

21 dezembro 2019

Duração: 2 horas

Nome: _____

Número: _____

Grupo I

Responda às questões deste grupo nos espaços indicados, **sem** apresentar os seus cálculos.

1. A forma em escada reduzida da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad \text{é} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) $\mathcal{C}(A)$ é um subespaço de _____ de dimensão 2.
Uma base de $\mathcal{C}(A)$ é: _____
- b) $\mathcal{N}(A)$ é um subespaço de _____ de dimensão _____
- c) $(1, -1, 1, 0) \in \mathcal{N}(A)$? _____
- d) Uma base de $\mathcal{L}(A)$ é: _____
- e) Um vetor de \mathbb{R}^4 não pertencente a $\mathcal{L}(A)$ é: _____

2. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a aplicação linear $T_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associada à matriz $\begin{pmatrix} 2k & 1 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$.

- a) $T_2(1, 2, 3, 1) =$ _____
- b) Um vetor não nulo x tal que $x \in \text{Im } T_1$ é: _____
- c) $\dim(\text{Im } T_0) =$ _____ e $\dim(\text{Nuc } T_2) =$ _____
- d) Os valores de k para os quais a aplicação T_k é sobrejetiva são: _____
- e) Os valores de k para os quais a aplicação T_k não é injetiva são: _____

3. Considere uma matriz A de ordem 3 cujos valores próprios são $-1, 1, 3$.

- a) $\det A =$ _____
- b) O sistema $(A + 2I_3)x = 0$ é _____
- c) Os valores próprios da matriz $(2A + 4I_3)^T$ são: _____
- d) A matriz $B =$ _____ é semelhante à matriz A .
- e) A^2 é diagonalizável? _____

Grupo II

Responda às questões deste grupo numa folha de teste, apresentando os seus cálculos.

1. Considere o subespaço vetorial de \mathbb{R}^4

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x + 3y - 4w = 0 \text{ e } z = 0\}.$$

- a) Determine uma base e indique qual a dimensão de U .
- b) Verifique que o vetor $(5, 3, 0, 6)$ pertence a U e escreva as suas coordenadas na base encontrada na alínea anterior.
- c) Diga, justificando, se os vetores $u = (2, -2, 0, 0)$, $v = (4, 0, 0, 3)$ e $w = (6, -2, 0, 3)$ são vetores geradores de U .
- d) Indique, caso exista, uma base de \mathbb{R}^4 que inclua os vetores u , v e w .

2. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Mostre que o polinómio característico de A não depende de a .
- b) Verifique que $(0, -1, 1)$ é um vetor próprio de A .
- c) Verifique que existe um valor de a para o qual a matriz A é diagonalizável e indique, para este valor, uma matriz que a diagonaliza.

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma dada matriz e seja $f_A : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ a aplicação definida por $f_A(X) = XA - AX$, para qualquer $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Mostre que f_A é uma aplicação linear.

b) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, determine $\text{Nuc } f_A$ e indique uma sua base.