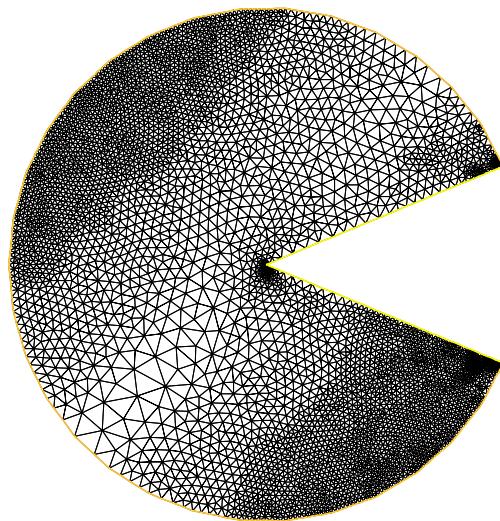




ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Estimateur à posteriori pour l'affinage de maillage dans la méthode des éléments finis



Timothée Pouchon

Sous la direction de : Professeur : Alfio Quarteroni

Assistant : Dr. Ricardo Ruiz-Baier

Projet de semestre, printemps 2010.

Section de mathématiques, EPFL.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Notations	3
1.2 Résultats importants	5
1.3 Triangulation régulière	7
2 Le problème de Poisson	10
2.1 Dirichlet homogène	10
2.1.1 Formulation faible et discrétisation	10
2.1.2 Un estimateur résiduel	12
2.2 Conditions mixtes	14
2.2.1 Formulation faible et discrétisation	14
2.2.2 Un estimateur résiduel	15
2.3 Exemples numériques	24
2.3.1 Un problème simple	25
2.3.2 Domaine en L	29
3 Le problème de Stokes	32
3.1 Formulation faible	32
3.2 Discrétisation par la méthode de Galerkin	34
3.3 Une méthode stabilisée	36
3.4 Un estimateur résiduel	40
3.5 Exemples numériques	47
3.5.1 Un problème simple	47
3.5.2 Domaine en L	50
Conclusion	55
Annexes	57
Bibliographie	66

Résumé

Dans ce travail, nous introduisons le concept d'estimateur à posteriori et la façon de l'utiliser pour affiner un maillage dans le cadre de la méthode des éléments finis. Dans la première partie, nous traitons le problème de Poisson, avec conditions de bord de Dirichlet homogènes et mixtes. Nous faisons la discrétisation avec la méthode de Galerkin et l'analysons. Puis, une analyse à posteriori est faite et nous donnons 2 exemples numériques pour tester l'estimateur dans un affinage de maillage. La deuxième partie traite du problème de Stokes. Nous faisons une brève analyse du point de vue de la méthode des éléments finis, puis analysons une méthode stabilisée. Nous faisons ensuite l'analyse à posteriori de celle-ci et la testons ainsi que l'estimateur donné dans 2 exemples numériques.

Introduction

La méthode des éléments finis est très efficace dans la résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Les limitations physiques des ordinateurs imposent cependant une restriction sur la précision. En effet, une haute précision se paie logiquement en terme de temps de calcul. Il faut alors trouver des façons d'optimiser la méthode, un dilemme entre précision et temps de calcul. Une stratégie pour cette optimisation se base sur les estimateurs à posteriori.

Le concept est d'agir sur le maillage. Soit \mathcal{T}_h un maillage du domaine sur lequel est posé le problème, dépendant d'un paramètre $h > 0$ qui est défini pour être proportionnel à la finesse du maillage. Ainsi, $h \rightarrow 0$ implique une grande précision. Mais la taille du système linéaire associé à un maillage est proportionnelle au nombre de sommets de celui-ci. Ainsi, un maillage fin sera coûteux en terme de temps. À partir de ces observations, l'idée est d'adapter \mathcal{T}_h au problème posé. Qu'il soit fin aux endroits où cela est nécessaire, et grossier où cela ne l'est pas. Cette stratégie pose un problème à priori. Effectivement, pour déterminer où le maillage doit être affiné, il faut avoir des informations sur la solution que l'on ne détient à priori pas. Pour combler cette lacune, on calcule la solution sur un maillage grossier, donc économique. Ensuite, il faut tirer de cette solution l'information dont nous avons besoin. C'est là qu'intervient l'estimateur à posteriori.

Nous définissons une *quantité à posteriori* comme dépendant d'une part de l'ensemble des données du problème D , et d'autre part de la solution approximée u_h . Supposons que u soit la solution réelle du problème et que u, u_h soient dans un espace V . Une quantité à posteriori $\eta(D, u_h)$ est un *estimateur à posteriori* si elle se « comporte de la même façon » que l'erreur $\|u - u_h\|_V$. La signification de « se comporter de la même manière que » se précisera dans ce travail.

Cet estimateur est construit en se *basant sur un résidu*. C'est-à-dire que,

$$\eta(D, u_h)^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K(D, u_h))^2$$

où $\eta_K(D, u_h)$ est un estimateur local défini pour chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$.

Ces estimateurs locaux nous permettent d'adapter le maillage. En effet, en réunissant les informations faites jusqu'ici, nous pouvons établir l'algorithme d'affinage suivant :

1. Génération d'un maillage grossier ;
2. Calcul de l'approximation de la solution u_h sur ce maillage ;
3. Calcul des estimateurs résiduels η_K et global η ;
4. Modification du maillage conformément à η_K ;
5. Retour à l'étape 2), ceci n fois, (n à déterminer).

L'étape 4) est la plus compliquée et est ouverte à des variantes. Mais son objectif est clair : cibler l'affinage aux éléments K tels que η_K est « trop grand ». Ceci fera baisser η et donc $\|u - u_h\|_V$ augmentant ainsi la précision. Voyons plus précisément les alternatives possibles pour l'implémentation.

Expliquons pour commencer une technique d'affinage uniquement. Pour une tolérance $\varepsilon > 0$ donnée, on ajoute des sommets dans les zones dont les éléments $K \in \mathcal{T}_h$ sont tels que $\eta_K > \varepsilon$. Bien sûr, l'affinage peut dépendre des η_K , pouvant augmenter son efficacité. C'est-à-dire que pour deux éléments $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$, $\eta_{K_1} < \eta_{K_2}$ impliquera un affinage plus pointu sur η_{K_2} que sur η_{K_1} . La dépendance entre l'affinage et η_K est à déterminer. Cette technique d'affinage peut être coupler d'un grossissement. C'est-à-dire qu'en plus, on va supprimer des sommets dans les zones dont des éléments K sont tels que η_K est faible. Ainsi, l'enjeu pour un bon affinage, est de créer un fonction créant des sommets dans Ω , dont la densité est proportionnelle à η_K .

Chapitre 1

Préliminaires

Avant de rentrer dans le vif du sujet, il nous faut fixer les notations que nous utiliserons dans ce travail et énoncer quelques résultats classiques, mais importants, concernant principalement la méthode des éléments finis. Les preuves ne sont pas données ici, mais sont accessibles dans les ouvrages mentionnés.

1.1 Notations

Soit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T \in \mathbb{R}^d$, en coordonnées cartésiennes. Nous noterons l'opérateur de $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle par

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

De même,

$$\partial_{ij} := \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

Plus généralement, pour un multi-indice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ nous définissons

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d} = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad \text{où} \quad |\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i=1}^d \alpha_i.$$

Pour une fonction scalaire $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable et une fonction vectorielle $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)^T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ également deux fois différentiable, nous définissons les

opérateurs classiques suivants,

$$\begin{aligned}\nabla u &= \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \vdots \\ \partial_d u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d, \\ \nabla \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \vdots \\ \nabla u_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \partial_i u_i \in \mathbb{R}, \\ \Delta u &= \sum_{i=1}^d \partial_{ii} u \in \mathbb{R}, \\ \Delta \mathbf{u} &= \begin{pmatrix} \Delta u_1 \\ \vdots \\ \Delta u_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^d \partial_{ii} u_1 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^d \partial_{ii} u_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Pour deux fonctions $u, v \in L^2(\Omega)$ où Ω est un domaine de \mathbb{R}^d , nous notons le produit scalaire de u, v dans $L^2(\Omega)$,

$$(u, v)_\Omega = \int_\Omega uv,$$

et la norme associée

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2 \right)^{1/2}.$$

Lorsque nous passons en dimension $d \geq 1$ le produit scalaire se couple logiquement avec le produit scalaire euclidien. Ainsi, pour $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, dans $[L^2(\Omega)]^d$, le produit scalaire est défini par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^d \int_\Omega u_i v_i,$$

où \cdot dénote le produit scalaire euclidien dans \mathbb{R}^d . Il en va de même pour la norme,

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \int_\Omega u_i^2,$$

A chaque degré de multiplication d'espace, le produit scalaire se construira de façon euclidienne. C'est-à-dire que pour $\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^d$, on définit,

$$(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega = \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i = \sum_{i,j=1}^d \int_\Omega \partial_j u_i \partial_j v_i,$$

et de même pour la norme,

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla u_i = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \partial_j u_i^2.$$

Nous utilisons les notations standards pour les espaces de Sobolev,

$$H^k(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq k\},$$

muni de la norme et de la semi-norme,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^k(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \\ |u|_{H^k(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

1.2 Résultats importants

Précisons que pour la totalité de cette section, Ω dénotera un domaine de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, c'est-à-dire un ouvert connexe.

Tout d'abord, nous énonçons un résultat des plus basiques pour les espaces préhilberiens. L'*inégalité de Cauchy-Schwarz* dans $L^2(\Omega)$, que nous mentionnerons par "C.S.";

$$\forall u, v \in L^2(\Omega), \quad |(u, v)_\Omega| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Cette inégalité se généralise bien sûr pour des applications $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^d$.

Nous énonçons également cette inégalité mais dans \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$ muni du produit scalaire euclidien. Nous y ferons référence par "D.C.S" pour *discrete Cauchy-Schwarz*;

Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}.$$

Ensuite, rappelons les *formules de Green*, scalaire et vectorielle, essentielles dans la détermination des formulations faibles. Pour un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ($d = 2, 3$), \mathbf{n} le vecteur unitaire normal au bord $\partial\Omega$ pointant à l'extérieur. Alors $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfont,

$$-(\Delta u, v)_\Omega = (\nabla u, \nabla v)_\Omega - (\nabla u \cdot \mathbf{n}, v)_{\partial\Omega}. \quad (1.1)$$

$$-(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega - (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v})_{\partial\Omega}. \quad (1.2)$$

Enonçons aussi cette formule d'intégration par partie, pour $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(\nabla f, \mathbf{v})_\Omega + (f, \nabla \cdot \mathbf{v})_\Omega = (f, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\partial\Omega}, \quad (1.3)$$

Pour montrer que la formulation faible du problème de Poisson est bien posée, nous avons besoin du résultat d'analyse fonctionnelle suivant. Pour une preuve voir [12], chapitre 5.

Lemme 1.1. (*Lax-Milgram*) Soient un espace de Hilbert X , une forme bilinéaire $\mathcal{A}(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonctionnelle linéaire $\mathcal{F}(\cdot) : X \rightarrow \mathbb{R}$. Supposons que

1. $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ est continue : $|\mathcal{A}(u, v)| \leq \gamma \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X$;
2. $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ est coercive : $\mathcal{A}(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X$;
3. $\mathcal{F}(\cdot)$ est continue : $|\mathcal{F}(v)| \leq M \|v\|_X \quad \forall v \in X$;

Alors, le problème

$$\text{Trouver } u \in X \text{ tel que } \mathcal{A}(u, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in X.$$

admet une unique solution. De plus la solution satisfait l'estimation,

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{F}\|_{X'}$$

Pour démontrer les hypothèses du lemme de Lax-Milgram le résultat suivant est d'une grande utilité. De plus, son corollaire a un impact important. Pour une preuve voir [1], chapitre 2.

Lemme 1.2. (*inégalité de Poincaré-Friedrichs*) Soit $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Si v est nulle sur une partie Γ du bord, de longueur non-nulle, alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_\Gamma^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

Corollaire 1.1. La semi-norme $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ est une norme sur $H_\Gamma^1(\Omega)$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Autrement dit, il existe des constantes C_1^n et C_2^n telles que

$$C_1^n |v|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2^n |v|_{H^1(\Omega)}$$

Nous allons également traiter le problème de Stokes. Pour montrer que la problème sous forme faible est bien posé, il nous faut le résultat d'analyse fonctionnelle suivant. Pour plus de détails voir [1], chapitre 15.

Théorème 1.1. (*Brezzi*) Soit X et Y deux espaces de Hilbert. Soient deux formes bilinéaires $\mathcal{A}(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{B}(\cdot, \cdot) : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ et deux fonctionnelles linéaires $l \in X'$ et $\sigma \in Y'$. Considérons le problème du point de selle suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (u, \eta) \in X \times Y \text{ tel que} \quad & \mathcal{A}(u, v) + \mathcal{B}(v, \eta) = l(v) \quad \forall v \in X \\ & \mathcal{B}(u, \mu) = \sigma(\mu) \quad \forall \mu \in Y. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Nous supposons vérifiées les quatre hypothèses suivantes,

1. $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ est continue : $|\mathcal{A}(u, v)| \leq \gamma \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X ;$
2. $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$ est coercive sur le sous-espace $X^0 = \{v \in X : \mathcal{B}(v, \mu) = 0 \quad \forall \mu \in Y\}$:

$$\mathcal{A}(v, v) \geq \bar{\alpha} \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X^0;$$

3. $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ est continue : $|\mathcal{B}(v, \mu)| \leq \delta \|u\|_X \|\mu\|_Y \quad \forall u \in X, \forall \mu \in Y ;$
4. La condition inf-sup est satisfaite :

$$\exists \beta^* > 0 \quad \text{tel que} \quad \inf_{\substack{\mu \in Y \\ \mu \neq 0}} \sup_{\substack{v \in X \\ v \neq 0}} \frac{\mathcal{B}(v, \mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_Y} \geq \beta^*, \quad (1.5)$$

ou de manière équivalente

$$\forall \mu \in Y, \quad \exists v \in X \setminus \{0\} \quad \text{tel que} \quad \mathcal{B}(v, \mu) \geq \beta^* \|v\|_X \|\mu\|_Y.$$

Alors il existe une unique solution $(u, \eta) \in X \times Y$ pour le problème (1.4) telle que

$$\begin{aligned} \|u\|_X &\leq \frac{1}{\bar{\alpha}} \left(\|l\|_{X'} + \frac{\bar{\alpha} + \gamma}{\beta^*} \|\sigma\|_{Y'} \right) \\ \|\eta\|_Y &\leq \frac{1}{\beta^*} \left((1 + \frac{\gamma}{\bar{\alpha}}) \|l\|_{X'} + \frac{\gamma(\bar{\alpha} + \gamma)}{\bar{\alpha} \beta^*} \|\sigma\|_{Y'} \right) \end{aligned}$$

1.3 Triangulation régulière

Pour un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous construisons une triangulation \mathcal{T}_h de Ω , telle que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K.$$

K peut être un polygone quelconque, mais dans ce travail nous utiliserons uniquement des triangles.

La triangulation est dite *régulière* si les conditions suivantes sont remplies :

- $\overset{\circ}{K} \neq \emptyset \quad \forall K \in \mathcal{T}_h ;$
- $\overset{\circ}{K}_1 \cap \overset{\circ}{K}_2 = \emptyset$ pour chaque paire $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ tels que $K_1 \neq K_2 ;$
- si $F = K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ avec $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ tels que $K_1 \neq K_2$, alors F est soit une arête entière, soit un sommet de la triangulation ;
- on appelle h_K le diamètre de K pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$, et on définit $h := \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$;
- on appelle $\rho_K := \sup\{\text{diam}(S) : S \text{ est une boule contenue dans } K\}$; alors on impose

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad \frac{h_K}{\rho_K} \leq \delta \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Pour une triangulation régulière \mathcal{T}_h nous introduisons quelques notations dont nous aurons besoin.

L'espace des polynômes de dimensions l correspondant à la triangulation \mathcal{T}_h sera noté

$$\mathbf{X}_h^k := \{ v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) : v|_K \in \mathbb{P}^k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \}.$$

Pour un triangle $K \in \mathcal{T}_h$ nous appelons $\mathcal{E}(K)$ l'ensemble de ses arêtes et $\mathcal{N}(K)$ l'ensemble de ses sommets. Nous définissons alors

$$\mathcal{E}_h := \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}(K), \quad \mathcal{N}_h := \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{N}(K).$$

Nous différencions l'ensemble des arêtes internes, noté \mathcal{E}_Ω des arêtes du bord.

Pour une arête $E \in \mathcal{E}_h$ et un triangle $K \in \mathcal{T}_h$ nous définissons les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \omega_K &:= \bigcup_{\mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}(K') \neq \emptyset} K', && \text{Triangles ayant une arête en commun avec } K, \\ \omega_E &:= \bigcup_{E \in \mathcal{E}(K')} K', && \text{Triangles contenant } E, \\ \tilde{\omega}_K &:= \bigcup_{\mathcal{N}(K) \cap \mathcal{N}(K') \neq \emptyset} K', && \text{Triangles ayant un sommet commun avec } K, \\ \tilde{\omega}_E &:= \bigcup_{\mathcal{N}(E) \cap \mathcal{N}(K') \neq \emptyset} K', && \text{Triangles ayant un sommet commun avec } E. \end{aligned}$$

Pour l'analyse des estimateurs à posteriori nous aurons besoins des fonctions bulles.

Définition 1.1. Pour un triangle $K \in \mathcal{T}_h$, nous appelons $\lambda_{K,1}, \lambda_{K,2}, \lambda_{K,3}$ les coordonnées barycentriques de K . Nous définissons alors la fonction bulle de K , b_K , par

$$b_K = \begin{cases} 27\lambda_{K,1}\lambda_{K,2}\lambda_{K,3} & \text{sur } K \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus K. \end{cases}$$

Pour une arête interne $E \in \mathcal{E}_\Omega$, où $\omega_E = K_1 \cup K_2$, nous numérotons les sommets de K_1 et K_2 de façon à ce que les sommets de E soient les deux premiers. Nous définissons alors la fonction bulle de E , b_E , par

$$b_E = \begin{cases} 4\lambda_{K_i,1}\lambda_{K_i,2} & \text{sur } K_i \\ 0 & \text{sur } \Omega \setminus \omega_E. \end{cases}$$

Cette définition peut être étendue de manière simple à toute arête du bord de Ω .

Nous obtenons facilement les résultats suivants.

Lemme 1.3. Pour $K \in \mathcal{T}_h$ et $E \in \mathcal{E}_h$, les fonctions bulles \mathbf{b}_K et \mathbf{b}_E satisfont les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \text{supp } \mathbf{b}_K &\subset K, \quad 0 \leq \mathbf{b}_K \leq 1, \quad \max_{x \in K} \mathbf{b}_K(x) = 1, \\ \text{supp } \mathbf{b}_E &\subset \omega_E, \quad 0 \leq \mathbf{b}_E \leq 1, \quad \max_{x \in E} \mathbf{b}_E(x) = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1 h_K^2 &\leq \int_K \mathbf{b}_K = \frac{9}{20} |K| \leq c_2 h_K^2, \\ \int_E \mathbf{b}_E &= \frac{2}{3} h_E, \\ c_3 h_E^2 &\leq \int_{\hat{K}} \mathbf{b}_E = \frac{1}{3} |\hat{K}| \leq c_4 h_E^2 \quad \forall \hat{K} \subset \omega_E, \\ \|\nabla \mathbf{b}_K\|_{L^2(K)} &\leq c_5 h_K^{-1} \|\mathbf{b}_K\|_{L^2(K)}, \\ \|\nabla \mathbf{b}_E\|_{L^2(\hat{K})} &\leq c_6 h_E^{-1} \|\mathbf{b}_E\|_{L^2(\hat{K})} \quad \forall \hat{K} \subset \omega_E. \end{aligned}$$

où $|K|$ est l'aire de K et h_E est la longueur de E . Les constantes c_i , $i = 1, \dots, 6$ dépendent seulement du plus petit angle de la triangulation.

Pour chaque arête $E \in \mathcal{E}_h$ nous notons \mathbf{n}_E un vecteur unitaire normal à E , égal au vecteur unitaire normal extérieur si $E \in \partial\Omega$. Pour une arête interne $E \in \mathcal{E}_\Omega$, et une application $\varphi \in L^2(\omega_E)$ telle que $\varphi|_{K'} \in \mathcal{C}(K')$, $\forall K' \subset \omega_E$, nous définissons le *saut de φ par dessus E dans la direction \mathbf{n}_E* ,

$$[\![\varphi]\!]_E(\mathbf{x}) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(\mathbf{x} + t\mathbf{n}_E) - \lim_{t \rightarrow 0^-} \varphi(\mathbf{x} - t\mathbf{n}_E) \quad \forall \mathbf{x} \in E.$$

Si $\varphi \in L^2(\omega_E)$ $\forall E \in \mathcal{E}_\Omega$, nous définissons son *saut généralisé*,

$$[\![\varphi]\!]:= \begin{cases} [\![\varphi]\!]_E & \text{sur } E \in \mathcal{E}_\Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement, nous aurons besoin de résultats concernant l'opérateur d'interpolation de Clément. Pour de plus amples informations et des preuves, se référer à [11].

Lemme 1.4. Soit V_h un espace d'éléments finis pour la triangulation régulière \mathcal{T}_h . Alors l'opérateur de Clément $\mathcal{C}_h : H^1(\Omega) \rightarrow V_h$ satisfait les inégalités suivantes, pour tout $v \in H^1(\Omega)$, tout $K \in \mathcal{T}_h$ et tout $E \in \mathcal{E}_\Omega$,

$$\begin{aligned} \|v - \mathcal{C}_h v\|_{L^2(K)} &\leq C_1^c h_K |v|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}, \\ \|v - \mathcal{C}_h v\|_{L^2(\partial K)} &\leq C_2^c h_K^{1/2} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}, \\ \|v - \mathcal{C}_h v\|_{L^2(E)} &\leq C_3^c h_E^{1/2} |v|_{H^1(\tilde{\omega}_E)}, \end{aligned}$$

avec $C_1^c, C_2^c, C_3^c > 0$.

Chapitre 2

Le problème de Poisson

2.1 Dirichlet homogène

Nous considérons premièrement un des problèmes les plus simples, celui de Poisson avec une condition de bord de Dirichlet homogène. Soit Ω , un domaine polygonal de \mathbb{R}^2 . Nous souhaitons résoudre le problème suivant.

Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que,

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

où $f \in L^2(\Omega)$.

En physique, ce problème modellise plusieurs phénomènes dont voici quelques exemples.

- u représente le mouvement d'une membrane accrochée au bord $\partial\Omega$ et subissant une force verticale f .
- u est le potentiel électrique, ∇u est le champs électrique et f est la densité de charge dans Ω . La condition de bord signifie dans ce cas que la composante tangentielle du champs est nulle.
- u est la température dans Ω , f est une source de chaleur tandis que la température est maintenue à 0 sur le bord $\partial\Omega$.

2.1.1 Formulation faible et discréétisation

Multiplions l'équation de (2.1) par une fonction teste $v \in V$ où V est un espace de fonction que nous définirons ultérieurement. Puis intégrant sur le domaine, nous obtenons,

$$-(\Delta u, v)_\Omega = (f, v)_\Omega \quad \stackrel{(1.1)}{\Leftrightarrow} \quad (\nabla u, \nabla v)_\Omega - ((\nabla u \cdot \mathbf{n}), v)_{\partial\Omega} = (f, v)_\Omega$$

Nous prenons donc l'espace

$$V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

et arrivons à la formulation faible du problème (2.1),

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \quad a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V. \quad (2.2)$$

avec

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= (\nabla u, \nabla v)_\Omega, \\ F(v) &:= (f, v)_\Omega. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Les hypothèses du lemme 1.1 de Lax-Milgram sont facilement vérifiées ;

1. $a(., .)$ est continue ; $\forall u, v \in V$,

$$|a(u, v)| = |(\nabla u, \nabla v)_\Omega| \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

2. $a(., .)$ est coercive ; $\forall v \in V$,

$$a(v, v) = (\nabla v, \nabla v)_\Omega = |v|_{H^1(\Omega)} \stackrel{\text{cor. 1.1}}{\geq} \frac{1}{C_2^n} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

3. $F(.)$ est continue : $\forall v \in V$,

$$|F(v)| = (f, v)_\Omega \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ceci nous assure l'existence et l'unicité d'une solution $u \in V$, montrant que le problème est bien posé.

Nous considérons une famille \mathcal{T}_h , $h > 0$, de triangulations régulières de Ω et l'espace des éléments finis

$$V_h := X_h^k \cap V.$$

Nous obtenons le problème discréétisé

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \quad a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.4)$$

Nous pouvons, de la même façon que ci-dessus, appliquer le lemme 1.1 de Lax-Milgram et obtenir l'existence et l'unicité d'une solution u_h telle que

$$\|u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2^n \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ceci implique la stabilité de la méthode (2.4).

2.1.2 Un estimateur résiduel

Supposons que $u \in V$ et $u_h \in V_h$ soient respectivement les solutions des problèmes (2.2) et (2.4). Nous avons alors un résultat de consistance connu sous le nom d'*orthogonalité de Galerkin*. Effectivement, la forme bilinéaire $a(.,.)$ définie en (2.3) est en fait un produit scalaire sur V (on utilise le corollaire 1.1 pour montrer qu'elle est définie positive). De plus, puisque $V_h \subset V$ et par (2.4) et (2.2), nous avons,

$$a(u - u_h, v_h) = a(u, v_h) - a(u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Ceci signifie que l'erreur $u - u_h \in V$, est perpendiculaire au sous-espace V_h , par rapport au produit scalaire défini par $a(.,.)$. Utilisant ce résultat, nous calculons pour $v_h \in V_h$ et $v \in V$,

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) &= a(u - u_h, v) - \underbrace{a(u - u_h, v_h)}_{=0} \\ &= a(u - u_h, v - v_h) \\ &= a(u, v - v_h) - a(u_h, v - v_h) \\ &\stackrel{(2.2)}{=} (f, v - v_h)_\Omega - (\nabla u_h, \nabla(v - v_h))_\Omega \\ &\stackrel{(2.3)}{=} (f, v - v_h)_\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\Delta u_h, v - v_h)_K - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla u_h \cdot \mathbf{n}, v - v_h)_{\partial K} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f + \Delta u_h, v - v_h)_K - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla u_h \cdot \mathbf{n}, v - v_h)_{\partial K}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Reprendons le second terme de la dernière ligne et développons le, en notant que chaque arête interne est comptée dans le bord de deux triangles,

$$\begin{aligned} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla u_h \cdot \mathbf{n}, v - v_h)_{\partial K} &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{E \in \partial K} \frac{1}{2} ([\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!], v - v_h)_E \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} ([\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!], v - v_h)_{\partial K}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nous rassemblons (2.5), (2.6) et utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |a(u - u_h, v)| &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)} \|v - v_h\|_{L^2(K)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \|[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]\|_{L^2(\partial K)} \|v - v_h\|_{L^2(\partial K)} \right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Nous prenons $v_h = \mathcal{C}_h v \in V_h$ l'opérateur d'interpolation de Clément dans (2.7), et utilisons les résultats du lemme 1.4 à ce sujet,

$$\begin{aligned} & |a(u - u_h, v)| \\ & \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)} C_1^c h_K \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} + \frac{1}{2} \|\llbracket \nabla u_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket\|_{L^2(\partial K)} C_2^c h_K^{1/2} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} \right) \\ & \stackrel{\text{D.C.S.}}{\leq} C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} h_K \|\llbracket \nabla u_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket\|_{L^2(\partial K)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec $C = \max\{C_1^c, C_2^c\}$.

Nous définissons maintenant, pour $K \in \mathcal{T}_h$, le *résidu local* η_K ,

$$\eta_K^2 := h_K^2 \|f + \Delta u_h\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} h_K \|\llbracket \nabla u_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket\|_{L^2(\partial K)}^2. \quad (2.9)$$

Puisque \mathcal{T}_h est une triangulation régulière, le nombre de triangles de $\tilde{\omega}_K$ est bornée par un nombre $n \in \mathbb{N}$. Nous obtenons logiquement l'inégalité suivante :

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{n} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (2.10)$$

Nous évaluons, en prenant $v = u - u_h \in V$ dans (2.8), (2.10) et en gardant à l'esprit la définition de η_K (2.9),

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 & \stackrel{\text{Corollaire 1.1}}{\leq} C_2^n \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}^2 = C_2^n a(u - u_h, u - u_h) \\ & \stackrel{(2.8)}{\leq} \underbrace{C_2^n C}_{=: \bar{C}} \sqrt{n} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2} \\ \Rightarrow \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} & \leq \bar{C} \sqrt{n} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nous définissons alors l'estimateur à posteriori basé sur le résidu η_K ,

$$\eta = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}. \quad (2.12)$$

Cette quantité est calculable à partir des données f, h_K et de la solution approximée u_h . Nous avons montrer ici que cet estimateur borne supérieurement l'erreur $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$. Pour montrer que η est bien un estimateur à posteriori de notre problème, il nous faut montrer qu'il borne l'erreur également inférieurement. Ce sont ces propriétés réunies qui vont définir le fait que η « se comporte de la même façon » que l'erreur. Ce résultat est prouvé dans la section suivante, dans un cas plus général.

2.2 Conditions mixtes

Reprendons le problème de Poisson mais cette fois-ci sous sa forme plus générale ; avec des conditions de bords mixtes. Nous prenons une condition de Dirichlet homogène, parce que le cas plus général se ramène à celui-ci via la définitions d'une fonction de relèvement. Notre problème est donc,

Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = g & \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad (2.13)$$

où $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Gamma_N)$, Ω est un domaine polygonal de \mathbb{R}^2 tel que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ avec $\overset{\circ}{\Gamma}_D \cap \overset{\circ}{\Gamma}_N = \emptyset$. Nous supposons que Γ_D est relativement fermé dans $\partial\Omega$ et de mesure non nulle. Ceci parce que le cas de conditions de Neumann pures se traite à part, car il demande des précautions pour garantir l'unicité de la solution.

Nous notons l'ensemble des arêtes contenues dans Γ_N , \mathcal{E}_N , et l'ensemble de celles contenues dans Γ_D , \mathcal{E}_D .

2.2.1 Formulation faible et discréétisation

Comme usuellement, nous multiplions l'équation par $v \in V$, où V est un espace que nous définirons plus tard, puis nous intégrons sur le domaine,

$$-(\Delta u, v)_\Omega = (f, v)_\Omega \stackrel{(1.1)}{\Leftrightarrow} (\nabla u, \nabla v)_\Omega - ((\nabla u \cdot \mathbf{n}), v)_{\partial\Omega} = (f, v)_\Omega.$$

Nous prenons l'espace $V = H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & (\nabla u, \nabla v)_\Omega - ((\nabla u \cdot \mathbf{n}), v)_{\partial\Omega} = (f, v)_\Omega \\ \stackrel{(2.13)}{\Leftrightarrow} & (\nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega + \underbrace{((\nabla u \cdot \mathbf{n}), v)}_{=g}_{\Gamma_N} + \underbrace{((\nabla u \cdot \mathbf{n}), v)}_{=0}_{\Gamma_D}, \end{aligned}$$

et la formulation faible de (2.13) est :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V. \quad (2.14)$$

où

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= (\nabla u, \nabla v)_\Omega, \\ F(v) &:= (f, v)_\Omega + (g, v)_{\Gamma_N}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Les hypothèses du lemme de Lax-Milgram (lemme 1.1) se vérifient comme à la section 2.1.1, sauf la continuité de $F(\cdot) : \forall v \in V$,

$$|F(v)| = (f, v)_\Omega + (g, v)_{\Gamma_N} \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Cela nous assure que le problème (2.14) admet une unique solution, et est donc bien posé.

Soit une famille de triangulations régulières \mathcal{T}_h , $h > 0$. Nous appelons l'espace des éléments finis des fonctions continues par morceaux, correspondant à \mathcal{T}_h ,

$$V_h := X_h^k \cap V.$$

Nous obtenons alors le problème discréétisé

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que } a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.16)$$

Nous appliquons à nouveau le lemme 1.1 de Lax-Milgram, obtenant l'existence et l'unicité d'une solution $u_h \in V_h$ telle que,

$$\|u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_2^n (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)}).$$

La méthode (2.16) est donc stable.

2.2.2 Un estimateur résiduel

Pour simplifier, nous nous restreignons aux éléments de degré 1,

$$V_h := X_h^1 \cap V.$$

Premièrement, en nous référant au corollaire 1.1, nous savons que la seminorme $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ est une norme sur $V = H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$. Ainsi, la norme de l'élément du dual $L_v \in V^*$ correspondant à $v \in V$ peut-être définie comme,

$$\|L_v\|_{V^*} = \sup_{\substack{w \in V \\ \|w\|_{H^1(\Omega)}=1}} (\nabla v, \nabla w)_\Omega.$$

Soient u et u_h les solutions des problèmes (2.13) et (2.16) respectivement. Nous avons grâce au problème discréétisé (2.16)

$$a(u - u_h, v) = (f, v)_\Omega + (g, v)_{\Gamma_N} - (\nabla u_h, \nabla v)_\Omega \quad \forall v \in V. \quad (2.17)$$

Le côté droit de cette équation définit le *résidu de u_h* , $u - u_h$, comme élément du dual V^* .

Nous faisons les deux estimations suivantes,

$$\begin{aligned} (\nabla v, \nabla w)_\Omega &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} \\ &\Rightarrow \sup_{\substack{w \in V \\ \|w\|_{H^1(\Omega)}=1}} (\nabla v, \nabla w)_\Omega \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\stackrel{(1.2)}{\leq} (1 + C_\Omega^2) \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&= (1 + C_\Omega^2) \|v\|_{H^1(\Omega)} (\nabla v, \nabla(v/\|v\|_{H^1(\Omega)}))_\Omega \\
&\leq (1 + C_\Omega^2) \|v\|_{H^1(\Omega)} \sup_{\substack{w \in V \\ \|w\|_{H^1(\Omega)} = 1}} (\nabla v, \nabla w)_\Omega,
\end{aligned} \tag{2.19}$$

où l'on a pu appliquer l'inégalité de Poincaré-Friedrich car Γ_D n'est pas de longueur nulle. Grâce à (2.18), (2.19), nous obtenons l'estimation,

$$\frac{1}{1 + C_\Omega^2} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sup_{\substack{w \in V \\ \|w\|_{H^1(\Omega)} = 1}} (\nabla v, \nabla w)_\Omega \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \tag{2.20}$$

(2.20) reflète le fait que V est isomorphe à son dual V^* .

Ainsi, nous reprenons maintenant (2.17) et en utilisant (2.20) nous avons l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{w \in V \\ \|w\|_{H^1(\Omega)} = 1}} ((f, w)_\Omega + (g, w)_{\Gamma_N} - (\nabla u_h, \nabla w)_\Omega) \\
&\leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq (1 + C_\Omega^2) \sup_{\substack{w \in V \\ \|w\|_{H^1(\Omega)} = 1}} ((f, w)_\Omega + (g, w)_{\Gamma_N} - (\nabla u_h, \nabla w)_\Omega)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Ceci montre que l'erreur $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ est bornée inférieurement et supérieurement par la norme de l'élément du dual correspondant au résidu. Il nous suffit donc de chercher un estimateur à posteriori de cette norme.

La forme bilinéaire étant la même qu'à la section précédente, l'orthogonalité de Galerkin est à nouveau applicable pour les espaces V et V_h . Ainsi,

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Ceci considéré dans (2.17) nous donne alors,

$$(f, v_h)_\Omega + (g, v_h)_{\Gamma_N} - (\nabla u_h, \nabla v_h)_\Omega = 0 \quad \forall v_h \in V_h. \tag{2.22}$$

(2.22) montre que la discrétisation (2.16) est consistante.

Nous rappelons que \mathbf{n} représente le vecteur unitaire extérieur normal au bord des triangles pour les arêtes internes. Il est égal au vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$, lorsque l'arête

est dans le bord du domaine. Puisque $V_h = X_h^1 \cap V$, $\Delta u_h = 0$, ainsi,

$$\begin{aligned}
& (f, v)_\Omega + (g, v)_{\Gamma_N} - (\nabla u_h, \nabla v)_\Omega \\
= & (f, v)_\Omega + (g, v)_{\Gamma_N} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla u_h, \nabla v)_K \\
\stackrel{(1.1)}{=} & (f, v)_\Omega + (g, v)_{\Gamma_N} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left((\underbrace{\Delta u_h, v}_=)_K - (\nabla u_h \cdot \mathbf{n}, v)_{\partial K} \right) \\
= & (f, v)_\Omega + \sum_{E \in \mathcal{E}_N} (g, v)_E - \sum_{E \in \mathcal{E}_h} ([\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E, v)_E \\
= & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f, v)_K + \sum_{E \in \mathcal{E}_N} ((g - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}), v)_E - \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} ([\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E, v)_E,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

où nous avons utilisé le fait que $v = 0$ sur Γ_D .

Considérons maintenant un élément $w \in V$, ainsi que son interpolant de Clément $\mathcal{C}_h w \in V_h$. Nous calculons,

$$\begin{aligned}
& (f, w)_\Omega + (g, w)_{\Gamma_N} - (\nabla u_h, \nabla w)_\Omega \\
\stackrel{(2.22)}{=} & (f, w)_\Omega + (g, w)_{\Gamma_N} - (\nabla u_h, \nabla w)_\Omega - \underbrace{(f, \mathcal{C}_h w)_\Omega - (g, \mathcal{C}_h w)_{\Gamma_N}}_{=0} + (\nabla u_h, \nabla \mathcal{C}_h w)_\Omega \\
\stackrel{(2.23)}{=} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f, w - \mathcal{C}_h w)_K + \sum_{E \in \mathcal{E}_N} (g - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}, w - \mathcal{C}_h w)_E - \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} ([\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E, w - \mathcal{C}_h w)_E \\
\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|f\|_{L^2(K)} \|w - \mathcal{C}_h w\|_{L^2(K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_N} \|g - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)} \|w - \mathcal{C}_h w\|_{L^2(E)} \\
& + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \|[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E\|_{L^2(E)} \|w - \mathcal{C}_h w\|_{L^2(E)} \\
\stackrel{\text{lemme 1.4}}{\leq} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} C_1^c h_K \|f\|_{L^2(K)} \|w\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_N} C_3^c h_E^{1/2} \|g - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)} \|w\|_{H^1(\tilde{\omega}_E)} \\
& + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} C_3^c h_E^{1/2} \|[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E\|_{L^2(E)} \|w\|_{H^1(\tilde{\omega}_E)} \\
\stackrel{\text{D.C.S.}}{\leq} & \max\{C_1^c, C_3^c\} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_N} h_E \|g - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} h_E \|[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2} \\
& \cdot \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|w\|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_N \cup \mathcal{E}_\Omega} \|w\|_{H^1(\tilde{\omega}_E)}^2 \right)^{1/2} \\
\leq & c_T \max\{C_1^c, C_3^c\} \|w\|_{H^1(\Omega)} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_N} h_E \|g - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)}^2 \right. \\
& \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} h_E \|[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2},
\end{aligned} \tag{2.24}$$

où la constante c_T ne dépend que du plus petit angle de la triangulation \mathcal{T}_h . Nous combinons maintenant (2.21) et (2.24) obtenant ainsi

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &\leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|f\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_N} h_E \|g - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} h_E \|\llbracket \nabla u_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket_E\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

avec $C = c_T \max\{c_7, c_8\}(1 + C_\Omega^2)$.

La partie de droite dans l'équation (2.25) peut être utilisée comme estimateur à posteriori. En effet, cette quantité est calculable à partir des données f , g , des propriétés géométriques de la triangulation \mathcal{T}_h et de la solution approximée u_h . Malheureusement, les termes dépendants de f et g peuvent demander des calculs d'intégrales compliqués voire impossibles. Pour cette raison, nous allons approximer les fonctions f et g par des fonctions dans des espaces de dimension finie. [2] explique que cette approche donne souvent les même estimateurs que si on calcule les intégrales par des formules de quadrature. Nous allons donc prendre comme approximations de f et g les projections L^2 sur les espaces des fonctions constantes par morceaux sur les triangles et les arêtes de \mathcal{T}_h et \mathcal{E}_N . Ainsi, pour $K \in \mathcal{T}_h$ et $E \in \mathcal{E}_N$:

$$f_K := \frac{1}{|K|} \int_K f, \quad g_E := \frac{1}{h_E} \int_E g. \quad (2.26)$$

donc les moyennes de f et g sur respectivement K et E .

Nous définissons alors à partir de (2.25) l'estimateur à posteriori résiduel suivant

$$\begin{aligned} \eta_K^2 &:= h_K^2 \|f_K\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_\Omega} h_E \|\llbracket \nabla u_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket_E\|_{L^2(E)}^2 \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_N} h_E \|g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)}^2, \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nous montrons le résultat suivant, qui implique que cet estimateur « se comporte de la même façon que » l'erreur $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$.

Théorème 2.1. *Soient u , u_h les solutions des problème (2.14) et (2.16) respectivement. Alors pour l'estimateur résiduel d'erreur à posteriori défini en (2.27) il existe deux constantes positives \overline{C} , \bar{C} telles que*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} &\leq \overline{C} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|f - f_K\|_{L^2(K)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_N} h_E \|g - g_E\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \eta_K \leq \bar{C} & \left(\|u - u_h\|_{H^1(\omega_K)}^2 + \sum_{K' \subset \omega_K} h_{K'}^2 \|f - f_{K'}\|_{L^2(K')}^2 \right. \\ & \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_N \cap \mathcal{E}(K)} h_E \|g - g_E\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \end{aligned}$$

Preuve :

Borne supérieure de l'erreur

Le facteur $\frac{1}{2}$ devant le second terme de η_K^2 (2.27) vient du fait que les arêtes internes sont comptées deux fois en sommant sur tous les triangles. En tenant compte de cette remarque, de (2.25), des inégalités triangulaires suivantes,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(K)} & \leq \|f - f_K\|_{L^2(K)} + \|f_K\|_{L^2(K)}, \\ \|g - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)} & \leq \|g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)} + \|g - g_E\|_{L^2(E)}, \end{aligned}$$

puis en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwarz discrète, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} & \leq C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_{R,K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|f - f_K\|_{L^2(K)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_N} h_E \|g - g_E\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

ce qui montre la première partie du théorème.

Borne inférieure de l'erreur

Nous souhaitons maintenant montrer que cet estimateur permet de contrôler l'erreur par en dessous également. Pour ce faire nous effectuons 3 étapes, visant à majorer chacun des trois termes de η_K dans (2.27).

Premier terme :

Nous définissons pour $K \in \mathcal{T}_h$,

$$w_K := f_K b_K. \tag{2.29}$$

Nous calculons grâce à sa définition en (2.26),

$$\|f_K\|_{L^2(K)}^2 = \int_K |f_K|^2 = |K| |f_K|^2. \tag{2.30}$$

Par le lemme 1.3 et la définition de f_K (2.26) nous obtenons la propriété suivante,

$$(f_K, w_K)_K = |f_K|^2 \int_K \beta_K = \frac{9}{20} |K| |f_K|^2 \stackrel{(2.30)}{=} \frac{9}{20} \|f_K\|_{L^2(K)}^2. \quad (2.31)$$

De plus, encore par le lemme 1.3, $\text{supp } w_K \subset K$ et donc,

$$w_K \equiv 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \cup \Omega \setminus K. \quad (2.32)$$

Grâce à ce fait et à (2.23) nous avons,

$$(g, w_K)_{\Gamma_N} - (\nabla u_h, \nabla w_K)_{\Omega} = 0.$$

Nous calculons avec ceci,

$$\begin{aligned} (f_K, w_K)_K &= (f, w_K)_K + (f_K - f, w_K)_K \\ &\stackrel{(2.32)}{=} (f, w_K)_{\Omega} + \underbrace{(g, w_K)_{\Gamma_N} - (\nabla u_h, \nabla w_K)_{\Omega}}_{=0} + (f_K - f, w_K)_K \\ &\stackrel{(2.17)}{=} (\nabla(u - u_h), \nabla w_K)_{\Omega} + (f_K - f, w_K)_K \\ &\stackrel{(2.32)}{=} (\nabla(u - u_h), \nabla w_K)_K + (f_K - f, w_K)_K \\ &\stackrel{\text{C.S. et } \|\cdot\|_{H^1}}{\leq} \|u - u_h\|_{H^1(K)} \|\nabla w_K\|_{L^2(K)} + \|f_K - f\|_{L^2(K)} \|w_K\|_{L^2(K)} \\ &\stackrel{\nabla w_K = f_K \nabla \beta_K}{\stackrel{\text{lemme 1.3}}{\leq}} \|u - u_h\|_{H^1(K)} c_5 h_K^{-1} |f_K| \|\beta_K\|_{L^2(K)} + \|f - f_K\|_{L^2(K)} |f_K| \|\beta_K\|_{L^2(K)}. \end{aligned}$$

Notons que le lemme 1.3 implique,

$$\begin{aligned} \|\beta_K\|_{L^2(K)} &= \left(\int_K \beta_K^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_K \beta_K \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{9}{20}} |K|^{1/2} \\ &\stackrel{(2.30)}{\Rightarrow} |f_K| \|\beta_K\|_{L^2(K)} \leq \sqrt{\frac{9}{20}} \|f_K\|_{L^2(K)}. \end{aligned}$$

Ainsi en combinant ces deux derniers résultats, nous obtenons

$$(f_K, w_K)_K \leq \sqrt{\frac{9}{20}} \|f_K\|_{L^2(K)} \left(c_5 h_K^{-1} \|u - u_h\|_{H^1(K)} + \|f - f_K\|_{L^2(K)} \right). \quad (2.33)$$

En assemblant (2.31), (2.33) et notant le fait que $\frac{20}{9} \sqrt{\frac{9}{20}} = \sqrt{\frac{20}{9}}$, nous pouvons affirmer que,

$$\|f_K\|_{L^2(K)} \leq \sqrt{\frac{20}{9}} \left(c_5 h_K^{-1} \|u - u_h\|_{H^1(K)} + \|f - f_K\|_{L^2(K)} \right). \quad (2.34)$$

Deuxième terme :

Prenons maintenant une arête interne $E \in \mathcal{E}_\Omega$ et définissons,

$$w_E := [\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E b_E. \quad (2.35)$$

Nous calculons comme au point précédent,

$$\|[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E\|_{L^2(E)}^2 = \int_E |[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E|^2 = |[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E|^2 h_E. \quad (2.36)$$

Le lemme 1.3 nous donne la propriété,

$$\begin{aligned} ([\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E, w_E)_E &= \|[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E\|^2 \int_E b_E = \frac{2}{3} h_E |[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E|^2 \\ &\stackrel{(2.36)}{=} \frac{2}{3} \|[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E\|_{L^2(E)}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

A nouveau, le lemme 1.3 nous donne $\text{supp } w_E \subset \omega_E$ et donc,

$$w_E \equiv 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \cup \Omega \setminus \omega_E. \quad (2.38)$$

Nous calculons alors,

$$\begin{aligned} &([\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E, w_E)_E \\ &\stackrel{(1.1)}{=} \underbrace{(\Delta u_h, w_E)_{\omega_E}}_{=0} + (\nabla u_h, \nabla w_E)_{\omega_E} \\ &\stackrel{(2.38)}{=} \underbrace{(f, w_E)_{\omega_E} - (f, w_E)_\Omega}_{=0} - \underbrace{(g, w_E)_{\Gamma_N}}_{=0} + (\nabla u_h, \nabla w_E)_\Omega \\ &\stackrel{(2.17)}{=} (f, w_E)_{\omega_E} - (\nabla(u - u_h), \nabla w_E)_{\omega_E} \\ &\stackrel{\text{C.S., } \|\cdot\|_{H^1}}{\leq} \|f\|_{L^2(\omega_E)} \|w_E\|_{L^2(\omega_E)} + \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} \|\nabla w_E\|_{L^2(\omega_E)} \\ &\stackrel{\text{lemme 1.3}}{\leq} \|f\|_{L^2(\omega_E)} |[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E| \|b_E\|_{L^2(\omega_E)} + \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} |[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E| c_6 h_E^{-1} \|b_E\|_{L^2(\omega_E)}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Nous notons comme précédemment, en précisant que ω_E contient deux triangles (E est une arête interne),

$$\|b_E\|_{L^2(\omega_E)} = \left(\int_{\omega_E} b_E^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\omega_E} b_E \right)^{1/2} \stackrel{\text{lemme 1.3}}{\leq} \sqrt{2c_4} h_E.$$

Ceci et (2.39) nous indique que,

$$\begin{aligned}
& (\llbracket \nabla u_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket_E, w_E)_E \\
& \leq \sqrt{2c_4} h_E \|\llbracket \nabla u_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket_E\| \left(\|f\|_{L^2(\omega_E)} + c_6 h_E^{-1} \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} \right) \\
& \stackrel{(2.36)}{=} \sqrt{2c_4} \|\llbracket \nabla u_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket_E\|_{L^2(E)} \left(h_E^{1/2} \|f\|_{L^2(\omega_E)} + c_6 h_E^{-1/2} \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} \right) \\
& \stackrel{\text{in. tri.}}{\leq} \sqrt{2c_4} \|\llbracket \nabla u_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket_E\|_{L^2(E)} \left(h_E^{1/2} \sum_{K' \subset \omega_E} \|f_{K'}\|_{L^2(K')} + h_E^{1/2} \sum_{K' \subset \omega_E} \|f - f_{K'}\|_{L^2(K')} \right. \\
& \quad \left. + c_6 h_E^{-1/2} \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} \right) \\
& \stackrel{(2.34)}{\leq} \sqrt{2c_4} \|\llbracket \nabla u_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket_E\|_{L^2(E)} \left(h_E^{1/2} \sum_{K' \subset \omega_E} \sqrt{\frac{20}{9}} \left(c_5 h_K'^{-1} \|u - u_h\|_{H^1(K')} + \|f - f_{K'}\|_{L^2(K')} \right) \right. \\
& \quad \left. + h_E^{1/2} \sum_{K' \subset \omega_E} \|f - f_{K'}\|_{L^2(K')} + c_6 h_E^{-1/2} \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} \right) \\
& \leq \sqrt{2c_4} \|\llbracket \nabla u_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket_E\|_{L^2(E)} \left(\left(1 + \sqrt{\frac{20}{9}} \right) h_E^{1/2} \sum_{K' \subset \omega_E} \|f - f_{K'}\|_{L^2(K')} \right. \\
& \quad \left. + \left(c_6 + \sqrt{\frac{20}{9}} c_5 \max_{K' \subset \omega_E} \left\{ \frac{h_E}{h_K'} \right\} \right) h_E^{-1/2} \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} \right) \\
& \leq C \|\llbracket \nabla u_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket_E\|_{L^2(E)} \left(h_E^{1/2} \sum_{K' \subset \omega_E} \|f - f_{K'}\|_{L^2(K')} + h_E^{-1/2} \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} \right).
\end{aligned} \tag{2.40}$$

où $C = \sqrt{2c_4} \max\{1 + \sqrt{\frac{20}{9}}, c_6 + \sqrt{\frac{20}{9}} c_5 \max_{K' \subset \omega_E} \left\{ \frac{h_E}{h_K'} \right\}\}$. Nous obtenons finalement en combinant (2.37) et (2.40) l'évaluation,

$$\|\llbracket \nabla u_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket_E\|_{L^2(E)} \leq \frac{3}{2} C \left(h_E^{1/2} \sum_{K' \subset \omega_E} \|f - f_{K'}\|_{L^2(K')} + h_E^{-1/2} \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} \right). \tag{2.41}$$

Troisième terme :

Prenons enfin une arête dans Γ_N , $E \in \mathcal{E}_N$. Nous définissons,

$$w_E := (g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}) b_E. \tag{2.42}$$

Encore une fois nous calculons,

$$\|g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)}^2 = \int_E |g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}|^2 = |g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}|^2 h_E. \tag{2.43}$$

Nous avons $\omega_E = \hat{K}$, pour un $\hat{K} \in \mathcal{T}_h$, car E appartient au bord de Ω . Nous avons par le lemme 1.3

$$(g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}, w_E)_E = \frac{2}{3} |(g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n})|^2 h_E \stackrel{(2.43)}{=} \frac{2}{3} \|(g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n})\|_{L^2(E)}. \tag{2.44}$$

De la même façon que dans l'étape précédente, en gardant à l'esprit que $\text{supp } w_E \subset \omega_E$,

$$\begin{aligned}
& (g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}, w_E)_E \\
= & (g - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}, w_E)_E + (g_E - g, w_E)_E \\
\stackrel{(1.1)}{=} & \underbrace{-(f, w_E)_{\omega_E} + (f, w_E)_{\Omega}}_{=0} + (g, w_E)_{\Gamma_N} - (\nabla u_h, \nabla w_E)_{\Omega} + (g_E - g, w_E)_E \\
\stackrel{(2.17)}{=} & (\nabla(u - u_h), \nabla w_E)_{\omega_E} - (f, w_E)_{\omega_E} + (g_E - g, w_E)_E \\
\stackrel{\text{C.S., } \|\cdot\|_{H^1}}{\leq} & \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} \|\nabla w_E\|_{L^2(\omega_E)} + \|f\|_{L^2(\omega_E)} \|w_E\|_{L^2(\omega_E)} + \|g_E - g\|_{L^2(\omega_E)} \|w_E\|_{L^2(E)} \\
\stackrel{\text{lemme 1.3}}{\leq} & \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} |g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}| c_6 h_E^{-1} \|\beta_E\|_{L^2(\omega_E)} + \|f\|_{L^2(\omega_E)} |g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}| \|\beta_E\|_{L^2(\omega_E)} \\
& + \|g - g_E\|_{L^2(\omega_E)} |g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}| \|\beta_E\|_{L^2(E)}. \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Encore une fois nous notons grâce au lemme 1.3 et que $\omega_E = \hat{K}$,

$$\begin{aligned}
\|\beta_E\|_{L^2(\omega_E)} &= \left(\int_{\omega_E} \beta_E^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_{\omega_E} \beta_E \right)^{1/2} \stackrel{\text{lemme 1.3}}{\leq} \sqrt{c_4} h_E, \\
\|\beta_E\|_{L^2(E)} &= \left(\int_E \beta_E^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_E \beta_E \right)^{1/2} \stackrel{\text{lemme 1.3}}{=} \sqrt{\frac{2}{3}} h_E^{1/2},
\end{aligned}$$

Injectons ceci dans (2.45),

$$\begin{aligned}
& (g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}, w_E)_E \\
\leq & |g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}| \left(\sqrt{c_4} c_6 \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} + \sqrt{c_4} h_E \|f\|_{L^2(\omega_E)} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} h_E^{1/2} \|g - g_E\|_{L^2(E)} \right) \\
\stackrel{\text{in. tri.}}{\leq} & h_E^{1/2} |g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}| \left(\sqrt{c_4} c_6 h_E^{-1/2} \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} + \sqrt{c_4} h_E^{1/2} (\|f - f_{\hat{K}}\|_{L^2(\hat{K})} + \|f_{\hat{K}}\|_{L^2(\hat{K})}) \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \|g - g_E\|_{L^2(E)} \right) \\
\stackrel{(2.43)}{\leq} & \|g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)} \left(\sqrt{c_4} c_6 h_E^{1/2} \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} + \sqrt{c_4} h_E^{1/2} \|f - f_{\hat{K}}\|_{L^2(\hat{K})} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{c_4} h_E^{1/2} \sqrt{\frac{20}{9}} (c_5 h_{\hat{K}}^{-1} \|u - u_h\|_{H^1(\hat{K})} + \|f - f_{\hat{K}}\|_{L^2(\hat{K})}) \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \|g - g_E\|_{L^2(E)} \right) \\
\leq & \|g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)} \left((\sqrt{c_4} c_6 h_E^{-1/2} + \sqrt{c_4} h_E^{1/2} \sqrt{\frac{20}{9}} c_5 h_{\hat{K}}^{-1}) \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{c_4} h_E^{1/2} (1 + \sqrt{\frac{20}{9}}) \|f - f_{\hat{K}}\|_{L^2(\hat{K})} + \sqrt{\frac{2}{3}} \|g - g_E\|_{L^2(E)} \right) \\
\leq & C' \|g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)} \left(h_E^{-1/2} \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} + h_E^{1/2} \|f - f_{\hat{K}}\|_{L^2(\hat{K})} + h_E^{1/2} \|g - g_E\|_{L^2(E)} \right), \quad (2.46)
\end{aligned}$$

où $C' = \max \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} h_E^{-1/2}, \sqrt{c_4} \left(1 + \sqrt{\frac{20}{9}} \right), \sqrt{c_4} \left(c_6 + \sqrt{\frac{20}{9}} c_5 \frac{h_E}{h_{\hat{K}}} \right) \right\}$.

Nous combinons enfin (2.44) et (2.46) et obtenons,

$$\begin{aligned}
\|g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)} \leq & \frac{3}{2} C' \left(h_E^{-1/2} \|u - u_h\|_{H^1(\omega_E)} + h_E^{1/2} \|f - f_{\hat{K}}\|_{L^2(\hat{K})} \right. \\
& \quad \left. + h_E^{1/2} \|g - g_E\|_{L^2(E)} \right). \quad (2.47)
\end{aligned}$$

Grâce aux résultats (2.34), (2.41) et (2.47), nous avons le second résultat du théorème.

□

2.3 Exemples numériques

Dans cette section, nous testons une méthode d'affinage basée sur l'estimateur résiduel η_K défini en (2.27). D'abord nous l'utilisons dans un exemple dont nous connaissons la

solution analytique, puis dans un exemple plus évolué.

2.3.1 Un problème simple

Soit Ω le carré unité centré en $(0.5, 0.5)$ dont nous nommons les arêtes E_1, \dots, E_4 en partant de celle du bas. Nous posons le problème de Poisson au conditions mixtes suivant : Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que,

$$\begin{cases} -\Delta u = 2(x^2 + y^2 - 1) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } E_3 \cup E_4, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = 2(1 - y^2) & \text{sur } E_1, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } E_2. \end{cases} \quad (2.48)$$

Ce problème est illustré dans la figure 2.1.

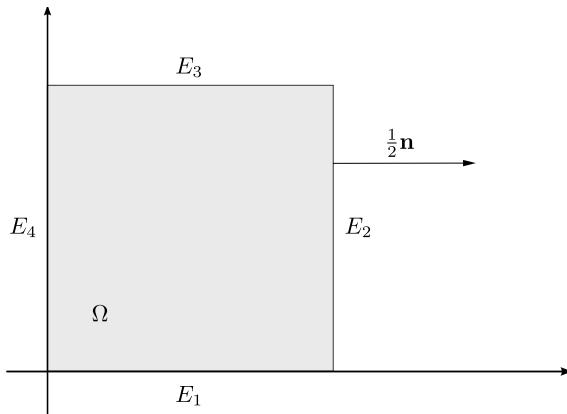


FIGURE 2.1 – Situation du problème de Poisson posé.

Nous vérifions par un calcul que la solution à ce problème est,

$$u(x, y) = x^2(1 - y^2).$$

Pour un aperçu, nous la représentons sur la figure 2.2.

Nous utilisons la stratégie d'affinage présentée dans l'introduction. Le code FreeFEM se trouve dans le listing 1.

Les valeurs précises de η_K n'étant pas significatives, nous donnons dans la figure 2.3 l'échelle croissante correspondant aux couleurs (de gauche à droite) :

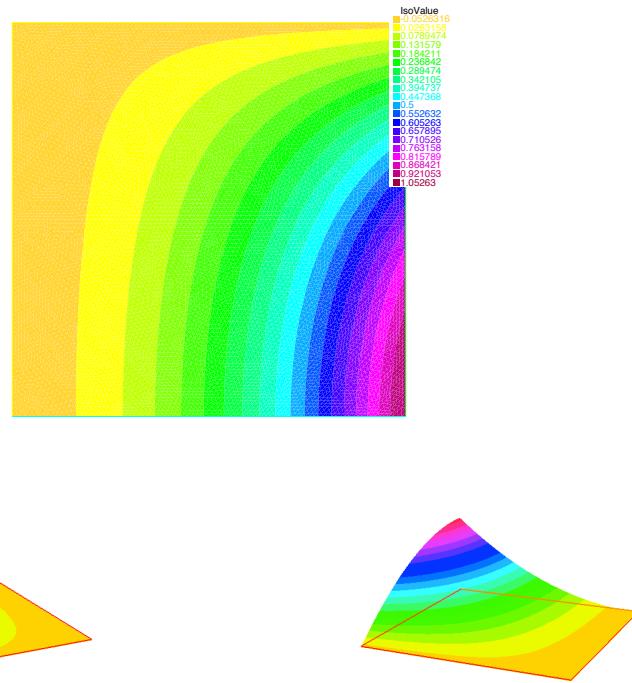
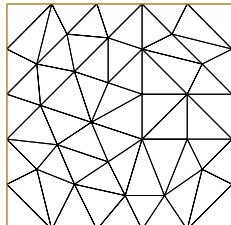
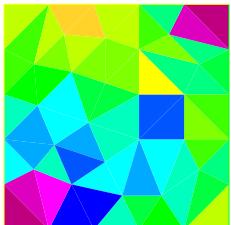
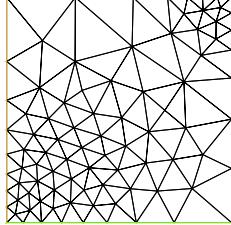
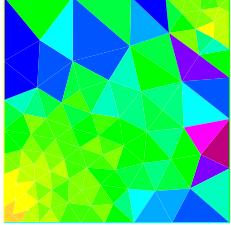
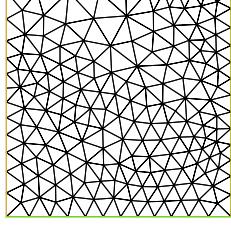
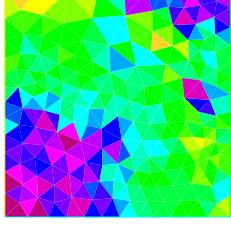
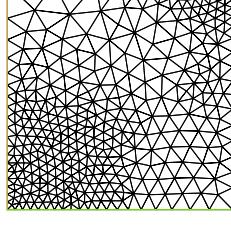
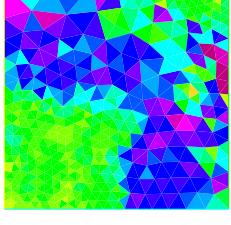
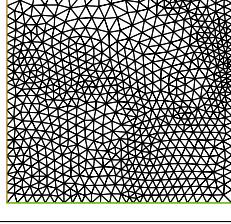
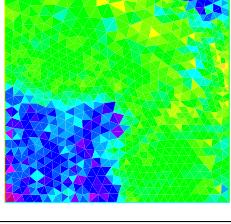
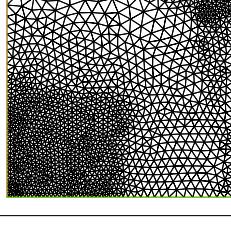
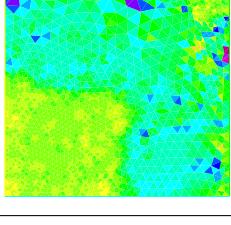
FIGURE 2.2 – La solution $u(x, y)$ représentée sur Ω .

FIGURE 2.3 – Echelle correspondante aux couleurs, dans l'ordre croissant.

Nous effectuons pour cet exemple 6 itérations. Nous nous concentrerons sur le maillage accompagné de η_K à chacun des pas :

Itération n°	maillage	η_K	$\min_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K / \max_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K$
1.			0.00494196 / 0.0850693
2.			0.00479504 / 0.0381008
3.			0.00125173 / 0.0123623
4.			0.000814284 / 0.00662394
5.			0.000240672 / 0.00344949
6.			0.000177257 / 0.00233866

Nous calculons les erreurs $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ à chaque pas, ainsi que η .

It. n°	$\ u - u_h\ _{L^2(\Omega)}$	$\ u - u_h\ _{H^1(\Omega)}$	η	$\ u - u_h\ _{H^1(\Omega)}/\eta$
1	0.000788626	0.153181	0.305245	0.501828
2	0.00138535	0.125052	0.179822	0.695424
3	0.000383591	0.0659814	0.118583	0.556417
4	0.000427089	0.0523337	0.0824164	0.634991
5	9.97407e-05	0.0309592	0.0555495	0.557327
6	0.000108998	0.0270448	0.0390452	0.692655
7	2.351e-05	0.0161134	0.0265671	0.606518
8	2.81004e-05	0.014262	0.0185905	0.767166

Il ressort de ces valeurs que le processus d'affinage réduit bien l'erreur en norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$, montrant que la méthode est efficace. Nous remarquons de plus que le rapport entre $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$ et η ne varie que peu. Ceci illustre le résultat prouvé dans le théorème 2.1 ; que η « se comporte de la même façon que » l'erreur $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$.

2.3.2 Domaine en L

Nous allons maintenant tester la méthode sur un domaine en L. Soit donc Ω , le domaine formé du même carré unité, amputé du quart supérieur gauche. Notons E_1, \dots, E_6 les arêtes de Ω en commençant la numérotation par celle du bas. Nous posons alors le problème suivant ;

Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que,

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u &= x - y \quad \text{dans } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{sur } E_1 \cup E_2 \cup E_5 \cup E_6, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } E_3 \cup E_4. \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Donnons un schéma de la situation, dans la figure 2.4.

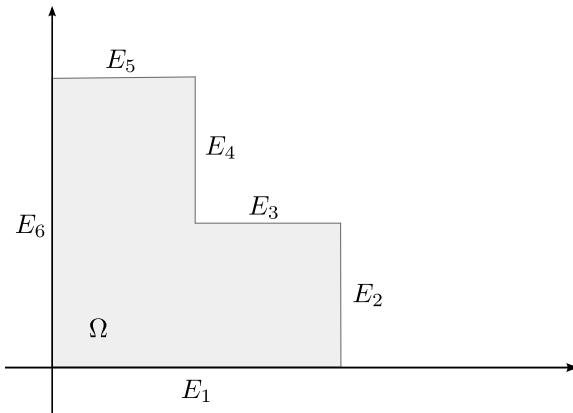
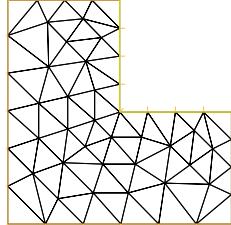
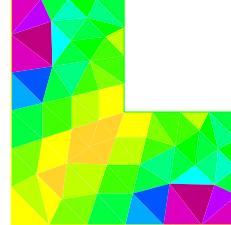
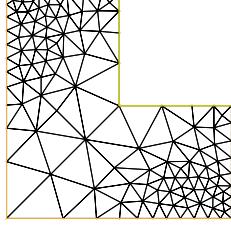
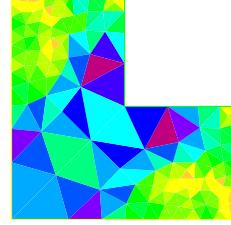
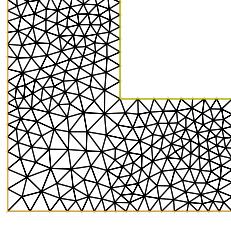
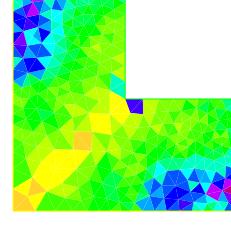
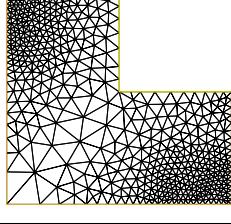
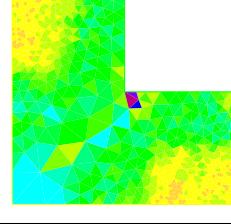
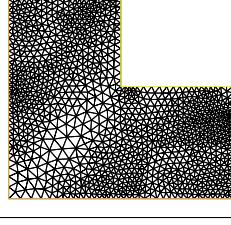
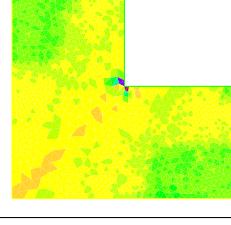
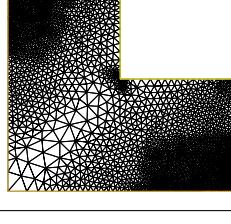
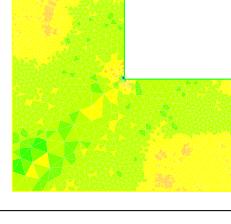


FIGURE 2.4 – Situation du problème (2.49).

Le code FreeFEM se trouve dans le listing 2. Nous montrons ici le maillages et l'estimateur η_K à chacune des 6 itérations.

Itération n°	maillage	η_K	$\min_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K / \max_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K$
1.			0.000574953 / 0.0215164
2.			0.00109663 / 0.00732726
3.			0.000166375 / 0.00320729
4.			0.000202643 / 0.00212141
5.			2.27822e-05 / 0.00176695
6.			1.81487e-05 / 0.00126673

Nous remarquons que le maillage s'affine bien à l'endroit de la singularité de Ω , $(0.5, 0.5)$ et dans les coins supérieurs gauche et inférieur droit. De plus, à l'itération 6, η_K est faible sur presque tous les triangles, reflétant la qualité du \mathcal{T}_h . L'évolution de la solution approximée est affichée dans les figures 2.5 et 2.6,

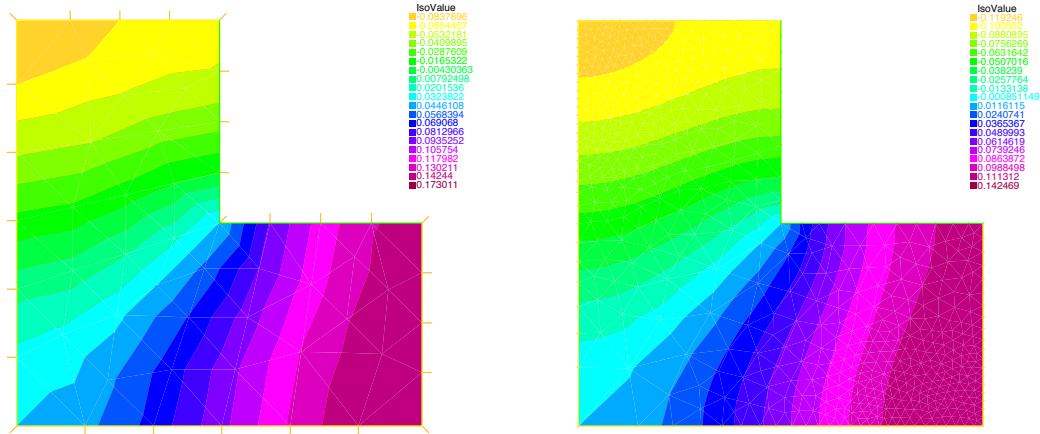


FIGURE 2.5 – Solution approximée u_h , respectivement aux itérations 1 et 4.

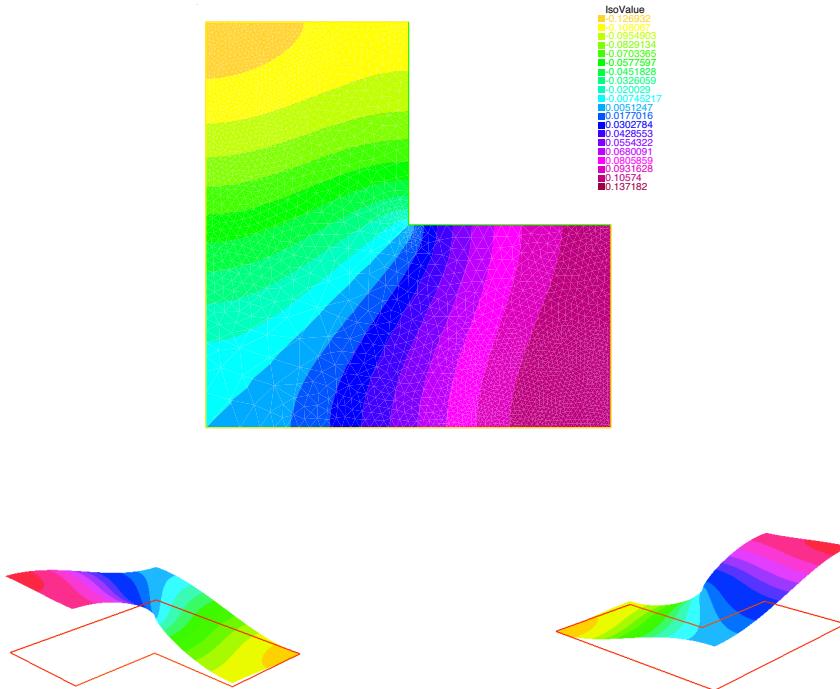


FIGURE 2.6 – Solution approximée u_h à l'étape 6.

Chapitre 3

Le problème de Stokes

Nous considérons dans ce chapitre le problème de Stokes sous sa forme simplifiée. Il provient des équations de Navier-Stokes dans lequel le terme non linéaire a été négligé. Il modélise le flux d'un fluide Newtonien incompressible dans un domaine planaire. Les fonctions cherchées sont la vitesse du fluide \mathbf{u} et sa pression p .

Soit Ω un domaine polygonal de \mathbb{R}^2 .

On cherche $(\mathbf{u}, p) \in [H^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$ telles que,

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\nu \in \mathbb{R}^+$ désigne la viscosité du fluide, $\mathbf{f} \in [L^2(\Omega)]^2$ est une force et $L_0^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions de moyenne nulle sur Ω ;

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : (q, 1)_\Omega = 0\}.$$

3.1 Formulation faible

De la même manière qu'au chapitre précédent, nous allons établir la formulation faible du problème (3.1). Pour ce faire, multiplions la première équation par une fonction teste $v \in \mathbf{V}$ et de même la deuxième par une fonction $q \in Q$, où \mathbf{V} et Q sont des espaces que nous définirons plus tard. De plus, nous intégrons chaque équation sur le domaine Ω . Nous obtenons pour la première,

$$\begin{aligned} & (-\nu \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega + (\nabla p, \mathbf{v})_\Omega = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega \\ \stackrel{(1.2)}{\Leftrightarrow} & \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega - \nu (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v})_{\partial\Omega} - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_\Omega + (p, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\partial\Omega} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega \\ \Leftrightarrow & \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_\Omega - (\nu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}, \mathbf{v})_{\partial\Omega} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega. \end{aligned} \quad (3.2)$$

et la deuxième,

$$(q, \nabla \cdot \mathbf{u})_{\Omega} = 0. \quad (3.3)$$

Nous définissons donc l'espace,

$$\mathbf{V} := [\mathrm{H}_0^1(\Omega)]^2 = \{v \in \mathrm{H}^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}^2.$$

Notons que le problème "n'influence" que ∇p . En d'autres termes si p est une solution, $p + c$, $c \in \mathbb{R}$ est également solution. C'est afin d'éviter cette multitude de solutions nous cherchons p dans l'espace

$$Q := \mathrm{L}_0^2(\Omega) = \{q \in \mathrm{L}^2(\Omega) : (q, 1)_{\Omega} = 0\}.$$

Grâce à la définition de \mathbf{V} , nous avons par (3.2),

$$\begin{aligned} & (-\nu \Delta \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} + (\nabla p, \mathbf{v})_{\Omega} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega} \\ \Leftrightarrow & \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega} - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega}. \end{aligned}$$

Et nous obtenons grâce à cela et à (3.3) le problème suivant,

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q \text{ tel que} \quad & a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \\ & b(\mathbf{u}, q) = 0 \quad \forall q \in Q, \end{aligned} \quad (3.4)$$

où,

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega}, \\ b(\mathbf{v}, p) &:= -(p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega}, \\ F(\mathbf{v}) &:= (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Les hypothèses du théorème de Brezzi (théorème 1.1) sont facilement vérifiables :

1. $a(., .)$ est continue : $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$,

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| = |\nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega}| \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} |\nu| \|\mathbf{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq |\nu| \|\mathbf{u}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)};$$

2. $a(., .)$ est coercive sur tout \mathbf{V} (en particulier sur le sous espace voulu) : $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$,

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nu (\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega} = \nu \|\mathbf{v}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}^2 \stackrel{\text{cor. 1.1}}{\geq} \frac{\nu}{C_2^n} \|\mathbf{v}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)}^2;$$

3. $b(., .)$ est continue : $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \forall q \in Q$,

$$|b(\mathbf{v}, q)| = |(p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega}| \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)} \leq \|p\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega)};$$

4. La condition inf-sup est satisfaite. Nous nous référons à la proposition 5.3.2 de [13] impliquant qu'il existe $\beta^* > 0$ tel que

$$\forall q \in Q, \exists \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}, \text{ tel que } \text{ tel que } b(\mathbf{v}, q) \geq \beta^* \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous obtenons ainsi l'existence et l'unicité d'une solution au problème (3.6) qui est ainsi bien posé.

En additionnant les deux lignes de (3.4) nous obtenons la formulation variationnelle du problème (3.1) équivalente à (3.4),

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q \text{ tel que} \\ &\mathbf{B}((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = \mathbf{F}(\mathbf{v}, q) \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q. \end{aligned} \tag{3.6}$$

où

$$\mathbf{B}((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) := \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_\Omega - (q, \nabla \cdot \mathbf{u})_\Omega, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}, q) := (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega. \tag{3.8}$$

Nous tirons de [8] l'estimation suivante, $\forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q$,

$$\sqrt{\nu} |\mathbf{v}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|q\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sup_{(\mathbf{w}, t) \in \mathbf{V} \times Q \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{B}((\mathbf{v}, q), (\mathbf{w}, t))}{\sqrt{\nu} |\mathbf{w}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|t\|_{L^2(\Omega)}}, \tag{3.9}$$

où $C > 0$ est indépendante de ν .

3.2 Discrétisation par la méthode de Galerkin

En appliquant la méthode de Galerkin pour discréteriser le problème (3.6), nous obtenons pour des espaces d'éléments finis $\mathbf{V}_h \subset V$ et $Q_h \subset Q$;

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ tel que} \\ &\mathbf{B}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \mathbf{F}(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h, \end{aligned} \tag{3.10}$$

où $\mathbf{B}(\cdot, \cdot)$ et $\mathbf{F}(\cdot, \cdot)$ sont définis en (3.7) et (3.8).

Le choix des sous-espaces \mathbf{V}_h et Q_h engendrent différentes possibilités. Premièrement, Q_h peut être un espace de fonctions discontinues, donnant alors une pression discontinue. Mais l'alternative principale, est si ces espaces satisfont ou ne satisfont pas la condition inf-sup (1.5) du théorème de Brezzi (théorème 1.1).

Si inf-sup n'est pas satisfaite, nous pouvons montrer que,

$$\exists p_h^* \in Q_h \quad \text{tel que} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad (p_h^*, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_\Omega = 0.$$

Soit alors une solution $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ de (3.10), et construisons $\tilde{p}_h := p_h + p_h^* \in Q_h$. Alors $\forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}((\mathbf{u}_h, \tilde{p}_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) &= \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_\Omega - (\tilde{p}_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_\Omega - (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_\Omega \\ &= \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_\Omega - (p_h + p_h^*, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_\Omega - (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_\Omega \\ &= \nu(\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_\Omega - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_\Omega - \underbrace{(p_h^*, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_\Omega}_{=0} - (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_\Omega \\ &\stackrel{(3.10)}{=} \mathbf{F}(\mathbf{v}_h, q_h), \end{aligned}$$

et $(\mathbf{u}_h, \tilde{p}_h)$ est aussi une solution de (3.6). La recherche de p_h dans la méthode de Galerkin est donc parasitée par ces p_h^* entraînant une instabilité.

Mentionnons quelques exemples de paires d'espaces inf-sup stables et instables. Rappelons que,

$$\mathbf{X}_h^k := \{ v \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v|_K \in \mathbb{P}^k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \}.$$

Nous notons \mathbb{P}_k si on utilise des polynômes de dimension k sur chaque élément K de la discrétisation \mathcal{T}_h pour respectivement \mathbf{V}_h et Q_h . C'est-à-dire que $\mathbb{P}_k - \mathbb{P}_l$ signifie,

$$\mathbf{V}_h = [\mathbf{H}_0^1(\Omega) \cap \mathbf{X}_h^k]^2,$$

$$Q_h = Q \cap \mathbf{X}_h^l \quad \text{dans le cas d'une pression continue,}$$

$$Q_h = \{q \in \mathbf{L}_0^2(\Omega) : q|_K \in \mathbb{P}^l \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad \text{dans le cas d'une pression discontinue.}$$

A noter que l'utilisation des fonctions bulles ajoute un degré de liberté sur chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$. Pour plus de précisions voir [4], p. 51.

Pression discontinue :

$$\text{inf-sup stable : } \mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_0$$

$$(\mathbb{P}_2 + \text{fonction bulle}) - \mathbb{P}_1 \quad (\text{Crouzeix-Raviart})$$

$$\text{inf-sup instable : } \mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_0$$

Pression continue :

$$\text{inf-sup stable : } (\mathbb{P}_1 + \text{fonction bulle}) - \mathbb{P}_1 \quad (\text{Mini-elements})$$

$$\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1 \quad (\text{Taylor-Hood})$$

$$\mathbb{P}_1 - \text{iso} - \mathbb{P}_2$$

$$\text{inf-sup instable : } \mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$$

Lorsque les espaces entraînent un schéma inf-sup instable, on ajoute des termes stabilisateurs dans la forme variationnelle du problème rendant la méthode stable. Comme exemples, les méthodes SUPG (Streamline Upwind/Petrov-Galerkin) et GLS (Galerkin/-Least Squares). Pour voir les méthodes explicitement, consulter [4], p. 52.

3.3 Une méthode stabilisée

Nous introduisons ici la méthode tirée de [3], elle-même basée sur celle de Wang et Douglas (1989, voir [7]). Nous nous restreindrons au cas d'une approximation continue de la pression.

Soit une triangulation régulière de Ω , \mathcal{T}_h , $h > 0$. Nous définissons les espaces

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_h &:= [\mathbf{X}_h^k \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)]^2, \\ Q_h &:= \mathbf{X}_h^1 \cap \mathbf{L}_0^2(\Omega).\end{aligned}$$

Nous énonçons notre problème discréétisé avec les termes stabilisateurs,

$$\begin{aligned}&\text{Trouver } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ tel que} \\ &\mathbf{B}_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \mathbf{F}_\tau(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h,\end{aligned}\tag{3.11}$$

où,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) &:= \mathbf{B}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) \\ &- \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (-\nu \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h, \nu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_K \\ &- \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \tau_E ([[-\nu \nabla \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]]_E, [\nu \nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]]_E),\end{aligned}\tag{3.12}$$

$$\mathbf{F}_\tau(\mathbf{v}, q) := (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\mathbf{f}, v \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_K,\tag{3.13}$$

avec,

$$\begin{aligned}\tau_K &:= \alpha \frac{h_K^2}{\nu}, \\ \tau_E &:= \beta \frac{h_E}{\nu},\end{aligned}\tag{3.14}$$

où $\alpha, \beta > 0$ sont des paramètres de stabilisation.

Nous tirons de [3] les résultats suivants que nous énonçons au sujet de cette méthode.

À partir de maintenant et pour la fin de ce chapitre, C indiquera une constante positive, indépendante de h et ν , mais pouvant dépendre de α ou β . Nous définissons la norme dépendant de la triangulation \mathcal{T}_h , pour $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$,

$$\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|_h := \left(\nu |\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K |q_h|_{H^1(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \tau_E \|[-\nu \nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]_E\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2}.$$

Avec cette définition nous avons le résultat de stabilité suivant ;

Lemme 3.1. *Pour $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$, la forme bilinéaire $\mathbf{B}_\tau(\cdot, \cdot)$ satisfait*

$$\mathbf{B}_\tau((\mathbf{v}_h, q_h), (\mathbf{v}_h, -q_h)) \geq C \|(\mathbf{v}_h, q_h)\|_h^2,$$

avec $C > 0$ indépendante de h , ν et β .

Preuve :

Nous calculons grâce à la définition de $\mathbf{B}_\tau(\cdot, \cdot)$ (3.12) et de $\mathbf{B}(\cdot, \cdot)$ (3.7),

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\tau((\mathbf{v}_h, q_h), (\mathbf{v}_h, -q_h)) &= \nu |\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|-\nu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h\|_{L^2(K)}^2 \\ &\quad + \sum_{E \in \mathcal{E}_h} \tau_E \|[-\nu \nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]_E\|_{L^2(E)}^2. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Nous énonçons l'inégalité inverse suivante, tirée de [11],

$$|\mathbf{v}_h|_{H^2(K)} \leq C_k h_K^{-1} |\mathbf{v}_h|_{H^1(K)} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \tag{3.16}$$

où $C_k \geq 0$ ne dépend que de k , avec k venant de $\mathbf{V}_h := [X_h^k \cap H_0^1(\Omega)]^2$. De plus, nous rappelons l'inégalité de Young sous la forme suivante,

$$2ab \leq \gamma a^2 + \gamma^{-1} b^2 \quad \forall a, b \geq 0, \forall \gamma > 0. \tag{3.17}$$

Nous choisissons un $\gamma > 1$ quelconque, et évaluons les deux premiers termes de la somme du membre de droite dans (3.15),

$$\begin{aligned} &\nu |\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|-\nu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h\|_{L^2(K)}^2 \\ &= \nu |\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\nu \Delta \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)}^2 - 2(\nu \Delta \mathbf{v}_h, \nabla q_h)_K + \|\nabla q_h\|_{L^2(K)}^2 \\ &\stackrel{(3.17)}{\geq} \nu |\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \left(\underbrace{(1 - \gamma)}_{<0} \|\nu \Delta \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)}^2 + (1 - \gamma^{-1}) \|\nabla q_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \\ &\stackrel{(3.14)}{\geq} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\nu |\mathbf{v}_h|_{H^1(K)}^2 + \alpha h_K^2 \nu^{-1} (1 - \gamma) \nu^2 |\mathbf{v}_h|_{H^2(K)}^2 + (1 - \gamma^{-1}) \tau_K |q_h|_{H^1(K)}^2 \right) \\ &\stackrel{(3.16)}{\geq} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left((1 + \alpha(1 - \gamma) C_k^2) \nu |\mathbf{v}_h|_{H^1(K)}^2 + (1 - \gamma^{-1}) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K |q_h|_{H^1(K)}^2 \right). \end{aligned}$$

Nous exigeons que,

$$1 + \alpha(1 - \gamma)C_k^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma < 1 + \frac{1}{C_k^2\alpha}.$$

Ainsi nous obtenons pour $1 < \gamma < 1 + \frac{1}{C_k^2\alpha}$,

$$\nu |\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|-\nu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h\|_{L^2(K)}^2 \geq C \left(\nu |\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K |q_h|_{H^1(K)}^2 \right).$$

En combinant ce dernier résultat à (3.15) et à la définition de la norme $\|\cdot\|_h$, nous concluons.

□

Nous avons le résultat de consistance suivant,

Lemme 3.2. Soit $(\mathbf{u}, p) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2 \times [H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$ la solution faible de (3.1) et $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ la solution du problème (3.11). Alors,

$$\mathbf{B}_\tau((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = 0 \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h.$$

Preuve :

Nous notons que $\forall E \in \mathcal{E}_\Omega$, $[\![\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]\!]_E = 0$. En effet, le résultat suivant l'implique directement ;

$$\mathbf{u} \in H^2(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u} \in H^1(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad [\![\mathbf{u}]\!]_E = 0 \text{ et } [\![\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]\!]_E = 0 \quad \forall E \in \mathcal{E}_\Omega.$$

Nous calculons donc,

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_\tau((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) \\ &= \mathbf{B}_\tau((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}_h, q_h)) - \mathbf{B}_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) \\ &\stackrel{(3.11)}{=} \mathbf{B}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (-\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p, \nu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_K \\ &\quad - \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \tau_E (\underbrace{[-\nu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]}_{=0}_E, [\![\nu \nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E) \\ &\quad - (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\mathbf{f}, \nu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_K \\ &\stackrel{(3.6)}{=} 0. \end{aligned}$$

□

[3] prouve enfin le résultat de convergence suivant.

Théorème 3.1. *Soit $(\mathbf{u}, p) \in [H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2 \times [H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$ la solution de (3.6) et $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ la solution du problème (3.11). Nous définissons alors l'erreur*

$$(\mathbf{e}^{\mathbf{u}}, e^p) := (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h).$$

Alors l'erreur satisfait l'estimation suivante,

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{e}^{\mathbf{u}}, e^p)\|_h &\leq C \left(h^k \sqrt{\nu} |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + \frac{h}{\sqrt{\nu}} |p|_{H^1(\Omega)} \right), \\ \|e^p\|_{L^2(\Omega)} &\leq C(h^k \nu |\mathbf{u}|_{H^{k+1}(\Omega)} + h |p|_{H^1(\Omega)}). \end{aligned}$$

3.4 Un estimateur résiduel

Les résultats de la section précédente montre que (3.11) est une méthode stable, consistante et convergente. Nous tirons encore de [3] l'analyse à posteriori, et un estimateur résiduel.

Pour tous les triangles $K \in \mathcal{T}_h$ et toutes les arêtes internes $E \in \mathcal{E}_\Omega$ nous définissons les résidus,

$$\mathbf{R}_K := (\mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h)|_K, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{R}_E := [[-\nu \nabla \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]]_E. \quad (3.19)$$

Remarquons l'égalité suivante pour $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q$, en notant que l'approximation de la pression p_h est continue,

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}((\mathbf{e}^{\mathbf{u}}, e^p), (\mathbf{v}, q)) \\ = & \nu (\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \nabla \mathbf{v})_\Omega - (p - p_h, \nabla \cdot \mathbf{v})_\Omega - (q, \nabla \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h))_\Omega \\ = & \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega - (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_\Omega - (q, \nabla \cdot \mathbf{u})_\Omega - \nu (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v})_\Omega + (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v})_\Omega + (q, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_\Omega \\ \stackrel{(3.6)}{=} & (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu (\nabla \mathbf{u}_h, \nabla \mathbf{v})_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v})_K + (q, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_\Omega \\ \stackrel{(1.1)}{=} & (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\nu (\Delta \mathbf{u}_h, \mathbf{v})_K - \nu (\nabla \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v})_{\partial K} \right) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left((p_h, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\partial K} - (\nabla p_h, \mathbf{v})_K \right) \\ & + (q, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_\Omega \\ = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{f}, \mathbf{v})_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\nu (\Delta \mathbf{u}_h, \mathbf{v})_K - (\nabla p_h, \mathbf{v})_K \right) \\ & + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \left((\underbrace{[[p_h]]_E}_{=0}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_E - \nu ([[\nabla \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]]_E, \mathbf{v})_E \right) \\ & + (q, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_\Omega \\ = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h, \mathbf{v})_K + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} ([[-\nu \nabla \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]]_E, \mathbf{v})_E + (q, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_\Omega \\ = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{R}_K, \mathbf{v})_K + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} (\mathbf{R}_E, \mathbf{v})_E + (q, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_\Omega. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Nous évaluons maintenant pour un $\mathbf{v}_h \in [\mathbf{X}_h^1 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)]^2$, puisque $\Delta \mathbf{v}_h = 0$,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{B}((\mathbf{e}^{\mathbf{u}}, e^p), (\mathbf{v}_h, 0)) \\
&= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega - \mathbf{B}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, 0)) \\
&\stackrel{(3.12)}{=} (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_\Omega - \mathbf{B}_\tau((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, 0)) - \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \tau_E (\mathbf{R}_E, [\nu \nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]_E)_E \\
&\stackrel{(3.11)}{=} - \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \tau_E (\mathbf{R}_E, [\nu \nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]_E)_E \\
&\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \tau_E \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)} \|[\nu \nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]_E\|_{L^2(E)}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Nous définissons pour tout triangle $K \in \mathcal{T}_h$, l'estimateur résiduel suivant,

$$\eta_K^2 := \tau_K \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_\Omega} \tau_E \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)}^2 + \nu \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}^2 \tag{3.22}$$

et l'estimateur d'erreur à posteriori basé sur le résidu est défini par

$$\eta := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}. \tag{3.23}$$

Il nous faut maintenant montrer que cet estimateur à posteriori η « se comporte de la même façon que » que l'erreur.

Théorème 3.2. Soient $(\mathbf{u}, p) \in [\mathbf{H}^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$ la solution de (3.6) et $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ la solution du problème discréte (3.11). Nous rappelons que $(\mathbf{e}^{\mathbf{u}}, e^p) = (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)$. Alors il existe deux constantes positives \bar{C} et $\bar{\bar{C}}$ indépendantes de ν et h telles que

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\nu} |\mathbf{e}^{\mathbf{u}}|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|e^p\|_{L^2(\Omega)} \leq \bar{C} \eta, \\
& \bar{\bar{C}} \eta_K \leq \sqrt{\nu} |\mathbf{e}^{\mathbf{u}}|_{H^1(\omega_K)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|e^p\|_{L^2(\omega_K)}.
\end{aligned}$$

Preuve :

Borne supérieure de l'erreur

Soit $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q$ et prenons $\mathbf{v}_h = \mathcal{C}_h \mathbf{v} \in [\mathbf{X}_h^1 \cap \mathbf{H}_0^1(\Omega)]^2$ l'interpolant \mathbb{P}^1 de Clément. Nous appliquons (3.20) à $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, q)$,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{B}\left((\mathbf{e}^{\mathbf{u}}, e^p), (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, q)\right) \\
& \stackrel{(3.20)}{=} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{R}_K, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_K + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} (\mathbf{R}_E, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h)_E + (q, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_\Omega \\
& \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(E)} + \|q\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Evaluons, en notant que l'on peut utiliser (3.21) car \mathbf{v}_h est constitué de polynômes de degré 1,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{B}\left((\mathbf{e}^{\mathbf{u}}, e^p), (\mathbf{v}, q)\right) \\
& = \mathbf{B}\left((\mathbf{e}^{\mathbf{u}}, e^p), (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h, q)\right) + \mathbf{B}\left((\mathbf{e}^{\mathbf{u}}, e^p), (\mathbf{v}_h, 0)\right) \\
& \stackrel{(3.24)}{\leq} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(E)} + \|q\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \\
& \stackrel{(3.21)}{\leq} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)} |\mathbf{v}|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} h_E^{1/2} \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)} |\mathbf{v}|_{H^1(\tilde{\omega}_E)} + \|q\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \\
& \stackrel{\text{lemme 1.4}}{\leq} C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)} |\mathbf{v}|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} h_E^{1/2} \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)} |\mathbf{v}|_{H^1(\tilde{\omega}_E)} + \|q\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \tau_E \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)} \|[\nu \nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]_E\|_{L^2(E)} \right) \\
& = C \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sqrt{\alpha} \frac{h_K}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)} \sqrt{\nu} |\mathbf{v}|_{H^1(\tilde{\omega}_K)} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \sqrt{\beta} \frac{h_E^{1/2}}{\sqrt{\nu}} \frac{\|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)}}{\sqrt{2}} \sqrt{\nu} |\mathbf{v}|_{H^1(\tilde{\omega}_E)} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\nu} \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|q\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \tau_E^{1/2} \frac{\|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)}}{\sqrt{2}} \tau_E^{1/2} \nu \|[\nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]_E\|_{L^2(E)} \right) \\
& \stackrel{(3.14)}{\leq} C \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \tau_E \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)}^2 + \nu \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
& \quad \cdot \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu |\mathbf{v}|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \nu |\mathbf{v}|_{H^1(\tilde{\omega}_E)}^2 + \frac{1}{\nu} \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \tau_E \nu^2 \|[\nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]_E\|_{L^2(E)}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Notons que le premier facteur de (3.25) n'est autre que η défini en (3.23).

Nous avons maintenant besoin du résultat suivant, un théorème de trace local. Pour un triangle $K \in \mathcal{T}_h$ et $v \in H^1(K)$ nous avons (voir Thomée, 1997),

$$\|v\|_{L^2(\partial K)}^2 \leq C \left(\frac{1}{h_K} \|v\|_{L^2(K)}^2 + h_K |v|_{H^1(K)}^2 \right), \tag{3.26}$$

où C est une constante positive.

En utilisant le fait que la triangulation est régulière et que $\tau_E = \beta \frac{h_E}{\nu}$, alors

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu |\mathbf{v}|_{H^1(\tilde{\omega}_K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \nu |\mathbf{v}|_{H^1(\tilde{\omega}_E)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} \tau_E \nu^2 \|[\![\nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E\|_{L^2(E)}^2 \\
& \stackrel{h_E \leq h_K}{\leq} C \left(\nu |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu h_K \|\nabla \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\partial K)}^2 \right) \\
& \stackrel{(3.26)}{\leq} C \left(\nu |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}^2 + \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \left(h_K^{-1} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{L^2(K)}^2 + h_K \underbrace{|\nabla \mathbf{v}_h|_{H^1(K)}^2}_{=0} \right) \right) \\
& \leq C \nu |\mathbf{v}_h|_{H^1(\Omega)}^2.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Nous appliquons (3.9) à $(\mathbf{e}^u, e^p) \in \mathbf{V} \times Q$ et nous utilisons (3.25) et (3.27) ce qui nous permet de calculer,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\nu} |\mathbf{e}^u|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|e^p\|_{L^2(\Omega)} & \leq C \sup_{(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q \setminus \{0\}} \frac{\mathbf{B}((\mathbf{e}^u, e^p), (\mathbf{v}, q))}{\sqrt{\nu} |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|q\|_{L^2(\Omega)}} \\
& \leq C \sup_{(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q \setminus \{0\}} \frac{\eta \left(\nu |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\nu} \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}}{\sqrt{\nu} |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|q\|_{L^2(\Omega)}} \\
& \leq C_1 \eta,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

où l'on a simplement utilisé le fait que pour $a, b \geq 0$,

$$a^2 + b^2 \leq (a^2 + b^2)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{(a+b)^{1/2}}{a+b} \leq 1.$$

Borne inférieure de l'erreur

Nous reprenons les fonctions bulles de la définition 1.1. Nous noterons $\mathbf{b}_K := \mathbf{b}_K \mathbf{R}_K$. Le résultat suivant est facilement vérifiable à partir du lemme 1.3,

$$C \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)}^2 \leq (\mathbf{R}_K, \mathbf{b}_K)_K \leq \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)}^2. \tag{3.29}$$

Nous considérons chacun des trois termes de (3.22)

Premier terme :

Fixons un triangle $K \in \mathcal{T}_h$. Puisque $\text{supp } \delta_K \subset K$ (lemme 1.3),

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{R}_K, \mathbf{b}_K)_K \\
= & \sum_{K' \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{R}_{K'}, \mathbf{b}_K)_{K'} \\
\stackrel{(3.20)}{=} & \mathbf{B}((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h), (\mathbf{b}_K, 0)) \\
\stackrel{(3.7)}{=} & \nu (\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \nabla \mathbf{b}_K)_K - (p - p_h, \nabla \cdot \mathbf{b}_K)_K \\
\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} & \sqrt{\nu} \|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{L^2(K)} \sqrt{\nu} \|\nabla \mathbf{b}_K\|_{L^2(K)} - \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|p - p_h\|_{L^2(K)} \sqrt{\nu} \|\nabla \cdot \mathbf{b}_K\|_{L^2(K)} \\
\stackrel{\text{D.C.S.}}{\leq} & C \left(\nu |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(K)}^2 + \frac{1}{\nu} \|p - p_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \sqrt{\nu} |\mathbf{b}_K|_{H^1(K)} \\
\stackrel{\text{lemme 1.3}}{\leq} & C \left(\nu |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(K)}^2 + \frac{1}{\nu} \|p - p_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \sqrt{\nu} h_K^{-1} \|\mathbf{b}_K\|_{L^2(K)} \\
\leq & C \left(\nu |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(K)}^2 + \frac{1}{\nu} \|p - p_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \sqrt{\nu} h_K^{-1} \|\delta_K\|_{L^2(K)} \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)} \\
\leq & C \left(\nu |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(K)}^2 + \frac{1}{\nu} \|p - p_h\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \tau_K^{-1/2} \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)}.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

En considérant (3.29) et (3.30), et en notant que pour $a, b \geq 0$,

$$a^2 + b^2 \leq (a + b)^2 \quad \Rightarrow \quad (a^2 + b^2)^{1/2} \leq a + b,$$

nous obtenons le résultat pour le premier terme,

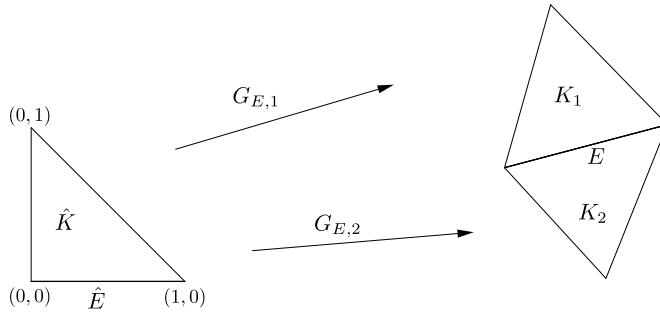
$$\tau_K^{1/2} \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)} \leq C \left(\sqrt{\nu} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(K)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|p - p_h\|_{L^2(K)} \right). \tag{3.31}$$

Deuxième terme :

Nous devons premièrement définir quelques opérateurs sur les arêtes. Ces définitions peuvent paraître compliquées, mais il s'agit juste d'adapter les domaines de définitions de polynôme. Prenons une arête interne $E \in \mathcal{E}_\Omega$ avec $\omega_E = K_1 \cup K_2$. Soit \hat{K} le triangle de référence, de sommets $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, 0)$ et prenons comme arête de référence $\hat{E} := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\}$.

Soient $G_{E,1}$ et $G_{E,2}$ les transformations affines telles que $G_{E,i}(\hat{K}) = K_i$, $i = 1, 2$ et $G_{E,1}(\hat{E}) = E$, comme sur la figure 3.1.

Notons $\hat{\Pi} = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$, et soit $\hat{Q} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \hat{\Pi}$ la projection orthogonale de \mathbb{R}^2 sur $\hat{\Pi}$.

FIGURE 3.1 – Transformations affines $G_{E,1}$ et $G_{E,2}$.

Nous définissons alors l'opérateur de relèvement

$$\begin{aligned}\hat{P}_{\hat{E}} &: \mathbb{P}^k(\hat{E}) \rightarrow \mathbb{P}^k(\hat{K}) \\ \hat{s} &\mapsto \hat{P}_{\hat{E}}(\hat{s}) = \hat{s} \circ \hat{Q}.\end{aligned}$$

$\hat{P}_{\hat{E}}$ prend des polynômes définis sur \hat{E} et les plonge dans l'espace des polynômes définis sur \hat{K} , via la projection \hat{Q} . Maintenant, nous définissons le même opérateur, mais pour E et les $K_i \subset \omega_E$, en passant par \hat{E} en utilisant les transformations $G_{E,i}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}P_{E,K_i} &: \mathbb{P}^k(E) \rightarrow \mathbb{P}^k(K_i) \\ s &\mapsto P_{E,K_i}(s) = \hat{P}_{\hat{E}}(s \circ G_{E,i}) \circ G_{E,i}^{-1}\end{aligned}$$

Nous rassemblons les opérateurs définis sur chaque triangle,

$$\begin{aligned}P_E &: \mathbb{P}^k(E) \rightarrow \mathbb{P}^k(\omega_E) \\ s &\mapsto P_E(s) = \begin{cases} P_{E,K_1}(s) & \text{dans } K_1, \\ P_{E,K_2}(s) & \text{dans } K_2, \end{cases}\end{aligned}$$

et pour $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in [\mathbb{P}^k(E)]^2$, nous définissons,

$$\mathbf{P}_E(\mathbf{s}) = (P_E(s_1), P_E(s_2)) \in [\mathbb{P}^k(\omega_E)]^2. \quad (3.32)$$

Nous pouvons maintenant commencer à travailler sur le terme qui nous intéresse. Comme précédemment nous obtenons facilement du lemme 1.3 l'estimation suivante,

$$C \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)}^2 \leq (\mathbf{R}_E, \boldsymbol{\beta}_E \mathbf{R}_E)_K \leq \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)}^2 \quad (3.33)$$

En utilisant l'égalité (3.20), en rappelant que $\text{supp } \boldsymbol{\beta}_E \subset \omega_E$ et en notant que sur E , $\mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E) = \mathbf{R}_E$, nous calculons,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}((\mathbf{e}^u, e^p), (\boldsymbol{\beta}_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E), 0)) &\stackrel{(3.20)}{=} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{R}_K, \boldsymbol{\beta}_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E))_K + \sum_{E \in \mathcal{E}_\Omega} (\mathbf{R}_E, \boldsymbol{\beta}_E \mathbf{R}_E)_E \\ &= \sum_{K \subset \omega_E} (\mathbf{R}_K, \boldsymbol{\beta}_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E))_K + (\mathbf{R}_E, \boldsymbol{\beta}_E \mathbf{R}_E)_E.\end{aligned} \quad (3.34)$$

Nous utilisons ce résultat pour évaluer,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)}^2 &\stackrel{(3.33)}{\leq} C(\mathbf{R}_E, b_E \mathbf{R}_E)_E \\ &\stackrel{(3.34)}{=} C \left(- \sum_{K \subset \omega_E} (\mathbf{R}_K, b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E))_K + \mathbf{B}((\mathbf{e}^u, e^p), (b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E), 0)) \right), \end{aligned} \quad (3.35)$$

concentrons nous sur le second terme de la dernière ligne. Puisque $\text{supp } b_E \subset \omega_E$,

$$\begin{aligned} &\mathbf{B}((\mathbf{e}^u, e^p), (b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E), 0)) \\ &\stackrel{(3.7)}{=} \nu(\nabla \mathbf{e}^u, \nabla(b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E)))_{\omega_E} - (e^p, \nabla \cdot (b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E)))_{\omega_E} \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \sqrt{\nu} |\mathbf{e}^u|_{H^1(\omega_E)} \sqrt{\nu} \|\nabla(b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E))\|_{L^2(\omega_E)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|e^p\|_{L^2(\omega_E)} \sqrt{\nu} \|\nabla \cdot (b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E))\|_{L^2(\omega_E)} \\ &\leq C \left(\sqrt{\nu} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\omega_E)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|p - p_h\|_{L^2(\omega_E)} \right) \sqrt{\nu} |b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E)|_{H^1(\omega_E)}. \end{aligned}$$

Nous utilisons ce dernier résultat dans (3.35), ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)}^2 &\leq C \left(\sum_{K \subset \omega_E} \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(\omega_E)} \|b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E)\|_{L^2(\omega_E)} \right. \\ &\quad \left. + \left(\sqrt{\nu} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\omega_E)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|p - p_h\|_{L^2(\omega_E)} \right) \cdot \sqrt{\nu} |b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E)|_{H^1(\omega_E)} \right) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Nous tirons le résultat suivant de [10],

$$\begin{aligned} \|b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E)\|_{L^2(K)} &\leq Ch_K |b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E)|_{H^1(K)}, \\ |b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E)|_{H^1(\omega_E)} &\leq Ch_E^{1/2} \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)}, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de finalement obtenir en reprenant les définitions de τ_K et τ_E (3.14),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)}^2 &\stackrel{(3.36)}{\leq} C \left(\sum_{K \subset \omega_E} \frac{h_K}{\sqrt{\nu}} \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)} + \sqrt{\nu} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\omega_E)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|p - p_h\|_{L^2(\omega_E)} \right) \\ &\quad \cdot \sqrt{\nu} |b_E \mathbf{P}_E(\mathbf{R}_E)|_{H^1(\omega_E)} \\ &\stackrel{(3.31)}{\leq} C \left(\sqrt{\nu} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\omega_E)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|p - p_h\|_{L^2(\omega_E)} \right) \tau_E^{-1/2} \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant pour le deuxième terme,

$$\tau_E^{1/2} \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)} \leq C \left(\sqrt{\nu} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\omega_E)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|p - p_h\|_{L^2(\omega_E)} \right). \quad (3.38)$$

Troisième terme :

Nous savons par (3.1) que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. De plus, (3.29) peut être appliquée à $\nabla \cdot \mathbf{u}_h$. Ainsi, sans oublier que $\text{supp } b_K \subset K$,

$$\begin{aligned} \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}^2 &= (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_K \\ &\stackrel{(3.29)}{\leq} C(\nabla \cdot \mathbf{u}_h, b_K \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_K \\ &= C(\nabla \cdot \mathbf{u}_h, b_K \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_\Omega \\ &= C(\nabla \cdot (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}), b_K \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_\Omega \\ &= C(\nabla \cdot (\mathbf{u}_h - \mathbf{u}), b_K \nabla \cdot \mathbf{u}_h)_K \\ &\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} C|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(K)} \|b_K \nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)} \\ &\leq C|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(K)} \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}, \end{aligned}$$

Ainsi nous avons pour le troisième terme,

$$\nu \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}^2 \leq C\nu |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(K)}^2 \quad (3.39)$$

Nous obtenons finalement le second résultat en réunissant (3.31), (3.38) et (3.39) dans la définition de η_K (3.22).

□

3.5 Exemples numériques

Nous allons maintenant tester la méthode présentée en (3.11), ainsi qu'une méthode d'affinage basée sur l'estimateur à posteriori introduit en (3.22), (3.23).

3.5.1 Un problème simple

Considérons Ω , le carré unité centré en $(0.5, 0.5)$. Nous posons le problème de Stokes suivant.

Trouver $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.40)$$

On calcule \mathbf{f} telle que,

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -256x^2(x-1)^2y(y-1)(2y-1) \\ -u_1(y, x) \end{pmatrix},$$

$$p(x, y) = 150(x-0.5)(y-0.5),$$

soit la solution exacte du problème (3.40). C'est-à-dire,

$$f_1 = \nu(512y(y-1)(2y-1)(6x^2 - 6x + 1) + 256x^2(x-1)^2(12y-6)) + 150(y-0.5),$$

$$f_2 = -\nu(256y^2(y-1)^2(12x-6) + 512x(x-1)(2x-1)(6y^2 - 6y + 1)) + 150(x-0.5).$$

Pour un aperçu nous affichons la solution, avec $\nu = 1$, dans la figure 3.2.

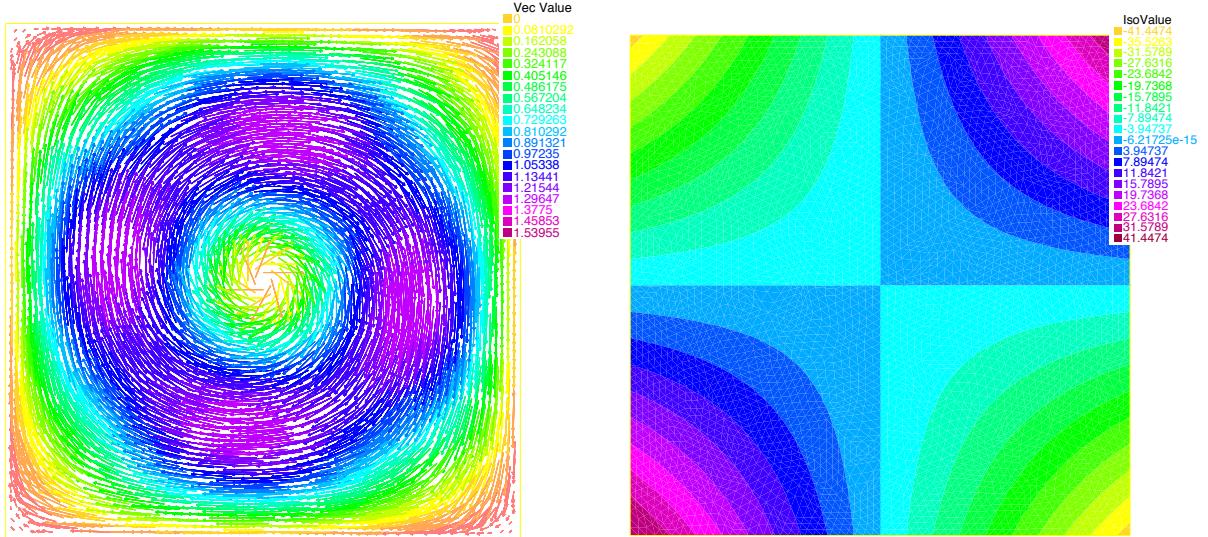


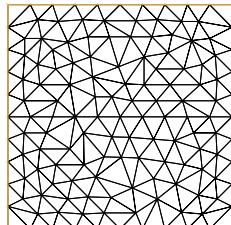
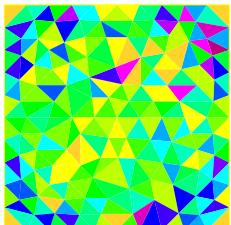
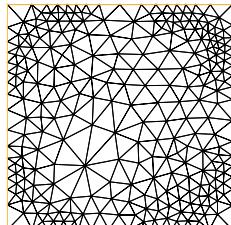
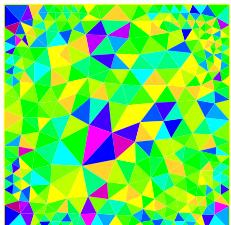
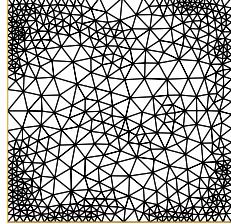
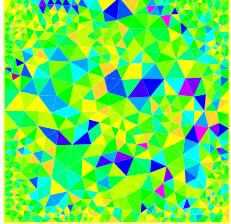
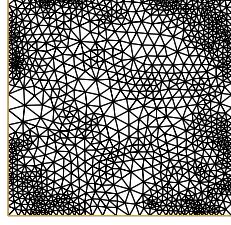
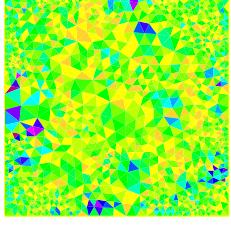
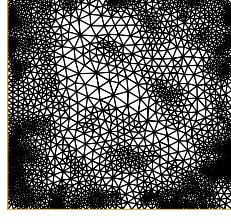
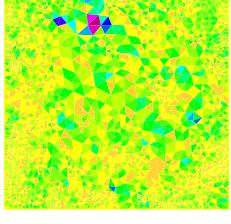
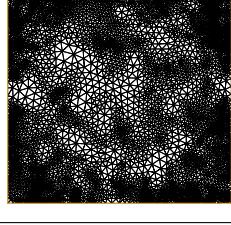
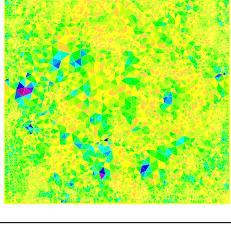
FIGURE 3.2 – La solution $\mathbf{u}(x, y), p(x, y)$ représentée sur Ω .

Comme espaces des éléments finis, nous prenons la paire d'espaces $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$ avec une pression continue. Habituellement inf-sup instable (voir section 3.2), nous avons montré que cette méthode est stable pour ces éléments. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &= [\mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{X}_h^1]^2, \\ Q_h &= \mathrm{L}_0^2(\Omega) \cap \mathrm{X}_h^1. \end{aligned}$$

De plus nous posons $\nu = 1$ et $\alpha = \beta = \frac{1}{12}$.

Par le même principe d'affinage qu'à la section 2.3.1, nous obtenons les maillages suivants pour les 6 premières itérations. Le code est montré dans le listing 3

Itération n°	maillage	η_K	$\min_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K / \max_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K$
1.			9.95662e-31 / 0.149704
2.			7.14156e-06 / 0.0654828
3.			2.06299e-06 / 0.0335636
4.			4.37572e-06 / 0.0213762
5.			5.8482e-07 / 0.0168226
6.			1.43832e-07 / 0.00692688

Nous définissons la norme,

$$\|(\mathbf{e}^{\mathbf{u}}, e^p)\|_E := \sqrt{\nu} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{\sqrt{\nu}} \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)},$$

pour illustrer notre résultat sur l'analyse à posteriori, le théorème 3.2.

It. n°	$\ (\mathbf{e}^{\mathbf{u}}, e^p)\ _E$	η	$\ (\mathbf{e}^{\mathbf{u}}, e^p)\ _E/\eta$
1	6.50111	0.901217	7.2137
2	3.49958	0.504907	6.93113
3	2.31941	0.322441	7.19328
4	1.61718	0.230793	7.00705
5	0.947655	0.155741	6.08482
6	0.585719	0.10505	5.57563
7	0.449159	0.0776499	5.78442

Nous remarquons une nette diminution de l'erreur au fur et à mesure des itérations. La méthode est stable, même avec cette paire d'espaces d'éléments finis $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$, inf-sup instable et des valeurs de α et β très faible. Quand au rapport entre $\|(\mathbf{e}^{\mathbf{u}}, e^p)\|_E$ et η , il oscille mais reste à peu près constant appuyant le théorème 3.2.

3.5.2 Domaine en L

Nous appliquons maintenant cette méthode à un problème légèrement plus compliqué. Nous considérons Ω , le domaine en L construit à partir du carré unité précédent, en lui tronquant le quart supérieur droit. Supposons que le bord Γ_2 est l'arrivée du liquide (*inflow*) et le bord Γ_6 est la sortie (*outflow*) (voir figure 3.3).

Nous posons le problème de Stokes suivant :

Trouver $(\mathbf{u}, p) \in [H^1(\Omega)]^2 \times L_0^2(\Omega)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5, \\ \mathbf{u} = (-1, 0)^T & \text{sur } \Gamma_2, \\ \mathbf{u} = (-2, 0)^T & \text{sur } \Gamma_6, \end{array} \right. \quad (3.41)$$

avec $\nu = 1$ et $\mathbf{f} = (0, 0)^T$.

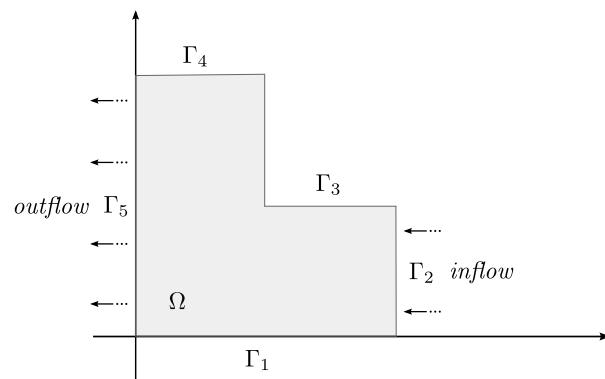
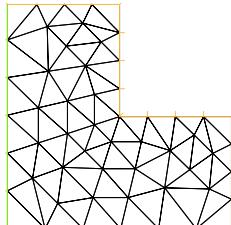
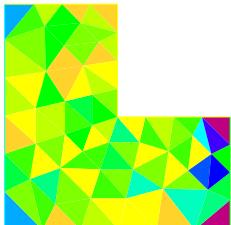
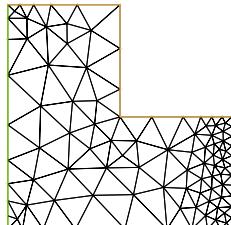
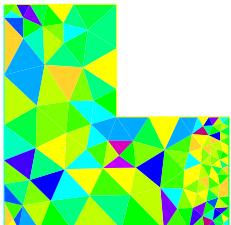
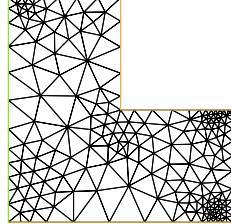
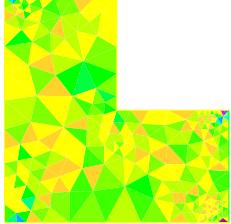
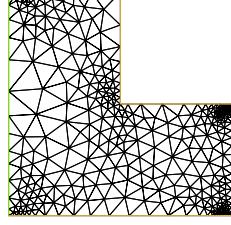
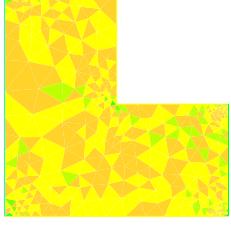
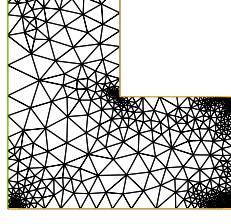
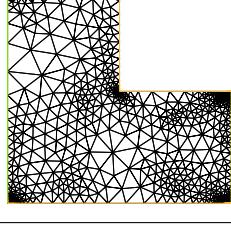
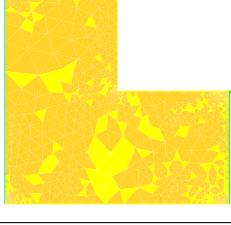


FIGURE 3.3 – Situation du problème (3.41).

Nous utilisons comme précédemment la paire d'espaces des éléments finis $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$. Nous obtenons la succession de maillage suivante pour le processus d'affinage, grâce au code dans le listing 4.

Itération n°	maillage	η_K	$\min_{K \in T_h} \eta_K / \max_{K \in T_h} \eta_K$
1.			2.65436e-28 / 1.40153
2.			0.000407706 / 0.469531
3.			0.000235758 / 0.629612
4.			0.00016248 / 0.946797
5.			0.000132101 / 1.40624
6.			1.37171e-05 / 1.12579

Nous nous apercevons que le maillage s'affine dans les coins. C'est là où le fluide est le plus perturbé lorsqu'il pénètre et ressort du domaine. Dans les trois derniers pas on ne distingue pas les éléments $K \in \mathcal{T}_h$ où l'estimateur η_K est le plus élevé, car ils sont trop petits, mais il suffit de voir où le maillage s'affine.

Le fait que le maillage s'affine dans les coins est dû à la pression, mais aussi à la seconde composante de la vitesse u_2 , qui est de plus la cause de l'affinage au centre. Nous illustrons ces affirmations en montrant un aperçu des solutions à différentes étapes du processus :

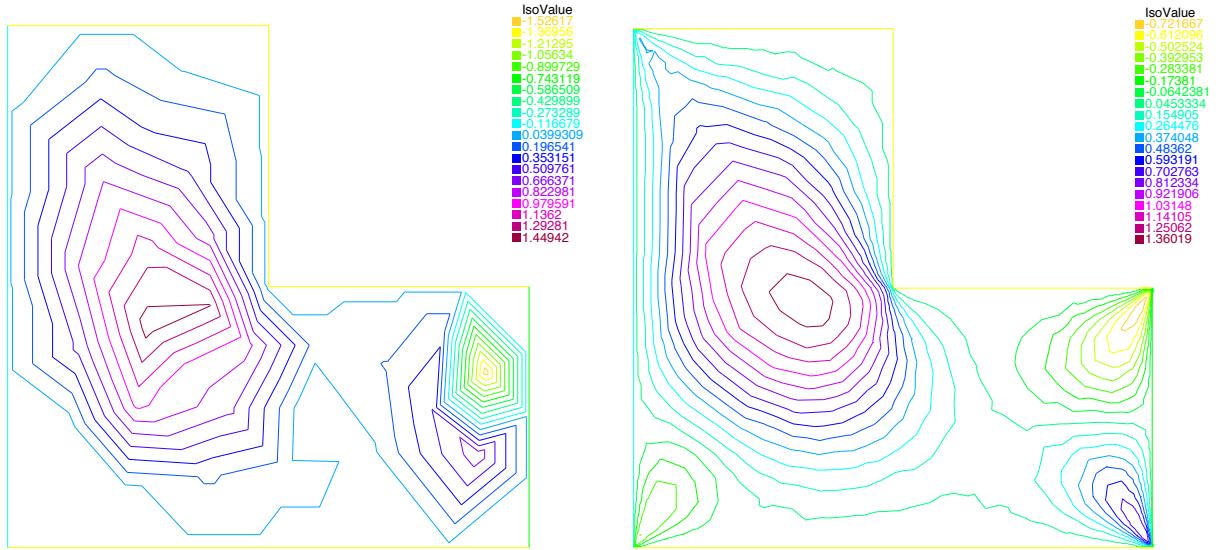


FIGURE 3.4 – Approximation de la seconde composante de la vitesse $u_2(x, y)$, respectivement aux itérations 1 et 7.

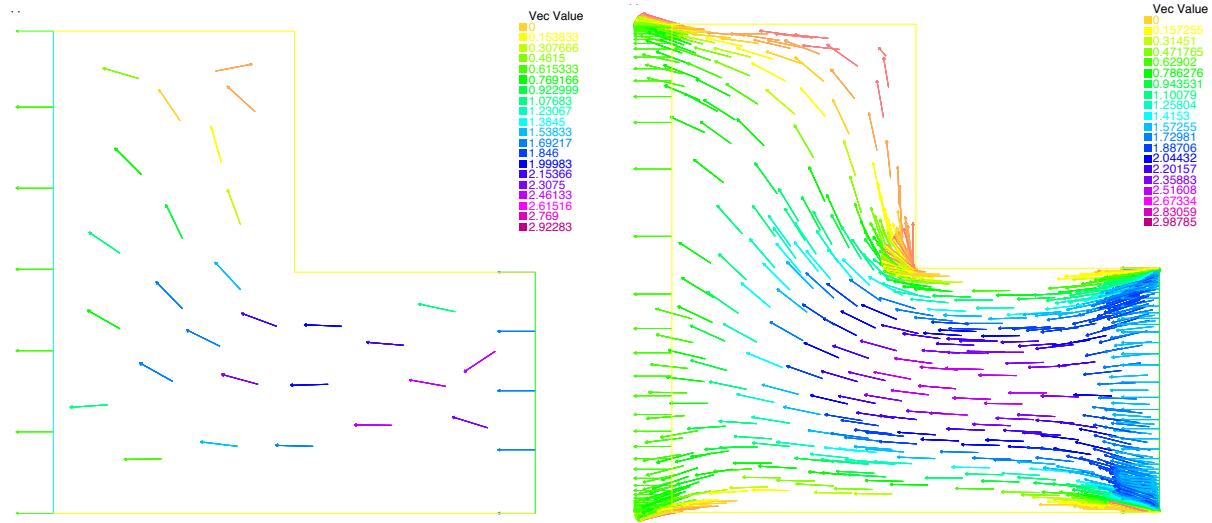


FIGURE 3.5 – Approximation de la vitesse $\mathbf{u}(x, y)$, respectivement aux itérations 1 et 7.

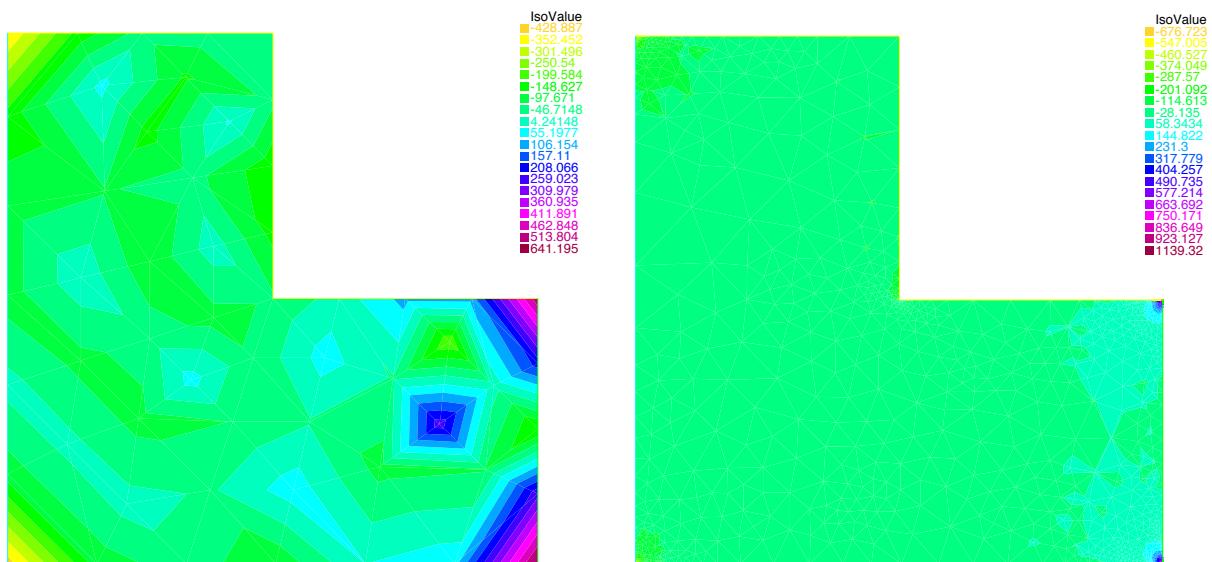


FIGURE 3.6 – Approximation de la pression $p(x, y)$, respectivement aux itérations 1 et 7.

Conclusion

La première partie de ce travail a été consacrée à l'analyse du problème de Poisson sous sa forme générale. Nous avons ensuite déterminer un estimateur à posteriori basé sur des résidus, dont nous avons prouvé qu'il bornait inférieurement et supérieurement l'erreur. Nous rappelons la définition des résidus ; pour tout $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\begin{aligned} \eta_K^2 := h_K^2 \|f_K\|_{L^2(K)}^2 &+ \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_\Omega} h_E \|[\![\nabla u_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E\|_{L^2(E)}^2 \\ &+ \sum_{E \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_N} h_E \|g_E - \nabla u_h \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(E)}^2, \end{aligned}$$

où f_K et g_E sont les moyennes de respectivement f et g sur respectivement les éléments K et E .

Pour finir cette partie, nous avons présenté des exemples numériques illustrant l'utilisation de l'estimateur dans l'affinage des maillages.

La deuxième partie a été consacrée à l'étude du problème de Stokes. Une méthode stable pour les éléments $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$ a été présentée, prouvée et nous en avons fait une analyse à posteriori. L'estimateur à posteriori donné est basé sur les résidus dont nous rappelons la définition ; pour tout $K \in \mathcal{T}_h$,

$$\eta_K^2 := \tau_K \|\mathbf{R}_K\|_{L^2(K)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}(K) \cap \mathcal{E}_\Omega} \tau_E \|\mathbf{R}_E\|_{L^2(E)}^2 + \nu \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)}^2$$

où,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_K &:= (\mathbf{f} + \nu \Delta \mathbf{u}_h - \nabla p_h)|_K, \\ \mathbf{R}_E &:= [\![-\nu \nabla \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n}]\!]_E \end{aligned}$$

Nous avons également présenté des exemples numériques pour illustrer ces résultats dans l'affinage de maillage.

Il aurait été intéressant de traiter plus en détail l'algorithme d'affinage de maillage à partir de l'estimateur à posteriori et son implémentation. Par manque de temps, nous avons dû utiliser des codes déjà rédigés dans [5]. Un plus aurait été de les créer ou de trouver des façons de les améliorer.

Une méthode des volumes éléments finis a également été traitée pour le problème de

Stokes, dans [6]. Malheureusement, son codage aurait demandé trop d'efforts et nous avons donc préféré en rester au cadre des éléments finis. Mais une analyse à posteriori de cette méthode aurait certainement beaucoup apporter à ce travail.

Annexes

Pour tous les exemples numériques de ce travail nous avons utilisé le logiciel libre FreeFEM (<http://www.freefem.org>). Nous montrons ici les codes.

Listing 1 – poimixt4.edp

```
1 // ----- //  
2 // ----- Projet ----- //  
3 // ----- Timothée Pouchon ----- //  
4 // ----- Problème de Poisson, conditions mixtes ----- //  
5 // ----- //  
6  
7 func f = 2*(x^2+y^2-1);  
func g = 2*(1-y^2);  
func ureal = x^2*(1-y^2);  
8  
9  
10 /* from freefem example file "AdaptResidualErrorIndicator.edp" :  
11     macro the get the current mesh size parameter  
12         in: Th the mesh  
13             Vh P1 fespace on Th  
14         out :  
15             h: the Vh finite element finite set to  
16                 the current mesh size */  
17  
18 macro MeshSizecomputation(Th,Vh,h)  
19 {  
20     real[int] count(Th.nv);  
21     /* mesh size (lenEdge = $int_e 1$) */  
22     varf vmeshsizen(u,v)=intalledges(Th,qfnbpE=1)(v);  
23     /* number of edge / par vertex */  
24     varf vedgecount(u,v)=intalledges(Th,qfnbpE=1)(v/lenEdge);  
25     /* computation of the mesh size */  
26     count=vedgecount(0,Vh);  
27     h[] = 0.;  
28     h[] = vmeshsizen(0,Vh);  
29     cout << " count min = "<< count.min << " " << count.max << endl;  
30     h[] = h[] ./ count;  
31     cout << " -- bound meshsize = " << h[].min << " " << h[].max << endl;  
32 }  
33  
34 // macro to remesh according the de residual indicator  
35 //  
36 //     in:  
37 //         Th the mesh  
38 //         Nh P0 fespace on Th  
39 //         Vh P1 fespace on Th  
40 //         vindicator the varf of to evaluate the indicator to ^2  
41 //         coef on etameam ..  
42  
43 macro ReMeshIndicator(Th,Nh,Vh,vindicator,coef)  
44 {  
45     Vh h=0;  
46     /*evalutate the mesh size */  
47     MeshSizecomputation(Th,Vh,h);  
48     Nh etak;  
49     etak[] = vindicator(0,Nh);
```

```

49     real eta = sqrt(etak[].sum);
51     file << "global Eta : " << eta << endl;
52     file << "rapport errH1/eta= " << errH1/eta << endl;
53     etak[] = sqrt(etak[]);
54     file << "etak : min = " << etak[].min << " max = " << etak[].max << endl;
55     plot(etak, wait=1, cmm="eta", ps="eta.eps", fill=1);
56     real etastar = coef*(etak[].sum/etak[].n);
57     cout << " etastar = " << etastar << " sum=" << etak[].sum << " " << endl;
58     /* here etaK is discontinous
59      we use the P1 L2 projection with mass lumping . */
60     Vh fn, sigma;
61     varf veta(unused,v)=int2d(Th)(etak*v);
62     varf vun(unused,v)=int2d(Th)(1*v);
63     fn[] = veta(0,Vh);
64     sigma[] = vun(0,Vh);
65     fn[] = fn[] ./ sigma[];
66     fn = max(min(fn/etastar,3.),0.3333) ;
67     /* new mesh size */
68     h = h / fn ;
69     /* plot(h,wait=1); */
70     Th=adaptmesh(Th,IsMetric=1,h,splitpbedge=1,nbvx=10000);
71 }

// Bord du domaine
72 border A(t=0,1){x=t; y=0; label=3;};
73 border B(t=0,1){x=1; y=t; label=2;};
74 border C(t=1,0){x=t; y=1; label=1;};
75 border D(t=1,0){x=0; y=t; label=1;};
76
77 mesh Th = buildmesh (A(5) + B(5) + C(5) +D(5));
78 mesh Thbb = buildmesh (A(20) + B(20) + C(20) +D(20));
79
80 // Espace des éléments finis
81 fespace Vh(Th, P1);
82 Vh u,v;
83 fespace Nh(Th,P0);           // fonctions cstes sur chaque triangle
84 fespace Ph(Th,P2b);
85
86 // Problem, weak form
87 problem Poisson(u,v) =   int2d(Th)( dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) )
88                           - int2d(Th)( f*v )
89                           - int1d(Th,2)(g*v)      // conditions Neumann non-homogènes, g
90                           + on(1, u=0);          // conditions Dirichlet homogènes
91
92 varf indicator2(uu,chiK) =
93   int2d(Th)( chiK*square( hTriangle*f ) )
94   + intalledges(Th)( chiK*0.5*lenEdge*square( jump(N.x*dx(u)*N.y*dy(u)) ) )
95   + intalledges(Th,2)( chiK*lenEdge*square(g - N.x*dx(u)*N.y*dy(u)) );
96
97 Nh rho;
98 Ph urealP2 = ureal;
99 real errL2, errH1;
100 plot(urealP2, fill=1, cmm="solution", wait=1, ps="u.eps", value=1);
101
102 ofstream file("report.txt");
103 //Processus d'affinage
104 for (int i=0;i<8;i++)
105 {
106     plot(Th, cmm="maillage", wait=1, ps="maillage.eps");
107     Poisson;
108     plot(Th, u, fill=1, cmm="sol. approx.", wait=1, value=1, ps="uh.eps");
109     file << "-----" << endl;
110     file << "iteration n." << i+1 << endl;
111     errL2 = sqrt(int2d(Th)(ureal-u)^2);
112     errH1 = sqrt(int2d(Th)((ureal-u)*(ureal-u))
113                  +int2d(Th)((dx(urealP2)-dx(u))^2 + (dy(urealP2)-dy(u))^2));
114 }
115

```

```

117     file << "L2 error = " << errL2 << endl;
118     file << "H1 error = " << errH1 << endl;
119     real cc=0.7;
120     ReMeshIndicator(Th,Nh,Vh,indicator2,cc);
121     u=u;           // adaptation au nouveau maillage
}

```

Listing 2 – poimixtL.edp

```

// ----- //  

// ----- Projet ----- //  

// ----- Timothée Pouchon ----- //  

// ----- Problème de Poisson, conditions mixtes ----- //  

// ----- //  

6  

func f = x-y;  

8 func g = 0;  

real alpha = pi/4;  

10 /* from freefem example file "AdaptResidualErrorIndicator.edp" :  

12 macro the get the current mesh size parameter  

13     in: Th the mesh  

14         Vh P1 fespace on Th  

15     out :  

16         h: the Vh finite element finite set to  

17             the current mesh size */  

18 macro MeshSizecomputation(Th,Vh,h)  

{  

20     real[int] count(Th.nv);  

/* mesh size (lenEdge = $\int_e 1$) */  

22     varf vmeshsizen(u,v)=intalledges(Th,qfnbpE=1)(v);  

/* number of edge / par vertex */  

24     varf vedgecount(u,v)=intalledges(Th,qfnbpE=1)(v/lenEdge);  

/* computation of the mesh size */  

26     count=vedgecount(0,Vh);  

27     h[] = 0.;  

28     h[] = vmeshsizen(0,Vh);  

29     cout << " count min = " << count.min << " " << count.max << endl;  

30     h[] = h[] ./ count;  

31     cout << " -- bound meshsize = " << h[].min << " " << h[].max << endl;  

32 }  

33 // macro to remesh according the de residual indicator  

34 // in:  

35 //     Th the mesh  

36 //     Nh P0 fespace on Th  

37 //     Vh P1 fespace on Th  

38 //     vindicator the varf of to evaluate the indicator to ^2  

39 //     coef on etameam ..  

40 //  

41 macro ReMeshIndicator(Th,Nh,Vh,vindicator,coef)  

{  

42     Vh h=0;  

/*evalutate the mesh size */  

43     MeshSizecomputation(Th,Vh,h);  

44     Nh etak;  

45     etak[] = vindicator(0,Nh);  

46     real eta = sqrt(etak[].sum);  

47     cout << "global Eta : " << eta << endl;  

48     etak[] = sqrt(etak[]);  

49     file << "etak : min = " << etak[].min << " max = " << etak[].max << endl;  

50     plot(etak,wait=1,cmm="eta",ps="eta_L.eps",fill=1);  

51     real etastar= coef*(etak[].sum/etak[].n);  

52     /* here etak is discontinous  

53      we use the P1 L2 projection with mass lumping . */  

54     Vh fn,sigma;  

55     varf veta(unused,v)=int2d(Th)(etak*v);

```

```

60     varf vun(unused,v)=int2d(Th)(1*v);
61     fn[] = veta(0,Vh);
62     sigma[] = vun(0,Vh);
63     fn []= fn[]./ sigma[];
64     fn = max(min(fn/etastar ,3.),0.3333) ;
65     /* new mesh size */
66     h = h / fn ;
67     /* plot(h,wait=1); */
68     Th=adaptmesh(Th,IsMetric=1,h,splitpbedge=1,nbvx=10000);
69 }

70 // Bord du domaine en L
71 border ba(t=0,1.0){x=t; y=0; label=1;};
72 border bb(t=0,0.5){x=1; y=t; label=2;};
73 border bc(t=0,0.5){x=1-t; y=0.5;label=2;};
74 border bd(t=0.5,1){x=0.5; y=t; label=2;};
75 border be(t=0.5,1){x=1-t; y=1; label=2;};
76 border bf(t=0.0,1){x=0; y=1-t;label=1;};
77 mesh Th = buildmesh (ba(6) + bb(4) + bc(4) + bd(4) + be(4) + bf(6));
78

79 // Espace des éléments finis
80 fespace Vh(Th, P1);
81 Vh u,v;
82 fespace Nh(Th,P0);           // fonctions cstes sur chaque triangle

83 // Problem, weak form
84 problem Poisson(u,v) =      int2d(Th)( dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) )
85                   - int2d(Th)( f*v )
86                   - int1d(Th,2)(g*v);    // conditions Neumann non-homogènes, g
87

88 varf indicator2(uu,chiK) =
89     int2d(Th)( chiK*square( hTriangle*f ) )
90     + intalledges(Th)( chiK*0.5*lenEdge*square( jump(N.x*dx(u)*N.y*dy(u)) ) )
91     + intalledges(Th,2)( chiK*lenEdge*square(g - N.x*dx(u)*N.y*dy(u)) );
92

93 ofstream file("report_L.txt");
94 //Processus d'affinage
95 for (int i=0;i<8;i++)
96 {
97     plot(Th, cmm="maillage", wait=1, ps="maillage_L.eps");
98     Poisson;
99     plot(Th, u, fill=1, cmm="sol. approx.", wait=1, value=1, ps="uh_L.eps");
100    file << "-----" << endl;
101    file << "iteration n." << i+1 << endl;
102    real cc=0.7;
103    ReMeshIndicator(Th,Nh,Vh,indicator2,cc);
104    u=u;          // adaptation au nouveau maillage
105 }
106 plot(u, fill=1, cmm="sol. approx.", wait=1,dim=3, ps="uh_L.eps");

```

Listing 3 – stokesstabz2.edp

```

1 // ----- //  

2 // ----- Projet ----- //  

3 // ----- Timothee Pouchon ----- //  

4 // ----- Probleme de Stokes, methode Araya ----- //  

5 // ----- //  

6  

7 real nu = 1.0;  

8 real alpha = 1/12;  real beta = 1/12;  

9  

10 /* from freefem example file "AdaptResidualErrorIndicator.edp" :  

11    macro the get the current mesh size parameter  

12        in: Th the mesh  

13            Vh P1 fespace on Th  

14        out :  

15            h: the Vh finite element finite set to

```

```

16           the current mesh size          */
macro  MeshSizecomputation(Th,Vh,h)
{
  real[int]  count(Th.nv);
  /* mesh size (lenEdge = $int_e 1$) */
  varf vmeshsizen(u,v)=intalledges(Th,qfnbpE=1)(v);
  /* number of edge / par vertex */
  varf vedgecount(u,v)=intalledges(Th,qfnbpE=1)(v/lenEdge);
  /* computation of the mesh size */
  count=vedgecount(0,Vh);
  h[] = 0.;
  h[] = vmeshsizen(0,Vh);
  cout << " count min = " << count.min << " " << count.max << endl;
  h[] = h[]./count;
  cout << " -- bound meshsize = " << h[].min << " " << h[].max << endl;
}

// macro to remesh according the de residual indicator
// in:
//      Th the mesh
//      Nh P0 fespace on Th
//      Vh P1 fespace on Th
//      vindicator the varf of to evaluate the indicator to ^2
//      coef on etameam ..

macro  ReMeshIndicator(Th,Nh,Vh,vindicator,coef)
{
  Vh h=0;
  /*evalutate the mesh size */
  MeshSizecomputation(Th,Vh,h);
  Nh etak;
  etak[] = vindicator(0,Nh);
  real eta = sqrt(etak[].sum);
  file << "global Eta : " << eta << endl;
  file << "rapport errE/eta= " << errE/eta << endl;
  etak[] = sqrt(etak[]);
  file << "etak : min = " << etak[].min << " max = " << etak[].max << endl;
  plot(etak,wait=1,cmm="eta",ps="eta.eps",fill=1);
  real etastar= coef*(etak[].sum/etak[].n);
  cout << " etastar = " << etastar << " sum=" << etak[].sum << " " << endl;
  /* here etaK is discontinous
   we use the P1 L2 projection with mass lumping . */
  Vh fn,sigma;
  varf veta(unused,v)=int2d(Th)(etak*v);
  varf vun(unused,v)=int2d(Th)(1*v);
  fn[] = veta(0,Vh);
  sigma[] = vun(0,Vh);
  fn[] = fn[]./ sigma[];
  fn = max(min(fn/etastar,3.),0.3333) ;
  /* new mesh size */
  h = h / fn ;
  /* plot(h,wait=1); */
  Th=adaptmesh(Th,IsMetric=1,h,splitpbedge=1,nbvx=10000);
}

// Bord du domaine
border A(t=0,1){x=t;    y=0;    label=1;};
border B(t=0,1){x=1;    y=t;    label=1;};
border C(t=1,0){x=t;    y=1;    label=1;};
border D(t=1,0){x=0;    y=t;    label=1;};

mesh Th = buildmesh (A(10) + B(10) + C(10) + D(10));
fespace Vh(Th,P1); Vh u1,u2,v1,v2; // u=[u1,u2], v idem.
fespace Nh(Th,P0);
fespace Qh(Th,P1); Qh p,q;
fespace Ph(Thbb,P2b); // espace precis pour sol. reelles

```

```

84 problem Stokes([u1,u2,p],[v1,v2,q], solver=GMRES) =
85   int2d(Th)( nu*( dx(u1)*dx(v1)+dy(u1)*dy(v1)
86             +dx(u2)*dx(v2)+dy(u2)*dy(v2))
87             - p*(dx(v1)+dy(v2))
88             - q*(dx(u1)+dy(u2)) )
89             // <- B( (u,p),(v,q) )
90             // -> termes stabilisants
91   - int2d(Th)( alpha*(hTriangle^2/nu)
92               *( (-nu*(dxx(u1)+dyy(u1))+dx(p))
93                     *(nu*(dxx(v1)+dyy(v1))+dx(q))
94                     +(-nu*(dxx(u2)+dyy(u2))+dy(p))
95                     *(nu*(dxx(v2)+dyy(v2))+dy(q)) ) )
96   - intalledges(Th)( beta*(lenEdge/nu)
97               *( jump(-nu*(N.x*dx(u1)+N.y*dy(u1)))
98                     *jump(nu*(N.x*dx(v1)+N.y*dy(v1)))
99                     +jump(-nu*(N.x*dx(u2)+N.y*dy(u2)))
100                     *jump(nu*(N.x*dx(v2)+N.y*dy(v2))) ) )
101   - int2d(Th)(f1*v1+f2*v2) // (f,v)
102   + int2d(Th)( alpha*(hTriangle^2/nu)
103               *( f1*(nu*(dxx(v1)+dyy(v1))+dx(q))
104                 +f2*(nu*(dxx(v2)+dyy(v2))+dy(q)) ) )
105   + on(1,u1=0,u2=0);
106
107 varf indicator2(unused, chiK) =
108   int2d(Th)( chiK*alpha*(hTriangle^2/nu)
109             *( square(f1+nu*(dxx(u1)+dyy(u1))-dx(p))
110               +square(f2+nu*(dxx(u2)+dyy(u2))-dy(p)) ) )
111   +intalledges(Th)( chiK*0.5*beta*(lenEdge/nu)
112             *( square(jump(-nu*(N.x*dx(u1)+N.y*dy(u1))))
113               +square(jump(-nu*(N.x*dx(u2)+N.y*dy(u2)))) ) )
114   +int2d(Th)( chiK*nu*square(dx(u1)+dy(u2)) );
115
116 Ph uirealP2 = uireal;
117 Ph u2realP2 = u2real;
118 Ph prealP2 = preal;
119
120 plot([uirealP2,u2realP2], cmm="u reel", value=1, wait=1, ps="u.eps");
121 plot(prealP2, cmm="p reel", fill=1, value=1, wait=1, ps="p.eps");
122
123 real errE;
124 real errpL2, erruH1;
125 ofstream file("report.txt");
126 //Processus d'affinage
127 for (int i=0;i<7;i++)
128 {
129   plot(Th, cmm="maillage", wait=1, ps="maillage.eps");
130   Stokes;
131   plot([u1,u2], cmm="u approx.", value=1, wait=1, ps="uh.eps");
132   plot(p, fill=1, cmm="p approx.", value=1, wait=1, ps="ph.eps");
133   file << "-----" << endl;
134   file << "iteration n." << i+1 << endl;
135   // |p-ph| norme L2
136   errpL2 = sqrt( int2d(Th)( (preal-p)^2 ) );
137   // |u-uh| seminorme
138   erruH1 = sqrt( int2d(Th)( (dx(uirealP2)-dx(u1))^2 + (dy(uirealP2)-dy(u1))^2
139                           +(dx(u2realP2)-dx(u2))^2 + (dy(u2realP2)-dy(u2))^2 ) );
140   errE = sqrt(nu)*erruH1 + (1/sqrt(nu))*errpL2;
141   file << "seminorme H1 |u-uh| = " << erruH1 << endl;
142   file << "norme L2 |p-ph| = " << errpL2 << endl;
143   file << "erreur = " << errE << endl;
144   real cc=0.7;
145   if(i>5) cc=1.4;
146   ReMeshIndicator(Th,Nh,Qh,indicator2,cc);
147   u1=u1; u2=u2; p=p;      // adaptation au nouveau maillage
148 }

```

Listing 4 – stokesstabzL.edp

```

// ----- //  

2 // ----- Projet ----- //  

3 // ----- Timoth2e Pouchon ----- //  

4 // ----- Probleme de Stokes, methode Araya ----- //  

5 // ----- //  

6  

7 real nu = 1.0;  

8 real alpha = 1/12;  real beta = 1/12;  

9 func f1 = 0;  

10 func f2 = 0;  

11  

12 /* from freefem example file "AdaptResidualErrorIndicator.edp" :  

   macro the get the current mesh size parameter  

13     in: Th the mesh  

         Vh P1 fespace on Th  

14     out :  

         h: the Vh finite element finite set to  

           the current mesh size */  

15 macro MeshSizecomputation(Th,Vh,h)  

16 {  

17     real[int] count(Th.nv);  

18     /* mesh size (lenEdge = $int_e 1$) */  

19     varf vmeshsizen(u,v)=intalledges(Th,qfnbpE=1)(v);  

20     /* number of edge / par vertex */  

21     varf vedgecount(u,v)=intalledges(Th,qfnbpE=1)(v/lenEdge);  

22     /* computation of the mesh size */  

23     count=vedgecount(0,Vh);  

24     h[] = 0.;  

25     h[] = vmeshsizen(0,Vh);  

26     cout << " count min = " << count.min << " " << count.max << endl;  

27     h[] = h[] ./ count;  

28     cout << " -- bound meshsize = " << h[].min << " " << h[].max << endl;  

29 }  

30  

31 // macro to remesh according the de residual indicator  

32 //  

33 //     in:  

34 //         Th the mesh  

35 //         Nh P0 fespace on Th  

36 //         Vh P1 fespace on Th  

37 //         vindicator the varf of to evaluate the indicator to ^2  

38 //         coef on etameam ..  

39  

40 macro ReMeshIndicator(Th,Nh,Vh,vindicator,coef)  

41 {  

42     Vh h=0;  

43     /*evalutate the mesh size */  

44     MeshSizecomputation(Th,Vh,h);  

45     Nh etak;  

46     etak[] = vindicator(0,Nh);  

47     real eta = sqrt(etak[].sum);  

48     /*file << "global Eta : " << eta << endl;*/  

49     etak[] = sqrt(etak[]);  

50     /*file << "etak : min = " << etak[].min << " max = " << etak[].max << endl;*/  

51     file << "\prog{" << etak[].min << "}" / \prog{" << etak[].max << "}" " << endl;  

52     plot(etak,wait=1,cmm="eta",ps="eta.eps",fill=1);  

53     real etastar= coef*(etak[].sum/etak[].n);  

54     cout << " etastar = " << etastar << " sum=" << etak[].sum << " " << endl;  

55     /* here etaK is discontinous  

       we use the P1 L2 projection with mass lumping . */  

56     Vh fn,sigma;  

57     varf veta(unused,v)=int2d(Th)(etak*v);  

58     varf vun(unused,v)=int2d(Th)(1*v);  

59     fn[] = veta(0,Vh);  

60     sigma[] = vun(0,Vh);  

61     fn[] = fn[] ./ sigma[];  

62     fn = max(min(fn/etastar,3.),0.3333) ;

```

```

/* new mesh size */
68   h = h / fn ;
    /* plot(h,wait=1); */
70   Th=adaptmesh(Th,IsMetric=1,h,splitpedge=1,nbvx=10000);
}
72
// Bord du domaine en L en commençant par le bas
74 border ba(t=0,1.0){x=t; y=0; label=1;};
border bb(t=0,0.5){x=1; y=t; label=2;} // inflow
76 border bc(t=0,0.5){x=1-t; y=0.5;label=1;};
border bd(t=0.5,1){x=0.5; y=t; label=1;};
78 border be(t=0.5,1){x=1-t; y=1; label=1;};
border bf(t=0.0,1){x=0; y=1-t;label=3;} // outflow
80
mesh Th = buildmesh (ba(6) + bb(4) + bc(4) + bd(4) + be(4) + bf(6));
82
fespace Vh(Th,P1); Vh u1,u2,v1,v2; // u=[u1,u2], v idem.
84 fespace Nh(Th,P0);
fespace Qh(Th,P1); Qh p,q;
86
problem Stokes([u1,u2,p],[v1,v2,q], solver=GMRES) =
  int2d(Th)( nu*( dx(u1)*dx(v1)+dy(u1)*dy(v1)
               +dx(u2)*dx(v2)+dy(u2)*dy(v2))
  - p*(dx(v1)+dy(v2))
  - q*(dx(u1)+dy(u2)) )
  // <- B( (u,p),(v,q) )
  // -> termes stabilisants
94 - int2d(Th)( alpha*(hTriangle^2/nu)
               *( (-nu*(dxx(u1)+dyy(u1))+dx(p))
                   *(nu*(dxx(v1)+dyy(v1))+dx(q))
                   +(-nu*(dxx(u2)+dyy(u2))+dy(p))
                   *(nu*(dxx(v2)+dyy(v2))+dy(q)) ) )
96
98 - intalledges(Th)( beta*(lenEdge/nu)
               *( jump(-nu*(N.x*dx(u1)+N.y*dy(u1)))
                   *jump(nu*(N.x*dx(v1)+N.y*dy(v1)))
                   +jump(-nu*(N.x*dx(u2)+N.y*dy(u2)))
                   *jump(nu*(N.x*dx(v2)+N.y*dy(v2))) ) )
100
102 - int2d(Th)(f1*v1+f2*v2) // (f,v)
+ int2d(Th)( alpha*(hTriangle^2/nu)
               *( f1*(nu*(dxx(v1)+dyy(v1))+dx(q))
                   +f2*(nu*(dxx(v2)+dyy(v2))+dy(q)) ) )
104
106 + on(1,u1=0,u2=0)
+ on(2,u1=-2,u2=0)
+ on(3,u1=-1,u2=0);

112 varf indicator2(unused, chiK) =
  int2d(Th)( chiK*alpha*(hTriangle^2/nu)
               *( square(f1+nu*(dxx(u1)+dyy(u1))-dx(p))
                   +square(f2+nu*(dxx(u2)+dyy(u2))-dy(p)) ) )
114
116 + intalledges(Th)( chiK*0.5*beta*(lenEdge/nu)
               *( square(jump(-nu*(N.x*dx(u1)+N.y*dy(u1))))
                   +square(jump(-nu*(N.x*dx(u2)+N.y*dy(u2)))) ) )
118
120 + int2d(Th)( chiK*nu*square(dx(u1)+dy(u2)) );
122
ofstream file("report.txt");
//Processus d'affinage
124 for (int i=0;i<7;i++)
{
126   plot(Th, cmm="maillage", wait=1, ps="maillage.eps");
   Stokes;
128   plot([u1,u2], cmm="u approx.", value=1, wait=1, ps="uh.eps");
   plot(u2,cmm="vertical vel", value=1, wait=1, ps="v2.eps");
130   plot(p, fill=1, cmm="p approx.", value=1, wait=1, ps="ph.eps");
   cout << "iteration n." << i+1 << endl;
   real cc=0.7;
   if(i>5) cc=1.4;
}

```

```
134     ReMeshIndicator(Th,Nh,Qh,indicator2,cc);
135     u1=u1; u2=u2; p=p;           // adaptation au nouveau maillage
136 }
```

Bibliographie

- [1] QUARTERONI A. (2009) *Numerical Models for differential Problems*. Springer.
- [2] VERFÜRTH R. (1996) *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh Refinement Techniques*. Wiley Teubner.
- [3] ARAYA R., BARRENECHEA G. & VALENTIN F. (2007) *Stabilized finite element methods based on multiscale enrichment for the Stokes problem*. IMA Journal of Numerical Analysis, **27**, 172-197.
- [4] DISCACCIATI M. (2010) *Notes du cours "Numerical Approximation of Partial Differential Equations"*. CMCS, EPFL.
- [5] HECHT F. (2010) *Freefem++, Third Edition, Version 3.8*. Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- [6] QUARTERONI A., RUIZ-BAIER R. (2010) *Analysis of a finite volume element method for the Stokes problem*. submitted.
- [7] DOUGLAS J. & WANG J. (1989) *An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem*. Math. Comput., **52**, 495-508.
- [8] GIRAUT V. & RAVIART P.A. (1986) *Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations*. Springer.
- [9] ARAYA R., BARRENECHEA G. & POZA A. (2008) *An adaptive stabilized finite element method for the generalized Stokes problem*. Journal of Computational and Applied Mathematic, **214**, 457-479.
- [10] ARAYA R., BARRENECHEA G. & POZA A. (2005) *An a Posteriori Error Estimator for the Generalized Stokes Problem*, Departamento de Ingenería Matemática, Universidad de Concepción.
- [11] ERN A. & GUERMOND J.-L. (2004) *Theory and Practice of Finite Elements*. Springer.
- [12] QUARTERONI A. & VALLI A. (1994) *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer, Berlin Heidelberg.
- [13] QUARTERONI A. & VALLI A. (1999) *Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Oxford University Press, New York.