文章编号: 1000-1220(2000)05-0452-03

非线性存储方案设计问题——一个 NP 完全问题

佟 冬 方滨兴 胡铭曾

(哈尔滨工业大学计算机科学与工程系 哈尔滨 150001)

摘 要: 本文证明了为任意模板集设计存储访问无冲突非线性存储方案的问题是一个 NP 完全问题. 另外设计同时满足存储访问无冲突和互联网络无冲突的存储方案设计问题也是一个 NP 完全问题.

关键词: 非线性存储方案; 多级互连网络; 模板; NP 完全问题

分类号: TP302.1; TP338.7 **文献标识码:** A

1 引 言

在共享存储器的 SIMD 计算机设计中,存储器无冲突访问方案和互连网络的结构是影响计算效率的两个关键问题. 存储器无冲突方案旨在将二维阵列数据用某种形式存在 N 个存储体中,使 N 个处理器对某种模式的 N 个数能无冲突地同时访问. 这些访存模式称为模板,如行、列、对角线等. 非线性存储方案[1,2,3,4,5,6]采用异或算子,它有能力实现多种模板访存无冲突,并且其局部地址生成逻辑简单. Al-Mouhamed 和 Seiden 证明了为任意模板集设计无冲突访问方案是 NP 完全问题[6]. 互连网络实现数据从存储器到处理器的传送. 多级互连网络[7,8]与其它网络相比具有很高的性能价格比,因此在 SIMD 计算机设计时经常被使用. Al-Mouhamed 和 Seiden[9]给出了判断线性置换能否冲突通过 Baseline 网络的判定算法,并证明了设计存储访问和网络同时无冲突的非线性存储方案也是 NP 完全问题. Al-Mouhamed 和 Seiden 的两个证明中的模板被限制在一些简单的模板,而对一些复杂的模板,如对角线等并不适合. 本文首先扩大了模板的表示范围,使其能表示复杂的模板. 并证明了对任意模板集,设计存储访问无冲突的非线性方案是 NP 完全问题. 另外本文以间接二进制 n 方体网络(简称 n-cube 网)为例,证明了设计存储访问和互连网络同时无冲突的方案也是 NP 完全问题.

2 基本定义

设$(\{0,1\},\oplus,\cdot)$是一个布尔域,记为 Z_2,其中加法运算$\oplus$是位异或运算,乘法运算$\cdot$是位与运算. 任何 n 位二进制整数 x 可以表示为: $x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$,也可以用 Z_2 上的一个向量 $(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ 表示. 这样所有在$[0..2^n-1]$范围内的二进制整数,构成 Z_2 域上的一个 n 维线性空间,称为 n 维布尔线性空间,记为 Z_2^n. Z_2^n 的正交规范基 $V=\{v_i \mid v_i$ 为只有第 i 位是 1的单位向量, $0\leqslant i\leqslant n-1\}$, Z_2^n 中的所有向量都是 V 中单位向量的线性组合. 为了表示方便,在本文中向量$(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$和$(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})^T$在不同情况下都可用 x 表示.

定义 1: 设 $V=\{v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$是 Z_2^n 的一个基,如果集合 S 的元素满足下面的规定,则称 S 为 V 的基本生成子集: 1) V 中的元素可以是 S 的元素, 2) 如果, $0\leqslant i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}\leqslant n-1$, 则 $v_{i_1}\oplus v_{i_2}\oplus\cdots\oplus v_{i_{k-1}}$可以是 S 的元素, 3) 每一个 v 在 S 中最多只能出现一次.

将 V 定义成一个有序集,当 $i<j$ 时, $v_i<v_j$. 设 ORD 是序号函数, $ORD(v_i)=i$. 定义 S 中元素的序号函数 ORD_S: 1) $ORD_S(v_i)=i$; 2) $ORD_S(v_{i_1}\oplus v_{i_2}\oplus\cdots\oplus v_{i_{k-1}})=\min\{ORD(v_{i_j})\}$. 这样 S 也是一个有序集,将 S 中的元素重新编号,记为 $\{s_0, s_1, \cdots, s_{|S|-1}\}$. 令 $S^C\subset V$ 是生成子集 S 的补集,如果 S^C 包含所有不在 S 中出现的 V 的元素, S^C 也是一个有序集,记为 $\{s^c_0, s^c_1, \cdots, s^c_{|S^C|-1}\}$.

定义 2: 设 v 是一个向量, a 是 1位二进制数,我们定义 v 的负向量 $\bar{v}$,也可称为取反向量,令 $a\bar{v}=(a\oplus 1)v$, $ORD(\bar{v}_i)=ORD(v_i)$.

定义 3: 设 S 是 V 的一个基本生成子集, D 是一个 n 位二进制数: $d_0d_1\cdots d_{n-1}$, 如果 $d_i=1$, 则用 $\bar{v}_i$ 代替 S 中的 v_i, $0\leqslant i\leqslant n-1$. 这样形成的集合 S_D 称为 V 的可负生成子集.

定义 4: 设 S 是 V 的一个基本生成子集或可负生成子集,交换 S 中几个元素的位置而形成的集合 S′称为位交换生成子集.

定义 5: 我们将 V 的基本生成子集、可负生成子集和位交换生成子集统称为 V 的生成子集.

设 $f: Z_2^m\rightarrow Z_2^n$ 是一个函数, $m\geqslant n$. 如果, $\forall x, y\in Z_2^n$, $f(x\oplus y)=f(x)\oplus f(y)$, $f(cx)=cf(x)$, 则称 f 为一个线性变换. f 也可用 Z_2 上的一个 $n\times m$ 矩阵 Φ 来表示, $f(x)=\Phi x$. 我们用 $\Phi_{i,*}$ 来表示 Φ 的第 i 行,用 $\Phi_{*,i}$ 来表示 Φ 的第 i 列. 令 f_i 是产生 $f(x)$ 第 i 位的函数, $f(x)=(f_0(x), f_1(x), \cdots, f_{n-1}(x))$, f_i 的矩阵表示是 Φ 的第 i 行. 如果存在一个矩阵 Φ 和一个常向量 $C=(c_0c_1\cdots c_{n-1})^T$, 使得 $y=f(x)=\Phi x\oplus C$, 则称 f 为 LC(Linear Complement) 变换, f_i 的矩阵表示是: Φ

收稿日期: 1999-05-05 基金项目: 国防基金项目支持 作者简介: **佟冬**, 博士研究生, 主要从事可重构并行技术的研究. **方滨兴**, 教授, 博士导师, 主要从事网络技术及并行计算技术的研究. **胡铭曾**, 教授, 博士导师, 主要从事计算机体系结构的研究. Email: td@pact518.hit.edu.cn.

$(x)=\Phi$，$*x\oplus c_i$. 可知f是一一映射当且仅当Φ是满秩的.

在Z_2^n上定义置换，$f:Z_2^n\to Z_2^n$. 如果f是LC变换，Φ是满秩的，则称f是LC置换. 如果Φ的每一行每一列只有一个元素为1，则称这个置换为BPC(Bit Permutation Complement)置换. 可知线性置换(Linear Permutation)是LC置换的特例(当C=0时)，位置换(Bit Permutation)是BPC置换的特例(当C=0时).[10]

定义6：设S是Z_2^n一个基V的生成子集，$|S|\geq n$，$f:Z_2^n\to Z_2^n$是一个线性变换，其矩阵表示是Φ. 由S定义f的一个生成函数，记为f^s，其生成规则如下：1) f^s是一个LC函数，其形式是$\Phi^s x\oplus C^s$，首先令$C^s=0$；2) 如果s_i是定义1中的第一种元素v_j，则令$\Phi^s_{*,i}=\Phi_{*,j}$；3) 如果s_i是第二种元素，$\Phi^s_{*j}=\bigoplus_{0\leq j\leq k-1}\Phi_{*,i_j}$；4) 如果S是可负生成子集，对每一个在S中出现$\bar{v}_i$，$C^S=C^S\oplus\Phi_{*,i}$.

3 模板的表示

可以用向量表示二维阵列的下标(i,j)以及存储器标号m. 定义向量空间$F_2^n=Z_2^n$表示行下标，$F=\{f_0,f_1,\cdots,f_{n-1}\}$是它的规范基. 同样定义列下标的向量空间$G_2^n=Z_2^n$和存储器标号的向量空间$H_2^n=Z_2^n$，$G=\{g_0,g_1,\cdots,g_{n-1}\}$和$H=\{h_0,h_1,\cdots,h_{n-1}\}$分别是它们的规范基. 向量空间$F_2^n$和$G_2^n$的笛卡尔乘积是一个新的向量空间$Z_n^{2n}=F_2^n\times G_2^n$，F∪G是其规范基，即$\{f_0,f_1,\cdots,f_{n-1},g_0,g_1,\cdots,g_{n-1}\}$，$Z_2^{2n}$是二维阵列下标的向量空间表示.

模板(Template)是同时被访问的二维矩阵元素位置之间相互关系的模式，如行、列、对角线等. 一个模板T可以用Z_2^{2n}规范基的一个生成子集T来定义. 如果模板T中元素的个数是N，则$|T|=n=\log_2 N$. 我们以N=16为例，n=4，Z_2^8的规范基为$V=\{f_0,f_1,f_2,f_3,g_0,g_1,g_2,g_3\}$.

几种常用的模板如下：列：$T_1=\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$；连续块：$T_2=\{f_0,f_1,g_0,g_1\}$；离散块：$T_3=\{f_2,f_3,g_2,g_3\}$；红列块：$T_4=\{f_0\oplus g_0,f_1,f_2,f_3\}$；黑列块：$T_5=\{f_0\oplus\bar{g}_0,f_1,f_2,f_3\}$；主对角线：$T_6=\{f_0\oplus g_0,f_1\oplus g_1,f_2\oplus g_2,f_3\oplus g_3\}$；反对角线：$T_7=\{f_0\oplus\bar{g}_0,f_1\oplus\bar{g}_1,f_2\oplus\bar{g}_2,f_3\oplus\bar{g}_3\}$；列位逆序列：$\{f_3,f_2,f_1,f_0\}$.

模板可以分为4类：1) 正模板，T是基本生成子集，T的元素都是定义1的第一种元素，如列模板、连续块模板等；2) 斜模板，T是基本生成子集，T包含定义1的第二种元素，如对角线、红列块等；3) 反模板，T是可负生成子集，如反对角线、类列块等；4) 位交换模板，以上三种模版的生成子集交换某几个元素而成，如列位逆序模板是列模板的生成子集的元素安位逆序交换而成.

一个模板T的实例(instance)可以用生成子集的补集T^C来定义. 如果$|T^C|=p$，这个模板共有2^p个实例. 它表示模板在二维阵列中的具体位置，如行号，列号等.

由于模板T的生成子集T和其补集T^C都是可按其先后顺序排序，可以用线性组合分别定义模板中元素的编号和模板实例的编号. 二维阵列中属于一种模板的每个元素，可以又它在模板的位置和模板的一个实例号唯一的确定. 黑列块为例，设$T_5=\{t_0,t_1,t_2,t_3\}$，其中$t_0=f_0\oplus\bar{g}_0$，$t_1=f_1$，$t_2=f_2$，$t_3=f_3$. $T_5^C=\{t_0^c,t_1^c,t_2^c\}$，其中$t_0^c=g_1$，$t_1^c=g_2$，$t_2^c=g_3$. 第2黑列块的第3个元素可以表示为$1t_0\oplus 1t_1\oplus 0t_2\oplus 0t_3\oplus 0t_0^c\oplus 1t_1^c\oplus 0t_2^c$，按定义展开如(2)式所示，则元素下标为(3，4).

$$1f_0\oplus 1f_1\oplus 0f_2\oplus 0f_3\oplus 0g_0\oplus 0g_1\oplus 1g_2\oplus 1g_3 \qquad (2)$$

4 非线性异或方案的设计

4.1 非线性异或方案

非线性异或存储方案是是二维阵列的存储策略，它将N×N矩阵的元素分配到N个存储体中. 非线性异或方案是一个线性变换$f:F_2^n\times G_2^n\to H_2^n$，其矩阵表示是n×2n矩阵Φ. f可以使一个模板T存储器访问无冲突，当且仅当f将T的一个实例中每个元素映射到不同的存储体中. 设模板的某一个元素A[i，j]，x和y分别表示它在模板中的编号和实例号，则$f(i,j)=\Phi^T x\oplus C^T\oplus\Phi^{T^C}y$. 可知，$f$使模板$T$的实例$y$存储访问无冲突，即$f^T$是一个置换，当且仅当矩阵$\Phi^T$是满秩的. 一个模板可否无冲突访问，只有存储方案和模板的表示有关而与模板的具体实例无关. 因此如果一个模板的生成函数是一一映射(置换)，则其所有的实例都可以无冲突访问.

定理1：如果一个正模板或斜模板在一个异或方案下是存储器访问无冲突的，则相应的反模板和位交换模板必是无冲突的.

证明：由生成函数的定义可知，一个正模板或斜模板的生成LC函数与相对应的反模板的生成LC函数，其矩阵Φ是相同的，只是常数C不同. 而C的取值并不改变LC函数是否是一一映射的性质，因此，反模板所对应的生成函数也是一对一映射，对其访存也是无冲突的. 另外由生成函数的定义，一个模板的位交换模板的生成LC函数的矩阵，是这个模板的生成函数矩阵列交换而成的. 而列交换并不改变矩阵的秩，所以位交换模板也是访问无冲突的.

4.2 非线性异或方案设计问题

对于一个应用算法，在程序中用到的模板可以有很多，形成一个模板集. 应用算法不同，模板集也可能不同. 算法的模板集可以由程序员指定，或由编译程序发现. 这样如果可以根据算法指定的模板集，设计出所有模板无冲突访问存储方案，并且在并行计算机中采用动态可变的存储模式. 这样应用算法的存储访问冲突将最小，得到最好的性能. 我们证明为任意模板集设计无冲突非线性存储方案是一个NP完全问题.

引理1：一个布尔矩阵A是满秩的，当且仅当A的行列式$|A|=1$.

Cook定理：布尔表达式的可满足问题SAT是NP完全问题.[12]

Cook定理是第一个被证明是NP完全的问题. SAT的一个实例是k个布尔变量m个布尔表达式. 若存在k个布尔变量中的0或1赋值，使每个布尔表达式都取值1，则称这些布尔表达式是可满足的. 先构造一个n×2n的变量矩阵Q，它的每个元素是一个布尔变量，只有0和1两个中取值. 这样一个

非线性异或方案，就是对变量矩阵 Q 的一次赋值.

定理 2. 为任意模板集设计无冲突非线性存储方案问题是一个 NP 完全问题.

证明：我们只需证明非线性方案设计问题可以在多项式时间内转换为SAT 即可. 设一个模板集 $\{T_1, T_2, ..., T_m\}$. 对每个模板 T_i，它是否在非线性方案下访存无冲突，取决于其生成 LC 函数是否是置换，即取决于其对应的矩阵 Q^{T_i} 是否是满秩的. 这样每个模板都能生成一个 $n\times n$ 的变量矩阵，形成一个变量矩阵集 $\{Q_1, Q_2, ..., Q_m\}$. 这个变量矩阵集的生成过程是多项式时间的. 设计一个非线性存储方案是对 Q 的一次赋值，它能使所有模板访存无冲突，当且仅当每个 Q_i 都是满秩的. 如果变量一次赋值，使变量矩阵 Q 是满秩的，其对应的行列式的值是 1. 而一个变量矩阵的行列式，正是一个布尔表达式. 因此非线性存储方案的设计问题可以在多项式时间内变换为SAT 问题，是一个 NP 完全问题.

4.3 网络无冲突的存储方案

在SIMD 并行计算机中，N 个处理器是通过互连网络并行地对模板的一个实例中的 N 个数访存的. N 个处理器能否无冲突的对模板访存，取决于模板对应的 LC 置换能否容许通过互连网络. n-cube 网是一种多级阻塞互联网络，N 个输入端通过 n 级开关和 N 个输出相连，$n=log$N. 网络的每级由 N/2个 2×2开关组成，采用单元控制策略. 置换容许通过网络是指从输入端到输出端能一次通过网络，无冲突地按这种置换实现数据传输[7]. 置换能否容许通过 n-cube 网可以用 Pease 定理[12]判定.

Pease 定理：设f 是一个置换，令 $y=f(x)$，x 和 y 可以用二进制表示，$x=x_0x_1...x_{n-1}$，$y=y_0y_1...y_{n-1}$. f 容许通过 n-cube 网当且仅当f 可以写成下面的格式：

$$y_i=x_i\oplus f_i(y_0,y_1,...,y_{i-1},x_{i+1}...x_{n-1})$$

$0\leqslant i\leqslant n-1$.

定义 7. 如果一个 n×n 布尔矩阵 Φ，对所有的 i，$0\leqslant i\leqslant n-1$，$Q[i]$ 是非奇异的，则称 Q 是子非奇异的(sub-non-singular).

$$\Phi[i]=\begin{bmatrix}\Phi_{0,0} & ... & \Phi_{0,i}\\ \vdots & & \vdots\\ \Phi_{i,0} & ... & \Phi_{i,i}\end{bmatrix}$$

定理 3. 一个LC 置换f，$f(x)=\Phi x\oplus C$，容许通过n-cube 网络，当且仅当 Φ是子非奇异的.[5]

定理 4. 为任意模板集设计存储器访问和互连网络同时无冲突的非线性存储方案的问题，也是一个 NP 完全问题.

证明：一个模板 T_i 存储器访存无冲突，当且仅当对 Q 的一次赋值使 Q^{T_i} 是满秩的. T_i 是网络无冲突的，当且仅当 $Q^{T_i}[i]$ 是满秩的，$0\leqslant i\leqslant n-1$，即 Q^{T_i} 是子非奇异的. 这样一个模板对应 n+1个布尔矩阵，它可以存储访存和互连网络同时无冲突，每个布尔矩阵的行列式必为 1. 因此本定理的问题也可在多项式时间内变换为SAT 问题，它也是NP 完全的.

5 结论

本文在扩充了模板定义的基础上，证明了为任意模板集设计存储访存无冲突和互连网络无冲突的非线性存储方案问题是NP 完全问题. 今后的工作主要是为解决这一问题设计近似算法.

参考文献

1 P. Budnik and D. J. Kuck. Organization and use of parallel memories.〔J〕IEEE Trans. Computers. Vol. C-20, No. 12, Dec. 1971, 1566~1569

2 K. E. Batcher. The Multidimensional access memory in STARAN.〔J〕IEEE trans. Computers. Vol. C-20, No. 2, Feb. 1977, 174~177

3 J.M. Frailong, W. Jalby, J. Lenfant. XOR-schemes: A flexible data organization in parallel memories.〔C〕Proc. 1985 Int. Conf. Parallel Processing, Aug. 1985, 276~283

4 De-Lei Lee. Architecture of an array processor using a nonlinear skewing scheme.〔J〕IEEE Trans. Computers. Vol. 41, No. 4, April 1992, 499~505

5 R.V. Boppana and C.S. Raghavendra. Generalized schemes for access and alignment of data in parallel processors with self-routing interconnection networks.〔J〕J. Parallel and Distributed computing, Vol. 11, No. 2, Feb. 1991, 97~111

6 M. A. Al-Mouhamed and S. S. Seiden. A heuristic storage for minimizing access time of arbitrary data patterns.〔J〕IEEE trans. parallel and distributed systems. Vol. 8, No. 4, April 1997, 441~447

7 王鼎兴、陈国良. 互连网络结构分析.〔M〕北京. 科学出版社. 1990

8 Tse-Yun Feng. A Survey of Interconnection Networks.〔J〕IEEE Computer. Vol. 14, No. 12, December 1981, 12~27

9 M. A. Al-Mouhamed and S. S. Seiden. Minimization of memory and network contention for accessing arbitrary data patterns in SIMD systems.〔J〕IEEE Trans. Computers. Vol. 45, No. 6, June 1996, 757~762

10 C.S. Raghavendra and R.V. Boppana. On self-routing in Benes and shuffle-exchange networks. IEEE trans. Computers. Vol. 40, No. 9, Sept. 1991, 1057~1064

11 傅清祥、王晓东. 算法与数据结构.〔M〕北京. 电子工业出版社. 1998, 362~365

12 M. C. Pease. The indirect binary n-cube microprocessor array.〔J〕IEEE Trans. Computers. Vol. C-26, No. 5, May 1977, 458~473

DESIGN NONLINEAR STORAGE SCHEME: A NP-COMPLETE PROBLEM

TONG Dong FANG Bin-xing HU Ming-zeng

(*Department of Computing Science and Engineering, Harbin Institute of Technology Harbin* 150001)

Abstract In this paper, the problem to design a conflict free access storage scheme for arbitrary templates set is proved to be a NP-Complete problem. Moreover, to design a storage scheme for both memory access conflict free and network alignment conflict free is also a NP-Complete problem.

Key words Nonlinear storage scheme; Multistage interconnection network; Template; NP-Complete