Mecânica Quântica II – 2019/20

Licenciatura em Física

Responsável: Eduardo V. Castro
Departamento de Física e Astronomia, FCUP

Série 1 – Teoria de perturbações independentes do tempo

1. Considere um electrão num poço de potencial de profundidade infinita, a uma dimensão, com largura a:
$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < a \\ +\infty & x < 0 \vee x > a \end{cases} .$$
Aplica-se a este sistema um campo eléctrico, $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 \vec{e}_x$. Admitindo que a quantidade $e\mathcal{E}_0 a$ é muito menor do que a energia do estado fundamental do sistema não perturbado, calcule:
   (a) Uma aproximação para a energia do primeiro nível permitido.
   R: $E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} + \frac{e\mathcal{E}_0 a}{2}$
   (b) Uma aproximação para a função de onda do primeiro nível permitido.
   R: $\phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi x}{a}) + \sum_{n>1} \frac{2m}{\hbar^2}\frac{W_n}{1-n^2}\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{n\pi x}{a})$, $\quad W_n = \frac{2e\mathcal{E}_0}{a}\int_0^a \sin(\frac{n\pi x}{a}) x \sin(\frac{\pi x}{a}) dx$; use o Mathematica para se convencer que $W_3 = W_5 = W_7 = \cdots = 0$ e que $W_2 \ll W_3 \ll W_4 \cdots$.

2. Considere um oscilador harmónico linear, de massa m e frequência ω, a oscilar segundo o eixo dos xx. O oscilador está carregado com carga q, e é sujeito a um campo eléctrico que produz uma perturbação $\hat{V} = q\mathcal{E}\hat{x}$.
   (a) Determine a correcção de 1ª ($E_n^{(1)}$) e de 2ª ordem ($E_n^{(2)}$) às energias próprias do sistema.
   R: $E_n^{(1)} = 0,\ E_n^{(2)} = -\frac{q^2\mathcal{E}^2}{2m\omega^2}$
   (b) Compare com o resultado exacto obtido por transformação de variável, $\hat{x} \to \hat{X} = \hat{x} + q\mathcal{E}/(m\omega^2)$.
   (c) Obtenha a correcção de 1ª ordem aos estados próprios do oscilador harmónico.
   R: $|\psi_n\rangle = |n\rangle + \frac{q\mathcal{E}}{\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n}\,|n-1\rangle - \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\right)$

3. Um oscilador harmónico linear (massa m, frequência ω) é sujeito a uma perturbação quártica:
$$\hat{V} = \alpha\hat{x}^4 .$$
   (a) Escreva a equação que traduz a correcção de 1ª ordem para o valor próprio índice n.
   (b) Obtenha a correcção de 1ª ordem da função de onda do estado fundamental.

4. Considere um sistema cujos estados são descritos num espaço vectorial gerado pelos kets $|J, m\rangle$ sendo $J = 1$.
   (a) Supondo que o Hamiltoniano do sistema é:
$$\hat{H} = A\hat{J}^2 + B\hat{J}_z^2 ,$$
   com A e B constantes reais positivas, determine os valores próprios e os estados próprios do sistema.

(b) Aplica-se ao sistema uma perturbação definida por:

$$\hat{V} = \alpha \hat{J}_x^2 \,,$$

com α real.

i. Calcule, numa aproximação de $1^{\underline{a}}$ ordem em α, as energias dos estados estacionários.

ii. Indique, numa aproximação de ordem zero em α, os estados próprios de $\hat{H} + \hat{V}$.

5. Calcule, numa aproximação de $1^{\underline{a}}$ ordem, a correcção à energia do estado fundamental dum átomo hidrogenóide (carga nuclear eZ) devido ao efeito do volume nuclear.
Nota1: leve em conta que o raio nuclear R é muito menor do que o raio atómico.
Nota2: para um átomo hidrogenóide de carga Ze, as energias obtêm-se substituindo $E_n \to Z^2 E_n$ e as funções de onda substituindo $a \to a/Z$ nas soluções do átomo de hidrogénio, sendo $E_n = -13,6/n^2\,\text{eV}$ a energia de Bohr e a o raio de Bohr.