文章编号:1003－6199(2021)03－0078－06 DOI:10.16339/j.cnki.jsjsyzdh.202103014

特殊形式和结构的MSP问题NP完全性研究

马 兰†,刘 新,朱 哲
(湘潭大学 计算机学院 网络空间安全学院,湖南 湘潭 411105)

摘 要:针对一个NP完全问题,即MSP问题,研究其问题的结构性质,猜想特殊的结构可以使其算法证明得到简化。以简化证明为导引,提出一种特殊形式和结构的MSP问题。而约束了形状的特殊形式和结构的MSP问题如果不具备NP完全性,会极大影响进一步简化算法证明的研究意义。因此,提出的特殊形式和结构的MSP问题进行了NP完全性质证明。类比对SAT问题开展研究时,同样开展特殊结构的2-SAT问题、3-SAT问题、k-SAT、max-SAT问题研究,特殊形式和结构的MSP问题同样具有重要意义,并进一步推动原问题的研究。

关键词:MSP问题;多项式归结;NP完全性
中图分类号:TP301.6 **文献标识码**:A

On the NP-completeness of MSP Problem with a Special Form and Structure

MA Lan†, LIU Xin, ZHU Zhe
(School of Computer Science & School of Cyberspace Science, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 41105, China)

Abstract: An NP-complete problem named MSP problem was found to be structurally reducible. The reduction can simplify the algorithm proof of MSP problem. So we present a MSPproblem with a special form and structure (the special MSP, for short). However, if the special MSP is not NP complete. The subsequent research on simplified proof will be meaningless, so we present the NP-complete proof of the special MSP in this paper. The research of the special MSP is just like when we study SAT problems, we also study SAT problems with special structure such as 3-SATproblems, 2-SAT problems, k-SAT problems. Similarly, the special MSP problem is of great significance, and further promotes the research of the MSP problem.

Key words: MSP problem; polynomially reduction; NP-comlete problem

MSP问题是一个NP完全问题[1]。NP完全问题在科学研究和实际应用中广泛存在,是理论计算机领域最重要的问题。许多基础性问题表现为NP完全问题,如0－1整数规划、分团问题、图着色问题、最小顶点覆盖,以及众多工业中求最优解问题等[2]。NP完全问题遍布人工智能、数据库、程序语言、计算机网络等计算机科学领域[3]。

一个问题的NP完全性研究一直是理论计算机领域重要的方向。上世纪70年代初Cook[4]给出了NP完全问题的定义,并证明了第一个NP完全问题—SAT问题。接着,Cook还证明了3-SAT问题、团问题是NP完全的。几乎同一时间,Leonid Levin[5]证明了集合覆盖,及拼砖问题等是NP完全的。随后Richard Karp[6]进一步明确了NP完全的概念,并发展了多项式归结技巧,极大推动了NP完全问题的研究,越来越多的问题被归入NP完全类。

NP完全问题的研究在七八十年代达到高潮,

收稿日期:2020－12－18
基金项目:国家自然科学基金资助项目(61272010)
作者简介:马 兰(1996—),女,河南商丘人,硕士研究生,研究方向:计算智能与信息处理。
†**通讯联系人**,E-mail:201821562047@smail.xtu.edu.cn

随后趋于平静。MSP 问题的最早提出实际可追溯到 2010 年[7,8]，随后陆续有围绕 MSP 问题的研究发表。如 SAT 问题归结到 MSP 问题[9]，子集和问题归结到 MSP 问题[10]，着色问题和子图同构问题归结到 MSP 问题[11]等。

2020 年发表的文献全面论述了 MSP 问题的准确定义、多项式时间算法、算法的正确性证明及将哈密顿图判定问题归结到 MSP 问题，使 MSP 问题一度成为 NP 完全问题研究中的新热点。主要内容是对任意输入的图 G，文献[1]的算法将计算得到一个判据，并依据判据是否为空，判定一种被称为“简单路径”的路径的存在性。为了归纳证明算法的正确性，文献[1]给出了长篇幅的正确性证明。证明利用了 MSP 问题的结构特性，通过归纳法，分情况讨论，逐级分析。

在对证明的分析过程中发现，若 MSP 问题的结构上增加一定的限制条件，可能使证明过程中一些需要重点论述的部分得到简化，那么限制结构以后的 MSP 问题的算法证明将变得简单。

类比 SAT 问题。SAT 问题被限制结构成为 2-SAT、3-SAT 以后，3-SAT 在保持了 NP 完全性的同时，发挥其结构更简的优势，应用更广，如今，3-SAT 在逻辑推理、人工智能的专家系统、数据库维护和检索、VLSI 设计及检测等领域有广泛的应用，但同样被限制了结构的 2-SAT 问题却不具备 NP 完全性。

限制了结构的 MSP 问题被称为特殊结构的 MSP 问题。但特殊结构的 MSP 问题是否仍然保留了 NP 完全性，需要进一步证明，否则，对特殊结构的 MSP 问题的讨论将缺乏意义。所以主要工作包括两个部分。一是提出一类特殊结构的 MSP 问题，二是证明提出的问题具备 NP 完全性质，目的是为寻找文献[1]的算法的简化提供新的研究方向。

1　特殊形式的 MSP 问题相关定义

下面是关于 MSP 问题相关定义的描述。

定义 1：$G=V,E,S,D,L,\lambda>$ 表示加标多级图，其中，V 表示顶点集合，E 表示边的集合，S 表示多级图中的唯一源点，D 表示多级图中的唯一汇点，L 表示多级图中的点的级别，$\langle u,v,l\rangle$ 表示一条起点为 u，终点为 v，且 v 所在级为 l 的有向边，$\lambda(v)$ 表示顶点 v 的边集。

加标多级图中每一级都是相互独立的，且不相邻的两级的顶点之间不存在直接相连的边。多级图中所有的边都是有向边，方向由下面一级指向上面一级。每级都有一个及以上的顶点，且每个顶点都有指定的顶点边集。点和边的数量和层级决定了多级图的形状和结构，而边集实际上是一种“控制”。

定义 2：多级图 $G=V,E,S,D,L,\lambda>$ 中，存在一条路径 $S-u_1-u_2-\cdots-u_l-\cdots-u_L$（$1\leqslant l\leqslant L$，$u_L=D$），且对于任意顶点 u_l，有 $l\in\{1,2,\cdots,L\}$，$S-\cdots-u_l\in\lambda(u_l)$，则这条路径是简单路径。

由简单路径的定义可知，简单路径是从源点 S 经过各个级中的某个顶点到达汇点 D 的路径，且每个顶点的边集都包含路径中顶点所在层级以下的路径上所有的边。

判断一个加标多级图中简单路径的存在性。称为 MSP 问题，即多级图简单路径（Multistage-graph Simple Path）问题。

文献[1]中给出 MSP 问题的求解算法，称为 ZH 算法。对于输入的图 $G=V,E,S,D,L,\lambda>$，算法将得到一个判据 $Comp(\lambda(D),D,R(E))$，并依据判据是否为空，判定简单路径存在性。

证明 ZH 算法正确性主要用到了归纳法，定义一个度量 $f(G)$ 来表示图 G 的大小，再分别通过撕裂（如图 2 所示）或者压缩（如图 3 所示），构造一个新的图 G_1 满足 $f(G_1)<f(G)$，若 G_1 满足 $Comp(ESS1,D,R(E))\neq\varphi$，（其中 $ESS1=ESSComp(\lambda(D),D,R(E))E[L:L]$，$ESS$ 是一个任意边集同时也是证明算法的一个输入），假设 G_1 中存在简单路径，来证明 G 中有简单路径。

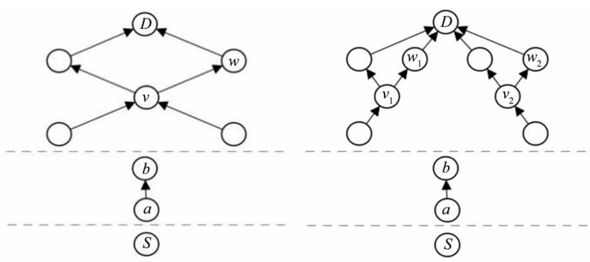

图 1　有多入度点在 L-2 级的多级图

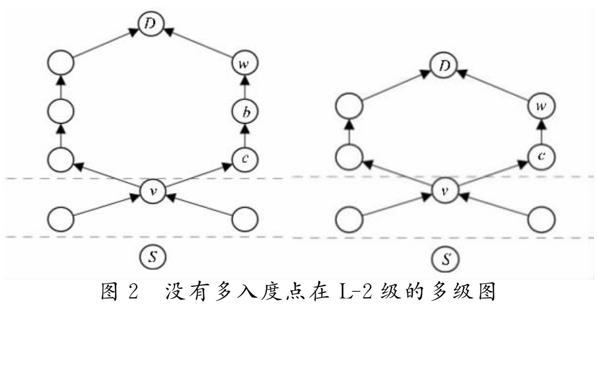

图 2　没有多入度点在 L-2 级的多级图

因为 L-2 级的点出度大于 1，那么“撕裂”操作(如图 1)使得原来 L-2 级的点分为多个部分，在算法的计算过程中，$Comp_{(}ESS1,D,R_{(}E_{))}\neq\varphi$ 的要求可能得不到满足，归纳假设无法继续进行。基于这个考虑，文献[1]关于算法证明部分，要求了对输入的图和输入的边集 ESS，必须满足一个条件，即 $ESS\lceil L-1:L\rceil=E\lceil L-1:L\rceil$。使得“撕裂”操作不会减少解。

但是这个要求 $ESS\lceil L-1:L\rceil$ 包含更多的边的条件，给压缩过程(如图 2)带来了问题，会使得压缩后出现增加解(即增加简单路径)的情况，于是文献[1]对于压缩得到的图又进行了一定改造，将可能增加的包含于 ESS 的简单路径消除。证明也随之变得复杂。

经过对证明过程的研究，可以猜想对于一些特殊结构的图，问题会变得简单。例如，对于任意顶点 b，如果 b 是多入度点时，b 一定是单出度点，那么，对“撕裂”后的新图 G_1，$Comp(ESS1,D,R(E))\neq$? 的要求完全可以满足，因为在这样的特殊结构下，从 v 到 D 只有一条路径。因此，后续的修改就不再必要。在这种特殊结构下，在证明中省略一些性质，可以大大简化讨论。

基于这个想法，提出特殊形式的 MSP 问题。定义如下：

定义 3：$G=V,E,S,D,L,\lambda>$ 是一个加标多级图(labeled multistage graph)，如果满足以下条件：

V 为顶点集合，L 称为 G 的级。$V=V_0\cup V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_L$，$V_i\cap V_j=\varphi$，$0\leqslant i,j\leqslant L$，$i\neq j$。如果 $u\in V_{i}\,_{(}0\leqslant i\leqslant L_{)}$，称 u 所在级为 i 级，也称 u 是 i 级的顶点。

V_0 和 V_L 都只包含唯一顶点。称 V_0 中的唯一顶点为源点，记为 S，称 V_L 中的唯一顶点为汇点，记为 D。

E 为边的集合，E 中的边均为有向边。用三元组 $\langle u,v,l\rangle$ 表示一条 u 到 v 的边。如果 $\langle u,v,l\rangle\in E$ $_{(}1\leqslant l\leqslant L_{)}$，则 $u\in V_{l-1}$，$v\in V_l$。称 $\langle u,v,l\rangle$ 为 G 的第 l 级的边。

λ 是一个从 $V-\{S\}$ 到 2^E 的映射。对每个顶点 $v\in V-\{S\}$，$\lambda_{(}v_{)}\varphi E$。称 $\lambda_{(}v_{)}$ 为顶点 v 的边集。

对任意的边 $\langle a,b,k\rangle$，$1\leqslant k\leqslant L-1$，满足以下条件：

(a) 如果 $k=2n+1$，$n\geqslant 0$，则 $out-d_{(}b_{)}=1$

(b) 如果 $k=2n$，$n\geqslant 1$，则 $d_{(}a_{)}=1$。

这里，$out-d_{(}b_{)}$ 是点 b 的出度，$d(a)$ 是 a 的入度。

这样的图称为特殊形式和结构的多级图。

定义 4：判断特殊形式和结构的多级图中是否存在一条简单路径的问题为特殊形式和结构的 MSP 问题。

下面给出一个特殊形式和结构的 MSP 问题的例子，如图 5，S 是源点，D 是汇点，所有有向边都从源点 S 开始向上汇集到汇点 D。一共 7 级。边集可定为 $\lambda(1)=\{e_1\}$，$\lambda(3)=\{e_1,e_3\}$，$\lambda(2)=\{e_2\}$，$\lambda(4)=\{e_2,e_4\}$，$\lambda(5)=\{e_1,e_3,e_5\}$，$\lambda(9)=\{e_1,e_3,e_5,e_{13}\}$，$\lambda(13)=\{e_1,e_3,e_5,e_{13},e_{17}\}$，$\lambda(16)=\{e_1,e_3,e_5,e_{13},e_{17},e_{29}\}$，$\lambda(D)=E$。其他点的边集为空。

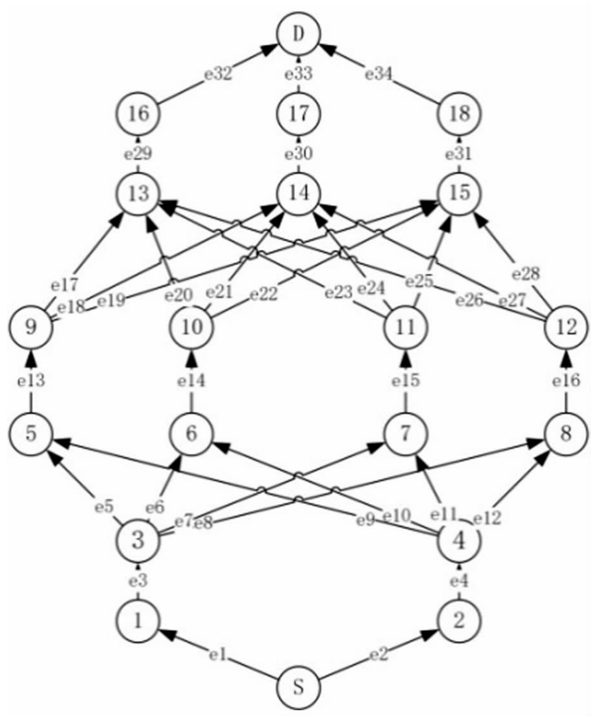

图 3　例 1

经计算得 $Comp_{(}\lambda_{(}D_{)},D,R_{(}E_{))}\neq\varphi$，该图存在简单路径。

由例 1 可以看出，特殊形式和结构的 MSP 问题与 MSP 问题在基本概念的定义、简单路径求解、约束关系等方面都是相同的。只有结构方面，特殊结构和形式的 MSP 问题中，奇数层级指向偶数层级的边连接的两级的顶点，点与点数量相等且一一相连。在这种结构下，多入度且多出度的点不复存在。因此，这种特殊结构下 MSP 问题算法的证明可能会变得简洁。但只有提出的特殊结构的 MSP 问题仍然具备 NP 完全性质才能进行这样的研究。如果不具备 NP 完全性质，研究这些特殊结构的 MSP 问题的多项式时间算法的意义将大打折扣。

2　特殊形式的 MSP 问题的 NP 完全性研究

COOK 定理之后,要证明一个问题 Q 是 NP 完全问题分为三步:

(1) 证明问题 Q 属于 NP。

(2) 选择一个已知的 NP 完全问题 Q'。

(3) 构造从 Q'到 Q 的多项式变换函数 f。

首先是第一步,特殊形式的 MSP 问题显然是 NP 问题,只要猜测一条路径并代入验证是否是简单路径即可。第二步和第三步,可以选择 SAT 问题作为已知的 NP 完全问题,并构造 SAT 问题归结到特殊形式的 MSP 问题的多项式变换函数。

SAT 问题是指对于一个给定的、由 n 个不同命题变元组成的集合的 $M=\{x_1,x_2\cdots\cdots x_n\}$,以及 M 上的一个合取范式 φ,是否存在对 M 中命题变元的一组为 TRUE 或 FALSE 的指派,使得 φ 的值为真。选择 SAT 问题的原因是,SAT 问题中合取范式的子句和文字的构造,与多级图中的层级以及每级的顶点的构造有异曲同工之妙。同时,对于 SAT 问题中的合取范式,含有互补文字的子句之间存在约束,而对于 MSP 问题中的多级图,有着顶点边集的约束,以及不同层级之间不存在直接相连的边的约束。因此,SAT 问题与 MSP 问题结构与约束都十分相似。因此选择 SAT 问题作为已知的 NP 完全问题,并构造 SAT 问题归结到特殊形式的 MSP 问题的多项式变换函数。

根据 MSP 问题和 SAT 问题的相似性,将合取范式中的子句转化为多级图中的层级,子句中的文字用每级的顶点表示,由于合取范式 φ 中有文字存在互补关系的约束条件,将多级图顶点的边集设置为除去所有与该顶点互补的顶点相连的边之外的所有的边的集合的任一子集。记为 $\lambda(v_{il})\subseteq Ee \vee e\in E$,$e$ 包含顶点$v_{j\bar{l}}$,$1\leqslant j\leqslant L\}$。

2.1　SAT 问题归结到特殊形式和结构的 MSP 问题

根据上述转化思想,下面给出 SAT 问题到特殊形式和结构的 MSP 问题的归结,并证明其正确性。

给定一个一个合取范式 $F=(a\parallel 11\ a_{12}\cdots a_{1t_1})(a\parallel 21\ a_{22}\cdots a_{2t_2})\cdots(a\parallel m1\ a_{m2}\cdots a_{mt_m})=im\ C_i$。合取范式 F 即 m 个子句的合取,第 i 个句子C_i的文字个数为t_i,$l\leqslant i\leqslant m$。

定义一个多级图 G,每个层级自下而上分别表示每个子句,句子中的文字由句子对应层级的顶点表示。为了满足偶数层级的边连接的两级顶点存在一对一连接的条件,多级图的第 $2i$ 和 $2i-1$ 级均表示第 i 个句子中的各个文字,$1\leqslant i\leqslant m$,即一个句子由相邻两级表示,两级之间同一文字表示的点一一相连。第 $2i$ 和 $2i+1$ 级表示不同句子中的各个文字,不在同一级的各点之间两两相连。每个顶点的顶点边集是除去以它的互补文字为端点的边以外的边的部分或全部构成的集合。

还可以通过映射表示点的转化。映射用f_1,f_2,……f_{2m}表示,其中$f_i:L_i\to V_i$,$L=\{l\mid l$ 是 C_i中的文字$\}$,$1\leqslant i\leqslant 2m$。$f_{2i}(a_{ij})$与$f_{2i-1}(a_{ij})$映射的两个点均表示文字a_{ij}。也就是说,将子句C_i中的文字一一对应到 V_{2i-1}和 V_{2i}级中的点。

构造规则如下

对于多级图 $G=V,E,S,D,L,\lambda>$

(1).点的构造

$V_{2i}=V_{2i-1}=\{V_{il}\mid l\in C_i,1\leqslant i\leqslant m\}$,$V_0=\{S\}$,$V_L=\{D\}$,$L=2m+1$。

即将第 i 个子句中的所有文字,映射到第 $2i$ 级的顶点,再将第 $2i$ 级的顶点复制到 $2i+1$ 级,并用有向边将两级的顶点一一对应连接起来。首尾加入源点和汇点,源点和汇点各自为一级。

(2).边的构造

$E=\{<a,b,k>a\in V_{2k+1},b\in V_{2k},1\leqslant k\leqslant m\}$ $\{<a,b,k>a\in V_{2k},b\in V_{2k-1}$,$a$ 与 b 表示的文字相同,$1\leqslant k\leqslant m\}$

(3).边集的构造

$\lambda(D)=E$,确保存在简单路径,汇点 D 的边集设置为全集。

$\lambda(v_{il})=E[1:i]\setminus\{e\mid e\in E,e$ 包含顶点$v_{j\bar{l}}$,$1\leqslant j\leqslant 2m\}$边集初值包含 1 至 i 级所有除与表示互补文字的点相连的边以外的边。

构造结果如图 4。

首先证明,F 可满足当且仅当 G 存在简单路径。

必要性。假设 F 在指派 φ 下可满足,则对于每个C_i,$1\leqslant i\leqslant m$,存在$a_{ij}\in C_i$,$1\leqslant j\leqslant t_i$,$\varphi(a_{ij})=$ true。即存在一组赋值使得 φ 为真,有每个句子的赋值为真,且每个句子中至少有一个文字赋值为真。

设句子C_1中文字为l_1为真,l_1对应多级图中的点v_{1,l_1}和v_{2,l_1},同样的C_2,C_3……C_m中为真的文字分别为l_2,l_3……l_m,对应的多级图中的点分别为v_{3,l_2},v_{4,l_2}……v_{2m,l_m}。相邻两级表示不同子句,且两子句中均存在指派 φ 下为 true 的文字,则将两

个文字表示的点依次相连；相邻两级表示同一子句，且子句中存在文字在指派 φ 下为 true，则将该文字表示的两个点一一相连。头尾加入 S 和 D 就组成了一条简单路径 $S-v_{1,l_1}-v_{2,l_1}-v_{3,l_2}-v_{4,l_2}\cdots\cdots-v_{2m,l_m}-D$，因为 $\lambda(D)=E$，所以 $S-v_{1,l_1}-v_{2,l_1}-v_{3,l_2}-v_{4,l_2}\cdots\cdots-v_{2m,l_m}-D\exists\lambda(D)$。对于顶点$v_{2i,l_i}$，$1\leqslant i\leqslant m$，若 φ 中含$\overline{l_i}$，则存在指派 $\varphi(l_i)=\text{false}$，那么 F 在指派 φ 下不可满足，与假设矛盾。因此 φ 中不含$\overline{l_i}$。v_{2i,l_i}与v_{2i-1,l_i}赋值相同，因此互补文字相同。那么有 $S-v_{1,l_1}-v_{2,l_1}-v_{3,l_2}-v_{4,l_2}\cdots\cdots-v_{2i-1,l_i}-v_{2i,l_i}\in\lambda(v_{2i,l_i})$，$1\leqslant i\leqslant m$。因此得到，$S-v_{1,l_1}-v_{2,l_1}-v_{3,l_2}-v_{4,l_2}\cdots\cdots-v_{2m,l_m}-D$ 是多级图 G 中的一条简单路径。

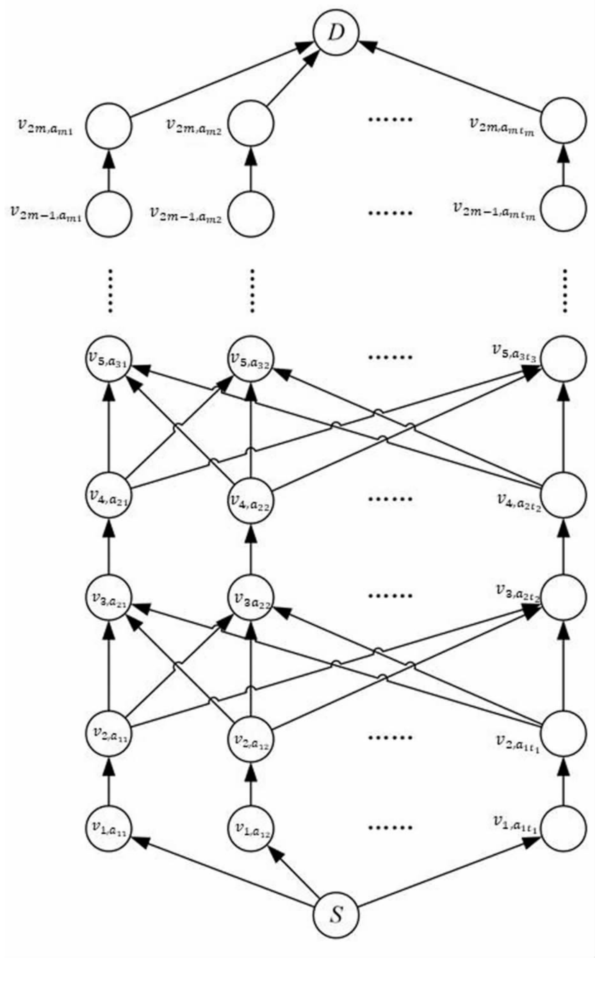

图 4　特殊形式和结构的 MSP 构造图

充分性。假设 $S-v_{1,l_1}-v_{2,l_1}-v_{3,l_2}-v_{4,l_2}\cdots\cdots-v_{2m,l_m}-D$ 是 G 中的一条简单路径，那么对于 $\forall i$，$1\leqslant i\leqslant m$，有 $S-v_{1,l_1}-v_{2,l_1}-v_{3,l_2}-v_{4,l_2}\cdots\cdots-v_{2i,l_i}=\exists\lambda(v_{2i,l_i})$。由边集定义可知，路径中不存在互补的文字，因此可将文字$l_1,l_2,l_3\cdots\cdots l_m$全部赋值为真。在这种赋值下，句子$C_1,C_2,C_3\cdots\cdots C_m$的值也为真，进而公式 F 也为真。即 F 在指派 φ 下可满足。证毕。

接着，证明这种归结的时间复杂度是关于文字个数的多项式。

设第 i 个句子中的文字个数为$t_i(1\leqslant i\leqslant m)$，那么公式中句子的最大文字个数为 $K=\max\{t_i\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$。将句子中的文字转化为图中顶点后，加上源点汇点，点的个数不超过 $|V|=2mK+2$，边的个数 $|E|=\sum_{i=1}^{m+2}t_i+\sum_{i=1}^{m-1}t_i^2$，最大不超过$(m+2)K+(m-1)K^2$。归结的主要操作是指定点的边集 $\lambda(v)$。在指定点的边集过程中多级图中每个点的边集都是 E 的子集，因此归结的时间复杂度为 $O(|V|\times|E|)$ 即 $O(K^3)$。证毕。

特殊形式的 MSP 问题显然是 NP 问题，任意非确定图灵机只要猜想一条从源点 S 到汇点 D 的路径，再验证是否为简单路径即可，这种猜想和验证均在多项式时间内完成，因此是 NP 问题。SAT 问题可以在多项式时间 $O(K^3)$ 内归结到这种特殊形式的 MSP 问题，因此，综上所述，特殊形式的 MSP 问题是 NP 完全问题。

2.2　SAT 问题归结到特殊形式和结构的 MSP 问题实例

有公式 $F=(xy(\overline{x}\,\overline{y}z)$，那么转换为特殊形式的 MSP 问题后结果如图，由边集定义可知，各个顶点的边集分别为在该点所在级及以下的所有边中去掉与该点所表示的文字互补的点相连的边所构成的集合。如：$\lambda(v_{1x})=\{e_1,e_2\}$，$\lambda(v_{1y})=\{e_1,e_2\}$，$\lambda(v_{2x})=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，$\lambda(v_{2y})=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$，$\lambda(v_{3\overline{x}})=\{e_2,e_4,e_9,e_{10},e_{11},e_{12}\}$，$\lambda(v_{3y})=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12}\}$，$\lambda(v_{3z})=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12}\}$，$\lambda(v_{3\overline{r}})=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12}\}$，$\lambda(v_{4\overline{x}})=\{e_2,e_4,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13},e_{14},e_{15},e_{16}\}$，$\lambda(v_{4y})=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13},e_{14},e_{15},e_{16}\}$，$\lambda(v_{4z})=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13},e_{14},e_{15},e_{16}\}$，$\lambda(v_{4\overline{r}})=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_8,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13},e_{14},e_{15},e_{16}\}$，$\lambda(v_{5\overline{x}})=\{e_2,e_4,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13},e_{14},e_{15},e_{16},e_{17},e_{18},e_{19},e_{20},e_{21},e_{22},e_{23},e_{24},e_{25},e_{26},e_{27},e_{28}\}$，$\lambda(v_{5\overline{y}})=\{e_1,e_3,e_5,e_7,e_8,e_{13},e_{15},e_{16},e_{17},e_{18},e_{19},e_{23},e_{24},e_{25},e_{26},e_{27},e_{28}\}$，$\lambda(v_{5r})=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7,e_9,e_{10},e_{11},e_{13},e_{14},e_{15},e_{17},e_{18},e_{19},e_{20},e_{21},e_{22},e_{23},e_{24},e_{25}\}$，$\lambda(v_{6\overline{x}})=\{e_2,e_4,e_9,e_{10},e_{11},e_{12},e_{13},e_{14},e_{15},e_{16},e_{17},e_{18},e_{19},e_{20},e_{21},e_{22},e_{23},e_{24},e_{25},e_{26},e_{27},e_{28},e_{29},e_{30},$

$e_{31}\}$,$\lambda(v_{6\bar{y}}) = \{e_1, e_3, e_5, e_7, e_8, e_{13}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{26}, e_{27}, e_{28}, e_{29}, e_{30}, e_{31}\}$,$\lambda(v_{6r}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_{20}, e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{25}, e_{29}, e_{30}, e_{31}\}$,$\lambda(D) = E$。

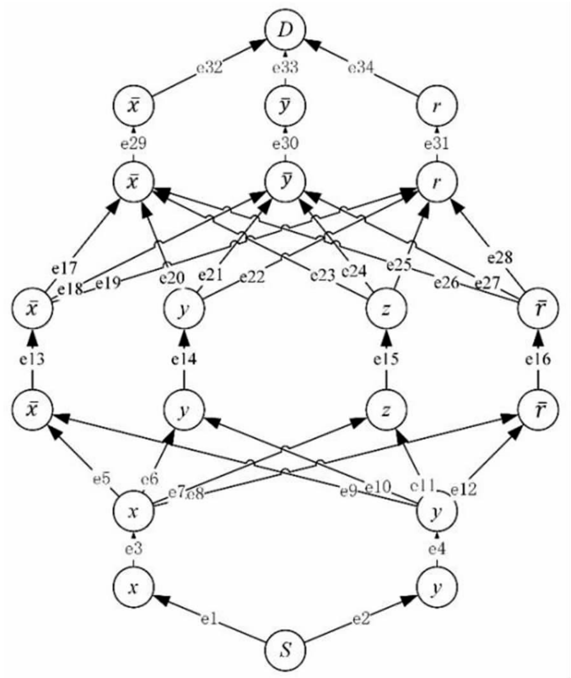

图 5　例 2

计算得到 $Comp(\lambda(D), D, R(E)) \neq \varphi$,即图中存在简单路径,也就是说存在一组对变量 x,y,z,r 的 $TRUE$ 或 $FALSE$ 的指派,使得 F 为真。

3　结　论

定义了一种特殊形式和结构的 MSP 问题,并将 SAT 问题归结到了特殊形式和结构的 MSP 问题。同时给出了特殊形式和结构的 MSP 问题的 NP 完全性证明。这将为 MSP 问题的研究提供新参考。同时,这种归结的产生,也为 MSP 问题算法正确性证明提供一种新思路,即通过特殊形式和结构的 MSP 问题来归纳证明。关于这方面,已经做了初步的工作,针对文献[1]中提出的算法,编程实现并进行特殊形式和结构的 MSP 问题实例测试,采用归纳假设的思路对文献[1]证明过程进行重写等。

参考文献

[1]　姜新文.哈密顿图判定问题的多项式时间算法[J].计算机科学,2020,47(7):8-20.

[2]　FORTNOW L. The status of the P versus NP problem[J]. Communications of the ACM, 2009, 52(9):78-86.

[3]　COOK S. The importance of the P versus NP question[J]. Journal of the ACM (JACM), 2003, 50(1): 27-29.

[4]　COOK S. The complexity of theorem proving procedures[J]. Theory of Computing, 1971, 151-158.

[5]　LEVIN L A. Universal sequential search problems[J]. Problemy Peredachi Informatsii,1973,9(3):115-116.

[6]　KARP R M. Reducibility among combinatorial problems[C]. Complexity of Computer Computations, 1972, 85-103.

[7]　JIANG Xin-wen, PENG Li-hong, WANG Qi. MSP problem:its NP-completeness and its algorithm[A]. 2010 Proceedings of the 5th International Conference on Ubiquitous Information Technologies and Applications,2010.

[8]　姜新文,王琪,姜子恒.Z-H 算法正确性证明第四次改写[J].计算技术与自动化,2010,29(3):35-48.

[9]　樊硕,姜新文.SAT 问题可多项式归结到 MSP 问题[J].计算机科学,2012,39(11):179-182.

[10] JIANG Xin-wen, LIU Wan-wei, WU Tian-jun, et al. Reductions from MSP to SAT and from SUBSET SUM to MSP[J]. Journal of Computational Information Systems, 2014, 10(3): 1287-1295.

[11] 吴添君,姜新文.MSP 问题 NP 完全性研究[J].计算机科学,2015, 42 (7) :12-14.

[12] 姜新文,吴添君,李鹏坤,等.MSP 问题的一个求解算法[J].计算技术与自动化,2016,35(1):60-70.