
Física Computacional

Ano lectivo 2018/2019

TPC1 - Integração numérica

O trabalho de casa é para ser feito no período entre as 13h de Sexta-feira (15/03/2019) e as 24:00 de Domingo (17/03/2019) com a excepção dos alunos que acordaram com o regente outro período por incompatibilidades. O trabalho é individual mas é encorajada a troca de ideias, a discussão e a procura e leitura de referências. A avaliação é de $\{0, 1, 2\}$ valores e para ter a avaliação máxima basta resolver o primeiro Exercício.

1. Exercício

1. Considere uma circunferência de raio r uniformemente carregada com uma densidade de carga linear λ (ver figura a)). O campo eléctrico ao longo do eixo vertical a uma distância z do centro é dado por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(z) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} r d\theta \frac{z\boldsymbol{u}_z - r\cos\theta\boldsymbol{u}_x - r\sin\theta\boldsymbol{u}_y}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}.\\ &= \frac{\lambda r}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\left(z^2+r^2\right)^{3/2}}\boldsymbol{u}_z\end{aligned}$$

   Podemos adimensionalizar o campo usando como unidade de comprimento o raio r e

$$\boldsymbol{E}'(z') = \frac{\boldsymbol{E}(z)}{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} = \frac{z'}{\left(z'^2+1\right)^{3/2}}\boldsymbol{u}_z$$

   onde Q é a carga no anel e z' a coordenada vertical em unidades de r. Verifique numericamente o resultado do integral. Para este efeito,

   (a) Escreva uma função que integra numericamente usando o método de Simpson 1/3 usando um intervalo $h = 2\pi/M$ onde M é o número de intervalos usados para a integração numérica.

   (b) Represente num gráfico log-log valor absoluto do desvio em relação ao valor exacto do campo como função de h para cada uma das direcções. Que dependência espera no limite em que h tende para zero? Verifique essa lei e descreva o que observa. **Sugestão:** Se quiser observar uma gama maior de variação pode usar o pacote *mpmath* para trabalhar com precisão arbitrária.

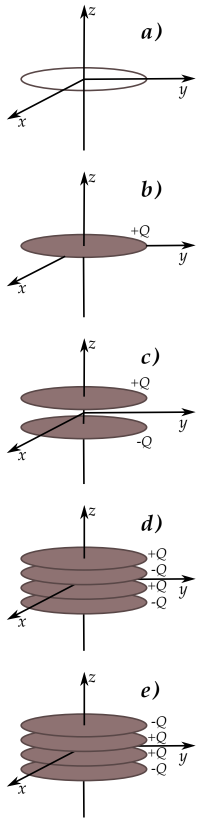
2. Considere um disco de raio R com uma densidade superficial de carga uniforme (σ) representado na figura b). O campo eléctrico no eixo do círculo é dado por

$$\boldsymbol{E}'(z') = \int_0^1 drr\frac{z'\boldsymbol{u}_z}{\left(z'^2+r^2\right)^{3/2}}.$$

   onde adimensionalizamos o campo e os comprimentos a R.

   (a) Represente o campo ao longo do eixo dos zz' efectuando numericamente o integral para $z \in [-10R, 10R]$.

   (b) Mostre que para $z > R$ o campo eléctrico decai com o inverso do quadrado da distância z. Explique porquê. Se tivesse calculado noutra direcção este comportamento assimptótico seria semelhante?



(c) O teorema de Gauss para o plano infinito prevê um campo constante que não depende da distância ao plano. Consegue observar este comportamento em alguma região de z? Para estudar este limite represente numa gama de valores de $z \in [-4R, 4R]$ o campo eléctrico criado para quatro tamanhos de disco (R, $2R$, $4R$, $8R$).

3. Considere dois discos um colocado em $z = \delta/2$ com uma carga Q e outro colocado em $z = -\delta/2$ com $-Q$ conforme está representado na figura c). Para $\delta = 0.5R$

   (a) Represente o campo eléctrico ao longo do eixo dos zz' .

   (b) Como decai para zero o campo eléctrico para $z \gg R$? Represente graficamente o campo como função da distância e demonstre este comportamento. Explique do ponto de vista físico por que motivo a lei de potência observada é diferente da verificada na alínea anterior.

   (c) Represente graficamente o campo eléctrico no eixo dos zz' na região entre planos para quatro valores de R (R, $2R$, $4R$, $8R$). Represente a tracejado o valor para disco infinito obtido pelo teorema de Gauss.

4. Considere quatro discos carregados nas configurações representadas nas figuras d) e e).

   (a) Estude a dependência de cada uma das configurações e estude a dependência de distâncias longas. Explique do ponto de vista físico o que observa.

   (b) Analíse o comportamento da região do espaço entre discos e compare com o resultado de discos infinitos.

2. Exercício

Considere um disco com uma distribuição superficial de carga $\sigma_n(\theta) = \sigma r \cos(n\theta)$. O campo adimensional num ponto arbitrário do espaço é dado por

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r d\theta \sigma_n(\theta) \frac{(x - r\cos(\theta))\,\boldsymbol{u}_x + (y - r\sin(\theta))\,\boldsymbol{u}_y + z\boldsymbol{u}_z}{(x^2 + y^2 - 2xr\cos(\theta) - 2yr\sin(\theta) + r^2 + z^2)}$$

onde as distâncias foram adimensionalizadas ao raio R do disco.

1. Sabendo que o erro método de Simpson 1/3 num domínio bidimensional é da forma,

$$\varepsilon = c_x h_x^4 + c_y h_y^4,$$

   e os pesos da quadratura estão no quadro da margem. Construa uma função que faça a integração para calcular o campo usando um procedimento adaptativo.

$\frac{h_x h_y}{9} \times$

1	4	2	4	$\cdots$	1
4	16	8	16	$\cdots$	4
2	8	4	8	$\cdots$	2
4	16	8	16	$\cdots$	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
2	8	4	8	$\cdots$	2
4	16	8	16	$\cdots$	4
1	4	2	4	$\cdots$	1

2. Represente para $n = 0$ o campo eléctrico como ao longo das linhas $(0, 0, z)$ com $z \in]0, 10R]$ e $(x, 0, 0)$ com $x \in]1.01R, 10R[$

3. Represente nos mesmo intervalo para $n = 1, 2, 3$. O que conclui?

Boa Sorte