第27卷 第5期
1999年10月

福州大学学报(自然科学版)
Journal of Fuzhou University (Natural Science)

Vol.27 No.5
Oct.1999

文章编号:1000—2243(1999)05—0010—04

若干NP完全问题的特殊情形

王晓东
(福州大学计算机科学与技术系,福建 福州 350002)

摘要:讨论了图算法中若干NP完全问题在所给的图是一棵树时的特殊情形.利用树结构的前序编号表示法提出了解树的最大独立集问题、最小顶点覆盖问题和最小支配集问题的线性时间算法.在渐近意义下这些算法都是最优算法.

关键词:图;树;NP完全问题;计算复杂性

中图分类号:TP3　　**文献标识码**:A

1 引言

在图上定义的许多组合优化问题是NP完全问题.这类问题属于较难解的问题,至今没有找到多项式时间算法,也很可能根本没有多项式时间算法.遇到这类问题时,通常从以下几个方面来考虑并寻求解决办法.

1) 特殊情形:仔细分析所遇到的NP完全问题,研究具体实例的特殊性,考虑是否必须在最一般的意义下来解此问题.也许可利用具体实例的特殊性,在特殊条件下解此问题.许多NP完全问题在特殊情形下可以找到多项式时间算法.例如求图G的最大团问题是NP完全问题,而在图G是平面图的情形下,该问题是多项式时间可解的.

2) 动态规划和分枝限界方法:对于许多NP完全问题来说,用动态规划和分枝限界方法常可得到较高的解题效率.

3) 概率分析:对于许多NP完全问题,其困难实例出现的概率很小,因此对这类NP完全问题常可设计出平均性能很好的算法.

4) 近似算法:通常可以设计出解NP完全问题的多项式时间近似算法,以近似解来代替最优解.

5) 启发式算法:在用别的方法都不能奏效时,也可以采用启发式算法来解NP完全问题.这类方法根据具体问题的启发式搜索策略来求问题的解,在实际使用时可能很有效,但有时很难说清它的道理.

本文考虑关于图的若干NP完全问题的特殊情形.当所给的图G是一棵树时,许多NP完全问题可在多项式时间内求解.特别地,对于图G的最小顶点覆盖问题、最大独立集问题和最小支配集问题等都是NP完全问题[1].而在图G是一棵树时,可以有效地解决.本文利用树的前序编号为工具,提出解决上述问题的 $O(n)$ 时间算法.

收稿日期:1998—09—21
作者简介:王晓东(1957—),男,教授.

基金项目:福建省自然科学基金资助项目(F9810009—JS98—1)

2　树的前序标号表示法

给定一棵树 T，在计算机中可以有多种表示方法[2]．在图论算法中，树是作为一般的图来表示的，通常采用邻接表表示法．针对所考虑问题的特殊性，提出树的前序标号表示法如下：

对于给定的用邻接表表示的有 n 个顶点的树 T．

①任选一个顶点 r 作为树 T 的根结点；

②对以 r 为根的树作前序遍历，并且在遍历过程中对访问的顶点依次编号；

③用数组 parent 记录每个结点的父结点编号．即编号为 i 的结点的父结点编号为 parent[i]．

这个表示过程显然可在 $O(n)$时间内完成．这种表示法实际上是树在前序标号意义下的父亲数组表示法[2]．它具有以下重要性质：

1) 对于 $i=2,\cdots,n$，有 $i>$parent i，当 $i=1$ 时 parent[i]$=1$；

2) 若将树 T 看作是一般的图 $G=(V,E)$，则有：

$V=\{1,2,\cdots,n\}$，$E=\{(i,\text{parent}[i]),\ i=2,\cdots,n\}$；

3) 对于任意 j，$2\leqslant j\leqslant n$，定义树 T 的子树 $T_j=(V_j,E_j)$为：

$V_j=\{1,2,\cdots,j\}$，$E_j=\{(i,\text{parent}[i]),\ i=2,\cdots,j\}$，则 parent[$1..j$]是子树 T_j 的前序标号表示．特别地，$T_n=T$；

4) 标号为 j 的结点是子树 T_j 的叶结点，$j=2,\cdots,n$．特别地，标号为 n 的结点是 T 的叶点．

在树的前序标号表示法下，许多关于树的运算得以简化．

3　最小顶点覆盖

顶点集 S 是图 $G=(V,E)$的顶点覆盖，当且仅当对任意$(u,v)\in E$ 有 $u\in S$ 或 $v\in S$．最小顶点覆盖问题是对给定的图 G 找出使$|S|$最小的顶点覆盖 S．当所给的图是一棵树 T 时，可以设计出求 T 的最小顶点覆盖的贪心算法如下：

```
MIN-VERTEX-COVER(T)
begin
    for i:=1 to n do
       cover[i]:=0;
    S:=∅;
    for i:=n downto 2 do
       if (cover[i]=0)and (cover[parent[i]]=0) then
          begin
             S:=S∪{parent[i]};
             cover[parent[i]]:=1;
          end
  end; {MIN-VERTEX-COVER}
```

该算法是一个贪心算法．算法中用数组 cover 来标记选入覆盖点集的树结点，即当结点 i 被选入覆盖点集，则 cover[i]$=1$，否则 cover[i]$=0$．为了说明算法的正确性，必须证明关于

树的最小顶点覆盖问题满足贪心选择性质并且具有最优子结构性质[2]．

1) 贪心选择性质：对于树 T，存在一个 T 的最小顶点覆盖 S，使 parent[n]$\in S$．事实上，设 s 是 T 的一个最小顶点覆盖，若 parent[n]$\notin S$，则 $n\in S$．否则 S 就不是 T 的一个顶点覆盖．这种情况下，令 $\bar{S}=S\cup\{\text{parent}[n]\}-\{n\}$，则 $\bar{S}$ 仍为 T 的一个顶点覆盖，且$|\bar{S}|=|S|-1+1=|S|$．故 $\bar{S}$ 是 T 的一个最小顶点覆盖，且 parent[n]$\in\bar{S}$．

2) 最优子结构性质：对 T 的任一最小顶点覆盖 S，当 $n\in S$ 时，显然 $S-\{n\}$是 T_{n-1}的一个顶点覆盖，下面证明 $S-\{n\}$是 T_{n-1}的一个最小顶点覆盖．不然，存在 T_{n-1}的一个更小的顶点覆盖 $\bar{S}$，且$|\bar{S}<|S|-1$，则 $\bar{S}\cup\{n\}$显然是 T 的一个顶点覆盖．但是$|\bar{S}\cup\{n\}|<|S|-1+1=|S|$．这与 S 是 T 的一个最小顶点覆盖矛盾．

当 $n\notin S$ 时，设 i=parent[n]，则必有 i$\in S$，令 $S_1=\{j\,|\,i\leqslant j\leqslant n\}\cap S$，则 $S-S_1$ 是 T_{i-1} 的一个最小顶点覆盖．事实上，由于 S 是 T 的一个顶点覆盖，则 $S-S_1$ 是 T_{i-1}的一个顶点覆盖．若在 T_{i-1}中有一个更小的顶点覆盖 S_{i-1}使$|S_{i-1}|<|S|-|S_1|$，则 $S_{i-1}\cup S_1$ 是 T 的一个顶点覆盖，且$|S_{i-1}\cup S_1\leqslant|S_{i-1}|+|S|_1<|S|-|S_1|+|S_1|=|S|$，这与 S 是 T 的最小顶点覆盖矛盾．

根据上述的贪心选择性质和最优子结构性质，容易用数学归纳法证明算法 MIN－VERTEX－COVER 能正确找出 T 的最小顶点覆盖．

算法的 for 循环显然只需要 $O(n)$的时间，从而整个算法所需的时间为 $O(n)$．

4 最大独立集

顶点集 S 是图 $G=(V,E)$的独立集当且仅当 S 中任何 2 个顶点在 G 中是不相邻的．最大独立集问题是要对给定的图 G 找出使$|S|$达到最大的 G 的独立集 S．当所给的图是一棵树 T 时，我们用树的前序标号表示法表示它，并设计一个找出其最大独立集的贪心算法如下：

```
MAX INDEPENDENT－SET(T)
begin
     for i:=1 to n do
       cover[i]:=0;
     S:=∅;
     for i:=n downto 2 do
       if cover[i]=0 then
         begin
           S:=S∪{i};
           cover[parent[i]]:=1;
         end;
     if cover[1]=0 then S:= S∪{1}
end;{MAX－INDEPENDENT－SET}
```

求树 T 的最大边独立集也可用类似的算法实现如下：

```
MAX－EDGE－INDEPENDENT－SET(T)
begin
     for i:=1 to n do
       cover[i]:=0;
```

```
    S:=∅;
    for i:=n downto 2 do
      if (cover[i]=0)and (cover[parent[i]]=0) then
        begin
          S:=S∪{(i,parent[i])};
          cover[parent[i]]:=1
        end
end;{MAX－EDGE－INDEPENDENT－SET}
```

5　最小支配集

顶点集 D 是图 $G=(V,E)$的支配集当且仅当对任意 $u\in V-D$ 存在 $v\in D$ 使$(u,v)\in E$. 最小支配集问题是对给定图 G 找出使$|D|$最小的支配集 D. 当所给的图是一棵树 T 时，我们可以利用树的前序标号表示法设计出求最小支配集 D 的线性时间算法如下：

```
MIN－DOMINATE－SET(T)
begin
    for i:=1 to n do
      cover[i]:=0;
    D:=∅;
    for i:=n downto 2 do
      if cover[i]=0 then
        begin
          D:=D∪{parent[i]};
          cover[parent[i]]:=1;
          cover[parent[parent[i]]]:=1
        end
end;{MIN－DOMINATE－SET}
```

最小支配集问题同样具有贪心选择性质和最优子结构性质，从而保证了算法 MIN－DOMINATE－SET 的正确性，算法所需的计算时间也是 $O(n)$.

参考文献:

[1]Garey M R, Johnson D S. Computers and intractability, a guide to the theory of NP－completeness [M]. California: Freeman and Co, 1979.

[2] 傅清祥，王晓东. 算法与数据结构[M]. 北京：电子工业出版社，1998.

Some Special Cases of NP－Complete Problems

WANG Xiao－dong

(Department of Computer Science and Technology, Fuzhou University, Fujian Fuzhou 350002, China)

Abstract: This paper discusses some special cases of NP－complete graph problems in which the given graph is a tree. By means of the pre－order labeling presentation of a tree, we present several linear time algorithms for graph problems on trees. These algorithms are all asymptotically optimal.

Keywords: graphs; trees; NP－complete problems; time complexities