第一章　复数与复变函数

本章中我们将学习复数、复变函数的基本概念, 以及复数列和复变函数的极限.

复数起源于多项式方程的求根问题. 考虑一元二次方程 $x^2+bx+c=0$, 配方可得

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{b^2-4c}{4}.$$

于是得到求根公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2},\quad \Delta=b^2-4c.$$

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有两个不同的实根;

(2) 当 $\Delta=0$ 时, 有一个二重[1]的实根;

(3) 当 $\Delta<0$ 时, 无实根.

可以看出, 在一元二次方程中, 我们可以舍去包含**负数开平方**的解. 然而在一元三次方程中, 即便只考虑实数根也会不可避免地引入负数开平方.

例 1.1 解方程 $x^3+6x-20=0$.

我们将使用由 Scipione dal Ferro (1465–1526) 最先发现, 最终由 Cardan 公开的解法[2].

解: 设 $x=u+v$, 则

$$u^3+v^3+3uv(u+v)+6(u+v)-20=0.$$

我们希望

$$u^3+v^3=20, uv=-2,$$

则 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2-20X-8=0$. 解得

$$u^3=10\pm\sqrt{108}=(1\pm\sqrt{3})^3.$$

所以 $u=1\pm\sqrt{3}, v=1\mp\sqrt{3}$, $x=u+v=2$.

---

[1] 如果 x_0 是多项式方程 $f(x)=0$ 的根, 则 $x-x_0$ 是 $f(x)$ 的因式, 即存在多项式 $g(x)$ 使得 $f(x)=(x-x_0)g(x)$. 如果 $(x-x_0)^k$ 是 $f(x)$ 的因式, 但 $(x-x_0)^{k+1}$ 不是, 则称 x_0 是 k **重根**.

[2] Ferro 发现了该方法后, 并没有发表他的结果, 因为当时人们常把他们的发现保密, 而向对手们提出挑战.

那么这个方程是不是真的只有 $x=2$ 这一个实数解呢? 由 $f'(x)=3x^2+6>0$ 可知其单调递增, 因此确实只有一个实数解.

例 1.2 解方程 $x^3-7x+6=0$.

解: 同样地我们有 $x=u+v$, 其中

$$u^3+v^3=-6,\quad uv=\frac{7}{3}.$$

于是 u^3,v^3 满足一元二次方程 $X^2+6X+\dfrac{343}{27}=0$. 然而这个方程没有实数解.

我们可以强行解得

$$u^3=-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3},$$

$$u=\sqrt[3]{-3+\frac{10}{9}\sqrt{-3}}=\frac{3+2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9+\sqrt{-3}}{6},\frac{3-5\sqrt{-3}}{6},$$

相应地

$$v=\frac{3-2\sqrt{-3}}{3},\frac{-9-\sqrt{-3}}{6},\frac{3+5\sqrt{-3}}{6},$$

从而 $x=u+v=2,-3,1$.

对于一般的三次方程 $x^3+px+q=0$ 而言, 类似可得: [3]

$$x=u-\frac{p}{3u},\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

通过分析函数图像的极值点可以知道:

(1) 当 $\Delta>0$ 时, 有 1 个实根.

(2) 当 $\Delta\leqslant 0$ 时, 有 3 个实根 (含重根).

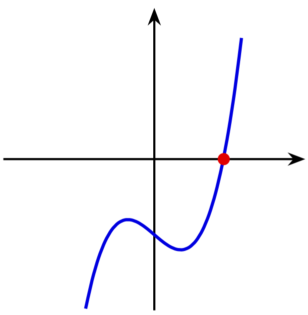


图 1.1: $\Delta>0$

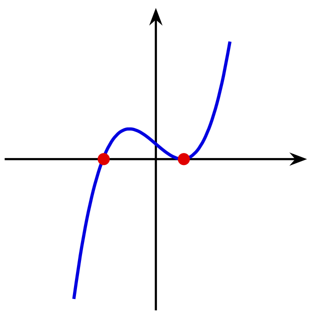


图 1.2: $\Delta=0$

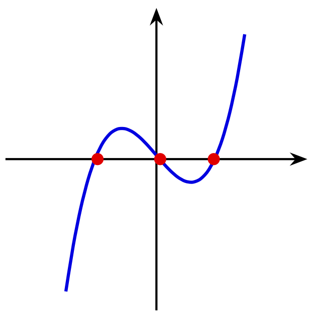


图 1.3: $\Delta<0$

所以我们想要使用一元三次方程求根公式的话, 就**必须接受负数开方**. 那么为什么当 $\Delta<0$ 时, 从求根公式一定能得到 3 个实根呢? 在学习了本章内容之后就可以回答这

[3]一般 n 次多项式的判别式定义为 $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2$, 其中 $x_1,\dots,x_n$ 表示其所有 (复数) 根. 三次多项式的判别式应当是 -108Δ, 这里为了运算方便取作如此形式.

个问题了.

尽管在十六世纪, 人们已经得到了三次方程的求根公式, 然而对其中出现的虚数, 却是难以接受. 莱布尼兹 (Leibniz) 对此有如下评论: *圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示, 这就是那个理想世界的端兆, 那个介于存在与不存在之间的两栖物, 那个我们称之为虚的 -1 的平方根.*

§1.1 复数及其代数运算

§1.1.1 复数的概念

现在我们来正式介绍复数的概念.

由于方程 $x^2=-1$ 在复数范围内有两个不同的根, 为了避免记号 $\sqrt{-1}$ 带来的歧义, 我们引入抽象符号 i 来表示其中一个根.

定义 1.1

*固定一个记号 i, **复数**就是形如 $z=x+yi$ 的元素, 其中 x,y 均是实数, 且不同的 (x,y) 对应不同的复数. 分别称 x,y 为 z 的**实部** $\operatorname{Re} z$ 和**虚部** $\operatorname{Im} z$.*

换言之, 每一个复数可以唯一地表达成 $x+yi$ 这样的形式.[4]

于是复数全体构成一个二维实线性空间, $\{1,i\}$ 是一组基, 而且实数 x 可以自然地看成复数 $x+0i$. 将**全体复数记作** $\mathbb{C}$, 全体实数记作 $\mathbb{R}$, 则 $\mathbb{C}=\mathbb{R}+\mathbb{R}i$, $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$.[5] 由此, $\mathbb{C}$ 和平面上的点可以建立一一对应, 并将建立起这种对应的平面称为**复平面**.

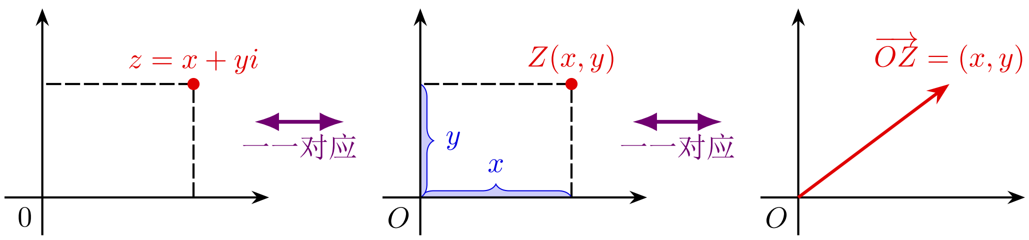


图 1.4: 复数、平面上的点、平面向量一一对应

我们将复平面的 x,y 轴称为**实轴**和**虚轴**. 当 $\operatorname{Im} z=0$ 时, z 是实数, 它落在实轴上. 称不是实数的复数是**虚数**. 当 $\operatorname{Re} z=0$ 且 $z\neq 0$ 时, 称 z 是**纯虚数**.

例 1.3 实数 x 取何值时, $z=(x^2-3x-4)+(x^2-5x-6)i$ 是:

---

[4] 记号 i 被称为**虚数单位**, 它最先是由欧拉引入并使用.

[5] 全体复数、实数、有理数、整数、自然数集合分别记作 $\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$, 整数来自德语 Zahlen, 其余来自它们的英文名称 complex number, real number, rational number, natural number. 这些符号的叫做空心体, 书写时, 可在普通字母格式上添加一条竖线 (对于 $\mathbb{Z}$ 是斜线) 来区分.

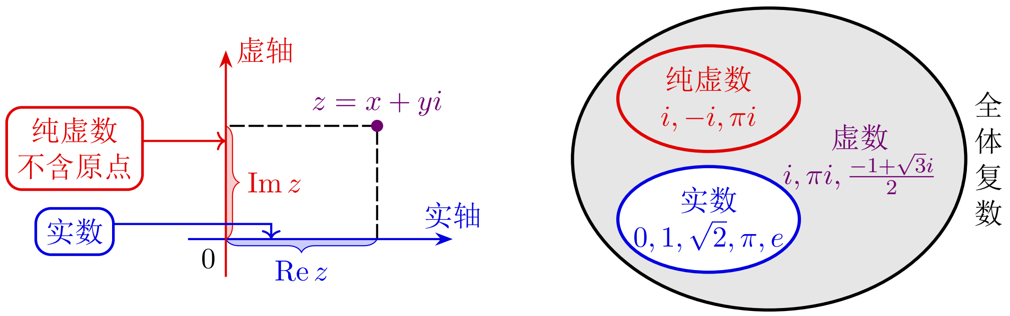


图 **1.5:** 实数、纯虚数、复数和复平面的关系

(1) 实数;

(2) 纯虚数.

解:

(1) $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 = 0$, 即 $x = -1$ 或 6.

(2) $\operatorname{Re} z = x^2 - 3x - 4 = 0$, 即 $x = -1$ 或 4. 但同时要求 $\operatorname{Im} z = x^2 - 5x - 6 \neq 0$, 因此 $x \neq -1$. 故 $x = 4$.

✍ **练习 1.1** 若 $x^2(1+i) + x(5+4i) + 4 + 3i$ 是纯虚数, 则实数 $x =$ <+->.

§1.1.2　复数的代数运算

我们将不言自明地使用 $x, y, x_1, y_1, \ldots$ 等记号表示实数.

四则运算

设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$. 由 $\mathbb{C}$ 是二维实线性空间可得复数的加法和减法:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i.$$

复数的加减法与其对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的加减法是一致的.

规定 $i \cdot i = -1$. 我们希望 $\mathbb{C}$ 上的运算满足乘法分配律, 且实数与复数的乘法和标量乘法 (数乘) 一致. 那么乘法应当定义为

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + y_1 i \cdot x_2 + y_1 i \cdot y_2 i \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i. \end{aligned}$$

可以证明加法和乘法满足交换律、结合律和分配律.

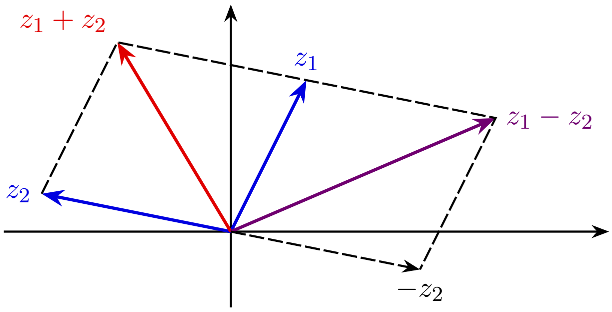


图 1.6: 复数的加法和减法

当 $z\neq 0$ 时, 可以发现 $x+yi$ 与 $(x-yi)/(x^2+y^2)$ 的乘积为 1. 从而除法定义为

$$\frac{z_1}{z_2}=(x_1+y_1i)\cdot\frac{x_2-y_2i}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}i.$$

对于正整数 n, 定义 z 的 **n 次幂**为 n 个 z 相乘. 当 $z\neq 0$ 时, 还可以定义 $z^0:=1, z^{-n}:=\dfrac{1}{z^n}$.

单位根

例 1.4

(1) $i^2=-1, i^3=-i, i^4=1$. 一般地, 对于整数 n,

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

(2) 令 $\omega=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$, 则 $\omega^2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i), \omega^3=1$.

(3) 令 $z=1+i$, 则

$$z^2=2i,\quad z^3=-2+2i,\quad z^4=-4,\quad z^8=16=2^4.$$

将满足 $z^n=1$ 的复数 z 称为 **n 次单位根**. 那么 $1,i,-1,-i$ 是 4 次单位根, $1,\omega,\omega^2$ 是 3 次单位根, $(1+i)/\sqrt{2}$ 是 8 次单位根.

例 1.5 化简 $1+i+i^2+i^3+i^4$.

解: 根据等比数列求和公式,

$$1+i+i^2+i^3+i^4=\frac{i^5-1}{i-1}=\frac{i-1}{i-1}=1.$$

✍ **练习 1.2** 化简 $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2020}$ =<+->.

复数域的性质

复数全体构成一个**域**. 所谓的域, 是指带有如下内容并满足相应性质的集合:

- 包含 $0,1$, 且有四则运算;[6]
- 满足加法结合、交换律, 乘法结合、交换、分配律;
- 对任意 a, $a+0=a\times 1=a$.

有理数全体 $\mathbb{Q}$, 实数全体 $\mathbb{R}$ 也构成域, 它们是 $\mathbb{C}$ 的子域. 与有理数域和实数域有着本质不同的是, 复数域是代数闭域: 对于任何次数 $n\geqslant 1$ 的复系数多项式

$$p(z)=z^n+c_{n-1}z^{n-1}+\cdots+c_1z+c_0,$$

都存在复数 z_0 使得 $p(z_0)=0$. 由此不难知道, 复系数多项式可以因式分解成一次多项式的乘积. 我们会在第五章证明该结论.

在 $\mathbb{Q},\mathbb{R}$ 上可以定义出一个 "好的" 大小关系, 换言之它们是有序域, 即存在一个满足下述性质的 $>$:

- 若 $a\neq b$, 则要么 $a>b$, 要么 $b>a$;
- 若 $a>b$, 则对于任意 c, $a+c>b+c$;
- 若 $a>b, c>0$, 则 $ac>bc$.

而 $\mathbb{C}$ 却不是有序域. 如果 $i>0$, 则

$$-1=i\cdot i>0,\quad -i=-1\cdot i>0.$$

于是 $0>i$, 矛盾! 同理 $i<0$ 也不可能.

§1.1.3 共轭复数

定义 1.2

称 z 在复平面关于实轴的对称点为它的共轭复数 $\overline{z}$. 换言之, $\overline{x+yi}=x-yi$.

从定义出发, 不难验证共轭复数满足如下性质:

(1) z 是 $\overline{z}$ 的共轭复数.

(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{z_1/z_2}=\overline{z_1}/\overline{z_2}$.

(3) $z\overline{z}=(\operatorname{Re}z)^2+(\operatorname{Im}z)^2$.

(4) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re}z$, $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im}z$.

(5) $z=\overline{z}\iff z$ 是实数; $z=-\overline{z}\iff z$ 是纯虚数或 $z=0$.

(4)表明了 x,y 可以用 $z,\overline{z}$ 表出. (2)表明共轭复数和四则运算交换. 这意味着使用共轭复数进行计算和证明，往往比直接使用 x,y 表达的形式更简单.

✍ **练习 1.3** z 关于虚轴的对称点是 $\underline{-\overline{z}}$.

例 1.6 证明 $z_1\cdot\overline{z_2}+\overline{z_1}\cdot z_2=2\operatorname{Re}(z_1\cdot\overline{z_2})$.

[6] 即有运算 $+$ 和 $\times$, 且对任意 a, 存在 b 使得 $a+b=b+a=0$; 对任意 $a\neq 0$, 存在 c 使得 $a\times c=c\times a=1$.

我们可以设 $z_1 = x_1 + y_1 i, z_2 = x_2 + y_2 i$, 然后代入等式两边化简并比较实部和虚部得到. 但利用共轭复数可以更简单地证明它.

证明. 由于 $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot \overline{\overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$, 因此

$$z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}).$$ □

例 1.7 设 $z = x + yi$ 且 $y \neq 0, \pm 1$. 证明: $x^2 + y^2 = 1$ 当且仅当 $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数.

证明. $\dfrac{z}{1+z^2}$ 是实数当且仅当

$$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2},$$

即

$$z(1+\overline{z}^2) = \overline{z}(1+z^2), \quad (z-\overline{z})(z\overline{z}-1) = 0.$$

由 $y \neq 0$ 可知 $z \neq \overline{z}$. 故上述等式等价于 $z\overline{z} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$. □

由于 $z\overline{z}$ 是一个实数, 因此在做复数的除法运算时, 可以利用下式将其转化为乘法:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例 1.8 设 $z = -\dfrac{1}{i} - \dfrac{3i}{1-i}$, 求 $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$ 以及 $z\overline{z}$.

解:

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = i - \frac{3i-3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,$$

因此

$$\operatorname{Re} z = \frac{3}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\frac{1}{2}, \quad z\overline{z} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}.$$

例 1.9 设 $z_1 = 5 - 5i, z_2 = -3 + 4i$, 求 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{5-5i}{-3+4i} = \frac{(5-5i)(-3-4i)}{(-3)^2+4^2} \\ &= \frac{(-15-20)+(-20+15)i}{25} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i,\end{aligned}$$

因此 $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = -\dfrac{7}{5} + \dfrac{1}{5}i$.

§1.2 复数的三角与指数形式

§1.2.1 复数的模和辐角

由平面的极坐标表示, 我们可以得到复数的另一种表示方式. 以 0 为极点, 正实轴为极轴, 逆时针为极角方向可以自然定义出复平面上的极坐标系.

通过极坐标和直角坐标的转化关系可知:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \arctan\frac{y}{x} \text{ 或 } \arctan\frac{y}{x} \pm \pi.$$

定义 1.3

- 称 r 为 z 的**模**, 记为 $|z| = r$.
- 称 θ 为 z 的**辐角**, 记为 $\operatorname{Arg} z = \theta$. **0 的辐角没有意义**.

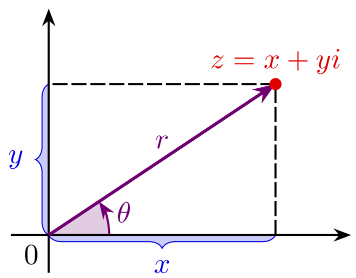


图 1.7: 复数的模和辐角

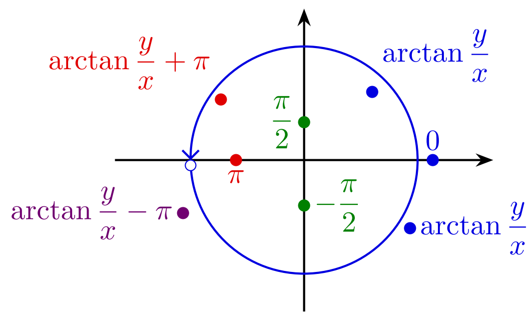


图 1.8: 主辐角与复数位置的关系

任意 $z \neq 0$ 的辐角有无穷多个. 我们固定选择其中位于 $(-\pi, \pi]$ 的那个, 并称之为**主辐角**或**辐角主值**[7], 记作 $\arg z$. 那么 $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$$\arg z = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x > 0; \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0; \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0; \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0; \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

注意 $\arg \overline{z} = -\arg z$ **未必成立**, 仅当 z 不是负实数和 0 时成立.

复数的模满足如下性质:

[7] 选择位于 $[0, 2\pi)$ 的那个作为辐角主值也是一种常见的选择, 但这会导致后续中对数函数主值在正实轴上不解析. 因此我们作此选择.

(1) $z\overline{z} = |z|^2 = |\overline{z}|^2$;
(2) $|\mathrm{Re}\, z|, |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|$;
(3) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;
(4) $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.

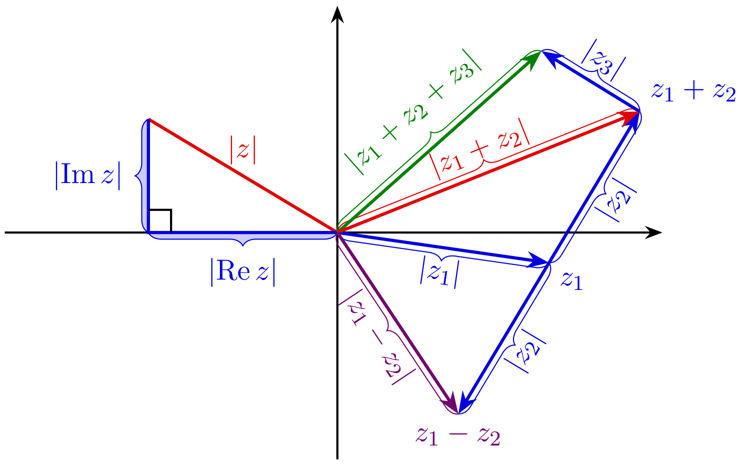


图 1.9: 复数模的不等式关系

✍ **练习 1.4** 什么时候 $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$?

例 1.10 证明

(1) $|z_1 z_2| = |z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$;
(2) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})$.

证明. (1) 因为

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \cdot \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

所以 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 因此 $|z_1 \overline{z_2}| = |z_1| \cdot |\overline{z_2}| = |z_1| \cdot |z_2|$.

(2) 因为

$$\text{左边} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1} z_2,$$
$$\text{右边} = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1 \overline{z_2}},$$

而 $\overline{z_1 \overline{z_2}} = \overline{z_1} z_2$, 所以两侧相等. □

§1.2.2　复数的三角形式和指数形式

由 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 可得

定义 1.4 (复数的三角形式)

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

定义 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) := \cos\theta + i\sin\theta$[8], 则我们得到

定义 1.5 (复数的指数形式)

$$z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta).$$

这两种形式的等价的, 指数形式可以认为是三角形式的一种缩写方式.

求复数的三角和指数形式的**关键在于计算模和辐角**.

例 1.11 将 $z = -\sqrt{12} - 2i$ 化成三角形式和指数形式.

解: $r = |z| = \sqrt{12+4} = 4$. 由于 z 在第三象限, 因此

$$\arg z = \arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

故

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 4e^{-\frac{5\pi i}{6}}.$$

例 1.12 将 $z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}$ 化成三角形式和指数形式.

解: $r = |z| = 1$. 由于 z 在第一象限, 因此

$$\arg z = \arctan\frac{\cos(\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \arctan\cot\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}.$$

故

$$z = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

另解:

$$z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10} + i\sin\frac{3\pi}{10} = e^{\frac{3\pi i}{10}}.$$

求复数的三角或指数形式时, 只需要任取一个辐角就可以了, 不要求必须是主辐角.

✍ **练习 1.5** 将 $z = \sqrt{3} - 3i$ 化成三角形式和指数形式.

两个模相等的复数之和的三角和指数形式形式较为简单:

$$e^{i\theta} + e^{i\varphi} = 2\cos\frac{\theta-\varphi}{2}e^{\frac{\theta+\varphi}{2}i}.$$

注意 $\cos\frac{\theta-\varphi}{2} < 0$ 时, 这离指数形式还差一步变形.

例 1.13 如果 $|z| = 1, \arg z = \theta$, 则 $z + 1 = 2\cos\frac{\theta}{2}e^{\frac{\theta i}{2}}$.

---

[8]此即欧拉恒等式, 我们会在第二章说明为何如此定义.

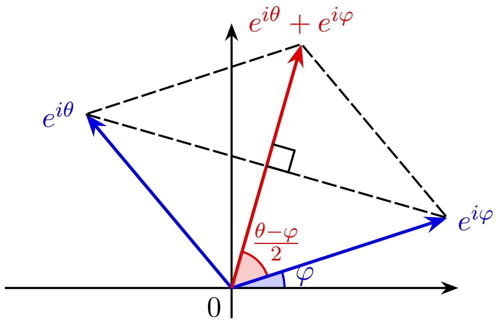


图 1.10: 模相等的复数之和

§1.3　复数的乘除、乘幂和方根

§1.3.1　复数的乘除与三角、指数形式

三角和指数形式在进行复数的乘法、除法和幂次计算中非常方便.

定理 1.1 设

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1},$$

$$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2} \neq 0,$$

则

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)] = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

换言之[9],

$$|z_1 z_2| = |z_1|\cdot|z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, \qquad \operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

注意上述等式中 Arg 不能换成 arg, 也就是说

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

[9] 多值函数相等是指两边所能取到的值构成的集合相等. 例如此处关于辐角的等式的含义是:

$$\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \{\theta_1+\theta_2 \mid \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \{\theta_1-\theta_2 \mid \theta_1 \in \operatorname{Arg} z_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg} z_2\}.$$

不一定成立. 事实上, 当且仅当等式右侧落在区间 $(-\pi,\pi]$ 内时才成立, 否则等式两侧会相差 $\pm 2\pi$. 例如 $z_1=z_2=e^{0.99\pi i}$, $z_1z_2=e^{1.98\pi i}$,

$$\arg z_1+\arg z_2=0.99\pi+0.99\pi=1.98\pi, \qquad \arg(z_1z_2)=-.02\pi.$$

证明. 根据和差的正弦、余弦公式可知

$$\begin{aligned} z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\ &=r_1r_2\big[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)\big]\\ &=r_1r_2\big[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\big]\end{aligned}$$

因此乘法情形得证.

设 $\dfrac{z_1}{z_2}=re^{i\theta}$, 则由乘法情形可知

$$rr_2=r_1, \quad \theta+2k\pi+\operatorname{Arg} z_2=\operatorname{Arg} z_1.$$

因此 $r=\dfrac{r_1}{r_2}$, θ 可取 $\theta_1-\theta_2$. □

复数乘法的几何意义

从该定理可以看出, 乘以复数 $z=re^{i\theta}$ 可以理解为**模放大为 r 倍, 并沿逆时针旋转角度 θ**.

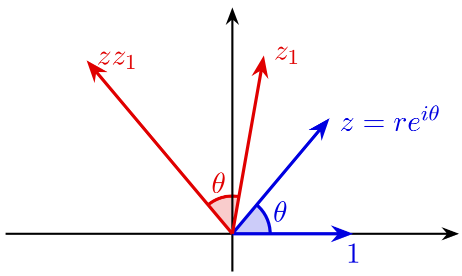
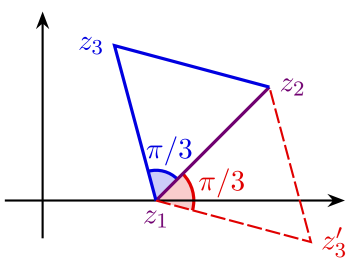


图 1.11: 复数乘法的几何意义

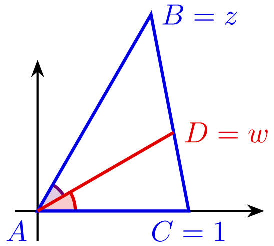
例 1.14 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+i$, 求它的另一个顶点.



解: 由于 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 为 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 顺时针或逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{3}$, 因此

$$\begin{aligned} z_3 - z_1 &= (z_2 - z_1)\exp\left(\pm\frac{\pi i}{3}\right) = (1+i)\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i, \\ z_3 &= \frac{3-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \text{ 或 } \frac{3+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

例 1.15 设 AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, 证明 $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$.



证明. 不妨设 $A = 0, B = z, C = 1, D = w$, 设

$$\lambda = \frac{DC}{BC} = \frac{w-1}{z-1} \in (0,1).$$

那么

$$w = 1 + \lambda(z-1) = \lambda z + (1-\lambda).$$

由于 $\angle BAD = \angle DAC$, 根据复数乘法的几何意义, $\dfrac{z-0}{w-0}$ 是 $\dfrac{w-0}{1-0}$ 的正实数倍, 即

$$\frac{w^2}{z} = \lambda^2 z + 2\lambda(1-\lambda) + \frac{(1-\lambda)^2}{z} \in \mathbb{R},$$

于是

$$\lambda^2 z + \frac{(1-\lambda)^2}{z} = \lambda^2\overline{z} + \frac{(1-\lambda)^2}{\overline{z}}, \qquad \big(\lambda^2|z|^2 - (1-\lambda)^2\big)(z-\overline{z}) = 0.$$

显然 $z \neq \overline{z}$. 又因为 $0 < \lambda < 1$, 故

$$\frac{AB}{AC} = |z| = \frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{BC-DC}{DC} = \frac{DB}{DC}. \qquad \square$$

§1.3.2 复数的乘幂

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \neq 0$. 根据复数三角和指数形式的乘法和除法运算法则, 我们有

定理 1.2

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

特别地, 当 $r=1$ 时, 我们得到**棣莫弗公式**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta.$$

对棣莫弗公式左侧进行二项式展开可以得到

$$\begin{aligned}
\cos(2\theta) &= 2\cos^2\theta - 1,\\
\cos(3\theta) &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,\\
\cos(4\theta) &= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1,\\
\cos(5\theta) &= 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta.
\end{aligned}$$

一般地, 可以证明 $\cos n\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式, 这个多项式

$$g_n(T) = 2^{n-1}T^n - n2^{n-3}T^{n-2} + \cdots$$

叫做**切比雪夫多项式**. 它在计算数学的逼近理论中有着重要作用.

例 1.16 求 $(1+i)^n + (1-i)^n$.

解: 由于

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \quad 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

因此

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4} + \cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

✍ **练习 1.6** 化简 $(\sqrt{3}+i)^{2022} =$ <+-> .

§1.3.3　复数的方根

我们利用复数乘幂公式来计算复数 z 的 **n 次方根** $\sqrt[n]{z}$. 设

$$w^n = z = re^{i\theta} \neq 0, \quad w = \rho e^{i\varphi},$$

则

$$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

比较两边的模可知 $\rho^n = r, \rho = \sqrt[n]{r}$. 为了避免记号冲突, 当 r 是正实数时, $\sqrt[n]{r}$ 默认表示 r 的唯一的 n 次正实根, 称之为**算术根**.

由于 $n\varphi$ 和 θ 的正弦和余弦均相等, 因此存在整数 k 使得

$$n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

故 $w = w_k = \sqrt[n]{r}\exp\Big(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}i\Big)$. 不难看出, $w_k = w_{k+n}$, 而 $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ 两两不同. 因此只需取 $k = 0, 1, \dots, n-1$.

定理 1.3

任意一个非零复数 z 的 n 次方根有 n 个值:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\exp\Big(\frac{\theta+2k\pi}{n}i\Big) = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\Big), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

这些根的模都相等, 且 w_k 和 w_{k+1} 辐角相差 $\dfrac{2\pi}{n}$. 因此它们是以原点为中心, $\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的顶点.

例 1.17 求 $\sqrt[4]{1+i}$.

解: 由于

$$1+i = \sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right),$$

因此

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2}\exp\frac{(\frac{\pi}{4}+2k\pi)i}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

于是该方根全部值为

$$w_0 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{\pi i}{16}}, \quad w_1 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{9\pi i}{16}}, \quad w_2 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{17\pi i}{16}}, \quad w_3 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{25\pi i}{16}}.$$

显然 $w_{k+1} = iw_k$, 所以 w_0, w_1, w_2, w_3 形成了一个正方形.

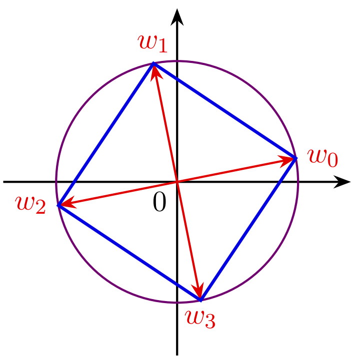


图 1.12: $\sqrt[4]{1+i}$ 的所有值

✍ **练习 1.7** 计算 $\sqrt[6]{-1} =$ <+-> ____________________.

注意当 $|n| \geqslant 2$ 时, $\operatorname{Arg}(z^n) = n\operatorname{Arg} z$ 不成立. 这是因为

$$\operatorname{Arg}(z^n) = n\arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$n\operatorname{Arg} z = n\arg z + 2nk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

不过我们总有

$$\operatorname{Arg}\sqrt[n]{z}=\frac{1}{n}\operatorname{Arg}z=\frac{\arg z+2k\pi}{n},\quad k\in\mathbb{Z},$$

其中左边表示 z 的所有 n 次方根的所有辐角[10].

应用: 实系数三次方程根的情况

现在我们来看三次方程 $x^3+px+q=0$ 的根, $p\neq 0$. 回顾求根公式:

$$x=u+v,\quad u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},\quad uv=-\frac{p}{3},\quad \Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

(1) 如果 $\Delta>0$, 设 $\omega=e^{2\pi i/3}$, 设实数 α 满足

$$\alpha^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta},$$

则

$$u=\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,\qquad x=\alpha-\frac{p}{3\alpha},\ \alpha\omega-\frac{p}{3\alpha}\omega^2,\ \alpha\omega^2-\frac{p}{3\alpha}\omega.$$

容易证明后两个根都是虚数.

(2) 如果 $\Delta\leqslant 0$, 则 $p<0$, $|u|^2=-\frac{p}{3}>0$. 从而 $v=\overline{u}$. 设

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}=u_1,u_2,u_3,$$

则我们得到 3 个实根

$$x=u_1+\overline{u_1},\ u_2+\overline{u_2},\ u_3+\overline{u_3}.$$

不难验证, 若有重根则 $\Delta=0$.

§1.4 曲线和区域

§1.4.1 复数表平面曲线

很多的平面图形能用复数形式的方程来表示, 这种表示方程有些时候会显得更加直观和易于理解.

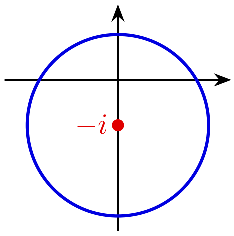
例 1.18

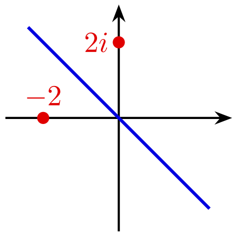
(1) $|z+i|=2$. 该方程表示与 $-i$ 的距离为 2 的点全体, 即圆心为 $-i$ 半径为 2 的圆. 一般的圆方程为 $|z-z_0|=R$, 其中 z_0 是圆心, R 是半径.

(2) $|z-2i|=|z+2|$. 该方程表示与 $2i$ 和 -2 的距离相等的点, 即二者连线的垂直平分线. 两边同时平方化简可得 $x+y=0$.

---

[10] 此即多值函数复合的含义.





(3) $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=4$. 设 $z=x+yi$, 则 $\mathrm{Im}(i+\overline{z})=1-y=4$, 因此 $y=-3$.

(4) $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$.

- 当 $2a>|z_1-z_2|$ 时, 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为长半轴的椭圆;
- 当 $2a=|z_1-z_2|$ 时, 该方程表示连接 z_1,z_2 的线段;
- 当 $2a<|z_1-z_2|$ 时, 该方程表示空集.

(5) $|z-z_1|-|z-z_2|=2a$.

- 当 $2a<|z_1-z_2|$ 时, 该方程表示以 z_1,z_2 为焦点, a 为实半轴的双曲线的一支;
- 当 $2a=|z_1-z_2|$ 时, 该方程表示以 z_2 为起点, 与 z_2,z_1 连线反向的射线;
- 当 $2a>|z_1-z_2|$ 时, 该方程表示空集.

✍ **练习 1.8** $z^2+\overline{z}^2=1$ 和 $z^2-\overline{z}^2=i$ 分别表示什么图形?

§1.4.2 区域和闭区域

为了引入极限的概念, 我们需要考虑点的邻域. 类比于高等数学中的邻域和去心邻域, 我们在复变函数中, 称开圆盘

$$U(z_0,\delta)=\{z:|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个 **δ 邻域**, 称去心开圆盘

$$\mathring{U}(z_0,\delta)=\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$$

为 z_0 的一个**去心 δ 邻域**.

图 1.13: 邻域和去心邻域

设 G 是复平面的一个子集, $z_0\in\mathbb{C}$. 它们的位置关系有三种可能:

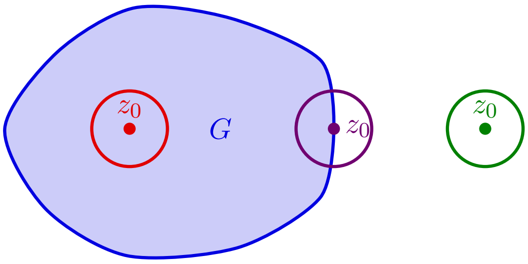


图 1.14: 点与集合的位置关系

(1) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个内点.
(2) 如果存在 z_0 的一个邻域 U 完全不包含在 G 中, 则称 z_0 是 G 的一个外点.
(3) 如果 z_0 的任何一个邻域 U, 都有属于和不属于 G 的点, 则称 z_0 是 G 的一个边界点.

显然内点都属于 G, 外点都不属于 G, 而边界点则都有可能. 这类比于区间的端点和区间的关系.

定义 1.6

(1) 如果 G 的所有点都是内点, 也就是说, G 的边界点都不属于它, 称 G 是一个开集.
(2) 如果 G 的所有边界点都属于 G, 称 G 是一个闭集.

例如

$$|z-z_0|<R, \quad 1<\operatorname{Re} z<3, \quad \frac{\pi}{4}<\arg z<\frac{3\pi}{4}$$

都是开集[11]. G 是一个闭集当且仅当它的补集是开集. 直观上看: 开集往往由 $>,<$ 的不等式给出, 闭集往往由 $\geqslant,\leqslant$ 的不等式给出. 不过注意这并不是绝对的.

如果 D 可以被包含在某个开圆盘 $U(0,R)$ 中, 则称它是有界的. 否则称它是无界的.

定义 1.7

如果开集 D 的任意两个点之间都可以用一条完全包含在 D 中的折线连接起来, 则称 D 是一个区域. 也就是说, 区域是连通的开集.

区域和它的边界一起构成了闭区域, 记作 $\overline{D}$. 它是一个闭集.

观察下方的图案, 阴影部分 (不包含线条部分) 中任意两点可用折线连接, 因此它是一个区域. 这些线条和点构成了它的边界.

数学中边界的概念与日常所说的边界是两码事. 例如区域 $|z|>1$ 的边界是 $|z|=1$, 其闭区域是 $|z|\geqslant 1$.

很多区域可以由复数的实部、虚部、模和辐角的不等式所确定.

[11]最后一个集合不包括原点

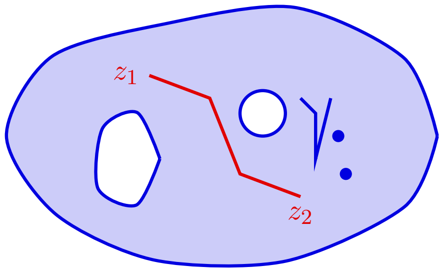
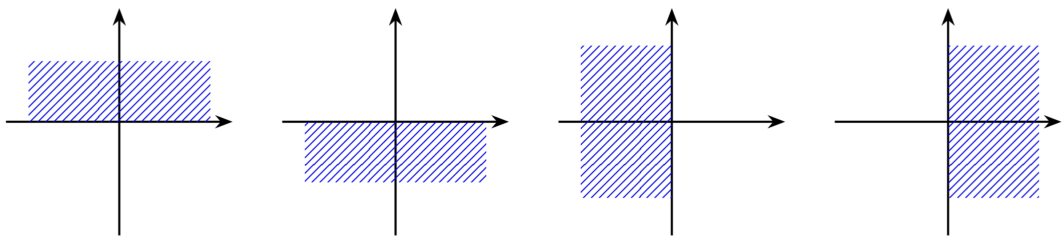
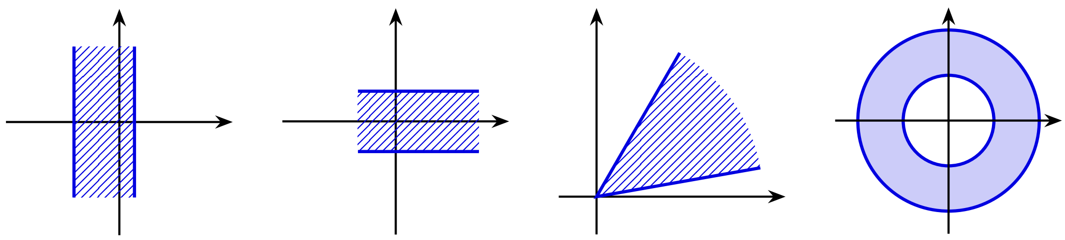


图 1.15: 区域和它的边界

✍ **练习 1.9** 下方区域对应的闭区域是什么?



上半平面 $\operatorname{Im} z > 0$ | 下半平面 $\operatorname{Im} z < 0$ | 左半平面 $\operatorname{Re} z < 0$ | 右半平面 $\operatorname{Re} z > 0$



竖直带状区域 $x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$ | 水平带状区域 $y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$ | 角状区域 $\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$ | 圆环域 $r < |z| < R$

§1.4.3 区域的特性

设 $x(t), y(t), t \in [a, b]$ 是两个连续函数, 则参变量方程

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

定义了一条**连续曲线**. 这也等价于 $C : z = z(t) = x(t) + iy(t), t \in [a, b]$. 如果除了两个端点有可能重叠外, 其它情形不会出现重叠的点, 则称 C 是**简单曲线**. 如果还满足两个端点重叠, 即 $z(a) = z(b)$, 则称 C 是**简单闭曲线**或**闭路**.

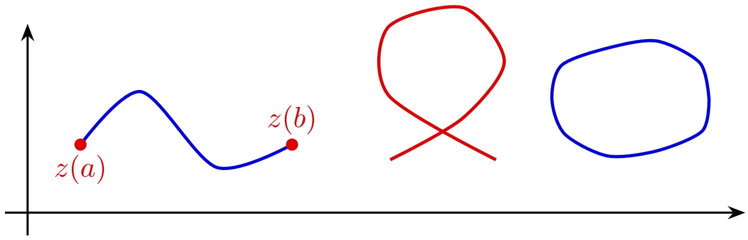


图 1.16: 简单曲线、非简单曲线、闭路

闭路 C 把复平面划分成了两个区域，一个有界一个无界．分别称这两个区域是 C 的内部和外部．C 是它们的公共边界．[12]

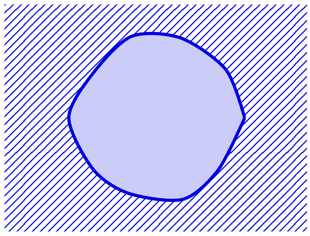


图 1.17: 闭路的内部和外部

在前面所说的几个常见区域的例子中，我们在区域中画一条闭路．除了圆环域之外，闭路的内部仍然包含在这个区域内．

定义 1.8

如果区域 D 中的任一闭路的内部都包含在 D 中，则称 D 是单连通区域．否则称之为多连通区域．

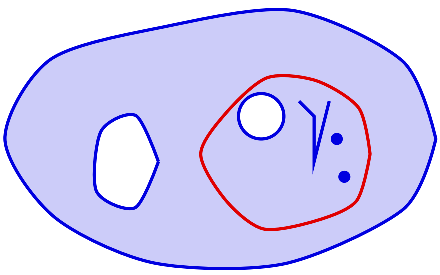


图 1.18: 多连通区域

单连通区域内的任一闭路可以“连续地变形”成一个点.[13] 这也等价于：设 ℓ_0, ℓ_1 是

[12] B. Bolzano 最早明确陈述了这个定理，并指出它是需要证明的．1893 年，C. Jordan 首次给出了证明，其中假设了该定理对于简单多边形成立 (这个情形并不难证明)．不少数学家认为第一个给出完备证明的是美国数学家 O. Veblen(1905).

[13] 不妨设 $\ell: z = x(t) + iy(t), t \in [0,1]$ 是闭路．如果存在连续函数 $X, Y: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 使得对 $0 \leqslant s < 1$

从 A 到 B 的两条连续曲线, 则 ℓ_0 可以连续地变形为 ℓ_1 且保持端点不动.[14]

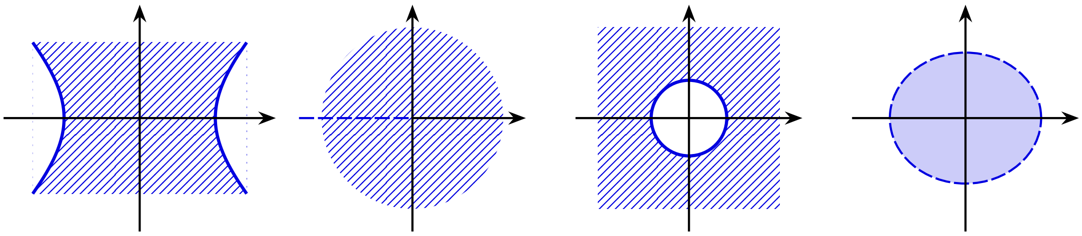
例 1.19

(1) $\mathrm{Re}(z^2) \leqslant 1$. 设 $z = x + yi$, 则 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 \leqslant 1$. 这是无界的单连通闭区域.

(2) $\arg z \neq \pi$. 即角状区域 $-\pi < \arg z < \pi$. 这是无界的单连通区域.

(3) $\left|\dfrac{1}{z}\right| \leqslant 3$. 即 $|z| \geqslant \dfrac{1}{3}$. 这是无界的多连通闭区域.

(4) $|z+1| + |z-1| < 4$. 表示一个椭圆的内部. 这是有界的单连通区域.



✍ **练习 1.10** $|z+1| + |z-1| \geqslant 1$ 表示什么集合?

§1.5 复变函数

§1.5.1 复变函数的定义

所谓的**映射**, 就是两个集合之间的一种对应 $f : A \to B$, 使得对于每一个 $a \in A$, 有一个唯一确定的 $b = f(a)$ 与之对应.

- 当 A 和 B 都是实数集合的子集时, 它就是一个实变函数.
- 当 A 和 B 都是复数集合的子集时, 它就是一个**复变函数**.

例 1.20 $f(z) = \mathrm{Re}\, z, \arg z, |z|, z^n$ ($n \neq 0$ 为整数), $\dfrac{z+1}{z^2+1}$ 都是复变函数.

定义 1.9

- 称 A 为函数 f 的**定义域**.
- 称 $\{w = f(z) \mid z \in A\}$ 为它的**值域**.[15]

$\ell_s : z = X(s,t) + iY(s,t), t \in [0,1]$ 都是闭路, 且 $\ell_0 = \ell, \ell_1 = a + bi$, 则称闭路 ℓ 可以连续地变形为点 $a + bi$.

[14] 不妨设 $\ell_0 : z = x_0(t) + iy_0(t), \ell_1 : z = x_1(t) + iy_1(t), t \in [0,1]$. 如果存在连续函数 $X, Y : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ 使得

$$\ell_0 : z = X(0,t) + iY(0,t), \quad \ell_1 : z = X(1,t) + iY(1,t),$$

则称 ℓ_0 可以连续地变形为 ℓ_1 且保持端点不动.

[15] 值域和**陪域** B 往往不相同. 在高等数学中的函数陪域总可选为 $\mathbb{R}$, 本课程中复变函数陪域总可选为 $\mathbb{C}$. 尽管在某些情形下不同陪域的函数视为不同, 但在高等数学和本课程中, 不考虑陪域是否相同, 只要定义域和对应关系相同, 就视为同一函数.

✍ **练习 1.11** 上述函数的定义域和值域分别是什么?

在复变函数理论中, 常常会遇到**多值的复变函数**, 也就是说一个 $z \in A$ 可能有多个 w 与之对应. 例如 $\operatorname{Arg} z$, $\sqrt[n]{z}$ 等. 为了方便研究, 我们常常需要对每一个 z, 选取固定的一个 $f(z)$ 的值. 这样便得到了这个多值函数的一个**单值分支**.

例 1.21 $\arg z$ 是无穷多值函数 $\operatorname{Arg} z$ 的一个单值分支.

在考虑多值的情况下, 复变函数总有反函数. 如果 f 和 f^{-1} 都是单值的, 则称 f 是**一一对应**.

例 1.22 $f(z) = z^n$ 的反函数就是 $f^{-1}(w) = \sqrt[n]{w}$. 当 $n = \pm 1$ 时, f 是一一对应.

若无特别声明, 本书中**复变函数总是指单值的复变函数**.

§1.5.2 映照

大部分复变函数的图像无法在三维空间中表示出来. 为了直观理解和研究, 我们用两个复平面 (z 复平面和 w 复平面) 之间的**映照**来表示这种对应关系, 其中

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$$

的实部和虚部是两个二元实变函数.

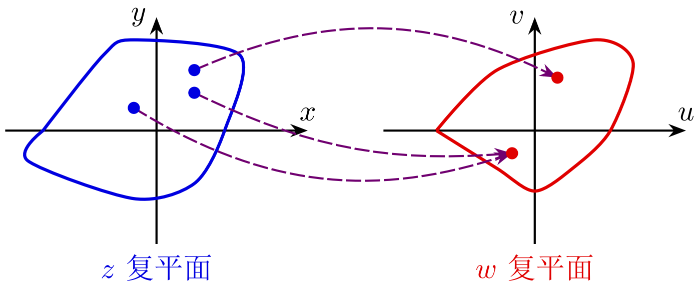
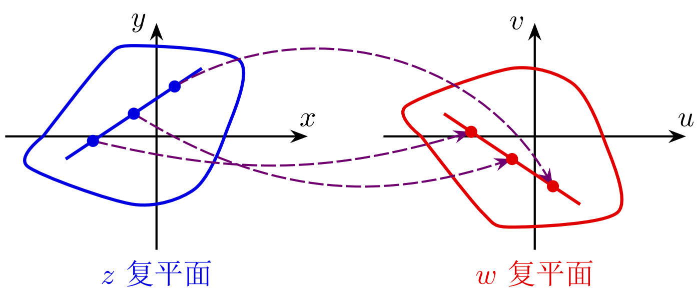
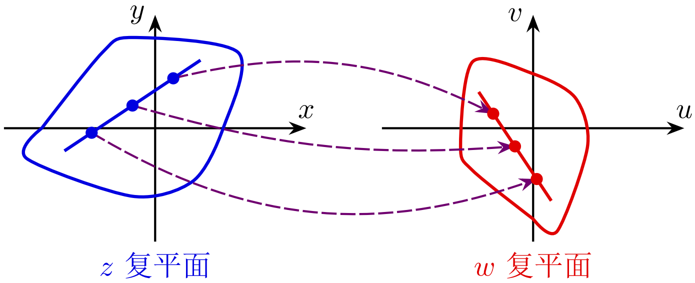


图 1.19: 映照

例 1.23 函数 $w = \bar{z}$. 如果把 z 复平面和 w 复平面重叠放置, 则这个映照对应的是关于 z 轴的翻转变换. 它把任一区域映成和它全等的区域, 且 $u = x, v = -y$.

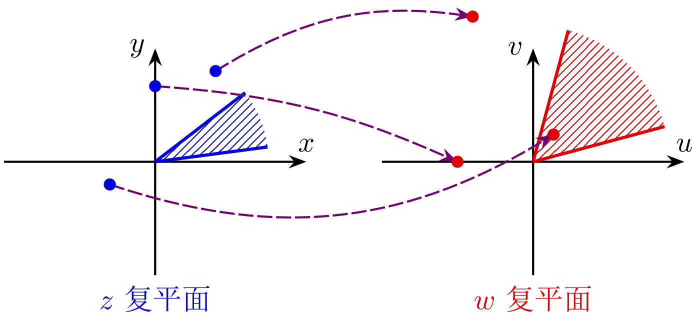


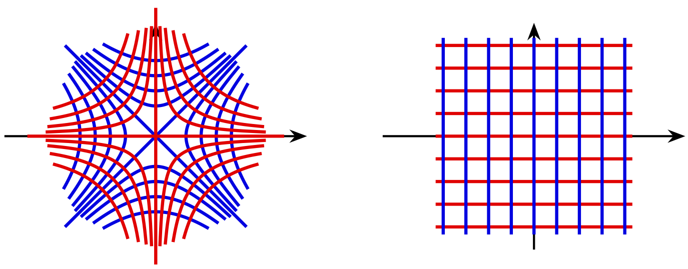
例 1.24 函数 $w = az$. 设 $a = re^{i\theta}$, 则这个映照对应的是一个旋转映照 (逆时针旋转 θ) 和一个相似映照 (放大为 r 倍) 的复合. 它把任一区域映成和它相似的区域.



例 1.25 函数 $w = z^2$. 这个映照把 z 的辐角增大一倍, 因此它会把角形区域变换为角形区域, 并将夹角放大一倍.

由于 $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. 因此它把 z 复平面上两族分别以直线 $y = \pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线 $x^2 - y^2 = c_1, 2xy = c_2$ 分别映射为 w 复平面上的两族平行直线 $u = c_1, v = c_2$.





例 1.26 求下列集合在映照 $w = z^2$ 下的像.

(1) 线段 $0 < |z| < 2, \arg z = \dfrac{\pi}{2}$.

(2) 双曲线 $x^2 - y^2 = 4$.

(3) 扇形区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}, 0 < |z| < 2$.

解:

(1) 设 $z = re^{\frac{\pi i}{2}} = ir$, 则 $w = z^2 = -r^2$. 因此它的像还是一条线段 $0 < |w| < 4, \arg w = -\pi$.

(2) 由于

$$w = u + iv = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

因此 $u = x^2 - y^2 = 4, v = 2xy$. 由于任何复数均存在平方根, 存在 $z = x + yi$ 使得 $f(z) = 4 + iv$, 其中 $x^2 - y^2 = 4$. 因此这条双曲线的像的确就是直线 $\operatorname{Re} w = 4$.[16]

(3) 设 $z = re^{i\theta}$, 则 $w = r^2e^{2i\theta}$. 因此它的像是扇形区域 $0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}, 0 < |w| < 4$.

例 1.27 求圆周 $|z| = 2$ 在映照 $w = \dfrac{z+1}{z-1}$ 下的像.

解: 由于 $z = \dfrac{w+1}{w-1}$, $\left|\dfrac{w+1}{w-1}\right| = 2$, 因此

$$|w+1| = 2|w-1|, \quad w\overline{w} + w + \overline{w} + 1 = 4w\overline{w} - 4w - 4\overline{w} + 4,$$

$$w\overline{w} - \frac{5}{3}w - \frac{5}{3}\overline{w} + 1 = 0, \quad \left|w - \frac{5}{3}\right|^2 = \frac{16}{9},$$

即 $\left|w - \dfrac{5}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$, 是一个圆周.

§1.6 极限和连续性

§1.6.1 无穷远点

类似于实变函数情形, 我们可以定义复变函数的极限.

数列极限

先来看数列极限的定义.

定义 1.10

设 $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一个复数列. 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $|z_n - z| < \varepsilon$, 则称 z 是**数列 $\{z_n\}$ 的极限**, 记作 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$.

如果 $\forall X > 0, \exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $|z_n| > X$, 则记 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. 如果称

$$\mathring{U}(\infty, X) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > X\}$$

[16] 在很多教材或习题册中, 往往会忽略检查所给的集合中的每个元素都有原像.

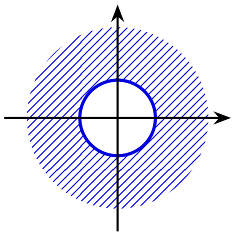


图 1.20: ∞ 的 (去心) 邻域

为 ∞ 的 (去心) X 邻域, 那么上述定义可统一表述为:

定义 1.11

$\lim_{n\to\infty} z_n = z \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 是指: 对 z 的任意 δ 邻域 U, $\exists N$ 使得当 $n \geqslant N$ 时 $z_n \in U$.[17]

复球面和扩充复平面

那么有没有一种看法使得 ∞ 的邻域和普通复数的邻域没有差异呢? 我们将介绍复球面的概念, 它是复数的一种几何表示且自然包含无穷远点 ∞. 这种思想是在黎曼研究多值复变函数时引入的.

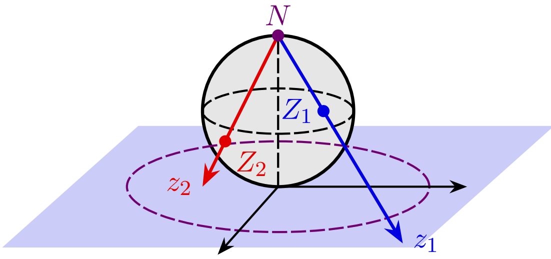


图 1.21: 复球面和复平面

取一个与复平面相切于原点 $z=0$ 的球面. 过 O 做垂直于复平面的直线, 并与球面相交于另一点 N, 称之为北极.

- 对于平面上的任意一点 z, 连接北极 N 和 z 的直线一定与球面相交于除 N 以外的唯一一个点 Z.
- 反之, 球面上除了北极外的任意一点 Z, 直线 NZ 一定与复平面相交于唯一一点.

这样, 球面上除北极外的所有点和全体复数建立了一一对应.

当 $|z|$ 越来越大时, 其对应球面上点也越来越接近 N. 如果我们在复平面上添加一个额外的" 点"——**无穷远点**, 记作 ∞. 那么**扩充复数集合** $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 就正好和球面上

---

[17] 一般地, 一个点的邻域是指包含它的任意一个开集. 可以说明, 把这里的任意 δ 邻域换成任意邻域, 并不会改变定义, 因为包含 z 的开集一定包含一个 z 的 δ 领域.

的点一一对应. 称这样的球面为**复球面**, 称包含无穷远点的复平面为**扩充复平面**或**闭复平面**.

它和实数列极限符号中的 ∞ 有什么联系呢? 选取上述图形的一个截面来看, 实轴可以和圆周去掉一点建立一一对应. 于是实数列极限符号中的 ∞ 在复球面上就是 ∞.

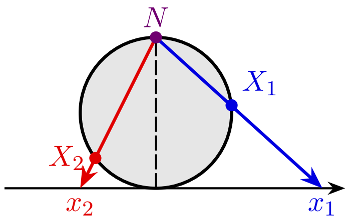


图 1.22: 圆周和实轴

朴素地看, 复球面上任意一点可以定义 δ 邻域为与其距离小于 δ 的所有点. 特别地, ∞ 的邻域通过前面所说的对应关系, 可以对应到扩充复平面上 ∞ 的一个邻域. 所以在复球面上, 我们将普通复数和 ∞ 的邻域可以视为相同的概念.

§1.6.2 数列的极限

下述定理保证了我们可以使用实数列的敛散性判定技巧.

定理 1.4

设 $z_n = x_n + y_n i, z = x + yi$, 则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x, \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

证明. 由三角不等式

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leqslant |z_n - z| \leqslant |x_n - x| + |y_n - y|$$

易证. □

由此可知极限的四则运算法则对于数列也是成立的.

定理 1.5

设 $\lim_{n\to\infty} z_n = z, \lim_{n\to\infty} w_n = w$, 则

(1) $\lim_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w$;

(2) $\lim_{n\to\infty} z_n w_n = zw$;

(3) 当 $w \neq 0$ 时, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{z}{w}$.

例 1.28 设 $z_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) e^{\frac{\pi i}{n}}$. 数列 $\{z_n\}$ 是否收敛?

解: 由于

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} \to 1, \quad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{\pi}{n} \to 0.$$

因此 $\{z_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 1$.

§1.6.3 函数的极限

定义 1.12

设函数 $f(z)$ 在点 z_0 的某个去心邻域内有定义. 如果存在复数 A, 使得对 A 的任意邻域 $U(A,\varepsilon), \exists\delta>0$ 使得

$$z \in \mathring{U}(z_0,\delta) \implies f(z)\in U(A,\varepsilon),$$

则称 A 为 $f(z)$ **当** $z\to z_0$ **时的极限**, 记为 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z)\to A(z\to z_0)$.

此时我们称**极限存在**.

上述定义中的 z_0 和 A 可换成 ∞, 从而得到 $z\to\infty$ 的极限定义, 以及 $\lim f(z)=\infty$ 的含义.

不难看出, 复变函数的极限和二元实函数的极限定义是类似的: 即 $z\to z_0$ 沿任一曲线趋向于 z_0 的极限都是相同的.

定理 1.6

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z_0=x_0+y_0 i, A=u_0+v_0 i$, 则

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A \iff \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

证明. 由三角不等式

$$|u-u_0|,|v-v_0| \leqslant |f(z)-A| \leqslant |u-u_0|+|v-v_0|$$

易证. □

由此可知极限的四则运算法则对于复变函数也是成立的.

定理 1.7

设 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A, \lim\limits_{z\to z_0} g(z)=B$, 则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}(f\pm g)(z) = A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}(fg)(z) = AB$;

(3) 当 $B\neq 0$ 时, $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(z) = \dfrac{A}{B}$.

在学习了复变函数的导数后, 我们也可以使用等价无穷小替换、洛必达法则等工具来计算极限.

例 1.29 证明: 当 $z\to 0$ 时, 函数 $f(z)=\dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$ 的极限不存在.

证明. 令 $z=x+yi$, 则 $f(z)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 因此

$$u(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad v(x,y)=0.$$

当 z 在实轴原点两侧分别趋向于 0 时, $u(x,y)\to\pm1$. 因此 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}u(x,y)$ 不存在, 从而 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 不存在. □

§1.6.4 函数的连续性

定义 1.13

- 如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 **处连续**.
- 如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则称 $f(z)$ 在 D **内连续**.

根据前面的极限判定定理可知:

定理 1.8

函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 处连续当且仅当 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

例 1.30 设 $f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$. $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 除原点外处处连续, $v(x,y)=x^2-y^2$ 处处连续. 因此 $f(z)$ 在 $z\neq0$ 处连续.

定理 1.9

- 在 z_0 处连续的两个函数 $f(z),g(z)$ 之和、差、积、商 $(g(z_0)\neq0)$ 在 z_0 处仍然连续.
- 如果函数 $g(z)$ 在 z_0 处连续, 函数 $f(w)$ 在 $g(z_0)$ 处连续, 则 $f\big(g(z)\big)$ 在 z_0 处连续.

显然 $f(z)=z$ 是处处连续的, 故多项式函数

$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n$$

也处处连续, 有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在 $Q(z)$ 的零点以外处处连续.

例 1.31 证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 则 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 也连续.

证明. 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y), z_0=x_0+iy_0$. 那么 $u(x,y),v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. 从而 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0) 连续. 所以 $\overline{f(z)}=u(x,y)-iv(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续. □

另证. 函数 $g(z)=\bar{z}=x-iy$ 处处连续, 从而 $g\big(f(z)\big)=\overline{f(z)}$ 在 z_0 处连续. □

可以看出, 在极限和连续性上, 复变函数和两个二元实函数没有什么差别. 那么复变函数和多变量微积分的差异究竟是什么导致的呢? 归根到底就在于 $\mathbb{C}$ 是一个域, 上面可以做除法. 这就导致了复变函数有**导数**, 而不是像多变量实函数只有偏导数. 这种特性使得可导的复变函数具有整洁优美的性质, 我们将逐步揭开它的神秘面纱.

作业

一、判断题.

1. z 是实数当且仅当 $z=\overline{z}$. ( )
2. z 是纯虚数当且仅当 $z=-\overline{z}$. ( )
3. z 是实数当且仅当 $\arg z=0,\pi$. ( )
4. z 是纯虚数当且仅当 $\arg z=\pm\dfrac{\pi}{2}$. ( )
5. 若 $f(z)$ 在 z_0 处连续, $g(z)$ 在 z_0 处不连续, 则 $(f+g)(z)$ 在 z_0 一定不连续. ( )

二、选择题.

1. (1) $|z|=\operatorname{Re} z+1$ 是( ).

   (2) $|z+i|=|z-i|$ 是( ).

   (3) $\big||z+i|-|z-i|\big|=1$ 是( ).

   (4) $|z|+|z-2i|=2$ 是( ).

   (5) $\operatorname{Re}(i\overline{z})=3$ 是( ).

   (6) $z\overline{z}-(2+i)z-(2-i)\overline{z}=4$ 是( ).

   (7) $z=1+it,-1\leqslant t\leqslant 1$ 是( ).

   (8) $z=i+2e^{i\theta},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$ 是( ).

   (A) 直线　(B) 圆周　(C) 不是圆的椭圆　(D) 双曲线

   (E) 双曲线的一支　(F) 抛物线　(G) 一个点　(H) 一条线段

2. (1) $z\overline{z}-(2+i)z-(2-i)\overline{z}\leqslant 4$ 是( ).

   (2) $-1<\arg z<\pi-1$ 的( ).

   (3) $1<|z|<2$ 是( ).

   (4) $0<\operatorname{Re} z<1$ 是( ).

   (5) $\operatorname{Im} z\leqslant 0,\operatorname{Re} z\geqslant 0$ 是( ).

   (6) $|z-1|<|z+3|$ 是( ).

   (7) $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|<2$ 是( ).

   (8) $\arg z<\dfrac{3\pi}{4}$ 是( ).

(A) 有界单连通区域　　(B) 有界多连通区域

(C) 无界单连通区域　　(D) 无界多连通区域

(E) 有界单连通闭区域　　(F) 有界多连通闭区域

(G) 无界单连通闭区域　　(H) 无界多连通闭区域

三、填空题.

1. 如果 x, y 是实数且 $\dfrac{x+1+i(y-3)}{5+3i} = 1+i$, 那么 $x+y =$<+->.
2. 设 $z = -i$, 则 $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 =$<+->.
3. 化简 $(-1+i)^{10} - (-1-i)^{10}$=<+->.
4. 化简 $i^{2022} - (-i)^{2022} =$<+->.
5. 化简 $\dfrac{(1+i)^{101}}{(1-i)^{99}} =$<+->.
6. $\left(\dfrac{(1+i)^2}{2}\right)^{2021}$ 的模是<+->.
7. 2^{-i} 的辐角主值是<+->.
8. $-1-i$ 的辐角主值是<+->.
9. $2023 - i$ 绕 0 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 后得到的复数是<+->.
10. 区域 $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}$ 在映射 $w = z^3$ 下的像是<+->.
11. 已知映射 $w = z^3$, 则 $z = \sqrt{3} + i$ 在 w 复平面上的像是<+->.
12. 极限 $\lim\limits_{z \to 1+i} (1 + z^2 + 2z^4) =$<+->.

四、计算题.

1. $z_1 = -z, z_2 = \overline{z}, z_3 = -\overline{z}$ 在复平面上对应的点分别与 z 在复平面上对应的点是什么关系?
2. 已知点 z_1, z_2, z_3 不共线. 点 $\dfrac{1}{2}(z_1 + z_2)$ 和 $\dfrac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ 表示什么点?
3. 求下列复数 z 的实部与虚部, 共轭复数, 模和主辐角:

   (1) $\dfrac{5+i}{2+3i}$;　(2) $\dfrac{3i}{1-i} - \dfrac{1}{i}$;　(3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$;　(4) $i^8 - 4i^{21} + i$.

4. 求下列复数 z 的三角和指数形式:

   (1) i;　(2) $1 + i\sqrt{3}$;　(3) $3 - \sqrt{3}i$;　(4) $\dfrac{2i}{1-i}$;

   (5) $\overline{\left(\dfrac{4+3i}{1+2i}\right)}$;　(6) $\dfrac{3+i}{i} - \dfrac{10i}{3-i}$;　(7) $\dfrac{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5}{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^3}$.

5. 计算

   (1) $(\sqrt{3} - i)^5$;　(2) $(1+i)^6$;　(3) $\sqrt[3]{-8}$;

   (4) $\sqrt[4]{-2+2i}$;　(5) $\sqrt[4]{-2}$;　(6) $(1-i)^{1/3}$.

6. 用复参数方程表示连接 $-1+i$ 与 $1-4i$ 的直线段.
7. 用复参数方程表示以 z_0 为圆心, R 为半径的圆周.
8. 讨论极限 $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{z}{\overline{z}}-\dfrac{\overline{z}}{z}\right)$ 是否存在. 若存在请求出具体的值, 若不存在请证明.
9. 下列数列 $\{z_n\}$ 是否收敛? 如果收敛, 求出它们的极限:

(1) $z_n=\dfrac{1+ni}{1-ni}$;　(2) $z_n=\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^n$;　(3) $z_n=(-1)^n+\dfrac{i}{n+1}$;

(4) $z_n=\dfrac{(3+2i)^n}{(3+4i)^n}$;　(5) $z_n=\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)e^{-\frac{n\pi i}{2}}$.

五、证明题.

1. 证明: 当 $|z|=1>|w|$ 时, $\left|\dfrac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|=1$.
2. 证明: 如果复数 $a+ib$ 是实系数方程
$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0$$
的根, 则 $a-ib$ 也是它的根.
3. 设 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$. 证明: $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$ 并说明这些等式的几何意义.
4. 设 $z=e^{it}$, 证明:

(1) $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos nt$;　(2) $z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin nt$.

扩展阅读

一、我们知道, 对于任意两个集合 A, B, 我们可以定义 $A \to B$ 的映射. 在数学中, 很多对象是带有“结构”的集合, 例如实线性空间 V 是一个拥有如下结构:

$$\text{零元 } 0 \in V; \qquad \text{加法 } v_1 + v_2 \in V; \qquad \text{数乘 } \lambda v,$$

且满足一些特定性质的集合. 如果 A, B 具有同一种结构, 映射 $f : A \to B$ “保持” 了这些结构, 则我们称 f 是**同态**. 例如实线性空间之间的同态就是指一个映射 $f : V \to W$, 使得

$$f(0) = 0; \qquad f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2); \qquad f(\lambda v) = \lambda f(v).$$

再比如域是带有如下结构:

$$\text{零元 } 0; \qquad \text{幺元 } 1; \qquad \text{加法}; \qquad \text{减法}; \qquad \text{乘法}; \qquad \text{除法},$$

且满足特定性质的集合 (交换律分配律之类的). 所以域之间的同态就是指一个 $f : F \to K$, 使得

- $f(0) = 0, \quad f(1) = 1;$
- $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(x - y) = f(x) - f(y);$
- $f(xy) = f(x)f(y), \quad f(x/y) = f(x)/f(y).$

如果一个同态是双射 (一一对应), 则称之为**同构**.

1. 设 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ 是有理数域之间的同构, 证明 f 只能是恒等映射.
2. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是实数域之间的连续的同构, 证明 f 只能是恒等映射.
3. 设 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是复数域之间的连续的同构, 证明 f 只能是恒等映射或复共轭.
4. 如果 $F = \mathbb{R} + \mathbb{R}t$ 是一个真包含 $\mathbb{R}$ 的域, 证明 F 同构于 $\mathbb{C}$.
5. 设
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \{xE + yJ : x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$$
其中 $E = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$. 证明 F 是一个域且同构于 $\mathbb{C}$.
6. 从 (5) 中可以看出, 复数 $z_0 = x_0 + y_0 i = re^{i\theta}$ 对应的矩阵 $x_0\boldsymbol{E} + y_0\boldsymbol{J}$ 所对应的线性变换, 将平面向量旋转 θ 并将模长放缩至 r 倍.

二、满足 $z^n = 1$ 的复数 z 被称为 **n 次单位根**. 不难看出 $z = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, k = 0, 1, \ldots, n-1$. 单位根在代数, 几何和组合中有着丰富的应用. 我们来看一个例子. 设集合 $A = \{1, 2, \ldots, 2026\}$.

1. 集合 A 有多少个子集? 试着将 A 的每一个子集与

$$N(x)=\prod_{a=1}^{2026}(1+x^a)$$

的展开式中的每一项建立一个一一对应.

2. 设 $S\subseteq A$. 定义

$$f(S)=\prod_{a\in S}x^a=x^{\sum_{a\in S}a}.$$

证明所有的 S 对应的 $f(S)$ 之和就是 $N(x)$.

3. 证明 $N(x)$ 的展开式合并同类项后 x^k 的系数就是 A 的那些满足元素之和是 k 的子集的个数.

4. 现在我们想知道 A 有多少个子集满足元素之和是 5 的倍数. 令 x 是 5 次单位根, 则 $N(x)$ 可以表为

$$N(x)=N_0+N_1x+N_2x^2+N_3x^3+N_4x^4,$$

那么 N_0 就是元素之和是 5 的倍数的集合个数.

5. 当 $x=1$ 时, 显然 $N(1)=2^{2026}$. 当 $x\neq 1$ 是 5 次单位根时, $1,x,x^2,x^3,x^4$ 是方程 $X^5-1=0$ 的所有根, 所以 $2,1+x,1+x^2,1+x^3,1+x^4$ 是方程 $(X-1)^5-1=0$ 的所有根. 由韦达定理可知

$$(1+x^0)(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)=2.$$

由此证明

$$N(x)=2^{405}(1+x).$$

6. 计算 $N(1)+N(e^{2\pi i/5})+N(e^{4\pi i/5})+N(e^{6\pi i/5})+N(e^{8\pi i/5})$. 由此得到 $N_0=\dfrac{2^{2026}-2^{406}}{5}$.

7. 想一想, N_1,N_2,N_3,N_4 分别是多少?

更多细节可见: https://www.bilibili.com/video/BV1R34y1W7Xn/

练习答案

?? -4.

?? 1.

?? $-\overline{z}$.

?? $z_1, \dots, z_n$ 中的非零元辐角相等.

?? $z = 2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{-\pi}{3} + i\sin\dfrac{-\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{3}}$, 写成 $\dfrac{5\pi}{3}$ 也可以.

?? -2^{2022}.

?? $\pm\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}, \pm i, \pm\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$.

?? 双曲线 $x^2 - y^2 = \dfrac{1}{2}$ 和双曲线 $xy = \dfrac{1}{4}$.

??

(1) 上半平面对应的闭区域为 $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

(2) 下半平面对应的闭区域为 $\operatorname{Im} z \leqslant 0$.

(3) 左半平面对应的闭区域为 $\operatorname{Re} z \leqslant 0$.

(4) 右半平面对应的闭区域为 $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

(5) 竖直带状区域对应的闭区域为 $x_1 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant x_2$.

(6) 水平带状区域对应的闭区域为 $y_1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant y_2$.

(7) 角状区域对应的闭区域为 $\alpha_1 \leqslant \arg z \leqslant \alpha_2$ 以及原点. 如果 $\alpha_1 = -\pi, \alpha_2 = \pi$, 则为 $\mathbb{C}$.

(8) 圆环域对应的闭区域为 $r \leqslant |z| \leqslant R$.

?? 整个复平面.

??

(1) $\operatorname{Re} z$ 的定义域为 $\mathbb{C}$, 值域为 $\mathbb{R}$.

(2) $\arg z$ 的定义域为 $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$, 值域为 $(-\pi, \pi]$.

(3) $|z|$ 的定义域为 $\mathbb{C}$, 值域为 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.

(4) 当 $n > 0$ 时, z^n 的定义域为 $\mathbb{C}$, 值域为 $\mathbb{C}$. 当 $n < 0$ 时, z^n 的定义域为 $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$, 值域为 $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$.

(5) $\dfrac{z+1}{z^2+1}$ 的定义域为 $\{z \in \mathbb{C} \mid z \neq \pm i\}$, 值域为 $\mathbb{C}$.