



合肥工业大学

HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

复变函数与积分变换

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: <https://zhangshenxing.gitee.io>

第四章 级数

- ① 复数项级数
- ② 幂级数
- ③ 泰勒级数
- ④ 洛朗级数

1, 3, 4, 6, 8, 11, 12, 15, 16, 19

第一节 复数项级数

复数域上的级数与实数域上的级数并无本质差别.

定义

- 设 $\{z_n\}_{n \geq 1}$ 是一个复数列. 表达式 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 称为复数项**无穷级数**.
- 称

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$$

为该级数的**部分和**.

- 如果部分和数列 $\{s_n\}_{n \geq 1}$ 极限存在, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **收敛**, 并记 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ 为它的**和**. 否则称之**发散**.

复数项级数敛散性的判定

定理

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = a + bi \text{ 当且仅当 } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = a, \sum_{n=1}^{\infty} y_n = b.$$

证明

设 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的部分和为 $\sigma_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, 设 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 的部分和为 $\tau_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 的部分和为

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \sigma_n + i\tau_n.$$

由复数项级数的敛散性判定条件可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a + bi \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = b.$$

由此命题得证. □

复数项级数敛散性的判定

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛, 则它的实部级数和虚部级数都收敛, 从而

$x_n, y_n \rightarrow 0, z_n = x_n + iy_n \rightarrow 0$. 因此 $z_n \rightarrow 0$ 是 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件.

定理

如果实数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots$$

收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛, 且 $\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.

复数项级数敛散性的判定

证明

因为 $|x_n|, |y_n| \leq |z_n|$, 由比较判别法可知实数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$,

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛, 从而收敛. 故 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 也收敛.

由三角不等式可知

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

两边同时取极限即得级数的不等式关系

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n z_k \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |z_k| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|,$$

其中第二个等式是因为绝对值函数 $|z|$ 连续. □

定义

- 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**.
- 称收敛但不绝对收敛的级数**条件收敛**.

定理

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛当且仅当它的实部和虚部级数都绝对收敛.

证明

必要性由前一定理的证明已经知道, 充分性由 $|z_n| \leq |x_n| + |y_n|$ 可得. □

绝对收敛和条件收敛

	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 条件收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛
$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散
$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 条件收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛
$\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 绝对收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 发散	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 条件收敛	$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 绝对收敛

绝对收敛的复级数各项可以任意重排次序而不改变其绝对收敛性, 且不改变其和.

一般的级数重排有限项不改变其敛散性与和, 但如果重排无限项则可能会改变其敛散性与和.

思考

什么时候 $\left| \sum_{n=1}^{\infty} z_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$?

答案

当且仅当非零的 z_n 的辐角全都相同时成立.

例题: 判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解

由于实部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{2}{8} + \cdots$$

发散, 所以该级数发散.

事实上, 它的虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

是条件收敛的.

例题: 判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{i}{2^n} \right]$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解

因为实部级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛, 虚部级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 绝对收敛,
所以该级数条件收敛.

例

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

例题: 复数项级数敛散性

解

因为它的实部和虚部级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

均条件收敛, 所以原级数条件收敛.

例题: 复数项级数敛散性 *

可以证明

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \arctan x|_{x=1} = \frac{\pi}{4},$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln(1+x)|_{x=1} = \ln 2.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi i}{4}.$$

事实上, 左侧是复变函数 $-\ln(1+z)$ 在 $z = -i$ 处的泰勒级数.

例题: 判断级数的敛散性

例

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}$ 发散、条件收敛、还是绝对收敛?

解

因为 $\left| \frac{(8i)^n}{n!} \right| = \frac{8^n}{n!}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!} = e^8$ 收敛, 所以该级数绝对收敛.

实际上, 它的实部和虚部级数分别为

$$1 - \frac{8^2}{2!} + \frac{8^4}{4!} - \frac{8^6}{6!} + \cdots = \cos 8, \quad 8 - \frac{8^3}{3!} + \frac{8^5}{5!} - \frac{8^7}{7!} + \cdots = \sin 8,$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!} = \cos 8 + i \sin 8 = e^{8i}.$$

级数敛散性判别法

对于正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, 我们有若干判别法来判断它的敛散性. 由此可得: 设

(1) 达朗贝尔判别法 (比值法): $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right|$ (假设存在);

(2) 柯西判别法 (根式法): $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (假设存在);

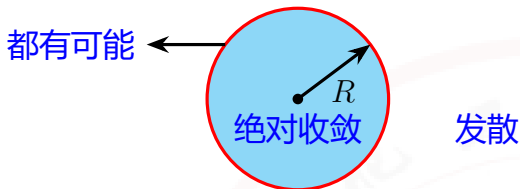
(3) 柯西-Hadamard 判别法: $\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|z_n|}$ (所有子数列中极限的最大值).

则当 $\lambda < 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 绝对收敛; 当 $\lambda > 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 发散. 其证明主要是通过将该级数与相应的等比级数做比较得到. 如果 $\lambda = 1$, 则无法使用该方法判断.

另解

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{8}{n+1} \right| = 0$, 所以该级数绝对收敛.

第二节 幂级数



证明

(2)可由(1)的逆否命题得到. 我们来证明(1). 因为级数收敛, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n z_0^n = 0$. 于是存在 M 使得 $|c_n z_0^n| < M$. 如果 $|z| < |z_0|$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n = \frac{M}{1 - \left| \frac{z}{z_0} \right|}.$$

所以级数在 z 处绝对收敛. □

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$ 的收敛半径与和函数.

解

如果幂级数收敛, 则由 $z^n \rightarrow 0$ 可知 $|z| < 1$. 当 $|z| < 1$ 时, 和函数为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1}{1 - z}.$$

因此收敛半径为 1.

由正项级数的相应判别法容易得到公式 $R = \frac{1}{r}$, 其中

(1) 达朗贝尔公式 (比值法): $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$ (假设存在);

(2) 柯西公式 (根式法): $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ (假设存在);

(3) 柯西-Hadamard 公式: $r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

如果 $r = 0$ 或 $+\infty$, 则 $R = +\infty$ 或 0 .

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n}$ 的收敛半径, 并讨论 $z=0, 2$ 的情形.

解

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ 可知收敛半径为 1.

当 $z = 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

当 $z = 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛.

事实上, 收敛圆周上既可能处处收敛, 也可能处处发散, 也可能既有收敛的点也有发散的点.

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in)z^n$ 的收敛半径.

解

我们有 $c_n = \cos(in) = \frac{e^n + e^{-n}}{2}$. 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} + e^{-n-1}}{e^n + e^{-n}} = e \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2n-2}}{1 + e^{-2n}} = e$$

可知收敛半径为 $\frac{1}{e}$.

例题: 收敛半径的计算

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$ 的收敛半径.

解

由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = |1+i| = \sqrt{2}$$

可知收敛半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例题: 收敛半径的计算 *

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 的收敛半径并讨论在收敛圆周上的情形, 其中 $p \in \mathbb{R}$.

解

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = 1$ 可知收敛半径为 1. 设 $|z| = 1$.

- 若 $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 原级数在收敛圆周上处处绝对收敛.
- 若 $p \leq 0$, $\left| \frac{z^n}{n^p} \right| = \frac{1}{n^p} \not\rightarrow 0$, 原级数在收敛圆周上处处发散.

例题: 收敛半径的计算 *

回忆狄利克雷判别法: 若 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ 部分和有界, 实数项数列 $\{b_n\}_{n \geq 1}$ 单调趋于 0, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

续解

- 若 $0 < p \leq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, 而在收敛圆周上其它点 $z \neq 1$ 处,

$$|z + z^2 + \cdots + z^n| = \left| \frac{z(1 - z^n)}{1 - z} \right| \leq \frac{2}{|1 - z|}$$

有界, 数列 $\{n^{-p}\}_{n \geq 1}$ 单调趋于 0, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ 收敛. 故该级数在 $z = 1$ 发散, 在收敛圆周上其它点收敛.

定理

设幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R_1, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, |z| < R_2.$$

那么当 $|z| < R = \min\{R_1, R_2\}$ 时,

$$(f \pm g)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n, \quad (fg)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

注意当 $R_1 = R_2$ 时, $f \pm g$ 或 fg 的收敛半径可以比 f, g 的大.

在某些情形下, 我们只关心 fg 的某一幂次系数, 此时我们便可以用上述表达式来计算特定幂次系数.

定理

设幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, |z| < R,$$

设函数 $\varphi(z)$ 在 $|z| < r$ 上解析且 $|\varphi(z)| < R$, 那么当 $|z| < r$ 时,

$$f[\varphi(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [\varphi(z)]^n.$$

定理

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径为 R , 则在 $|z| < R$ 上:

(1) 它的和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 解析,

(2) $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$,

(3) $\int_0^z f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$.

也就是说, 在收敛圆内, 幂级数的和函数解析, 且可以逐项求导, 逐项积分.

由于和函数在 $|z| > R$ 上没有定义, 因此在 $|z| = R$ 上处处不解析.

如果函数 $g(z)$ 在该幂级数收敛的点处和 $f(z)$ 均相同, 则 $g(z)$ 也**一定在收敛圆周上有奇点**. 这是因为一旦 $g(z)$ 在收敛圆周上处处解析, 该和函数就可以在一个半径更大的圆域上作泰勒展开.

例题: 幂级数展开

例

把函数 $\frac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数, 其中 $a \neq b$.

解

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{(z-a) - (b-a)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{b-a}}.$$

当 $|z-a| < |b-a|$ 时, $\frac{1}{z-b} = \frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{b-a} \right)^n$, 即

$$\frac{1}{z-b} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}, \quad |z-a| < |b-a|.$$

典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1}$ 的收敛半径与和函数.

解

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 1}{2^n - 1} = 2$ 可知收敛半径为 $\frac{1}{2}$. 当 $|z| < \frac{1}{2}$ 时, $|2z| < 1$. 从而

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1)z^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} \\ &= \frac{2}{1 - 2z} - \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{(1 - 2z)(1 - z)}. \end{aligned}$$

典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n$ 的收敛半径与和函数.

解

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ 可知收敛半径为 1. 当 $|z| < 1$ 时,

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = \frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1},$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n = \left(-\frac{1}{z-1} \right)' = \frac{1}{(z-1)^2}, \quad |z| < 1.$$

典型例题：幂级数的收敛半径与和函数

练习

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 的和函数.

答案

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln(1 - z), \quad |z| < 1.$$

典型例题: 幂级数的收敛半径与和函数

例

$$\text{求 } \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz.$$

注意这里并不能逐项积分, 因为该级数并不是幂级数, 它的和函数不解析.

解

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 在 $|z| < 1$ 收敛, 它的和函数解析. 因此

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz &= \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z} dz + \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) dz \\ &= 2\pi i + 0 = 2\pi i. \end{aligned}$$

另解

当 $|z| < \frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$ 收敛且

$$\sum_{n=-1}^{\infty} z^n = \frac{z^{-1}}{1-z} = \frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1},$$

故

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-1}^{\infty} z^n \right) dz = \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \right) dz = 2\pi i.$$

第三节 泰勒级数

上一节中我们已经知道, 幂级数在它的收敛域内的和函数是一个解析函数. 反过来, 解析函数是不是也一定可以在一点展开成幂级数呢? 也就是说是否存在泰勒级数展开?

在实变函数中我们知道, 一个函数即使在一点附近无限次可导, 它的泰勒级数也未必收敛到原函数. 例如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

它处处可导, 但是它在 0 处的各阶导数都是 0. 因此它的泰勒级数是 0, 余项恒为 $f(x)$. 所以它的麦克劳林级数除 0 外均不收敛到原函数.

而即使是泰勒级数能收敛到原函数的情形, 它成立的区间也很难从函数本身读出. 例如

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots, \quad |x| < 1.$$

这可以从 $x = -1$ 是奇点看出. 而

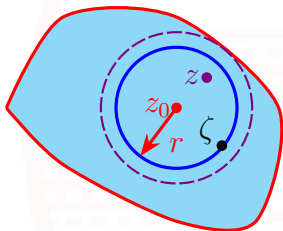
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \quad |x| < 1$$

却并没有奇点. 为什么它的麦克劳林级数成立的开区间也是 $(-1, 1)$? 这个问题在本节可以得到回答.

泰勒展开

设函数 $f(z)$ 在区域 D 解析, $z_0 \in D$. 设 $|z - z_0|$ 小于 z_0 到 D 边界的距离 d , 则存在 $|z - z_0| < r < d$. 设 $K: |\zeta - z_0| = r$, 则 K 和它的内部包含在 D 中. 由于 $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$, 因此

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$



故

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_K f(\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n + R_N(z), \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + R_N(z), \end{aligned}$$

其中

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_K f(\zeta) \left[\sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] d\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K$ 上解析, 从而在 K 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K$, 那么

$$\begin{aligned} |R_N(z)| &\leq \frac{M}{2\pi} \oint_K \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right| ds \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \oint_K \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{1}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^N \right| ds \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{r - |z - z_0|} \cdot \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^N \cdot 2\pi r \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad |z - z_0| < d.$$

由于幂级数在收敛半径内的和函数是解析的, 因此解析函数的泰勒展开成立的圆域不包含奇点. 由此可知, 解析函数在 z_0 处泰勒展开成立的圆域的最大半径是 z_0 到最近奇点的距离.

需要注意的是, 泰勒级数的收敛半径是有可能比这个半径更大的. 而且泰勒展开等式也可能在这个圆域之外的点成立. 例如

$$f(z) = \begin{cases} e^z, & z \neq 1; \\ 0, & z = 1 \end{cases}$$

的麦克劳林展开为

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < 1.$$

现在来看 $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. 它的奇点为 $\pm i$, 所以它的麦克劳林展开成立的半径是 1. 这就解释了为什么函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林展开成立的开区间是 $(-1, 1)$.

若 $f(z)$ 在 z_0 附近展开为 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, 则由幂级数的逐项求导性质可知

$$f^{(n)}(z_0) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!c_k}{(k-n)!} (z-z_0)^{k-n} \Big|_{z=z_0} = n!c_n.$$

所以解析函数的幂级数展开是唯一的. 因此解析函数的泰勒展开不仅可以直接求出各阶导数得到, 也可以利用幂级数的运算法则得到.

典型例题: 泰勒展开的计算

例

由于 $(e^z)^{(n)}(0) = e^z|_{z=0} = 1$, 因此

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z.$$

例

由于

$$\begin{aligned} (\cos z)^{(n)} &= \cos\left(z + \frac{n\pi}{2}\right), \\ (\cos z)^{(2n+1)}(0) &= 0, \quad (\cos z)^{(2n)}(0) = (-1)^n, \end{aligned}$$

因此

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z.$$

例

由 e^z 的泰勒展开可得

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n - (-iz)^n}{2i \cdot n!} \\ &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z.\end{aligned}$$

例

函数 $f(z) = (1+z)^\alpha$ 的主值为 $\exp[\alpha \ln(1+z)]$. 它在去掉射线 $z = x \leq -1$ 的区域内解析. 由于

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) \exp[(\alpha-n)\ln(1+z)] \Big|_{z=0} \\ &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} (1+z)^\alpha &= 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 展开成 z 的幂级数.

解

由于 $\frac{1}{(1+z)^2}$ 的奇点为 $z = -1$, 因此它在 $|z| < 1$ 内解析. 由于

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+z)^2} &= -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将对数函数的主值 $\ln(1+z)$ 展开成 z 的幂级数.

解

由于 $\ln(1+z)$ 在去掉射线 $z = x \leq -1$ 的区域内解析, 因此它在 $|z| < 1$ 内解析. 此时

$$[\ln(1+z)]' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1$$

逐项积分得到

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= \int_0^z \frac{1}{1+\zeta} d\zeta = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

典型例题: 泰勒展开的计算

例

将 $\frac{1}{3z-2}$ 展开成 z 的幂级数.

解

由于 $\frac{1}{3z-2}$ 的奇点为 $z = \frac{2}{3}$, 因此它在 $|z| < \frac{2}{3}$ 内解析. 此时

$$\begin{aligned}\frac{1}{3z-2} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3z}{2}\right)^n \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} z^n, \quad |z| < \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

典型例题：泰勒展开的计算

例

将 $\frac{e^z}{1+z}$ 展开成 z 的幂级数.

解

由于 $\frac{e^z}{1+z}$ 的奇点为 -1 , 因此它在 $|z| < 1$ 内解析. 此时

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n,$$

$$\frac{e^z}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \right] z^n = 1 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \cdots, \quad |z| < 1.$$

练习

将 $\cos^2 z$ 展开成 z 的幂级数.

答案

$$\begin{aligned}\cos^2 z &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2z) = \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}, \quad \forall z.\end{aligned}$$

思考

奇函数和偶函数的麦克劳林展开有什么特点?

答案

奇函数 (偶函数) 的麦克劳林展开只有奇数次项 (偶数次项).

如果解析函数 $f(z)$ 满足 $f(\zeta z) = \zeta^k f(z)$, 其中 $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{m}$ 是 m 次单位根, 则两边同时对 z 求导得到 $\zeta f'(\zeta z) = \zeta^k f'(z)$, 归纳可知

$$f^{(n)}(\zeta z) = \zeta^{k-n} f^{(n)}(z), \quad f^{(n)}(0) = \zeta^{k-n} f^{(n)}(0).$$

因此当 $n - k$ 不是 m 的倍数时, $f^{(n)}(0) = 0$. 故 $f(z)$ 的麦克劳林展开只有 $ml + k$ 次项, $l \in \mathbb{Z}$.

第四节 洛朗级数

- 双边幂级数
- 洛朗级数
- 洛朗展开的计算

双边幂级数的收敛域

设 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ 的收敛半径为 R_2 , 则它在 $|z - z_0| < R_2$ 内收敛, 在 $|z - z_0| > R_2$ 内发散.

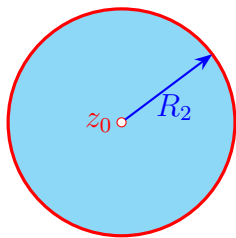
对于负幂次部分, 令 $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$, 那么负幂次部分是 ζ 的一个幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$. 设该幂级数的收敛半径为 R , 则它在 $|\zeta| < R$ 内收敛, 在 $|\zeta| > R$ 内发散. 设 $R_1 := \frac{1}{R}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ 在 $|z-z_0| > R_1$ 内收敛, 在 $|z-z_0| < R_1$ 内发散.

- (1) 如果 $R_1 > R_2$, 则该双边幂级数处处不收敛.
- (2) 如果 $R_1 = R_2$, 则该双边幂级数只在圆周 $|z - z_0| = R_1$ 上可能有收敛的点. 此时没有收敛域.
- (3) 如果 $R_1 < R_2$, 则该双边幂级数在 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内收敛, 在 $|z - z_0| < R_1$ 或 $> R_2$ 内发散, 在圆周 $|z - z_0| = R_1$ 或 R_2 上既可能发散也可能收敛.

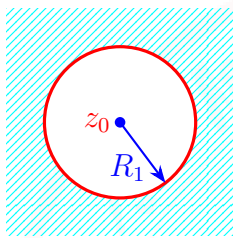
双边幂级数的收敛域

因此双边幂级数的收敛域为圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

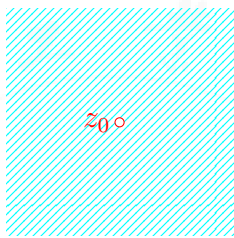
当 $R_1 = 0$ 或 $R_2 = +\infty$ 时, 圆环域的形状会有所不同.



$$0 < |z - z_0| < R_2$$



$$R_1 < |z - z_0| < +\infty$$



$$0 < |z - z_0| < +\infty$$

双边幂级数的非负幂次部分和负幂次部分在收敛圆环域内都收敛, 因此它们的和函数都解析 ($\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ 关于 z 解析), 且可以逐项求导、逐项积分. 从而双边幂级数的和函数也是解析的, 且可以逐项求导、逐项积分.

例题: 双边幂级数的收敛域

例

求双边幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2+i)^n}$ 的收敛域与和函数, 其中 a, b 为非零复数.

解

非负幂次部分收敛当且仅当 $|z| < |2 + i| = \sqrt{5}$, 负幂次部分收敛当且仅当 $|z| > |2| = 2$. 因此该双边幂级数的收敛域为 $2 < |z| < \sqrt{5}$. 此时

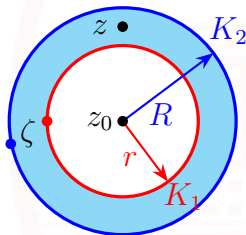
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2+i)^n} = \frac{\frac{2}{z}}{1 - \frac{2}{z}} + \frac{1}{1 - \frac{z}{2+i}} = \frac{-iz}{(z-2)(z-2-i)}.$$

现在我们来证明洛朗级数的存在性并得到洛朗展开式. 设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内处处解析. 设

$$K_1 : |z - z_0| = r, \quad K_2 : |z - z_0| = R, \quad R_1 < r < R < R_2.$$

是该圆环域内的两个圆周. 对于 $r < |z - z_0| < R$, 由柯西积分公式,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$



和泰勒级数的推导类似,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n$$

可以表达为幂级数的形式. 对于 $\zeta \in K_1$, 由于 $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$, 因此

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}},$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta.$$

令

$$R_N(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} f(\zeta) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta.$$

由于 $f(\zeta)$ 在 $D \supseteq K_1$ 上解析, 从而在 K_1 上连续且有界. 设 $|f(\zeta)| \leq M, \zeta \in K_1$, 那么

$$\begin{aligned} |R_N(z)| &\leq \frac{M}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right| ds \\ &= \frac{M}{2\pi} \oint_{K_1} \left| \frac{1}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{N-1} \right| ds \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{|z - z_0| - r} \cdot \left[\frac{r}{|z - z_0|} \right]^{N-1} \cdot 2\pi r \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

故

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_2} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_{K_1} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} \right] (z - z_0)^{-n},$$

其中 $r < |z - z_0| < R$. 由复合闭路定理, K_1, K_2 可以换成任意一条在圆环域内绕 z_0 的闭路 C . 从而我们得到 $f(z)$ 在以 z_0 为圆心的圆环域的洛朗展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \right] (z - z_0)^n,$$

其中 $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

我们称 $f(z)$ 洛朗展开的非负幂次部分为它的**解析部分**, 负幂次部分为它的**主要部分**.

设在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的解析函数 $f(z)$ 可以表达为**双边幂级数**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

则

$$\oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_C (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta = 2\pi i c_n.$$

因此 $f(z)$ 在圆环域内的**双边幂级数展开是唯一的**, 它就是**洛朗级数**.

典型例题：求洛朗级数

例

将 $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ 展开为以 0 为中心的洛朗级数.

解

由于 0 是奇点, $f(z)$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内解析. 我们有

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} d\zeta,$$

其中 C 为圆环域内的闭路. 当 $n \leq -3$ 时, 被积函数处处解析, 因此由柯西-古萨基本定理, $c_n = 0$. 当 $n \geq -2$ 时, 由柯西积分公式

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^\zeta}{\zeta^{n+3}} d\zeta = \frac{1}{(n+2)!} (e^z)^{(n+2)}|_{z=0} = \frac{1}{(n+2)!}.$$

典型例题：求洛朗级数

续解

因此

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n, \quad 0 < |z| < +\infty.$$

实际上, 由洛朗级数的唯一性, 我们可以直接从 e^z 的泰勒展开通过代数运算来得到洛朗级数. 这种做法会简便得多. 因此我们一般不用直接法, 而是用双边幂级数的代数、求导、求积分运算来得到洛朗级数.

另解

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} z^n,$$

其中 $0 < |z| < +\infty$.

例

在下列圆环域中把 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 展开为洛朗级数.

(1) $0 < |z| < 1$, (2) $1 < |z| < 2$, (3) $2 < |z| < +\infty$.

解

由于 $f(z)$ 的奇点为 $z = 1, 2$, 因此在这些圆环域内 $f(z)$ 都可以展开为洛朗级数. 注意到

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},$$

因此我们可以根据 $|z|$ 的范围来将其展开成等比级数.

续解

(1) 由于 $|z| < 1$, $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{2-z} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{8}z^2 + \cdots \end{aligned}$$

续解

(2) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \\ &= \cdots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z^2 - \cdots \end{aligned}$$

续解

(3) 由于 $\left|\frac{1}{z}\right| < 1, \left|\frac{2}{z}\right| < 1$, 因此

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} \\ &= -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n + \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1) z^{-n-1} \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{3}{z^3} + \frac{7}{z^4} + \cdots \end{aligned}$$

例如 $f(z) = z + 1 + \frac{1}{(z-1)(z-2)},$

$$f(z) = -\sum_{n<0} z^n + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z - \sum_{n\geq 2} 2^{-n-1}z^n, \quad 1 < |z| < 2.$$

那么每个系数加 1 得到

$$f(z) = \frac{3}{2} + \frac{7}{4}z + \sum_{n\geq 2} (1 - 2^{-n-1})z^n, \quad 0 < |z| < 1,$$

每个系数加 2^{-n-1} 得到

$$f(z) = \sum_{n<0} (2^{-n-1} - 1)z^n + 1 + z, \quad |z| > 2.$$

例

将 $f(z) = \frac{1}{z(z-2)}$ 在 2 的去心邻域内展开成洛朗级数.

解

由于 0 是奇点, $f(z)$ 在 $0 < |z-2| < 2$ 内解析.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-2)} = \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{2+z-2} \\ &= \frac{1}{2(z-2)} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{2}} = \frac{1}{2(z-2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z-2}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{2(z-2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}} (z-2)^n, \quad 0 < |z-2| < 2. \end{aligned}$$

练习

将 $z^3 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ 在 $0 < |z| < +\infty$ 内展开成洛朗级数.

答案

$$\begin{aligned} z^3 \exp\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)! z^n} + \frac{1}{6} + \frac{z}{2} + z^2 + z^3 \\ &= \cdots + \frac{1}{24z} + \frac{1}{6} + \frac{z}{2} + z^2 + z^3, \quad 0 < |z| < +\infty. \end{aligned}$$

注意到当 $n = -1$ 时, 洛朗级数的系数

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta,$$

因此洛朗展开可以用来帮助计算函数的积分, 它就是所谓的**留数**.

