条线.
- 为了确定 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支, 固定 $\operatorname{Arg} z_0$ 的一个值.
- 然后让 z 从 z_0 出发连续地变化, 并让 $\operatorname{Arg} z$ 也连续地变化.
- 当 z 沿着原点逆时针绕一圈时, $\operatorname{Arg} z$ 会增加 2π.
- 当 z 沿着 ∞ 逆时针绕一圈时, 也就是沿着原点顺时针绕一圈时, $\operatorname{Arg} z$ 会减少 2π.



- 而在其它点附近逆时针绕一圈时, $\operatorname{Arg} z$ 不会改变.

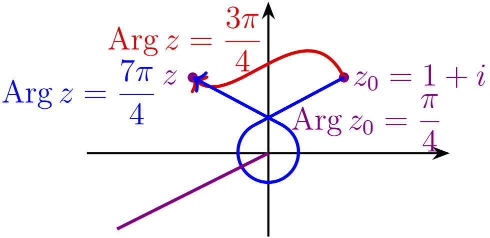


- 而在其它点附近逆时针绕一圈时, $\operatorname{Arg} z$ 不会改变.
- 为了避免 $\operatorname{Arg} z$ 值发生改变, 把 0 和 ∞ 用一条线连起来.



多值函数的单值化与支点 *

- 而在其它点附近逆时针绕一圈时，$\operatorname{Arg} z$ 不会改变.
- 为了避免 $\operatorname{Arg} z$ 值发生改变，把 0 和 ∞ 用一条线连起来.
- 那么在复平面去掉这条线得到的区域上，$\operatorname{Arg} z$ 就可以被连续地单值化了.



- 设 a 是一非零复数, 定义幂函数

$$
\begin{aligned}
w = z^a &= \exp(a \operatorname{Ln} z) \\
&= \exp\Big[a \ln |z| + ia(\arg z + 2k\pi)\Big], \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

- 设 a 是一非零复数, 定义幂函数

$$\begin{aligned} w = z^a &= \exp(a \operatorname{Ln} z) \\ &= \exp\Big[a \ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)\Big], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- 我们总假设 $z \neq 0$.

幂函数

- 设 a 是一非零复数, 定义幂函数

$$w = z^a = \exp(a \,\mathrm{Ln}\, z)$$
$$= \exp\left[a \ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- 我们总假设 $z \neq 0$.
- 根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.

- 设 a 是一非零复数, 定义幂函数

$$
\begin{aligned}
w = z^a &= \exp(a\,\mathrm{Ln}\,z) \\
&= \exp\Big[a\ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)\Big], \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

- 我们总假设 $z \neq 0$.
- 根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.
- 当 a 为整数时, 因为 $\exp(2ak\pi i) = 1$, 所以 $w = z^a$ 是单值的.

幂函数

- 设 a 是一非零复数, 定义幂函数

$$\begin{aligned} w = z^a &= \exp(a\,\mathrm{Ln}\,z) \\ &= \exp\Big[a\ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)\Big], \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- 我们总假设 $z \neq 0$.
- 根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.
- 当 a 为整数时, 因为 $\exp(2ak\pi i) = 1$, 所以 $w = z^a$ 是单值的.
- 此时

$$z^a = |z|^a \exp(ia\arg z)$$

就是我们之前定义的方幂.

- 设 a 是一非零复数, 定义幂函数

$$
\begin{aligned}
w = z^a &= \exp(a\,\mathrm{Ln}\,z) \\
&= \exp\Big[a\ln|z| + ia(\arg z + 2k\pi)\Big], \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

- 我们总假设 $z \neq 0$.
- 根据 a 的不同, 这个函数有着不同的性质.
- 当 a 为整数时, 因为 $\exp(2ak\pi i) = 1$, 所以 $w = z^a$ 是单值的.
- 此时

$$z^a = |z|^a \exp(ia\arg z)$$

就是我们之前定义的方幂.
- 它在 $\mathbb{C} - \{0\}$ 上处处解析.

幂函数的性质: a 为分数时

- 当 $a = p/q$ 为分数, p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时,

幂函数的性质: a 为分数时

- 当 $a = p/q$ 为分数, p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时,

$$z^{p/q} = |z|^{p/q} \exp\left[\frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, q-1$$

幂函数的性质: a 为分数时

- 当 $a = p/q$ 为分数, p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时,

$$z^{p/q} = |z|^{p/q} \exp\left[\frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, q-1$$

- 具有 q 个值.

- 当 $a = p/q$ 为分数, p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时,

$$z^{p/q} = |z|^{p/q} \exp\left[\frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, q-1$$

- 具有 q 个值.
- 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 是处处解析的.

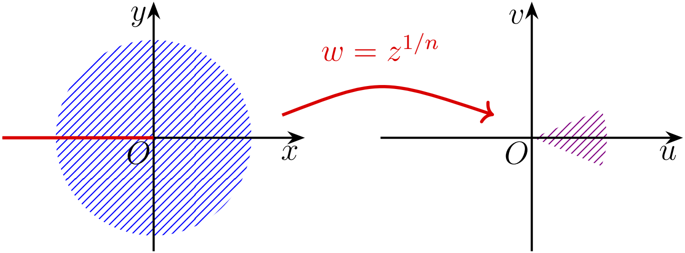
幂函数的性质: a 为分数时

- 当 $a = p/q$ 为分数, p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时,
$$z^{p/q} = |z|^{p/q} \exp\left[\frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, q-1$$
- 具有 q 个值.
- 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 是处处解析的.
- 当 $a = 1/n$ 时, z^a 就是方根 $\sqrt[n]{z}$.

- 当 $a = p/q$ 为分数, p, q 为互质的整数且 $q > 1$ 时,

$$z^{p/q} = |z|^{p/q} \exp\left[\frac{ip(\arg z + 2k\pi)}{q}\right], \quad k = 0, 1, \ldots, q-1$$

- 具有 q 个值.
- 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值 $w = \exp(a \ln z)$ 是处处解析的.
- 当 $a = 1/n$ 时, z^a 就是方根 $\sqrt[n]{z}$.



幂函数的性质: a 为其他情形

- 对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值.

- 对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值.
- 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi ai$ 不可能是 $2\pi i$ 的整数倍.

- 对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值.
- 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi ai$ 不可能是 $2\pi i$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值.

- 对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值.
- 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi ai$ 不可能是 $2\pi i$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值.
- 去掉负实轴和 0 之后,

- 对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值.
- 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi ai$ 不可能是 $2\pi i$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值.
- 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值

$$w = \exp(a \ln z)$$

幂函数的性质: a 为其他情形

- 对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值.
- 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi ai$ 不可能是 $2\pi i$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值.
- 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值

$$w = \exp(a \ln z)$$

- 也是处处解析的.

幂函数的性质: a 为其他情形

- 对于其它的 a, z^a 具有无穷多个值.
- 这是因为此时当 $k \neq 0$ 时, $2k\pi ai$ 不可能是 $2\pi i$ 的整数倍. 从而不同的 k 得到的是不同的值.
- 去掉负实轴和 0 之后, 它的主值

$$w = \exp(a \ln z)$$

- 也是处处解析的.
- 对于幂函数的主值, 或者任意固定一个分支 $\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i$, 我们总有 $(z^a)' = \dfrac{az^a}{z}$.

典型例题: 幂函数的计算

- 例 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i.

典型例题: 幂函数的计算

- 例 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i.
- 解

$$1^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1)$$

- 例 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i.
- 解

$$1^{\sqrt{2}} = \exp(\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1) = \exp(\sqrt{2} \cdot 2k\pi i)$$

典型例题: 幂函数的计算

- 例 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i.
- 解

$$\begin{aligned}1^{\sqrt{2}} &= \exp(\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1) = \exp(\sqrt{2}\cdot 2k\pi i)\\ &= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

- 例 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i.
- 解

$$
\begin{aligned}
1^{\sqrt{2}} &= \exp(\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1) = \exp(\sqrt{2}\cdot 2k\pi i) \\
&= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

$$
i^i = \exp(i\,\mathrm{Ln}\,i)
$$

典型例题: 幂函数的计算

- 例 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i.
- 解

$$\begin{aligned} 1^{\sqrt{2}} &= \exp(\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1) = \exp(\sqrt{2}\cdot 2k\pi i) \\ &= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$i^i = \exp(i\,\mathrm{Ln}\,i) = \exp\left[i\cdot\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]$$

- 例 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i.
- 解

$$
\begin{aligned}
1^{\sqrt{2}} &= \exp(\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1) = \exp(\sqrt{2}\cdot 2k\pi i) \\
&= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i^i &= \exp(i\,\mathrm{Ln}\,i) = \exp\left[i\cdot\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right] \\
&= \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

- 例 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i.
- 解

$$\begin{aligned}1^{\sqrt{2}} &= \exp(\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1) = \exp(\sqrt{2}\cdot 2k\pi i)\\ &= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i^i &= \exp(i\,\mathrm{Ln}\,i) = \exp\left[i\cdot\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]\\ &= \exp\left(-2k\pi - \frac{1}{2}\pi\right), \quad k\in\mathbb{Z}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

- 练习 求 $(-1)^i$.

典型例题: 幂函数的计算

- 例 求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^i.
- 解

$$\begin{aligned}1^{\sqrt{2}} &= \exp(\sqrt{2}\,\mathrm{Ln}\,1) = \exp(\sqrt{2}\cdot 2k\pi i)\\ &= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i^i &= \exp(i\,\mathrm{Ln}\,i) = \exp\left[i\cdot\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]\\ &= \exp\left(-2k\pi-\frac{1}{2}\pi\right), \quad k\in\mathbb{Z}. \quad ■\end{aligned}$$

- 练习 求 $(-1)^i$. 答案 $\exp(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

- 注意 e^a 作为指数函数 $f(z) = e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z) = z^a$ 在 e 处的值是不同的.

- 注意 e^a 作为指数函数 $f(z)=e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z)=z^a$ 在 e 处的值是不同的.
- 因为后者在 $a\notin\mathbb{Z}$ 时总是多值的.

- 注意 e^a 作为指数函数 $f(z)=e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z)=z^a$ 在 e 处的值是不同的.
- 因为后者在 $a\notin\mathbb{Z}$ 时总是多值的.
- 前者实际上是后者的主值.

- 注意 e^a 作为指数函数 $f(z)=e^z$ 在 a 处的值和作为 $g(z)=z^a$ 在 e 处的值是不同的.
- 因为后者在 $a\notin\mathbb{Z}$ 时总是多值的.
- 前者实际上是后者的主值.
- 为避免混淆, 以后我们总默认 e^a 表示指数函数 $\exp a$.

- 我们知道

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

对于任意实数 y 成立, 我们将其推广到复数情形.

三角函数的定义

- 我们知道

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

对于任意实数 y 成立，我们将其推广到复数情形.

- 定义正弦和余弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

三角函数的定义

- 我们知道

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

对于任意实数 y 成立, 我们将其推广到复数情形.

- 定义正弦和余弦函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

- 那么欧拉恒等式 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ 对任意复数 z 均成立.

三角函数的性质

- 不难得到

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

三角函数的性质

- 不难得到

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$
$$\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

三角函数的性质

- 不难得到

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$
$$\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

- 当 $y \to \infty$ 时, $\sin iy = i \operatorname{sh} y$ 和 $\cos iy = \operatorname{ch} y$ 都 $\to \infty$.

三角函数的性质

- 不难得到

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$
$$\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

- 当 $y \to \infty$ 时, $\sin iy = i \operatorname{sh} y$ 和 $\cos iy = \operatorname{ch} y$ 都 $\to \infty$.
- 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界.

- 不难得到

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$
$$\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

- 当 $y \to \infty$ 时, $\sin iy = i \operatorname{sh} y$ 和 $\cos iy = \operatorname{ch} y$ 都 $\to \infty$.
- 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.

- 不难得到

$$\cos(x+iy)=\cos x \operatorname{ch} y - i\sin x \operatorname{sh} y,$$
$$\sin(x+iy)=\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y.$$

- 当 $y\to\infty$ 时, $\sin iy = i\operatorname{sh} y$ 和 $\cos iy = \operatorname{ch} y$ 都 $\to\infty$.
- 因此 $\sin z$ 和 $\cos z$ 并不有界. 这和实变情形完全不同.
- 其它三角函数可以类似定义

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}, z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \cot z=\frac{\cos z}{\sin z}, z\neq k\pi,$$
$$\sec z=\frac{1}{\cos z}, z\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi, \qquad \csc z=\frac{1}{\sin z}, z\neq k\pi.$$

三角函数的性质

- 这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

三角函数的性质

- 这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

- 且在定义域范围内是处处解析的.

三角函数的性质

- 这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

- 且在定义域范围内是处处解析的.
- 三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立,

三角函数的性质

- 这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

- 且在定义域范围内是处处解析的.
- 三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

三角函数的性质

- 这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

- 且在定义域范围内是处处解析的.
- 三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

三角函数的性质

- 这些三角函数的奇偶性, 周期性和导数与实变情形类似,

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

- 且在定义域范围内是处处解析的.
- 三角函数的各种恒等式在复数情形也仍然成立, 例如

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 - z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

双曲函数

- 类似的，我们可以定义双曲函数:

双曲函数

- 类似的，我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

双曲函数

- 类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i\sin iz,$$

- 类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i.$$

双曲函数

- 类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i.$$

- 它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.

双曲函数

- 类似的, 我们可以定义双曲函数:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz,$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = -i \tan iz, \quad z \neq \left(k + \frac{1}{2}\right) \pi i.$$

- 它们的奇偶性和导数与实变情形类似, 在定义域范围内是处处解析的.
- $\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ 的周期是 $2\pi i$, $\operatorname{th} z$ 的周期是 πi.

反三角函数和反双曲函数

- 设 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

反三角函数和反双曲函数

- 设 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0,$$

- 设 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值)}.$$

- 设 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值)}.$$

- 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 设 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值)}.$$

- 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 显然它是多值的.

反三角函数和反双曲函数

- 设 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则
$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值)}.$$
- 因此反余弦函数为
$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$
- 显然它是多值的. 同理, 我们有:

- 设 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值)}.$$

- 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 显然它是多值的. 同理, 我们有:
- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{z^2 - 1})$

反三角函数和反双曲函数

- 设 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值)}.$$

- 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 显然它是多值的. 同理, 我们有:
- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z = -\dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$

反三角函数和反双曲函数

- 设 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值)}.$$

- 因此反余弦函数为

$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

- 显然它是多值的. 同理, 我们有:
- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z = -\dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$

反三角函数和反双曲函数

- 设 $z = \cos w = \dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$, 则
$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0, \quad e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1} \text{ (双值)}.$$
- 因此反余弦函数为
$$w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$
- 显然它是多值的. 同理, 我们有:
- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z = -\dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
- 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$

- 设 $z=\cos w=\dfrac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$, 则

$$e^{2iw}-2ze^{iw}+1=0,\quad e^{iw}=z+\sqrt{z^2-1}$$ (双值).

- 因此反余弦函数为

$$w=\operatorname{Arccos} z=-i\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1}).$$

- 显然它是多值的. 同理, 我们有:
- 反正弦函数 $\operatorname{Arcsin} z=-i\operatorname{Ln}(iz+\sqrt{z^2-1})$
- 反正切函数 $\operatorname{Arctan} z=-\dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+iz}{1-iz}$
- 反双曲余弦函数 $\operatorname{Arch} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$
- 反双曲正弦函数 $\operatorname{Arsh} z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$
- 反双曲正切函数 $\operatorname{Arth} z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{1+z}{1-z}$.

复变函数在实变函数导数的应用 *

- 最后我们来看复数在求导中的应用.

- 最后我们来看复数在求导中的应用.
- 设 $\arctan z = -\frac{i}{2}[\ln(1+iz) - \ln(1-iz)]$, 则它在区域
$$\mathbb{C} - \left\{iy : y \geqslant 1 \text{ 或 } y \leqslant -1\right\}$$
上解析, 且

- 最后我们来看复数在求导中的应用.
- 设 $\arctan z = -\frac{i}{2}[\ln(1+iz) - \ln(1-iz)]$, 则它在区域

$$\mathbb{C} - \left\{ iy : y \geqslant 1 \text{ 或 } y \leqslant -1 \right\}$$

上解析, 且

$$(\arctan z)^{(n)} = -\frac{i}{2}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{(z-i)^n} - \frac{1}{(z+i)^n}\right].$$

- 最后我们来看复数在求导中的应用.
- 设 $\arctan z = -\frac{i}{2}[\ln(1+iz)-\ln(1-iz)]$, 则它在区域

$$\mathbb{C}-\left\{iy : y \geqslant 1 \text{ 或 } y \leqslant -1\right\}$$

上解析, 且

$$(\arctan z)^{(n)} = -\frac{i}{2}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{(z-i)^n}-\frac{1}{(z+i)^n}\right].$$

- 令 $z=x$ 为实数, 则化简后可以得到 $\arctan x$ 的高阶导数:

- 最后我们来看复数在求导中的应用.
- 设 $\arctan z = -\frac{i}{2}[\ln(1+iz) - \ln(1-iz)]$, 则它在区域

$$\mathbb{C} - \left\{iy : y \geqslant 1 \text{ 或 } y \leqslant -1\right\}$$

上解析, 且

$$(\arctan z)^{(n)} = -\frac{i}{2}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{(z-i)^n} - \frac{1}{(z+i)^n}\right].$$

- 令 $z = x$ 为实数, 则化简后可以得到 $\arctan x$ 的高阶导数:

$$(\arctan x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}\sin(n \operatorname{arccot} x)}{(x^2+1)^{n/2}}.$$

- 最后我们来看复数在求导中的应用.
- 设 $\arctan z = -\frac{i}{2}[\ln(1+iz) - \ln(1-iz)]$, 则它在区域

$$\mathbb{C} - \left\{iy : y \geqslant 1 \text{ 或 } y \leqslant -1\right\}$$

上解析, 且

$$(\arctan z)^{(n)} = -\frac{i}{2}(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{(z-i)^n} - \frac{1}{(z+i)^n}\right].$$

- 令 $z = x$ 为实数, 则化简后可以得到 $\arctan x$ 的高阶导数:

$$(\arctan x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}\sin(n\operatorname{arccot} x)}{(x^2+1)^{n/2}}.$$

- 而在高等数学中, arctan 的高阶导数我们很难直接求得.