黎曼几何

S4097 王瑞恒

2025 年 4 月 15 日

目录

1 微分流形

1.1 微分流形光滑结构

微分流形的定义，就是带有微分结构的拓扑流形。一个拓扑空间的定义如下：

定义 1.1.1. *一个集合 M 和其子集族 O (这里面 O 内元素是 M 的所有子集)，如果满足 $\emptyset \in O, M \in O$，且对有限交和任意并封闭，也就是假设 $\forall \Omega_i, \Omega_\lambda \in O$，有*

$$\bigcap_{i=1}^{N} \Omega_i \in O, \quad \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda \in O, \forall \Lambda$$

则称这样的 O 是 M 上的一个拓扑。其中 O 内部的元素成为开集，且称 (M,O) 是一个拓扑空间。注意，无限个开集的交可能变成闭集，如 $(1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n})$。例如 $M = \{a,b\}$ 则 $O = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ 是 M 的一个拓扑，(M,O) 是一个拓扑空间。

上面我们给出了拓扑流形的定义。那什么时候这个流形就带有微分的结构了？也就是其是一个微分流形了？其定义如下：

定义 1.1.2. *n 维微分流形指的是一个集合 M 和一族单映射 $\{\phi_\alpha\} : U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \to M$ 满足*

1. $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \phi_\alpha(U_\alpha) = M$，*其中 U_α 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，且映射 ϕ_α 是同胚的。*
2. $\forall \alpha, \beta \in \Lambda, \phi_\alpha(U_\alpha) \cap \phi_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$，*且集合 $\phi_\alpha^{-1}(W), \phi_\beta^{-1}(W)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，并且映射 $\phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha$ 是可微的。这一条件称为相容性。*
3. *对条件 1 和 2 来说，族 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) || \alpha \in \Lambda\}$ 是极大的。*

则称 M 是 n 维微分流形。且 (U_α, ϕ_α) 对于 $p \in \phi_\alpha(U_\alpha)$ 是 M 在 p 点的一个参数化。

整个关系如下：

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dr, "\phi_\beta^{-1}"] & \\
U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[ur, "\phi_\alpha"] \arrow[rr, "\phi_\beta^{-1}\circ\phi_\alpha"] & & U_\beta \subseteq \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

实际上，我们可以如下理解：大家都知道 Python 的面向对象编程机制。实际上你取的 p 点并不是在 n 维实数空间之内，而是作为一个性质封装到了类空间 M 的一个实例对象 p 里面。这其实就类似于 $p = \mathrm{Point}(1,\ 2,\ 3)$，这个 Point 是一个 class 类名，而当你 print 出 p 的时候，打出的不是 p 的坐标 $(1,2,3)$ 而是一串代号，这个其实就是你在对象空间，而不是坐标空间。参数化的映射 ϕ_α 其实可以看做这个 Point 类中返回该对象 p 的坐标的成员函数。

现在我们举一个例子：

例 1.1.1. *假设实投影空间 $P^2(\mathbb{R})$，其内部的集合是 $\mathbb{R}^3$ 中经过原点的直线的集合。或者整个 $P^2(\mathbb{R})$ 代表的是三维空间内的“方向”。*

下面考虑如下一个可微结构：假设 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$，$P^2(R)$ 是 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ 中通过等价关系

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$$

定义的上空间。我们将记 $P^2(\mathbb{R})$ 中的点为 $[x_1,x_2,x_3]$。现在假设 $x_1\neq 0$ 则

$$[x_1,x_2,x_3]=\left[1,\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1}\right]$$

现在取 $P^n(\mathbb{R})$ 中的子集

$$V_i=\{[x_1,x_2,x_3]:x_i\neq 0\}\quad i=1,2,3$$

也就是说，V_i 表示通过原点且不在 $x_i=0$ 平面之内的直线。我们此外定义映射 $x_i:\mathbb{R}^2\to V_i$ 满足

$$x_1(u,v)=[1,u,v]\quad x_2(u,v)=[u,1,v]\quad x_3(u,v)=[u,v,1]$$

现在假设考虑 $x_2^{-1}\circ x_1$ 这个映射，我们发现 $x_2^{-1}(V_1\cap V_2)$ 里面，

$$x_2^{-1}\circ x_1(u,v)=x_2^{-1}([1,u,v])$$

实际上这里面注意到 $[1,u,v]\in V_1\cap V_2$，所以 $u\neq 0$。另外我们还注意到

$$\{(u,v)\in\mathbb{R}^2:u\neq 0\}$$

这本身是一个开集。因此 $x_2^{-1}(V_1\cap V_2)$ 是开集。且我们又得到

$$x_2^{-1}\circ x_1(u,v)=x_2^{-1}([1,u,v])=x_2^{-1}\left(\left[\frac{1}{u},1,\frac{v}{u}\right]\right)=\left(\frac{1}{u},\frac{v}{u}\right)$$

这个关于 (u,v) 的二元函数，因为已经有 $u\neq 0$，故不难判断得出这个二元函数可微。从而，我们就得到了我们定义的该结构是可微的。

刚才我们举了一个例子，就是一个流形上面得满足什么情况，才有可微结构，也就是属于一个微分流形。那两个不同流形之间的可微映射，我们如何定义？

定义 1.1.3. 如果有 *2* 个微分流形，假设 M_1^n,M_2^m 是 n,m 维的微分流形，假设 $p\in M_1$ 是一个 M_1 中的一个点，映射 $\varphi:M_1\to M_2$ 是两个流形间映射，$U\subseteq\mathbb{R}^n,V\subseteq\mathbb{R}^m$，$X(U),Y(V)$ 是 $p,\varphi(p)$ 的一个参数化，且满足 $\varphi(X(U))\subseteq Y(V)$。如果映射

$$Y^{-1}\circ\varphi\circ X:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$$

在点 $X^{-1}(p)$ 处可微，则称 φ 在 p 处是光滑的。如果 φ 在 M_1 上处处是光滑的则 φ 是一个光滑映射。现在我们记 M 上的所有光滑函数为 $\mathcal{D}(M)$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\varphi"] & M_2 \arrow[d, shift left, "Y^{-1}"] \\
U\subseteq\mathbb{R}^n \arrow[u, "X"] \arrow[r, "Y^{-1}\circ\varphi\circ X"] & V\subseteq\mathbb{R}^m \arrow[u, shift left, "Y"]
\end{tikzcd}$$

其实上面的定义等价于：两个流形之间的映射的光滑可微性，可以通过转换到各自的实数坐标系，然后考察坐标系与坐标系之间映射的可微性。

特别的，如果 M 是一个微分流形，则假设有一个光滑映射 $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq \mathbb{R} \to M$，我们称 α 是 M 上的一个光滑曲线。一般假设我们让曲线在 $t = 0$ 的时候过 $p \in M$，也就是 $\alpha(0) = p \in M$

我们都知道常见的 $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ 里有很多曲线，很多可微光滑的曲线也都是光滑的。光滑的曲线不免让我们想到切线（速度、切向量）。那问题来了，在任意一个微分流形上怎么定义一个曲线的切线/切向量？

定义 1.1.4. 设 α 是 M 上经过 p 点的一条曲线，$\alpha(0) = p$。如果 U 是 p 的一个开邻域，$\mathcal{D}(U)$ 表示在 U 内且在 p 处光滑的函数的集合，曲线 α 在 $t = 0$ 时的切向量是一个映射：$\alpha'(0) : \mathcal{D}(U) \to \mathbb{R}$。满足

$$\alpha'(0)(f) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} (f \circ \alpha), f \in \mathcal{D}(U)$$

将 p 处切向量的所有全体集合记为 T_pM

也就是说，我们有 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 这一段实数邻域，经过 α 映射到流形空间 M 里面，但如何使用实数的方式来表达切向量，也就是导数呢？于是我们想到通过函数，把 M 的元素再次作用到实数域里面。

注意：这里面我们把 $\alpha'(0)$ 其实写作了一个泛函算子，而不是我们常见的那种导数了，也就是让其作用在一个函数上，这可以让经曲线映射 α 由实数域 $\mathbb{R}$ 转化到 M 里的元素，再用 f 转化回到实数域，然后自变量是 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中的 t，而因变量也是实数域，从而可以对 t 进行求导微分。

我们记 $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$，注意这个 v 其实是一个泛函，我们将 p 处切向量的所有全体集合记为 T_pM。这其实就是

$$T_pM = \bigcup_{\alpha, \alpha(0)=p} \{\alpha'(0)\}$$

因为我们可以定义很多种不同的经过 p 的曲线，这样其实所有经过 p 点的曲线在 p 点的切向量的集合（就是泛函的集合），其实就是我们说的 T_pM。

现在，我们还要问一个问题：之前我们常用多维参数坐标表示一个曲线，那现在我们在这种形式里还能不能这样做？答案是肯定的，只不过我们要选择合适的参数化方式。其实之前说的参数化方式，也可以算一个坐标系。我们假设对于 M，有一个坐标系，也就是参数化映射 x，也就是 $x : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M, p = x(0)$。其中

1. $q = (q_1, q_2, \cdots, q_n) \in U \subseteq \mathbb{R}^n$
2. $f \circ x = f^*(x_1, \cdots, x_n)$
3. $x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$

对于一个曲线，“时间”维度的表达就是这个 t，而用这种方式我们也可以表达出其“空间”维度，也就是其位置。借助我们引入的参数化映射，我们可以如何表达刚才上面定义的切向量？

证明.

$$
\begin{aligned}
\alpha'(0)(f) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\alpha)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ x\circ x^{-1}\circ\alpha)|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ x\circ(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)))|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f^*(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)))|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^n x_i'(0)\left(\frac{\partial f^*}{\partial x_i}\right)\Big|_{(x_1(0),x_2(0),\ldots,x_n(0))} \\
&\triangleq \sum_{i=1}^n x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 f = \left(\sum_{i=1}^n x_i'(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right)(f) \quad \square
\end{aligned}
$$

也就是说，我们可以通过坐标系的一系列加权求和，得到切向量的一个表达格式。

注意：倒数第二行的里面的 $\frac{\partial f^*}{\partial x_i}$ 是对 f^* 的偏导数，但是最后一行的 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 就不是我们常说的之前意义的偏导数了，而是一个流形上的泛函了。而最后一行里 $x_i'(0)$ 仍是我们常见的导数。这其实就是 n 个泛函的加权求和。实际上，其定义应是

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0(f) = \frac{\partial(f\circ x)}{\partial x_i}\Big|_{t=0} = \frac{\partial(f^*(x_1(t)),x_2(t),\cdots,x_n(t))}{\partial x_i}\Big|_{t=0}
$$

这里面第一个偏导算子是一个泛函，而后面 2 个的偏导算子是我们原来意义的偏导算子。

从上面我们可以看出，对于任意的切向量 $\alpha'(0)=v$ 我们可以使用坐标切向量

$$
\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_0, \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_0, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_0\right\}
$$

这一组基表示，坐标系数是

$$
(x_1'(0),x_2'(0),\cdots,x_n'(0))
$$

从而可以得到，T_pM 是一个 n 维的空间。也就是说，我们通过参数化映射 x（对应开集 U）得到了一组 n 维加权表示。

我们自然又要问：现在两个微分流形空间之间的映射有了，那这两个空间之间的切空间应该如何定义，以及满足什么性质？

定理 1.1.1. 设 M_1,M_2 分别是 n,m 维流形，令映射 $\varphi: M_1\to M_2$ 是一个光滑映射，如果在 M_1 上一点 p 和其切向量 $v\in T_pM_1$，也就是我们选取一个曲线 $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M, \alpha(0)=p, \alpha'(0)=v$。

如果令 $\beta=\varphi\circ\alpha$，考虑两个切空间之间的映射 $\mathrm{d}\varphi_p: T_pM_1\to T_{\varphi(p)}M_2$，则 $\mathrm{d}\varphi_p(v)=\beta'(0)$ 是一个线性映射，且与曲线 α 的选取无关。其中 $\mathrm{d}\varphi_p$ 是 φ 在 p 点处的切映射。

证明. 假设 $p,\varphi(p)$ 各自的参数化 $(X,U),(Y,V)$，则我们对于 $q=(x_1,\cdots,x_n)\in U$ 可以写为

$$
Y^{-1}\circ\varphi\circ X(q)=(y_1,\cdots,y_m)
$$

这里面 q 是 $(x_1,\cdots,x_n)$，而整个过程我们将其转化为了 $(y_1,\cdots,y_m)$。因此实际上我们可以把

每个 y_i 写为有关 $(x_1 \cdots, x_n)$ 的函数。因此

$$Y^{-1} \circ \varphi \circ X(q) = [y_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, y_m(x_1, \cdots, x_n)]$$

注意到原来的曲线 α 我们可以写为

$$X^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

因此可以得到

$$Y^{-1} \circ \varphi \circ X \circ X^{-1} \circ \alpha = Y^{-1} \circ \varphi \circ \alpha = Y^{-1} \circ \beta$$

而这也等于

$$Y^{-1} \circ \beta(t) = (y_1(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)), \cdots, y_m(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)))$$

我们在自然基底

$$\left\{ \left.\frac{\partial}{\partial y_1}\right|_0, \left.\frac{\partial}{\partial y_2}\right|_0, \cdots, \left.\frac{\partial}{\partial y_m}\right|_0 \right\}$$

下，结合 $y_i = y_i(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$，就可得到坐标系数为

$$\beta'(0) = \left.\left(\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t}, \cdots, \frac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}t} \right)\right|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} x_i'(0), \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} x_i'(0), \cdots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} x_i'(0) \right)$$

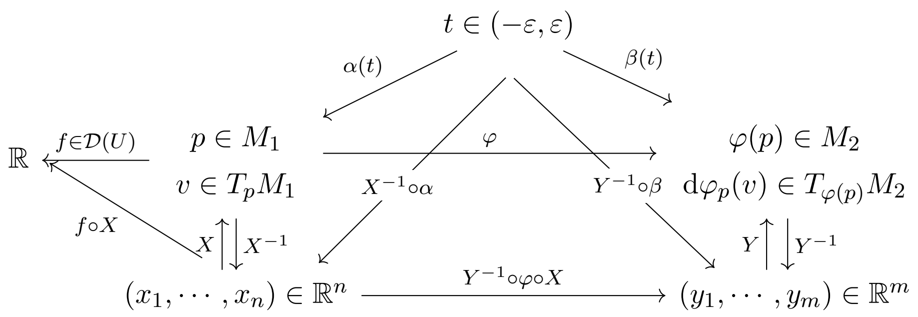
从中看出，这与 α 无关，故得证。也就是

$$\beta'(0) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} x_i'(0) \right) \left.\frac{\partial}{\partial y_j}\right|_0 \qquad \square$$

我们其实可以写成

$$\begin{bmatrix} y_1'(0) \\ \vdots \\ y_m'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'(0) \\ \vdots \\ x_n'(0) \end{bmatrix}$$

其实 $\mathrm{d}\varphi_p$ 我们就不难看出是一个线性变换，其在参数化 (X, U) 和 (Y, V) 下对应的矩阵是 $Y^{-1} \circ \beta(t)$ 的 Jacobi 矩阵。整个过程如下交换图演示所示



也就是

$$(\beta'(0))^T = \mathrm{d}\varphi_p(v) = \left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i} \right)_{m \times n} (x_i'(0))^T$$

实际上，我们可以定义：

定义 1.1.5. 假设 M_1^n, M_2^m 是两个微分流形，$\varphi : M_1 \to M_2$ 是一个映射，对 $\forall p \in M_1, v \in T_pM_1$，假设曲线 $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = v$，令 $\beta = \varphi \circ \alpha$，则上面的映射

$$\mathrm{d}\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$$

也就是 $\mathrm{d}\varphi_p(v) = \beta'(0)$，这个 $\mathrm{d}\varphi_p$ 表示映射 φ 在点 p 的微分。
此外，如果这个 φ 是可微的双射，且 φ^{-1} 是可微的，则 φ 是一个微分同胚。局部微分同胚就是指的是在 p 的邻域 U 和 $\varphi(p)$ 的邻域 V 这二者之间是一个微分同胚。

实际上，如果 M_1, M_2 维度相等，且 φ 是可微的，令 $p \in M_1, \mathrm{d}\varphi_p$ 是单射，φ 就是一个局部微分同胚了。我们有如下命题：

定理 1.1.2. 如果 $\varphi : M_1 \to M_2$ 是一个微分同胚，则切映射 $\mathrm{d}\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ 是一个同构映射

证明. 同构需要满足双射且线性运算封闭。我们之前证明了，因为从 T_pM_1 到 $T_{\varphi(p)}M_2$ 的映射是一个线性的（因为经过坐标卡用多元函数之间表示，就是 Jacobi 矩阵），故我们只要验证双射即可。因为 φ 是微分同胚，故必然是双射可逆的，也就是 φ^{-1} 存在。因为 $\mathrm{d}\varphi_p \circ \mathrm{d}\varphi_p^{-1} = \mathrm{Id}$，而 $\det(\mathrm{I_d}) = 1$，我们取行列式

$$\det(\mathrm{d}\varphi_p \circ \mathrm{d}\varphi_p^{-1}) = \det(\mathrm{d}\varphi_p)\det(\mathrm{d}\varphi_p^{-1}) = 1$$

说明 $\det(\mathrm{d}\varphi_p)$ 不是 0，故 $\mathrm{d}\varphi_p$ 映射是可逆的。线性性不难证明，因为本质就是一个 Jacobi 矩阵的变换。从而 $\mathrm{d}\varphi_p$ 映射是同构的。 □

反过来，φ 可微，如果 $\mathrm{d}\varphi_p$ 是一个同构的映射，则 φ 在 p 处是一个局部的微分同胚。也就是 φ 在一个 p 周边的邻域 U，以及 $\varphi(U)$ 之间的局部，，是微分同胚的。**需要注意：只能得到局部是微分同胚的！不能是全局上！** 这个可以通过反函数定理，对于 $U \subseteq \mathbb{R}^n, V \subseteq \mathbb{R}^m$，以及坐标卡映射 $X : U \to M_1, Y : V \to M_2$，我们知道 φ, X, Y^{-1} 可微，从而 $Y^{-1} \circ \varphi \circ X$ 可微，取 $w = X^{-1}(p)$ 周边的一个邻域，然后用反函数定理，Jacobi 矩阵可逆（因为同构双射）即可得到。

1.2 浸入与浸没

我们知道，连续等价于开集的原像是开集，但连续推不出把开集映射成开集。

定义 1.2.1. 令 M, N 分别为 m, n 维微分流形，考虑 $\varphi : M \to N$ 是一个可微分映射，且对应切空间之间映射 $\mathrm{d}\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$。如果切映射 $\mathrm{d}\varphi_p$ 是一个单射（满射），则我们称映射 φ 是一个浸入（浸没）。特别的，如果 φ 是一个微分同胚，也就是不仅可微，还是双射，且逆映射可微，则 $M \to N$ 还是一个嵌入。

对于切映射，我们只要考察其 Jacobi 矩阵就行。我们不难得到，Jacobi 矩阵需要保证是列满秩的，才可以有 $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$，也就是零的原像为零，也就是单射（这个就是高代基本结论）；要想让切映射为双射，我们也都知道对于有限维度的线性映射——“多映到少，不是单射；少映到多，不是满射”，当两边维度相等时，则单射等价于满射，等价于双射。

1. 因此，我们要判断一个映射是浸入/嵌入/都不是，只要看到维度不一致，那就不可能是嵌入，因为 φ 在维度不一致的时候，不可能双射，更不可能微分同胚！
2. 如果 $M \to N$ 是一个浸入，必然是"少映到多"，故应该有 $m \leqslant n$，因此所有 $m > n$ 的不可能是浸入，更不可能是嵌入！同理，如果是浸没，应该是"多映到少"，$m \geqslant n$。
3. 无论是浸入/嵌入/浸没，基本要求都是 φ 是可微的，如果遇到不可微的映射，那这几个就统统不是了。
4. 在可微的条件下，我们只要考察 Jacobi 矩阵是否列满秩，就可以判断切映射是不是单射，从而是不是浸入。

我们举一些例子：

- $\alpha(t) = (t, |t|)$ 是一个 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 的二维曲线，因为 $t = 0$ 处显然不可微，故不可能是浸入
- $\alpha(t) = (t^3, t^2)$ 是一个可微映射，其微分为 $\alpha' = (3t^2, 2t)$，因为当 $t = 0$ 时为 $(0, 0)$，这个 Jacobi 矩阵在 $t = 0$ 这一点不列满秩，故不是浸入
- $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$，得到 $\alpha'(t) = (3t^2 - 4, 2t)$，$\alpha'(t)$ 在任意 t 都不是 0，从而得到的 $\alpha'(t)$（其实就是 Jacobi 矩阵）是列满秩非退化的，所以切映射是一个单射，故是一个浸入。但因为维度不相等，故 α 不可能是双射，从而不可能是嵌入。

但实际上，如果满足浸入，实际上也可以在一定条件下成为嵌入，我们有如下命题：

定理 1.2.1. 假设 $\varphi : M_1^n \to M_2^m$，$n \leqslant m$，$\varphi$ 是一个浸入，则 $\forall p \in M_1, \exists V \subseteq M_1, p \in V$ 使得 $\varphi\,|_V \to M_2$ 是一个嵌入。

证明. 仍然考虑坐标卡，对 $p \in M_1, X_1^{-1}(p) \in U_1 \subseteq \mathbb{R}^n$，而 X_2 是 $U_2 \subseteq \mathbb{R}^m \to M_2$ 的映射。因为 φ 是浸入，则得到

$$\tilde{\varphi} = X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

这个也是一个浸入，也就是这个映射的切映射（Jacobi 矩阵）是单射，即 $\tilde{\varphi}$ 的 Jacobi 矩阵列满秩。从而该 Jacobi 矩阵 $J[\tilde{\varphi}]_{m\times n}$ 含有 n 阶非零子式。

下面我们考虑一个映射：$\phi : U_1 \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$，也就是 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$。其形式满足

$$\phi(x_1, \cdots, x_n, t_1, \cdots, t_{m-n}) = \begin{cases} y_i(x_1, \cdots, x_n) & \text{if} \quad 1 \leqslant i \leqslant n \\ y_i(x_1, \cdots, x_n) + t_{i-n} & \text{if} \quad n+1 \leqslant i \leqslant m \end{cases}$$

也就是说在第 $n+1$ 个位置上是 $y_{n+1}(x_1, \cdots, x_n) + t_1$，$n+k$ 就是 $y_{n+k}(x_1, \cdots, x_n) + t_k$。我们求偏导数有

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \begin{cases} \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j} & 1 \leqslant j \leqslant n \\ 0 & n+1 \leqslant j \leqslant m \end{cases} \qquad \forall 1 \leqslant i \leqslant m$$

因为每个 y_i 只与前面 n 个 x_j 有关。而

$$\frac{\partial y_i}{\partial t_j} = \begin{cases} 0 & 1 \leqslant i \leqslant n \\ \delta_{ij} & n+1 \leqslant i \leqslant m \end{cases} \qquad \forall 1 \leqslant j \leqslant m-n$$

□

因此可得到

$$\mathrm{d}\phi = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

我们不妨假设就是左边一块 Jacobi 矩阵中前面 n 行 n 列就是非零的子式，则可以得到 $\mathrm{d}\phi$ 是可逆矩阵（行列式非 0），从而可以由反函数定理，得到

$$\exists\ W_1 \subseteq U_1 \times \mathbb{R}^{m-n} \to W_2 = \phi(W_1)$$

使得 W_1, W_2 之间是微分同胚。现在取 $\tilde{V} = W_1 \cap U_1$，因为 $\phi\ |_{\tilde{V}} = \tilde{\varphi}\ |_{\tilde{V}}$ 且 X_1, X_2 都是微分同胚，故 $V = X_1(\tilde{V})$ 使得

$$\phi : X_2 \circ \tilde{\varphi} \circ X_1^{-1} : V \to \varphi(V) \subseteq M_2$$

是一个微分同胚，从而在这个限制上是嵌入。

1.3 切丛，正则曲面

假设 M 是 n 维微分流形，则我们定义切丛为

$$TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\} \quad \text{i.d.} \quad TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$$

我们对 TM 赋予一个微分结构使之成为 $2n$ 维微分流形。这里我们定义投影映射

$$\pi : TM \to M, \quad (p, v) \in TM, \pi((p, v)) = p$$

这里我们不难得到 $\forall p \in M, \pi^{-1}(p) = T_pM$。除此之外，还有对偶丛，也就是 $T^*M = \bigcup\limits_{p \in M} T_p^*M$，其中 T_p^*M 是 T_pM 的对偶空间。假设 (U_α, x_α) 是 p 的一个局部坐标卡，现在我们有 T_pM 的一组基

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n}\right\}$$

则 T_p^*M 的对偶基 $\{\mathrm{d}x_\alpha^1(p), \cdots, \mathrm{d}x_\alpha^n(p)\}$。满足 $\mathrm{d}x_\alpha^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\ |_p\right) = \delta_{ij}$。这里面 $\mathrm{d}x_\alpha^i(p) : T_pM \to \mathbb{R}$ 是坐标函数 x_α^i 在 p 点处的切映射。

我们有命题：假设 $(x_1, \cdots, x_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的坐标，$\forall p \in \mathbb{R}^n$，若 $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_p, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\Big|_p\right\}$ 是切空间 $T_p(\mathbb{R}^n)$ 的一组基，$\{(\mathrm{d}x_1)(p), \cdots, (\mathrm{d}x_n)(p)\}$ 是 $T_p^*(\mathbb{R}^n)$ 的基，则 TM 是一个 $2n$ 维的微分流形。

证明. 首先假设 M 的微分结构是 $\{(x_\alpha, U_\alpha)\}$，也就是

$$M = \bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha)$$

其中 $U_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集。下面我们定义 y_α 是 TM 上的坐标卡为

$$y_\alpha(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \cdots, x_\alpha^n, t_1, t_2, \cdots, t_n) = \left(x_\alpha(x_\alpha^1, x_\alpha^2, \cdots, x_\alpha^n), \sum_{i=1}^n t_i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \right)$$

这里面 $x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n$ 都是实数，其是假设有一个点 p，则在坐标卡的逆映射得到的 n 为实数点。也就是对于

$$p \in M, x_\alpha^{-1}(p) = (x_\alpha^1, x_\alpha^2, \cdots, x_\alpha^n)$$

而对于流形里的切空间 T_pM 可以用 $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^i} \right\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 来表示，注意这里仍然是一个算子不是原来的偏导数！而因为有这一组基，故需要 n 个系数表达。因此我们就有了如上的定义！而下一步我们要证明在这个坐标卡映射下 TM 是可微的结构。因为

$$M = \bigcup_\alpha x_\alpha(U_\alpha), \quad (\mathrm{d}x_\alpha)_q(\mathbb{R}^n) = T_{x_\alpha(q)}M, q \in U_\alpha$$

则

$$TM = \bigcup_\alpha T_{x_\alpha(q)}M = \bigcup_\alpha y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n)$$

现在令 $(p, v) \in y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap y_\beta(U_\beta, \mathbb{R}^n)$，实际上我们定义的 y_α 本质上是相当于 $(x_\alpha, \mathrm{d}x_\alpha)$ 这两个映射。于是我们有

$$y_\beta^{-1} \circ y_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = y_\beta^{-1}(x_\alpha(q_\alpha), \mathrm{d}x_\alpha(v_\alpha)) = ((x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(q_\alpha), (x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)(v_\alpha))$$

注意到因为原来 M 就已经是一个微分流形，所以 $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ 是可微的。因此就得到 $y_\beta^{-1} \circ y_\alpha$。因为 $x_\alpha : \mathbb{R}^n \to M$。而结合切映射的定义 $\mathrm{d}\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$，这里 $\mathrm{d}x_\alpha$ 是切空间到另一个切空间的映射。因为 $\mathbb{R}^n$ 的切空间还是 $\mathbb{R}^n$，从而得到 $\mathrm{d}x_\alpha$ 应该是 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的。因为 $\mathbb{R}^n$ 本身也算一个流形，x_α 是从 $\mathbb{R}^n$ 映射到 M 的。而这里而这里实际上用到了 $\mathrm{d}x_\beta^{-1} \circ \mathrm{d}x_\alpha = \mathrm{d}(x_\beta^{-1} \circ x_\alpha)$，是因为 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的切映射对应的表达形式就是 Jacobi 矩阵，是满足线性的。 □

下面我们定义 $\mathbb{R}^n$ 中的正则曲面。

定义 1.3.1. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的子集 M^k，其中 $k \leqslant n$，如果满足 $\forall p \in M^k, \exists p$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的邻域 $V \subseteq \mathbb{R}^n$，以及一个开集 $U \subseteq \mathbb{R}^k$，使得映射 $x : U \to M \cap V$ 是可微的同胚映射，且 $\forall q \in U, (\mathrm{d}x)_q$ 是单射，则该曲面 M^k 是一个正则曲面。

正则曲面的特征就是：无边无尖无自交叉。正则性条件就是：局部微分同胚，且在该局部上切映射是单射！

定理 1.3.1. 如果 $x : U \subseteq \mathbb{R}^k \to M^k$，$y : V \subseteq \mathbb{R}^k \to M^k$，且 $x(U) \cap y(V) = W \neq \emptyset$ 是 M^k 的两个参数化映射，则映射 $h = x^{-1} \circ y : y^{-1}(W) \to x^{-1}(W)$ 是一个微分同胚。

该定理不必会证明，记住即可。**需要注意：可微的同胚不等于微分同胚！** 例如 $x(t): t \to t^3$，则 $x^{-1}(t): t \to \sqrt[3]{t}$，虽然可见 $x(t)$ 和 $x^{-1}(t)$ 连续，也即是一个连续同胚，但因为 $x'(t) = 3t^2$ 连续而 $x^{-1\prime}(t) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}$ 在 0 处不连续，故不能是微分同胚。微分同胚必须要求正函数和反函数二者都有连续的导函数才行！也就是说，x 是可微的同胚，但 x^{-1} 不一定是微分同胚。

接下来我们说一说正则值、正则点、临界值临界点。其定义如下：

定义 1.3.2. 设 M_1^n, M_2^m 是两个微分流形，若 $\varphi: M_1 \to M_2$ 是一个可微的映射，对于两个流形之间的切空间的映射 $\mathrm{d}\varphi_p: T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$：

1. 如果 $\mathrm{d}\varphi_p$ 映射不是满射，则 p 是映射 φ 的临界点，而 $\varphi(p)$ 是临界值。
2. 在 φ 的值域中，除去临界值的值外都是正则值。
3. 如果 $\mathrm{d}\varphi_p$ 映射是满射，则 p 是正则点，**但注意 $\varphi(p)$ 不一定是正则值！**

也就是说

1. 正则点的像仍然可能是临界值，但临界点的像一定是临界值。
2. 正则值不一定有原像，但是一旦有原像，原像必须全部是正则值。
3. $y \in M_2$ 是正则值，则当且仅当 $\varphi^{-1}(y)$ 或者是空集，或者全部是正则点。
4. 特别的，对于 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，$f(x)$ 中 x 是临界点就等价于 $f'(x) = 0$
5. 切空间之间的切映射 $\mathrm{d}\varphi_p$ 是满射，等价于对应到坐标卡下后 Jacobi 矩阵是行满秩的。如果 $n < m$，也就是低维映射到高维，则 Jacobi 矩阵不可能行满秩，从而映射不可能是满射，故一定全部为临界点
6. 临界点集是闭集，正则点集是开集。

直觉上看，临界点就类似于极值点，或者是鞍点；临界值就类似我们说的“导数为 0”。特别的，如果是实数域一元函数，临界点就是极值点，临界值就是 0（极值点导数都是 0），正则点就是非极值点，而正则值都是非 0 值（导数非 0 时不可能为极值点）

而我们都知道，在一元函数里，导数为 0 并不代表该点是极值点，也就是非极值点（正则点）导数仍然可能是 0（临界值），而有时候也会碰到导数值域有限，这时不在导数值域之内的值没有原像，也就类似于“正则值不一定有原像”。这样用一元实数域函数的例子理解，就容易理解了。对于多元类似，如果切映射 Jacobi 矩阵不是行满秩，则切映射不是满射，其实就暗示了在某个非 0 的方向上达到了极值。

我们有正则值原像定理。叙述如下：

定理 1.3.2. 设 $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，$n \geqslant m$，如果 a 是 F 的正则值，则 $F^{-1}(a) \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $n-m$ 维的正则曲面。

证明. 令 $p \in F^{-1}(a)$，也即 p 在 a 的原像集中。$q = (y_1, y_2, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_{n-m}) \in \mathbb{R}^n$，$F(q) = (f_1(q), f_2(q), \cdots, f_m(q))$。因为 a 是正则值，故 $\mathrm{d}F_p = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{m\times n}$ 这个切映射是满射，也即该 Jacobi 矩阵是行满秩的。$n \geqslant m$ 即该 Jacobi 矩阵行少列多，不妨假设其如下 m 阶子式可逆

$$\det\left(\frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}\right) \neq 0$$

令映射 $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，满足

$$\varphi(y_1, y_2, \cdots, y_m, x_1, x_2, \cdots, x_{n-m}) = (f_1(q), f_2(q), \cdots, f_m(q), x_1, x_2, \cdots, x_{n-m})$$

则不难求出 Jacobi 矩阵

$$\mathrm{d}\varphi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)} & \dfrac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_{n-m})} \\ O_{n-m\times m} & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

注意到左下角为 0 是因为到后面 $x_1, \cdots, x_{n-m}$ 部分和 y 没有关系，偏导为 0。前面我们假设了左上角的 m 阶子式非 0，于是 $\det(\mathrm{d}\varphi) \neq 0$，故由反函数定理，$\exists p$ 的邻域 Q，$\varphi(p)$ 的邻域 W，使得 $\varphi : Q \cap F^{-1}(a) \to W \cap (a \times \mathbb{R}^{n-m})$ 为微分同胚。

令 $K^n \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$ 是 $\varphi(p)$ 为中心的一个立方体，$V = \varphi^{-1}(K^n) \cap Q$，则 φ 将邻域 V 同胚地映射到 K^n。考虑 $x : K^k \to V$，则 $x(x_1, \cdots, x_{n-m}) = \varphi(a_1, \cdots, a_m, x_1, \cdots, x_{n-m})$，则容易验证 φ 满足正则曲面的条件，也就是可微，且切映射为单射。因此结合 p 的任意性，$F^{-1}(a)$ 是正则曲面。 $\square$

曲面可定向的定义:对于微分流形 M,若任意微分结构 $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ 也就是 $\forall \alpha, \beta$,$x_\alpha(U_\alpha), x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$，$x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ 的微分（Jacobi 矩阵）的行列式是正的，则 M 是可定向连通的。不可定向的曲面经典例子：莫比乌斯带、克莱因瓶....

1.4 向量场

我们前面一直提及流形 M 和切空间 T_pM 这二者，在向量场中我们将要定义这二者之间的关系。假设 $p \in M$,，则我们定义向量场 X 满足 $X(p) \in T_pM$。也就是说，X 从 M 映射到切丛 TM 上。我们考虑一个参数化 x: $U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$，我们可以写为

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

实际上，从 M 到 TM 这个映射是向量场映射，前面提及 TM 到 M 是投影映射 π，也就是 $\pi \circ X = I$。过程相当于

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, "(\mathrm{d}\varphi)_p"'] & T_{\varphi(p)}N \\ M \arrow[u, "X"] \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd}$$

实际上，结合我们之前的表达方式，这里的偏导数是一个算子泛函。因为切向量可以看成作用在该点上的光滑函数的一个泛函，所以我们可以把向量场看做为 $D(M) \to F$ 的映射。其中 $D(M)$ 是 M 上光滑函数的全体，F 表示连续函数上的全体。

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

如果容易搞混，你可以把上面的 $X(p)$ 改写为 X_p，而这里你写成 $X_p(f)$，就不容易搞混了。

我们不难看出：

1. 向量场 X 是光滑的，当且仅当每个函数 $a_i(p)$ 都是 $x(U)$ 上的光滑函数
2. 向量场 X 是光滑的，当且仅当将 $D(M)$ 映射为 $D(M)$

定理 1.4.1. $\forall p \in M$, X_p 是 p 上的切向量场，$X_p \in T_pM$，则 $\exists \delta > 0$，存在一个光滑曲线 $c : (-\delta, \delta) \to M$，使得 $c(0) = p, c'(0) = X_p$。

定理 1.4.2. 设 $X_p \in T_pM, f \in C^\infty(M), c : (-\delta, \delta) \to M$，且 $c(0) = p, c'(0) = X_p$，则有

$$X_p(f) = \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ c)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

从这个角度看，我们把 X 看做一个算子，那如果 X, Y 是两个不同的向量场，f 是一个光滑可微函数，我们考虑 $X(Yf)$ 和 $Y(Xf)$ 二者。但这二者因为都存在超过一阶的导数，故不能当做向量场。不过，我们可以证明：

定理 1.4.3. 设 X, Y 是流形 M 上两个不同的向量场，则存在一个唯一的向量场 Z，$Zf = (XY - YX)f$

证明. 我们只要假设

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad Y = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

而这里

$$XYf = X\left(\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$YXf = Y\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

因此有

$$Zf = (XY - YX)f = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

从中不难看出 Z 是唯一的。 □

对于上面的算子 Z，我们还可以记为括号 $[X, Y] = XY - YX$，而对于 $[X, Y]$ 我们有如下性质：

1. $[X, Y] = -[Y, X]$：反交换律
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$：线性性。
3. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$：Jacobi 恒等式
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

这里 1 和 2 显然，主要我们看一下 Jacobi 第三条证明：注意到

$$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

而对应的

$$[[Y,Z],X] = [YZ - ZY, X] = YZX - ZYX - XYZ + XZY$$

$$[[Z,X],Y] = [ZX - XZ, Y] = ZXY - XZY - YZX + YXZ$$

三者相加恰好消掉为 0。实际上，我们还可以理解这个括号的意义，也就是：**Y 沿着 X 轨迹的导数！**

每个微分流形都可以和 $\mathbb{R}^n$ 局部微分同胚，我们在实数域里 ODE 的解的存在唯一性也可以拓展到微分流形的空间里。我们下面介绍一些：

定理 1.4.4. 设 X 是一个在微分流形 M 上的可微向量场，令 $p \in M$，则存在一个 p 的邻域 $U \subseteq M$，一个区间 $(-\delta, \delta)$，$\delta > 0$，和一个可微分映射 $\varphi : (-\delta, \delta) \times U \to M$，使得曲线 $t \mapsto \varphi(t,q), t \in (-\delta, \delta)$，是如下初值微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi(t,q)}{\partial t} & = X(\varphi(t,q)) \\ \varphi(0,q) & = q \end{cases}$$

的唯一解！

一个曲线 $\alpha : (-\delta, \delta) \to M$ 满足 $\alpha'(t) = X(\alpha(t)), \alpha(0) = q$ 是场 X 在 $t - 0$ 时刻经过的一个轨迹。对于时间维度 t，空间维度 q，我们还可以记 $\varphi(t,q) = \varphi_t(q)$ 是 X 的一个局部流，也是 X 的局部单参数变换群。这个定理保证了积分曲线和局部单参数变换的唯一性。此外，对于括号算子，我们有如下定理：

定理 1.4.5. 设 M 是微分流形，X, Y 是 M 上的向量场，如果 φ_t 是 X 的一个局部单参数变换群，也就是 X 的一个局部流，则有

$$[X,Y] = \lim_{t \to 0} \frac{Y - \mathrm{d}\varphi_t(Y)}{t}$$

为了证明这个定理，我们需要如下引理：

引理 1.4.1. 设映射 $h : (-\delta, \delta) \times U \to \mathbb{R}$ 是一个可微映射，且 $\forall q \in U, h(0,q) = 0$，则存在一个可微的映射 $g : (-\delta, \delta) \times U \to R$，满足 $h(t,q) = tg(t,q)$，且特别的

$$g(t,q) = \left.\frac{\partial h(t,q)}{\partial t}\right|_{t=0}$$

这个引理的证明也即

$$g(t,q) = \int_0^1 \frac{\partial h(ts,q)}{\partial (ts)} \mathrm{d}s \Rightarrow tg(t,q) = \int_0^t \frac{\partial h(ts,q)}{\partial (ts)} \mathrm{d}(ts) = h(t,q)$$

引理 1.4.2. 设 $\varphi : M_1 \to M_2$ 是一个光滑映射，X 是 M 上的一个光滑向量场，任取 $f \in D(M_2)$，则有 $\mathrm{d}\varphi_p(X_p)f = X_p(f \circ \varphi)$。

这个引理的证明：选取一个曲线使得 $\alpha(0)=p,\alpha'=X_p$，结合之前微分的定义

$$\mathrm{d}\varphi_p(X_p)(f)=\mathrm{d}\varphi_p(\alpha'(0))f=\left[\left.\frac{\mathrm{d}(\varphi\circ\alpha)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\right]f=\left.\frac{\mathrm{d}(f\circ\varphi\circ\alpha)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\alpha'(0)(f\circ\varphi)=X_p(f\circ\varphi)$$

基于这两个引理：

证明. 我们设 f 是一个在 p 的邻域可微的函数，令

$$h(t,q)=f\circ\varphi_t(q)-f(q)$$

利用第一个引理我们可以得到

$$f\circ\varphi_t(q)=f(q)+tg(t,q),g(0,q)=Xf(q)$$

对应的

$$((\mathrm{d}\varphi_tY)f)(\varphi_t(p))=(Y(f\circ\varphi_t))(p)=Yf(p)+t(Yg(t,p))$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{t\to0}\frac{Y-\mathrm{d}\varphi_t(Y)}{t}[\varphi_t(p)]=&\lim_{t\to0}\frac{(Yf)(\varphi_t(p))-Y(f\circ\varphi_t)(p)}{t}\\=&\lim_{t\to0}\frac{(Yf)(\varphi_t(p))-Yf(p)}{t}-(Yg(0,p))\\=&(X(Yf))(p)-(Y(Xf))(p)\\=&((XY-YX)f)(p)=([X,Y]f)(p)\end{aligned}$$

□

实际上，这个还是一个李导数。我们如下定义

定义 1.4.1. 设 X 是流形 M 上的向量场，且存在局部流 φ_t。则向量场 Y 关于向量场 X 在 $p\in M$ 点的李导数 $(L_XY)p$ 为

$$(L_XY)_p=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{d}\varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(p)})-Y_p}{t}$$

因局部流是 X 场的，$\varphi_0(p)=p$，也就是 $t=0$ 的时候。现在你可以假设这个流 $\varphi(t,p)$ 是一个曲线，p 是 $\varphi_0(p)$ 是这个曲线的起始点，则在这一点在 X 场的作用下 X_p 作为切向量，自然也就是流曲线在 p 的“切线”。Y 场在这一点给予的向量是 Y_p。而我们让 p 沿着流走时间 t，到达 $q=\varphi_t(p)$ 了。在这一点 Y 场作用赋予 q 点的向量是 $Y_q=Y_{\varphi(p)}$ 这个切向量我们用 φ_{-t} 的切映射 $\mathrm{d}\varphi_{-t}$ 把位于 t 时刻的切空间拉回到位于 0 时刻的切空间。这个就是 $\mathrm{d}\varphi_{-t}$ 的作用了。
实际上，我们还发现 $\mathrm{d}\varphi_{-t}(Y_{\varphi_t(p)})$，而你把这里的 t 取成 0 之后会发现，因为 φ_0 是恒等映射，从而就是 Y_p。而恒等映射的切映射也是恒等的，$\mathrm{d}\varphi_{-t}$ 是将切空间 $T_{\varphi_t(p)}M$ 拉回到 T_pM
如果我们不是从单个流形 p 里的点考虑，而是从整个场的平移考虑，那还有形式

$$L_XY=\lim_{t\to0}\frac{\mathrm{d}\varphi_{-t}(Y)-Y}{t}\quad(L_XY)_p=\left.\frac{\mathrm{d}[(\mathrm{d}\varphi_{-t})Y(\varphi_t(p))]}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

这样看就更好理解了，就是 Y 场沿着 X 场变化轨迹的导数了！而且如果你这里把 Y 改写成

$\mathrm{d}\varphi_t(Y)$，就会发现就是上面 $[X,Y]$ 的等价形式，只不过是正负问题！也就是说，其实我们可以得到

$$[X,Y] = L_X Y \quad [X,Y]_p = [X_p, Y_p] = (L_X Y)_p$$

这个李括号，实际上构成了一个李代数。

2 黎曼度量

2.1 黎曼度量

在欧氏空间中我们都知道存在内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 这样的度量运算符号。但是任意一个空间，我们该如何定义？

定义 2.1.1. 假设 n 维微分流形 M^n 上有一个黎曼度量 g，为 M 上的点 p 的切空间赋予内积运算 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$。其满足对称性、正定性以及双线性性，且是光滑的。

在前面，我们假设对于 p 点的切空间 T_pM，其存在一组基

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$$

我们可以把内积运算算子记为 g_p，因为切空间是在 p 点取的，也就是 $T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}, g(u,v)=\langle u,v\rangle_p\in\mathbb{R},\forall u,v\in T_pM$。特别的我们记

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle_p$$

则矩阵 $[g_{ij}]_{n\times n}$ 是对称正定的。

既然我们给出了度量的定义，那度量的距离相等，应该如何定义？注意度量是针对切空间上的元素，所以对于切空间映射到另一个切空间，我们需要的就是切映射。于是定义如下：

定义 2.1.2. 设 M,N 是两个微分流形，f 是一个从 M 到 N 的一个微分同胚映射，如果 f 满足

$$\langle u,v\rangle_p=\langle \mathrm{d}f_p(u),\mathrm{d}f_p(v)\rangle_{f(p)},\forall p\in M,\forall u,v\in T_pM$$

则称 f 是 M,N 之间的等距映射。也就是两边的黎曼度量相等。

下面举一个例子：假设 $M=\mathbb{R}^n$，切向量 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 对应 e_i，也即仅第 i 个分量为 1 其余全为 0。则度量 $\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$。实际上对于向量场 X，在 q 点取值 X_q，也即

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p=\mathrm{d}X_p(e_i)$$

对于一个浸入，也就是低维映射到高维，$f:M^n\to N^{n+k}$，满足 f 可微且 $\mathrm{d}f_p:T_pM\to T_{f(p)}N$ 单射。若 N 有黎曼度量结构，则 f 诱导 M 上的黎曼结构，定义为

$$\langle u,v\rangle_p=\langle \mathrm{d}f_p(u),\mathrm{d}f_p(v)\rangle_{f(p)}$$

线性性和对称性都是显然的,对于正定性证明也就是:若 $\langle u,u\rangle_p=0$,则 $u-0$,则 $\langle \mathrm{d}f_p(u),\mathrm{d}f_p(u)\rangle=0$,则因为 N 的内积的正定性,$\mathrm{d}f_p(u)=0$,因为 f 是线性映射且为单射,故 0 的原像为 0,$u=0$,于是 $\langle u,u\rangle_p=0$。

而对于一个浸没，也就是高维映射到低维呢？假设 $f:M^{n+k}\to N^n$，如果 $q\in N$ 是 f 的一个正则值，也就是 $\mathrm{d}f_p:T_pM\to T_{f(p)}N$ 对任意 $f^{-1}(q)$ 中的元素都是满射，由前面的正则值原像定

理，$f^{-1}(q) \subseteq M$ 是 M 的一个 n 维子流形，也就自然可以诱导出一个黎曼度量。

这里举一个例子：(**去年原题！但是放在最简单位置**)。假设 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 满足

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-1$$

证明. 我们先证明一下 0 是 f 的正则值。不难看出其实只要看 Jacobi 矩阵是不是行满秩，就对应 $\mathrm{d}f$ 是不是满射。我们也注意到

$$\mathrm{d}f=\nabla f=2(x_1,\cdots,x_n)$$

当 $f(x_1,\cdots,x_n)=0$ 的时候满足 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$，这时 x 不可能是 0 向量，于是 Jacobi 矩阵（只有 1 行 n 列）必然算行满秩，故 $\mathrm{d}f$ 是满射，则 0 是正则值。如果严谨写一些

$$\mathrm{d}f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}=\sum_{i=1}^{n}2x_i\mathrm{d}x_i,$$

对任意 $y\in T_x\mathbb{R}^n$，我们有 $y=\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{\partial}{\partial x_i}$，则 $(\mathrm{d}f,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}2x_i\mathrm{d}x_i,\sum_{j=1}^{n}y_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\sum_{i=1}^{n}2x_iy_i$。当 $f=0$ 时满足 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$，也就是约束在一个单位球上。于是，y 也就是切空间里我们要找的原像。这也就是满足

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1,\quad \sum_{i=1}^{n}2x_iy_i=0$$

这其实就是在说 y 和 x 正交，故 x 的存在性是显然的！所以说是满射！因为 0 是正则值，所以 $f^{-1}(0)$，其实就是 n 维球面，是 $\mathbb{R}^n$ 的子流形！这样，由 $\mathbb{R}^n$ 诱导在球面 S 上就有个度量！ □

下面我们再举一个李群的例子

定义 2.1.3. *首先我们定义李群：对于一个群 G，如果 G 有一个微分结构，且使得映射*

$$\Phi:G\times G\to G,\Phi(x,y)=xy^{-1}$$

是光滑的，则 G 是一个李群。也即李群满足既是一个群，又是一个微分流形，且逆映射是光滑映射。设 G 是一个李群，则 $\forall a\in G$，可以定义左平移和右平移，这二者均为 $G\to G$ 的映射，满足

$$L_a(x)=a\cdot x,R_a(x)=x\cdot a$$

这两个都是微分同胚。下面我们定义左不变和右不变。

定义 2.1.4. *设 G 是一个李群，其上面的度量如果满足*

$$\langle u,v\rangle_y=\langle \mathrm{d}(L_x)_y(u),\mathrm{d}(L_x)_y(v)\rangle_{L_x(y)},\forall x,y\in G,\forall u,v\in T_yG$$

则该度量是一个左不变度量。类比的还可以定义右不变度量。实际上，对于向量场 X 也可以定

义左不变与右不变：设 X 是 G 上的一个切向量场，若 $\forall a \in G$ 满足

$$\mathrm{d}L_a(X) = X, \forall a \in G, X = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

也就是 $\mathrm{d}L_a(X_b) = X_{ab}$，则 X 是李群 G 上的左不变切向量场。实际上假设 e 是 G 中的单位元，则切向量场在 e 处的向量取值 $X_e \in T_eG$，我们有 $X_a = \mathrm{d}L_a X_e$！因为 $\mathrm{d}L_a$ 是切向量空间与切向量空间之间映射。这里面我们注意

$$\mathrm{d}L_a X(f) = X(f \circ L_a)$$

这个暗含的意思是，一个函数被"改变后切向量场"移动得到的新函数，等价于这个函数直接与该映射作用后被"原来切向量场"移动。就是动函数和动向量场的等价性。

如果 X, Y 都是左不变向量场，则 $[X, Y]$ 也是左不变向量场。证明为（**往年期末考过！**）

$$\mathrm{d}L_a[X,Y](f) = [X,Y](f \circ L_a) = XY(f \circ L_a) - YX(f \circ L_a) = X(\mathrm{d}L_a Y)f - Y(\mathrm{d}L_a X)f$$

因为 X, Y 都左不变，所以 $X(\mathrm{d}L_a Y)f - Y(\mathrm{d}L_a X)f = XYf - YXf = [X,Y](f)$。
再举一个左不变度量的例子：我们定义 $\langle u, v\rangle_x = \langle \mathrm{d}(L_{x^{-1}})_x(u), \mathrm{d}(L_{x^{-1}})_x(v)\rangle_e$，则这个度量是一个左不变的度量。其证明为：

$$\begin{aligned}
\langle (\mathrm{d}L_x)_y u, (\mathrm{d}L_x)_y v\rangle_{xy} &= \left\langle [\mathrm{d}L_{(xy)^{-1}}(\mathrm{d}L_x)_y]u, [\mathrm{d}L_{(xy)^{-1}}(\mathrm{d}L_x)_y]v \right\rangle \\
&= \left\langle [\mathrm{d}(L_{y^{-1}} \circ L_{x^{-1}})(\mathrm{d}L_x)_y]u, [\mathrm{d}(L_{y^{-1}} \circ L_{x^{-1}})(\mathrm{d}L_x)_y]v \right\rangle \\
&= \left\langle [\mathrm{d}L_{y^{-1}} \circ \mathrm{d}L_{x^{-1}} \circ \mathrm{d}L_x]u, [\mathrm{d}L_{y^{-1}} \circ \mathrm{d}L_{x^{-1}} \circ \mathrm{d}L_x]v \right\rangle \\
&= \left\langle [\mathrm{d}L_{y^{-1}}]u, [\mathrm{d}L_{y^{-1}}]v \right\rangle \\
&= \langle u, v\rangle_y
\end{aligned}$$

这里面第二个等号用到的是群的性质，第三个等号是切映射的链式法则。

注意，我们这里面用到了如下一段结论：考虑 $[X, Y]$ 中的元素，假设 $\mathrm{d}L_x : T_yG \to T_{xy}G$，对应 $u \mapsto v$，则我们在 G 中取曲线 $\alpha(t)$，满足 $\alpha(0) = y, \alpha'(0) = u$，$u(y) = v$，则定义 $\beta(t) = L_x \circ \alpha$，因为 L_x 是微分同胚，则满足 β 是曲线，且 $\beta(0) = L_x t = xy, \beta'(0) = \mathrm{d}L_x \circ \alpha'(0) = v$，从而

$$\mathrm{d}L_x([X,Y])_{xy} f = \beta'(0) f = \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ \beta(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}(f \circ L_x \circ \alpha(t))}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \alpha'(0)(f \circ L_x) = [X,Y]_y(f \circ L_x)$$

其实这样的括号，如果一个 n 维向量满足线性性 $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$，反交换律 $[X, Y] = -[Y, X]$ 以及 Jacobi 恒等式 $[X, [Y, Z]] + [Y, [X, Z]] + [Z, [X, Y]] = 0$，则称为李代数。

实际上，我们应该想到在三维向量的空间里，向量的外积叉积，就是一个李代数。毕竟满足 $a \times b = -b \times a$，且

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$$

如果一个李群 G 有双边不变度量（既满足左不变，也满足右不变），则 G 上的向量场由满足上

面这个条件的度量

$$\langle u,v\rangle_y = \langle \mathrm{d}(L_{x^{-1}})_x(u), \mathrm{d}(L_{x^{-1}})_x(v)\rangle_e$$

的内积满足

$$\langle [U,X],V\rangle + \langle U,[V,X]\rangle = 0$$

证明. 令 x_t 是 X 生成的一个流 Flow，也就是满足 $\dfrac{\mathrm{d}x_t(q)}{\mathrm{d}t} = X(x_t(q))$ 且 $x_0(q) = q$。于是有

$$[Y,X] = -[X,Y] = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}x_t(Y) - Y}{t}$$

先证明：X 左不变时，$L_y \circ x_t = x_t \circ L_y$。实际上，我们可以把 $L_y \circ x_t$ 和 $x_t \circ L_y$ 看做 2 个关于 t 的曲线。前者属于把 q 先经过 X 场平移后经过 Y 场的 L_y 作用平移，后者是二者掉过来。这里结合上面 Flow 解的存在唯一性，只要满足在 $t=0$ 的时候导数相等且过同一个点就行。当 $t=0$ 时

$$\mathrm{LHS} = L_y \circ x_t(p) = L_y \circ x_0(p) = L_y(p) = yp = x_0(L_y(p)) = x_t \circ L_y(p)$$

且在 $t=0$ 时刻的微分导数

$$\left.\frac{\mathrm{d}(L_y\circ x_t)(p)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = (\mathrm{d}L_y)_{x_t(p)}\Big|_{t=0}\left.\frac{\mathrm{d}x_t(p)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = (\mathrm{d}L_y)_p{\cdot}X_p = X_{yp} = \left.\frac{\mathrm{d}x_t(yp)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}(x_t\circ L_y)(p)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

这里面中间 $(\mathrm{d}L_y)_p\cdot X_p = X_{yp}$ 是左不变的定义。由此我们证得 $L_y\circ x_t = x_t\circ L_y$

因此我们得到 $x_t(y) = x_t(L_y(e)) = L_y(x_t(e)) = yx_t(e) = R_{x_t(e)}(y)$，求微分有 $\mathrm{d}x_t = \mathrm{d}R_{x_t(e)}$，于是有

$$[Y,X] = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}x_t(Y) - Y}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}R_{x_t(e)}(Y) - Y}{t}$$

再证明：$\langle U,V\rangle = \left\langle \mathrm{d}R_{x_t(e)}\circ \mathrm{d}L_{x_t(e)^{-1}}U, \mathrm{d}R_{x_t(e)}\circ \mathrm{d}L_{x_t(e)^{-1}}V\right\rangle$，结合度量的右不变性，我们有

$$\begin{aligned}
\langle U,V\rangle &= \left\langle \mathrm{d}R_{x_t(e)}\circ \mathrm{d}L_{x_t(e)^{-1}}U, \mathrm{d}R_{x_t(e)}\circ \mathrm{d}L_{x_t(e)^{-1}}V\right\rangle\\
&= \left\langle \mathrm{d}R_{x_t(e)^{-1}}\circ\mathrm{d}R_{x_t(e)}\circ \mathrm{d}L_{x_t(e)^{-1}}U, \mathrm{d}R_{x_t(e)^{-1}}\circ\mathrm{d}R_{x_t(e)}\circ \mathrm{d}L_{x_t(e)^{-1}}V\right\rangle\\
&= \left\langle \mathrm{d}L_{x_t(e)^{-1}}U, \mathrm{d}L_{x_t(e)^{-1}}V\right\rangle\\
&= \langle U,V\rangle
\end{aligned}$$

这里第二个等号是因 U,V 右不变，第三个等号是把每个的前两个复合为 Identity 恒等映射，最后一个等号利用了左不变。于是得证。又因为 $\mathrm{d}L_{x_t(e)^{-1}}U = U, \mathrm{d}L_{x_t(e)^{-1}}V = V$ ，于是上面的式子还可以写成

$$\langle U,V\rangle = \left\langle \mathrm{d}R_{x_t(e)}U, \mathrm{d}R_{x_t(e)}V\right\rangle$$

最后，对这一个公式两边关于 t 求导，因为左边和 t 没有关系，则

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle U,V\rangle\right| = 0$$

而此时右边

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\left\langle \mathrm{d}R_{x_t(e)}U, \mathrm{d}R_{x_t(e)}V\right\rangle &= \left\langle \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{d}R_{x_t(e)}U, \mathrm{d}R_{x_t(e)}V\right\rangle + \left\langle \mathrm{d}R_{x_t(e)}U, \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\mathrm{d}R_{x_t(e)}V\right\rangle \\
&= \left\langle \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}R_{x_t(e)}U-U}{t}, \mathrm{d}R_{x_0(e)}V\right\rangle + \left\langle \mathrm{d}R_{x_0(e)}U, \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}R_{x_t(e)}V-V}{t}\right\rangle \\
&= \langle [U,X],V\rangle + \langle [U,V],X\rangle = 0
\end{aligned}
$$

其中第二个等号用了上面由第一个 $[Y,X]=\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{d}R_{x_t(e)}(Y)-Y}{t}$，以及里面 $\mathrm{d}R_{x_0(e)}U=\mathrm{d}R_eU=Ue=U$，因为 e 是单位元。于是得证。 □

下面我们举一个双不变性的度量的例子：这个例子也即乘积度量。假设 M_1, M_2 是两个流形，考虑 $M_1\times M_2$ 这个笛卡尔积，令两个自然投影映射

$$\pi_1 : M_1\times M_2 \to M_1, \quad \pi_2 : M_1\times M_2\to M_2$$

我们如下引入黎曼度量：

$$\langle u,v\rangle_{(p,q)} = \langle \mathrm{d}\pi_1\cdot u, \mathrm{d}\pi_1\cdot v\rangle_p + \langle \mathrm{d}\pi_2\cdot u, \mathrm{d}\pi_2\cdot v\rangle_q$$

对于 $\forall (p,q)\in M_1\times M_2, (u,v)\in T_{(p,q)}(M_1\times M_2)$，易证明这个确实是一个黎曼度量。下面我们给出一个定义，来说明可以使用黎曼度量来求一个曲线的长度：

一个可微映射 $c: I\subseteq\mathbb{R}\to M$，$M$ 是微分流形，则 I 是一个曲线。一个沿着曲线 c 的切向量场 V 满足：$\forall t\in I$，切向量 $V(t)\in T_{c(t)}M$。V 可微也就是任意 M 中的光滑函数，$t\mapsto V(t)f$ 是 I 中的一个光滑映射。对于切向量场 $\mathrm{d}c\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)$，一般也记为 $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$，是一个速度场。现在我们将曲线限制到一个闭区间 $[a,b]\subseteq I$ 中，这个是一个分割 segment。如果 M 是一个微分流形，则这一段分割的长度记为

$$l_a^b(c) = \int_a^b \sqrt{\left\langle\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right\rangle}\mathrm{d}t$$

这个是我们熟悉的数分中的曲线弧长的公式。

下面我们证明一下，任意一个 Hausdorff 且存在可数基的微分流形都有一个度量。

证明. 这一个证明其实类似于我们泛函分析学的 Hann-Banach 定理，也就是表述了泛函的足够多性。现在我们设 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个 M 的覆盖，$\{(U_\lambda, x_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个可数的坐标卡。f_λ 是从属于 (U_λ, x_λ) 的一个单位分解，这个是由 Hausdoff 性质得到的。$\forall U_\lambda\in\mathbb{R}^n$，设 g_λ 是 U_λ 上的欧氏度量，则我们令

$$g=\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda g_\lambda$$

对于 $V_\lambda = x_\lambda(U_\lambda)$，存在 f_λ 从属于 V_λ 的单位分解，我们有

$$f_\lambda\geqslant 0, f_\lambda(p)=0, \forall p\notin\overline{V_\lambda}, \qquad \sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(p)=1, \forall p\in M$$

这个里面前面一部分其实就类似于一个函数具有紧支集。对于 M 的一个开覆盖

$$M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

则我们存在 $p \in V_\lambda, u, v \in T_pM, \langle u, v \rangle_p^\lambda = \left\langle (\mathrm{d}x_\lambda^{-1})u, (\mathrm{d}x_\lambda^{-1})v \right\rangle_{\mathbb{R}^n}$。其中 $\mathrm{d}x_\lambda$ 是一个微分同胚，不难证明这个 $\langle u, v \rangle_p^\lambda$ 是 V_λ 上的一个黎曼度量。于是我们定义

$$\langle u, v \rangle_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(p) \langle u, v \rangle_P^\lambda, \forall p \in M, \forall u, v \in T_pM$$

不难证明这个就是存在的黎曼度量。 □

2.2 度量形式

下面我们说一下一个定向流形上的体积的定义。$\forall p \in M$，设 $x : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$ 是坐标卡。如果该曲面的定向和实数坐标系的定向一致，则坐标系称为正的。取 T_pM 的一组标准正交基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$，向量场 $X_i(p) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}(p)$，也就是表示为 $X_i(p) = \sum_{j=1}^n a_{ij}e_i$，也就是我们定义

$$g_{ij}(p) = \langle X_i, X_k \rangle_p = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right\rangle_p = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij}a_{kl} \langle e_j, e_l \rangle_p = \sum_{j=1}^n a_{ij}a_{kj}$$

则由切向量 $X_1(p), \cdots, X_n(p)$ 构成的平行多面体的体积 $\mathrm{V}(X_1(p), \cdots, X_n(p)) = \det(a_{ij}) = \sqrt{\det(g_{ij})}(p)$。若我们取另外一组坐标系，也就是 $y : V \subseteq R^n \to M$，$Y_i(p) = \dfrac{\partial}{\partial y_i}(p), h_{ij} = \langle Y_i, Y_j \rangle (p)$，则

$$\sqrt{\det(g_{ij})}(p) = \mathrm{V}(X_1(p), \cdots, X_n(p)) = \det(J) \cdot \mathrm{V}(Y_1(p), \cdots, Y_n(p)) = \det(J) \cdot \sqrt{\det(h_{ij})}(p)$$

这里 J 表示从坐标系 X 到 Y 之间的 Jacobi 矩阵 $\left[\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right]_{n\times n}$。行列式的值可能正也可能负。当取绝对值时就是体积，而不取绝对值的时候是有向体积。其实也就是

$$\mathrm{V}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \mathrm{V}\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_1}, \cdots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_n}\right)$$

我们有定理，若 $R \subseteq M$，满足 R 是开集，$\bar{R}$ 是紧集，则我们有

$$\mathrm{V}(R) = \int_{x^{-1}(R)} \sqrt{\det(g_{ij})}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_{y^{-1}(R)} \sqrt{\det(h_{ij})}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 \cdots \mathrm{d}y_n$$

这其实是因为

$$\mathrm{d}y_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j$$

从而我们写成矩阵也即

$$\begin{bmatrix} \mathrm{d}y_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{bmatrix}$$

于是就有

$$\mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_n = \det\left(\left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right]_{n\times n}\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

3 联络

Remark: 从本章开始记号变多变复杂，这里我会尽量结合一些例子帮助理解。

对于一个流形 M，前面我们考虑了如下形式的微分（有的虽然在几何中并不叫微分，但本质上放到 n 维我们熟悉的实数空间中，也算一个微分）：

1. 流形一个点 p 中的切向量集合 T_pM，也即切空间，相当于切线/切面。
2. 两个流形之间的映射 $\varphi : M_1 \to M_2$ 对应的切空间之间映射 $\mathrm{d}\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$
3. 点到切空间映射：向量场 X，$X(p)$ 一般也记作 X_p，这个 $X_p \in T_pM$。
4. Lie 括号 $[X, Y] = XY - YX$。是向量场 X, Y 二者的一个关联在一起的场。

Lie 括号 $[X, Y]$ 这个运算结构，其实是一个光滑的微分流形 M 固有的性质。我们在后期引入了如何给一个流形定义一个度量运算（内积）。这个 Lie 括号仅仅依赖于流形的光滑结构。我们的黎曼度量运算，是为了附加一个内积空间结构，以之定义长度和角度。

下面我们介绍的联络 $\nabla_X Y$，是基于度量构造的协变导数，和流形上定义的黎曼度量是相关的。而前面说的 Lie 括号则和流形上定义的黎曼度量无关。例如，我们在 3 维实数空间，其实可以定义两个内积

$$\langle x, y\rangle_A = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \quad \langle x, y\rangle_B = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + x_2y_2 + x_3y_3$$

在这两个内积空间里其实一个向量的长度、两个向量的夹角就很可能不一样！

总之：Lie 括号是流形固有的，度量是额外赋予的，联络则是度量的衍生工具。下面开始！

3.1 仿射联络

我们考虑在实数空间里，X 是 $\mathbb{R}^d$ 上的向量场。我们都知道 X 在 x_0 处沿着方向 v 的方向导数是

$$\lim_{t\to 0} \frac{X(x_0 + tv) - X(x_0)}{t}$$

刚才我们提及向量场本质上相当于一阶微分，而这里对向量场求导，所以其实这个向量场的方向导数，其实类似于二阶微分，就是“加速度”。表示在这一点切向量场的变化率。

但是，如果换成一般的流形，那在不同点的切空间不一样。上面这里因为是实数空间，每个点的切空间都仍然包含在实数空间。换到一般的流形，不同点切空间不同，这个式子就不能成立了。因此我们就需要如下定义：

定义 3.1.1. *假设流形 M 上的所有向量场集合为 $\mathbf{X}(M)$，$D(M)$ 表示 M 上的所有 $M \to \mathbb{R}$ 的函数集合。则我们定义仿射联络 ∇ 算子为*

$$\nabla : \mathbf{X}(M) \times \mathbf{X}(M) \to \mathbf{X}(M), \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

满足如下性质

1. $\nabla_{fX+gY}(Z) = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$
2. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

这个联络算子也给出了一个切向量场 Y 沿着切向量场 X 方向的变化率的描述，也是相当于“二阶微分”。其本质上有点类似于我们常见的导数。不过，注意这里之所以是对场是函数的“加权求和”，是因为

$$fX(p) = f(p)X(p) = f(p)X_p$$

向量场这个空间是抽象的，不在流形的空间里面，不能像我们常见的 $ax+by$ 那种简单的实数加权求和，而是应该依托函数把点映射到实数空间，然后此时向量场把点映射到切空间向量了，再对这个向量，进行加权求和。

最后一个 $X(f)$ 可能有点绕，不过我们都记得 $X = \sum_i x_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$，这个 x_i 其实也是一个函数，也就是 $x_i(p)$ 是一个实数。这里的“偏导”是一个算子泛函，和 f 作用得到也就是 $X(f) = \sum_i x_i(p)\dfrac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p (f) = \sum_i x_i(p)\dfrac{\partial(f\circ x)}{\partial x_i}\bigg|_p$。最后一个“偏导”就是我们实数里的偏导。从这里看，其实这个 $X(f)$，相当于把 f 对着场 X 求了一个“方向导数”。你可以写成

$$\nabla_X(fY) = Y\nabla_X f + f\nabla_X Y$$

当然，这一个定义并不像黎曼结构那样能更加清晰明了，我们下面如下说一个命题：

命题 3.1.1. 令 M 是一个微分流形，其存在一个仿射联络结构 ∇。如果一个可微曲线 $c: I \to M$，其中 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个闭区间，则存在唯一的一个向量场 V 和这个曲线对应。而另一个沿着这个曲线 c 的向量场，我们记为 $\dfrac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}$，则称为 V 沿着 c 的协变导数，满足

1. $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}(V+W) = \dfrac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t}$
2. $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}(fV) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}V + f\dfrac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}$
3. 如果 V 通过向量场 $Y \in \mathbf{X}(M)$ 诱导得到，也即 $V(t) = Y(c(t))$，则有 $\dfrac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t} = \nabla_{c'(t)}Y$

这里面其实我们需要理解一点为什么导数记号上面的 D 变成了大写。我们从第 3 条可以看出，实际上我们让曲线的 t 这个单实数自变量直接映射到了切空间！

正常而言，我们一般先把 t 通过曲线 c 映射到流形上的一点 p，然后再依托向量场 Y 在 p 点的位置，得到切向量。但是这里面我们相当于跳过了中间映射到流形上的过程，而让其直接得到对应的切向量。我们注意到 V 因为在向量场空间，映射到的目标本质上是“一阶微分”，从而这个 $\dfrac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}$ 本质上是“二阶微分”。

最后一部分也就是第 3 条其实暗示了 $\nabla_X Y(p)$ 这个取决于 $X(p)$ 也即 X 向量场在 p 点取的切向量，在 Y 向量场沿着 c 曲线下方向的变化率。上面的 V 我们可以认为是一个一阶微分，也就是“速度场”，于是 $\dfrac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}$ 其实算一个加速度场！我们在 p 点选择一个坐标系 $\{x_1, \cdots, x_n\}$，然后我们记

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i X_i, \quad Y = \sum_{j=1}^{n} y_j X_j$$

其中 $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$，则我们有

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n x_i \nabla_{X_i} \left(\sum_{j=1}^n y_j X_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i X_i(y_j) X_j$$

这是一个二阶微分，我们希望研究这个二阶微分在 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ 这个切空间里的分量。这里面，注意到最后一项里

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i X_i(y_j) X_j = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^n x_i X_i(y_j) \right] X_j = \sum_{j=1}^n X(y_j) X_j$$

我们发现这里面还有第一项中 $\displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \nabla_{X_i} X_j$ 这项的 $\nabla_{X_i} X_j$ 并不知道在 $\{X_i\}$ 这个基下是什么表示。因此假设

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$$

从而可以得到

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right] X_k$$

这里面，$X(y_k)$ 其实是 y_k 这个函数 $y_k(p)$ 沿着 X 场方向的一个导数。$X_i(y_j)$ 其实是 $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}$。实际上这里我们可以把里面 $\nabla_X Y$ 拆开也就是

$$\nabla_X Y = \sum_{i=1}^n x_i \left[\sum_{j=1}^n y_j \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k + \sum_{k=1}^n \nabla_{X_i}(y_k) X_k \right] = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n \left[\nabla_{X_i}(y_k) + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^j y_j \right] X_k$$

也就是

$$\sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n x_i \left(X_i(y_k) + \sum_{j=1}^n \Gamma_{ij}^k y_j \right) \right] X_k$$

假设我们讨论的是 n 维的实数空间的曲线 $(x_1(t), \cdots, x_n(t))$，那这里前面的加权系数 x_i 其实我们很容易理解为 $x_i(t)$，但其实应该是 $x_i'(t)$ 这个一阶微分！实际上，假设对于 n 元实数函数 $f = f(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ 我们有（为了更容易对比出来对应是 X 里哪里，我们把 f 去掉一下

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^n x_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^n x_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

实际上这里的 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 其实就应该类似于我们上面的向量场 X，当你把 f 去掉之后。因此实际上上面的 $X = \displaystyle\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$，如果换到常见的 n 维实数空间里应该是如上面的一个类比，x_i 应该对应沿 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 这个 X_i 轴的变化率，也就是一阶导数。

刚才我们还说到了 $\dfrac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}$ 这个协变导数，而 $V(t)$ 是一个以实数 t 为自变量的向量场函数。如何让我们的联络 ∇ 和这个协变导数建立关系？

命题 3.1.2. 联络和斜边导数可以通过一条曲线建立关系。设 M 为一个流形，∇ 是 M 上一个仿射联络，则存在唯一的对应：可微曲线 $c: I \subseteq \mathbb{R} \to M$ 的向量场 V 和另一个向量场 $\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}$ 满足上面的三个性质。

证明. 假设存在一个对应马那组上面的性质：也就是

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} : V \mapsto \frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}$$

令 M 上的一个坐标卡 $x : U \subseteq \mathbb{R}^n \to M$，使得 $c(I) \cap x(U) = W \neq \emptyset$，令 $x^{-1}(c(t)) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ 是曲线 $c(t)$ 的一个表示。现在令向量场 V 的局部表示

$$V = \sum_{i=1}^{n} v_i X_i, v_i = v_i(t), X_i = X_i(c(t)) = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

这个 $\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}$ 满足前两条也即

$$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}(v_i X_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\mathrm{D}X_i}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} X_i$$

由最后一条性质，沿着 $c(t)$ 曲线的时候，我们有

$$\frac{\mathrm{D}X_i}{\mathrm{d}t} = \nabla_{c'(t)} X_i$$

而注意到

$$c'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} X_i$$

从而结合联络的性质

$$\frac{\mathrm{D}X_j}{\mathrm{d}t} = \nabla_{c'(t)} X_j = \nabla_{\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} X_i} X_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \nabla_{X_i} X_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} X_k$$

于是带回上面我们可以写

$$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t} X_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} v_j \nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{d}v_k}{\mathrm{d}t} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} v_j \Gamma_{ij}^{k}\right] X_k$$

我们猜测这个 $\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}$ 就是我们需要的那个协变导数，下面证明其满足上面三条性质。前两条的线性性和链式法则都易于验证，我们看第三个。假设 $Y = \sum_{j=1}^{n} y_j X_j$，则

$$\nabla_{c'(t)} Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \nabla_{X_i} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j X_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} y_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} X_j\right)$$

如果限制在 $c(t)$ 这个曲线上面，则第一项里 y_j 其实就是 v_j。也就是上面的 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}v_j\nabla_{X_i}X_j$，而另一项里注意到

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=\frac{\partial(y_j\circ x^{-1})}{\partial x_i}\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=\frac{\mathrm{d}y_j(c(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_j}{\mathrm{d}t}$$

也就是 $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}X_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}t}X_i$ 满足第三条性质。下证唯一性。如果还存在算子 $\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{d}t}$ 也满足这些性质，则

$$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{D}'V}{\mathrm{d}t}=\nabla_{c'(t)}Y(c(t))$$

则 $\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{d}t}\right)V=0$ 这个算子对任意的 V 成立，故是一个零算子，从而唯一性得证。 □

下面我们定义平行移动。

定义 3.1.2. 设流形 M 和联络 ∇，曲线 $c:I\to M$。如果满足 $\forall t\in I,\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}=0$，则我们称沿着曲线 c 的向量场 V 是平行的。**(可能考定义!)**

注意这里的平行，对应的就是欧氏空间里向量的平移。我们都知道在欧氏空间里的向量平移后仍然是一个向量，但是在一般的空间流形上就不一定满足了。在一般的流形上做到向量能够平移，那就需要增加协变导数为 0 的条件。关于平行我们有如下唯一性的命题：

命题 3.1.3. 设流形 M 上有联络 ∇，$c:I\to M$，设 V_0 是 $t=t_0$ 时 M 在 $c(t_0)$ 处的切向量，则存在唯一的一个沿着 c 的平行向量场 V 使得 $V(t_0)=V_0$ 。

证明. 这其实就是证明该常微分方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}\equiv 0,\forall t\in I\\ V(t_0)=V_0\end{cases}$$

的解是存在且唯一的。假设 $c(I)$ 包含一个局部坐标邻域，由于 I 是一个闭区间，则由紧性，$\forall t_1\in I$，满足限度那 $c([t_0,t_1])\subseteq M$ 可以被有限个坐标邻域覆盖，由假设，V 在每个坐标的邻域内存在，根据唯一性，两个坐标邻域的交集非空时，向量场就是一致的。从而整个 $[t_0,t_1]$ 对应的那段曲线就存在唯一的一个沿着曲线的向量场。

下面证明这个假设成立即可。我们取 $c(t_0)$ 的一个参数化 (x,U)，而 $c(I)\subseteq x(U)$，$x^{-1}(c(t))=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$。因为 $v_0\in T_{c(t)}M$，则有

$$V_0=\sum_{j=1}^{n}v_0^jX_j\bigg|_{c(t_0)}$$

这里 $v_0^j\in\mathbb{R}$，其实就是 V_0 的坐标是 $(v_0^1,\cdots,v_0^n)$。设沿着曲线的向量场

$$V(t)=\sum_{j=1}^{n}v^j(t)X_j\bigg|_{c(t)}$$

则我们利用原来证得的

$$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\mathrm{d}v_k}{\mathrm{d}t}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}v_j\Gamma_{ij}^{k}\right]X_k\equiv 0$$

得到当且仅当每一个 X_k 的分量

$$\frac{\mathrm{d}v_k}{\mathrm{d}t}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}v_j\Gamma_{ij}^{k}=0\quad 1\leqslant k\leqslant n$$

都是 0。而这其实可以写成关于 $V=(v_1,\cdots,v_n)$ 的如下 ODE 成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}v^1\\v^2\\\vdots\\v^n\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n\Gamma_{i1}^1\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} & \sum_{i=1}^n\Gamma_{i2}^1\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} & \cdots & \sum_{i=1}^n\Gamma_{in}^1\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\\ \sum_{i=1}^n\Gamma_{i1}^2\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} & \sum_{i=1}^n\Gamma_{i2}^2\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} & \cdots & \sum_{i=1}^n\Gamma_{in}^2\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{i=1}^n\Gamma_{i1}^n\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} & \sum_{i=1}^n\Gamma_{i2}^n\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} & \cdots & \sum_{i=1}^n\Gamma_{in}^n\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^1\\v^2\\\vdots\\v^n\end{bmatrix}$$

这就可以看出确实是一个 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=T(t)v$ 的一个线性微分方程的形式，我们结合 ODE 解的存在唯一性，关于 T 本身满足 Lipschitz 连续时解就是存在唯一的，由于在闭区间上故显然。从而唯一性得证。 □

3.2 黎曼联络

如果在有度量内积的流形上引入联络，还需要有什么样的条件？就在这里。

定义 3.2.1. 对于流形 M 和联络导数 ∇，如果该流形上定义了内积度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，且任意光滑曲线 $c(t)$，和沿着 c 的平行向量场 U,V，都满足 $\langle U,V\rangle\equiv C$，也就是恒为常数，则称该联络 ∇ 和度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 相容。

那我们自然会问如何可以推出相容？

命题 3.2.1. 设 M 是黎曼流形，则 ∇ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 相容的充要条件是沿着曲线 c 的任意向量场 V,W 都有

$$\frac{\mathrm{d}\langle V,W\rangle}{\mathrm{d}t}=\left\langle\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t},W\right\rangle+\left\langle V,\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t}\right\rangle$$

（转博考过！）

证明. 充分性：不妨取 V,W 是沿着 c 平行的向量场，则就有

$$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\langle V,W\rangle}{\mathrm{d}t}=0\Rightarrow\langle V,W\rangle\equiv C$$

必要性：选择在 t_0 时流形上的点的切空间 $T_{c(t_0)}M,\forall t_0\in I$ 的一组标准的正交基 $\{e_i(t_0)\}_{i=1}^n$，将切向量 $e_i(t_0)$ 沿着曲线 c 平移到 $T_{c(t)}M$。因为 ∇ 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 相容，则经过平移到 t 之后的 $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$，

也即 $\langle e_i(t), e_j(t)\rangle = \delta_{ij}$，于是我们有

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)e_i(t), W(t) = \sum_{j=1}^{n} w_j(t)e_j(t)$$

这时

$$\frac{\mathrm{d}\langle V, W\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i(t)w_j(t)\langle e_i(t), e_j(t)\rangle\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i(t)w_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i'(t)w_i(t)+v_i(t)w_i'(t)$$

而对应

$$\frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n}\left(v_i(t)\frac{\mathrm{D}e_i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t}e_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t}e_i(t) \xrightarrow{\text{同理}} \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{d}w_j(t)}{\mathrm{d}t}e_j(t)$$

这里用到了 $\dfrac{\mathrm{D}e_i(t)}{\mathrm{d}t} = 0$，因为分解的正交基是平行移动的。从而带入计算内积可得到

$$\left\langle \frac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}, W\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i'(t)w_i(t), \quad \left\langle V, \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t}\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)w_i'(t)$$

于是就得到 $\dfrac{\mathrm{d}\langle V, W\rangle}{\mathrm{d}t} = \left\langle \dfrac{\mathrm{D}V}{\mathrm{d}t}, W\right\rangle + \left\langle V, \dfrac{\mathrm{D}W}{\mathrm{d}t}\right\rangle$ □

该命题对应一个如下推论

命题 3.2.2. *M 是黎曼流形，则联络 ∇ 与度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 相容当且仅当任意的切向量场 X, Y, Z 有*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

（去年考过）

证明. 必要性：$\forall p \in M$，选取曲线 $c : I \to M$ 使得 $c(0) = p, c'(0) = X$，若联络和度量相容，利用上面的结论有

$$\begin{aligned}
X_p\langle Y, Z\rangle =& c'(0)\langle Y, Z\rangle \\
=& \left.\frac{\mathrm{d}(\langle Y, Z\rangle \circ c)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\
=& \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}\langle Y, Z\rangle_{c(t)} \\
=& \left\langle \frac{\mathrm{D}Y}{\mathrm{d}t}, Z\right\rangle_p + \left\langle Y, \frac{\mathrm{D}Z}{\mathrm{d}t}\right\rangle_p \\
=& \left\langle \nabla_{c'(0)}Y, Z\right\rangle_p + \left\langle Y, \nabla_{c'(0)}Z\right\rangle_p \\
=& \langle\nabla_{X_p}Y, Z\rangle_p + \langle Y, \nabla_{X_p}Z\rangle_p
\end{aligned}$$

充分性：如果 Y, Z 是沿着 c 平行的向量场，则

$$\nabla_X Y = \nabla_{c'(t)}Y = \frac{\mathrm{D}Y}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \nabla_X Z = \nabla_{c'(t)}Z = \frac{\mathrm{D}Z}{\mathrm{d}t} = 0$$

于是有

$$X\langle Y,Z\rangle=\langle\nabla_X Y,\nabla_X Z\rangle=0$$

由于 X 的任意性，则 $\langle Y,Z\rangle\equiv C$ 恒为常数，因此相容性得证。 □

实际上，联络、协变导数、平行移动这三者是互相决定的。下面举一个例子：

命题 3.2.3. 设 X,Y 是流形 M 上面的两个可微分向量场，$p\in M$，设 $c:I\to M$ 是 X 中过 p 的积分曲线，也就是满足

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}t} &= X(c(t))\\ c(t_0) &= p\end{cases}$$

则 M 上的黎曼联络导数 $(\nabla_X Y)_p=\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}(P^{-1}_{c,t_0,t})(Y(c(t)))$，这里面映射 $P_{c,t_0,t}$: $T_{c(t_0)}M\to T_{c(t)}M$ 是一个平行移动。

证明. 设 $\{e_i(t_0)\}_{i=1}^n$ 是 $T_{c(t_0)}M$ 的一个标准正交基，$e_i(t)=P_{c,t_0,t}P(e_i(t_0))$，则 $\nabla_{c'(t)}e_i(t)=0$，于是 $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ 是 $T_{c(t)}M$ 中的一个标准正交基。设 $Y(t)=\sum\limits_{i=1}^n y_i(t)e_i(t)$，则

$$(\nabla_X Y)_p=\nabla_{c'(t_0)}Y=\left.\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}\left[\sum_{i=1}^n y_i(t)e_i(t)\right]=\sum_{i=1}^n y_i(t)\left.\frac{\mathrm{D}e_i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}+\sum_{i=1}^n\left.\frac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}e_i(t_0)$$

第一项因为 $\nabla_{c'(t)}e_i(t)=0$ 故为 0，从而只有第二项。也就是后一项可以写为

$$\sum_{i=1}^n\left.\frac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}e_i(t_0)=\sum_{i=1}^n\left.\frac{\mathrm{d}y_i(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}(P_{c,t_0,t})^{-1}e_i(t)=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}(P_{c,t_0,t})^{-1}Y(c(t))$$

这里因为由定义，$e_i(t)=P_{c,t_0,t}[e_i(t_0)]$，从而 $e_i(t_0)=(P_{c,t_0,t})^{-1}[e_i(t)]$，于是得证。 □

下面我们定义联络的对称（无挠）

定义 3.2.2. 如果满足 $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]=XY-YX$，则 ∇ 是对称的，或者无挠的。特别的 ∇ 的挠张量 $\tau(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$

结合挠张量的定义和 Lie 括号的定义，我们不难看出挠张量有反交换律。实际上，对于坐标卡 (U,x)，则 ∇ 对称时，注意到 $[X_i,X_j]=0$，则有

$$\nabla_{X_i}X_j-\nabla_{X_j}X_i-[X_i,X_j]=\sum_{i=1}^k(\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji})X_k=0$$

于是，联络 ∇ 是无挠的当且仅当 $\Gamma^k_{ij}=\Gamma^k_{ji}$。当一个仿射联络无挠，且和度量相适应，则我们称该联络为 Levi-Civita 联络。因为

$$[X_i,X_j]=X_iX_j-X_jX_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}=0$$

特别的，n 维欧氏空间里 $\Gamma^k_{ij}\equiv 0$。下面是一个黎曼几何非常重要的基本定理

定理 3.2.1. *任意一个黎曼流形上都存在唯一的 Levi-Civita 联络。也即任意黎曼流形上存在唯一联络满足*（**重点考过**）

1. *该联络 ∇ 对称（无挠）*
2. *该联络和度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 相适应。*

证明. 先证明假设存在 ∇，则这个 ∇ 是唯一的。我们结合刚才推论有

$$
\begin{aligned}
X\langle Y,Z\rangle &= \langle\nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle\\
Y\langle Z,X\rangle &= \langle\nabla_Y Z,X\rangle + \langle Z,\nabla_Y X\rangle\\
Z\langle X,Y\rangle &= \langle\nabla_Z X,Y\rangle + \langle X,\nabla_Z Y\rangle
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle\\
=&\langle Y,\nabla_X Z\rangle - \langle\nabla_Z X,Y\rangle + \langle\nabla_Y Z,X\rangle - \langle X,\nabla_Z Y\rangle + \langle\nabla_X Y,Z\rangle + \langle Z,\nabla_Y X\rangle\\
=&\langle Y,\nabla_X Z-\nabla_Z X\rangle + \langle X,\nabla_Y Z-\nabla_Z Y\rangle + \langle Z,\nabla_X Y-\nabla_Y X\rangle + 2\langle Z,\nabla_Y X\rangle\\
=&\langle [X,Z],Y\rangle + \langle [Y,Z],X\rangle + \langle [X,Y],Z\rangle + 2\langle Z,\nabla_Y X\rangle
\end{aligned}
$$

最后一个等号用到了 ∇ 的无挠性。于是我们可以从中解得

$$
\langle Z,\nabla_Y X\rangle = \frac{1}{2}\left(X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [X,Z],Y\rangle - \langle [Y,Z],X\rangle - \langle [X,Y],Z\rangle\right)
$$

如果同时两个 ∇,∇' 满足这个性质，也就说明 $\langle Z,\nabla_Y X\rangle = \langle Z,\nabla'_Y X\rangle$，于是 $\langle Z,\nabla_Y X-\nabla'_Y X\rangle = 0$。因为 X,Y,Z 都有任意性，故不妨令 $Z=\nabla_Y X-\nabla'_Y X$，于是说明 $\nabla=\nabla'$，唯一性得证。下面我们来证明该度量的存在性。这里就给出了 Christoffel 记号 Γ_{ij}^k 的一个表达式。原内容里只给出了最后结果，这里我们把中间过程写出来。因为我们有

$$
\nabla_{X_i}X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k
$$

注意写到当前这里 Γ_{ij}^k 仍然是我们基于假设而还未知的，下面给出求得的过程。我们令矩阵

$$
G = (g_{ij})_{n\times n} = (\langle X_i,X_j\rangle)_{n\times n} = \begin{bmatrix}
\langle X_1,X_1\rangle & \langle X_1,X_2\rangle & \cdots & \langle X_1,X_n\rangle\\
\langle X_2,X_1\rangle & \langle X_2,X_2\rangle & \cdots & \langle X_2,X_n\rangle\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\langle X_n,X_1\rangle & \langle X_n,X_2\rangle & \cdots & \langle X_n,X_n\rangle
\end{bmatrix}
$$

是一个对称正定矩阵。现在我们把 $\nabla_{X_i}X_j$ 分别于 $X_1,\cdots,X_n$ 做内积，于是得到

$$
\langle\nabla_{X_i}X_j,X_l\rangle = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k\langle X_k,X_l\rangle = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k g_{kl} \quad 1\leqslant l\leqslant n
$$

展开写也就是

$$\begin{bmatrix} \langle X_1, X_1\rangle & \langle X_1, X_2\rangle & \cdots & \langle X_1, X_n\rangle \\ \langle X_2, X_1\rangle & \langle X_2, X_2\rangle & \cdots & \langle X_2, X_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle X_n, X_1\rangle & \langle X_n, X_2\rangle & \cdots & \langle X_n, X_n\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \\ \vdots \\ \Gamma_{ij}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \nabla_{X_i} X_j, X_1\rangle \\ \langle \nabla_{X_i} X_j, X_2\rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla_{X_i} X_j, X_n\rangle \end{bmatrix}$$

则两边乘以矩阵 G 的逆矩阵，就可以解得线性方程组

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{ij}^1 \\ \Gamma_{ij}^2 \\ \vdots \\ \Gamma_{ij}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle X_1, X_1\rangle & \langle X_1, X_2\rangle & \cdots & \langle X_1, X_n\rangle \\ \langle X_2, X_1\rangle & \langle X_2, X_2\rangle & \cdots & \langle X_2, X_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle X_n, X_1\rangle & \langle X_n, X_2\rangle & \cdots & \langle X_n, X_n\rangle \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \langle \nabla_{X_i} X_j, X_1\rangle \\ \langle \nabla_{X_i} X_j, X_2\rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla_{X_i} X_j, X_n\rangle \end{bmatrix}$$

我们令矩阵 G 的逆 G^{-1} 的元素都是 $G^{-1} = (g^{ij})_{n\times n}$。而结合李括号的定义，我们有 $[X_i, X_j] = [X_j, X_k] = [X_k, X_i] = 0$，而又有 $X_i \langle X_j, X_k\rangle = \dfrac{\partial \langle X_j, X_k\rangle}{\partial x_i} = \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}$，于是我们结合上面 $\langle Z, \nabla_Y X\rangle$ 的表达式，括号里 6 项中，因为 Lie 括号 $[X_i, X_j] = 0$ ，故后面 3 项都是 0，故可以写为

$$\langle X_l, \nabla_{X_i} X_j\rangle = \langle \nabla_{X_i} X_j, X_l\rangle = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k g_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right)$$

带入到 G 的逆矩阵我们就求得 Christoffel 记号的表达式为

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^{n} g^{kl} \langle \nabla_{X_i} X_j, X_l\rangle = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right] g^{kl}$$

我们把 $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 写出，也就是

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2}\left[X_i(g_{jl}) + X_j(g_{li}) - X_l(g_{ij})\right] g^{kl}$$

于是该存在性得证。 □

实际上，推到导出 Christoffell 记号的过程我们还可以结合一个联络的对称无挠性和相容性对应的等价条件。当联络对称时，利用 X_i, X_j 本身李括号为 0，可得到

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) X_k = 0$$

可推出 $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$。当联络与度量相容时，结合 $\nabla_{X_i} X_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k$，并利用内积的双线性性又有

$$X_i \langle X_j, X_k\rangle = \langle \nabla_{X_i} X_j, X_k\rangle + \langle X_j, \nabla_{X_i} X_k\rangle = \sum_{l=1}^{n} (\Gamma_{ij}^l \langle X_l, X_k\rangle + \Gamma_{ik}^l \langle X_l, X_j\rangle)$$

我们写 $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$，并且对应 $X_i \langle X_j, X_k \rangle = \dfrac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}$，则上面的式子等价于

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{n} [\Gamma_{ij}^{l} g_{lk} + \Gamma_{ik}^{l} g_{lj}]$$

这个是相容性的等价命题。注意到这里面 G 是对称矩阵，也就是 $g_{ij} = g_{ji}$。于是我们将上下角标轮换，然后发现（这一块其实说到底还是靠“拼凑技巧”发现）

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{n} \left[\Gamma_{ij}^{l} g_{lk} + \Gamma_{ik}^{l} g_{lj} + \Gamma_{jk}^{l} g_{li} + \Gamma_{ji}^{l} g_{lk} - \Gamma_{ki}^{l} g_{lj} - \Gamma_{kj}^{l} g_{li} \right] = 2 \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} g_{lk}$$

这里面中间 6 项中，结合 $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$，我们发现第二项和倒数第二项抵消，第三项和最后一项抵消，第一项和第四项相等，从而用这种方法就同样得到

$$\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} g_{lk} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right]$$

进而同样写成矩阵形式，两边乘以矩阵 G 的逆，也同样可以得到上面的结果。实际上，我们这里的 Γ_{ij}^{k} 是第一类 Christoffell 记号，还有第二类 Christoffell 记号其实就是

$$\Gamma_{ij,k} = \langle \nabla_{X_i} X_j, X_k \rangle \Rightarrow \Gamma_{ij}^{k} = \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij,l}\, g^{lk}, \quad \Gamma_{ij,k} = \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{l} g_{lk}$$

4 测地线

我们都知道在欧氏空间里两点之间直连的线段最短，但是到了非欧氏空间，那就不一定了。为了能够在任意空间中定义两个点之间“最短路径”，我们定义测地线。实际上测地线的一个几何意义就是“最短路径”，如球面的测地线是大圆，还有一个物理意义就是测地线上的点，不会受到该空间中的切向力（或者切向方向合力为 0），只有约束在空间中的法向力，例如球面大圆上做匀速圆周运动的点，其合力就是朝着球心的法向力。

Appendix

记号关系

黎曼几何里很多记号不同于我们平常接触的数学分析的一些记号，因而不少同学在学的时候，容易因混乱而难以理解，下面我举一个例子，理清这些记号之间的关系。

做 AIGC 的大家肯定都知道在 Diffusion 之后一个近似的新的范式——Flow Matching 正在成为新的生成模型主流！而我们这里面，你可以假设我们噪声的图片空间是一个流形 M，而猫的图片空间是流形 N，现在我们假设：

- 映射 φ 从 M 到 N，但是是把服从高斯分布的噪声图 $p \in M$ 映射到猫图片分布 $\varphi(p) \in N$。
- 这个 φ 映射有时间维度，假设时间是 $[0,1]$，也就是 $\varphi_0(p) = p$ 仍然是原来的噪声图片，$\varphi_1(p)$ 是去噪后还原得到的图片。噪声图 p 沿着一条路径走，$\varphi_t(p)$ 表示 0 时刻在 p，对应 t 时刻到达了哪里，这是一个与时间有关的路径，又被称作局部流
- T_pM 就表示噪声点 p 处可以的"微小编辑"的方向集合。例如：p 是一个高斯噪声图，T_pM 中的一个 v 操作例如表示"让噪声图中心更强"的编辑操作
- $T_{\varphi(p)}N$ 则表示噪声被还原后猫图片在猫图片空间里可以编辑的方向集合。例如 $w \in T_{\varphi(p)}N$，w 可以表示"让猫的耳朵尖锐"方向的操作
- 切映射是两个切空间之间的关系，如果我们假设 $v \in T_pM, w \in T_{\varphi(p)}N, w = \mathrm{d}\varphi_p(v)$，这个 $\mathrm{d}\varphi_p$ 切映射表示变化噪声方向，投射到猫图片空间后对应猫图片哪里以及什么方向的变化。例如，v 表示把噪声图 p 中心值拉高，映射后得到的 $\mathrm{d}\varphi_p(v)$ 是猫耳朵变尖锐。
- 假设我们有一个函数 f 表示生成猫的质量的分数，从纹理、细节、背景突出等多个方面评估，如背景变化、猫细节变化都会影响。
- 实际上引理 $[\mathrm{d}\varphi(v)(f)](\varphi(p)) = v(f \circ \varphi)(p)$，你把 $\mathrm{d}\varphi(v)$ 这个写成 w 就会发现等价于 $w(f)(\varphi(p)) = v(f \circ \varphi)(p)$。$v$ 表示噪声怎么变化，w 表示猫图片怎么变化，p 是噪声经过 φ 去噪得到猫图片，再由 f 打分出质量的得分，用噪声切向量 v 是以 p 为自变量，反映改变噪声导致的分数变化，等价于用猫图片切向量 w 以去噪后的 $\varphi(p)$ 为自变量，反映出改变图像导致的分数变化。就是说"从噪声空间下手，和从猫图片空间下手"，导致的分数变化趋势一样是等价的。
- 假设两个向量场。向量场 X 是图像去噪的方向，让猫从噪声中显现出；向量场 Y 是让猫的耳朵尖锐的方向，对于噪声图 p，$X(p) = X_p \in T_pM$ 给出了噪声让猫明显出来的变化方向，$Y(p) = Y_p \in T_pM$ 给出了噪声让猫耳朵尖锐的变化方向。噪声图在一个分布里面，X, Y 是针对整个分布的每一个噪声图给出噪声变化方向。
- $\mathrm{d}\varphi_t$ 是 $T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ 的映射，其实也是 $Y \to \mathrm{d}\varphi_t(Y)$ 的映射，就是去噪场驱动 t 后，对于锐化的向量场变到什么样子。
- $[X,Y] = L_XY$ 这个李导数，表示去噪和锐化耳朵这两个操作的依赖性，就是 $XY - YX$，表示顺序颠倒会有多大的影响。其定义 $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{Y - \mathrm{d}\varphi_t(Y)}{t}$，这个 Y 表示原来锐化耳朵的向量场，而 $\mathrm{d}\varphi_t(Y)$ 表示耳朵变化场在去噪场 X 经过 t 驱动后，变成了什么向量场。比如，仍然考虑初始 $t = 0$ 的噪声点 p，去噪中 $t = 0.1$ 时 Y 使对应一个锐化方向 $v_1 = \mathrm{d}\varphi_{0.1}(Y)(p)$，而 $t = 0.5$ 时，Y 则使对应的锐化方向改变为 $v_2 = \mathrm{d}\varphi_{0.5}(Y)(p)$。

- $Y, \mathrm{d}\varphi_t(Y)$ 这两个作用对象都是 $\varphi_t(p)$，就是去噪场驱动 t 后的噪声图位置。而 $f \circ \varphi_t(q) = f(q) + tg(t, q)$，这个类似于一个一阶泰勒展开，噪声图 q 经过去噪场驱动 t 后计算质量得分，等于噪声图 q 初始就计算的质量得分，加上 $tg(t, q)$，这个很类似一阶泰勒展开
- 联络导数 $\nabla_X Y$ 表示去噪 X 和锐化耳朵这两个 Y 二者的协调性。就是说，沿着 X 场去噪的时候，Y 方向要如何同步调整耳朵的锐度。