

**Estimation d'erreur d'une méthode de volumes
éléments finis stabilisée appliquée au problème
de Stokes stationnaire et transient**

Sabine Luisier
Section de Mathématiques

Sous la direction de Alfio Quarteroni
et Ricardo Ruiz Baier



8 janvier 2010

Table des matières

1	Introduction	2
2	Problème de Stokes stationnaire	3
2.1	Description générale	3
2.1.1	Notions préliminaires	3
2.1.2	Formulation faible	4
2.1.3	Approximation de Galerkin	5
2.2	Estimation d'erreur	10
2.2.1	Notions préliminaires	10
2.2.2	Méthode des volumes éléments finis	13
2.2.3	Estimation d'erreur	19
3	Problème de Stokes non-stationnaire	22
3.1	Problèmes paraboliques	22
3.1.1	Formulation faible	23
3.1.2	Semi-discrète approximation	31
3.2	Estimation d'erreur	35
3.2.1	Notions préliminaires	35
3.2.2	Méthode des volumes éléments finis	38
3.2.3	Estimation d'erreur	38
4	Conclusion	47

1 Introduction

Les équations de Navier-Stokes détiennent leur nom du mathématicien et ingénieur Claude Louis Marie Henri Navier et du mathématicien et physicien George Gabriel Stokes. Navier dériva premièrement les équations de Navier-Stokes en 1822. Les équations sont correctes, mais la démarche pour y aboutir est erronée. En 1845, Stokes publiera leur dérivation d'une manière encore aujourd'hui admise.

Les équations de Navier Stokes décrivent le mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Elles découlent des trois principes de conservation : moment, masse et énergie. Elles s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & (x, t) \in Q_T := (0, T) \times \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \in Q_T \\ \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Sigma_T := (0, T) \times \partial\Omega \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ sont des données du problème et Ω est une domaine ouvert de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$. Quant à $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, la vitesse, et $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, la pression, elles sont pour leur part les inconnues du problème.

Ces équations sont au coeur de nombreuses applications. Elles permettent par exemple de modéliser les événements climatiques, les courants des océans, le flux d'air autour d'une aile d'avion ou encore le flux sanguin dans le corps humain. C'est pourquoi elles génèrent un grand intérêt scientifique.

Les méthodes des éléments finis et des volumes finis sont deux méthodes numériques importantes pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Dans ce rapport, nous allons nous concentrer sur la méthode des volumes éléments finis. Cette méthode se trouve à "mi-chemin" entre la méthode des éléments finis et celle des volumes finis. Nous allons plus particulièrement nous intéresser à une approximation des équations de Stokes stationnaires et non-stationnaires basée sur la paire $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$ qui ne satisfait pas la condition d'inf-sup stabilité. Nous considérons alors une méthode de volumes éléments finis stabilisée basée sur deux intégrales de Gauss locales. Une relation entre cette méthode et la méthode des éléments finis stabilisée nous permettra de dériver une estimation d'erreur dans les normes L^2 et H^1 pour la vitesse et dans la norme L^2 pour la pression dans le cas des équations de Stokes stationnaires, et une estimation d'erreur dans la norme H^1 pour la vitesse et dans la norme L^2 pour la pression dans le cas des équations de Stokes non-stationnaires. Ces estimations d'erreurs sont l'objectif principal de ce projet.

Le reste du rapport s'articule de la sorte : Il est divisé en deux parties. Dans la première, nous nous intéressons au cas du problème de Stokes stationnaire. Tout d'abord, nous en faisons une description générale, introduisons sa formulation faible ainsi que son approximation par la méthode des éléments finis. Dans une deuxième sous-partie, nous nous concentrons sur le cas à deux dimensions et introduisons une méthode des volumes éléments finis stabilisée pour l'étudier. Finalement, nous dérivons des estimations d'erreur de la solution de la méthode des volumes éléments finis. Dans la seconde partie, nous nous penchons cette fois

sur le problème de Stokes non-stationnaire. Tout d'abord, nous nous intéressons aux problèmes paraboliques dans un cadre général. Nous nous préoccupons de l'existence et de l'unicité de la solution et de l'approximation du problème. Ensuite, nous faisons de même que dans la deuxième sous-partie de la première partie, c'est-à-dire dériver une estimation d'erreur pour la méthode des volumes éléments finis appliquée au problème de Stokes non-stationnaire.

2 Problème de Stokes stationnaire

2.1 Description générale

Dans cette section, nous allons nous intéresser au système d'équations différentielles de Stokes qui s'écrit

$$\begin{cases} a_0 \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = f & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3 \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où $a_0 \geq 0$, $\nu \geq 0$ sont des constantes et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ est une fonction qui nous sont données, tandis que $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont les inconnues du problème. Ce système décrit le mouvement stationnaire d'un fluide visqueux incompressible.

Introduisons tout d'abord les notions nécessaires en ce qui concerne l'approximation des équations aux dérivées partielles. Vous trouverez donc ci-dessous un résumé de cette théorie connue de tous.

2.1.1 Notions préliminaires

Tout d'abord introduisons les espaces de fonctions suivants :

Premièrement, les espaces $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$,

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ Lebesgue mesurable} : \int_{\Omega} |v(x)|^p dx < +\infty\}$$

associés à la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, nous avons

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) &= \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ Lebesgue mesurable} : \\ &\quad \inf\{M \geq 0 \mid |v(x)| \leq M \text{ pp sur } \Omega\} < \infty\}, \end{aligned}$$

ayant pour norme,

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{M \geq 0 \mid |v(x)| \leq M \text{ presque partout sur } \Omega\}.$$

Introduisons maintenant les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| < k\}.$$

Pour $1 \leq p < \infty$, $W^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach par rapport à la norme

$$\|v\|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

ayant pour semi-norme

$$|v|_{k,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, nous avons

$$\|v\|_{k,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

En particulier, lorsque $p = 2$, on notera $H^k(\Omega)$ à la place de $W^{k,2}(\Omega)$ et $\|\cdot\|_{k,\Omega}$, ou même $\|\cdot\|_k$ si aucune confusion n'est possible, à la place de $\|\cdot\|_{k,2,\Omega}$.

2.1.2 Formulation faible

Nous pouvons à présent dériver la forme faible de notre problème. Supposons que $f \in (L^2(\Omega))^d$. Définissons les deux espaces de Hilbert $V = (H_0^1(\Omega))^d$ et $Q = L_0^2(\Omega)$ où

$$(H_0^1(\Omega))^d = \{v \in (H^1(\Omega))^d \mid v = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

et

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q = 0 \right\}.$$

En multipliant la première équation du système (2.1) par une fonction test $v \in V$ et la deuxième par une fonction test $q \in Q$ et en intégrant sur Ω , nous obtenons

$$\begin{cases} \int_{\Omega} (a_0 \mathbf{u} \mathbf{v} - \nu \Delta \mathbf{u} \mathbf{v} + \nabla p \mathbf{v}) = \int_{\Omega} f & \forall \mathbf{v} \in V \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot u q = 0 & \forall q \in Q \end{cases} \quad (2.2)$$

En intégrant par parties, nous aboutissons à la forme faible de notre système (2.1), c'est-à-dire trouver $\mathbf{u} \in V$ et $p \in Q$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (f, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in Q \end{cases} \quad (2.3)$$

où

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_0 \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \mathbf{v}$$

et

$$b(\mathbf{v}, p) = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Remarque 2.1. La paire (\mathbf{u}, p) est une solution de problème de Stokes (2.3) si et seulement si c'est un point scelle de la fonctionnelle lagrangienne

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, q) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, q) - (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \mathbf{v} \in V, q \in Q,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) = \min_{\mathbf{v} \in V} \max_{q \in Q} \mathcal{L}(\mathbf{v}, q).$$

2.1.3 Approximation de Galerkin

Il est temps de procéder à l'approximation de Galerkin. Soient deux familles de sous-espaces $V_h \subset V$ et $Q_h \subset Q$ de dimensions finies qui dépendent de h . Nous approximations alors le problème (2.3) par le problème discret suivant : Trouver $\mathbf{u}_h \in V_h$ et $p_h \in Q_h$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = (f, \mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in V \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 & \forall q_h \in Q. \end{cases} \quad (2.4)$$

Considérons l'espace

$$Z_h := \{\mathbf{v}_h \in V_h \mid (q_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h\}.$$

Comme $a(\cdot, \cdot)$ est coercive sur V [12], ainsi $a(\cdot, \cdot)$ est aussi coercive sur $Z_h \subset V$, c'est-à-dire $\exists \alpha > 0$ tel que

$$a_0 \|\mathbf{v}_h\|_0^2 + \nu \|\nabla \mathbf{v}_h\|_0^2 \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|_1^2 \quad \forall \mathbf{v}_h \in Z_h.$$

De plus $a(\cdot, \cdot)$ est continue sur $V \times V$, c'est à dire $\exists \gamma > 0$

$$|a_0(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \nu(\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v})| \leq \gamma \|\mathbf{w}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in V,$$

et $b(\cdot, \cdot)$ est continue sur $V \times Q$, c'est-à-dire $\exists \delta > 0$ tel que

$$|(q, \nabla \cdot \mathbf{v})| \leq \delta \|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0 \quad \forall \mathbf{v} \in V, q \in Q.$$

Supposons de plus que V_h et Q_h satisfont la condition inf-sup, c'est-à-dire si

$$\forall q_h \in Q_h \quad \exists \mathbf{v}_h \in V_h, \mathbf{v}_h \neq \mathbf{0} : (q_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) \geq \beta \|\mathbf{v}_h\|_1 \|q_h\|_0.$$

Alors, par le théorème de Brezzi [12], il existe une unique solution au système (2.4). De plus, la solution satisfait

$$\|\mathbf{u}_h\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V'}, \quad (2.5)$$

$$\|p_h\|_Q \leq \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \|f\|_{V'}. \quad (2.6)$$

Ainsi la solution est stable si β est indépendant de h . Nous savons encore que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \inf_{\mathbf{v}_h \in Z_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \frac{\delta}{\alpha} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q, \quad (2.7)$$

et que

$$\|p - p_h\|_Q \leq \frac{\gamma}{\beta} \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \inf_{\mathbf{v}_h \in Z_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + \left(1 + \frac{\delta}{\beta} + \frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}\right) \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q. \quad (2.8)$$

Comme

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in Z_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V \leq \left(1 + \frac{\delta}{\beta}\right) \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V,$$

l'estimation de convergence est optimale à condition que β soit indépendant de h .

Soient N_h et K_h les dimensions de V_h et Q_h . Considérons $\{\phi_j | j = 1, \dots, N_h\}$ et $\{\psi_l | l = 1, \dots, K_h\}$ les bases respectives de V_h et Q_h . Nous pouvons alors exprimer \mathbf{u}_h et p_h comme combinaisons linéaires des fonctions de bases, c'est-à-dire

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \phi_j(\mathbf{x})$$

et

$$p_h(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{K_h} p_l \psi_l(\mathbf{x}).$$

Comme il est suffisant que le système (2.4) soit vérifié pour toutes les fonctions de bases, on aboutit au système linéaire

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

où

$$A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i), \quad B_{li} = b(\phi_i, \psi_l), \quad f_i = (\mathbf{f}, \phi_i),$$

où A est une matrice $N_h \times N_h$ symétrique et définie positive. De plus,

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{N_h})^T, \quad p = (p_1, \dots, p_{K_h})^T$$

sont les vecteurs de nos inconnues.

Soit

$$S := \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Or nous savons que le système linéaire (2.9) a une unique solution si et seulement si $\det(S) \neq 0$. Et ceci est vérifié si et seulement si la condition inf-sup est satisfaite. En effet, A est inversible (car $a(\cdot, \cdot)$ est coercive) et ainsi nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= A^{-1}(\mathbf{f} - B^T \mathbf{p}), \\ BA^{-1}B^T &= BA^{-1}\mathbf{f}, \end{aligned}$$

où

$$R := BA^{-1}B^T$$

est symétrique et aussi définie positive si et seulement si $\ker B^T = 0$. Ainsi \mathbf{p} est uniquement déterminé et il en va de même pour \mathbf{u} car A est inversible. Nous pouvons donc conclure que le système algébrique (2.9) a une unique solution si et seulement si $\ker B^T = 0$. De plus, nous pouvons aussi montrer que la condition $\ker B^T = 0$ est équivalente à la condition inf-sup et qu'une condition nécessaire pour avoir $\ker B^T = 0$ est que $N_h \geq K_h$.

La condition inf-sup implique encore l'absence de "spurious pressure modes", c'est-à-dire des fonctions $p_h^* \in Q_h$ telles que

$$(p_h^*, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h.$$

Alors si (\mathbf{u}_h, p_h) est solution de (2.4), pour toutes fonctions de la sorte, $(\mathbf{u}_h, p_h + p_h^*)$ est aussi une solution de (2.4). Ces fonctions enlèvent ainsi la propriété d'unicité de notre solution p_h . Mais qu'arrive-t-il si nos espaces de dimensions finies V_h et Q_h ne satisfont pas la condition inf-sup? La vitesse pourra être déterminée de manière stable et convergente car les deux inégalités (2.5) et (2.7) ne dépendent pas de β . Seule la pression peut être contaminée par des "spurious modes". Nous verrons un peu plus bas comment pallier à ce problème, sans pour autant nous restreindre à choisir des espaces de dimensions finies inf-sup stables.

Remarquons aussi que la condition

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h$$

n'implique généralement pas que $\nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0$ sur Ω . Cependant si $\nabla V_h \subset Q_h$ alors, en prenant $q_h = \nabla \cdot \mathbf{u}_h$, nous avons

$$0 = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}_h)^2 = \|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

ce qui implique que $\nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0$. Ainsi, plus la dimension de Q_h est grande, plus on a de chance que $\nabla \cdot \mathbf{u}_h = 0$ soit vérifiée. Mais cela va à l'encontre de la condition nécessaire d'inf-sup stabilité. Il peut arriver que $b(\mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h$, si Q_h est trop large par rapport V_h , implique que $\mathbf{u}_h = \mathbf{0}$. Lorsque cela se produit, on parle de "locking phenomenon".

Il est donc important que nos espaces V_h et Q_h satisfassent la condition inf-sup et ne mènent pas à des "locking phenomena". Cependant, il est possible de choisir des espaces V_h et Q_h qui ne satisfont pas la condition inf-sup et pallier d'une autre manière à ce manquement. Une méthode consiste à stabiliser le système (2.4) le plus souvent en relaxant la contrainte d'incompressibilité sur \mathbf{u}_h . Il est aussi possible d'avoir recours aux macro-éléments.

Intéressons-nous maintenant à l'approximation obtenue par la méthode des éléments finis. Tout d'abord, nous allons expliquer comment les espaces V_h et Q_h sont choisis dans le cadre de la méthode des éléments finis, pour ensuite introduire quelques techniques standards de stabilisations.

Restreignons-nous au cas à deux dimensions. Pour ce qui nous concerne, nous allons plutôt nous intéresser à la paire $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$ qui consiste à prendre

$$V_h = (X_h^k \cap H_0^1(\Omega))^2 \text{ et } Q_h = X_h^m \cap L_0^2(\Omega) \quad (2.11)$$

avec $k = m = 1$ et où

$$Y_h^k = \{\phi_h \in L^2(\Omega) : \phi_h|_K \in \mathbb{P}_k, \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \quad k \geq 0$$

et

$$X_h^k = Y_h^k \cap C^0(\bar{\Omega}), \quad k \geq 1,$$

où \mathcal{T}_h est une triangulation de $\bar{\Omega}$. Il est bien connu que cette paire ne satisfait pas la condition inf-sup. Cependant, elle est vraiment efficace en terme d'implémentation, c'est pourquoi une attention toute particulière a été portée sur elle et des techniques de stabilisation ont été développées pour elle.

Pour stabiliser notre solution discrète, il est possible de modifier légèrement le système (2.4) et conséquemment le système algébrique (2.9) qui lui est associé. Souvent, ces méthodes consistent à relaxer la contrainte d'incompressibilité par

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = \Phi_h(q_h) \quad \forall q_h \in Q_h,$$

où Φ_h dépend linéairement de q_h , mais peut aussi dépendre de \mathbf{u}_h , p_h , \mathbf{f} et h . Brezzi et Pitkäranta (1984) proposèrent de prendre

$$\Phi_h(q_h) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \int_K \nabla p_h \nabla q_h,$$

où h_K est le diamètre du triangle K . De cette manière, en choisissant $m = k = 1$ on aboutit à une approximation stable et linéairement convergente. Cette méthode peut être vue comme une approximation de l'équation de continuité modifiée $\nabla \cdot \mathbf{u} = h^2 \Delta p$ avec une condition de Neumann homogène pour la pression p .

Une solution proposée un peu plus tard (1986) par Hughes, Franca et Balestra, consiste à prendre

$$\Phi_h(q_h) := \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \int_K (a_0 \mathbf{u}_h - \nu \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - f) \nabla q_h,$$

pour les espaces de pression continus. Cette méthode est la *Streamline Upwind/Petrov galerkin* méthode, plus communément appelée SUPG méthode. Ils prouvèrent que cette méthode est stable lorsque $0 < \delta \leq C_I$, où C_I est une constante bien choisie. Si on a choisi les espaces comme dans (2.11) en prenant $m = k$, alors l'approximation de la vitesse et de la pression converge en $O(h^k)$. Cette fois-ci, c'est comme si on avait considéré que l'équation de continuité était $\nabla \cdot \mathbf{u} = \delta h^2 \operatorname{div}(a_0 \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \nabla p - f)$.

Une autre approche consiste à imposer une perturbation non seulement à l'équation de continuité mais aussi à l'équation du moment. Ainsi le problème stabilisé est : Trouver $\mathbf{u}_h \in V_h$ et $p_h \in Q_h$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = (f, \mathbf{v}_h) - \Psi_h^{(\rho)}(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in V \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) = \Phi_h(q_h) & \forall q_h \in Q \end{cases} \quad (2.12)$$

avec

$$\Phi_h(q_h) := \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \int_K (a_0 \mathbf{u}_h - \nu \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - f) \nabla q_h,$$

et

$$\Psi_h^{(\rho)}(\mathbf{v}_h) := \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \int_K (a_0 \mathbf{u}_h - \nu \Delta \mathbf{u}_h + \nabla p_h - f) \cdot (\rho a_0 \mathbf{v}_h - \rho \nu \Delta \mathbf{u}_h),$$

où ρ est un paramètre (ρ prends les valeurs $-1, 0, 1$) et $\delta > 0$.

Si $\rho = 0$, alors nous retrouvons la méthode SUPG précédente. Pour le cas de $\rho = -1$, elle fut dénommée par *Galerkin/Least-Squares*(GALS)(Hughes et Franca (1987)) et aboutit à un système symétrique. Finalement, le cas $\rho = 1$ a été proposé par Douglas et Wang (1989) et aboutit à un système qui n'est pas symétrique, mais par contre il est défini non-négatif et stable sous des conditions plus générales.

Théorème 2.2. [4] *Supposons que $V_h = (X_h^k \cap H_0^1(\Omega))^2$ et $Q_h = Y_h^m \cap L_0^2(\Omega)$ pour $k \geq 2$ et $m \geq 0$. Pour les méthodes SUPG et GALS, supposons de plus que $0 < \delta < C_I$, où C_I est une constante bien choisie.*

Alors (2.12) fournit une solution stable et le résultat de convergence suivant est valable

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C(h^k \|\mathbf{u}_h\|_{k+1} + h^{m+1} \|p\|_{m+1}). \quad (2.13)$$

Si $k = 1$, alors le même résultat est valable à condition que $Q_h = X_h^m \cap L_0^2(\Omega)$ pour $m \geq 1$.

2.2 Estimation d'erreur

Nous allons maintenant nous concentrer sur l'équation de Stokes à deux dimensions et déterminer une autre estimation d'erreur pour la vitesse et pour la pression.

2.2.1 Notions préliminaires

Considérons le système (2.1) avec $a_0 = 0$ (cas où le fluide a un mouvement faible mais une grande viscosité (nombre de Reynold petit)), $d = 2$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert borné avec un bord $\partial\Omega$ lipschitz continu. Comme précédemment, nous obtenons la forme faible de notre problème : trouver $\mathbf{u} \in V$ et $p \in Q$ tels que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - d(\mathbf{v}, p) + d(\mathbf{u}, q) = (f, \mathbf{v}) \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V \times Q, \quad (2.14)$$

où

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\nu(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$$

et

$$d(\mathbf{v}, p) = (\nabla \cdot \mathbf{v}, p).$$

Soit \mathcal{T}_h un triangulation régulière et quasi-uniforme du domaine polygonal Ω en une union de triangles K . Nous allons considérer les espaces d'éléments finis

$$V_h = (X_h^1 \cap H_0^1(\Omega))^2 \text{ et } Q_h = X_h^1 \cap L_0^2(\Omega). \quad (2.15)$$

Soient $I_h : V \cap (C^0(\Omega))^2 \rightarrow V_h$ et $J_h : Q \rightarrow Q_h$ deux opérateurs d'interpolation, tels que pour $\mathbf{v} \in (H^2(\Omega))^2$ et $q \in H^1(\Omega) \cap Q$

$$\|\mathbf{v} - I_h \mathbf{v}\|_i \leq kh^{2-i} |\mathbf{v}|_2, \quad \|q - J_h q\|_i \leq kh |q|_1 \quad i = 0, 1. \quad (2.16)$$

Nous avons de plus que l'opérateur d'interpolation I_h satisfait

$$\|I_h \mathbf{v}\|_1 \leq k \|\mathbf{v}\|_1. \quad (2.17)$$

Comme la triangulation \mathcal{T}_h est quasi-uniforme, l'inégalité inverse est satisfaite, c'est-à-dire

$$\|\mathbf{v}_h\|_1 \leq kh^{-1} \|v_h\|_0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (2.18)$$

où k dépend seulement des données $(\nu, \Omega, \mathbf{f})$.

Cependant, il est connu que les espaces V_h et Q_h ainsi choisis ne satisfont pas la condition inf-sup. Une technique a été utilisée dans [7] consistant à rajouter le résidu de deux intégrales de Gauss locales sur chaque $K \in \mathcal{T}_h$ pour que la condition inf-sup soit satisfaite. Définissons

$$G(p, q) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_{K,2} pq \, dx - \int_{K,1} pq \, dx \right\} \quad \forall p, q \in Q,$$

où $\int_{K,i} g(x) \, dx$ est une intégrale de Gauss sur K appropriée qui est exacte pour les polynômes de degrés i , $i = 1, 2$. Dans notre cas, $g(x) = p_h q_h$ est un polynôme de degré au plus 2. Supposons que $p_h q_h \in \mathbb{P}_2$ mais $p_h q_h \notin \mathbb{P}_1$ ou \mathbb{P}_0 (auxquels cas l'approximation est exacte). Alors

$$\begin{aligned} G(p_h, q_h) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_{K,2} p_h q_h \, dx - \int_{K,1} p_h q_h \, dx \right\} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \sum_{l=1}^2 w_l p_h(x_l) q_h(x_l) - w^* p_h(x^*) q_h(x^*) \right\} \\ &= (p_h, q_h)_\Omega - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} w^* p_h(x^*) q_h(x^*) \end{aligned}$$

où $x_l, x^* \in K$. Comme $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} w^* p_h(x^*) q_h(x^*) \in \mathbb{P}_0$, c'est une \mathbb{P}_0 -approximation de $(p_h, q_h)_\Omega$. Par exemple, choisissons la projection $\Pi_h : L^2(\Omega) \rightarrow W_h$

$$(p, q_h) = (\Pi_h p, q_h) \quad \forall p \in L^2(\Omega), q_h \in W_h, \quad (2.19)$$

où $W_h \subset L^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions constantes par morceaux associé à \mathcal{T}_h . De plus, l'opérateur de projection Π_h détient les propriétés suivantes :

$$\|\Pi_h p\|_0 \leq c\|p\|_0 \quad \forall p \in L^2(\Omega), \quad (2.20)$$

$$\|p - \Pi_h p\|_0 \leq ch\|p\|_1 \quad \forall p \in H^1(\Omega). \quad (2.21)$$

Nous pouvons ainsi définir la forme bilinéaire $G(\cdot, \cdot)$ à partir de (2.19) par

$$G(p_h, q_h) = (p_h - \Pi_h p_h, q_h) = (p_h - \Pi_h p_h, q_h - \Pi_h q_h), \quad (2.22)$$

car $(p_h - \Pi_h p_h, \Pi_h q_h) = 0$ par définition de la projection Π_h , comme $\Pi_h q_h \in W_h$. Nous pouvons donc déterminer la forme bilinéaire pour la méthode des éléments finis sur $(V_h, Q_h) \times (V_h, Q_h)$ par

$$\mathcal{B}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - d(\mathbf{v}_h, p_h) + d(\mathbf{u}_h, q_h) + G(p_h, q_h). \quad (2.23)$$

On peut montrer (voir [7]) que cette forme bilinéaire est continue et satisfait l'inégalité de coercivité faible, c'est-à-dire

$$|\mathcal{B}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h))| \leq k(\|\mathbf{u}_h\|_1 + \|p_h\|_0)(\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0), \quad (2.24)$$

$$\sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in (V_h, Q_h)} \frac{|\mathcal{B}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h))|}{\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \geq \beta(\|\mathbf{u}_h\|_1 + \|p_h\|_0), \quad (2.25)$$

où β est indépendant de h .

Ainsi, nous obtenons la formulation faible discrète du problème de Stokes : Trouver $(\mathbf{u}_h, p_h) \in (V_h, Q_h)$ tels que

$$\mathcal{B}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in (V_h, Q_h). \quad (2.26)$$

Grâce à (2.24) et (2.25), le système (2.26) a une unique solution. De plus, l'estimation d'erreur (optimale pour \mathbf{u}) pour la solution des éléments finis (\mathbf{u}_h, p_h) est ([7])

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0 + h(\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0) \leq kh^2(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1). \quad (2.27)$$

2.2.2 Méthode des volumes éléments finis

Nous allons maintenant introduire la méthode des volumes éléments finis. Cette méthode est utile car elle conserve la simplicité d'implémentation de la méthode des volumes finis et permet en même temps une dérivation naturelle d'estimations d'erreur dans la norme L^2 , comme le permet la méthode des éléments finis.

Soit S l'ensemble contenant tous les noeuds intérieurs associés à la triangulation \mathcal{T}_h et N le nombre total de ces noeuds. Pour définir la méthode des volumes éléments finis, il faut introduire un maillage dual $\tilde{\mathcal{T}}_h$ basé sur \mathcal{T}_h ; les éléments de $\tilde{\mathcal{T}}_h$ sont appelés volumes de contrôle. Le maillage dual se construit de la sorte : Pour chaque élément $K \in \mathcal{T}_h$ de sommets s_j , $j = 1, 2, 3$, considérons le barycentre b_K et le point milieu m_j sur chaque arrêtes de K et construisons nos volumes de contrôle de $\tilde{\mathcal{T}}_h$ en reliant b_K aux m_j comme indiqué sur la figure 1.

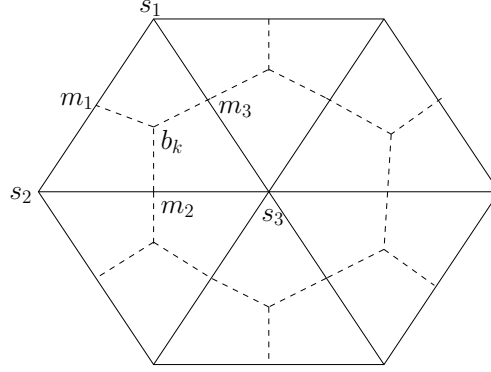


FIGURE 1 – Volumes de contrôle associé à la triangulation \mathcal{T}_h .

Nous pouvons maintenant définir l'espace des volumes éléments finis par

$$\begin{aligned} \tilde{X}_h &= \{ \tilde{\mathbf{v}} \in (L^2(\Omega))^2 : \tilde{\mathbf{v}}|_{\tilde{K}} \in \mathbb{P}_0(\tilde{K}), \forall \tilde{K} \in \tilde{\mathcal{T}}_h \\ &\quad \tilde{\mathbf{v}}|_{\tilde{K}} = 0 \text{ sur tous les bords de l'élément dual } \tilde{K} \}. \end{aligned}$$

Il est évident que les dimension de X_h et \tilde{X}_h sont les mêmes. Par ailleurs, il existe une application linéaire inversible $\Gamma_h : X_h \rightarrow \tilde{X}_h$ telle que pour

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_h(s_j) \phi_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{v}_h \in X_h, s_j \in S$$

nous avons

$$\Gamma_h \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_h(s_j) \chi_j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \mathbf{v}_h \in X_h, s_j \in S,$$

où $\{\phi_j\}$ est la base de l'espace des éléments finis X_h et $\{\chi_j\}$ est la base de l'espace des volumes éléments finis \tilde{X}_h qui ne sont autres que les fonctions caractéristiques associées à la partition $\tilde{\mathcal{T}}_h$:

$$\chi_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \tilde{K}_j \in \tilde{\mathcal{T}}_h \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'idée de relier les "espaces *trials*" aux espaces test dans la méthode Petrov-Galerkin au travers de l'application Γ_h fut en premier introduite dans [1, 8] dans le contexte des problèmes elliptiques généraux.

Nous avons de surplus les propriétés de l'application Γ_h suivantes [16] :

Lemme 2.3. *Soit $K \in \mathcal{T}_h$. Si $\mathbf{v}_h \in X_h$ et $1 \leq r \leq \infty$, alors*

$$\int_K (\mathbf{v}_h - \Gamma_h \mathbf{v}_h) dx = 0, \quad (2.28)$$

$$\|\mathbf{v}_h - \Gamma_h \mathbf{v}_h\|_{L^r(K)} \leq kh_K \|\mathbf{v}_h\|_{1,r,K}, \quad (2.29)$$

où h_K est le diamètre de l'élément K .

Cette fois, nous multiplions la première équation du système (2.1) par $\Gamma_h \mathbf{v}_h \in \tilde{X}_h$ et intégrons sur les éléments $\tilde{K} \in \tilde{\mathcal{T}}_h$ du maillage dual. Quant à la deuxième équation de système, nous la multiplions par $q_h \in Q_h$ et nous l'intégrons sur les éléments $K \in \mathcal{T}_h$ du maillage primal. En appliquant la formule de Green, comme les fonctions test sont constantes par morceaux, nous obtenons la méthode des volumes éléments finis suivante : Trouver $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h) \in (V_h, Q_h)$ tels que

$$A(\tilde{\mathbf{u}}_h, \Gamma_h \mathbf{v}_h) + D(\Gamma_h \mathbf{v}_h, \tilde{p}_h) + d(\tilde{\mathbf{u}}_h, q_h) = (f, \Gamma_h \mathbf{v}_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in (V_h, Q_h), \quad (2.30)$$

où

$$A(\tilde{\mathbf{u}}_h, \Gamma_h \mathbf{v}_h) = - \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_h(s_j) \int_{\partial \tilde{K}_j} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial n} ds \quad \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in V_h,$$

$$D(\Gamma_h \mathbf{v}_h, \tilde{p}_h) = \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_h(s_j) \int_{\partial \tilde{K}_j} p_h n ds \quad p_h \in Q_h,$$

$$(f, \Gamma_h \mathbf{v}_h) = \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_h(s_j) \int_{\tilde{K}_j} \mathbf{f} dx \quad \mathbf{v}_h \in V_h,$$

où n est le vecteur normal unitaire à $\partial\tilde{K}_j$. Comme nos espaces $V_h \times Q_h$ ne satisfont pas la condition inf-sup, nous stabilisons notre méthode de la même manière que pour le cas de la méthode des éléments finis. Nous obtenons alors la méthode des volumes éléments finis stabilisée suivante : Trouver $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h) \in (V_h, Q_h)$ tels que

$$\begin{aligned} A(\tilde{\mathbf{u}}_h, \Gamma_h \mathbf{v}_h) + D(\Gamma_h \mathbf{v}_h, \tilde{p}_h) + d(\tilde{\mathbf{u}}_h, q_h) + G(\tilde{p}_h, q_h) \\ = (f, \Gamma_h \mathbf{v}_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in (V_h, Q_h). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Il existe une relation entre la méthode des éléments finis et la méthode des volumes éléments finis pour l'équation de Stokes que nous allons étudier ci-après.

Lemme 2.4. *Nous avons que*

$$A(\mathbf{u}_h, \Gamma_h \mathbf{v}_h) = a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in V_h \quad (2.32)$$

et les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$A(\mathbf{u}_h, \Gamma_h \mathbf{v}_h) = A(\mathbf{v}_h, \Gamma_h \mathbf{u}_h), \quad (2.33)$$

$$|A(\mathbf{u}_h, \Gamma_h \mathbf{v}_h)| \leq k \|\mathbf{u}_h\|_1 \|\mathbf{v}_h\|_1, \quad (2.34)$$

$$|A(\mathbf{v}_h, \Gamma_h \mathbf{v}_h)| \geq k \|\mathbf{v}_h\|_1^2. \quad (2.35)$$

De plus, la forme bilinéaire $D(\cdot, \cdot)$ satisfait

$$D(\Gamma_h \mathbf{v}_h, q_h) = -d(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in (V_h, Q_h). \quad (2.36)$$

Démonstration. Notons tout d'abord que, pour toutes fonctions g continues à l'intérieur du quadrilatère Q_j (voir figure 2) telles que $\int_F g = 0$ pour tout côté F de Q_j , nous avons

$$\sum_{j=1}^N \int_{\partial\tilde{K}_j} g = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 \int_{m_{i+1}b_K m_i} g, \quad (2.37)$$

où $m_{i+1}b_K m_i$ est l'union des deux segments $m_{i+1}b_K$ et $b_K m_i$ (au cas où l'index est hors du domaine, prendre $m_{i+1} = m_i$). Cette relation est évidente si on se base sur la figure 2.

Remarquons aussi que si f est linéaire, la formule des trapèzes permet d'écrire

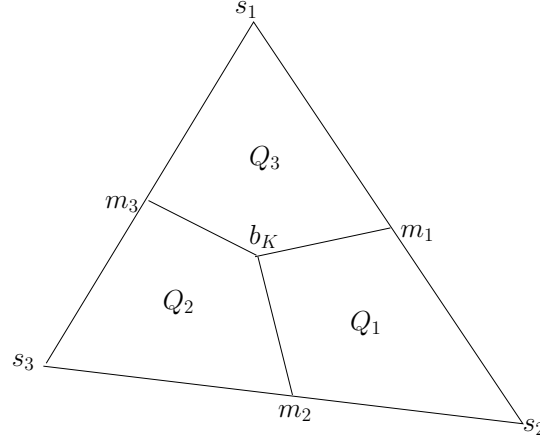


FIGURE 2 – triangle K

$$\int_a^b \mathbf{f}(x)dx = \frac{\mathbf{f}(a) + \mathbf{f}(b)}{2}(b - a).$$

Ainsi, comme \mathbf{v}_h est linéaire sur toute arrête intérieure F , nous avons que

$$\begin{aligned} \int_{s_j}^{s^{j+1}} \mathbf{v}_h &= \frac{(\mathbf{v}_h(s_j) + \mathbf{v}_h(s_{j+1}))}{2}(s_{j+1} - s_j) \\ &= \frac{1}{2} \int_{s_j}^{s^{j+1}} (\mathbf{v}_h(s_j) + \mathbf{v}_h(s_{j+1})) \\ &= \frac{1}{2} \int_{s_j}^{m_j} (\mathbf{v}_h(s_j) + \mathbf{v}_h(s_{j+1})) + \frac{1}{2} \int_{m_j}^{s^{j+1}} (\mathbf{v}_h(s_j) + \mathbf{v}_h(s_{j+1})) \\ &= \int_{s_j}^{m_j} \mathbf{v}_h(s_j) + \int_{m_j}^{s^{j+1}} \mathbf{v}_h(s_{j+1}), \end{aligned} \tag{2.38}$$

où la dernière égalité est justifiée par le fait que $\mathbf{v}_h(s_j)$ est constant et que m_j est le point milieu du segment $s_j s_{j+1}$. Alors, $\int_{s_j}^{m_j} \mathbf{v}_h(s_j) = \int_{m_j}^{s^{j+1}} \mathbf{v}_h(s_{j+1})$. De même, nous avons

$$\int_{s_j}^{s^{j+1}} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} = \int_{s_j}^{m_j} \mathbf{v}_h(s_j) \cdot \mathbf{n} + \int_{m_j}^{s^{j+1}} \mathbf{v}_h(s_{j+1}) \cdot \mathbf{n}. \tag{2.39}$$

Vérifions maintenant que $A(\mathbf{u}_h, \Gamma_h \mathbf{v}_h) = a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in V_h$.

$$\begin{aligned}
& A(\mathbf{w}_h, \Gamma_h \mathbf{v}_h) \stackrel{def}{=} -\nu \sum_{j=1}^N \mathbf{v}_h(s_j) \int_{\partial \tilde{K}_j} \partial_n \mathbf{w}_h \\
\stackrel{(2.37)}{=} & -\nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_h(s_{i+1}) \int_{m_{i+1} b_K m_i} \partial_n \mathbf{w}_h \\
\stackrel{ipp}{=} & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_h(s_{i+1}) \left[\int_{m_i s_{i+1} m_{i+1}} \nu \partial_n \mathbf{w}_h + \nu \int_{Q_i} \Delta \mathbf{w}_h \right] \\
= & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_h(s_{i+1}) \int_{m_i s_{i+1} m_{i+1}} \nu \partial_n \mathbf{w}_h + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{Q_i} \nu (\Delta \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h(s_{i+1}))_{Q_i} \\
= & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_h(s_{i+1}) \int_{m_i s_{i+1} m_{i+1}} \nu \partial_n \mathbf{w}_h + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{Q_i} \nu (\Delta \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h(s_{i+1}))_{Q_i} \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \nu \mathbf{v}_h \partial_n \mathbf{w}_h - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \nu \mathbf{v}_h \partial_n \mathbf{w}_h \\
= & \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 \int_{m_i s_{i+1} m_{i+1}} (\mathbf{v}_h(s_{i+1}) - \mathbf{v}_h) \partial_n \mathbf{w}_h \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{Q_i} \nu (\Delta \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h(s_{i+1}))_{Q_i} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} \nu \mathbf{v}_h \partial_n \mathbf{w}_h \\
\stackrel{ipp}{=} & \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 \int_{m_i s_{i+1} m_{i+1}} (\mathbf{v}_h(s_{i+1}) - \mathbf{v}_h) \partial_n \mathbf{w}_h \\
& + \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{Q_i} (\Delta \mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h(s_{i+1}) - \mathbf{v}_h)_{Q_i} + \nu (\nabla \mathbf{w}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_\Omega \\
\stackrel{\mathbf{w}_h \in V_h}{=} & \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 \int_{m_i s_{i+1} m_{i+1}} (\mathbf{v}_h(s_{i+1}) - \mathbf{v}_h) \partial_n \mathbf{w}_h + \nu (\nabla \mathbf{w}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_\Omega \\
\stackrel{\mathbf{w}_h \in V_h}{=} & \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 \partial_n \mathbf{w}_h \left[\int_{m_i s_{i+1}} (\mathbf{v}_h(s_{i+1}) - \mathbf{v}_h) + \int_{s_{i+1} m_{i+1}} (\mathbf{v}_h(s_{i+1}) - \mathbf{v}_h) \right] \\
& + \nu (\nabla \mathbf{w}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_\Omega \\
= & \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{i=1}^3 \partial_n \mathbf{w}_h \underbrace{\left[\int_{m_i s_{i+1}} \mathbf{v}_h(s_{i+1}) + \int_{s_i m_i} \mathbf{v}_h(s_i) - \int_{s_i s_{i+1}} \mathbf{v}_h \right]}_{\stackrel{(2.38)}{=} 0} \\
& + \nu (\nabla \mathbf{w}_h, \nabla \mathbf{v}_h)_\Omega \\
= & a(\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h).
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité est justifiée par le fait que l'on somme sur tous les i .

Montrons maintenant que $D(\Gamma_h \mathbf{v}_h, q_h) = -d(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in (V_h, Q_h)$.

$$\begin{aligned}
D(\Gamma_h \mathbf{v}_h, q_h) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \nabla q_h \Gamma_h \mathbf{v}_h \, dx \\
&= \sum_{j=1}^N \int_{\tilde{K}_j} \nabla q_h \Gamma_h \mathbf{v}_h \, dx \\
&= \sum_{j=1}^N \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K \cap \tilde{K}_j} \nabla q_h \Gamma_h \mathbf{v}_h \, dx \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla q_h \Gamma_h \mathbf{v}_h \, dx \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla q_h (\Gamma_h \mathbf{v}_h - \mathbf{v}_h) \, dx + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla q_h \mathbf{v}_h \, dx \\
&\stackrel{(2.28)}{=} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla q_h \mathbf{v}_h \, dx \\
&= \int_{\Omega} \nabla q_h \mathbf{v}_h \, dx \\
&= -d(\mathbf{v}_h, q_h).
\end{aligned}$$

□

Le lecteur peut se rapporter à [3, 5, 15] pour des résultats détaillés concernant l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème continu (2.1). Définissons maintenant pour la méthode des volumes éléments finis (2.31) la forme bilinéaire $\mathcal{C}(\cdot, \cdot)$ sur $(V_h, Q_h) \times (V_h, Q_h)$ par

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}((\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) & \quad (2.40) \\
&= A(\tilde{\mathbf{u}}_h, \Gamma_h \mathbf{v}_h) + D(\Gamma_h \mathbf{v}_h, \tilde{p}_h) + d(\tilde{\mathbf{u}}_h, q_h) + G(\tilde{p}_h, q_h).
\end{aligned}$$

On peut montrer (voir [9]) que cette forme bilinéaire est continue et satisfait l'inégalité de coercivité faible.

Théorème 2.5. *La forme bilinéaire $\mathcal{C}((\cdot, \cdot), (\cdot, \cdot))$ satisfait*

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}((\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h), (\mathbf{v}_h, q_h))| &\leq k(\|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_1 + \|\tilde{p}_h\|_0)(\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0) \quad (2.41) \\
&\quad \forall (\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h), (\mathbf{v}_h, q_h) \in (V_h, Q_h),
\end{aligned}$$

$$\sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in (V_h, Q_h)} \frac{|\mathcal{C}((\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h), (\mathbf{v}_h, q_h))|}{\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \geq \beta(\|\tilde{\mathbf{u}}_h\|_1 + \|\tilde{p}_h\|_0) \quad (2.42)$$

$$\forall (\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h) \in (V_h, Q_h),$$

où β est indépendant de h .

Nous pouvons en conclure que le système (2.31) a une unique solution $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h) \in (V_h, Q_h)$. Définissons maintenant l'extension de $\mathcal{C}(\cdot, \cdot)$ à $(V, Q) \times (V, Q)$, la forme bilinéaire $\mathcal{D}(\cdot, \cdot)$

$$\mathcal{D}((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - d(\mathbf{v}, p) + d(\mathbf{u}, q) + G(p, q). \quad (2.43)$$

Nous voulons maintenant obtenir une estimation d'erreur pour le système (2.31).

2.2.3 Estimation d'erreur

Théorème 2.6. *Soient (\mathbf{u}, p) et $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h)$ les solutions respectives de (2.14) et (2.31). Alors*

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_1 + \|p - \tilde{p}_h\|_0 \leq kh(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 + \|\mathbf{f}\|_0). \quad (2.44)$$

Démonstration. Premièrement, soustrayons (2.31) à (2.26). Nous obtenons

$$\mathcal{C}((\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h, p_h - \tilde{p}_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h - \Gamma_h \mathbf{v}_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in (V_h, Q_h).$$

Posons $(e, \eta) = (\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h, p_h - \tilde{p}_h) \in (V_h, Q_h)$. Nous pouvons alors utiliser (2.42) qui nous dit que

$$\begin{aligned} (\|e\|_1 + \|\eta\|_0) &\leq \frac{1}{\beta} \sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in (V_h, Q_h)} \frac{|\mathcal{C}((e, \eta), (\mathbf{v}_h, q_h))|}{\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \\ &= \frac{1}{\beta} \sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in (V_h, Q_h)} \frac{|(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h - \Gamma_h \mathbf{v}_h)|}{\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0}. \end{aligned}$$

Or, Cauchy-Schwarz et l'inégalité (2.29) permettent d'avoir

$$\begin{aligned} |(\mathbf{f}, \mathbf{v}_h - \Gamma_h \mathbf{v}_h)| &\leq \|\mathbf{f}\|_0 \|\mathbf{v}_h - \Gamma_h \mathbf{v}_h\|_0 \\ &\leq kh \|\mathbf{v}_h\|_1 \|\mathbf{f}\|_0. \end{aligned}$$

De plus, remarquons que

$$\sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in (V_h, Q_h)} \frac{\|\mathbf{v}_h\|_1}{\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \leq 1.$$

Ainsi nous avons que

$$(\|e\|_1 + \|\eta\|_0) \leq \frac{kh}{\beta} \|\mathbf{f}\|_0.$$

Nous avons de plus par (2.27) que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq kh(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1).$$

Ceci nous mène à la conclusion

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_1 + \|p - \tilde{p}_h\|_0 \\ & \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 + \|p_h - \tilde{p}_h\|_0 \\ & \leq kh(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 + \|\mathbf{f}\|_0). \end{aligned}$$

□

Nous voudrions maintenant obtenir une estimation pour l'erreur $\chi = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h$ dans la norme L^2 . Pour ce faire, considérons le problème dual : Trouver $(\mathbf{z}, s) \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^2 \times [H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)]$ tels que

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{z} - \nabla s = \chi & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{z} = 0 & \text{dans } \Omega \\ z = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

dont la forme faible est

$$\nu(\nabla \mathbf{z}, \nabla \mathbf{v}) + (s, \nabla \cdot \mathbf{v}) - (q, \nabla \cdot \mathbf{z}) = (v, \chi) \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in (V, Q). \quad (2.45)$$

Si Ω est convexe, la solution de (2.45) satisfait (voir [5])

$$\|\mathbf{z}\|_2 + \|s\|_1 \leq k\|\chi\|_2. \quad (2.46)$$

Théorème 2.7. Soient (\mathbf{u}, p) et $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h)$ les solutions respectives de (2.14) et (2.31) et $\mathbf{f} \in H^1(\Omega)$. Alors

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_0 \leq kh^2(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 + \|\mathbf{f}\|_1). \quad (2.47)$$

Démonstration. Prenons $(\mathbf{v}, q) = (\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h, p_h - \tilde{p}_h)$. Ainsi nous avons

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_0^2 = \nu(\nabla \mathbf{z}, \nabla(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h)) + (s, \nabla \cdot (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h)) - ((p - \tilde{p}_h), \nabla \cdot \mathbf{z}).$$

En choisissant $(\mathbf{v}_h, q_h) = (I_h \mathbf{z}, J_h s)$ dans (2.14) et (2.31), nous avons

$$\nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla I_h \mathbf{z}) - (p, \nabla \cdot I_h \mathbf{z}) + (J_h s, \nabla \cdot \mathbf{u}) = (\mathbf{f}, I_h \mathbf{z}),$$

$$\nu(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_h, \nabla I_h \mathbf{z}) - (\tilde{p}_h, \nabla \cdot I_h \mathbf{z}) + (J_h s, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}_h) + G(\tilde{p}_h, J_h s) = (\mathbf{f}, \Gamma_h I_h \mathbf{z}).$$

Soustrayons maintenant ces deux equations et ajoutons et retirons le terme $G(\tilde{p}_h, s)$,

$$\begin{aligned} & \nu(\nabla(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h), \nabla I_h \mathbf{z}) - (p - \tilde{p}_h, \nabla \cdot I_h \mathbf{z}) + (J_h s, \nabla \cdot (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h)) \\ & + G(p - \tilde{p}_h, J_h s) - G(p, J_h s) = (\mathbf{f}, I_h \mathbf{z} - \Gamma_h I_h \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_0^2 &= \nu(\nabla(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h), \nabla(\mathbf{z} - I_h \mathbf{z})) \\ &\quad - (p - \tilde{p}_h, \nabla \cdot (\mathbf{z} - I_h \mathbf{z})) + (s - J_h s, \nabla \cdot (\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h)) \\ &\quad - G(p - \tilde{p}_h, J_h s) + G(p, J_h s) + (\mathbf{f}, I_h \mathbf{z} - \Gamma_h I_h \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Ajoutons et retirons le terme $G(p - \tilde{p}_h, s)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_0^2 &= \mathcal{D}((\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h, p - \tilde{p}_h); (\mathbf{z} - I_h \mathbf{z}, s - J_h s)) \\ &\quad - G(p - \tilde{p}_h, s) + G(p, J_h s) + (\mathbf{f}, I_h \mathbf{z} - \Gamma_h I_h \mathbf{z}). \end{aligned}$$

Or nous avons

$$\begin{aligned} |G(p, J_h s)| &= |G(p, J_h s - s)| + |G(p, s)| \\ &\leq \|p - \Gamma_h p\|_0 \|J_h s - s\|_0 + \|p - \Gamma_h p\|_0 \|s - \Gamma_h s\|_0 \\ &\stackrel{(2.21), (2.16)}{\leq} kh \|p\|_1 kh \|s\|_1 + kh \|p\|_1 kh \|s\|_1 \\ &\stackrel{(2.46)}{\leq} kh^2 \|p\|_1 \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |G(p - \tilde{p}_h, s)| &\leq \|p - \tilde{p}_h\|_0 \|s - \Gamma_h s\|_0 \\ &\stackrel{(2.44), (2.21)}{\leq} kh (\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 + \|\mathbf{f}\|_0) + kh \|s\|_1 \\ &\stackrel{(2.46)}{\leq} kh^2 (\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 + \|\mathbf{f}\|_0) \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}((\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h, p - \tilde{p}_h); (\mathbf{z} - I_h \mathbf{z}, s - J_h s)) \\ & \leq k (\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_1 + \|p - \tilde{p}_h\|_0) (\|\mathbf{z} - I_h \mathbf{z}\|_1 + \|s - J_h s\|_0) \\ & \stackrel{(2.44)}{\leq} kh (\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 + \|\mathbf{f}\|_0) (kh \underbrace{\|\mathbf{z}\|_2}_{\leq \|\mathbf{z}\|_2} + kh \underbrace{\|s\|_1}_{\leq \|s\|_1}) \\ & \stackrel{(2.46)}{\leq} kh^2 (\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 + \|\mathbf{f}\|_0) \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_0. \end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned}
|(\mathbf{f} - \Pi_h \mathbf{f}, I_h \mathbf{z} - \Gamma_h I_h \mathbf{z})_\Omega| &= \left| \sum_K (\mathbf{f} - \Pi_h \mathbf{f}, I_h \mathbf{z} - \Gamma_h I_h \mathbf{z})_K \right| \\
&= \left| \sum_K (\mathbf{f}, I_h \mathbf{z} - \Gamma_h I_h \mathbf{z})_K - \underbrace{\sum_K (\Pi_h \mathbf{f}, I_h \mathbf{z} - \Gamma_h I_h \mathbf{z})_K}_{=0 \text{ par (2.28)}} \right| \\
&= (\mathbf{f}, I_h \mathbf{z} - \Gamma_h I_h \mathbf{z})_\Omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(\mathbf{f}, I_h \mathbf{z} - \Gamma_h I_h \mathbf{z})| &= |(\mathbf{f} - \Pi_h \mathbf{f}, I_h \mathbf{z} - \Gamma_h I_h \mathbf{z})| \\
&\stackrel{\text{C-S}}{\leq} \|\mathbf{f} - \Pi_h \mathbf{f}\|_0 \|I_h \mathbf{z} - \Gamma_h I_h \mathbf{z}\|_0 \\
&\stackrel{(2.21), (2.29)}{\leq} kh \|\mathbf{f}\|_1 kh \|I_h \mathbf{z}\|_1 \\
&\stackrel{(2.17)}{\leq} kh^2 \|\mathbf{f}\|_1 \underbrace{\|z\|_1}_{\|\mathbf{z}\|_2} \\
&\stackrel{(2.46)}{\leq} kh^2 \|\mathbf{f}\|_1 \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_0.
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_0^2 \leq kh^2 [2(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 + \|\mathbf{f}\|_0) + \|p\|_1 + \|\mathbf{f}\|_1] \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_0.$$

Nous pouvons alors conclure que

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_0 \leq kh^2 (\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 + \|\mathbf{f}\|_1).$$

□

3 Problème de Stokes non-stationnaire

Nous allons maintenant nous intéresser au problème de Stokes dépendant du temps. Pour ce faire, introduisons tout d'abord la théorie nécessaire relative aux problèmes paraboliques.

3.1 Problèmes paraboliques

Supposons que Ω est un espace borné de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$ à bord Lipschitz. Considérons l'opérateur différentiel de second ordre L donné par

$$Lw := - \sum_{i,j=1}^d D_i(a_{ij} D_j w) + \sum_{i=1}^d [D_i(b_i w) + c_i D_i w] + a_0 w. \quad (3.1)$$

Nous allons considérer ici seulement le cas où l'opérateur L est indépendant du temps, c'est-à-dire où a_{ij}, b_i, c_i et a_0 ne dépendent pas du temps. Mais la plupart des résultats peuvent être étendus aux opérateurs dépendants du temps.

Définition 3.1. L'opérateur

$$\frac{\partial}{\partial t} + L \quad (3.2)$$

est dit *parabolique* si L est elliptique.

Rappelons-nous que L est dit *elliptique* s'il existe une constante $\alpha_0 > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\mathbf{x}) \xi_i \xi_j \geq \alpha_0 |\xi|^2$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ et pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$.

Nous nous intéressons donc au problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f & \text{dans } Q_T := (0, T) \times \Omega \\ Bu = g & \text{sur } \Sigma_T := (0, T) \times \partial\Omega \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{sur } \Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

où $f = f(t, \mathbf{x})$, $g = g(t, x)$ et $u_0 = u_0(\mathbf{x})$ sont les données du problème.

3.1.1 Formulation faible

Nous allons dériver la forme faible de (3.3) dans le cas de conditions de bord Dirchelet homogènes. Prenons $V = H_0^1(\Omega)$. Nous dénotons par $L^2(0, T; V)$ l'espace

$$L^2(0, T; V) := \left\{ u : (0, T) \rightarrow V \mid u \text{ est mesurable et } \int_0^T \|u(t)\|_1^2 dt < \infty \right\}.$$

On définira de la même façon les autres espaces fonctionnels pour les fonctions dépendantes du temps et de l'espace. La forme faible de (3.3) dans le cas de conditions de bord Dirchelet homogènes est donc : Soient $f \in L^2(Q_T)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ tel que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) & \forall v \in V \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (3.4)$$

où (\cdot, \cdot) est le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$, la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est définie par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^d a_{ij} D_j u D_i v - \sum_{i=1}^d (b_i u D_i v - c_i v D_i u) + a_0 u v \right]$$

et l'équation ci-dessus doit être comprise dans le sens des distributions sur $(0, T)$. Il existe plusieurs manières de prouver l'existence et l'unicité d'une solution au système (3.4); nous allons nous attarder sur une méthode basée sur la méthode de Faedo-Galerkin.

Supposons tout d'abord que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue et *faiblement coercive* sur V , c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ telles que

$$a(u, v) + \lambda \|v\|_0^2 \geq \alpha \|v\|_1^2 \quad \forall v \in V. \quad (3.5)$$

Si (3.5) est satisfaite avec $\lambda = 0$, on dit que $a(\cdot, \cdot)$ est coercive. L'inégalité (3.5) est satisfaite pour tous les problèmes à valeur au bord que nous traitons, à condition que pour tout $i, j = 1, \dots, d$ les coefficients a_{ij}, b_i, c_i et a_0 de l'opérateur L appartiennent à $L^\infty(\Omega)$. Sous ces mêmes conditions, $a(\cdot, \cdot)$ est aussi continue. Remarquons encore que si u est la solution de (3.3), alors $u_\lambda(t, \mathbf{x}) = e^{-\lambda t}(t, \mathbf{x})$ satisfait

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + Lu_\lambda + \lambda u_\lambda = e^{-\lambda t} f \quad \text{dans } Q_T,$$

et si $a(w, v)$ est faiblement coercive, alors la forme bilinéaire $a_\lambda(w, v) := a(w, v) + \lambda(w, v)$ associée à ce problème est coercive. Ainsi, si on remplace f par $e^{-\lambda t} f$ et L par $L + \lambda I$, où I est l'opérateur identité, nous pouvons supposer sans perte de généralités que la forme bilinéaire associée au problème (3.4) satisfait (3.5) avec $\lambda = 0$. Ainsi, si on trouve des estimations pour $u_\lambda(t, \mathbf{x})$, elles sont aussi valables pour $u(t, \mathbf{x})$ si on les multiplie par $e^{\lambda t}$.

Prouvons maintenant le théorème d'existence.

Théorème 3.2. *Supposons que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue dans $V \times V$ et coercive.*

Alors, prenant $f \in L^2(Q_T)$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, il existe une unique solution $u \in L^2(0, T; V) \cap C^0([0, T], L^2(\Omega))$ au problème (3.4). De plus, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V')$ et l'estimation d'énergie

$$\|u(t)\|_0^2 + \alpha \int_0^t \|u(\tau)\|_1^2 \leq \|u_0\|_0^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|f(\tau)\|_0^2 \quad (3.6)$$

est vérifiée $\forall t \in [0, T]$.

Démonstration. Comme V est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$, c'est un espace de Hilbert séparable, i.e. $\exists V^N \subset V$ dense et dénombrable. Soit $\{\phi_j\}_{j \geq 1}$ une base

orthonormale complète de V , définissons $V_N := \text{span}\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$. Considérons le problème approximé : $\forall t \in [0, T]$, trouvons $u^N(t) \in V^N$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u^N(t), \phi_j) + a(u^N(t), \phi_j) = (f(t), \phi_j) & \forall j = 1, \dots, N, \quad t \in (0, T) \\ u^N(0) = u_0^N := P_N(u_0) = \sum_{s=1}^N \rho_s \phi_s, \end{cases} \quad (3.7)$$

où P_N est la projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur V_N , i.e. le vecteur ρ est la solution du système linéaire $(M\rho)_j = (u_0, \phi_j)$ où M n'est autre que la matrice de masse $M_{js} := (\phi_j, \phi_s)$ (ie $(\sum_{s=1}^N \rho_s \phi_s, \phi_j) = (u_0, \phi_j)$). De plus, comme $\{\phi_j\}, j = 1, \dots, N$ est une base de V^N , le système (3.7) est vérifié pour tout $v^N \in V^N$.

Nous pouvons réécrire u^N comme une combinaison linéaire des fonctions de la base

$$u^N = \sum_{s=1}^N c_s^N(t) \phi_s.$$

Ainsi le système (3.7) est équivalent à

$$\begin{cases} M \frac{d}{dt} c^N(t) + A c^N(t) = F(t) \\ M c^N(0) = c_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

où pour $i, j = 1, \dots, N$

$$A_{ij} := a(\phi_j, \phi_i),$$

$$F_i(t) = (f(t), \phi_i),$$

$$c_{0,i} = (u_0, \phi_i).$$

Comme M est définie positive, elle est inversible et nous pouvons trouver une unique solution c^N au système (3.8). Comme $F \in L^2(0, T)$ et qu'on trouve la première dérivée de c^N dans l'équation, nous avons que $c^N \in H^1(0, T)$, ce qui signifie que $u^N \in H^1(0, T; V)$. En prenant $u^N(t)$ comme fonction test dans le système (3.7), nous obtenons

$$\left(\frac{d}{dt} u^N(t), u^N(t) \right) + a(u^N(t), u^N(t)) = (f(t), u^N(t)).$$

Par hypothèse $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, i.e. $|a(u^N(t), u^N(t))| \geq \alpha \|u^N(t)\|_1^2$, donc nous avons

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^N(t)\|_0^2 + \alpha \|u^N(t)\|_1^2 \leq \|f(t)\|_0 \|u^N(t)\|_0.$$

En intégrant sur l'intervalle de temps $(0, \tau)$, $\tau \in (0, T]$, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \|u^N(\tau)\|_0^2 - \frac{1}{2} \|u^N(0)\|_0^2 + \alpha \int_0^\tau \|u^N(t)\|_1^2 \leq \int_0^\tau \|f(t)\|_0 \|u^N(t)\|_0.$$

Par l'inégalité de Young, $ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{4\epsilon} \forall \epsilon > 0$, nous avons que

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\tau \|f(t)\|_0 \|u^N(t)\|_0 &\leq 2\epsilon \int_0^\tau \|f(t)\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon} \int_0^\tau \|u^N(t)\|_0^2 \\ &\stackrel{\epsilon = \frac{1}{2\alpha}}{=} \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau \|f(t)\|_0^2 + \alpha \int_0^\tau \underbrace{\|u^N(t)\|_0^2}_{\leq \|u^N(t)\|_1^2}. \end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$\|u^N(\tau)\|_0^2 + \alpha \int_0^\tau \|u^N(t)\|_1^2 \leq \underbrace{\|u^N(0)\|_0^2}_{=u_0} + \frac{1}{\alpha} \int_0^\tau \|f(t)\|_0^2.$$

La suite u^N est donc bornée dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V)$. Nous pouvons donc trouver une sous-suite u^N qui converge dans la topologie faible* de $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et faiblement dans $L^2(0, T; V)$ [17]. Cela signifie que $\exists u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V)$ tel que

$$\int_0^\tau (u^N(t), \varphi(t)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^\tau (u(t), \varphi(t)) \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.9)$$

et

$$\int_0^\tau (\nabla u^N(t), \phi(t)) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_0^\tau (\nabla u(t), \phi(t)) \quad \forall \phi \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.10)$$

Afin de pouvoir passer à la limite dans le système (3.7) (et pouvoir utiliser ce que nous avons obtenu plus haut), nous multiplions l'équation par $\psi \in C^1([0, T])$ avec $\psi(T) = 0$ et nous intégrons sur $[0, T]$

$$\int_0^T \left(\frac{du^N}{dt}(t), \phi_j \right) \psi(t) + \int_0^T a(u^N(t), \phi_j) \psi(t) = \int_0^T (f(t), \phi_j) \psi(t).$$

Mais

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{du^N}{dt}(t), \phi_j \right) \psi(t) &= - \int_0^T (u^N(t), \phi_j) \frac{d\psi}{dt}(t) \\ &\quad + (u^N(T), \phi_j) \underbrace{\psi(T)}_{=0} - (u^N(0), \phi_j) \psi(0). \end{aligned}$$

Comme u_0^N converge vers u_0 dans $L^2(\Omega)$, en choisissant arbitrairement N_0 et en passant à la limite dans le système (3.7), grâce à (3.9) et (3.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (u(t), \phi_j) \frac{d\psi}{dt}(t) - (u(0), \phi_j) \psi(0) + \int_0^T a(u(t), \phi_j) \psi(t) \quad (3.11) \\
& = \int_0^T (f(t), \phi_j) \psi(t) \quad \forall j = 1, \dots, N_0.
\end{aligned}$$

Comme V^N est dense dans V , les combinaisons linéaires de ϕ_j sont denses dans V et l'équation (3.11) est vérifiée $\forall v \in V$. De plus, prenant $\psi \in D(0, T)$ (on peut ainsi diviser l'équation (3.11) par ψ , car le support de ψ est $[0, T]$), nous remarquons que nous avons construit une solution $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V)$ du problème (3.4).

Il nous reste maintenant à montrer que $u(0) = u_0$ et que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V')$. Par ce que nous avons obtenus précédemment, nous avons que $u \in L^2(0, T; V) \cap H^1(0, T; V')$ et donc $u \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$ (voir [11]).

Montrons tout d'abord que $u(0) = u_0$. Par (3.4), nous avons que $(u(t), v) \in H^1(0, T)$ car $(f(t), v) \in L^2(0, T)$. Ceci implique $(u(t), v)$ est une fonction continue sur $(0, T)$. En multipliant le système (3.4) par $\psi \in C^1([0, T])$ avec $\psi(T) = 0$ et en intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (u(t), v) \frac{d\psi}{dt}(t) + \int_0^T a(u(t), v) \psi(t) \\
& = (u(0), v) \psi(0) + \int_0^T (f(t), v) \psi(t) \quad \forall v \in V.
\end{aligned}$$

En faisant de même pour le système (3.7) et en opérant une soustraction, nous obtenons en prenant $\psi(0) = 1$ et grâce à (3.9) et (3.10),

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T (u(t) - u^N(t), v) \frac{d\psi}{dt}(t) + \int_0^T a(u(t) - u^N(t), v) \psi(t) \\
& \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \qquad \qquad \qquad \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \\
& = (u(0) - u^N(0), v) \psi(0) \quad \forall v \in V. \\
& \qquad \qquad \qquad \xrightarrow{N \rightarrow \infty} u_0
\end{aligned}$$

Ainsi nous pouvons conclure que $u(0) = u_0$.

Comme u est la solution du système (3.4), nous avons que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f$$

au sens des distributions sur Q_T . Comme $f \in L^2((0, T) \times \Omega)$, nous avons que $Lu \in L^2(0, T; V')$ et aussi que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V')$.

L'unicité de la solution n'est qu'une conséquence de (3.6), qui est une estimation *a-priori* pour toute solution $u \in L^2(0, T; V) \cap H^1(0, T; V')$ du système (3.4).

Nous pouvons réécrire (3.4)

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t}(t), v \right\rangle + a(u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V.$$

En prenant $v = u(t)$, il s'en suit [15, 11] que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_0^2 + a(u(t), u(t)) = (f(t), u(t)).$$

Procédant comme précédemment, nous aboutissons à l'inégalité (3.6).
Considérons \tilde{u} et \hat{u} deux solutions du système (3.4). Soit $w = \tilde{u} - \hat{u}$. Nous avons que

$$\|w(t)\|_0^2 + \alpha \int_0^t \|w(\tau)\|_1^2 \leq \|w(0)\|_0^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|f_w(\tau)\|_0^2.$$

Comme \tilde{u} et \hat{u} sont deux solutions du système (3.4), $w(0) = u_0 - u_0 = 0$ et $f_w(t) = f(t) - f(t) = 0$. Ainsi

$$\|w(t)\|_0^2 + \alpha \int_0^t \|w(\tau)\|_1^2 \leq 0.$$

Comme les deux termes à gauche de l'équation sont positifs, nous pouvons conclure que $w = 0$ et donc que $\tilde{u} = \hat{u}$. La solution du système (3.4) est donc unique. □

Nous allons maintenant nous affairer à montrer une autre estimation a-priori qui pourrait se montrer utile.

Proposition 3.3. *Supposons que $a(\cdot, \cdot)$ est coercive et que $f \in L^2(Q_T)$, $u_0 \in V$, $a_{ij}, b_i \in C^1(\bar{\Omega})$ et $c_i, a_0 \in L^\infty(\Omega)$.*

Alors la solution u du système (3.4) appartient à $L^\infty(0, T; V) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ et vérifie l'estimation d'énergie

$$\sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_1^2 + \int_0^T \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_0^2 \leq C_\alpha \left(\|u_0\|_1^2 + \int_0^T \|f(t)\|_0^2 \right), \quad (3.12)$$

où $C_\alpha > 0$ est une constante indépendante de T .

Démonstration. Multiplions le système (3.3) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et intégrons sur Ω . Comme dans notre cas $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ sur Σ_T pour presque tout $t \in [0, T]$ nous avons

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + Lu \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\
&= \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \sum_{i,j} a_{ij} D_j u D_i \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_i \left(b_i u D_i \frac{\partial u}{\partial t} - c_i D_i u \frac{\partial u}{\partial t} \right) + a_0 u \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\
&= \int_{\Omega} f \frac{\partial u}{\partial t},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

où la première égalité est obtenue par intégration par partie, considérant la définition générale d'un opérateur différentiel L d'ordre deux et le fait que $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ sur Σ_T pour presque tout $t \in [0, T]$.

Remarquons que

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} D_j u D_i \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{ij} D_j u D_i u$$

et que

$$\int_{\Omega} \sum_i b_i u D_i \frac{\partial u}{\partial t} = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{b}u) \frac{\partial u}{\partial t},$$

la dernière étant obtenue par intégration par parties.

Remarquons aussi que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[- \sum_i \left(b_i u D_i \frac{\partial u}{\partial t} - c_i D_i u \frac{\partial u}{\partial t} \right) - a_0 u \frac{\partial u}{\partial t} + f \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\
&= \int_{\Omega} \left[-(\nabla b \cdot u + b \cdot \nabla u) \frac{\partial u}{\partial t} - c \cdot \nabla u \frac{\partial u}{\partial t} - a_0 u \frac{\partial u}{\partial t} + f \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\
&\stackrel{\text{C-S}}{\leq} \|\nabla b\|_{C^0(\bar{\Omega})} \|u\|_0 \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_0 + \|b\|_{C^1(\bar{\Omega})} \|\nabla u\|_0 \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_0 \\
&\quad + \|c\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_0 \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_0 + \|a_0\|_{L^\infty} \|u\|_0 \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_0 + \|f\|_0 \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_0 \\
&\leq [\max(\|\nabla b\|_{C^0(\bar{\Omega})} + \|a_0\|_{L^\infty}, \|b\|_{C^1(\bar{\Omega})} + \|c\|_{L^\infty}) \|u\|_1 + \|f\|_0] \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_0 \\
&\leq C(\|u\|_1 + \|f\|_0) \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_0.
\end{aligned}$$

Intégrons maintenant l'équation (3.13) par rapport au temps sur $(0, t)$. Comme $a(\cdot, \cdot)$ est coercive et grâce à l'inégalité de Friedrich, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2 &+ \frac{1}{2} \frac{\alpha}{1 + C_F^2} \|u(t)\|_1^2 \\
&\leq \frac{\alpha}{2} \|u(0)\|_1^2 + C \int_0^t (\|u(\tau)\|_1 + \|f(\tau)\|_0) \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_0
\end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_1^2 &+ \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2 \\
&\leq C \left[\|u(0)\|_1^2 + \int_0^t (\|u(\tau)\|_1 + \|f(\tau)\|_0) \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_0 \right],
\end{aligned}$$

où $C = \frac{\max(\frac{\alpha}{2}, C)}{\min(1, \frac{1}{2} \frac{\alpha}{1 + C_F^2})}$.

Par l'inégalité de Young, en prenant $\epsilon = C > 0$, nous avons

$$\int_0^t \|u(\tau)\|_1 \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_0 \leq C \int_0^t \|u(\tau)\|_1^2 + \frac{1}{4C} \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2$$

et

$$\int_0^t \|f(\tau)\|_0 \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_0 \leq C \int_0^t \|f(\tau)\|_0^2 + \frac{1}{4C} \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2.$$

De plus, par le théorème précédent, nous avons que

$$\int_0^t \|u(\tau)\|_1^2 \leq \frac{1}{\alpha} \underbrace{\|u_0\|_0^2}_{\leq \|u_0\|_1^2} + \frac{1}{\alpha^2} \int_0^t \|f(\tau)\|_0^2.$$

Ainsi,

$$\|u(t)\|_1^2 + \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2 \leq C_\alpha \left(\|u_0\|_1^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_0^2 \right),$$

où $C_\alpha = \frac{\max(C(1 + \frac{C}{\alpha}), C(C + \frac{C}{\alpha^2}))}{\min(1, \frac{1}{2})}$.

Comme cette équation est vérifiée $\forall t \in (0, T)$, nous avons que $u \in L^\infty(0, T; V) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ et vérifie l'energy estimate

$$\sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_1^2 + \int_0^T \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_0^2 \leq C_\alpha \left(\|u_0\|_1^2 + \int_0^T \|f(t)\|_0^2 \right),$$

où $C_\alpha > 0$ est une constante indépendante de T .

□

Il s'en suit le corollaire suivant.

Corollaire 3.4. *Supposons que la solution u obtenue dans la proposition (3.3) satisfasse*

$$\|u(t)\|_2^2 \leq C(\|Lu(t)\|_0^2 + \|u(t)\|_1^2) \text{ presque partout sur } [0, T]. \quad (3.14)$$

Alors $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^0([0, T]; V)$ et satisfait l'estimation

$$\max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_1^2 + \int_0^T \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(t) \right\|_0^2 + \|u(t)\|_2^2 \right) \leq C_\alpha \left(\|u_0\|_1^2 + \int_0^T \|f(t)\|_0^2 \right) \quad (3.15)$$

où $C_\alpha > 0$ est une constante indépendante de T .

3.1.2 Semi-discrète approximation

Pour approximer la solution du système (3.4), nous devons tout d'abord discrétiser par rapport à l'espace. Nous allons ainsi aboutir à un système d'équations différentielles ordinaires dont la solution $u_h(t)$ est une approximation de la solution exacte pour tout $t \in [0, T]$.

Supposons que $f \in L^2(Q_T)$ et que $u_{0,h} \in V_h$ soit une approximation convenable de la donnée initiale $u_0 \in L^2(\Omega)$ où V_h est un espace de dimension fini approximant V . Ici, supposons que Ω est un domaine polygonal à bord Lipschitz et que les conditions au bord sont Dirichelet homogènes, cela signifie que l'on prend $V_h = X_h^k \cap H_0^1(\Omega)$. Alors le problème semi-discret est : $\forall t \in [0, T]$, trouver $u_h(t) \in V_h$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u_h(t), v_h) + a(u_h(t), v_h) = (f(t), v_h) & \forall v_h \in V_h, \quad t \in [0, T] \\ u_h(0) = u_{0,h} \end{cases} \quad (3.16)$$

Considérons $\{\phi_j | j = 1, \dots, N_h\}$ une base de V_h . Nous pouvons alors exprimer $u_h(t)$ comme une combinaison linéaire des fonctions de bases, c'est-à-dire

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^{N_h} \xi_j(t) \phi_j.$$

Comme il est suffisant que le système (3.16) soit vérifié pour toutes les fonctions de bases, on aboutit au système linéaire

$$\begin{cases} M \frac{d}{dt} \xi(t) + A \xi(t) = \mathbf{F}(t) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

où pour $i, j = 1, \dots, N_h$

$$M_{ij} := (\phi_i, \phi_j),$$

$$A_{ij} := a(\phi_j, \phi_i),$$

et

$$F_i(t) = (f(t), \phi_i).$$

Comme M est définie positive, elle est inversible et il existe une unique solution $\xi(t)$ au système (3.17).

Si on répète la preuve du théorème (3.2), on peut montrer que la solution u_h satisfait une estimation d'énergie comme (3.6) à condition que $u_{0,h}$ converge vers u_0 dans $L^2(\Omega)$. La méthode des éléments finis est donc stable.

Nous allons maintenant prouver la convergence de cette méthode et donner une estimation de l'ordre de convergence.

Proposition 3.5. *Soit \mathcal{T}_h une famille de triangulations régulière et supposons que les éléments finis linéaires ou bilinéaires par morceaux sont utilisés. Supposons de plus que $a(\cdot, \cdot)$ est coercive, que (3.14) est vérifiée et que $f \in L^2(Q_T)$, $u_0 \in V$, $a_{ij}, b_i \in C^1(\bar{\Omega})$ et $c_i, a_0 \in L^\infty(\Omega)$.*

Alors, les solutions respectives u et u_h de (3.4) et (3.16), satisfont

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_h(t)\|_0^2 &+ \alpha \int_0^t \|u(\tau) - u_h(\tau)\|_1^2 \\ &\leq \|u_0 - u_{0,h}\|_0^2 + C_{\alpha,\gamma} h^2 \left(\|u_{0,h}\|_1^2 + \|u_0\|_1^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_0^2 \right) \end{aligned}$$

$\forall t \in [0, T]$. Ici, α et γ sont les constantes de coercivité et de continuité de $a(\cdot, \cdot)$ et $C_{\alpha,\gamma}$ est une constante indépendante de h .

Démonstration. Pour tout $t \in [0, T]$, on définit $e_h(t) := u(t) - u_h(t)$. Comme u et u_h sont les solutions respectives des systèmes (3.4) et (3.16), et que v_h ne dépend pas de t , nous avons

$$\frac{d}{dt}(e_h(t), v_h) + a(e_h, v_h) = \left(\frac{\partial e_h(t)}{\partial t}, v_h \right) + a(e_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Pour t fixé, choisissons $v_h := u_h(t) - w_h$ avec $w_h \in V_h$. Nous avons alors que

$$\left(\frac{\partial e_h(t)}{\partial t}, u_h(t) - w_h \right) + a(e_h, u_h(t) - w_h) = 0.$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$ et pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial e_h(t)}{\partial t}, e_h(t) \right) + a(e_h(t), e_h(t)) \\
= & \left(\frac{\partial e_h(t)}{\partial t}, e_h(t) \right) + a(e_h(t), e_h(t)) \\
& + \left(\frac{\partial e_h(t)}{\partial t}, u_h(t) - w_h \right) + a(e_h, u_h(t) - w_h) \\
= & \left(\frac{\partial e_h(t)}{\partial t}, u(t) - w_h \right) + a(e_h, u(t) - w_h) \\
\leq & \left\| \frac{\partial e_h}{\partial t}(t) \right\|_0 \|u(t) - w_h\|_0 + \gamma \|e_h(t)\|_1 \|u(t) - w_h\|_1 \\
\leq & \left\| \frac{\partial e_h}{\partial t}(t) \right\|_0 \|u(t) - w_h\|_0 + \frac{\gamma^2}{4\epsilon} \|u(t) - w_h\|_1^2 + \epsilon \|e_h(t)\|_1^2.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

La première inégalité est la conséquence de la continuité de $a(\cdot, \cdot)$ et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Quant à la deuxième inégalité, elle découle de l'inégalité de Young. Par le corollaire (3.4), nous avons que $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$. Choisissons, pour presque tout $t \in [0, T]$, $w_h = \pi_k^h(u(t))$. Nous savons que si \mathcal{T}_h une famille de triangulation régulière [12], $m = 0, 1$ et $l = \min(k, s-1) \geq 1$, alors il existe une constante C indépendante de h , telle que

$$|v - \pi_k^h(v)|_{m, \Omega} \leq Ch^{l+1-m} |v|_{l+1, \Omega} \quad \forall v \in H^s(\Omega).$$

Ainsi, nous avons que

$$\|u(t) - w_h\|_0 \leq Ch^2 \|u\|_2$$

et que

$$\|u(t) - w_h\|_1 \leq Ch \|u\|_2.$$

Ce qui implique que

$$\|u(t) - w_h\|_0^2 + h^2 \|u(t) - w_h\|_1^2 \leq ch^4 \|u\|_2^2.$$

Intégrant l'équation (3.18) sur $(0, t)$ tout en prenant $\epsilon = \frac{\alpha}{2}$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|e_h(t)\|_0^2 - \frac{1}{2} \|e_h(0)\|_0^2 + \alpha \int_0^t \|e_h(\tau)\|_1^2 \\
\leq & \int_0^t \left\| \frac{\partial e_h}{\partial t}(\tau) \right\|_0 \|u(\tau) - w_h\|_0 + \frac{\gamma^2}{2\alpha} \int_0^t \|u(\tau) - w_h\|_1^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|e_h(\tau)\|_1^2.
\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned} & \|e_h(t)\|_0^2 - \|e_h(0)\|_0^2 + \alpha \int_0^t \|e_h(\tau)\|_1^2 \\ \leq & 2\epsilon' \int_0^t \left\| \frac{\partial e_h}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2 + \frac{1}{2\epsilon'} \int_0^t \|u(\tau) - w_h\|_0^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha} \int_0^t \|u(\tau) - w_h\|_1^2. \end{aligned}$$

En prenant cette fois $\epsilon' = \frac{\alpha h^2}{2\gamma^2}$, nous trouvons

$$\begin{aligned} \|e_h(t)\|_0^2 &+ \alpha \int_0^t \|e_h(\tau)\|_1^2 \\ \leq & \|e_h(0)\|_0^2 + \frac{\alpha}{\gamma^2} h^2 \int_0^t \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2 + \left\| \frac{\partial u_h}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2 \right) \\ &+ \frac{\gamma^2}{\alpha} \int_0^t \left(\frac{1}{h^2} \|u(\tau) - w_h\|_0^2 + \|u(\tau) - w_h\|_1^2 \right) \\ \leq & \|e_h(0)\|_0^2 + \frac{\alpha}{\gamma^2} h^2 \int_0^t \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2 + \left\| \frac{\partial u_h}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2 \right) \\ &+ C \frac{\gamma^2}{\alpha} h^2 \int_0^t \|u(\tau)\|_2^2. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \|e_h(t)\|_0^2 &+ \alpha \int_0^t \|e_h(\tau)\|_1^2 \\ \leq & \|e_h(0)\|_0^2 + C_{\alpha,\gamma} h^2 \int_0^t \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2 + \left\| \frac{\partial u_h}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2 + \|u(\tau)\|_2^2 \right). \end{aligned}$$

Par la proposition (3.3), nous avons

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial u_h}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2 \leq C_\alpha \left(\|u_{0,h}\|_1^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_0^2 \right),$$

et par le corollaire (3.4), nous avons

$$\int_0^t \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_0^2 + \|u(\tau)\|_2^2 \right) \leq C_\alpha \left(\|u_0\|_1^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_0^2 \right).$$

Nous pouvons en conclure que

$$\begin{aligned} & \|u(t) - u_h(t)\|_0^2 + \alpha \int_0^t \|u(\tau) - u_h(\tau)\|_1^2 \\ & \leq \|u_0 - u_{0,h}\|_0^2 + C_{\alpha,\gamma} h^2 \left(\|u_{0,h}\|_1^2 + \|u_0\|_1^2 + \int_0^t \|f(\tau)\|_0^2 \right) \quad \forall t \in [0, T], \end{aligned}$$

où α et γ sont les constantes de coercivité et de continuité de $a(\cdot, \cdot)$ et $C_{\alpha,\gamma}$ est une constante indépendante de h . \square

3.2 Estimation d'erreur

Nous allons maintenant nous pencher sur le problème de Stokes non-stationnaire. Nous allons nous concentrer sur le cas en deux dimensions ; une généralisation au cas à trois dimensions est immédiate.

3.2.1 Notions préliminaires

Soit Ω un ensemble borné de \mathbb{R}^2 à bord Γ lipschitz continu et satisfaisant la condition **(A1)** que nous allons vous énoncer plus bas. Les équations de Stokes non-stationnaires sont alors

$$\begin{cases} u_t - \nu \Delta u + \nabla p = f & (x, t) \in \Omega \times (0, T] \\ \nabla \cdot u = 0 & \in \Omega \times (0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u(x, t)|_\Gamma = 0 & t \in [0, T] \end{cases} \quad (3.19)$$

où $u = u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t))$ n'est autre que la vitesse et $p = p(x, t)$ la pression ; ce sont les deux inconnues de notre problème. Les données sont $f = f(x, t)$ une force, $\nu > 0$ la viscosité, $T > 0$ le temps final considéré. De plus, on note par $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Pour dériver la forme faible de ce problème, définissons tout d'abord les espaces nécessaires

$$\begin{aligned} V &= (H_0^1(\Omega))^2, \quad Q = L_0^2(\Omega), \quad Y = (L_0^2(\Omega))^2, \\ V_{div} &= \{v \in V : \nabla \cdot v = 0\}, \quad D(A) = (H^2(\Omega))^2 \cap V_{div}. \end{aligned}$$

Pour pouvoir dériver la forme faible de (3.19), il faut imposer deux conditions supplémentaires.

(A1) Supposons que Ω est régulier dans le sens que l'unique solution $(u, p) \in (V, Q)$ du problème de Stokes stationnaire (2.1) avec $a_0 = 0$ et $f \in Y$ existe et satisfait

$$\|u\|_2 + \|p\|_1 \leq c\|f\|_0,$$

où c est une constante dépendant seulement de Ω . Dans ce qui suivra, la constante $c > 0$ dépendra au plus des données (ν, T, u_0, Ω) .
A cause de l'équivalence des normes entre $\|u\|_1$ et $\|\nabla u\|_0$ sur $H_0^1(\Omega)$, nous utilisons indifféremment la même notation pour l'une ou l'autre. Il est bien connu que pour tout $v \in V$ l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|v\|_0 \leq \gamma \|\nabla v\|_0, \quad (3.20)$$

où γ est une constante positive dépendant seulement de Ω .

(A2) Nous supposons que la vitesse initiale $u_0 \in D(A)$ et la force $f(x, t) \in L^2(0, T; Y)$ satisfont

$$\|u_0\|_2 + \left(\int_0^T (\|f\|_0^2 + \|f\|_1^2 + \|f_t\|_0^2) dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq c.$$

Sous ces conditions, nous pouvons maintenant définir les formes bilinéaires $a(\cdot, \cdot)$ et $d(\cdot, \cdot)$ comme dans la cas du problème de Stokes stationnaire. La forme bilinéaire généralisée sur $(V, Q) \times (V, Q)$ est alors donnée par

$$B((u, p); (v, q)) = a(u, v) - d(v, p) + d(u, q). \quad (3.21)$$

Alors, les estimations suivantes sont vérifiées pour $B((\cdot, \cdot); (\cdot, \cdot))$ [5, 2]

$$|B((u, p); (u, p))| \leq \nu \|u\|_1^2 \quad (3.22)$$

$$|B((u, p); (v, q))| \leq k(\|u\|_1 + \|p\|_0)(\|v\|_1 + \|q\|_0) \quad (3.23)$$

$$\beta_0(\|u\|_1 + \|p\|_0) \leq \sup_{(v, q) \in (V, Q)} \frac{|B((u, p); (v, q))|}{\|v\|_1 + \|q\|_0} \quad (3.24)$$

pour tout $(u, p), (v, q) \in (V, Q)$ et où $\beta_0 > 0$.

Ainsi la forme faible du problème (3.19) est définie de la sorte : Trouver $(u, p) \in (V, Q)$, $t > 0$ tels que pour tout $(v, q) \in (V, Q)$,

$$\begin{cases} (u_t, v) + B((u, p); (v, q)) = (f, v) \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.25)$$

Nous allons maintenant introduire un résultat concernant l'existence, l'unicité et la régularité de la solution forte globale des équations de Stokes, sous les hypothèses **(A1)** et **(A2)**.

Lemme 3.6. [6] Supposons que les conditions (A1) et (A2) soient vérifiées.

Alors, pour tout $T \geq 0$ donné, il existe une unique solution (u, p) satisfaisant les régularités suivantes :

$$\sup_{0 < t < T} (\|u(t)\|_2^2 + \|p(t)\|_1^2 + \|u_t(t)\|_0^2) \leq c, \quad (3.26)$$

$$\sup_{0 < t < T} \tau(t) \|u_t\|_1^2 + \int_0^T \tau(t) (\|u_t\|_2^2 + \|p_t\|_1^2 + \|u_{tt}\|_0^2) \leq c, \quad (3.27)$$

où $\tau(t) = \min\{1, t\}$.

Considérons, comme pour le problème de Stokes stationnaire, les espaces de dimensions finis $(V_h, Q_h) \subset (V, Q)$ définis par (2.15), qui sont associés à nouveau à \mathcal{T}_h une triangulation de Ω en triangles, régulière et uniforme. Considérons les deux opérateurs d'interpolation I_h et J_h , tels que pour $v \in (W^{k,r}(\Omega))^2$, $1 \leq r$, $1 \leq k \leq 2$ et $q \in H^1(\Omega) \cap Q$ ont ait

$$\|v - I_h v\|_{i,r} \leq ch^{k-i} |v|_{k,r}, \quad \|q - J_h q\|_i \leq ch |q|_1 \quad i = 0, 1. \quad (3.28)$$

Nous avons de plus que l'opérateur d'interpolation I_h satisfait

$$\|I_h v\|_1 \leq c \|v\|_1. \quad (3.29)$$

Comme nous considérons une triangulation \mathcal{T}_h quasi-uniform, l'inégalité inverse (2.18) est aussi vérifiée. De plus, comme nous l'avons dit pour le cas stationnaire, les espaces V_h et Q_h ainsi choisis ne satisfont pas la condition inf-sup

$$\sup_{v_h \in V_h, v_h \neq 0} \frac{d(v_h, q_h)}{\|v_h\|_1} \geq \beta \|q_h\|_0, \quad (3.30)$$

où $\beta > 0$ est indépendant de h .

Nous allons donc à nouveau utiliser la même technique que dans le cas stationnaire qui consiste à rajouter le résidu de deux intégrales de Gauss locales sur chaque $K \in \mathcal{T}_h$ pour que la condition inf-sup soit satisfaite. Nous aboutissons ainsi à la même forme bilinéaire $\mathcal{B}((\cdot, \cdot); (\cdot, \cdot))$ définie par (2.23) et satisfaisant les mêmes inégalités (2.24) et (2.25).

Nous obtenons ainsi la formulation variationnelle discrète de (3.19) : Trouver $(u_h, p_h) \in (V_h, Q_h)$ tels que

$$(u_{ht}, v_h) + \mathcal{B}((u_h, p_h), (v_h, q_h)) = (f, v_h) \quad \forall (v_h, q_h) \in (V_h, Q_h). \quad (3.31)$$

Grâce au lemme (3.6) et grâce au fait que $\mathcal{B}((\cdot, \cdot); (\cdot, \cdot))$ satisfait (2.24) et (2.25), nous pouvons conclure que le système (3.31) a une unique solution. De plus, l'estimation d'erreur (optimale pour u) pour la solution des éléments finis (u_h, p_h) est vérifiée [10], $0 < t \leq T$,

$$\|u - u_h\|_0 + h(\|u - u_h\|_1 + \|p - p_h\|_0) \leq c\tau^{-1/2}(t)h^2(\|u\|_2 + \|p\|_1). \quad (3.32)$$

3.2.2 Méthode des volumes éléments finis

Analysons maintenant le cas où nous utilisons la méthode des volumes éléments finis introduite dans le cas du problème de Stokes stationnaire. Cette fois-ci, nous aboutissons à la méthode des volumes éléments finis stabilisée suivante : Trouver $(\tilde{u}_h, \tilde{p}_h) \in (V_h, Q_h)$ tels que

$$\begin{aligned} (\tilde{u}_{ht}, v_h) + A(\tilde{u}_h, \Gamma_h v_h) + D(\Gamma_h v_h, \tilde{p}_h) \\ + d(\tilde{u}_h, q_h) + G(\tilde{p}_h, q_h) = (f, \Gamma_h v_h) \quad \forall (v_h, q_h) \in (V_h, Q_h). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Il est important de remarquer que dans le premier terme de l'équation précédente, nous avons utilisé v_h à la place de $\Gamma_h v_h$. Avec ce dernier, l'analyse de convergence n'est pas encore résolue.

Des résultats détaillés concernant l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème continu (3.19) peuvent être consultés dans [3, 5, 15]. Nous définissons alors, de la même manière que dans le cas de Stokes stationnaire, la forme bilinéaire $\mathcal{C}(\cdot, \cdot)$ sur $(V_h, Q_h) \times (V_h, Q_h)$ pour la méthode des volumes éléments finis (3.33) par (2.40). Le théorème (2.5) concernant la continuité et la faible coercivité de $\mathcal{C}(\cdot, \cdot)$ est toujours vérifié, ce qui implique que le système des volumes éléments finis stabilisé (3.33) admet une unique solution $(\tilde{u}_h, \tilde{p}_h) \in (V_h, Q_h)$.

Il nous faut à nouveau définir la forme bilinéaire $\mathcal{D}(\cdot, \cdot)$ définie sur $(V, Q) \times (V, Q)$ par (2.43). Il s'agit de l'extension de $\mathcal{C}(\cdot, \cdot)$ à $(V, Q) \times (V, Q)$.

3.2.3 Estimation d'erreur

Nous voulons maintenant obtenir une estimation d'erreur pour la solution $(\tilde{u}_h, \tilde{p}_h)$ de la méthode des volumes éléments finis. Pour ce faire, nous définissons l'opérateur de projection $(R_h, Q_h) : (V, Q) \rightarrow (V_h, Q_h)$ par

$$\begin{aligned} \mathcal{C}((R_h(v, q), Q_h(v, q)); (v_h, q_h)) = B((v, q); (v_h, q_h)) \\ \forall (v, q) \in (V, Q), (v_h, q_h) \in (V_h, Q_h). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Celui-ci est bien défini et satisfait les propriétés suivantes [14] :

Lemme 3.7. *L'opérateur de projection (R_h, Q_h) satisfait*

$$\|v - R_h(v, q)\|_1 + \|q - Q_h(v, q)\|_0 \leq c(\|v\|_1 + \|q\|_0), \quad (3.35)$$

pour tout $(v, q) \in (V, Q)$ et

$$\begin{aligned} \|v - R_h(v, q)\|_0 + h(\|v - R_h(v, q)\|_1 + \|q - Q_h(v, q)\|_0) \\ \leq ch^2(\|v\|_2 + \|q\|_1), \end{aligned} \quad (3.36)$$

pour tout $(v, q) \in (D(A), H^1(\Omega) \cap Q)$.

Comme $u_0 \in D(A)$, nous pouvons définir $p_0 \in H^1(\Omega) \cap Q$ [6]. Posons aussi que $(u_{0h}, p_{0h}) = (R_h(u_0, p_0), Q_h(u_0, p_0))$.

Lemme 3.8. *Sous les mêmes hypothèses que le lemme (3.6), on peut montrer que, pour $t \in [0, T]$,*

$$\|\tilde{u}_h(t)\|_0^2 + \int_0^t (\nu \|\tilde{u}_h\|_1^2 + G(\tilde{p}_h, \tilde{p}_h)) ds \leq c, \quad (3.37)$$

$$\nu \|\tilde{u}_h(t)\|_1^2 + G(\tilde{p}_h(t), \tilde{p}_h(t)) + \int_0^t \|\tilde{u}_{ht}\|_0^2 ds \leq c, \quad (3.38)$$

$$\|u(t) - \tilde{u}_h(t)\|_0^2 + \int_0^t (\nu \|u - \tilde{u}_h\|_1^2 + G(p - \tilde{p}_h, p - \tilde{p}_h)) ds \leq ch^2. \quad (3.39)$$

Démonstration. En prenant $(v_h, q_h) = (\tilde{u}_h, \tilde{p}_h)$ dans (3.33) et en remarquant que par le lemme (2.4) nous avons que

$$D(\Gamma_h \tilde{u}_h, \tilde{p}_h) = -d(\tilde{u}_h, \tilde{p}_h)$$

et

$$A(\tilde{u}_h, \Gamma_h \tilde{u}_h) = a(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h),$$

nous obtenons, utilisant Cauchy-Schwarz, que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{u}_h(t)\|_0^2 + \nu \|\tilde{u}_h\|_1^2 + G(\tilde{p}_h, \tilde{p}_h) \leq \|f\|_0 \|\Gamma_h \tilde{u}_h\|_0.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \|\Gamma_h \tilde{u}_h\|_0 &\leq \|\tilde{u}_h - \Gamma_h \tilde{u}_h\|_0 + \|\tilde{u}_h\|_0 \\ &\stackrel{(2.29)}{\leq} ch \|\tilde{u}_h\|_1 + \|\tilde{u}_h\|_0 \end{aligned}$$

$$\stackrel{(2.18)}{\leq} c \|\tilde{u}_h\|_0.$$

Par l'inégalité de Young en prenant $\epsilon = \frac{\nu}{2}$ nous aboutissons à

$$\frac{d}{dt} \|\tilde{u}_h(t)\|_0^2 + 2\nu \|\tilde{u}_h\|_1^2 + 2G(\tilde{p}_h, \tilde{p}_h) \leq \frac{c^2}{\nu} \|f\|_0^2 + \nu \|\tilde{u}_h\|_0^2.$$

Nous intégrons maintenant l'équation précédente de 0 à t

$$\|\tilde{u}_h(t)\|_0^2 - \|\tilde{u}_h(0)\|_0^2 + \int_0^t (\nu \|\tilde{u}_h\|_1^2 + 2G(\tilde{p}_h, \tilde{p}_h)) ds \leq \frac{c^2}{\nu} \int_0^t \|f\|_0^2 ds.$$

Par l'hypothèse **(A2)** nous avons

$$\int_0^t \|f\|_0^2 ds \leq c.$$

Notons aussi que

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_h(0)\|_0 &\leq \|u_0\|_0 + \|u_0 - R_h(u_0, p_0)\|_0 \\ &\leq \|u_0\|_0 + \|u_0 - R_h(u_0, p_0)\|_1 \\ &\stackrel{(3.35)}{\leq} \|u_0\|_0 + c(\|u_0\|_1 + \|p_0\|_0) \\ &\leq c, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue par le lemme (3.6). Nous avons ainsi montré l'inégalité (3.37).

Montrons maintenant l'inégalité (3.39). Premièrement, nous soustrayons (3.33) à (3.25) en prenant $(v, q) = (v_h, q_h)$ et obtenons

$$(u_t - \tilde{u}_{ht}, v_h) + \mathcal{D}((u - \tilde{u}_h, p - \tilde{p}_h), (v_h, q_h)) = (f, v_h - \Gamma_h v_h) + G(p, q_h)$$

pour tout $(v_h, q_h) \in (X_h, M_h)$. Remplaçons dans l'équation précédente (v_h, q_h) par $(e_h, \eta_h) = (R_h(u, p) - \tilde{u}_h, Q_h(u, p) - \tilde{p}_h)$ et posons $E = u - R_h(u, p)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} &(u_t - \tilde{u}_{ht}, u - \tilde{u}_h) + \mathcal{C}((e_h, \eta_h), (e_h, \eta_h)) \\ &+ \mathcal{D}((u - R_h(u, p), p - Q_h(u, p)), (e_h, \eta_h)) - G(p, Q_h(u, p) - \tilde{p}_h) \\ &= (f, e_h - \Gamma_h e_h) + (u_t - \tilde{u}_{ht}, E). \end{aligned}$$

Mais, par la définition de R_h et Q_h , nous avons que

$$\mathcal{D}((u - R_h(u, p), p - Q_h(u, p)), (e_h, \eta_h)) - G(p, Q_h(u, p) - \tilde{p}_h)$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{D}((u, p), (e_h, \eta_h)) - B((u, p), (e_h, \eta_h)) - G(p, Q_h(u, p) - \tilde{p}_h) \\
&= \mathcal{D}((u, p), (e_h, \eta_h)) - \mathcal{B}((u, p), (e_h, \eta_h)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \|u - \tilde{u}_h\|_0^2 + 2C((e_h, \eta_h), (e_h, \eta_h)) = 2(f, e_h - \Gamma_h e_h) + 2(u_t - \tilde{u}_{ht}, E).$$

En faisant les mêmes manipulations que pour montrer (3.37), nous aboutissons à

$$\frac{d}{dt} \|u - \tilde{u}_h\|_0^2 + 2\nu \|e_h\|_1^2 + 2G(\eta_h, \eta_h) = 2(f, e_h - \Gamma_h e_h) + 2(u_t - \tilde{u}_{ht}, E).$$

Or, nous avons

$$|(u_t - \tilde{u}_{ht}, E)| \leq c \|E\|_0 \|u_t - \tilde{u}_{ht}\|_0,$$

$$\begin{aligned}
|(f, e_h - \Gamma_h e_h)| &\stackrel{\text{C-S}}{\leq} \|f\|_0 \|e_h - \Gamma_h e_h\|_0 \\
&\stackrel{(2.29)}{\leq} \|f\|_0 ch \|e_h\|_1 \\
&\stackrel{\text{Young } \epsilon=\frac{1}{\nu}}{\leq} \frac{c^2}{\nu} h^2 \|f\|_0^2 + \frac{\nu}{4} \|e_h\|_1^2
\end{aligned}$$

et

$$\|E\|_0 \stackrel{(3.36)}{\leq} ch^2 (\|u\|_2 + \|p\|_1).$$

Ainsi, en choisissant judicieusement notre constante c , nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \|u - \tilde{u}_h\|_0^2 + \nu \|e_h\|_1^2 + G(\eta_h, \eta_h) \leq ch^2 (\|f\|_0^2 + \|u_t - \tilde{u}_{ht}\|_0 (\|u\|_2 + \|p\|_1)).$$

Nous allons maintenant intégrer l'équation précédente sur l'intervalle $(0, t)$

$$\begin{aligned}
&\|u(t) - \tilde{u}_h(t)\|_0^2 - \|u(0) - \tilde{u}_h(0)\|_0^2 + \int_0^t (\nu \|e_h\|_1^2 + G(\eta_h, \eta_h)) ds \\
&\leq ch^2 \int_0^t (\|f\|_0^2 + \|u_t - \tilde{u}_{ht}\|_0 (\|u\|_2 + \|p\|_1)) ds.
\end{aligned}$$

Mais nous savons par l'hypothèse **(A2)** que

$$\int_0^t \|f\|_0^2 ds < c.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et par le lemme (3.6), nous avons

$$\begin{aligned} & \int_0^t \|u_t - \tilde{u}_{ht}\|_0 (\|u\|_2 + \|p\|_1) ds \\ \leq & \left(\int_0^t \|u_t - \tilde{u}_{ht}\|_0^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_0^t \|u\|_2^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq c} \\ & + \left(\int_0^t \|u_t - \tilde{u}_{ht}\|_0^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_0^t \|p\|_1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq c} \\ \leq & c \left(\int_0^t \|u_t\|_0^2 + \|\tilde{u}_{ht}\|_0^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|u_0 - \tilde{u}_h(0)\|_0^2 &= \|u_0 - R_h(u_0, p_0)\|_0^2 \\ &\leq \|u_0 - R_h(u_0, p_0)\|_1^2 \\ &\stackrel{(3.36)}{\leq} [ch(\|u_0\|_2 + \|p_0\|_1)]^2 \\ &\leq ch^2(\|u_0\|_2^2 + \|p_0\|_1^2). \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \|u(t) - \tilde{u}_h(t)\|_0^2 + \int_0^t (\nu \|e_h\|_1^2 + G(\eta_h, \eta_h)) ds \\ \leq & ch^2 + ch^2 \left(\int_0^t \|u_t\|_0^2 + \|\tilde{u}_{ht}\|_0^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Pour obtenir exactement la forme de l'inégalité (3.39) que nous cherchons à démontrer, il nous faut encore avoir $u - \tilde{u}_h$ et $p - \tilde{p}_h$ à la place de e_h et de η_h . Or nous avons

$$\|u(t) - \tilde{u}_h(t)\|_0^2 + \int_0^t (\nu \|u - \tilde{u}_h\|_1^2 + G(p - \tilde{p}_h, p - \tilde{p}_h)) ds$$

$$\begin{aligned}
&\leq ch^2 + ch^2 \left(\int_0^t \|u_t\|_0^2 + \|\tilde{u}_{ht}\|_0^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \int_0^t (\nu \|u - R_h(u, p)\|_1^2 + G(p - Q_h(u, p), p - Q_h(u, p))) ds
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
G(a + b, a + b) &= \|(a + b) - \Pi_h(a + b)\|_0^2 \\
&\leq \|a - \Pi_h a\|_0^2 + \|b - \Pi_h b\|_0^2 \\
&\leq G(a, a) + G(b, b).
\end{aligned}$$

Remarquons de plus que, grâce au lemme (3.6),

$$\begin{aligned}
\|u - R_h(u, p)\|_1^2 &\stackrel{(3.36)}{\leq} [ch(\|u\|_2 + \|p\|_1)]^2 \\
&\leq ch^2 \underbrace{(\|u\|_2^2 + \|p\|_1^2)}_{\leq c}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons aussi borner $G(p - Q_h(u, p), p - Q_h(u, p))$ par ch^2 . En effet,

$$\begin{aligned}
G(p - Q_h(u, p), p - Q_h(u, p)) &= \|(p - Q_h(u, p)) - \Pi_h(p - Q_h(u, p))\|_0^2 \\
&\leq \|p - \Pi_h p\|_0^2 + \|Q_h(u, p) - \Pi_h Q_h(u, p)\|_0^2 \\
&\leq (ch\|p\|_1)^2 + \|Q_h(u, p) - p\|_0^2 + \|p - \Pi_h Q_h(u, p)\|_0^2 \\
&\leq ch^2\|p\|_1^2 + [ch(\|u\|_2 + \|p\|_1)]^2 + \|p - \Pi_h p\|_0^2 + \|\Pi_h(p - Q_h(u, p))\|_0^2 \\
&\leq ch^2\|p\|_1^2 + ch^2(\|u\|_2^2 + \|p\|_1^2) + ch^2\|p\|_1^2 + c\|p - Q_h(u, p)\|_0^2 \\
&\leq ch^2\|p\|_1^2 + ch^2(\|u\|_2^2 + \|p\|_1^2) + [ch(\|u\|_2 + \|p\|_1)]^2 \\
&\leq ch^2 \underbrace{(\|u\|_2^2 + \|p\|_1^2)}_{\leq c}.
\end{aligned}$$

De plus, comme $t \in (0, T)$, le lemme (3.6) nous permet d'affirmer que $\int_0^t \|u_t\|_0^2 \leq Tc$. Nous aboutissons donc à

$$\begin{aligned}
\|u(t) - \tilde{u}_h(t)\|_0^2 &+ \int_0^t (\nu \|u - \tilde{u}_h\|_1^2 + G(p - \tilde{p}_h, p - \tilde{p}_h)) ds \\
&\leq ch^2 \left\{ 1 + \left(\int_0^t \|\tilde{u}_{ht}\|_0^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.
\end{aligned}$$

Il nous reste donc à estimer $\int_0^t \|\tilde{u}_{ht}\|_0^2$. Pour ce faire, nous allons démontrer (3.38).

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\nu \|\tilde{u}_h\|_1^2 + G(\tilde{p}_h, \tilde{p}_h)) \\
= & \nu(\tilde{u}_{ht}, \tilde{u}_h) + (\tilde{p}_{ht} - \Pi_h \tilde{p}_{ht}, \tilde{p}_h - \Pi_h \tilde{p}_h) - d(\tilde{u}_{ht}, \tilde{p}_h) + d(\tilde{u}_h, \tilde{p}_{ht}) \\
& + d(\tilde{u}_{ht}, \tilde{p}_h) - d(\tilde{u}_h, \tilde{p}_{ht}) \\
= & \mathcal{C}((\tilde{u}_h, \tilde{p}_h); (\tilde{u}_{ht}, \tilde{p}_{ht})) + d(\tilde{u}_{ht}, \tilde{p}_h) - d(\tilde{u}_h, \tilde{p}_{ht}).
\end{aligned}$$

Donc nous avons que

$$\begin{aligned}
& \|\tilde{u}_{ht}\|_0^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\nu \|\tilde{u}_h\|_1^2 + G(\tilde{p}_h, \tilde{p}_h)) \\
= & (f, \Gamma_h \tilde{u}_{ht}) + d(\tilde{u}_{ht}, \tilde{p}_h) - d(\tilde{u}_h, \tilde{p}_h) + d(\tilde{u}_h, \tilde{p}_h) - d(\tilde{u}_h, \tilde{p}_{ht}) \\
= & (f, \Gamma_h \tilde{u}_{ht}) - d(\tilde{u}_h - \tilde{u}_{ht}, \tilde{p}_h) - d(\tilde{u}_h, \tilde{p}_{ht} - \tilde{p}_h) \\
\leq & \|f\|_0 \|\Gamma_h \tilde{u}_{ht}\|_0 - \beta \|\tilde{u}_h - \tilde{u}_{ht}\|_1 \|\tilde{p}_h\|_0 - \beta \|\tilde{u}_h\|_1 \|\tilde{p}_{ht} - \tilde{p}_h\|_0 \\
\leq & \|f\|_0 c \|\tilde{u}_{ht}\|_0 \\
\leq & \frac{c^2}{2} \|f\|_0^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{u}_{ht}\|_0^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\tilde{u}_{ht}\|_0^2 + \frac{d}{dt} (\nu \|\tilde{u}_h\|_1^2 + G(\tilde{p}_h, \tilde{p}_h)) \leq c \|f\|_0^2.$$

Nous intégrons maintenant cette dernière équation sur l'intervalle $(0, t)$

$$\begin{aligned}
& \nu \|\tilde{u}_h(t)\|_1^2 + G(\tilde{p}_h(t), \tilde{p}_h(t)) + \int_0^t \|\tilde{u}_{ht}\|_0^2 ds \\
\leq & \nu \|\tilde{u}_h(0)\|_1^2 + G(\tilde{p}_h(0), \tilde{p}_h(0)) + c \int_0^t \|f\|_0^2 ds.
\end{aligned}$$

Or, nous avons

$$\begin{aligned}
& \nu \|\tilde{u}_h(0)\|_1^2 + G(\tilde{p}_h(0), \tilde{p}_h(0)) \\
= & \nu \|\tilde{u}_h(0)\|_1^2 + \|\tilde{p}_h(0) - \Pi_h \tilde{p}_h(0)\|_0^2 \\
\leq & \nu \|\tilde{u}_{0h}\|_1^2 + \|\tilde{p}_{0h}\|_0^2 + \underbrace{\|\Pi_h \tilde{p}_{0h}\|_0^2}_{\stackrel{(2.20)}{\leq} c \|\tilde{p}_{0h}\|_0^2} \\
\leq & c (\|\tilde{u}_{0h}\|_1^2 + \|\tilde{p}_{0h}\|_0^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c(\|u_0\|_1^2 + \|u_0 - R_h(u_0, p_0)\|_1^2 + \|p_0\|_0^2 + \|p_0 - Q_h(u_0, p_0)\|_0^2) \\
&\stackrel{(3.35)}{\leq} c(\|u_0\|_1^2 + \|p_0\|_0^2 + c(\|u_0\|_1^2 + \|p_0\|_0^2)) \\
&\leq c(\|u_0\|_1^2 + \|p_0\|_0^2) \\
&\leq c(\|u_0\|_2^2 + \|p_0\|_1^2) \\
&\leq c,
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du lemme (3.6). Il s'en suit de plus grâce à la condition **(A2)** que

$$c \int_0^t \|f\|_0^2 ds \leq c.$$

Ainsi, avons montré l'inégalité (3.38) :

$$\nu \|\tilde{u}_h(t)\|_1^2 + G(\tilde{p}_h(t), \tilde{p}_h(t)) + \int_0^t \|\tilde{u}_{ht}\|_0^2 ds \leq c.$$

Il en découle l'inégalité (3.39) car nous savons maintenant grâce à (3.38) que

$$\int_0^t \|\tilde{u}_{ht}\|_0^2 ds \leq c.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned}
\|u(t) - \tilde{u}_h(t)\|_0^2 &+ \int_0^t (\nu \|u - \tilde{u}_h\|_1^2 + G(p - \tilde{p}_h, p - \tilde{p}_h)) ds \\
&\leq ch^2 \left\{ 1 + \left(\int_0^t \|\tilde{u}_{ht}\|_0^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\leq ch^2.
\end{aligned}$$

□

Nous allons seulement énoncer les deux lemmes suivants, car leur démonstration suit les mêmes arguments que celle du lemme précédent.

Lemme 3.9. *[14] Sous les mêmes hypothèses que le lemme (3.6), on peut montrer que, pour $t \in [0, T]$,*

$$\|\tilde{u}_{ht}(t)\|_0^2 + \int_0^t (\nu \|\tilde{u}_{ht}\|_1^2 + G(\tilde{p}_{ht}, \tilde{p}_{ht})) ds \leq c, \quad (3.40)$$

$$\tau(t)(\nu \|\tilde{u}_{ht}(t)\|_1^2 + G(\tilde{p}_{ht}(t), \tilde{p}_{ht}(t))) + \int_0^t \tau(s) \|\tilde{u}_{htt}\|_0^2 ds \leq c, \quad (3.41)$$

$$\tau(t) \|u_t(t) - \tilde{u}_{ht}(t)\|_0^2 + \int_0^t \tau(s)(\nu \|e_{ht}\|_1^2 + G(\eta_{ht}, \eta_{ht})) ds \leq ch^2. \quad (3.42)$$

Lemme 3.10. [14] *Sous les mêmes hypothèses que le lemme (3.6), on peut montrer que, pour $t \in [0, T]$,*

$$\nu \tau(t) \|u(t) - \tilde{u}_h(t)\|_1^2 + \int_0^t \tau(s) \|u_t - \tilde{u}_{ht}\|_0^2 ds \leq ch^2. \quad (3.43)$$

Le lemme suivant donne pour sa part une borne à l'erreur $\|p(t) - \tilde{p}_h(t)\|$.

Lemme 3.11. *Sous les mêmes hypothèses que le lemme (3.6), on peut montrer que, pour $t \in [0, T]$,*

$$\tau^{1/2}(t) \|p(t) - \tilde{p}_h(t)\|_0 \leq ch. \quad (3.44)$$

Démonstration. Par la condition (2.42), nous déduisons

$$\begin{aligned} & (\|e_h\|_1 + \|\eta_h\|_0) \\ \leq & \frac{1}{\beta} \sup_{(v_h, q_h) \in (V_h, Q_h)} \frac{|\mathcal{C}((e_h, \eta_h); (v_h, q_h))|}{\|v_h\|_1 + \|q_h\|_0} \\ = & \frac{1}{\beta} \sup_{(v_h, q_h) \in (V_h, Q_h)} \left[\frac{|\mathcal{D}((u - \tilde{u}_h, p - \tilde{p}_h); (v_h, q_h))|}{\|v_h\|_1 + \|q_h\|_0} \right. \\ & \left. + \frac{|\mathcal{D}((R_h(u, p) - u, Q_h(u, p) - p); (v_h, q_h))|}{\|v_h\|_1 + \|q_h\|_0} \right] \\ = & \frac{1}{\beta} \sup_{(v_h, q_h) \in (V_h, Q_h)} \left[\frac{|(f, v_h - \Gamma_h v_h) + G(p, q_h) - (u_t - \tilde{u}_{ht}, v_h)|}{\|v_h\|_1 + \|q_h\|_0} \right. \\ & \left. + \frac{|\mathcal{D}((R_h(u, p) - u, Q_h(u, p) - p); (v_h, q_h))|}{\|v_h\|_1 + \|q_h\|_0} \right] \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} & G(p, q_h) + \mathcal{D}((R_h(u, p) - u, Q_h(u, p) - p); (v_h, q_h)) \\ = & -\mathcal{D}((u, p); (v_h, q_h)) + \mathcal{C}((R_h(u, p), Q_h(u, p)); (v_h, q_h)) + G(p, q_h) \\ \stackrel{(3.34)}{=} & -\mathcal{D}((u, p); (v_h, q_h)) + B((u, p); (v_h, q_h)) + G(p, q_h) \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{def } \mathcal{D}}{=} 0.$$

Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} & (||e_h||_1 + ||\eta_h||_0) \\ \leq & \frac{1}{\beta} \sup_{(v_h, q_h) \in (V_h, Q_h)} \frac{|(f, v_h - \Gamma_h v_h) - (u_t - \tilde{u}_{ht}, v_h)|}{||v_h||_1 + ||q_h||_0} \\ & \leq ch ||v_h||_1 \\ \leq & \frac{1}{\beta} \sup_{(v_h, q_h) \in (V_h, Q_h)} \frac{||f||_0 \overbrace{||v_h - \Gamma_h v_h||_0}^{\leq ch ||v_h||_1} + ||u_t - \tilde{u}_{ht}||_0 ||v_h||_0}{||v_h||_1 + ||q_h||_0} \\ \leq & \frac{1}{\beta} (ch ||f||_0 + ||u_t - \tilde{u}_{ht}||_0) \end{aligned}$$

$$\text{car } \sup_{(v_h, q_h) \in (V_h, Q_h)} \frac{||v_h||_1}{||v_h||_1 + ||q_h||_0} \leq 1.$$

Il s'en suit

$$\begin{aligned} \tau^{1/2}(t) ||\eta_h||_0 & \leq \underbrace{ch \tau^{1/2}(t) ||f||_0}_{\leq c} + \underbrace{c \tau^{1/2}(t) ||u_t - \tilde{u}_{ht}||_0}_{\leq [ch^2]^{1/2}} \\ & \leq ch, \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité découle du fait que $f \in L^2(0, T; Y)$ et du lemme (3.9). Nous avons finalement, grâce à (3.36) et au lemme (3.6),

$$\begin{aligned} \tau^{1/2}(t) ||p(t) - \tilde{p}_h(t)||_0 & \leq \tau^{1/2}(t) ||\eta_h(t)||_0^2 + \tau^{1/2}(t) ||p(t) - Q_h(u(t), p(t))||_0 \\ & \leq ch. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.12. *Sous les mêmes hypothèses que le lemme (3.6), on peut montrer que, pour $t \in [0, T]$,*

$$\tau^{1/2}(t) ||u(t) - \tilde{u}_h(t)||_1 + \tau^{1/2}(t) ||p(t) - \tilde{p}_h(t)||_0 \leq ch. \quad (3.45)$$

Démonstration. Découle directement des lemmes (3.10) et (3.11). □

4 Conclusion

Dans ce projet, nous avons obtenu les estimations d'erreur suivantes concernant la solution $(\tilde{u}_h, \tilde{p}_h)$ de la méthode des volumes éléments finis stabilisée.

Dans le cas du problème de Stokes stationnaire, nous aboutissons à une estimation d'erreur optimale dans la norme H^1 pour la vitesse et dans la norme L^2 pour la pression : si $f \in (L^2(\Omega))^2$, alors

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_1 + \|p - \tilde{p}_h\|_0 \leq kh(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 + \|\mathbf{f}\|_0).$$

où la constante k est indépendante de h . Nous avons encore obtenu l'estimation d'erreur dans la norme L^2 optimale pour la vitesse suivante : si $f \in (H^1(\Omega))^2$

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_0 \leq kh^2(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1 + \|\mathbf{f}\|_1).$$

En ce qui concerne le problème de Stokes non-stationnaire, nous obtenons l'estimation d'erreur d'ordre optimale dans la norme H^1 pour la vitesse et dans la norme L^2 pour la pression suivante : Si les conditions **(A1)** et **(A2)** sont vérifiées, alors, pour $t \in [0, T]$,

$$\tau^{1/2}(t)\|u(t) - \tilde{u}_h(t)\|_1 + \tau^{1/2}(t)\|p(t) - \tilde{p}_h(t)\|_0 \leq ch.$$

Comme en général, il n'est pas possible de résoudre une EDP de façon analytique, il faut procéder à une approximation u_h de la solution exacte du problème u . Il est donc important de pouvoir ensuite évaluer l'erreur $u_h - u$ commise par l'approximation, afin de savoir si cette solution approximée converge vers la solution exacte du problème et à quelle vitesse. Grâce aux estimations obtenues dans ce rapport, nous avons maintenant une idée de l'ordre de convergence de la méthode des volumes éléments finis utilisée dans ce rapport pour approximer la solution du problème de Stokes.

Références

- [1] R. E. BANK, D.J. ROSE, *Some error estimates for the box method*, SIAM J. Numer. Anal. **24** (1987), 777-787.
- [2] B. BREFORT, J. M. GHIDAGLIA, R. TEMAM, *Attractor for the penalty Navier-Stokes equations*, SIAM J. Numer. Anal. **19** (1988), 1-21.
- [3] Z. CHEN, *Finite Element Methods and Their Applications*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2005.
- [4] L.P. FRANCA, R. STENBERG, *Error analysis of some Galerkin least squares methods for the elasticity equations*, SIAM J. Numer. Anal. **28** (1991), 1680-1697.
- [5] V. GIRAULT, P. A. RAVIART, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations : Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1986.
- [6] J. G. HEYWOOD, R. RANNACHER, *Finite element approximation of nonstationary Navier-Stokes problem I : Regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization*, SIAM J. Numer. Anal. **19** (1982), 275-311.
- [7] J. LI, Y. HE, *A stabilized finite element method based on two local Gauss integrations for the Stokes equations*, J. Comp. Appl. Math. **214** (2008), 58-65.
- [8] R. LI, *Generalized difference methods for a nonlinear Dirichlet problem*, SIAM J. Numer. Anal. **24** (1987), 77-88.
- [9] J. LI, Z. CHEN, *A new stabilized finite volume method for the stationary Stokes equations*, Advances in Computational Mathematics **30** (2009), 141-152.
- [10] J. LI, Y. HE, Z. CHEN, *A New Stabilized Finite Element Method for the Transient Navier-Stokes Equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg **197** (2007), 22-35.
- [11] J.-L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*, 1, Dunod, Paris, 1968.
- [12] A. QUARTERONI, A. VALLI, *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [13] R. RUIZ BAIER, *Analysis of a conforming stabilized finite volume element method for the Stokes problem*, en préparation.
- [14] L. SHEN, J. LI, Z. CHEN, *Analysis of a stabilized finite volume method for the transient Stokes equations*, International Journal of numer. anal. and modeling, vol. 6, number 3 (2009), 505-519.
- [15] R. TEMAM, *Navier-Stokes Equations*, North-Holland : Amsterdam, New-York, 1984.
- [16] H. WU, R. LI *Error estimates for finite volume element methods for general second-order elliptic problems*, Numer. Meth. Partial Diff. Equ. **19** (2003), 693-708.

- [17] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, 4th ed., Springer-Verlag, Berlin, 1974.