黎曼几何

S4097 王瑞恒

2025 年 3 月 22 日

目录

1 微分流形

1.1 微分流形光滑结构

微分流形的定义，就是带有微分结构的拓扑流形。一个拓扑空间的定义如下：

定义 1.1.1. *一个集合 M 和其子集族 O (这里面 O 内元素是 M 的所有子集)，如果满足 $\emptyset \in O, M \in O$，且对有限交和任意并封闭，也就是假设 $\forall \Omega_i, \Omega_\lambda \in O$，有*

$$\bigcap_{i=1}^{N} \Omega_i \in O, \quad \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda \in O, \forall \Lambda$$

则称这样的 O 是 M 上的一个拓扑。其中 O 内部的元素成为开集，且称 (M, O) 是一个拓扑空间。注意，无限个开集的交可能变成闭集，如 $(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$。例如 $M = \{a, b\}$ 则 $O = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ 是 M 的一个拓扑，(M, O) 是一个拓扑空间。

上面我们给出了拓扑流形的定义。那什么时候这个流形就带有微分的结构了？也就是其是一个微分流形了？其定义如下：

定义 1.1.2. *n 维微分流形指的是一个集合 M 和一族单映射 $\{\phi_\alpha\} : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to M$ 满足*

1. *$\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} \phi_\alpha(U_\alpha) = M$，其中 U_α 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，且映射 ϕ_α 是同胚的。*
2. *$\forall \alpha, \beta \in \Lambda, \phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$，且集合 $\phi_\alpha^{-1}(W), \phi_\beta^{-1}(W)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，并且映射 $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha$ 是可微的。这一条件称为相容性。*
3. *对条件 1 和 2 来说，族 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) || \alpha \in \Lambda\}$ 是极大的。*

则称 M 是 n 维微分流形。且 (U_α, ϕ_α) 对于 $p \in \phi_\alpha(U_\alpha)$ 是 M 在 p 点的一个参数化。

整个关系如下：

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dr, "\phi_\beta^{-1}"] & \\ U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[ur, "\phi_\alpha"] \arrow[rr, "\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha"] & & U_\beta \subseteq \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

实际上，我们可以如下理解：大家都知道 Python 的面向对象编程机制。实际上你取的 p 点并不是在 n 维实数空间之内，而是作为一个性质封装到了类空间 M 的一个实例对象 p 里面。这其实就类似于 $p = \text{Point}(1, 2, 3)$，这个 Point 是一个 class 类名，而当你 print 出 p 的时候，打出的不是 p 的坐标 $(1, 2, 3)$ 而是一串代号，这个其实就是你在对象空间，而不是坐标空间。参数化的映射 ϕ_α 其实可以看做这个 Point 类中返回该对象 p 的坐标的成员函数。

现在我们举一个例子：

例 1.1.1. *假设实投影空间 $P^2(\mathbb{R})$，其内部的集合是 $\mathbb{R}^3$ 中经过原点的直线的集合。或者整个 $P^2(\mathbb{R})$ 代表的是三维空间内的“方向”。*

下面考虑如下一个可微结构：假设 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$，$P^2(R)$ 是 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 中通过等价关系

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$$

定义的上空间。我们将记 $P^2(\mathbb{R})$ 中的点为 $[x_1, x_2, x_3]$。现在假设 $x_1 \neq 0$ 则

$$[x_1, x_2, x_3] = \left[1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right]$$

现在取 $P^n(\mathbb{R})$ 中的子集

$$V_i = \{[x_1, x_2, x_3] : x_i \neq 0\} \quad i = 1, 2, 3$$

也就是说，V_i 表示通过原点且不在 $x_i = 0$ 平面之内的直线。我们此外定义映射 $x_i : \mathbb{R}^2 \to V_i$ 满足

$$x_1(u, v) = [1, u, v] \quad x_2(u, v) = [u, 1, v] \quad x_3(u, v) = [u, v, 1]$$

现在假设考虑 $x_2^{-1} \circ x_1$ 这个映射，我们发现 $x_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ 里面，

$$x_2^{-1} \circ x_1(u, v) = x_2^{-1}([1, u, v])$$

实际上这里面注意到 $[1, u, v] \in V_1 \cap V_2$，所以 $u \neq 0$。另外我们还注意到

$$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \neq 0\}$$

这本身是一个开集。因此 $x_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$ 是开集。且我们又得到

$$x_2^{-1} \circ x_1(u, v) = x_2^{-1}([1, u, v]) = x_2^{-1}\left(\left[\frac{1}{u}, 1, \frac{v}{u}\right]\right) = \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u}\right)$$

这个关于 (u, v) 的二元函数，因为已经有 $u \neq 0$，故不难判断得出这个二元函数可微。从而，我们就得到了我们定义的该结构是可微的。

刚才我们举了一个例子，就是一个流形上面得满足什么情况，才有可微结构，也就是属于一个微分流形。那两个不同流形之间的可微映射，我们如何定义？

定义 1.1.3. 如果有 *2* 个微分流形，假设 M_1^n, M_2^m 是 n, m 维的微分流形，假设 $p \in M_1$ 是一个 M_1 中的一个点，映射 $\varphi : M_1 \to M_2$ 是两个流形间映射，$U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$，$X(U), Y(V)$ 是 $p, \varphi(p)$ 的一个参数化，且满足 $\varphi(X(U)) \subseteq Y(V)$。如果映射

$$Y^{-1} \circ \varphi \circ X : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

在点 $X^{-1}(p)$ 处可微，则称 φ 在 p 处是光滑的。如果 φ 在 M_1 上处处是光滑的则 φ 是一个光滑映射。现在我们记 M 上的所有光滑函数为 $\mathcal{D}(M)$

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\varphi"] & M_2 \arrow[d, shift left, "Y^{-1}"] \\ U \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[u, "X"] \arrow[r, "Y^{-1} \circ \varphi \circ X"] & V \subseteq \mathbb{R}^m \arrow[u, shift left, "Y"] \end{tikzcd}$$

其实上面的定义等价于：两个流形之间的映射的光滑可微性，可以通过转换到各自的实数坐标系，然后考察坐标系与坐标系之间映射的可微性。

特别的，如果 M 是一个微分流形，则假设有一个光滑映射 $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}\to M$，我们称 α 是 M 上的一个光滑曲线。一般假设我们让曲线在 $t=0$ 的时候过 $p\in M$，也就是 $\alpha(0)=p\in M$

我们都知道常见的 $\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$ 里有很多曲线，很多可微光滑的曲线也都是光滑的。光滑的曲线不免让我们想到切线（速度、切向量）。那问题来了，在任意一个微分流形上怎么定义一个曲线的切线/切向量？

定义 1.1.4. 设 α 是 M 上经过 p 点的一条曲线，$\alpha(0)=p$。如果 U 是 p 的一个开邻域，$\mathcal{D}(U)$ 表示在 U 内且在 p 处光滑的函数的集合，曲线 α 在 $t=0$ 时的切向量是一个映射：$\alpha'(0):\mathcal{D}(U)\to\mathbb{R}$。满足

$$\alpha'(0)(f)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}(f\circ\alpha),f\in\mathcal{D}(U)$$

将 p 处切向量的所有全体集合记为 T_pM

也就是说，我们有 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 这一段实数邻域，经过 α 映射到流形空间 M 里面，但如何使用实数的方式来表达切向量，也就是导数呢？于是我们想到通过函数，把 M 的元素再次作用到实数域里面。

注意：这里面我们把 $\alpha'(0)$ 其实写作了一个泛函算子，而不是我们常见的那种导数了，也就是让其作用在一个函数上，这可以让经曲线映射 α 由实数域 $\mathbb{R}$ 转化到 M 里的元素，再用 f 转化回到实数域，然后自变量是 $(-\varepsilon,\varepsilon)$ 中的 t，而因变量也是实数域，从而可以对 t 进行求导微分。

我们记 $\alpha(0)=p,\alpha'(0)=v$，注意这个 v 其实是一个泛函，我们将 p 处切向量的所有全体集合记为 T_pM。这其实就是

$$T_pM=\bigcup_{\alpha,\alpha(0)=p}\{\alpha'(0)\}$$

因为我们可以定义很多种不同的经过 p 的曲线，这样其实所有经过 p 点的曲线在 p 点的切向量的集合（就是泛函的集合），其实就是我们说的 T_pM。

现在，我们还要问一个问题：之前我们常用多维参数坐标表示一个曲线，那现在我们在这种形式里还能不能这样做？答案是肯定的，只不过我们要选择合适的参数化方式。其实之前说的参数化方式，也可以算一个坐标系。我们假设对于 M，有一个坐标系，也就是参数化映射 x，也就是 $x:U\subseteq\mathbb{R}^n\to M,p=x(0)$。其中

1. $q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)\in U\subseteq\mathbb{R}^n$
2. $f\circ x=f^*(x_1,\cdots,x_n)$
3. $x^{-1}\circ\alpha(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$

对于一个曲线，“时间”维度的表达就是这个 t，而用这种方式我们也可以表达出其“空间”维度，也就是其位置。借助我们引入的参数化映射，我们可以如何表达刚才上面定义的切向量？

证明.

$$\begin{aligned}\alpha'(0)(f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\alpha)\Big|_{t=0}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ x\circ x^{-1}\circ\alpha)|_{t=0}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ x\circ(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)))|_{t=0}\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f^*(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)))|_{t=0}\\ &= \sum_{i=1}^n x_i'(0)\left(\frac{\partial f^*}{\partial x_i}\right)\Big|_{(x_1(0),x_2(0),\ldots,x_n(0))}\\ &\triangleq \sum_{i=1}^n x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 f = \left(\sum_{i=1}^n x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right)(f) \quad \square\end{aligned}$$

也就是说，我们可以通过坐标系的一系列加权求和，得到切向量的一个表达格式。

注意：倒数第二行的里面的 $\frac{\partial f^*}{\partial x_i}$ 是对 f^* 的偏导数，但是最后一行的 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 就不是我们常说的之前意义的偏导数了，而是一个流形上的泛函了。而最后一行里 $x_i'(0)$ 仍是我们常见的导数。 这其实就是 n 个泛函的加权求和。实际上，其定义应是

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0(f) = \frac{\partial(f\circ x)}{\partial x_i}\Big|_{t=0} = \frac{\partial(f^*(x_1(t)),x_2(t),\cdots,x_n(t))}{\partial x_i}\Big|_{t=0}$$

这里面第一个偏导算子是一个泛函，而后面 2 个的偏导算子是我们原来意义的偏导算子。

从上面我们可以看出，对于任意的切向量 $\alpha'(0)=v$ 我们可以使用坐标切向量

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0,\frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_0,\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_0\right\}$$

这一组基表示，坐标系数是

$$(x_1'(0),x_2'(0),\cdots,x_n'(0))$$

从而可以得到，T_pM 是一个 n 维的空间。也就是说，我们通过参数化映射 x（对应开集 U）得到了一组 n 维加权表示。

我们自然又要问：现在两个微分流形空间之间的映射有了，那这两个空间之间的切空间应该如何定义，以及满足什么性质？

定理 1.1.1. 设 M_1,M_2 分别是 n,m 维流形，令映射 $\varphi: M_1\to M_2$ 是一个光滑映射，如果在 M_1 上一点 p 和其切向量 $v\in T_pM_1$，也就是我们选取一个曲线 $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M,\alpha(0)=p,\alpha'(0)=v$。

如果令 $\beta=\varphi\circ\alpha$，考虑两个切空间之间的映射 $\mathrm{d}\varphi_p: T_pM_1\to T_{\varphi(p)}M_2$，则 $\mathrm{d}\varphi_p(v)=\beta'(0)$ 是一个线性映射，且与曲线 α 的选取无关。其中 $\mathrm{d}\varphi_p$ 是 φ 在 p 点处的切映射。

证明. 假设 $p,\varphi(p)$ 各自的参数化 $(X,U),(Y,V)$，则我们对于 $q=(x_1,\cdots,x_n)\in U$ 可以写为

$$Y^{-1}\circ\varphi\circ X(q)=(y_1,\cdots,y_m)$$

这里面 q 是 $(x_1,\cdots,x_n)$，而整个过程我们将其转化为了 $(y_1,\cdots,y_m)$。因此实际上我们可以把

每个 y_i 写为有关 $(x_1\cdots,x_n)$ 的函数。因此

$$Y^{-1}\circ\varphi\circ X(q)=[y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_m(x_1,\cdots,x_n)]$$

注意到原来的曲线 α 我们可以写为

$$X^{-1}\circ\alpha(t)=(x_1(t),\cdots,x_n(t))$$

因此可以得到

$$Y^{-1}\circ\varphi\circ X\circ X^{-1}\circ\alpha=Y^{-1}\circ\varphi\circ\alpha=Y^{-1}\circ\beta$$

而这也等于

$$Y^{-1}\circ\beta(t)=(y_1(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)),\cdots,y_m(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)))$$

我们在自然基底

$$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_0,\left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_0,\cdots,\left.\frac{\partial}{\partial y_m}\right|_0\right\}$$

下，结合 $y_i=y_i(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$，就可得到坐标系数为

$$\beta'(0)=\left.\left(\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t},\cdots,\frac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}t}\right)\right|_{t=0}=\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial y_1}{\partial x_i}x_i'(0),\sum_{i=1}^n\frac{\partial y_2}{\partial x_i}x_i'(0),\cdots,\sum_{i=1}^n\frac{\partial y_m}{\partial x_i}x_i'(0)\right)$$

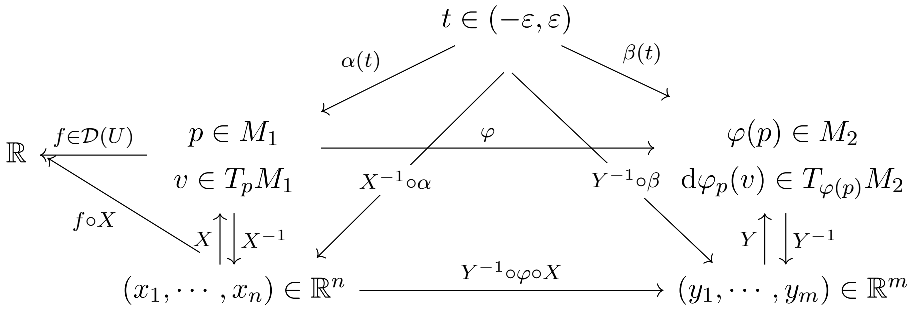
从中看出，这与 α 无关，故得证。也就是

$$\beta'(0)=\sum_{j=1}^m\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial y_j}{\partial x_i}x_i'(0)\right)\left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_0$$ □

我们其实可以写成

$$\begin{bmatrix}y_1'(0)\\ \vdots\\ y_m'(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial y_1}{\partial x_n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1}&\cdots&\frac{\partial y_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'(0)\\ \vdots\\ x_n'(0)\end{bmatrix}$$

其实 $\mathrm{d}\varphi_p$ 我们就不难看出是一个线性变换，其在参数化 (X,U) 和 (Y,V) 下对应的矩阵是 $Y^{-1}\circ\beta(t)$ 的 Jacobi 矩阵。整个过程如下交换图演示所示



也就是

$$(\beta'(0))^T=\mathrm{d}\varphi_p(v)=\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_{m\times n}(x_i'(0))^T$$

实际上，我们可以定义：

定义 1.1.5. 假设 M_1^n, M_2^m 是两个微分流形，$\varphi : M_1 \to M_2$ 是一个映射，对 $\forall p \in M_1, v \in T_pM_1$，假设曲线 $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$，令 $\beta = \varphi \circ \alpha$，则上面的映射

$$\mathrm{d}\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$$

也就是 $\mathrm{d}\varphi_p(v) = \beta'(0)$，这个 $\mathrm{d}\varphi_p$ 表示映射 φ 在点 p 的微分。
此外，如果这个 φ 是可微的双射，且 φ^{-1} 是可微的，则 φ 是一个微分同胚。局部微分同胚就是指的是在 p 的邻域 U 和 $\varphi(p)$ 的邻域 V 这二者之间是一个微分同胚。

实际上，如果 M_1, M_2 维度相等，且 φ 是可微的，令 $p \in M_1, \mathrm{d}\varphi_p$ 是单射，φ 就是一个局部微分同胚了。我们有如下命题：

定理 1.1.2. 如果 $\varphi : M_1 \to M_2$ 是一个微分同胚，则切映射 $\mathrm{d}\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ 是一个同构映射

证明. 同构需要满足双射且线性运算封闭。我们之前证明了，因为从 T_pM_1 到 $T_{\varphi(p)}M_2$ 的映射是一个线性的（因为经过坐标卡用多元函数之间表示，就是 Jacobi 矩阵），故我们只要验证双射即可。因为 φ 是微分同胚，故必然是双射可逆的，也就是 φ^{-1} 存在。因为 $\mathrm{d}\varphi_p \circ \mathrm{d}\varphi_p^{-1} = \mathrm{Id}$，而 $\det(\mathrm{I_d}) = 1$，我们取行列式

$$\det(\mathrm{d}\varphi_p \circ \mathrm{d}\varphi_p^{-1}) = \det(\mathrm{d}\varphi_p)\det(\mathrm{d}\varphi_p^{-1}) = 1$$

说明 $\det(\mathrm{d}\varphi_p)$ 不是 0，故 $\mathrm{d}\varphi_p$ 映射是可逆的。线性性不难证明，因为本质就是一个 Jacobi 矩阵的变换。从而 $\mathrm{d}\varphi_p$ 映射是同构的。 □

反过来，φ 可微，如果 $\mathrm{d}\varphi_p$ 是一个同构的映射，则 φ 在 p 处是一个局部的微分同胚。也就是 φ 在一个 p 周边的邻域 U，以及 $\varphi(U)$ 之间的局部，，是微分同胚的。**需要注意：只能得到局部是微分同胚的！不能是全局上！**这个可以通过反函数定理，对于 $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$，以及坐标卡映射 $X : U \to M_1, Y : V \to M_2$，我们知道 φ, X, Y^{-1} 可微，从而 $Y^{-1} \circ \varphi \circ X$ 可微，取 $w = X^{-1}(p)$ 周边的一个邻域，然后用反函数定理，Jacobi 矩阵可逆（因为同构双射）即可得到。

1.2 浸入与浸没

我们知道，连续等价于开集的原像是开集，但连续推不出把开集映射成开集。

定义 1.2.1. 令 M, N 分别为 m, n 维微分流形，考虑 $\varphi : M \to N$ 是一个可微分映射，且对应切空间之间映射 $\mathrm{d}\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$。如果切映射 $\mathrm{d}\varphi_p$ 是一个单射（满射），则我们称映射 φ 是一个浸入（浸没）。特别的，如果 φ 是一个微分同胚，也就是不仅可微，还是双射，且逆映射可微，则 $M \to N$ 还是一个嵌入。

对于切映射，我们只要考察其 Jacobi 矩阵就行。我们不难得到，Jacobi 矩阵需要保证是列满秩的，才可以有 $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$，也就是零的原像为零，也就是单射（这个就是高代基本结论）；要想让切映射为双射，我们也都知道对于有限维度的线性映射——“多映到少，不是单射；少映到多，不是满射”，当两边维度相等时，则单射等价于满射，等价于双射。

1. 因此，我们要判断一个映射是浸入/嵌入/都不是，只要看到维度不一致，那就不可能是嵌入，因为 φ 在维度不一致的时候，不可能双射，更不可能微分同胚！
2. 如果 $M \to N$ 是一个浸入，必然是"少映到多"，故应该有 $m \leqslant n$，因此所有 $m > n$ 的不可能是浸入，更不可能是嵌入！同理，如果是浸没，应该是"多映到少"，$m \geqslant n$。
3. 无论是浸入/嵌入/浸没，基本要求都是 φ 是可微的，如果遇到不可微的映射，那这几个就统统不是了。
4. 在可微的条件下，我们只要考察 Jacobi 矩阵是否列满秩，就可以判断切映射是不是单射，从而是不是浸入。

我们举一些例子：

- $\alpha(t) = (t, |t|)$ 是一个 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 的二维曲线，因为 $t = 0$ 处显然不可微，故不可能是浸入
- $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ 是一个可微映射，其微分为 $\alpha' = (3t^2, 2t)$，因为当 $t = 0$ 时为 $(0, 0)$，这个 Jacobi 矩阵在 $t = 0$ 这一点不列满秩，故不是浸入
- $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$，得到 $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t)$，$\alpha'(t)$ 在任意 t 都不是 0，从而得到的 $\alpha'(t)$（其实就是 Jacobi 矩阵）是列满秩非退化的，所以切映射是一个单射，故是一个浸入。但因为维度不相等，故 α 不可能是双射，从而不可能是嵌入。

但实际上，如果满足浸入，实际上也可以在一定条件下成为嵌入，我们有如下命题：

定理 1.2.1. *假设 $\varphi : M_1^n \to M_2^m$，$n \leqslant m$，$\varphi$ 是一个浸入，则 $\forall p \in M_1, \exists V \subseteq M_1, p \in V$ 使得 $\varphi|_V \to M_2$ 是一个嵌入。*

证明. 仍然考虑坐标卡，对 $p \in M_1, X_1^{-1}(p) \in U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$，而 X_2 是 $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m \to M_2$ 的映射。因为 φ 是浸入，则得到

$$\tilde{\varphi} = X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

这个也是一个浸入，也就是这个映射的切映射（Jacobi 矩阵）是单射，即 $\tilde{\varphi}$ 的 Jacobi 矩阵列满秩。从而该 Jacobi 矩阵 $J[\tilde{\varphi}]_{m\times n}$ 含有 n 阶非零子式。

下面我们考虑一个映射：$\phi : U_1 \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$，也就是 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$。其形式满足

$$\phi(x_1, \cdots, x_n, t_1, \cdots, t_{m-n}) = \begin{cases} y_i(x_1, \cdots, x_n) & \text{if} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \\ y_i(x_1, \cdots, x_n) + t_{i-n} & \text{if} \quad n+1 \leqslant i \leqslant m \end{cases}$$

也就是说在第 $n+1$ 个位置上是 $y_{n+1}(x_1, \cdots, x_n) + t_1$，$n+k$ 就是 $y_{n+k}(x_1, \cdots, x_n) + t_k$。我们求偏导数有

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \begin{cases} \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j} & 1 \leqslant j \leqslant n \\ 0 & n+1 \leqslant j \leqslant m \end{cases} \qquad \forall 1 \leqslant i \leqslant m$$

因为每个 y_i 只与前面 n 个 x_j 有关。而

$$\frac{\partial y_i}{\partial t_j} = \begin{cases} 0 & 1 \leqslant i \leqslant n \\ \delta_{ij} & n+1 \leqslant i \leqslant m \end{cases} \qquad \forall 1 \leqslant j \leqslant m-n$$

□

因此可得到

$$
\mathrm{d}\phi = \left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\
\hdashline
\frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]
$$

我们不妨假设就是左边一块 Jacobi 矩阵中前面 n 行 n 列就是非零的子式，则可以得到 $\mathrm{d}\phi$ 是可逆矩阵（行列式非 0），从而可以由反函数定理，得到

$$\exists\, W_1 \subseteq U_1 \times \mathbb{R}^{m-n} \to W_2 = \phi(W_1)$$

使得 W_1, W_2 之间是微分同胚。现在取 $\tilde{V} = W_1 \cap U_1$，因为 $\phi\mid_{\tilde{V}} = \tilde{\varphi}\mid_{\tilde{V}}$ 且 X_1, X_2 都是微分同胚，故 $V = X_1(\tilde{V})$ 使得

$$\phi : X_2 \circ \tilde{\varphi} \circ X_1^{-1} : V \to \varphi(V) \subseteq M_2$$

是一个微分同胚，从而在这个限制上是嵌入。

1.3 切丛，正则曲面

假设 M 是 n 维微分流形，则我们定义切丛为

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\} \quad \text{i.d.} \quad TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$$

我们对 TM 赋予一个微分结构使之成为 $2n$ 维微分流形。这里我们定义投影映射

$$\pi : TM \to M, \quad (p, v) \in TM, \pi((p, v)) = p$$

这里我们不难得到 $\forall p \in M, \pi^{-1}(p) = T_pM$。除此之外，还有对偶丛，也就是 $T^*M = \bigcup_{p\in M} T_p^*M$，其中 T_p^*M 是 T_pM 的对偶空间。假设 (U_α, x_α) 是 p 的一个局部坐标卡，现在我们有 T_pM 的一组基

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}\right\}$$

则 T_p^*M 的对偶基 $\{\mathrm{d}x_\alpha^1(p), \cdots, \mathrm{d}x_\alpha^n(p)\}$。满足 $\mathrm{d}x_\alpha^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\mid_p\right) = \delta_{ij}$。这里面 $\mathrm{d}x_\alpha^i(p) : T_pM \to \mathbb{R}$ 是坐标函数 x_α^i 在 p 点处的切映射。

我们有命题：假设 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的坐标，$\forall p \in \mathbb{R}^n$，若 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\}$ 是切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 的一组基，$\{(\mathrm{d}x_1)(p), \cdots, (\mathrm{d}x_n)(p)\}$ 是 $T_p^*(\mathbb{R}^n)$ 的基，则 TM 是一个 $2n$ 维的微分流形。

证明. 首先假设 M 的微分结构是 $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}$，也就是

$$M = \bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha)$$

其中 $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集。下面我们定义 y_α 是 TM 上的坐标卡为

$$y_\alpha(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \cdots, x_\alpha^n, t_1, t_2, \cdots, t_n) = \left(x_\alpha(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \cdots, x_\alpha^n), \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \right)$$

这里面 $x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n$ 都是实数，其是假设有一个点 p，则在坐标卡的逆映射得到的 n 为实数点。也就是对于

$$p \in M, x_\alpha^{-1}(p) = (x_\alpha^1, x_\alpha^2, \cdots, x_\alpha^n)$$

而对于流形里的切空间 T_pM 可以用 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \right\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 来表示，注意这里仍然是一个算子不是原来的偏导数！而因为有这一组基，故需要 n 个系数表达。因此我们就有了如上的定义！而下一步我们要证明在这个坐标卡映射下 TM 是可微的结构。因为

$$M = \bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha), \quad (\mathrm{d}x_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{x_\alpha(q)}M, q \in U_\alpha$$

则

$$TM = \bigcup_\alpha T_{x_\alpha(q)}M = \bigcup_\alpha y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n)$$

现在令 $(p, v) \in y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap y_\beta(U_\beta, \mathbb{R}^n)$，实际上我们定义的 y_α 本质上是相当于 $(x_\alpha, \mathrm{d}x_\alpha)$ 这两个映射。于是我们有

$$y_\beta^{-1} \circ y_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = y_\beta^{-1}(x_\alpha(q_\alpha), \mathrm{d}x_\alpha(v_\alpha)) = ((x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(q_\alpha), (x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(v_\alpha))$$

注意到因为原来 M 就已经是一个微分流形，所以 $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ 是可微的。因此就得到 $y_\beta^{-1} \circ y_\alpha$。因为 $x_\alpha : \mathbb{R}^n \to M$。而结合切映射的定义 $\mathrm{d}\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$，这里 $\mathrm{d}x_\alpha$ 是切空间到另一个切空间的映射。因为 $\mathbb{R}^n$ 的切空间还是 $\mathbb{R}^n$，从而得到 $\mathrm{d}x_\alpha$ 应该是 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的。因为 $\mathbb{R}^n$ 本身也算一个流形，x_α 是从 $\mathbb{R}^n$ 映射到 M 的。而这里而这里实际上用到了 $\mathrm{d}x_\beta^{-1} \circ \mathrm{d}x_\alpha = \mathrm{d}(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)$，是因为 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的切映射对应的表达形式就是 Jacobi 矩阵，是满足线性的。 □

下面我们定义 $\mathbb{R}^n$ 中的正则曲面。

定义 1.3.1. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的子集 M^k，其中 $k \leqslant n$，如果满足 $\forall p \in M^k, \exists p$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的邻域 $V \subseteq \mathbb{R}^n$，以及一个开集 $U \subseteq \mathbb{R}^k$，使得映射 $x : U \to M \cap V$ 是可微的同胚映射，且 $\forall q \in U, (\mathrm{d}x)_q$ 是单射，则该曲面 M^k 是一个正则曲面。

正则曲面的特征就是：无边无尖无自交叉。正则性条件就是：局部微分同胚，且在该局部上切映射是单射！

定理 1.3.1. 如果 $x : U \subseteq \mathbb{R}^k \to M^k$，$y : V \subseteq \mathbb{R}^k \to M^k$，且 $x(U) \cap y(V) = W \neq \emptyset$ 是 M^k 的两个参数化映射，则映射 $h = x^{-1} \circ y : y^{-1}(W) \to x^{-1}(W)$ 是一个微分同胚。

该定理不必会证明，记住即可。**需要注意：可微的同胚不等于微分同胚！**例如 $x(t): t \to t^3$，则 $x^{-1}(t): t \to \sqrt[3]{t}$，虽然可见 $x(t)$ 和 $x^{-1}(t)$ 连续，也即是一个连续同胚，但因为 $x'(t) = 3t^2$ 连续而 $x^{-1\prime}(t) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$ 在 0 处不连续，故不能是微分同胚。微分同胚必须要求正函数和反函数二者都有连续的导函数才行！也就是说，x 是可微的同胚，但 x^{-1} 不一定是微分同胚。

接下来我们说一说正则值、正则点、临界值临界点。其定义如下：

定义 1.3.2. 设 M_1^n, M_2^m 是两个微分流形，若 $\varphi: M_1 \to M_2$ 是一个可微的映射，对于两个流形之间的切空间的映射 $\mathrm{d}\varphi_p: T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$：

1. 如果 $\mathrm{d}\varphi_p$ 映射不是满射，则 p 是映射 φ 的临界点，而 $\varphi(p)$ 是临界值。
2. 在 φ 的值域中，除去临界值的值外都是正则值。
3. 如果 $\mathrm{d}\varphi_p$ 映射是满射，则 p 是正则点，**但注意 $\varphi(p)$ 不一定是正则值！**

也就是说

1. 正则点的像仍然可能是临界值，但临界点的像一定是临界值。
2. 正则值不一定有原像，但是一旦有原像，原像必须全部是正则值。
3. $y \in M_2$ 是正则值，则当且仅当 $\varphi^{-1}(y)$ 或者是空集，或者全部是正则点。
4. 特别的，对于 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$f(x)$ 中 x 是临界点就等价于 $f'(x) = 0$
5. 切空间之间的切映射 $\mathrm{d}\varphi_p$ 是满射，等价于对应到坐标卡下后 Jacobi 矩阵是行满秩的。如果 $n < m$，也就是低维映射到高维，则 Jacobi 矩阵不可能行满秩，从而映射不可能是满射，故一定全部为临界点
6. 临界点集是闭集，正则点集是开集。

直觉上看，临界点就类似于极值点，或者是鞍点；临界值就类似我们说的“导数为 0”。特别的，如果是实数域一元函数，临界点就是极值点，临界值就是 0（极值点导数都是 0），正则点就是非极值点，而正则值都是非 0 值（导数非 0 时不可能为极值点）

而我们都知道，在一元函数里，导数为 0 并不代表该点是极值点，也就是非极值点（正则点）导数仍然可能是 0（临界值），而有时候也会碰到导数值域有限，这时不在导数值域之内的值没有原像，也就类似于“正则值不一定有原像”。这样用一元实数域函数的例子理解，就容易理解了。对于多元类似，如果切映射 Jacobi 矩阵不是行满秩，则切映射不是满射，其实就暗示了在某个非 0 的方向上达到了极值。

我们有正则值原像定理。叙述如下：

定理 1.3.2. 设 $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，$n \geqslant m$，如果 a 是 F 的正则值，则 $F^{-1}(a) \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $n-m$ 维的正则曲面。

证明. 令 $p \in F^{-1}(a)$，也即 p 在 a 的原像集中。$q = (y_1, y_2, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_{n-m}) \in \mathbb{R}^n$，$F(q) = (f_1(q), f_2(q), \cdots, f_m(q))$。因为 a 是正则值，故 $\mathrm{d}F_p = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{m\times n}$ 这个切映射是满射，也即该 Jacobi 矩阵是行满秩的。$n \geqslant m$ 即该 Jacobi 矩阵行少列多，不妨假设其如下 m 阶子式可逆

$$\det\left(\frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}\right) \neq 0$$

令映射 $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，满足

$$\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_m, x_1, x_2, \cdots, x_{n-m}) = (f_1(q), f_2(q), \cdots, f_m(q), x_1, x_2, \cdots, x_{n-m})$$

则不难求出 Jacobi 矩阵

$$\mathrm{d}\varphi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)} & \dfrac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_{n-m})} \\ O_{n-m\times m} & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

注意到左下角为 0 是因为到后面 $x_1, \cdots, x_{n-m}$ 部分和 y 没有关系，偏导为 0。前面我们假设了左上角的 m 阶子式非 0，于是 $\det(\mathrm{d}\varphi) \neq 0$，故由反函数定理，$\exists p$ 的邻域 Q，$\varphi(p)$ 的邻域 W，使得 $\varphi : Q \cap F^{-1}(a) \to W \cap (a \times \mathbb{R}^{n-m})$ 为微分同胚。

令 $K^n \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $\varphi(p)$ 为中心的一个立方体，$V = \varphi^{-1}(K^n) \cap Q$，则 φ 将邻域 V 同胚地映射到 K^n。考虑 $x : K^k \to V$，则 $x(x_1, \cdots, x_{n-m}) = \varphi(a_1, \cdots, a_m, x_1, \cdots, x_{n-m})$，则容易验证 φ 满足正则曲面的条件，也就是可微，且切映射为单射。因此结合 p 的任意性，$F^{-1}(a)$ 是正则曲面。 □

曲面可定向的定义:对于微分流形 M,若任意微分结构 $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ 也就是 $\forall\alpha, \beta$,$x_\alpha(U_\alpha), x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$，$x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ 的微分（Jacobi 矩阵）的行列式是正的，则 M 是可定向连通的。不可定向的曲面经典例子：莫比乌斯带、克莱因瓶....

1.4 向量场

我们前面一直提及流形 M 和切空间 T_pM 这二者，在向量场中我们将要定义这二者之间的关系。假设 $p \in M$,，则我们定义向量场 X 满足 $X(p) \in T_pM$。也就是说，X 从 M 映射到切丛 TM 上。我们考虑一个参数化 x: $U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$，我们可以写为

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

实际上，从 M 到 TM 这个映射是向量场映射，前面提及 TM 到 M 是投影映射 π，也就是 $\pi \circ X = I$。过程相当于

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow[(\mathrm{d}\varphi)_p]{} & T_{\varphi(p)}N \\ {\scriptstyle X}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle Y} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

实际上，结合我们之前的表达方式，这里的偏导数是一个算子泛函。因为切向量可以看成作用在该点上的光滑函数的一个泛函，所以我们可以把向量场看做为 $D(M) \to F$ 的映射。其中 $D(M)$ 是 M 上光滑函数的全体，F 表示连续函数上的全体。

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

如果容易搞混，你可以把上面的 $X(p)$ 改写为 X_p，而这里你写成 $X_p(f)$，就不容易搞混了。

我们不难看出：

1. 向量场 X 是光滑的，当且仅当每个函数 $a_i(p)$ 都是 $x(U)$ 上的光滑函数
2. 向量场 X 是光滑的，当且仅当将 $D(M)$ 映射为 $D(M)$

定理 1.4.1. $\forall p \in M$，X_p 是 p 上的切向量场，$X_p \in T_pM$，则 $\exists \delta > 0$，存在一个光滑曲线 $c:(-\delta,\delta) \to M$，使得 $c(0)=p, c'(0)=X_p$。

定理 1.4.2. 设 $X_p \in T_pM, f \in C^\infty(M), c:(-\delta,\delta)\to M$，且 $c(0)=p, c'(0)=X_p$，则有

$$X_p(f) = \left.\frac{\mathrm{d}(f\circ c)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

从这个角度看，我们把 X 看做一个算子，那如果 X,Y 是两个不同的向量场，f 是一个光滑可微函数，我们考虑 $X(Yf)$ 和 $Y(Xf)$ 二者。但这二者因为都存在超过一阶的导数，故不能当做向量场。不过，我们可以证明：

定理 1.4.3. 设 X,Y 是流形 M 上两个不同的向量场，则存在一个唯一的向量场 Z，$Zf = (XY-YX)f$

证明. 我们只要假设

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad Y = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

而这里

$$XYf = X\left(\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$YXf = Y\left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

因此有

$$Zf = (XY-YX)f = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n \left(a_i\frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

从中不难看出 Z 是唯一的。 □

对于上面的算子 Z，我们还可以记为括号 $[X,Y] = XY - YX$，而对于 $[X,Y]$ 我们有如下性质：

1. $[X,Y] = -[Y,X]$：反交换律
2. $[aX+bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$：线性性。
3. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$：Jacobi 恒等式
4. $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

这里 1 和 2 显然，主要我们看一下 Jacobi 第三条证明：注意到

$$[[X,Y],Z] = [XY-YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

而对应的

$$[[Y,Z],X]=[YZ-ZY,X]=YZX-ZYX-XYZ+XZY$$

$$[[Z,X],Y]=[ZX-XZ,Y]=ZXY-XZY-YZX+YXZ$$

三者相加恰好消掉为 0。实际上，我们还可以理解这个括号的意义，也就是：**Y 沿着 X 轨迹的导数！**

每个微分流形都可以和 $\mathbb{R}^n$ 局部微分同胚，我们在实数域里 ODE 的解的存在唯一性也可以拓展到微分流形的空间里。我们下面介绍一些：

定理 1.4.4. 设 X 是一个在微分流形 M 上的可微向量场，令 $p\in M$，则存在一个 p 的邻域 $U\subseteq M$，一个区间 $(-\delta,\delta)$，$\delta>0$，和一个可微分映射 $\varphi:(-\delta,\delta)\times U\to M$，使得曲线 $t\mapsto\varphi(t,q),t\in(-\delta,\delta)$，是如下初值微分方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi(t,q)}{\partial t} & =X(\varphi(t,q))\\ \varphi(0,q) & =q\end{cases}$$

的唯一解！

一个曲线 $\alpha:(-\delta,\delta)\to M$ 满足 $\alpha'(t)=X(\alpha(t)),\alpha(0)=q$ 是场 X 在 $t-0$ 时刻经过的一个轨迹。对于时间维度 t，空间维度 q，我们还可以记 $\varphi(t,q)=\varphi_t(q)$ 是 X 的一个局部流，也是 X 的局部单参数变换群。这个定理保证了积分曲线和局部单参数变换的唯一性。此外，对于括号算子，我们有如下定理：

定理 1.4.5. 设 M 是微分流形，X,Y 是 M 上的向量场，如果 φ_t 是 X 的一个局部单参数变换群，也就是 X 的一个局部流，则有

$$[X,Y]=\lim_{t\to0}\frac{Y-\mathrm{d}\varphi_t(Y)}{t}$$

为了证明这个定理，我们需要如下引理：

引理 1.4.1. 设映射 $h:(-\delta,\delta)\times U\to\mathbb{R}$ 是一个可微映射，且 $\forall q\in U,h(0,q)=0$，则存在一个可微的映射 $g:(-\delta,\delta)\times U\to R$，满足 $h(t,q)=tg(t,q)$，且特别的

$$g(t,q)=\left.\frac{\partial h(t,q)}{\partial t}\right|_{t=0}$$

这个引理的证明也即

$$g(t,q)=\int_0^1\frac{\partial h(ts,q)}{\partial(ts)}\mathrm{d}s\Rightarrow tg(t,q)=\int_0^t\frac{\partial h(ts,q)}{\partial(ts)}\mathrm{d}(ts)=h(t,q)$$

引理 1.4.2. 设 $\varphi:M_1\to M_2$ 是一个光滑映射，X 是 M 上的一个光滑向量场，任取 $f\in D(M_2)$，则有 $\mathrm{d}\varphi_p(X_p)f=X_p(f\circ\varphi)$。

这个引理的证明：选取一个曲线使得 $\alpha(0)=p, \alpha'=X_p$，结合之前微分的定义

$$\mathrm{d}\varphi_p(X_p)(f)=\mathrm{d}\varphi_p(\alpha'(0))f=\left[\frac{\mathrm{d}(\varphi\circ\alpha)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}\right]f=\frac{\mathrm{d}(f\circ\varphi\circ\alpha)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}=\alpha'(0)(f\circ\varphi)=X_p(f\circ\varphi)$$

基于这两个引理：

证明. 我们设 f 是一个在 p 的邻域可微的函数，令

$$h(t,q)=f\circ\varphi_t(q)-f(q)$$

利用第一个引理我们可以得到

$$f\circ\varphi_t(q)=f(q)+tg(t,q), g(0,q)=Xf(q)$$

对应的

$$((\mathrm{d}\varphi_tY)f)(\varphi_t(p))=(Y(f\circ\varphi_t))(p)=Yf(p)+t(Yg(t,p))$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{Y-\mathrm{d}\varphi_t(Y)}{t}[\varphi_t(p)]&=\lim_{t\to0}\frac{(Yf)(\varphi_t(p))-Y(f\circ\varphi_t)(p)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{(Yf)(\varphi_t(p))-Yf(p)}{t}-(Yg(0,p))\\&=(X(Yf))(p)-(Y(Xf))(p)\\&=((XY-YX)f)(p)=([X,Y]f)(p)\end{aligned}$$

□

实际上，这个还是一个李导数。我们如下定义

定义 1.4.1. 设 X 是流形 M 上的向量场，且存在局部流 φ_t。则向量场 Y 关于向量场 X 在 $p\in M$ 点的李导数 $(L_XY)p$ 为

$$(L_XY)_p=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{d}\varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(p)})-Y_p}{t}$$

因局部流是 X 场的，$\varphi_0(p)=p$，也就是 $t=0$ 的时候。现在你可以假设这个流 $\varphi(t,p)$ 是一个曲线，p 是 $\varphi_0(p)$ 是这个曲线的起始点，则在这一点在 X 场的作用下 X_p 作为切向量，自然也就是流曲线在 p 的“切线”。Y 场在这一点给予的向量是 Y_p。而我们让 p 沿着流走时间 t，到达 $q=\varphi_t(p)$ 了。在这一点 Y 场作用赋予 q 点的向量是 $Y_q=Y_{\varphi(p)}$ 这个切向量我们用 φ_{-t} 的切映射 $\mathrm{d}\varphi_{-t}$ 把位于 t 时刻的切空间拉回到位于 0 时刻的切空间。这个就是 $\mathrm{d}\varphi_{-t}$ 的作用了。
实际上，我们还发现 $\mathrm{d}\varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(p)})$，而你把这里的 t 取成 0 之后会发现，因为 φ_0 是恒等映射，从而就是 Y_p。而恒等映射的切映射也是恒等的，$\mathrm{d}\varphi_{-t}$ 是将切空间 $T_{\varphi_t(p)}M$ 拉回到 T_pM
如果我们不是从单个流形 p 里的点考虑，而是从整个场的平移考虑，那还有形式

$$L_XY=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{d}\varphi_{-t}(Y)-Y}{t}\quad(L_XY)_p=\frac{\mathrm{d}[(\mathrm{d}\varphi_{-t})Y(\varphi_t(p))]}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0}$$

这样看就更好理解了，就是 Y 场沿着 X 场变化轨迹的导数了！而且如果你这里把 Y 改写成

$\mathrm{d}\varphi_t(Y)$，就会发现就是上面 $[X,Y]$ 的等价形式，只不过是正负问题！也就是说，其实我们可以得到

$$[X,Y]=L_XY \quad [X,Y]_p=[X_p,Y_p]=(L_XY)_p$$

这个李括号，实际上构成了一个李代数。

2 黎曼度量

2.1 黎曼度量

在欧氏空间中我们都知道存在内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 这样的度量运算符号。但是任意一个空间，我们该如何定义？

定义 2.1.1. 假设 n 维微分流形 M^n 上有一个黎曼度量 g，为 M 上的点 p 的切空间赋予内积运算 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$。其满足对称性、正定性以及双线性性，且是光滑的。

在前面，我们假设对于 p 点的切空间 T_pM，其存在一组基

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$$

我们可以把内积运算算子记为 g_p，因为切空间是在 p 点取的，也就是 $T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}, g(u,v)=\langle u,v\rangle_p\in\mathbb{R},\forall u,v\in T_pM$。特别的我们记

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle_p$$

则矩阵 $[g_{ij}]_{n\times n}$ 是对称正定的。

既然我们给出了度量的定义，那度量的距离相等，应该如何定义？注意度量是针对切空间上的元素，所以对于切空间映射到另一个切空间，我们需要的就是切映射。于是定义如下：

定义 2.1.2. 设 M,N 是两个微分流形，f 是一个从 M 到 N 的一个微分同胚映射，如果 f 满足

$$\langle u,v\rangle_p=\langle\mathrm{d}f_p(u),\mathrm{d}f_p(v)\rangle_{f(p)},\forall p\in M,\forall u,v\in T_pM$$

则称 f 是 M,N 之间的等距映射。也就是两边的黎曼度量相等。

下面举一个例子：假设 $M=\mathbb{R}^n$，切向量 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 对应 e_i，也即仅第 i 个分量为 1 其余全为 0。则度量 $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$。实际上对于向量场 X，在 q 点取值 X_q，也即

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p=\mathrm{d}X_p(e_i)$$

对于一个浸入，也就是低维映射到高维，$f:M^n\to N^{n+k}$，满足 f 可微且 $\mathrm{d}f_p:T_pM\to T_{f(p)}N$ 单射。若 N 有黎曼度量结构，则 f 诱导 M 上的黎曼结构，定义为

$$\langle u,v\rangle_p=\langle\mathrm{d}f_p(u),\mathrm{d}f_p(v)\rangle_{f(p)}$$

线性性和对称性都是显然的,对于正定性证明也就是:若 $\langle u,u\rangle_p=0$,则 $u-0$,则 $\langle \mathrm{d}f_p(u),\mathrm{d}f_p(u)\rangle=0$,则因为 N 的内积的正定性,$\mathrm{d}f_p(u)=0$,因为 f 是线性映射且为单射,故 0 的原像为 0,$u=0$,于是 $\langle u,u\rangle_p=0$。

而对于一个浸没,也就是高维映射到低维呢?假设 $f:M^{n+k}\to N^n$,如果 $q\in N$ 是 f 的一个正则值,也就是 $\mathrm{d}f_p:T_pM\to T_{f(p)}N$ 对任意 $f^{-1}(q)$ 中的元素都是满射,由前面的正则值原像定理,$f^{-1}(q)\subseteq M$ 是 M 的一个 n 维子流形,也就自然可以诱导出一个黎曼度量。

这里举一个例子:(**去年原题!但是放在最简单位置**)。假设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i^2-1$$

证明. 我们先证明一下 0 是 f 的正则值。不难看出其实只要看 Jacobi 矩阵是不是行满秩,就对应 $\mathrm{d}f$ 是不是满射。我们也注意到

$$\mathrm{d}f=\nabla f=2(x_1,\cdots,x_n)$$

当 $f(x_1,\cdots,x_n)=0$ 的时候满足 $\sum_{i=1}^n x_i^2=1$,这时 x 不可能是 0 向量,于是 Jacobi 矩阵(只有 1 行 n 列)必然算行满秩,故 $\mathrm{d}f$ 是满射,则 0 是正则值。如果严谨写一些

$$\mathrm{d}f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}=\sum_{i=1}^n 2x_i\mathrm{d}x_i,$$

对任意 $y\in T_x\mathbb{R}^n$,我们有 $y=\sum_{i=1}^n y_i\frac{\partial}{\partial x_i}$,则 $(\mathrm{d}f,y)=\left(\sum_{i=1}^n 2x_i\mathrm{d}x_i,\sum_{j=1}^n y_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\sum_{i=1}^n 2x_iy_i$。当 $f=0$ 时满足 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$,也就是约束在一个单位球上。于是,y 也就是切空间里我们要找的原像。这也就是满足

$$\sum_{i=1}^n x_i^2=1,\quad \sum_{i=1}^n 2x_iy_i=0$$

这其实就是在说 y 和 x 正交,故 x 的存在性是显然的!所以说是满射!因为 0 是正则值,所以 $f^{-1}(0)$,其实就是 n 维球面,是 $\mathbb{R}^n$ 的子流形!这样,由 $\mathbb{R}^n$ 诱导出在球面 S 上就有一个度量! □

下面我们再举一个李群的例子

定义 2.1.3. *首先我们定义李群:对于一个群 G,如果 G 有一个微分结构,且使得映射*

$$\Phi:G\times G\to G,\Phi(x,y)=xy^{-1}$$

是光滑的,则 G 是一个李群。也即李群满足既是一个群,又是一个微分流形,且逆映射是光滑映射。设 G 是一个李群,则 $\forall a\in G$,可以定义左平移和右平移,这二者均为 $G\to G$ 的映射,满足

$$L_a(x)=a\cdot x,R_a(x)=x\cdot a$$

这两个都是微分同胚。下面我们定义左不变和右不变。

定义 2.1.4. 设 G 是一个李群，其上面的度量如果满足

$$\langle u,v\rangle_y = \langle \mathrm{d}(L_x)_y(u), \mathrm{d}(L_x)_y(v)\rangle_{L_x(y)}, \forall x,y\in G, \forall u,v\in T_yG$$

则该度量是一个左不变度量。类比的还可以定义右不变度量。实际上，对于向量场 X 也可以定义左不变与右不变：设 X 是 G 上的一个切向量场，若 $\forall a\in G$ 满足

$$\mathrm{d}L_a(X) = X, \forall a\in G, X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

也就是 $\mathrm{d}L_a(X_b) = X_{ab}$，则 X 是李群 G 上的左不变切向量场。实际上假设 e 是 G 中的单位元，则切向量场在 e 处的向量取值 $X_e\in T_eG$，我们有 $X_a = \mathrm{d}L_aX_e$！因为 $\mathrm{d}L_a$ 是切向量空间与切向量空间之间映射。这里面我们注意

$$\mathrm{d}L_aX(f) = X(f\circ L_a)$$

这个暗含的意思是，一个函数被”改变后切向量场”移动得到的新函数，等价于这个函数直接与该映射作用后被”原来切向量场”移动。就是动函数和动向量场的等价性。

如果 X, Y 都是左不变向量场，则 $[X,Y]$ 也是左不变向量场。证明为（**往年期末考过！**）

$$\mathrm{d}L_a[X,Y](f) = [X,Y](f\circ L_a) = XY(f\circ L_a) - YX(f\circ L_a) = X(\mathrm{d}L_aY)f - Y(\mathrm{d}L_aX)f$$

因为 X, Y 都左不变，所以 $X(\mathrm{d}L_aY)f - Y(\mathrm{d}L_aX)f = XYf - YXf = [X,Y](f)$。

Appendix

记号关系

黎曼几何里很多记号不同于我们平常接触的数学分析的一些记号，因而不少同学在学的时候，容易因混乱而难以理解，下面我举一个例子，理清这些记号之间的关系。

做 AIGC 的大家肯定都知道在 Diffusion 之后一个近似的新的范式——Flow Matching 正在成为新的生成模型主流！而我们这里面，你可以假设我们噪声的图片空间是一个流形 M，而猫的图片空间是流形 N，现在我们假设：

- 映射 φ 从 M 到 N，但是是把服从高斯分布的噪声图 $p \in M$ 映射到猫图片分布 $\varphi(p) \in N$。
- 这个 φ 映射有时间维度，假设时间是 $[0,1]$，也就是 $\varphi_0(p) = p$ 仍然是原来的噪声图片，$\varphi_1(p)$ 是去噪后还原得到的图片。噪声图 p 沿着一条路径走，$\varphi_t(p)$ 表示 0 时刻在 p，对应 t 时刻到达了哪里，这是一个与时间有关的路径，又被称作局部流
- T_pM 就表示噪声点 p 处可以的“微小编辑”的方向集合。例如：p 是一个高斯噪声图，T_pM 中的一个 v 操作例如表示“让噪声图中心更强”的编辑操作
- $T_{\varphi(p)}N$ 则表示噪声被还原后猫图片在猫图片空间里可以编辑的方向集合。例如 $w \in T_{\varphi(p)}N$，w 可以表示“让猫的耳朵尖锐”方向的操作
- 切映射是两个切空间之间的关系，如果我们假设 $v \in T_pM, w \in T_{\varphi(p)}N, w = \mathrm{d}\varphi_p(v)$，这个 $\mathrm{d}\varphi_p$ 切映射表示变化噪声方向，投射到猫图片空间后对应猫图片哪里以及什么方向的变化。例如，v 表示把噪声图 p 中心值拉高，映射后得到的 $\mathrm{d}\varphi_p(v)$ 是猫耳朵变尖锐。
- 假设我们有一个函数 f 表示生成猫的质量的分数，从纹理、细节、背景突出等多个方面评估，如背景变化、猫细节变化都会影响。
- 实际上引理 $[\mathrm{d}\varphi(v)(f)](\varphi(p)) = v(f \circ \varphi)(p)$，你把 $\mathrm{d}\varphi(v)$ 这个写成 w 就会发现等价于 $w(f)(\varphi(p)) = v(f \circ \varphi)(p)$。$v$ 表示噪声怎么变化，w 表示猫图片怎么变化，p 是噪声经过 φ 去噪得到猫图片，再由 f 打分出质量的得分，用噪声切向量 v 是以 p 为自变量，反映改变噪声导致的分数变化，等价于用猫图片切向量 w 以去噪后的 $\varphi(p)$ 为自变量，反映出改变图像导致的分数变化。就是说“从噪声空间下手，和从猫图片空间下手”，导致的分数变化趋势一样是等价的。
- 假设两个向量场。向量场 X 是图像去噪的方向，让猫从噪声中显现出；向量场 Y 是让猫的耳朵尖锐的方向，对于噪声图 p，$X(p) = X_p \in T_pM$ 给出了噪声让猫明显出来的变化方向，$Y(p) = Y_p \in T_pM$ 给出了噪声让猫耳朵尖锐的变化方向。噪声图在一个分布里面，X, Y 是针对整个分布的每一个噪声图给出噪声变化方向。
- $\mathrm{d}\varphi_t$ 是 $T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ 的映射，其实也是 $Y \to \mathrm{d}\varphi_t(Y)$ 的映射，就是去噪场驱动 t 后，对于锐化的向量场变到什么样子。
- $[X,Y] = L_XY$ 这个李导数，表示去噪和锐化耳朵这两个操作的依赖性，就是 $XY - YX$，表示顺序颠倒会有多大的影响。其定义 $\lim_{t\to 0} \dfrac{Y - \mathrm{d}\varphi_t(Y)}{t}$，这个 Y 表示原来锐化耳朵的向量场，而 $\mathrm{d}\varphi_t(Y)$ 表示耳朵变化场在去噪场 X 经过 t 驱动后，变成了什么向量场。比如，仍然考虑初始 $t = 0$ 的噪声点 p，去噪中 $t = 0.1$ 时 Y 使对应一个锐化方向 $v_1 = \mathrm{d}\varphi_{0.1}(Y)(p)$，而 $t = 0.5$ 时，Y 则使对应的锐化方向改变为 $v_2 = \mathrm{d}\varphi_{0.5}(Y)(p)$。

- $Y, \mathrm{d}\varphi_t(Y)$ 这两个作用对象都是 $\varphi_t(p)$，就是去噪场驱动 t 后的噪声图位置。而 $f \circ \varphi_t(q) = f(q) + tg(t, q)$，这个类似于一个一阶泰勒展开，噪声图 q 经过去噪场驱动 t 后计算质量得分，等于噪声图 q 初始就计算的质量得分，加上 $tg(t, q)$，这个很类似一阶泰勒展开
- 联络导数 $\nabla_X Y$ 表示去噪 X 和锐化耳朵这两个 Y 二者的协调性。就是说，沿着 X 场去噪的时候，Y 方向要如何同步调整耳朵的锐度。