



合肥工业大学

HEFEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

线性代数 (复习课)

张神星 (合肥工业大学)

办公室: 翡翠科教楼 B1810 东

Email: zhangshenxing@hfut.edu.cn

课件地址: <https://zhangshenxing.github.io>

- 加减法和数乘、乘法.
- 一般 $AB \neq BA$, 但 $A = E, O, f(B)/g(B)$ 时可以.
- 一般 $AC = BC$ 推不出 $A = B$, 但 C 可逆时可以.
- 矩阵的幂: 对角阵、 $\lambda E + N$ 、 uv^T 情形, 或相似与这些矩阵情形.

- $(AB)^T = B^T A^T, \quad (AB)^* = B^* A^*, \quad (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$
- $(A^T)^* = (A^*)^T, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T, \quad (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$
- $AA^* = A^*A = |A|E_n, \quad (kA)^* = k^{n-1}A^*, \quad |A^*| = |A|^{n-1}.$
- $(A^*)^* = \begin{cases} A, & n = 2; \\ |A|^{n-2}A, & n \geq 3. \end{cases}$
- $R(A^*) = \begin{cases} n, & R(A) = n; \\ 1, & R(A) = n - 1; \\ 0, & R(A) \leq n - 2. \end{cases}$
- $(A, E) \overset{r}{\sim} (E, A^{-1}), \quad (A, B) \overset{r}{\sim} (E, A^{-1}B).$
- A 可逆 $\iff |A| \neq 0 \iff R(A) = n \iff A$ 的行最简形为 E
 $\iff A \sim E \iff A \overset{r}{\sim} E \iff A \overset{c}{\sim} E \iff Ax = 0$ 只有零解 $\iff Ax = b$
总有解 $\iff Ax = b$ 总有唯一解 $\iff A$ 特征值都非零.

- 行列式：2, 3 阶直接算. 对角阵和三角阵行列式的计算, 分块情形类似.
- 一般用初等变换计算.
- $R(A) < n$ 时 $|A| = 0$.
- $|AB| = |A| \cdot |B|$, $|A^T| = |A|$, $|kA| = k^n |A|$.
- 拉普拉斯展开, 以及 $\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{jk} = 0$ 或 1.
- 特殊形状行列式的计算, 范德蒙行列式.
- 互换两行 (列) 后, 方阵的行列式变为 -1 倍.
- 方阵的某一行 (列) 乘 k 后, 方阵的行列式变为 k 倍.
- 将方阵某一行 (列) 对应向量写成两个向量之和, 则行列式也可对应拆成两个行列式之和.
- 具有相同的两行 (列) 的方阵的行列式为零: $|\cdots, \boldsymbol{v}, \cdots, \boldsymbol{v}, \cdots| = 0$.
- 若方阵有一行 (列) 全为零, 则行列式为零: $|\cdots, \mathbf{0}, \cdots| = 0$.
- 若方阵有两行 (列) 成比例, 则行列式为零: $|\cdots, \boldsymbol{v}, \cdots, k\boldsymbol{v}, \cdots| = 0$.
- 行列式中某一行 (列) 的公因子可以提到行列式外面.

- 线性组合: $\beta = \lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m \iff \beta = Ax$ 有解 $\iff \beta \in V$. 其中 V 是这组向量生成的空间.
- 线性无关: $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m = 0$ 只有零解 $\iff Ax = 0$ 只有零解 $\iff V$ 中向量可唯一表示 $\iff R(A)$ 列满秩 $\iff R(S) = m \iff \dim V = m$.
- 线性相关: 存在不全为零的数使得 $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_m \alpha_m = 0 \iff R(S) < m$.
- 设 S, T 分别为 A, B 的列向量组, 且分别生成空间 V, W . T 可以被 S 线性表示 $\iff W \subseteq V \iff \exists X$ 使得 $AX = B$.
- S, T 向量组等价 $\iff W = V \iff \exists X, Y$ 使得 $B = AX, A = BY$.
- 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 线性无关, $(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)C$. β_1, \dots, β_n 线性无关 $\iff Cx = 0$ 只有零解.
- 向量组线性相关 \iff 其中至少有一个向量可以由其它向量线性表示.
- 若 S 线性无关, $S \cup \{\beta\}$ 线性相关, 则 β 可以由 S 唯一线性表示.
- 部分相关 \implies 整体相关, 整体无关 \implies 部分无关.
- 高维相关 \implies 低维相关, 低维无关 \implies 高维无关.
- 多的由少的表示, 多的一定线性相关.

- 设 $R(\mathbf{A}) = r$, 则存在非零的 r 阶子式, 但所有的 $r + 1$ 阶子式都是零.
- 设 $\mathbf{A} \in M_{m \times n}$, 则 $0 \leq R(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.
- $R(\mathbf{A}) = 0 \iff \mathbf{A} = \mathbf{O}$;
- n 阶方阵 \mathbf{A} 可逆 $\iff R(\mathbf{A}) = n$;
- $R(k\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^T), k \neq 0$;
- $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \iff R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{B})$;
- $R(\mathbf{AB}) \leq \min(R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B}))$;
- 若 $\mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{B}_{n \times \ell} = \mathbf{O}$, 则 $R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B}) \leq n$;
- $R(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \leq R(\mathbf{A}) + R(\mathbf{B})$. 特别地, $\max(R(\mathbf{A}), R(\mathbf{B})) \leq R(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.
- 一组基: S 大小是 n ; S 生成 V ; S 线性无关. 其中任意两条. 极大无关组类似.

- 设 $A \in M_{m \times n}$, $R(A) = r$. 线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系包含 $n - r$ 个向量.
- 若 $R(A) < R(A, b)$, 则 $Ax = b$ 无解;
- 若 $R(A) = R(A, b) = n$, 则 $Ax = b$ 有唯一解;
- 若 $R(A) = R(A, b) < n$, 则 $Ax = b$ 有无穷多解.

- 正交阵: 行 (列) 向量组是标准正交基.
- A 正交 $\iff A^T, A^{-1}, A^*$ 也正交.
- $|A| = \pm 1$.
- 对角元之和 = 迹 $\text{Tr}(A) =$ 特征值之和. ($\text{Tr}(A^2) =$ 特征值平方和)
- 行列式 = 特征值乘积.
- $g(A)/h(A)$ 的特征值, $A^T, A^*, P^{-1}AP$ 特征值.
- 对称阵: $A = A^T$, 反对称阵: $A = -A^T$.
- 特征值: 解特征多项式.

- 行等价: $A \overset{r}{\sim} B \iff B = PA, P \text{ 可逆} \iff \text{行向量组等价} \iff \text{列向量组保持线性关系} \iff Ax = 0 \text{ 和 } Bx = 0 \text{ 等价}.$
- 等价: $A \sim B \iff B = PAQ, P, Q \text{ 可逆} \iff R(A) = R(B).$
- 相似: 若 $B = P^{-1}AP$, 则特征值、迹、行列式、特征多项式相同.
- 可对角化 \iff 有 n 个线性无关特征向量 (作为 P 的列). 特征值两两不同, 或对所有特征值 $R(A - \lambda E) = n - k$ (λ 是 k 重).
- 不同特征值的特征向量线性无关.
- 相合: 即二次型等价 $B = P^T P$. 特征值特征向量 (可) 全实, 可对角化. 标准型 $\text{diag}(E_p, -E_{r-p}, O).$
- 正交相合: P 是正交阵. 将特征向量正交单位化.
- 正定: 特征值全正, $p = n$, 顺序主子式全正 (对角元全正).

- (1) 将向量组以列向量形式组成矩阵 $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$.
- (2) 通过初等行变换将 A 变为行阶梯形矩阵.
 - 行阶梯形矩阵非零行的行数就是秩 $R(A)$;
 - 行阶梯形矩阵每个非零行的首个非零元对应的 A 的列向量, 就是极大线性无关组.
- (3) 继续化简为行最简形矩阵, 则可将其余向量表示为极大线性无关组的线性组合.

- (1) 将系数矩阵通过初等行变换化为行最简形.
- (2) 将矩阵重新写成方程形式 $x_i + \cdots = 0$.
- (3) 移项, 使得等式左侧只有阶梯拐角列 i 对应的 $x_i = \cdots$.
- (4) 添加 $n - r$ 项 $x_j = x_j$, 使得等式左边凑成 x .
- (5) 等式右侧是非拐角列 j 对应的 x_j 的组合, 其系数形成的 $n - r$ 个向量就是基础解系.

- (1) 写: 写出方程组对应的增广矩阵 (A, b) ;
- (2) 变: 通过初等行变换将其化为行最简形;
- (3) 判: 通过行最简形判定方程是否有解;
- (4) 解: 若系数矩阵部分零行对应的常数项均为零, 则方程有解.
- (5) 类似于齐次情形, 将矩阵重新写成方程形式、移项、添恒等式, 使得等式左边凑成 x .
- (6) 等式右侧的常数部分是特解, 其余是非拐角列 j 对应的 x_j 的组合, 其系数形成的 $n - r$ 个向量就是基础解系.

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{[\alpha_2, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{[\alpha_3, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \frac{[\alpha_3, \beta_2]}{[\beta_2, \beta_2]} \beta_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_r = \alpha_r - \frac{[\alpha_r, \beta_1]}{[\beta_1, \beta_1]} \beta_1 - \cdots - \frac{[\alpha_r, \beta_{r-1}]}{[\beta_{r-1}, \beta_{r-1}]} \beta_{r-1}$$

$e_1 = \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}, \dots, e_r = \frac{\beta_r}{\|\beta_r\|}$ 就是 V 的一组标准正交基.

特征值和特征向量的计算

- (1) 求 A 的特征多项式 $f(\lambda) = |A - \lambda E|$;
- (2) 解 $f(\lambda) = |A - \lambda E| = 0$ 得到特征值;
- (3) 对于每一个特征值 λ_i , 解 $(A - \lambda_i E)x = 0$, 其**非零解**就是对应特征向量.

相似对角化的步骤如下:

- (1) 求出 A 的所有特征值 λ_i 和特征向量 p_i ;
- (2) 若 k 重特征值均有 k 个对应的线性无关的特征向量, 则可对角化.
- (3) 若能, 将 n 个对应的线性无关的特征向量 p_1, \dots, p_n 组成方阵 $P = (p_1, \dots, p_n)$,

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

实对称阵的正交合同对角化, 或求正交变换 $x = Py$ 将实二次型 f 化为标准形的步骤:

- (1) 写出 f 对应的对称阵 A .
- (2) 求出 A 的特征值.
- (3) **若特征值是 k 重的, 求出 k 个特征向量后, 用格拉姆-施密特方法将其正交单位化.**
- (4) 这些特征向量构成正交阵 P , P^TAP 为这些特征向量对应的特征值构成的对角阵.
- (5) 写出正交变换 $x = Py$ 以及对应的实二次型