Física Computacional

Ano lectivo 2018/2019

TPC3 - Equações de derivadas parciais

Atenção:

Deve entregar uma resolução num único ficheiro de jupyter.
Todas as explicações devem ser claras e concisas.
É preferível fazer menos e bem que muito mal.
Aproveitem a oportunidade para recordar/aprender as ondas.
O pacote numba pode diminuir o tempo de cálculo.

Considere uma corda com tamanho L descrita pela equação de onda a uma dimensão

$$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$$

que pode ser decomposta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \phi \end{aligned}$$

onde c é a velocidade de propagação. Note que pode adimensionalizar o problema usando L com unidade de comprimento e L/c como unidade de tempo. Apesar das expressões que se seguem terem L e c explicitados deverá resolver sempre nas unidades adimensionalizadas.

1. Exercício

Considere que a corda tem condições de condições fronteira de Dirichlet com as fronteiras fixas com,

$$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$$

se no instante inicial a os campos iniciais são iguais

$$\begin{aligned} \psi(x,0) &= \frac{e^{-\frac{(x-L/2)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \\ \phi(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

onde $\sigma/L = 0.04$.

1. Em muitos casos o esquema implícito fornece bons resultados na estabilidade. Considere o esquema implícito da equação de onda,

$$\begin{aligned} \psi_i(t+\delta t) - \psi_i(t) &= \delta t \phi_i(t+\delta t) \\ \phi_i(t+\delta t) - \phi_i(t) &= \frac{c^2 \delta t}{\delta x^2} \left(\psi_{i+1}(t+\delta t) + \psi_{i-1}(t+\delta t) - 2\psi_i(t+\delta t)\right) \end{aligned}$$

Esta discretização as equações podem ser reescritas de forma,

$$A_{ij}\psi_j(t+\delta t) = a_{ij}\psi_j(t) + b_{ij}\phi_j(t)$$
$$A_{ij}\phi_j(t+\delta t) = c_{ij}\psi_j(t) + d_{ij}\phi_j(t) \tag{1.1}$$

onde A_{ij} é uma matriz tridiagonal. Estas duas equações podem ser reescritas numa única equação matricial

$$\hat{\Omega}\begin{pmatrix} \psi(t+\delta t) \\ \phi(t+\delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \phi(t) \end{pmatrix}$$

com o dobro da dimensão.

(a) Faça uma análise de estabilidade de von Neumann desta discretização.

(b) Obtenha os valores próprios e vectores próprios da matriz $\hat{\Omega}$. Comente a relação dos vectores próprios com o critério de estabilidade de von Neumann.

(c) Escreva um solver baseado na decomposição LU para evoluir o sistema (na forma da equação: 1.1). Note que se as matrizes L e U forem matrizes esparsas deverá procurar utilizar as matrizes sem guardar um imenso número de zeros.

(d) Escreva um solver baseado no método de Gauss-Seidel para evoluir o sistema e especifique os critérios de convergência.

(e) Usando o solver da decomposição LU analise a estabilidade da solução simulando durante um intervalo de tempo de 0.5 e representando a solução nos multiplos de $\Delta t = 0.05$. Para simular a corda use $\delta x = 0.005$

  i. $\delta t = 0.1\delta x$

  ii. $\delta t = 0.01\delta x$

  iii. $\delta t = 0.001\delta x$

(f) Repita a simulação anterior para $\delta x = 0.001$.

2. No caso da equação de onda conseguem-se é frequente usar o método de diferença finita centrada no tempo,

$$\psi_j^{t+\delta t} - \psi_j^t = \delta t \phi_j^{t+\delta t}$$
$$\phi_i^{t+\delta t} - \phi_i^t = \frac{c^2\delta t}{\delta x^2}\left(\psi_{j+1}^t + \psi_{j-1}^t - 2\psi_j^t\right)$$

ou o método de Crank-Nicolson (ver no livro adoptado).

(a) Faça a análise de von Neumann para estudar a estabilidade para cada um dos métodos e discuta a sua implementação, vantagens e desvantagens.

(b) Usando cada um destes algorítmos, represente a evolução do sistema com $\delta x = 0.001$ desde $t = 0$ até 0.4 representando 10 fotografias equiespaçadas. Compare diferentes valores de δt.

2. Exercício

A solução de Alembert da equação de onda na corda pode ser escrita como

$$\psi(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

e é válida para todos os tempos incluindo o instante inicial.

1. Considere a condição inicial descrita no problema anterior. Analise à luz da solução de Alembert o que observou: Dois impulsos gaussianos iguais a moverem-se em sentidos opostos.

2. Crie uma condição inicial que tenha como solução apenas um impulso gaussiano igual ao descrito ao campo inicial a mover-se para a direita. Evolua com esta condição inicial até t = 1, Representando o campo em dez instantes equi-espaçados. O que observa na fronteira?

3. Mude as condições fronteira para de von Neumann

$$\left.\frac{\partial \psi}{\partial x}\right|_{(L,t)} = 0$$
$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{(L,t)} = 0$$

   no lado direito. Faça uma nova representação do campo durante representando 10 instantes até o tempo 1. O que observa quando o impulso único passa na fronteira?

4. Repita para condições fronteira periódicas.

3. Exercício

Considere que a corda é forçada na extremidade do lado direito devido a estar presa numa biela. Como a corda está presa à biela temos a condição fronteira de Dirichlet

$$\psi(L,t) = A\cos(\Omega t)$$
$$\phi(L,t) = -A\Omega\sin(\Omega t)$$

para haver dissipação de energia considere a equação de onda com um termo dissipativo

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \gamma \phi$$

caracterizado por $\gamma = 0.1$ (unidades adimensionais descritas).

1. Assumindo que inicialmente a corda estava em repouso, integre a equação de movimento para $\Omega = 8$ e $A = 0.001$ respeitando a condição fronteira. Represente a corda em 7 tempos equidistantes durante 1.6 períodos de oscilação da extremidade.

2. Evolua a corda desde a condição inicial para um tempo de $t = 100\pi$. Para cada elemento de corda calcule o valor máximo e mínimo do deslocamento vertical ao longo deste periodo de tempo. Represente as curvas do deslocamento máximo e mínimo como função da posição para valores de

$$\Omega_n = n\pi/5 \, n = 1, \ldots, 10$$

3. Repita o procedimento da alínea anterior e represente as curvas do deslocamento máximo e mínimo como função da posição para valores de

$$\Omega_n = n\pi \, n = 1, \ldots, 4$$

4. Para as frequências da alínea anterior represente o deslocamento da posição de equilíbrio para $x = 0.5$ para $0 < t < 100\pi$.

4. Exercício

Considere que a corda tem uma densidade que varia com a posição. Na equação de onda reflecte-se numa dependência da velocidade com a posição. Estude o comportamento de um impulso gaussiano único que inicialmente está centrado em $x = 0.2$ e move-se para a direita. Estude um intervalo de tempo de 0.6 considerando,

1. Que a velocidade de propagação é dividida por 4 para $x > 0.5$.

2. Que a velocidade de propagação é dada pela expressão

$$c(x) = \frac{1}{1 + 100x^5}$$

Boa Sorte