1 Enunciado

Uma circunferência e uma parábola intersetam-se no máximo em 4 pontos.

1.1 Demonstração

Suponhamos, sem perda de generalidade, que C é uma circunferência de raio r ($r \in \mathbb{R}^+$) centrada na origem do referencial. Assim sendo C é do tipo

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

e a parábola é do tipo

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0 \tag{2}$$

Substituindo y em (1):

$$(ax^2 + bx + c)^2 + x^2 = r^2 \tag{3}$$

$$(ax^2 + bx + c)(ax^2 + bx + c) + x^2 - r^2 = 0 \tag{4}$$

$$a^2x^4 + abx^3 + acx^2 + abx^3 + b^2x^2 + bcx + acx^2 + bcx + c^2 + x^2 - r^2 = 0 \tag{5}$$

$$a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 1)x^2 + 2bcx + (c^2 - r^2) = 0 \tag{6}$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, este polinómio tem no máximo 4 raízes reais [1], pelo que uma circunferência e uma parábola intersetam-se no máximo 4 vezes.

[1] Note-se que, mesmo se $a = 0$, o polinómio, sendo do 2º grau, tem no máximo 2 raízes reais, pelo que a afirmação permanece válida nesse caso

2 Enunciado

Se $h > 2\sqrt{2}$ mostre quer algebricamente quer geometricamento que existem exatamente dois pontos cuja distância a (0,0) e (4,4) é igual a h

2.1 Demonstração

Seja $A(0,0)$ e $B(4,4)$. Qualquer ponto $P(x,y)$ que obedeça a essa propriedade tem de pertencer à mediatriz do segmento de reta $[AB]$. Ou seja, p obedece à condição[2]:

$$y = -x + 4 \tag{7}$$

Por outro lado, P encontra-se a h unidades da origem do referencial, por isso,

$$x^2 + y^2 = h^2 \tag{8}$$

Substituindo y por $-x+4$ em (8):

$$x^2 + (-x+4)^2 = h^2 \tag{9}$$

$$2x^2 - 8x + 16 - h^2 = 0 \tag{10}$$

Consideremos o binómio discriminante de (10):

$$(-8)^2 - 4 * 2 * (16 - h^2) = -64 - 2h^2 \tag{11}$$

Note-se que, $\forall h > 2\sqrt{2}, -64 - 2h^2 > 0$, pelo que o polinómio em (10) tem exatamente duas raízes e, assim sendo, existem exatamente dois pontos cuja distância a (0,0) e (4,4) é igual a h.

[2] A mediatriz já tinha sido calculada numa alínea anterior