



Sociedad Chilena de
Mecánica Computacional

Cuadernos de Mecánica Computacional

Vol. 6 nº1, 2008

UN MÉTODO ADAPTATIVO PARA EL MODELO BIDOMINIO EN ELECTROCARDIOLOGÍA

Mostafa Bendahmane, Raimund Bürger y Ricardo Ruiz Baier*

* Departamento de Ingeniería Matemática - Universidad de Concepción
Casilla 160-C - Concepción - CHILE
e-mail : mostafab,rburger,rruiz@ing-mat.udec.cl

Resumen

En este trabajo se presenta un método de volúmenes finitos enriquecido con un esquema de multiresolución completamente adaptativo para obtener adaptatividad espacial, y un esquema Runge-Kutta-Fehlberg con paso temporal de variación local para obtener adaptatividad temporal, para resolver numéricamente las conocidas ecuaciones "bidominio" que modelan la actividad eléctrica del tejido en el miocardio. Se consideran dos modelos simples para las corrientes de membrana y corrientes iónicas. En primer lugar definimos una solución aproximada y nos referimos a su convergencia a la correspondiente solución débil del problema continuo, obteniendo de este modo una demostración alternativa de que el problema continuo es bien puesto. Luego de introducir la técnica de multiresolución, se deriva un umbral óptimo para descartar la información no significativa, y tanto la eficiencia como la precisión de nuestro método es vista en términos de la aceleración de tiempo de máquina, compresión de memoria computacional y errores en diferentes normas.

1. Introducción

Las mediciones directas representan una dificultad obvia en ciencias. Por lo tanto simulaciones numéricas son de gran interés, específicamente en modelos cardíacos. Entre tales modelos, el *modelo bidominio* es conocido como uno de los más precisos y completos para el estudio teórico y numérico de la actividad eléctrica en el tejido cardíaco. Desde el punto de vista computacional, el modelo bidominio representa un verdadero desafío, dado que el tejido cardíaco tiene tamaños del orden de centímetros y por ejemplo, los frentes de excitación de las ondas son del orden de los 10^{-3} centímetros. Esta característica local, no sólo espacial, sino también temporal, junto con la aparición de frentes perfilados en el campo de los potenciales eléctricos, hace que las simulaciones en mallas uniformes sean prácticamente

imposibles de llevar a cabo. Aquí es donde los métodos adaptativos juegan un rol vital en las simulaciones cardíacas. En este artículo desarrollamos un esquema de multiresolución completamente adaptativo provisto de adaptatividad temporal a través de una estrategia de paso temporal local y deducimos un umbral óptimo para descartar información no significativa. Basados en experiencia previa sobre sistemas de reacción-difusión y ecuaciones parabólicas degeneradas [2, 4, 5], sugerimos que la multiresolución puede ser una herramienta efectiva para resolver las ecuaciones del modelo bidominio. En el contexto de métodos de multiresolución completamente adaptativos, mencionamos que existen trabajos desarrollados por varios grupos de investigación (ver [2, 4, 6, 10, 11]), con aplicaciones enfocadas a otras áreas.

1.1. El modelo bidominio

Supongamos $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto y acotado con frontera suave $\partial\Omega$. En este modelo, el músculo cardíaco es interpretado como la unión de dos medios continuos interpenetrados y superpuestos: el medio intracelular y el extracelular. Estos ocupan la misma área y se encuentran separados por la membrana celular cardíaca. $u_i = u_i(t, x)$ y $u_e = u_e(t, x)$ representan los potenciales eléctricos *intracelular* y *extracelular* en $(x, t) \in \Omega_T := \Omega \times (0, T)$, y la diferencia entre estos potenciales $v = v(t, x) = u_i - u_e$ es conocido como el potencial *transmembrana*. La conductividad del tejido está representada por tensores escalados $\mathbf{M}_i(x)$ y $\mathbf{M}_e(x)$ dados por

$$\mathbf{M}_j(x) = \sigma_j^t \mathbf{I} + (\sigma_j^l - \sigma_j^t) \mathbf{a}_l(x) \mathbf{a}_l^T(x),$$

donde $\sigma_j^l = \sigma_j^l(x) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ y $\sigma_j^t = \sigma_j^t(x) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, para $j = i, e$ son las conductividades intra- y extracelulares a lo largo y a través respectivamente de la dirección de la fibra muscular correspondiente (paralela a $\mathbf{a}_l(x)$).

Comúnmente se utilizan los radios de anisotropía $\frac{\sigma_i^l}{\sigma_i^t}$ y $\frac{\sigma_e^l}{\sigma_e^t}$. En general las conductividades en la dirección longitudinal l son de mayor magnitud que aquellas a través de la fibra (dirección t); y tal caso se denomina *anisotropía fuerte* en conductividad eléctrica.

El siguiente sistema fuertemente acoplado de reacción-difusión forma el modelo bidominio anisotrópico (ver [12]):

$$\begin{aligned} \beta c_m \partial_t v + \nabla \cdot (\mathbf{M}_e(x) \nabla u_e) + \beta I_{\text{ion}}(v, w) &= I_{\text{app}} \text{ en } \Omega_T, \\ -\nabla \cdot ((\mathbf{M}_i(x) + \mathbf{M}_e(x)) \nabla u_e) - \nabla \cdot (\mathbf{M}_i(x) \nabla v) &= 0 \text{ en } \Omega_T, \\ \partial_t w - H(v, w) &= 0 \text{ en } \Omega_T. \end{aligned} \tag{1}$$

Aquí, $c_m > 0$ representa la capacitancia de superficie de la membrana, β es la razón área-volumen, y $w(t, x)$ es la variable de recuperación, que toma en cuenta las variables de concentración del modelo. Las corrientes de los estímulos aplicados a los medios intra- y extracelulares están representadas por la función $I_{\text{app}} = I_{\text{app}}(t, x)$ que satisface $\int_{\Omega} I_{\text{app}}(t, x) dx = 0$ para casi todo $t \in (0, T)$. La función H en la ecuación diferencial ordinaria de (1) y la función I_{ion} corresponden a uno de los modelos más simples para las corrientes de la membrana y corriente iónica (entre una amplia variedad de tales modelos): el modelo de membrana de

Mitchell–Schaeffer [9]

$$H(v, w) = \frac{w_\infty(v/v_p) - w}{R_m c_m \eta_\infty(v/v_p)}, \quad I_{\text{ion}}(v, w) = \frac{v_p}{R_m} \left(\frac{v}{v_p \eta_2} - \frac{v^2(1 - v/v_p)w}{v_p^2 \eta_1} \right),$$

donde

$$\eta_\infty(s) = \begin{cases} \eta_3 & \text{para } s < \eta_5, \\ \eta_4 & \text{en otro caso,} \end{cases}, \quad w_\infty(s) = \begin{cases} 1 & \text{para } s < \eta_5, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

R_m representa la resistividad superficial de la membrana y $v_p, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$ son constantes dadas. El sistema (1) es provisto con condiciones de borde de no-flujo, representando un tejido cardíaco aislado

$$(\mathbf{M}_j(x) \nabla u_j) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Sigma_T := \partial\Omega \times (0, T), \quad j = i, e, \quad (2)$$

y condiciones iniciales apropiadas en Ω para el potencial transmembrana y variable de recuperación $v(0, x) = v_0(x)$, $w(0, x) = w_0(x)$. Para asegurar la dependencia continua de los datos en la componente v de la solución, requerimos que el dato inicial v_0 sea compatible con (2). Por lo tanto la condición de compatibilidad

$$\int_{\Omega} u_e(x, t) dx = 0 \text{ para c.t. } t \in (0, T), \quad (3)$$

debe ser satisfecha.

La teoría estándar para ecuaciones parabólicas–elípticas no puede ser aplicada de forma natural en el análisis de las ecuaciones del modelo bidominio, debido a la diferencia existente entre los grados de anisotropía entre los medios intra- y extra celulares. Debido a esta característica, el sistema (1) es de naturaleza parabólica degenerada. En [3] los autores prueban existencia y unicidad de solución para las ecuaciones de bidominio, utilizando el método de Faedo–Galerkin y teoría de compacidad.

2. Un método base de volúmenes finitos

Para resolver numéricamente (1) introducimos un método estándar de volúmenes finitos. Una malla admisible para Ω será formada por una familia \mathcal{T} de volúmenes de control (polígonos abiertos y convexos) de diámetro máximo h . Para todo $K \in \mathcal{T}$, x_K denota el centro de K , $N(K)$ el conjunto de vecinos de K , $\mathcal{E}_{\text{int}}(K)$ el conjunto de bordes de K en el interior de \mathcal{T} y $\mathcal{E}_{\text{ext}}(K)$ el conjunto de bordes de K sobre la frontera $\partial\Omega$. Para todo $L \in N(K)$ $d(K, L)$ denota la distancia entre x_K y x_L , $\sigma_{K,L}$ es la interfaz entre K y L , y $\eta_{K,L}$ ($\eta_{K,\sigma}$ respectivamente) es el vector unitario normal a $\sigma_{K,L}$ orientado desde K hacia L . Para todo $K \in \mathcal{T}$, $|K|$ es la medida de K . La admisibilidad de \mathcal{T} implica que $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}} \overline{K}$, $K \cap L = \emptyset$ si $K, L \in \mathcal{T}$ y $K \neq L$, y además existe una sucesión finita $(x_K)_{K \in \mathcal{T}}$, tal que $\overline{x_K x_L}$ es ortogonal a $\sigma_{K,L}$. Ahora, considerar $K \in \mathcal{T}$ y $L \in N(K)$ con vértices comunes $(a_{\ell,K,L})_{1 \leq \ell \leq I}$ con $I \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, y denotemos por $T_{K,L}$ al polígono abierto y convexo de vértices (x_K, x_L) y $(a_{\ell,K,L})_{1 \leq \ell \leq I}$. Sea \mathcal{D} una discretización admisible de Q_T , que consiste en una malla admisible

para Ω , un paso temporal $\Delta t > 0$, y $N > 0$ elegido como el menor entero tal que $N\Delta t \geq T$. Con esto, escribimos $t^n = n\Delta t$ para $n \in \{0, \dots, N\}$. Sobre cada elemento $K \in \mathcal{T}$, se definen tensores de conductividad (definidos positivos) mediante

$$M_{j,K} = \frac{1}{|K|} \int_{\Omega} \mathbf{M}_j(x) dx, \quad j = i, e.$$

Sea $F_{j,K,L}$ una aproximación de $\int_{\sigma_{K,L}} \mathbf{M}_j(x) \nabla u_j \cdot \eta_{K,L} d\gamma$ para $j = i, e$, y para $K \in \Omega_R$, $L \in N(K)$, sea

$$M_{j,K,L} = \left| \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{M}_j(x) dx \eta_{K,L} \right| := |M_{j,K} \eta_{K,L}|, \quad j = i, e.$$

Los flujos difusivos $M_j(x) \nabla u_j \cdot \eta_{K,L}$ sobre $\sigma_{K,L}$ son aproximados por

$$\int_{\sigma_{K,L}} (\mathbf{M}_j(x) \nabla u_j) \cdot \eta_{K,L} d\gamma \approx |\sigma_{K,L}| M_{j,K,L} \frac{u_{j,\sigma} - u_{j,K}}{d(K, \sigma_{K,L})},$$

donde y_σ es el centro de $\sigma_{K,L}$ y $u_{j,\sigma}$ es una aproximación de $u_j(y_\sigma)$, $j = i, e$. La conservatividad del método nos permite determinar las incógnitas adicionales $u_{j,\sigma}$, y además calcular los flujos numéricos sobre los bordes:

$$F_{j,K,L} = d_{j,K,L}^* \frac{|\sigma_{K,L}|}{d(K, L)} (u_{j,L} - u_{j,K}) \text{ si } L \in N(K),$$

donde

$$d_{j,K,L}^* = \frac{M_{j,K,L} M_{j,L,K}}{d(K, \sigma_{K,L}) M_{j,K,L} + d(L, \sigma_{K,L}) M_{j,L,K}} d(K, L).$$

Finalmente, aproximaremos el sistema (1) mediante la siguiente formulación de volúmenes finitos: Determinar $(u_{j,K}^n)_{K \in \mathcal{T}}$ para $j = i, e$ y $n \in \{0, \dots, N\}$, $(v_K^n)_{K \in \mathcal{T}} = (u_{i,K}^n - u_{e,K}^n)_{K \in \mathcal{T}}$ para $n \in \{0, \dots, N\}$, y $(w_K^n)_{K \in \mathcal{T}}$ para $n \in \{0, \dots, N\}$, tales que para todo $K \in \mathcal{T}$ y $n \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned} v_K^0 &= \frac{1}{|K|} \int_K v_0(x) dx, \quad w_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K w_0(x) dx, \\ \beta c_m |K| \frac{v_K^{n+1} - v_K^n}{\Delta t} + \sum_{L \in N(K)} d_{e,K,L}^* \frac{|\sigma_{K,L}|}{d(K, L)} (u_{e,L}^n - u_{e,K}^n) + \beta |K| I_{\text{ion},K}^n &= |K| I_{\text{app},K}^n, \\ \sum_{L \in N(K)} \frac{|\sigma_{K,L}|}{d(K, L)} \{ (d_{i,K,L}^* + d_{e,K,L}^*) (u_{e,L}^{n+1} - u_{e,K}^{n+1}) + d_{i,K,L}^* (v_L^{n+1} - v_K^{n+1}) \} &= |K| I_{\text{app},K}^n, \\ |K| \frac{w_K^{n+1} - w_K^n}{\Delta t} - |K| H_K^n &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

La condición de borde (2) es tomada en cuenta imponiendo condiciones de no-flujo sobre los bordes externos:

$$d_{j,K,\sigma}^* \frac{|\sigma_{K,L}|}{d(K, L)} (u_{j,L}^n - u_{j,K}^n) = 0 \text{ for } \sigma \in \mathcal{E}_{\text{ext}}(K), \quad j = i, e, \tag{5}$$

y (3) es discretizada mediante $\sum_{K \in \mathcal{T}} |K| u_{e,K}^n = 0$, para todo $n \in \{1, \dots, N-1\}$.

La existencia, unicidad de solución aproximada y convergencia del esquema numérico hacia la solución débil correspondiente, son analizados en el trabajo [1]. Aún más, como en [2], es posible deducir que en el caso de mallas uniformes, el esquema (4)-(5) es estable bajo la condición CFL

$$\Delta t \leq \frac{h}{2 \max_{K \in \mathcal{T}} (|I_{\text{ion},K}| + 2|I_{\text{app},K}|) + 4h^{-1} \max_{K \in \mathcal{T}} (|M_{i,K}| + |M_{e,K}|)}. \quad (6)$$

3. Multiresolución y wavelets

Considerar como dominio computacional, un simple rectángulo que luego de un cambio de variables corresponde a $\Omega = [0, 1]^2$. En primer lugar introducimos una jerarquía de mallas anidadas $\Lambda_0 \subset \dots \subset \Lambda_L$, usando una partición diádica uniforme de Ω . Cada malla $\Lambda_l := \{V_{(i,j),l}\}_{(i,j)}$, con (i, j) a ser definido, está formada por volúmenes de control en cada nivel de resolución $V_{(i,j),l} := 2^{-l}[i, i+1] \times [j, j+1]$, $i, j \in I_l = \{0, \dots, 2^l - 1\}$, $l = 0, \dots, L$. $l = 0$ corresponde al nivel más grueso y $l = L$ al más fino. Introducimos también los conjuntos de refinamiento $\mathcal{M}_{(i,j),l} = \{2(i, j) + \mathbf{e}\}$, $\mathbf{e} \in E := \{0, 1\}^2$ con $\#\mathcal{M}_{(i,j),l} = 4$. Para cada nivel $l = 0, \dots, L$, se define la función de escala

$$\tilde{\varphi}_{(i,j),l}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|V_{(i,j),l}|} \chi_{V_{(i,j),l}}(\mathbf{x}) = 2^{2l} \chi_{[0,1]^2}(2^l x_1 - i, 2^l x_2 - j),$$

y por lo tanto el promedio de $u(\cdot, t) \in L^1(\Omega)$ sobre el volumen de control $V_{(i,j),l}$ puede expresarse en términos del producto interior $\bar{u}_{(i,j),l} := \langle u, \tilde{\varphi}_{(i,j),l} \rangle_{L^1(\Omega)}$. Con esto en mente, es posible definir una relación de dos escalas para las funciones de escala y medias en celda respectivamente

$$\tilde{\varphi}_{(i,j),l} = \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{M}_{(i,j),l}} \frac{|V_{\mathbf{r},l+1}|}{|V_{(i,j),l}|} \tilde{\varphi}_{\mathbf{r},l+1}, \quad \bar{u}_{(i,j),l} = \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{M}_{(i,j),l}} \frac{|V_{\mathbf{r},l+1}|}{|V_{(i,j),l}|} \bar{u}_{\mathbf{r},l+1}.$$

Tal relación define un operador de *proyección* que transforma elementos desde niveles finos a niveles gruesos. Para $\mathbf{x} \in V_{2(i,j)+\mathbf{a},l+1}$, $\mathbf{a} \in E$, definimos la función *wavelet* en función de la función de escala sobre un nivel más fino, como

$$\tilde{\psi}_{(i,j),\mathbf{e},l} = \sum_{\mathbf{a} \in E} 2^{-2} (-1)^{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}} \tilde{\varphi}_{2(i,j)+\mathbf{a},l+1} = \sum_{\mathbf{r} \in \mathcal{M}_{(i,j),l}} \frac{|V_{\mathbf{r}=2(i,j)+\mathbf{a},l+1}|}{|V_{(i,j),l}|} (-1)^{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}} \tilde{\varphi}_{\mathbf{r},l+1}.$$

Por otro lado, para todo $\mathbf{e} \in E^* := E \setminus \{(0, 0)\}$, es posible obtener una relación de dos escalas *inversa* (ver [10])

$$\tilde{\varphi}_{2(i,j)+\mathbf{a},l+1} = \sum_{\mathbf{e} \in E} (-1)^{\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}} \tilde{\psi}_{(i,j),\mathbf{e},l}, \quad \mathbf{a} \in E.$$

Ahora, para $\mathbf{e} \in E^*$, introducimos los *detalles*, que juegan un papel crucial en la detección de zonas donde la solución posee altos gradientes

$$d_{(i,j),\mathbf{e},l} := \langle u, \tilde{\psi}_{(i,j),\mathbf{e},l} \rangle.$$

Dada la relación de dos escalas inversa, es posible escribir:

$$\hat{u}_{(i,j),l+1} = \sum_{\mathbf{r} \in \bar{S}_{(i,j)}^l} g_{(i,j),\mathbf{r}}^l \bar{u}_{\mathbf{r},l}, \quad (7)$$

donde $\bar{S}_{(i,j)}^l := \{V_{([i/2]+r_1, [j/2]+r_2), l}\}_{r_1, r_2 \in \{-s, \dots, 0, \dots, s\}}$ denota el estencil de interpolación, $g_{(i,j),\mathbf{r}}^l$ son coeficientes de la interpolación, y el gorro sobre u en el lado izquierdo de (7) indica que se trata de un valor predicho. La relación (7) define un operador de *predicción*, que transforma elementos de niveles gruesos en niveles finos. En contraste con el operador de proyección, el operador de predicción no es único. Sin embargo, se imponen dos restricciones básicas para su definición: Debe ser consistente con la proyección, en el sentido de que es el *inverso a derecha* del operador de proyección; y debe ser local, en el sentido de que el valor predicho dependerá sólo de $\bar{S}_{(i,j)}^l$. En nuestro caso particular, la predicción es polinomial:

$$\hat{u}_{2i+e_1, 2j+e_2, l+1} = \bar{u}_{i,j,l} - (-1)^{e_1} Q_x - (-1)^{e_2} Q_y + (-1)^{e_1 e_2} Q_{xy},$$

donde $e_1, e_2 \in \{0, 1\}$ y

$$\begin{aligned} Q_x &:= \sum_{n=1}^s \tilde{\gamma}_n (\bar{u}_{i+n,j,l} - \bar{u}_{i-n,j,l}), \quad Q_y := \sum_{p=1}^s \tilde{\gamma}_p (\bar{u}_{i,j+l,p} - \bar{u}_{i,j-l,p}), \\ Q_{xy} &:= \sum_{n=1}^s \tilde{\gamma}_n \sum_{p=1}^s \tilde{\gamma}_p (\bar{u}_{i+n,j+p,l} - \bar{u}_{i+n,j-p,l} - \bar{u}_{i-n,j+p,l} + \bar{u}_{i-n,j-p,l}). \end{aligned}$$

Los coeficientes correspondientes son $\tilde{\gamma}_1 = -\frac{22}{128}$ y $\tilde{\gamma}_2 = \frac{3}{128}$. Cuanto más regular es la función u sobre $V_{(i,j),l}$, el coeficiente de detalle correspondiente es más pequeño en módulo. En vista de esta propiedad de cancelación, es natural pensar en alguna estrategia para eliminar información no significativa (*estrategia de corte*). La idea básica es eliminar todos los elementos de la malla que correspondan a detalles que se encuentran bajo una tolerancia (dependiente del nivel de resolución) dada por

$$\varepsilon_l = 2^{2(l-L)} \varepsilon_R, \quad (8)$$

donde ε_R es una tolerancia de referencia a ser determinada en la sección 3.2.

3.1. Estructura de datos en árbol

Organizaremos las medias en celda y los detalles correspondientes utilizando una estructura de árbol graduado dinámico. Este tipo de almacenamiento garantiza la estabilidad de las operaciones multiescala (ver [6]). Llamaremos *raíz* a la base, y *nodo* a cada elemento del árbol. Un nodo padre posee cuatro hijos, y un nodo sin hijos es llamado *hoja*. Cada nodo posee $s' = 2$ vecinos en cada dirección espacial, llamados *primos cercanos*, necesarios para determinar los flujos en cada hoja; si tales primos cercanos no existieran, deben ser creados artificialmente como *hojas virtuales*. Las hojas del árbol son los elementos que conforman la

mallla adaptativa. Denotamos por $\mathcal{L}(\Lambda)$ a la restricción del conjunto de nodos Λ al conjunto de hojas.

En cada paso temporal, la reconstrucción de multiresolución es aplicada a la parte espacial de la solución $\mathbf{u} = (v, u_e, w)$. Luego de cada paso temporal, es necesario actualizar la mallla adaptativa, y esto se realiza mediante la aplicación de la estrategia de corte. Una vez que se aplica tal estrategia, es necesario agregar una *zona de seguridad* a la estructura de árbol con el fin de asegurar que la mallla a ser utilizada en el paso temporal siguiente, será adecuada para representar la solución correspondiente. Esta zona de seguridad será implementada agregando un nivel más fino en todas las posiciones posible (sin destruir la estructura de árbol). Para cuantificar la mejora obtenida en compresión de datos y tiempo de máquina, usaremos la *tasa de compresión de datos* y la *aceleración de tiempo de máquina* (ver [5])

$$\eta := \frac{\mathcal{N}}{2^{-(L+1)}\mathcal{N} + \#\mathcal{L}(\Lambda)}, \quad \mathcal{V} := \frac{\text{CPU time}_{\text{FV}}}{\text{CPU time}_{\text{MR}}}.$$

Aquí \mathcal{N} es el número de elementos en la mallla más fina en el nivel L , y $\#\mathcal{L}(\Lambda)$ es la cardinalidad del conjunto de hojas.

3.2. Análisis de error para el método de multiresolución

Usando las propiedades básicas del esquema de volúmenes finitos de referencia, derivamos la elección óptima para la tolerancia de referencia (8). En primer lugar, el error global entre la solución de referencia y la solución mediante multiresolución es descompuesto en dos errores

$$\|\mathbf{u}_{\text{ex}}^L - \mathbf{u}_{\text{MR}}^L\| \leq \|\mathbf{u}_{\text{ex}}^L - \mathbf{u}_{\text{FV}}^L\| + \|\mathbf{u}_{\text{FV}}^L - \mathbf{u}_{\text{MR}}^L\|.$$

El primer error del lado derecho es denominado *error de discretización* y el segundo error es denominado *error de perturbación*. Utilizando estimaciones estándar para ambos errores y la condición CFL (6), obtenemos (ver detalles en [4, 6]) que si la *tolerancia de referencia* es dada por

$$\epsilon_{\text{R}} = C \frac{2^{(2-\alpha)L-2}}{\max_{K \in \mathcal{T}} \left(|I_{\text{ion},K}| + 2|I_{\text{app},K}| \right) + D \max_{K \in \mathcal{T}} \left(|M_{i,K}| + |M_{e,K}| \right)},$$

entonces el error de discretización y el error de perturbación poseen el mismo orden de magnitud.

3.3. Aceleración de la evolución temporal

La idea básica del método a ser presentado, es utilizar una condición CFL local, imponiendo el mismo número CFL para todas las escalas. La estrategia consiste en evolucionar todas la hojas situadas en el nivel l usando el paso temporal local

$$\Delta t_l = 2^{L-l} \Delta t, \quad l = L-1, \dots, 0,$$

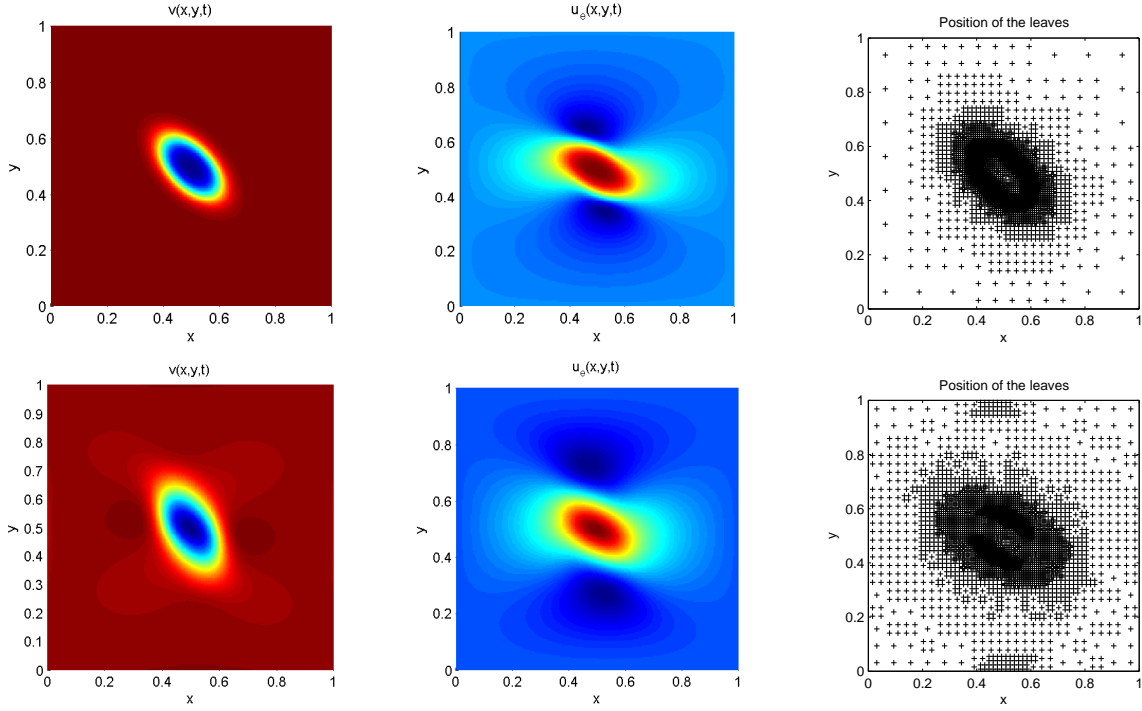


Figura 1: *Potencial transmembrana v , potencial extracelular u_e , y hojas de la correspondiente estructura de árbol en los instantes $t = 0,01$ y $t = 1,1$.*

donde $\Delta t = \Delta t_L$ corresponde al paso temporal sobre el nivel más fino L . Tal estrategia permite incrementar el paso temporal para la mayor parte de la malla adaptativa, sin necesidad de violar la condición CFL. Ahora, es necesario sincronizar el paso temporal para las porciones de la solución que se encuentran en distintos niveles de resolución. Pero esta sincronización es alcanzada de manera automática al cabo de 2^l pasos usando Δt_l .

La proyección y predicción de multiresolución son efectuadas sólo en los niveles ocupados por hojas del árbol correspondiente, y sólo cada dos pasos temporales. Para el resto de los pasos intermedios, se utiliza la misma estructura de árbol. Del mismo modo, los flujos son calculados sólo en niveles que contienen hojas, y éstos son calculados del siguiente modo: Si un borde dado es compartido por dos hojas en el mismo nivel l , entonces el cálculo del flujo se hace de manera estándar, utilizando los primos cercanos u hojas virtuales si fuere necesario. Si el borde es compartido por una hoja en el nivel l y una hoja en un nivel más fino $l + 1$ (*borde interfaz*), calculamos los flujos en el nivel $l + 1$ sobre el mismo borde, y el flujo correspondiente en el nivel l será igual a la suma de los flujos (en la dirección opuesta) sobre los hijos correspondientes en el nivel $l + 1$. Con el fin de tener siempre a disposición los flujos calculados, la estrategia de paso temporal local debe realizarse recursivamente desde el nivel más fino hasta el nivel más grueso.

Tiempo [ms]	\mathcal{V}	η	Potencial	error L^1	error L^2	error L^∞
$t=0.01$	13.74	19.39	v	$3,68 \times 10^{-4}$	$8,79 \times 10^{-5}$	$6,51 \times 10^{-4}$
			u_e	$2,01 \times 10^{-4}$	$6,54 \times 10^{-5}$	$5,22 \times 10^{-4}$
$t=1.1$	21.40	17.63	v	$4,06 \times 10^{-4}$	$9,26 \times 10^{-5}$	$6,83 \times 10^{-4}$
			u_e	$2,79 \times 10^{-4}$	$8,72 \times 10^{-5}$	$5,49 \times 10^{-4}$
$t=2.2$	25.23	17.74	v	$4,37 \times 10^{-4}$	$1,25 \times 10^{-4}$	$6,88 \times 10^{-4}$
			u_e	$3,48 \times 10^{-4}$	$9,44 \times 10^{-5}$	$6,11 \times 10^{-4}$
$t=3.3$	26.09	16.35	v	$5,29 \times 10^{-4}$	$1,94 \times 10^{-4}$	$7,20 \times 10^{-4}$
			u_e	$4,15 \times 10^{-4}$	$1,06 \times 10^{-4}$	$6,32 \times 10^{-4}$

Cuadro 1: *Tiempo de simulación, aceleración de tiempo de máquina \mathcal{V} , tasa de compresión η y errores normalizados.*

4. Ejemplo numérico

En las simulaciones se utiliza un dominio computacional simple $\Omega = [0, 1 \text{ cm}]^2$ y los siguientes parámetros (siguiendo [12]): capacitancia de la membrana $c_m = 1,0 \text{ mF/cm}^2$, conductividades $\sigma_i^l = 6 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$, $\sigma_i^t = 0,6 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$, $\sigma_e^l = 24 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$ y $\sigma_e^t = 12 \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$, razón superficie volumen $\beta = 4036,5 \text{ cm}^{-1}$, resistividad de superficie $R_m = 2 \times 10^4 \Omega \text{ cm}^2$, $v_p = 100 \text{ mV}$, $\eta_1 = 0,005$, $\eta_2 = 0,1$, $\eta_3 = 1,5$, $\eta_4 = 7,5$, $\eta_5 = 0,1$. Las fibras forman un ángulo de $-\pi/4$ con el eje x y como dato inicial, aplicamos un estímulo en el medio extracelular en el centro del dominio (ver Figura 1). Se elige la siguiente configuración para el método de multiresolución: Wavelets con $r = 3$ momentos nulos, nivel maximal de resolución $L = 9$ y por lo tanto una malla fina de $\mathcal{N} = 65536$ elementos, una tolerancia de referencia dada por $\varepsilon_R = 5,0 \times 10^{-4}$. Mostramos en las Figuras 1,2 una secuencia de instantáneas de la solución después de haber aplicado un estímulo en el centro del dominio. Se muestra tanto la solución, como la correspondiente malla adaptativa generada por la multiresolución. Los errores han sido calculados utilizando como referencia, una solución aproximada de volúmenes finitos sobre una malla con $\mathcal{N} = 1024^2 = 1048576$ volúmenes de control. En la tabla 1 puede notarse que la solución numérica obtenida aplicando multiresolución es suficientemente precisa (errores del orden de 10^{-4}) y las tasas de compresión son considerablemente altas.

Para la integración temporal usando LTS, elegimos $\text{CFL}_0 = 0,5$ para el nivel más grueso de resolución, y $\text{CFL}_l = 2^l \text{CFL}_0$ para los niveles más finos. Utilizando LTS, se obtiene un aumento sustancial en tasa de aceleración, y sin embargo los errores se mantienen con el mismo orden de precisión.

5. Agradecimiento

MB agradece el apoyo del proyecto Fondecyt 1070682, RB agradece el apoyo del proyecto Fondecyt 1050728 y el programa Fondap en Matemática Aplicada, proyecto 15000001; y RR agradece el apoyo de Beca Conicyt.

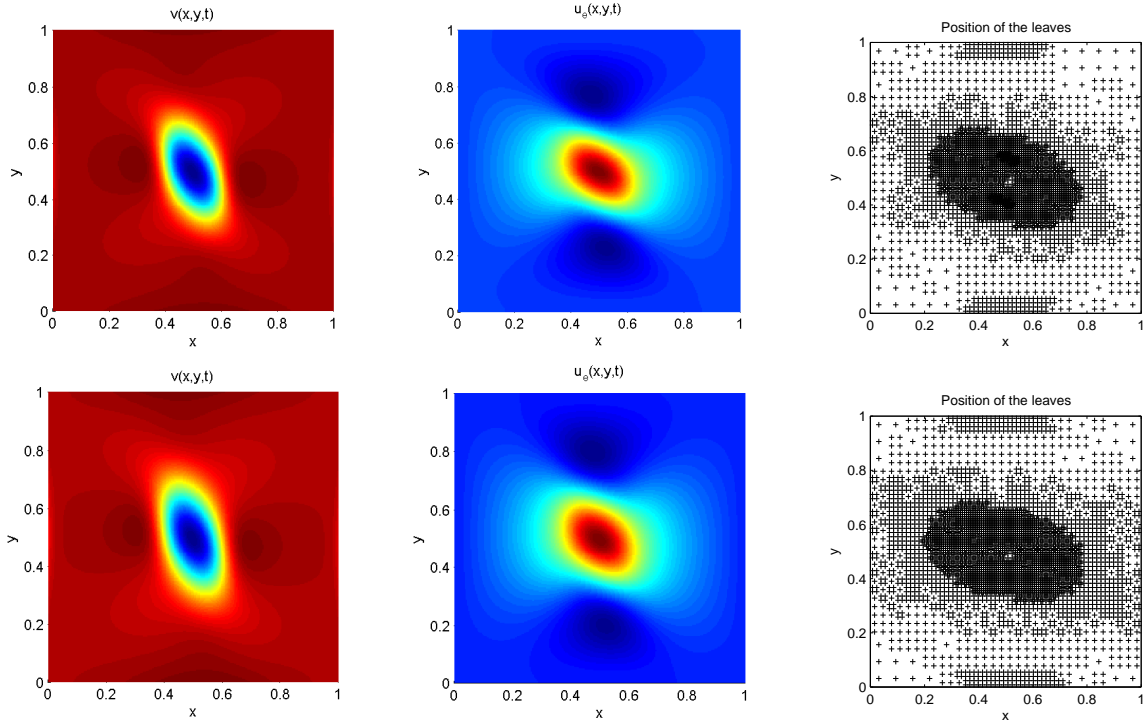


Figura 2: Potencial transmembrana v , potencial extracelular u_e , y hojas de la correspondiente estructura de árbol en los instantes $t = 2,2$ y $t = 3,3$.

Referencias

- [1] M. Bendahmane, R. Bürger, R. Ruiz, Convergence of a finite volume scheme for the bidomain model of electrophysiology, in preparation.
- [2] M. Bendahmane, R. Bürger, R. Ruiz and K. Schneider, Adaptive multiresolution schemes with local time stepping for two-dimensional degenerate reaction-diffusion systems, *Preprint 2007-35, Depto. Ing. Mat., U. de Concepción*, submitted.
- [3] M. Bendahmane and K. H. Karlsen, Analysis of a class of degenerate reaction-diffusion systems and the bidomain model of cardiac tissue, *Networks and Heter. Media*, 1(1): 185–218 (2006).
- [4] R. Bürger, R. Ruiz, K. Schneider and M. Sepúlveda, Fully adaptive multiresolution schemes for strongly degenerate parabolic equations in one space dimension, *ESIAM: Math. Model. Numer. Anal.*, to appear.
- [5] R. Bürger, R. Ruiz, K. Schneider and M. Sepúlveda, Fully adaptive multiresolution schemes for strongly degenerate parabolic equations with discontinuous flux, *J. Eng. Math.*, (2008), doi:10.1007/s10665-007-9162-6.

- [6] A. Cohen, S. Kaber, S. Müller and M. Postel, Fully adaptive multiresolution finite volume schemes for conservation laws, *Math. Comp.*, 72: 183–225 (2001).
- [7] M. Domingues, O. Roussel and K. Schneider, An adaptive multiresolution method for parabolic PDEs with time step control, *ESAIM: Proc.* **16** (2007) 181–194.
- [8] R. Eymard, Th. Gallouët, and R. Herbin. Finite volume methods. In: Handbook of Numerical Analysis, vol. VII, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [9] C. Mitchell and D. Schaeffer, A two-current model for the dynamic of cardiac membrane, *Bull. Math. Bio.*, 65: 767–793 (2001).
- [10] S. Müller, Adaptive Multiscale Schemes for Conservation Laws, *Springer-Verlag, Berlin*, (2003).
- [11] S. Müller and Y. Stiriba, Fully adaptive multiscale schemes for conservation laws employing locally varying time stepping, *SIAM J. Sci. Comput.*, 30: 493–531 (2007).
- [12] W.-J. Ying, A multilevel adaptive approach for computational cardiology, *Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Duke University*, 2005.