# 游戏开发中的数学（基础版）



## 矢量（Vector）

线性代数中被称为"**向量**",而在几何中,Vector 被称为 "**矢量**"

### 几何定义:

向量是具有大小和方向的量，通常表示为有序的数字集合。在图形学中，二维和三维向量广泛用于表示点、方向等。

### 几何意义:

- 点表示： 一个向量可以表示空间中的一个点，其起点可以视为原点。
- 方向表示： 向量的方向表示从起点指向终点的方向。
- 长度表示： 向量的长度表示起点到终点的距离。

### 运算:

- 加法
- 减法
- 标量乘法
- 点积
  - 意义： 点积等于两个向量长度的乘积和它们之间夹角余弦的乘积。
  - 应用：可以用来判断两个向量的方向关系（是否垂直）
- 叉积
  - 意义：结果是新的向量，这个向量垂直于原来两个向量所在的平面
  - 应用：计算法向量
- 模
- 归一化
  - 意义：一个大小为1，方向不变的单位矢量
  - 应用：法向量

## 矩阵

### 定义

排列成行和列的矩形数字网格

## 几何意义

- 线性变换： 矩阵可以表示对向量的线性变换，如旋转、缩放等。
- 坐标系变换： 矩阵可用于进行坐标系之间的变换。
- 仿射变换： 仿射矩阵用于表示包括平移、旋转和缩放在内的线性变换。

## 常见矩阵

### 3 * 3矩阵

- 旋转矩阵
  - 绕 $z$ 轴旋转（角度 $\theta$）

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  - 绕 $x$ 轴旋转（角度 $\theta$）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

  - 绕 $y$ 轴旋转（角度 $\theta$）

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

- 缩放矩阵

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}$$

**4 * 4矩阵**

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 应用

### MVP矩阵

- M： 即上述的模型变换，将模型空间转换成世界空间。
- V： 将世界空间转换为相机观察空间。
- P： 将观察空间转换为裁剪空间。

## 运算

- 矩阵乘法: 组合多个变换。eg： A：平移。B: 缩放。则A*B: 先平移后缩放。
- 向量乘法: 得到一个新的向量。表示向量应用改变换矩阵之后的结果。
- 矩阵的逆：逆矩阵表示一个变换的反向变化。eg，用于撤销一个变换： v * A * (逆A) = v。
- 矩阵转置：行和列交换。应用：正交矩阵可以通过转置矩阵得到逆矩阵。

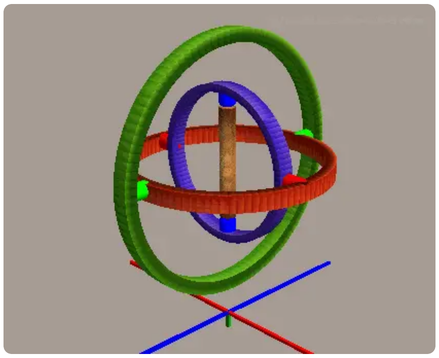
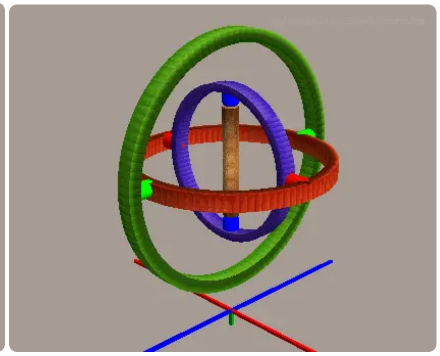
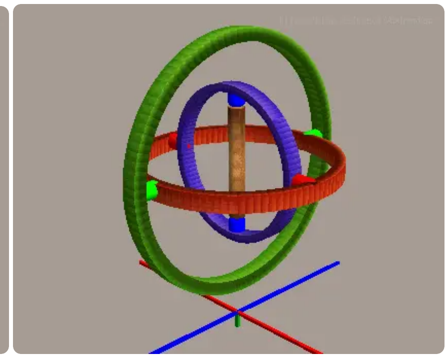
矩阵与线性变换： https://www.bilibili.com/video/BV1ys411472E/?p=4&share_source=copy_web&vd_source=46b2acb9bb98ee86eab879c0a1efd119

# 欧拉角和四元数

用来表示三维空间中的旋转，也用于存储模型的姿态。

## 欧拉角

由数学家Leonhard Euler命名。

### 定义

用一个三元组表示。 **偏航角（Yaw）**， **俯仰角（Pitch）**， **翻滚角（Roll）**，表示三个轴上的旋转， 其中，偏航角表示绕Y轴旋转，俯仰角表示绕X轴旋转，翻滚角表示绕Z轴旋转。

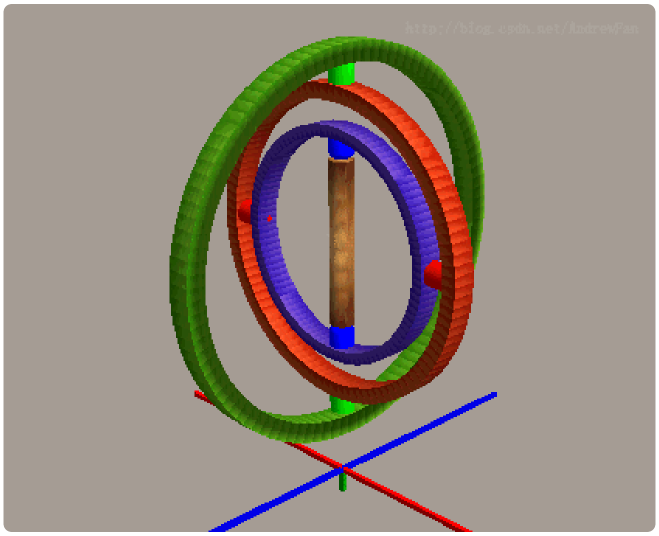
其它表示法：

- **航向（Heading），俯仰（Pitch），滚转（Bank）。顺序是YXZ。**
- **固定轴（Fixed-Axis）。**

注意： 欧拉角描述的是变换而非运动，在给定欧拉角的三个变换参数和顺序后，将初始姿态变换为最终姿态。

### 万向节死锁（Gimbal Lock）

由欧拉旋转定义本身造成



万象死锁

## 四元数

**定义：**

它由一个实数部分和三个虚数部分组成，可以表达为 **q=a+bi+cj+dk,**一个四元数可以被视为一个向量和一个标量的组合，其中标量部分是a，向量部分是bi+cj+dk。

**运算：**

**共轭：矢量部分变负**

**四元数的共轭**

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^* &= \begin{bmatrix} w & \mathbf{v} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} w & -\mathbf{v} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} w & \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} w & \begin{pmatrix} -x & -y & -z \end{pmatrix} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{8.5}$$

**逆：共轭除以模**

**四元数的逆**

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|} \tag{8.6}$$

- 几何意义：**旋转的撤销**

单位四元数的共轭和逆相等

**乘：**

**四元数乘法**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 &= \begin{bmatrix} w_1 & (x_1 \quad y_1 \quad z_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 & (x_2 \quad y_2 \quad z_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_1w_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 \\ \begin{pmatrix} w_1x_2 + x_1w_2 + y_1z_2 - z_1y_2 \\ w_1y_2 + y_1w_2 + z_1x_2 - x_1z_2 \\ w_1z_2 + z_1w_2 + x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_1 & \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} w_1w_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & w_1\mathbf{v}_2 + w_2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- 几何意义： 连接多个旋转

**点积：**

**四元数点积**

$$
\begin{aligned}
\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 &= \begin{bmatrix} w_1 & \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_2 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \\
&= w_1w_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\
&= \begin{bmatrix} w_1 & (x_1 \quad y_1 \quad z_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_2 & (x_2 \quad y_2 \quad z_2) \end{bmatrix} \\
&= w_1w_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2
\end{aligned}
$$

- 几何意义：
  - 夹角计算：$\cos(\theta) = q1 \cdot q2$
  - 方向相似性：点积的绝对值越接近1，表示两个四元数的方向越相似。如果点积为1，表示两个四元数完全相同；如果点积为-1，则表示它们方向完全相反。

**规范化：模为1**

- 几何意义：用于表示一个有效的旋转

**平滑插值：**

假设有两个四元数 Q1 和 Q2，分别表示开始和结束的旋转，Slerp （Spherical Linear Interpolation，简称 Slerp）允许我们计算从 Q1 到 Q2 的中间旋转状态

**应用：**

- 三维图形渲染中的物体或相机的旋转动画

[四元数介绍视频]