SEMINARIS D'ÀLGEBRA UNIVERSAL

RAÚL RUIZ MORA

RESUM. Memòria dels seminaris d'àlgebra universal com a part de les pràctiques curriculars.

ÍNDEX

1. Reticles, subreticles i reticles distributius: 5/10/20

És interessant que quan se considera una estructura algebraica qualsevol, les subestructures de la mateixa tenen forma de reticle. Aquest fet se manté quan generalitzem per a àlgebres homogènies i per aquest motiu, estudiem en primer lloc els reticles donant les dues definicions diferents i provant que són equivalents. Seguidament estudiem els reticles distributius i modulars i els caracteritzem per els teoremes de Dedekind i Birkhoff. Finalment estudiem els reticles complets i algebraics i els caracteritzem per mitjà dels operadors clausura.

Definició 1.1. Un reticle és una trupla $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ on L és un conjunt no buit, i $\vee$, $\wedge$ son dues aplicacions binàries sobre L tals que

1. $\forall x, y \in L\ (x \vee y = y \vee x,\ x \wedge y = y \wedge x)$ (commutativitat);
2. $\forall x, y, z \in L\ (x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z)$ (associativitat);
3. $\forall x \in L\ (x \vee x = x,\ x \wedge x = x)$ (idempotència);
4. $\forall x, y \in L\ (x \vee (x \wedge y) = x,\ x \wedge (x \vee y) = x)$ (lleis d'absorció);

La definició que acabem de donar és una definició purament algebraica, donada per un conjunt amb dues aplicacions. Mostrem a continuació que podem donar una definició alternativa de reticle donada per un conjunt amb un ordre parcial (una relació binària). Provem immediatament després que aquestes dues són completament equivalents i que tenim una dualitat en el concepte de reticle.

Definició 1.2. Una *relació binària* sobre un conjunt A és un subconjunt d'A^2. Si (x, y) pertanyen a la relació binaria r, $(x, y) \in r$ escriurem arb. Un *ordre parcial* en un conjunt A és una relació binària $\leq$ que compleix les següents condicions:

1. $\forall a \in A\ (a \leq a)$ (Reflexivitat);

2. $\forall a, b \in A\ ((a \leq b \wedge b \leq a) \implies a = b)$ (Antisimetria)
3. $\forall a, b, c \in A\ ((a \leq b \wedge b \leq c) \implies a \leq c)$ (Transitivitat)

Un conjunt parcialment ordenat és un parell $\mathbf{A} = (A, \leq)$ on A és un conjunt i $\leq$ un ordre parcial en A.

Definició 1.3. Siga $\mathbf{A} = (A, \leq)$ un conjunt parcialment ordenat i $X \in \mathrm{Sub}(A)$. Un element $a \in A$ és una *fita superior* d'X si, per a cada $x \in X$, $x \leq a$. El concepte de *fita inferior* se defineix dualment. El *suprem* d'un subconjunt $X \in \mathrm{Sub}(A)$ és el mínim del conjunt parcialment ordenat format pel conjunt de totes les fites superiors i l'ordre parcial induït per $\leq$ restringint-lo a dit conjunt; quedarà denotat per $\sup X$. El concepte d'*ínfim* se defineix dualment i se denota per $\inf X$.

Nota. El suprem i ínfim de qualsevol subconjunt, en cas d'existir, són únics.

Nota. Notem que podem associar a cada conjunt parcialment ordenat un *diagrama de Hasse*. Suposem que el lector coneix aquests diagrames, sap com es construeixen i com es lligen.

Definició 1.4. Un reticle és un conjunt parcialment ordenat $\mathbf{L} = (L, \leq)$ on L és un conjunt no buit i $\leq$ compleix que per a $a, b \in L$ qualssevol existeixen els elements $\sup\{a, b\}$ i $\inf\{a, b\}$

Teorema 1.5. *Si $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ és un reticle (segons la definició 1.1), aleshores, la relació binària en L definida com $a \leq b$ si, i només si, $a = a \wedge b$ és un ordre parcial i $\mathbf{L}' = (L, \leq)$ és un reticle (segons la definició 1.4). D'altra banda, si $\mathbf{L}' = (L, \leq)$ és un reticle (segons la definició 1.4), aleshores, $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ amb les aplicacions definides com $a \vee b := \sup\{a, b\}$ i $a \wedge b := \inf\{a, b\}$ és un reticle (segons la definició 1.1). A més, aquestes dues transformacions són inverses una de l'altra. Conseqüentment, d'ara endavant, un reticle serà una quàdrupla $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ on $(L, \vee, \wedge)$ verifica la definició 1.1 i $(L, \leq)$ verifica la definició 1.4.*

Demostració. Comprovem la primera afirmació. Certament, la relació definida és un ordre parcial ja que com $a \wedge a = a$, aleshores $a \leq a$. A més, si

$a \leq b$ i $b \leq a$, aleshores $a = a \wedge b = b \wedge a = b$. Finalment, si $a \leq b$ i $b \leq c$ aleshores, $a = a \wedge b = a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge c$, la qual cosa implica que $a \leq c$.

Llavors, comprovem que donats a i b qualssevol en L, aleshores, $\sup\{a, b\} = a \vee b$. La prova per a l'ínfim és anàloga. En primer lloc, és fita superior ja que $a \wedge (a \vee b) = a$ i $b \wedge (a \vee b) = b$ i així, $a \leq a \vee b$ i $b \leq a \vee b$.

Per a completar esta part de la prova suposem $u \in L$ que compleix que $a \leq u$ i $b \leq u$. Hem de comprovar que $a \vee b \leq u$. Com tenim que $a = a \wedge u$ i $b = b \wedge u$, aleshores, $a \vee u = (a \wedge u) \vee u = u$ i igualment $b \vee u = (b \wedge u) \vee u = u$. Amb això podem calcular $(a \vee b) \vee u = a \vee (b \vee u) = a \vee u = u$ i dona que $(a \vee b) \wedge u = (a \vee b) \wedge \Big[(a \vee b) \vee u\Big] = a \vee b$.

La comprovació de la segona afirmació és rutinària amb les condicions de les definicions 1.2 i 1.1.

La relació d'invertibilitat entre les transformacions és evident a partir de les deficions donades. $\square$

Usarem en gran part la definició algebraica i les dues operacions $\vee$ i $\wedge$. Encara i així, serà necessari en certs moments convenient fer ús de l'ordre parcial i de la equivalència donada.

Definició 1.6. Un *isomorfisme de reticles* entre $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ i $\mathbf{L}' = (L', \vee', \wedge', \leq')$ és una aplicació bijectiva $\alpha : L \xrightarrow{\sim} L'$ tal que per a $a, b \in L$ qualssevol $\alpha(a \vee b) = \alpha(a) \vee' \alpha(b)$ i també $\alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge' \alpha(b)$. Dos reticle són *isomorfos* si existeix un isomorfisme de reticles entre ells. En eixe cas escrivim $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}'$. A més, direm que una aplicació $\alpha : L \longrightarrow L'$ *preserva l'ordre* (resp. *reflecteix l'ordre*) si per a $a, b \in L$ qualssevol tals que $a \leq b$ (resp. $\alpha(a) \leq' \alpha(b)$), aleshores, tenim que $\alpha(a) \leq' \alpha(b)$ (resp. $a \leq b$). Notem que la definició d'aplicació que preserva i reflecteix l'ordre pot donar-se exactament igual en conjunts parcialment ordenats. Ací la donem entre reticles perquè són l'objecte d'estudi.

Nota. Sembla extrany definir el concepte d'isomorfisme de reticles sense definir abans el concepte d'homomorfisme de reticles. Més endavant al document veurem que els reticles no són si no un exemple d'àlgebres les quals estudiarem més en profunditat. Per tant, el concepte d'homomorfisme de reticles existeix però, per ara, donarem només les definicions i resultats estrictament necessaris per a aquestta part del document. Així, més endavant podrem utilitzar dits resultats i diversos conceptes que podríem presentar ara quedaran com cassos particulars dels més generals.

Teorema 1.7. *Siguen* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ *i* $\mathbf{L}' = (L', \vee', \wedge', \leq')$ *dos reticles, aleshores, els reticles són isomorfos si, i només si, existeix una aplicació bijectiva entre* L *i* L' *que conserva i reflecteix l'ordre.*

$$\mathbf{L} \cong \mathbf{L}' \leftrightarrow \exists\, \alpha : L \xrightarrow{\sim} L' \,\forall a, b \in L (a \leq b \iff \alpha(a) \leq' \alpha(b))$$

Demostració. La necessitat de la condició se segueix de que si els reticles són isomorfos, llavors existeix $\alpha : L \xrightarrow{\sim} L'$ isomorfisme de reticles i així $a \leq b$ si, i només si, $a = a \wedge b$ la qual cosa passa si, i només si, $\alpha(a) = \alpha(a \wedge b) = \alpha(a) \wedge' \alpha(b)$ condició equivalent a $\alpha(a) \leq \alpha(b)$.

Provem ara que la condició és suficient. Siga $\alpha : L \xrightarrow{\sim} L'$ que preserva i reflecteix l'ordre. Per a $a, b \in L$ sempre es compleix $a \leq a \vee b$ i $b \leq a \vee b$, com α preserva l'ordre tenim $\alpha(a) \leq' \alpha(a \vee b)$ i $\alpha(b) \leq' \alpha(a \vee b)$. Per tant, $\alpha(a) \vee' \alpha(b) \leq' \alpha(a \vee b)$.

Demostrem ara l'altra desigualtat. Suposem, en general, que $\alpha(a) \vee' \alpha(b) \leq' u$ aleshores és necessari que $\alpha(a) \leq' u, \alpha(b) \leq' u$. Com α reflecteix l'ordre i és bijectiva tenim que, $a \leq \alpha^{-1}(u)$ i $b \leq \alpha^{-1}(u)$ però per definició de suprem $a \vee b \leq \alpha^{-1}(u)$. Ara bé, com α preserva l'ordre, $\alpha(a \vee b) \leq' u$. Escollim ara com a u $\alpha(a) \vee' \alpha(b)$. Ha quedat provat que $\alpha(a \vee b) \leq' \alpha(a) \vee' \alpha(b)$ i per tant, $\alpha(a \vee b) = \alpha(a) \vee' \alpha(b)$. La prova per a $\wedge$ és anàloga. Queda així provat el resultat. □

Definició 1.8. Donat un reticle $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ un subreticle és una trupla $\mathbf{L}' = (L', \vee, \wedge)$ que compleix que L' és una part no buida d'L i per a a i b en L' qualssevol, tant $a \vee b$ com $a \wedge b$ estan en L'. Notem que per extensió també tenim en L' un ordre parcial amb l'existència de suprem i ínfim qualssevol per a una parella d'elements qualsevol. Així, denotarem també el subreticle com $\mathbf{L}' = (L', \vee, \wedge, \leq)$ i, en general, escriurem $\mathbf{L}' \leq \mathbf{L}$. Direm que un reticle $\mathbf{L}'$ se pot embeure en un reticle $\mathbf{L}$ si existeix un subreticle d'$\mathbf{L}$ isomorf a $\mathbf{L}'$.

Nota. Notem que si L' és un subconjunt d'L no buit aleshores hereta un ordre parcial restringint l'ordre del reticle original. En eixe cas, pot ocórrer que amb aquest ordre el subconjunt siga un reticle independent del reticle original, però açò no fa que siga un subreticle del reticle inicial. Veiem un exemple.

Exemple 1.0.1 . Considerem el reticle de la figura 1a. La comprovació de que és un reticle es senzilla. Considerem ara el subconjunt $L' = \{a, c, d, e\}$ amb l'ordre parcial heretat (figura 1b). Comprovem que $\mathbf{L}' = (L', \vee\restriction_{L'}, \wedge\restriction_{L'}, \leq\restriction_{L'})$ és un reticle (com a estructura independent d'$\mathbf{L}$) però no és un subreticle d'$\mathbf{L}$ ja que $c \vee d = b \notin L'$.

(a) Reticle $\mathbf{L}$

(b) Reticle $\mathbf{L}'$

Figura 1: Exemples de subreticles

Donades fins ara les definicions més bàsiques dels reticles l'objectiu ara és definir i caracteritzar quatre tipus de reticles. Primerament els anomenats reticles distributius i modulars i després reticles complets i algebraics.

Definició 1.9. Un reticle $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge)$ és *distributiu* si compleix les condicions:

1. $\forall x, y, z \in L\ (x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$ ($\wedge$ és distributiva respecte de $\vee$);
2. $\forall x, y, z \in L\ (x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z))$ ($\vee$ es distributiva respecte de $\wedge$);

Proposició 1.10. *Siga* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ *un reticle. Aleshores*

1. *Una condició suficient i necessària per a que* $\vee$ *siga distributiva respecte de* $\wedge$ *és que* $\wedge$ *siga distributiva respecte de* $\vee$*. Conseqüentment només s'ha*

de verificar una de les dues lleis de distribució per a que un reticle siga distributiu.

2. $\forall x, y, z \in L \ ((x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z))$. *Conseqüentment per a que* $\wedge$ *siga distributiva respecte de* $\vee$, *una condició suficient i necessària és que* $\forall x, y, z \in L \ (x \wedge (y \vee z) \leq (x \wedge y) \vee (x \wedge z))$.

3. $\forall x, y, z \in L \ (x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z))$. *Conseqüentment per a que* $\vee$ *siga distributiva respecte de* $\wedge$, *una condició suficient i necessària és que* $(\forall x, y, z \in L) \ (x \vee y) \wedge (x \vee z) \leq x \vee (y \wedge z)$.

Demostració. 1. $(\implies)$

$$\begin{aligned}
\underline{x} \vee (y \wedge z) &\overset{4.a}{=} (\underline{x \vee (x \wedge z)}) \vee (y \wedge z) \\
&\overset{2.a}{=} x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z)) \\
&\overset{1.b}{=} x \vee ((z \wedge x) \vee (z \wedge y)) \\
&= x \vee (z \wedge (x \vee y)) \\
&\overset{1.b}{=} \underline{x} \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
&\overset{4.b}{=} (\underline{x \wedge (x \vee y)}) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
&\overset{1.b}{=} ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\
&= (x \vee y) \wedge (x \vee z)
\end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$ Anàlogament

2. - $(x \wedge y) \leq x \wedge (y \vee z)$ ja que $x \wedge y \leq x$ i $x \wedge y \leq y \leq y \vee z$
   - $(x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$ anàlogament

3. Anàleg a 2.

□

2. Reticles modulars i reticles complets: 14/10/20

Definició 2.1. Un reticle $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ és modular si se compleix la llei modular. Aquesta es:

$$M : x \leq y \to x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$$

Proposició 2.2. *Siga* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ *un reticle. Aleshores,*

1. *La llei universal* $\forall x, y, z \in L\ ((x \wedge y) \vee (y \wedge z) = y \wedge ((x \wedge y) \vee z))$ *és una condició suficient i necessària per a que se complisca la llei modular.*
2. $\forall x, y, z \in L\ (x \leq y \to x \vee (y \wedge z) \leq y \wedge (x \vee z))$. *Conseqüentment, per a que se verifique la llei modular és necessari i suficient comprovar* $\forall x, y, z \in L\ (x \leq y \to y \wedge (x \vee z)) \leq x \vee (y \wedge z)$.

Proposició 2.3. *Si* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ *és un reticle distributiu, aleshores, és un reticle modular.*

Demostració. Usant la distribuitat de $\vee$ respecte de $\wedge$ i que si $x \leq y$ se té que $x \vee y = y$ $\square$

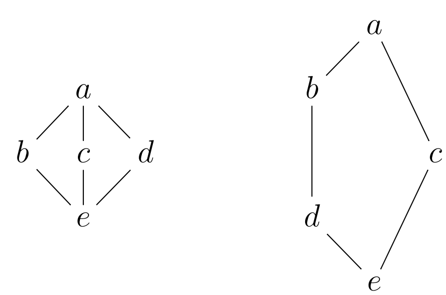


Figura 2: M_5 esquerra i N_5 dreta

Exemple 2.0.1 Exemples de reticles no disrtibutius i no modulars. Considerem els reticles de la figura 2, comprovem que M_5 no és distributiu i que N_5 no és modular.

Per a M_5 calculem $a \vee (b \wedge c) \stackrel{?}{=} (a \vee b) \wedge (a \vee c)$. Per un costat $a \vee (b \wedge c) = a \vee e = e$ però, per altra banda, $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = d \wedge d = d$ aixi, tenim que, $a \vee (b \wedge c) = e \neq d = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ la qual cosa demostra que M_5 no és distributiu.

Per a N_5 notem que $a \leq b$ per tant, comprovem si $a \vee (b \wedge c) \stackrel{?}{=} b \wedge (a \vee c)$. Per una banda, $a \vee (b \wedge c) = a \vee e = a$ però, per altra banda $b \wedge (a \vee c) = b \wedge d = b$ llavors, tenim que, $a \vee (b \wedge c) = a \neq b = b \wedge (a \vee c)$ la qual cosa demostra que N_5 és un reticle no modular i, per la proposició anterior, és reticle no distributiu.

Veiem ara que aquestos dos reticles concrets caracteritzen tots el reticles distributius i modulars.

Teorema 2.4. *Una condició necessària i suficient per a que un reticle* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ *no siga un reticle modular és que* N_5 *se puga embeure en* $\mathbf{L}$.

Teorema 2.5. *Una condició necessària i suficient per a que un reticle* $\mathbf{L} = (L, \vee, \wedge, \leq)$ *no siga un reticle distributiu és que* M_5 *o* N_5 *se puga embeure en* $\mathbf{L}$.

Demostració. Les implicacions suficients són evidents per la definició d'embeure un reticle i del fet que M_5 no siga distributiu i que N_5 no siga distributiu ni modular. Les demostracions necessàries són similars entre si. Així, només presentem la demostració de que si el reticle és no modular necessàriament se pot embeure N_5.

Sabem que existeixen $a, b, c \in L$ tal que $a \leq b$ però $a \vee (b \wedge c) \leq b \wedge (a \vee c)$ amb $a \vee (b \wedge c) \neq b \wedge (a \vee c)$. Anomenem $a_1 := a \vee (b \wedge c)$ i $b_1 := b \wedge (a \vee c)$. Aleshores podem calcular

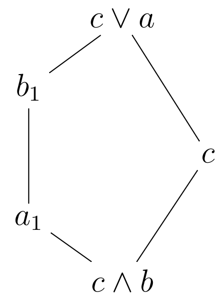
$$c \wedge b_1 = c \wedge [b \wedge (a \vee c)] = [c \wedge (c \vee a)] \wedge b = c \wedge b$$
$$c \vee a_1 = c \vee [a \vee (b \wedge c)] = [c \vee (c \wedge b)] \vee a = c \vee a$$

Per tant, $c \wedge b \leq a_1 < b_1$ si traiem suprem amb c, $c \wedge b \leq c \wedge a_1 < c \wedge b_1 = c \wedge b \implies c \wedge b = c \wedge a_1 = c \wedge b_1$. D'altra banda, $c \vee a \geq b_1 > a_1 \implies c \vee a \geq c \vee b_1 > c \vee a_1 = c \vee a \implies c \vee a = c \vee b_1 = c \vee a_1$.

Per a terminar, fem la següent afirmació: $a \leq b$ i tenim $a \lesseqgtr c, b \lesseqgtr c$ aleshores se compleix la llei modular. Se pot fer una prova per cassos molt sencilla. Fem només un cas.

Si $a \leq b, a \leq c \implies a \leq b \wedge c$, per tant, $a \vee (b \wedge c) = b \wedge c$ i d'altra banda, $b \wedge (a \vee c) = b \wedge c$, i tenim la igualtat. Els altres cassos son anàlegs.

Així hem comprovat que un subreticle de L és:



$\square$

Definició 2.6. Un conjunt parcialment ordenat (p.o.) P és complet si $\forall A \subseteq P, \exists \sup A =: \bigvee A$ i $\exists \inf A =: \bigwedge A$. Un reticle que com a conjunt p.o. és complet és un reticle complet.

Teorema 2.7. *Siga P un conjunt p.o. tal que $\forall A \subseteq P, \exists \bigvee A$ o $\exists \bigwedge A$. Aleshores P és un reticle complet.*

Demostració. Suposem que $\forall A \subseteq P, \exists \bigwedge A$. Aleshores denotem que A^s el conjunt de les fites superiors que evidentment $A^s \subseteq L \implies \exists \bigwedge A^s = \bigvee A$ $\square$

Com en la definició de reticle complet exigim que existisca el suprem i ínfim de *qualsevol* subconjunt, en particular existeixen $\bigvee \varnothing$ i $\bigwedge \varnothing$. Anem a calcular-los.

$\bigvee \varnothing = \inf\{l \in L : \forall x \in \varnothing, x \leq l\} = \inf\{l \in L\} \implies 0 := \bigvee \varnothing$ és l'element mínim d'L. Igualment, $\bigwedge \varnothing = \sup\{l \in L : \forall x \in \varnothing, x \geq l\} = \sup\{l \in L\} \implies 1 := \bigwedge \varnothing$ és l'element màxim d'L.

Exemple 2.0.2. 1. $(\mathbb{R}^*, \leq)$ on $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ la recta real estesa és un reticle complet.

2. $(\mathcal{T}, \subseteq)$ és un reticle complet.
3. $(\mathrm{Sub}(A), \subseteq)$ és un reticle complet.
4. $(]-1,1[\cup\{\pm 2\}, \leq)$. Aquest és un subreticle del reticle 1. que és complet. Però notem que $\bigvee]-1,1[= 1$ en el reticle complet $(\mathbb{R}^*, \leq)$ però $\bigvee]-1,1[= 2$ en el reticle complet $(]-1,1[\cup\{\pm 2\}, \leq)$.

Definició 2.8. Siga L un reticle i L' un subreticle. Direm que L' és un subreticle complet si $\forall A \subseteq L'$ els element $\bigvee A$ i $\bigwedge A$, com hem definit en L, estan en L'

Estudiem ara que el conjunt de les relacions d'equivalència en un conjunt és un reticle complet.

Recordem primer les relacions d'equivalència.

Definició 2.9. Una relació binaria r en un conjunt A és una relació d'equivalència si

1. $\forall a \in A, ara$
2. $\forall a, b \in A, arb \implies bra$
3. $\forall a, b, c \in A, arb, brc \implies arc$

La menor relació d'equivalència possible és $\Delta_A := \{(a, a) : a \in A\}$ i la major relació d'equivalència és $nabla_A := \{(a, b) : a, b \in A\}$. Denotarem el conjunt de totes les relacions d'equivalència per $\mathrm{Eqv}(A)$.

Teorema 2.10. *El conjunt Eqv(A) amb l'ordre parcial $\subseteq$ és un reticle complet.*

Demostració. Provem en primer lloc que és un reticle. Aquesta part de la demostració no farà falta però ens servirà per a definir el suprem entre dos relacions d'equivalència.

Siguen $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Eqv}(A)$, aleshores, comprovem que $\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2$.

1. $\theta_1 \cap \theta_2 \in \mathrm{Eqv}(A)$.
   $\forall a \in A,\ a\theta_1 a, a\theta_2 a \implies \forall a \in A,\ a\theta_1 \cap \theta_2 a$.
   $a\theta_1 \cap \theta_2 b \implies a\theta_1 b,\ a\theta_2 b \implies b\theta_1 a,\ b\theta_2 a \implies b\theta_1 \cap \theta_2 a$
   $a\theta_1 \cap \theta_2 b,\ b\theta_1 \cap \theta_2 c \implies i = 1, 2,\ a\theta_i b, b\theta_i c \implies i = 1, 2,\ a\theta_i c \implies a\theta_1 \cap \theta_2 c$.
2. Suposem $\theta_3 \subseteq \theta_1$ i $\theta_3 \subseteq \theta_2$. Siguen $a, b \in A : a\theta_3 b \implies a\theta_1 b$ i $a\theta_2 b \implies a\theta_1 \cap \theta_2 b \implies \theta_3 \subseteq \theta_1 \cap \theta_2$.

Qui és $\theta_1 \vee \theta_2$?. Estem temptats de dir que és $\theta_1 \cup \theta_2$ però aquesta no és una relació d'equivalència. Definim a continuació qui és $\theta_1 \vee \theta_2$.

(Introduïm la notació $n \in \mathbb{N}, n := \{0, 1, \dots, n-1\}$) Direm que $a\theta_1 \vee \theta_2 b$ o $(a, b) \in \theta_1 \vee \theta_2$ si $a = b$ o si $\exists n \in \mathbb{N}$ i una seqüència $e_0, e_1, \dots, e_{n-1} = (e_i)_{i\in n}$ que compleix:

1. $e_0 = a$
2. $e_{n-1} = b$
3. $\forall j \in n-1, (e_j, e_{j-1}) \in \theta_1 \cup \theta_2$

Així,

1. $\theta_1 \vee \theta_2 \in \mathrm{Eqv}(A)$
   $\forall a \in A, a\theta_1 \vee \theta_2 a$ per definició
   $a\theta_1 \vee \theta_2 b \implies \exists (e_j)_{j\in n}$ amb $a = e_0, e_1, , \dots, , e_{n-1} = b$ amb $\forall j \in n - 1, (e_j, e_{j+1}) \in \theta_1 \cup \theta_2 \implies \forall j \in n-1, (e_j, e_{j+1}) \in \theta_i \implies \forall j \in n - 1, (e_{j+1}, e_j) \in \theta_i \implies \forall j \in n-1, (e_{j+1}, e_j) \in \theta_1 \cup \theta_2$. Per tant, agafant la seqüència inversa podem veure que $b\theta_1 \vee \theta_2 a$.
   $a\theta_1 \vee \theta_2 b$, $b\theta_1 \vee \theta_2 c \implies \exists (e_j)_{j\in n}$ amb $a = e_0, e_1, , \dots, , e_{n-1} = b$ amb $\forall j \in n-1, (e_j, e_{j+1}) \in \theta_1 \cup \theta_2$ i $\exists (f_j)_{j\in m}$ amb $b = f_0, f_1, , \dots, , f_{m-1} = c$ amb $\forall j \in m-1, (f_j, f_{j+1}) \in \theta_1 \cup \theta_2$. Si ara considerem la seqüència $a = e_0, e_1, , \dots, , e_{n-1} = b = f_0, f_1, , \dots, , f_{m-1} = c$ tenim que $a\theta_1 \vee \theta_2 c$.
2. Suposem $\theta_3 : \theta_1 \subseteq \theta_3$ i $\theta_2 \subseteq \theta_3$. Volem demostrar que $\theta_1 \vee \theta_2 \subseteq \theta_3$. Siguen $a, b \in A : a\theta_1 \vee \theta_2 b$, aleshores, si $a = b \implies a\theta_3 b$. En altra cas, $\exists (e_j)_{j\in n} : a = e_0, e_1, , \dots, , e_{n-1} = b \implies \forall j \in n-1 (e_j e_{j+1}) \in \theta_3 \implies$ (per la transitivitat) que $e_0\theta_3 e_{n-1} \equiv a\theta_3 b$.

Ja hem provat que és un reticle, ara hem de provar que és complet:

Ho fem amb el teorema anterior. Veiem primer que $\bigwedge \varnothing = nabla_A$ és la major de totes les relacions d'equivalència. I, daltra banda, si tenim $\{\theta_i\}_{i\in I} \subseteq \mathrm{Eqv}(A) \implies \bigwedge_{i\in I}\{\theta_i\} = \bigcap_{i\in I}\{\theta_i\}$. Per tant, és un reticle complet. $\square$

3. Reticles algebraics, exemples i operadors clausura: 19/10/20

Definició 3.1. Siga $(L, \vee, \wedge, \leq)$ un reticle.

- Direm que $a \in L$ és compacte si: $\exists A \subseteq L : a \leq \bigvee A \implies \exists B \subseteq_f A : a \leq \bigvee B$[1]
- L és compactament generat si $\forall a \in L, a = \bigvee_{i \in I} x_i : \forall i \in I, x_i$ és compacte.
- Direm que $(L, \vee, \wedge, \leq)$ és algebraic si és complet i compactament generat.

Exemple 3.0.1 Reticles algebraics. 1. $(\mathrm{Sub}(A), \subseteq)$ és un reticle algebraic.

- Veiem que és complet:
  - $\varnothing$ és l'element mínim $(\forall X \in \mathrm{Sub}(A), \varnothing \subseteq X)$.
  - $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathrm{Sub}(A) \implies \bigvee_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathrm{Sub}(A)$.
- Veiem que es compactament generat:
  - $\forall x \in A, \{x\}$ és compacte ja que si $\exists \{A_i\}_{i \in I} : \{x\} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i = \bigvee_{i \in I} A_i \implies \exists i_0 \in I : x \in A_{i_0} \implies \{x\} \subseteq A_{i_0} = \bigvee A_{i_0}$.
  - $\forall X \in \mathrm{Sub}(A), X = \bigcup_{x \in X} x = \bigvee_{x \in X} x$

2. $(L, \wedge, \vee, \leq)$ finit $\implies$ $(L, \wedge, \vee, \leq)$ algebraic. Si L és finit $\implies$ $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ amb $n \in \mathbb{N}$.
   - Veiem que és complet. Si tenim $A \subseteq L \implies A = \{l_1, l_2, \dots l_m\} \implies \bigvee A = l_1 \vee (l_2 \vee \dots))$ i $\bigwedge A = l_1 \wedge (l_2 \wedge \dots))$
   - Veiem que es compactament generat. Si $\exists A \subseteq L : a \leq \bigvee A$ aleshores com L és finit A ja és finit i tots els elements són compactes $\implies$ L és compactament generat.

[1]Usem la notació $B \subseteq_f A$ per a denotar B és un subconjunt finit d'A

3. $([0,1], \leq)$ és complet però no algebraic. Complet és trivial pels axiomes dels números reals. Per a veure que no és algebraic comprovem: $\forall x \in]0,1] \implies x \leq \bigvee]0,x[$ però $not \exists A \subseteq_f]0,x[: x \leq \bigvee A$. Per tant, el únic element compacte és el 0 i no és un reticle algebraic.

Definició 3.2. Donat un conjunt A, una aplicació $C : \text{Sub}(A) \longrightarrow \text{Sub}(A)$ és un operador de clausura en A si $\forall X, Y \subseteq A$

- $X \subseteq C(X)$ (és extensiu)
- $C^2(X) = C(X)$ (és idempotent)
- $X \subseteq Y \implies C(X) \subseteq C(Y)$ (és isòtona)

Direm que $X \subseteq A$ és tancat si $C(X) = X$. El conjunt parcialment ordenat dels tancats amb la inclusió com a ordre es denota per L_C.

Teorema 3.3. *Si C és un operador de clausura en $A \implies L_C$ és un reticle complet amb*

$$\bigwedge_{i \in I} C(A_i) = \bigcap_{i \in I} C(A_i) \qquad i \qquad \bigvee_{i \in I} C(A_i) = C\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$$

Demostració. Siga $\{A_i\}_{i \in I}$ una família de subconjunts tancats d'A per a C. Com

$$\begin{aligned} \forall i \in I, \bigcap_{i \in I} A_i &\subseteq A_i \\ \forall i \in I, C\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &\subseteq C\left(A_i\right) = A_i \\ C\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &\subseteq \bigcap_{i \in I} A_i \\ C\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) &= \bigcap_{i \in I} A_i \qquad (\because X \subseteq C(X)) \end{aligned} \tag{1}$$

Per tant, el ínfim de qualsevol família de subconjunts es troba en L_C. Ara bé, si notem que $A \subseteq C(A) \subseteq A \implies A \in L_C$ tenim que és un reticle algebraic (a falta de provar que aquest és el ínfim).

Per a provar les fórmules tenim:

$$\bigwedge_{i\in I} C(A_i) = \bigcap_{i\in I} C(A_i)$$

$$\bigvee_{i\in I} C(A_i) = \bigcup_{i\in I} C(A_i) = C\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$$

En $(\mathrm{Sub}(A), \subseteq)$. Ara bé, hem provat que $\bigcap_{i\in I} C(A_i) \in L_C \implies \bigwedge_{i\in I} C(A_i) = \bigcap_{i\in I} C(A_i)$ en $(L_C, \subseteq)$. D'altra banda com $C\left(C\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\right) = C\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \implies C\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \in L_C$ i $\bigvee_{i\in I} C(A_i) = C\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$ en $(L_C, \subseteq)$. $\square$

Vegem ara que el recíproc del teorema anterior també és cert. És a dir, si tenim un reticle complet existeix un operador de clausura sota un conjunt relacionat amb el reticle.

Teorema 3.4. $(L, \wedge, \vee, \leq, \bigwedge, \bigvee, 1, 0)$ *reticle complet* $\implies \exists C$ *operador de clausura* : $L_C \cong L$.

Demostració. Siga $X \subseteq L$, llavors definim $C(X) := \{a \in L : a \leq \bigvee X\} = \downarrow X$. Comprovem que és un operador de clausura.

1. si $x \in X \implies x \leq \bigvee X \implies x \in C(X)$. És a dir, $X \subseteq C(X)$.
2. 1. implica que $\bigvee X \leq \bigvee C(X)$. Però notem que $\forall a \in C(X), a \leq \bigvee X \implies \bigvee C(X) \leq \bigvee X \implies X = \bigvee C(X)$. Així, $C^2(X) = \{a \in L : a \leq \bigvee C(X)\} = \{a \in L : a \leq \bigvee X\} = C(X)$.
3. Si $X \subseteq Y \implies \bigvee X \leq \bigvee Y \implies C(X) = \{a \in L : a \leq \bigvee X\} \subseteq \{a \in L : a \leq \bigvee Y\} = C(Y)$.

Finalment, veiem que l'aplicació $f : L \to L_C, a \mapsto f(a) := \{b \in L : b \leq a\}$ és un isomorfisme entre L i L_C.

Primer comprovem que $f(a) \in L_C$ ja que $a = \max f(a) = \bigvee f(a) \implies C(f(a)) = \{b \in L : b \leq \bigvee f(a)\} = \{b \in L : b \leq a\} = f(a)$. Així, $\forall a \in L, f(a)$ és tancat.

Ara veiem que f preserva i reflecteix l'ordre.

- $x \leq y \implies f(x) = \{a \in L : a \leq x\} \subseteq \{a \in L : a \leq y\} = f(y)$
- $x \in f(x) = \{a \in L : a \leq x\} \subseteq \{a \in L : a \leq y\} = f(y) \implies x \in f(y) \implies x \leq y$

Per tant, f és un isomorfisme i tenim $L \cong L_C$. □

Aleshores, tenim dues formes de veure els reticles complets. Com els hem vist fins ara o, per altra banda, com operadors de clausura. La pregunta ara és, si existeix aquesta equivalència per a reticles complets, podríem tribar una altra per a reticles algebraics que són més restrictius que reticles complets? La resposta és afirmativa i ho comprovem ara.

Definició 3.5. Un operador de clausura és algebraic si $\forall X \in \mathrm{Sub}(A), C(X) = \cup\{C(Y) : Y \subseteq_f X\}$

Teorema 3.6. *Si C és un operador de clausura algebraic en un conjunt $A \implies L_C$ és un reticle algebraic i els elements compactes són els subconjunts finits.*

Demostració. Notem que ja sabem que $(L_C, \subseteq)$ és un reticle complet, per tant, només queda comprovar que és compactament generat. Però per la definició de operador de clausura algebraics només queda comprovar que els conjunts compactes són exactament els conjunts finits.

Suposem $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ i $C(X) \subseteq \bigvee_{i \in I} C(A_i) = C\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$. Aleshores, per definició de operador de clausura algebraic, $\forall a_j \in X, \exists X_j \subseteq_f \bigcup_{i \in I} A_i : a_j \in C(X_j)$. Aleshores, $\exists A_{j1}, A_{j2}, \ldots, A_{jn_j} : X_j \subseteq A_{j1} \cup A_{j2} \cup \cdots \cup A_{jn_j}$ Així

$$a_j \in C(A_{j1} \cup A_{j2} \cup \cdots \cup A_{jn_j})$$
$$X \subseteq \bigcup_{1 \leq j \leq k} C(A_{j1} \cup A_{j2} \cup \cdots \cup A_{jn_j})$$
$$X \subseteq C\left(\bigcup_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 1 \leq i \leq n_j}} A_{ji}\right) = \bigvee_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 1 \leq i \leq n_j}} C(A_{ji})$$

Suposem ara que $C(Y)$ no és igual a $C(X)$ per a qualsevol X finit i demostrem que $C(Y)$ no és compacte. Com $C(Y) \subseteq \bigcup\{C(X) : X \subseteq_f Y\}$, podem veure que $C(Y)$ no pot ser compacte. $\square$

Finalment comprovem el recíproc per a aquest teorema i terminem amb la secció de reticles.

Definició 3.7. Si C és un operador de clausura per a A i Y és un conjunt tancat, direm que $X \subseteq A$ és un generador per a Y si $C(X) = Y$. Direm que Y és finitament generat si té un generador finit. El conjunt X és un generador minimal si és un generador i no existeix un subconjunt propi que el genere.

Corol·lari 3.8. *Siga C un operador de clausura algebraic, aleshores els subconjunts finitament generats d'A són exactament els elements compactes d'L_C.*

Teorema 3.9. *Siga $(L, \wedge, \vee, \leq, \bigwedge, \bigvee, 1, 0)$ un reticle algebraic $\implies \exists C$ operador de clausura algebraic : $L_C \cong L$.*

Demostració. Definim $A := \{a \in L : a \text{ és compacte}\}$. Aleshores, per a $X \subseteq A$ definim $C(X) := \{a \in A : a \leq \bigvee X\} = \downarrow X$. Ja hem provat que és un operador de clausura en A. Provem ara que és algebraic.

Siga $X \subseteq A$ la inclusió $C(X) \supseteq \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq_f X\}$ és trivial. Comprovem la inclusió contraria. Siga $a \in C(X) \implies a \in A, a \leq \bigvee X \implies \exists Y \subseteq_f X : a \leq \bigvee Y \implies a \in \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq_f X\}$. Per tant, és un operador de clausura algebraic.

Comprovem ara que L i L_C són isomorfs. Definim la funció: $f : L \to L_C, x \in L \mapsto f(x) := C(\{x\}) = \downarrow x = \{a \in A : a \leq x\}$. En primer lloc notem que està ben definida ja que: $f(x) = C(C(\{x\})) = C(\{x\}) \implies C(\{x\}) \in L_C$. Comprovem ara que f preserva i reflecteix l'ordre i tindrem provat el teorema.

Suposem $x \leq y \implies f(x) = \{a \in A : a \leq x\} \subseteq \{a \in A : a \leq y\} = f(y)$.

Suposem ara que $f(x) \subseteq f(y)$ i volem provar que $x \leq y$. Notem que el raonament que hem fet abans era $x \in f(x) \subseteq f(y) \implies x \leq y$ però no podem fer-ho ara, ja que si $xnotinA \implies xnotinf(x)$. Però utilitzem que el reticle és algebraic. Aleshores, $\exists\{x_i\}_{i\in I} \subseteq A : x = \bigvee_{i\in I} x_i \implies \forall i \in I, x_i \in f(x) \subseteq f(y) \implies \forall i \in I, x_i \leq y \implies x = \bigvee_{i\in I} x_i \leq y$. I tenim provat el teorema. □

4. Σ-àlgebres, Σ-isomorfismes i subàlgebres: 26/10/20

D'ací en davant considerem que per a qualsevol A conjunt, $A^0 := 1 = \{\varnothing\}$ i per a $n \in N, A^n := A \times A \overset{n)}{\times} \cdots \times A$. A més, recordem la notació $n \in \mathbb{N}, n := \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Recordem finalment que per a A, B dos conjunts, $\mathrm{Hom}(A, B) := \{f : A \to B\}$. Ara sí, definim un àlgebra universal.

Definició 4.1. Una signatura d'àlgebres es un conjunt Σ de *símbols de funcions* per al qual $\forall \sigma \in \Sigma\ (\exists\, \mathrm{ar}(\sigma) \in \mathbb{N})$. Per a $\sigma \in \Sigma$, $\mathrm{ar}(\sigma)$ s'anomena la *aritat* de σ i σ s'anomena un n-ari símbol de funció. Així podem denotar $\Sigma_n := \{\sigma \in \Sigma : \mathrm{ar}(\sigma) = n\}$. Si una operació té aritat 2 direm que és una operació binària, si té aritat 1, unària i si te aritat 0 (és una constant), nonària.

D'ara endavant suposarem al document que Σ és un signatura arbitrària però fixa des d'aquest moment.

Definició 4.2. Siga Σ una signatura d'àlgebres. Així un Σ-àlgebra $\mathbf{A}$ és un parell ordenat (A, F) tal que

- $A \neq \varnothing$
- $F : \Sigma \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(A^n, A)\ : \forall \sigma \in \Sigma\ \left(F(\sigma) := \sigma^{\mathbf{A}} \in \mathrm{Hom}(A^{\mathrm{ar}(\sigma)}, A)\right)$

Anomenem $\sigma^{\mathbf{A}}$ la *interpretació de σ com a operació* $\mathrm{ar}(\sigma)$*-ària* i A és *l'univers* de l'àlgebra. Si no hi ha problemes d'ambigüitat usarem σ en comptes de $\sigma^{\mathbf{A}}$. Si $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ un conjunt finit, aleshores escriurem $\mathbf{A} = (A, \sigma_1 \ldots, \sigma_n)$ amb el conveni $\mathrm{ar}(\sigma_1) \geq \mathrm{ar}\,\sigma_2) \geq \cdots \geq \mathrm{ar}(\sigma_n)$. Un àlgebra $\mathbf{A}$ és *unària* si totes les seues operacions són unàries i *mono-unària* si només té una aplicació unària. Un àlgebra $\mathbf{A}$ és finita si $|A|$ és finit i trivial si $|A| = 1$.

Un fet curiós que hem de remarcar és que les àlgebres més estudiades no tenen operacions d'araitat més gran que 2.

Escrivim ara exemples d'àlgebres més o menys conegudes.

Exemple 4.0.1 Semigrups, monoides, grups i grups abelians. Siga la Σ-àlgebra $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ amb una operació binària, una unària i una nonària on tenim les següents identitats.

- És un semigrup si compleix: $\forall a, b, c \in G \ (a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c)$
- És un monoide si a més tenim: $\forall a \in G \, (a \cdot 1 = \cdot a = a)$
- És un grup si a més: $\forall a \in G \, (a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1)$
- És un grup abelià si a més: $\forall a, b \in G \, (a \cdot b = b \cdot a)$

Notem que aquesta definició no és exactament la mateixa que es fa habitualment de grup. Mentre que en la definició habitual se determina una operació y se li exigixen que existisquen certs elements per a un element fixat (que després se demostra que aquests són únics), en aquesta definició se asumeix la unicitat de l'invers i el neutre i s'entenen com a operacions sobre el conjunt. Aquesta manera de definir-lo té una raó i se vora més endavant.

Exemple 4.0.2 Anells. Un anell és un àlgebra $(R, +, \cdot, -, 0)$ on $+$ i $\cdot$ són operacions binàries, $-$ és una operació unària i 0 una operació nonària, on se satisfan les següents condicions

- $(R, +, -, 0)$ és un grup abelià.
- $(R, \cdot)$ és un semigrup.
- $\forall a, b, c \in R \, (a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ i $((a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c))$

Un anell amb identitat és un àlgebra $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ on se satisfan les condicions anteriors però $(R, \cdot, 1)$ és un monoide.

Notem que podem pensar també en els espais vectorials sobre un cos. Això si, hem de notar que una de les condicions que demanàvem era poder multiplicar escalars per vectors. És a dir, que existeix una aplicació $\cdot$:

$\mathbb{K} \times V \to V$ que satisfà certes identitats. Notem que en aquest cas aquesta operació no està definida en una potència de V així, amb la definició que hem donat no seria un àlgebra. Les àlgebres que hem definit són les àlgebres homogènies i un espai vectorial és un àlgebra heterogènia.

Encara amb això, podem entendre-los com a un àlgebra heterogènia si fem “a lo brutoçom en el exemple següent.

Exemple 4.0.3 Mòduls sobre un anell. Siga R un anell, un R-mòdul es un àlgebra $(M, +, -0, (f_r)_{r\in R})$ on $+$ és binària, $-$ és unària i 0 és una operació nul · lària i se satisfà

- $(M, +, -, 0)$ és un grup abelià.
- $\forall r \in R, \forall a, b \in M\ (f_r(a+b) = f_r(a) + f_r(b))$
- $\forall r, s \in R, \forall a \in M\ (f_{r+s}(a) = f_r(a) + f_s(a))$
- $\forall r, s \in R, \forall a \in M\ (f_{rs}(a) = f_r(f_s(a)))$

Exemple 4.0.4 Semireticles. Un semireticle es un semigrup $(S, \cdot)$ que satisfà la llei commutativa i la llei d'idempotència.

Exemple 4.0.5 Àlgebres booleanes. Un àlgebra booleana és un àlgebra $(B, \vee, \wedge,', 0, 1)$ amb dos operacions binàries, una unària, i dos n · làries on se satisfà:

- $(B, \vee, \wedge)$ és un reticle distributiu.
- $\forall a \in B\ (a \wedge 0 = 0, a \vee 1 = 1)$
- $\forall a \in B\ (a \wedge a' = 0, a \vee a' = 1)$

Exemple 4.0.6 Àlgebres de Heyting. Un àlgebra $(H, \vee, \wedge, \to, 0, 1)$ amb tres operacions binàries i dos nul · làries és un àlgebra de Keyting si satisfà

- $(H, \vee, \wedge)$ és un reticle distributiu
- $\forall a \in H\ (a \wedge 0 = 0, a \vee 1 = 1)$
- $\forall a \in H\ (a \to a = 1)$
- $\forall a, b \in H\ ((a \to b) \wedge b = b, a \wedge (a \to b) = a \wedge b)$

- $\forall a, b, c \in H\,(a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c), (a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c))$

És curiós notar un detall important. En la definició d'àlgebra només demanem un conjunt no buit amb certes operacions definides per Σ, però mai demanem identitats o igualtats com en tots els exemples anteriors. És a dir, en els exemples anteriors, no només estem donant exemples d'àlgebres si no que a més estem donant exemples més restrictius que el que demanem a la definició. Aquestes identitats tindran la seua explicació en el teorema de Birkhoff de les varietats. Encara que queda molt lluny, és necessari notar que aquesta diferència se fa visible desde aquest moment, els exemples més coneguts i estudiats d'àlgebres són precisament els definits per identitats, que no el demanem a la definició.

Definició 4.3. Siguen $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dues Σ-àlgebres aleshores, direm que una funció $f : A \longrightarrow B$ és un Σ-homomorfisme si $\forall \sigma \in \Sigma, \mathrm{ar}(\sigma) = n$ tenim $f(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})) = \sigma^{\mathbf{B}}(f((a_i)_{i\in n}))$. També diem que $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ és un homomorfisme. A més direm que és un Σ-*isomorfisme* si f és bijectiva. Direm que dues àlgebres són *isomorfes* si existeix un Σ-isomorfisme entre elles i escriurem $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ o direm que $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ és un isomorfisme.

Definició 4.4. Siguen $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dues Σ-àlgebres direm que $\mathbf{B}$ és una subàlgebra de $\mathbf{A}$ si $B \subseteq A$ i $\forall \sigma \in \Sigma\,(\sigma^{\mathbf{B}} = \sigma^{\mathbf{A}} \restriction_B)$, dit d'una altra forma, $\forall\,(b_i)_{i\in n} \in B^n\,(\sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n}) \in B)$. B és el/un subunivers d'$\mathbf{A}$.

Notem que $\varnothing$ pot ser un subunivers d'un àlgebra si, i només si, Σ no té operacions nul · làries, comprovem-ho. Siga $\sigma \in \Sigma : \mathrm{ar}(\sigma) = n \geq 1$, aleshores, $\forall (a_i)_{i\in n} \in \varnothing^n = \varnothing$, $\sigma((a_i)_{i\in n}) \in \varnothing$. Per tant, $\varnothing$ és tancat per a σ i pot ser un subunivers. Però si considerem $\sigma \in \Sigma : \mathrm{ar}(\sigma) = 0$, i.e. l'operació és una constant diguem-ne a, aleshores, $\forall (a_i)_{i\in n} \in \varnothing^n = \varnothing\,(\sigma((a_i)_{i\in n})) = anotin\varnothing$. Així, $\varnothing$ és un subunivers si, i només si, Σ no té operacions nul · làries.

Definició 4.5. Siguen $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dues Σ-àlgebres. Una funció $f : A \longrightarrow B$ és una imbibició d'$\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ si f és un Σ-homomorfisme i és injectiva. També diem que $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ és una imbibició o que $\mathbf{A}$ se pot embeure en $\mathbf{B}$.

Teorema 4.6. *Si $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ és un imbibiment, aleshores, Im(f) és un subunivers de $\mathbf{B}$.*

Demostració. Siga $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un imbibiment. Aleshores $\forall \sigma \in \Sigma$ un símbol n-ari tenim $\forall (a_i)_{i\in n} \in A^n$, $\sigma^{\mathbf{B}}(f((a_i)_{i\in n})) = f(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})) \in \mathrm{Im}(f)$. Per tant, $\mathrm{Im}(f)$ és tancat per a operacions i, així, tenim un subunivers. $\square$

Definició 4.7. Si $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ és un imbibiment, $\mathbf{Im}(f)$ denota la subàlgebra de $\mathbf{B}$ amb subunivers $\mathrm{Im}(f)$.

5. Reticles algebraics i subuniversos: 5/11/20

Definició 5.1. Donada un $\Sigma-$àlgebra $\mathbf{A}$ i $X \subseteq A$ definim:

$$\mathrm{Sg}(X) := \bigcap\{B : X \subseteq B \text{ i } B \text{ és un subunivers d'}\mathbf{A}\}.$$

Diem que $\mathrm{Sg}(X)$ és "el subunivers generat per X".

Teorema 5.2. *Siga* $\mathbf{A}$ *una* $\Sigma-$*àlgebra, aleshores* Sg *és un operador de clausura algebraic sobre* A*.*

Demostració. Comprovem en primer lloc que la intersecció de subuniversos és de nou un subunivers. En efecte, si $\forall i \in I$, B_i és un subunivers d'una $\Sigma-$àlgebra $\mathbf{A}$ aleshores, $\forall\, (b^i_j)_{j\in n} \in B^n_i$, $\sigma^{\mathbf{A}}((b^i_j)_{j\in n}) \in B$. Així, si ara considerem $(b_j)_{j\in n} \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i \implies \forall i \in I$, $(b_j)_{j\in n} \subseteq B_i \implies \forall i \in I, \sigma^{\mathbf{A}}((b_j)_{j\in n}) \in B_i \implies \sigma^{\mathbf{A}}((b_j)_{j\in n}) \in \bigcap_{i\in I} B_i$.

Per tant, $\forall X \subseteq A$, $\mathrm{Sg}(X)$ és subunivers d'$\mathbf{A}$ i ara és trivial que

1. $X \subseteq \mathrm{Sg}(X)$.
2. $\mathrm{Sg}(\mathrm{Sg}(X)) = \mathrm{Sg}(X)$.
3. $X \subseteq Y \implies \mathrm{Sg}(X) \subseteq \mathrm{Sg}(Y)$.

I així, Sg és un operador de clausura on els subconjunts tancats són precisament el subuniversos d'$\mathbf{A}$.

Donem ara per a la segona part de la demostració (*algebraic*) una definició constructiva de $\mathrm{Sg}(X)$. Definim, per a qualsevol $X \subseteq A$,

$$E(X) := X \cup \{\sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n}) : \sigma \in \Sigma, (b_i)_{i\in n} \in X^n\}.$$

I aleshores definim $\forall n \in \mathbb{N}$, $E^n(X)$ de forma recurrent, i.e.,

$$E^0(X) = X$$
$$E^n(X) = E(E^{n-1}(X))$$

Provem que, $\mathrm{Sg}(X) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E^n(X)$.

En primer lloc, $E^0(X) = X \subseteq \mathrm{Sg}(X)$. I per inducció, si $E^n(X) \subseteq \mathrm{Sg}(X)$, aleshores,

$$\begin{aligned} E^{n+1}(X) &= E(E^n(X)) \\ &= \underbrace{E^n(X)}_{\subseteq \mathrm{Sg}(X)} \cup \underbrace{\{\sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in m}) : \sigma \in \Sigma, (b_i)_{i\in m} \in (E^n(X))^m\}}_{\subseteq \mathrm{Sg}(X)} \subseteq \mathrm{Sg}(X) \end{aligned}$$

Per tant, concloem que $\mathrm{Sg}(X) \supseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E^n(X)$. Per a comprovar l'altra implicació, veiem que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E^n(X)$ és un subunivers (que evidentment conté a X) i tindrem la igualtat.

Notem que $X \subseteq E(X) \subseteq E^2(X) \subseteq \dots$, i siga $\sigma \in \Sigma \implies \mathrm{ar}(\sigma) = n < \infty$. Així siga $(a_i)_{i\in n} \subseteq \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} E^m(X) \xRightarrow{\mathrm{ar}(\sigma)=n<\infty} \exists n_0 \in \mathbb{N} : (a_i)_{i\in n} \subseteq \bigcup\limits_{m=1}^{n_0} E^m(X) = E^{n_0}(X) \implies \sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n}) \in E^{n_0+1}(X) \subseteq \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} E^m(X)$ ($\because$ definició de $E^{n_0+1}(X)$). Per tant, $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} E^m(X)$ és un subunivers d'$\mathbf{A}$ i per definició de $\mathrm{Sg}(X) \implies \mathrm{Sg}(X) \subseteq \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} E^m(X) \implies \mathrm{Sg}(X) = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} E^m(X)$.

Amb aquesta "caracterització"de $\mathrm{Sg}(X)$ podem provar fàcilment que Sg és un operador de clausura algebraic. Si $a \in \mathrm{Sg}(X) \implies \exists n \in \mathbb{N} : a \in E^n(X) \overset{*}{\implies} \exists Y \subseteq_f X : a \in E^n(Y) \implies a \in \mathrm{Sg}(Y)$.

La implicació $*$ ve donada per la finitat de les aritats de les operacions de Σ. Si $a \in E^n(X) \implies \exists (a_i)_{i\in m} \in X^m$ i $(\sigma_i)_{i\in n} \in \Sigma : \sigma_n(\dots(\sigma_1((a_i)_{i\in m})))$, així agafem com a conjunt $Y = \{a_0, \dots, a_{m-1}\}$ $\square$

Corol·lari 5.3. *Si* $\mathbf{A}$ *és una* $\Sigma-$*àlgebra aleshores* $\mathbf{L_{Sg}}$*, el reticle de subuniversos d'*$\mathbf{A}$*, és un reticle algebraic.*

Definició 5.4. Donada una $\Sigma-$àlgebra $\mathbf{A}$, $\mathrm{Sub}(\mathbf{A})$ denota el conjunt de subuniversos d'$\mathbf{A}$, i $\mathbf{Sub}(\mathbf{A})$ és el corresponent reticle algebraic, el *reticle de subuniversos d'*$\mathbf{A}$. Per a $X \subseteq A$ direm que X genera $\mathbf{A}$ is $\mathrm{Sg}(X) = A$. $\mathbf{A}$ és finitament generada si té un generador finit.

Hem vist, per tant, que donada una $\Sigma-$àlgebra podem trobar un reticle algebraic associat. Veiem ara que també tenim el recíproc, és a dir, donat un reticle algebraic podem construir una $\Sigma-$àlgebra associada. Açò ens dóna una tercera visió dels reticles algebraics que els podem veure com a la primera definició que vam donar, com a operadors de clausura algebraics o ara, com a àlgebres.

Teorema 5.5 (Birkhoff i Frink)**.** *Si* $\mathbf{L}$ *és un reticle algebraic, aleshores* $\mathbf{L} \cong \mathbf{Sub}(\mathbf{A})$*, per a alguna* $\Sigma-$*àlgebra* $\mathbf{A}$*.*

Demostració. Siga C un operador de clausura algebraic sobre un conjunt A tal que $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}_C$. Aleshores, $\forall B \subseteq_f A$ i $\forall b \in C(B)$ definim la següent operació n-ària on $n = |B|$:

$$\sigma_{B,b}((a_i)_{i\in n}) = \begin{cases} b & \text{si } B = (a_i)_{i\in n} \\ a_0 & \quad \text{altre cas} \end{cases}$$

i considerem l'àlgebra resultant $\mathbf{A}$. Notem que $\forall (a_i)_{i\in n} \subseteq X, \forall B \subseteq_f X, \forall b \in C(B)$, $\sigma_{B,b}((a_i)_{i\in n}) \in C((a_i)_{i\in n})$

Volem provar ara que $\forall X \subseteq A, C(X) = \mathrm{Sg}(X)$.

Veiem en primer lloc que $\mathrm{Sg}(X) \subseteq C(X)$ per inducció. Recordem que $\mathrm{Sg}(X) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E^n(X)$. I que com C és algebraic, $C(X) = \bigcup \left\{ C(B) : B \subseteq_f X \right\}$. $E^0(X) = X \subseteq C(X)$ ja que C és extensiu per ser operador de clausura.

Suposem que $E^m(X) \subseteq C(X)$ i volem provar que $E^{m+1}(X) = E(E^m(X)) \subseteq C(X) = \bigcup \left\{ C(B) : B \subseteq_f X \right\}$. Siga $(a_i)_{i\in n} \subseteq E^m(X) \implies \sigma_{B,b}((a_i)_{i\in n}) \in C((a_i)_{i\in n}) \subseteq C(E^m(X)) \subseteq C(C(X)) = C(X)$, utilitzant que C és isòton i idempotent. Per tant, $\forall n \in \mathbb{N}$, $E^n(X) \subseteq C(X) \implies \mathrm{Sg}(X) = \bigcup\limits_{n\in N} E^n(X) \subseteq C(X)$.

Per a l'altra implicació, notem que $\forall B \subseteq_f X$

$$\begin{aligned} C(B) &= \{b : b \in C(B)\} \\ &= \{\sigma_{B,b}((a_i)_{i\in n}) : B = (a_i)_{i\in n}, b \in C(B)\} \\ &\subseteq \mathrm{Sg}(B) \\ &\subseteq \mathrm{Sg}(X). \end{aligned}$$

Açò implica que $\bigcup\left\{C(B) : B \subseteq_f X\right\} = C(X) \subseteq \mathrm{Sg}(X)$.

Concloem que $\mathrm{Sg} = C$ i que, per tant, $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}_C \cong \mathbf{Sub}(\mathbf{A})$ $\square$

Corol·lari 5.6. *Siga* $\mathbf{A}$ *una* $\Sigma-$*àlgebra i* $X \subseteq A$, *aleshores* $|\mathrm{Sg}(X)| \leq |X| + |\Sigma| + \aleph_0$

Demostració. Per inducció sobre m $\square$

6. Teorema de Tarski: 12/11/20

Definició 6.1. Siga C un operador clausura sobre A. Aleshores:

1. Denotem per C_n l'operador sobre $\mathrm{Sub}(A)$ definit com,

$$C_n \begin{cases} \mathrm{Sub}(A) & \longrightarrow & \mathrm{Sub}(A) \\ X & \longmapsto & \bigcup\left\{C(Y) \mid Y \subseteq X, |Y| \leq n\right\} \end{cases}$$

2. Direm que l'operador clausura és *n-ari* si $\forall X \subseteq A,\ C(X) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_n^k(X)$ on C_n^k denota la k-èssima composició de l'operador C_n convenint que $C_n^0 = Id_{\mathrm{Sub}(A)}$.

Nota. Per a $X \in \mathrm{Sub}(A)$, les famílies $\{C_n(X) \mid 1 \leq n\}$ i $\{C_n^m(X) \mid m \in \mathbb{N}\}$ són creixents.

Lema 6.2. *Siga* $\mathbf{A}$ *una* $\Sigma-$*àlgebra la qual no té operacions d'aritat major que n. Aleshores,* Sg *és un operador clausura n-ari.*

Demostració. Volem demostrar que $\mathrm{Sg}(X) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}(\mathrm{Sg})_n^k(X)$. Recordem la fòrmula $\mathrm{Sg}(X) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E^m(X)$.

La següent cadena de relacions és evident

$$\begin{aligned} X &= \bigcup\{x \mid x \in X\} & \\ &\subseteq \bigcup\{\mathrm{Sg}(\{x\}) \mid x \in X\} & \text{per extensivitat} \\ &= (\mathrm{Sg})_1(X) & \text{per definició} \\ &\subseteq (\mathrm{Sg})_n(X) & \{(\mathrm{Sg})_k(X) \mid k \geq 1\} \text{ és creixent} \end{aligned}$$

Ara, com $E(X) = X \cup \{\sigma(X) \mid \sigma \in \Sigma,\ a \in X^{\mathrm{ar}(\sigma)}\}$ i $\{\sigma(a) \mid \sigma \in \Sigma,\ a \in X^{\mathrm{ar}(\sigma)}\} \subseteq \bigcup_{\sigma\in\Sigma}(\mathrm{Sg})_{\mathrm{ar}(\sigma)}(X) \subseteq (\mathrm{Sg})_n(X)$ tenim que $E(X) \subseteq (\mathrm{Sg})_n(X)$. Finalment, per inducció, la inclusió que acabem de provar i isotonía de l'operador E tenim que $\forall k \geq 1, \Big[E^{k+1}(X) = E(E^k(X)) \subseteq E((\mathrm{Sg})_n^k(X)) \subseteq (\mathrm{Sg})_n((\mathrm{Sg})_n^k(X)) = (\mathrm{Sg})_n^{k+1}(X)\Big]$. Per tant, $\mathrm{Sg}(X) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} E^m(X) \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}}(\mathrm{Sg})_n^m(X) \subseteq \mathrm{Sg}(X)$ i Sg és un operador n-ari. □

Nota. La propietat dels espais vectorial de que dos bases qualssevol tenen la mateixa cardinalitat, i per tant, poder definir la seva dimensió, no és una propietat usual. Per exemple, en el grup $\mathbb{Z}_6$ els conjunts $\{1\}$ i $\{2, 3\}$ són conjunts generadors minimals però no tenen la mateixa cardinalitat. Aquesta raó motiva la següent definició

Definició 6.3. Siga C un operador clausura sobre A. Una *base irredundant* és un conjunt generador minimal. Denotem per $\mathrm{IrB}(C)$ el conjunt dels cardinals finits de bases irredundants, és a dir,

$$\mathrm{IrB}(C) := \{|B| < \aleph_0 \mid B \text{ és una base irredundant}\}$$

Teorema 6.4 (Tarski)**.** *Siga C un operador clausura n-ari sobre A amb $n \geq 2$. Siga B un conjunt generador i D una base irredundant tals que $|B| + n - 1 < |D|$. Aleshores, C té una base irredundant E tal que $|B| < |E| \leq |B| + n - 1$*

Demostració. Com D és un conjunt generador i C és un operador n-ari, $B \subseteq A = C(D) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_n^m(D)$. Com B és finit, i $\{C_n^m(D) \mid m \in \mathbb{N}\}$ és creixent, afirmem que existeix un k natural que compleix que B està contingut en $C_n^k(D)$, i.e., $\exists\, k \in \mathbb{N}\ \big(B \subseteq C_n^k(D)\big)$.

Per tant en general, X conjunt generador de $C, |X| \leq |B| \implies \exists\ k_X \in \mathbb{N}\Big(X \subseteq C_n^{k_X}(D)\Big)$. Considerem m com el mínim entre tots els k_X.

Del fet que $|D| > |B|$, D és una base irredundant i $C_n^0(D) = D$ tenim que $m > 0$. I també podem notar que, com m és el mínim $\forall Y$ conjunt generador de $C, |Y| \leq |B|, Y \subseteq C_n^m(D)$, aleshores, $Y - C_n^{m-1}(D) neq \varnothing$.

Així podem dir que existeix un p natural determinat per aquestes dues condicions

1. Existeix X conjunt generador tal que $X \subseteq C_n^m(D),\ |X - C_n^{m-1}(D)| = p > 0$ i $|X| \leq |B|$.
2. Si Y és un conjunt generador tal que $Y \subseteq C_n^m(D)$ i $|Y - C_n^{m-1}(D)| < p$ aleshores, $|Y| > |B|$.

És a dir, p és el mínim de $\{|X - C_n^{m-1}(D)| \;\Big|\; X \text{ és conjunt generador },\ X \subseteq C_n^m(D),\ |X| \leq |B|\}$.

Siga F qualsevol conjunt generador satisfent la primera de les dos condicions que hem imposat sobre p i siga $g \in F - C_n^{m-1}(D)$. Com tenim la següent cadena de implicacions:

$$g \in F \subseteq C_n^m(D) = C(C_n^{m-1}(D)) = \{C(Z)\ 1\ Z \subseteq C_n^{m-1}(D), |Z| \leq n\}$$

podem concloure que existeix G subconjunt de $C_n^{m-1}(D)$ amb cardinal menor o igual que n amb $g \in C(G)$. Ara bé, considerem el conjunt $F - \{g\} \cup G$ i notem que

$$C(F - \{g\} \cup G) \supseteq C(F) - C(\{g\}) \cup C(G) = A - C(\{g\}) \cup C(G).$$

Com $C(\{g\}) \subseteq C(G)$, concloem que $C(F - \{g\} \cup G) = A$ i $F - \{g\} \cup G$ és un conjunt generador.

Considerem E una base irredundant continguda en $F - \{g\} \cup G$. Per tant,

$$|E| \leq |F| - 1 + |G| \leq |B| + n - 1.$$

Ara bé, $E \subseteq F - \{g\} \cup G \subseteq F \cup G \subseteq C_n^m(D)$, però, $E - C_n^{m-1}(D) \subseteq (F - \{g\} \cup G) - C_n^{m-1}(D) \subseteq F - \{g\} - C_n^{m-1}(D)$ i, per tant, $|E - C_n^{m-1}(D)| < |F - C_n^{m-1}(D)| = p$.

Finalment per la propietat 2. amb a qual definim p afirmem que $|E| > |B|$ així que E és una base irredundant que compleix les propietats desitjades del teorema amb la qual cosa queda provat. $\square$

Corol·lari 6.5. *Siga C un operador clausura n-ari sobre A amb $n \geq 2$. Siguen $i, j \in \mathrm{IrB}(C)$ tals que $i < j$ i també $\{i+1, \dots, j-1\} \cap \mathrm{IrB}(C) = \varnothing$. Aleshores $j - i \leq n - 1$*

Demostració. Considerem X i Y les bases irredundants associades als cardinals i i j respectivament. Suposem per reducció a l'absurde que $|Y| - |X| > n - 1$. Com podem considerar X com a conjunt generador estem en les condicions del teorema de Tarski. Per tant, afirmem que existeix una base irredundant de C E tal que $|X| < |E| \leq |X| + n - 1 < |Y|$, però açò entra en contradicció amb el fet que $\{i+1, \dots, j-1\} \cap \mathrm{IrB}(C) = \varnothing$ i queda provat el corol·lari. $\square$

Nota. En el cas de que $n = 2$ el corol·lari anterior assegura que $\mathrm{Sg}(C)$ és un conjunt convex de $\mathbb{N}$.

Exemple 6.0.1 . Considerem $\mathbf{Z} = (\mathbb{Z}, +, -, 0)$. Notem que trivialment $\{1\}$ és un conjunt generador minimal. Per tant, 1 és un element de IrB(Sg).

Per altra banda, $\{6, 10, 15\}$ és un conjunt generador ja que $(6+10) - 15 = 1$ i és minimal donat que $\{6, 10\}$, $\{10, 15\}$ i $\{6, 15\}$ no són conjunts generador per què $(6, 10), (10, 15)$ i $(6, 15)$ són distints d'1. Per tant, 3 és un element de IrB(Sg).

Ara bé, en virtut del lema anterior, Sg és un operador clausura 2-ari (la màxima aritat és la de la suma 2). I, per tant, la diferència entre cardinals es menor o igual a 1. Així, podem assegurar que existeix una base irredundant amb 2 elements. Per exemple $\{2, 3\}$ és un conjunt generador minimal.

En general podem provar que $\mathrm{IrB}(\mathrm{Sg}) = \{1, 2, 3, \dots\}$ ja que si $p_1, p_2, \dots, p_n$ són nombres primers distints i denotem per p la multiplicació de tots ells, aleshores, $\left\{\frac{p}{p_1}, \frac{p}{p_2}, \dots, \frac{p}{p_n}\right\}$ és un conjunt generador minimal de $\mathbf{Z}$.

Exemple 6.0.2 . **Podem trobar un àlgebra tal que IrB(Sg) no és convex?**

Pel corol·lari anterior l'àlgebra que busquem necessita operacions amb aritat major o igual tres. Pel comentari fet després de la definició de $\Sigma-$àlgebra les àlgebres més estudiades no tenen operacions d'aquest tipus.

Donem l'exemple construint l'operador Sg.

$$C \begin{cases} \mathrm{Sub}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Sub}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & \begin{cases} 0 \in X & C(X) = \mathbb{R} \\ 0 notin X & \begin{cases} |X| \geq 3 & C(X) = \mathbb{R} \\ |X| \leq 2 & C(X) = X \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Veiem en primer terme que C és un operador clausura algebraic. Primer, l'operador és extensiu, i.e., $\forall X \in \mathrm{Sub}\,\mathbb{R}\Big(X \subseteq C(X)\Big)$. Si $C(X) = \mathbb{R}$ la inclusió és trivial, però, si $C(X) = X$ la inclusió també es trivial.

En segon lloc, l'oerador és idempotent. En primer lloc notem que $C(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ja que $0 \in \mathbb{R}$. D'altra banda, si $C(X) = X$, aleshores, $C(C(X)) = C(X) = X$ i l'operador és idempotent.

Ara, l'operador és isòton, i.e., $X \subseteq Y \implies C(X) \subseteq C(Y)$. En cas de que $C(Y) = \mathbb{R}$ la inclusió és trivial. Suposem que $C(Y) = Y$ això és degut a que $0 notin Y$ i $|Y| \leq 2$. Aleshores, $0 notin X$ i $|X| \leq |Y| \leq 2$, per tant, $C(X) = X$ i tenim que $C(X) = X \subseteq Y = C(Y)$.

Finalment, l'operador és algebraic, i.e., $\forall X \in \mathrm{Sub}\,\mathbb{R}\Big(C(X) = \bigcup\{C(Y) \mid Y \subseteq_f X\}\Big)$. Fem altra volta per cassos, si 0 pertany a X, aleshores $C(X)$ és igual a $C(0)$ igual a $\mathbb{R}$. Suposem ara que 0 no pertany a X. Si $|X| \leq 2$, aleshores, la igualtat és trivial. Si $|X| \geq 3$, aleshores, per a $\{a, b, c\} \subseteq X$, $C(\{a, b, c\}) = C(X)$.

Així, concloem que C és un operador clausura algebraic i pel teorema de la sessió anterior existeix un àlgebra $\mathbf{A}$ tal que $\mathrm{Sg} = C$. Veiem ara $\mathrm{IrB}(C)$. $1 \in \mathrm{IrB}(C)$ ja que $\{0\}$ és conjunt generador minimal. $\{1, 2, 3\}$ és un conjunt generador minimal, per tant, $3 \in \mathrm{IrB}(C)$. Ara be, $2 notin\,\mathrm{IrB}(C)$. Provem-ho.

$\{0, a\}$ és conjunt generador però no minimal, ja que $\{0\} \subseteq \{0, a\}$ i també és un conjunt generador, per tant, $\{0, a\}$ no és un conjunt generador minimal. D'altra banda si $\{a, b\}$ tal que 0 no pertany al conjunt, aleshores $C(\{a, b\}) =$

$\{a, b\}$ i no és un conjunt generador. Per tant, $2 notin \, \mathrm{IrB}(C)$ i no és un conjunt convex.

7. Congruències i àlgebres quocient 1: 16/11/20

Abans de parlar de congruències recordem certes definicions sobre relacions binàries i relacions d'equivalència.

Definició 7.1. Siga A un conjunt, una *relació binaria* r és un subconjut d'A^2 i escriurem $(a, b) \in r$ o arb indistintament. Si r_1 i r_2 son dos relacions binàries, aleshores, el *producte relacional* $r_1 \circ r_2$ és la relació binària definida per $(a, b) \in r_1 \circ r_2$ sii $\exists c \in A\Big(ar_1cr_2b\Big)$. Definim inductivament $r_1 \circ r_2 \cdots \circ r_n = (r_1 \circ r_2 \cdots \circ r_{n-1}) \circ r_n$. La *inversa* d'una relació binària és r és $\check{r} := \{(a, b) \in A^2 \mid (b, a) \in r\}$. La *relació diagonal* és $\Delta_A := \{(a, a) \mid a \in A\}$ i la *relació total* A^2 la denotem per $nabla_A$. Una *relació d'equivalència* és una relació binària que és reflexiva, simètrica i transitiva. Denotem per $\mathrm{Eqv}(A)$ el conjunt de totes les classes d'equivalència sobre el conjunt A i per a $\theta \in \mathrm{Eqv}(A)$, ${}^{A}\!/_{\theta} := \{[a]_\theta \mid a \in A\}$

Definició 7.2. Siga $\mathbf{A}$ una $\Sigma-$àlgebra una *congruència* θ en $\mathbf{A}$ és una relació d'equivalència que satisfà la propietat de compatibilitat. Això és,

$$\forall \sigma \in \Sigma_n, \forall (a_i)_{i\in n}, (b_i)_{i\in n} \in A^n \Big(\forall i \in n (a_i \theta b_i) \implies \sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n}) \theta \sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n})\Big).$$

Denotem per $\mathrm{Con}(\mathbf{A})$ el conjunt de totes les congruències sobre A, l'univers d'$\mathbf{A}$.

Definició 7.3. Siguen $\mathbf{A}$ un $\Sigma-$àlgebra i $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, aleshores cada símbol d'operació de Σ indueix naturalment una operació en A/θ com segueix. Per a $\sigma \in \Sigma_n$, $\Big([a_i]_\theta\Big)_{i\in n} \in (A/\theta)^n$

$$\sigma^{\mathbf{A}/\theta}\Big(\Big([a_i]_\theta\Big)_{i\in n}\Big) = \Big[\sigma^{\mathbf{A}}\Big((a_i)_{i\in n}\Big)\Big]_\theta.$$

Denotem per ${}^{\mathbf{A}}\!/_{\theta} = \Big({}^{A}\!/_{\theta}, F_{{}^{A}\!/_{\theta}}\Big)$ l'*àlgebra quocient*. Notem que ${}^{\mathbf{A}}\!/_{\theta}$ i $\mathbf{A}$ són del mateix tipus.

Nota. Hem de comprovar que l'operació està ben definida, és a dir, si $\Big([a_i]_\theta\Big)_{i\in n}, \Big([b_i]_\theta\Big)_{i\in n} \in (A/\theta)^n$ tals que $\forall i \in n\Big([a_i]_\theta = [b_i]_\theta\Big)$, aleshores,

$$\sigma^{\mathbf{A}/\theta}\Big(\Big([a_i]_\theta\Big)_{i\in n}\Big) = \sigma^{\mathbf{A}/\theta}\Big(\Big([b_i]_\theta\Big)_{i\in n}\Big).$$

Aquesta igualtat és trivial a partir de la propietat de compatibilitat $\forall i \in n\Big([a_i]_\theta = [b_i]_\theta\Big) \implies \forall i \in n\ (a_i\theta b_i) \implies \sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})\theta\sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n}) \implies \sigma^{\mathbf{A}/\theta}\Big(\Big([a_i]_\theta\Big)_{i\in n}\Big) = \Big[\sigma^{\mathbf{A}}\Big((a_i)_{i\in n}\Big)\Big]_\theta = \Big[\sigma^{\mathbf{A}}\Big((b_i)_{i\in n}\Big)\Big]_\theta = \sigma^{\mathbf{A}/\theta}\Big(\Big([b_i]_\theta\Big)_{i\in n}\Big)$. Així, les operacions definides estan ben definides.

Exemple 7.0.1 . Veiem un exemple de congruència àmpliament conegut. Considerem el grup $\mathbf{Z} = (\mathbb{Z}, +, -, 0)$ i definim la relació següent siga $n \in \mathbb{N}$, per a $a, b \in \mathbb{Z}, a \sim b \iff \exists k \in \mathbb{Z}\ (a - b = kn)$ és senzill provar que $\sim \in \mathrm{Eqv}(\mathbb{Z})$. Comprovem ara que $\sim \in \mathrm{Con}(\mathbb{Z})$.

Siguen $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^2$ tals que $a_1 \sim b_1$ i $a_2 \sim b_2$, aleshores, $\exists k_1 \in \mathbb{Z}\ (a_1 - b_1 = k_1 n)$ i $\exists k_2 \in \mathbb{Z}\ (a_2 - b_2 = k_2 n)$. Amb això, $a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = (k_1 + k_2)n \implies a_1 + a_2 \sim b_1 + b_2$.

Exemple 7.0.2 . Siga $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ un grup. Per a $\mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{G}$ definim la següent relació $\sim_{\mathbf{N}}$ com segueix, per a $g, h \in G$, $g \sim_{\mathbf{N}} h \iff gh^{-1} \in N$. Aleshores tenim la següent caracterització:

$$\sim \in \mathrm{Con}(\mathbf{G}) \iff \exists \mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{G}\ \Big(\sim = \sim_{\mathbf{N}}\Big)$$

($\implies$) Siga $\sim \in \mathrm{Con}(\mathbf{G})$, demostrem que $[1]_\sim \trianglelefteq \mathbf{G}$. Siguen $g, h \in [1]_\sim \implies g \sim 1$ i $h \sim 1$. Com $\sim$ és congruència $h^{-1} \sim 1^{-1} = 1$ i, de nou per ser congruència, $gh^{-1} \sim 1 \cdot 1 = 1 \implies gh^{-1} \in [1]_\sim \implies [1]_\sim \trianglelefteq \mathbf{G}$.

($\impliedby$) Per a $\mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{G}$ demostrem que $\sim_{\mathbf{N}} \in \mathrm{Con}(\mathbf{G})$.

1. $\forall g \in G\ \Big(gg^{-1} = 1 \in N\Big) \implies \forall g \in G\ \Big(g \sim_{\mathbf{N}} g\Big)$
2. Siguen $g, h \in G$ tals que $g \sim_{\mathbf{N}} h \implies gh^{-1} \in N \implies (gh^{-1})^{-1} = hg^{-1} \in N \implies h \sim_{\mathbf{N}} g$.
3. Siguen $g, h, n \in G$ tals que $g \sim_{\mathbf{N}} h$ i $h \sim_{\mathbf{N}} n \implies gh^{-1} \in N$ i $hn^{-1} \in N \implies (gh^{-1})(hn^{-1}) = gn^{-1} \in N \implies g \sim_{\mathbf{N}} n$.

4. Provem ara que $\sim_{\mathbf{N}}$ satisfà la propietat de compatibilitat. Siguen $g_1 \sim_{\mathbf{N}} h_1$ i $g_2 \sim_{\mathbf{N}} h_2 \implies g_1 h_1^{-1} \in N$ i $g_2 h_2^{-1} \in N \implies \exists n_1, n_2 \in N$ $(g_1 h_1^{-1} = n_1 i g_2 h_2^{-1} = n_2)$. Ara bé, com $\mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{G}, n_2 \in N \implies n_2^{h_1} = h_1^{-1} n_2 h_1 = n_3 \in N \implies n_2 h_1 = h_1 n_3$, amb això tenim: $g_1 g_2 = n_1 h_1 n_2 h_2 = n_1 n_3 h_1 h_2 \implies (g_1 g_2)(h_1 h_2)^{-1} \in N \implies g_1 g_2 \sim_{\mathbf{N}} h_1 h_2$.

També podem pensar en espais vectorials sobre un cos i subespais o anells i ideals.

Tots els exemples anteriors donen una visió pertorbada de que només amb una classe de equivalència determinen completament tota la congruència. El següent exemple mostra que no.

Exemple 7.0.3 . Considerem el reticle $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \vee, \wedge)$ i pensem en la menor relació d'equivalència que ix de relacionar el 2 amb el 3 i el 4 amb 5. Se pot provar que és una congruència però només coneixent una de les classes d'equivalència ($\{2, 3\}$ o $\{4, 5\}$) no determinem completament la congruència.

Continuarem amb les àlgebres quocient més endavant però ara ens centrem en les congruències.

Recordem que el suprem de dues relacions d'equivalència era la relació d'equivalència $\theta_1 \vee \theta_2$ definida com:

$$a\theta_1 \vee \theta_2 b \iff \exists (e_i)_{i\in n} \text{ tal que } \begin{cases} 1.\ e_0 = a \\ 2.\ e_{n-1} = b \\ 3.\ \forall j \in n-1 \left((e_j, e_{j+1}) \in \theta_1 \cup \theta_2\right) \end{cases}$$

Cosa que podem escriure com:

$$\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup (\theta_1 \circ \theta_2) \cup (\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_1) \cup \dots$$

generalitzant-lo per a suprems de més equivalències tenim

$$\bigvee_{i\in I} \theta_i = \bigcup \left\{\theta_{i_0} \circ \theta_{i_1} \circ \cdots \circ \theta_{i_k} \mid i_0, \dots, i_k \in I, k < \infty\right\}$$

Teorema 7.4. $(\mathrm{Con}(\mathbf{A}), \subseteq)$ *és un subreticle complet de* $(\mathrm{Eqv}(A), \subseteq)$.

Demostració. Provem que Con($\mathbf{A}$) és tancat per a interseccions i unions arbitràries. Es senzill veure que la intersecció de congruències és congruència. Veiem que ho és també el suprem.

Siguen $\theta_i \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ amb $i \in I$ i considerem $\sigma \in \Sigma_n$. Siguen

$$(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \bigvee_{i \in I} \theta_i,$$

aleshores,

$$\exists i_0, \ldots, i_k \in I\Big(\forall i \in I\Big((a_i, b_i) \in \theta_{i_0} \circ \cdots \circ \theta_{i_k}\Big)\Big).$$

Volem provar que $\Big(\sigma^{\mathbf{A}}\Big((a_i)_{i\in n}\Big), \sigma^{\mathbf{A}}\Big((b_i)_{i\in n}\Big)\Big) \in \bigvee_{i\in I} \theta_i$. Notem que $\exists j_1 \in \{i_0, i_1, \ldots, i_k\}\Big((a_1, b_1) \in \theta_{j_1}\Big)$ però per ser equivalència $\forall i \in 2, \ldots, n\Big((a_i, a_i) \in \theta_{j_1}\Big)$ i per ser congruència, tenim que, $\Big(\sigma^{\mathbf{A}}\Big((a_i)_{i\in n}\Big), \sigma^{\mathbf{A}}(b_1, a_2, \ldots, a_n)\Big) \in \theta_{j_1}$.

De nou $\exists j_2 \in \{i_0, i_1, \ldots, i_k\}\Big((a_2, b_2) \in \theta_{j_2}\Big)$ però per ser equivalència $\forall i \in 3, \ldots, n\Big((a_i, a_i) \in \theta_{j_1}\Big)$ i també $(b_1, b_1) \in \theta_{j_2}$ i per ser congruència, tenim que, $\Big(\sigma^{\mathbf{A}}(b_1, a_2, \ldots, a_n), \sigma^{\mathbf{A}}(b_1, b_2, a_3 \ldots, a_n)\Big) \in \theta_{j_2}$.

Inductivament trobem la cadena següent

$$\begin{aligned} \sigma^{\mathbf{A}}\Big((a_i)_{i\in n}\Big) & \theta_{j_1} \sigma^{\mathbf{A}}(b_1, a_2, \ldots, a_n) \\ & \theta_{j_2} \sigma^{\mathbf{A}}(b_1, b_2, a_3 \ldots, a_n) \\ & \vdots \\ & \theta_{j_r} \sigma^{\mathbf{A}}\Big((b_i)_{i\in n}\Big) \end{aligned}$$

la qual mostra que $\Big(\sigma^{\mathbf{A}}\Big((a_i)_{i\in n}\Big), \sigma^{\mathbf{A}}\Big((b_i)_{i\in n}\Big)\Big) \in \theta_{i_0} \circ \cdots \circ \theta_{i_k} \subseteq \bigvee_{i\in I} \theta_i$ i que, per tant, $\bigvee_{i\in I} \theta_i \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ completant la prova. □

Definició 7.5. Denotem el *reticle de congruències d'*$\mathbf{A}$ com $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$

Teorema 7.6. *Per a una* $\Sigma-$*àlgebra* $\mathbf{A}$*, existeix un operador clausura* Θ *sobre* $A \times A$ *tal que els seus conjunts tancats són, precisament, les congruències d'*$\mathbf{A}$*. Així,* $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ *és un reticle algebraic.*

Demostració. Dotem a $A \times A$ d'una estructura d'àlgebra sent Sg el corresponent operador clausura algebraic que busquem. Així haurem provat el teorema. Com els tancats per a aquest operador son les congruències tindrem que $\mathbf{Sub}(\mathbf{A} \times \mathbf{A}) = \mathbf{Con}(\mathbf{A})$ i és un reticle algebraic.

Primer, per a $\sigma \in \Sigma_n$ definim

$$\sigma^{\mathbf{A}\times\mathbf{A}}\Big(\big((a_i, b_i)\big)_{i\in n}\Big) := \Big(\sigma^{\mathbf{A}}\big((a_i)_{i\in n}\big), \sigma^{\mathbf{A}}\big((b_i)_{i\in n}\big)\Big)$$

Per a qualsevol $a \in A$ definim les operacions nul·làries (constants) (a, a) i les operacions unàries $s\big((a, b)\big) = (b, a)$.

Finalment, una operació binària t definida com

$$t\big((a, b), (c, d)\big) = \begin{cases} (a, d) & \text{si } b = c \\ (a, b) & \text{altre cas} \end{cases}$$

Amb aquestes operacions és senzill provar que B és un subunivers d'aquesta nova àlgebra sii B és una congruència en $\mathbf{A}$. Així, l'operador Θ que buscàvem és Sg i tenim provat el teorema. □

8. Congruències i àlgebres quocient 2: 23/11/20

Definició 8.1. Per a una $\Sigma-$àlgebra $\mathbf{A}$ i $a_1, \ldots, a_n \in A$ denotem per $\Theta(a_1, \ldots, a_n)$ la congruència generada per $\{(a_i, a_j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$, és a dir, la menor congruència tal que els elements $a_1, \ldots, a_n$ estan en la mateixa classe d'equivalència. Per a $X \subseteq A$, denotem $\Theta(X)$ la congruència generada per $X \times X$.

Nota. És interessant notar la relació entre l'operador Θ i l'operador Sg ja que ambdós busquen resoldre el següent problema: *Donada una $\Sigma-$àlgebra i $X \subseteq A$, com podem "generar" una $\Sigma-$subàlgebra a partir de X?.* Però difereixen en el mètode de resoldre-lo. Podem entendre que Sg ho fa per excés, en el sentit de unir tots els elements que manquen per a ser una $\Sigma-$subàlgebra i Θ ho fa per defecte, en el sentit de col·lapsar a un mateix punt tots els elements. Encara i així, Θ no retorna com a imatge l'àlgebra, sinó que dóna la menor congruència que col·lapsa els elements, i així $\mathbf{A}/\Theta(X)$ és el major quocient d'$\mathbf{A}$ que col·lapsa X.

Un exemple per a il·lustrar la idea. Considerem el grup $\mathbf{Z} = (\mathbb{Z}, +, -, 0)$ i el subconjunt $\{0, 2\} \subseteq \mathbb{Z}$. Aleshores, $\text{Sg}(\{0, 2\}) = 2\mathbb{Z} \leq \mathbf{Z}$ i $\Theta(0, 2) = \sim_2$ la congruència que relaciona dos nombres enters si la seua diferència és un parell. Per tant, $\mathbb{Z}/\sim_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2 = \{[0]_{\sim_2}, [1]_{\sim_2}\}“ \leq'' \mathbf{Z}$.

Proposició 8.2. *Siga* $\mathbf{A}$ *una* $\Sigma-$*àlgebra i siguen* $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in A$ *i* $\theta \in \text{Con}(\mathbf{A})$. *Aleshores,*

1. $\Theta(a_1, b_1) = \Theta(b_1, a_1)$
2. $\Theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = \Theta(a_1, b_1) \vee \cdots \vee \Theta(a_n, b_n)$
3. $\Theta(a_1, \ldots, a_n) = \Theta(a_1, a_2) \vee \Theta(a_2, a_3) \vee \cdots \vee \Theta(a_{n-1}, a_n)$
4. $\theta = \cup\{\Theta(a, b) \mid (a, b) \in \theta\}$
5. $\theta = \cup\{\Theta((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \mid (a_i, b_i) \in \theta, n \geq 1\}$

Demostració. 1. Trivial

2. Provem la doble inclusió.
   Notem que per a $1 \leq i \leq n$,

$$(a_i, b_i) \in \Theta\Big((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\Big)$$

així

$$\Theta(a_i, b_i) \subseteq \Theta\Big((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\Big)$$

finalment

$$\boxed{\Theta(a_1, b_1) \vee \cdots \vee \Theta(a_n, b_n) \subseteq \Theta\Big((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\Big)}$$

D'altra banda per a $1 \leq i \leq n$,

$$(a_i, b_i) \in \Theta(a_i, b_i) \subseteq \Theta(a_1, b_1) \vee \cdots \vee \Theta(a_n, b_n)$$

aleshores

$$\{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\} \subseteq \Theta(a_1, b_1) \vee \cdots \vee \Theta(a_n, b_n)$$

per tant

$$\boxed{\Theta\Big((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\Big) \subseteq \Theta(a_1, b_1) \vee \cdots \vee \Theta(a_n, b_n)}$$

3. Provem la doble inclusió
   Notem que per a $1 \leq i \leq n-1$,
   $$(a_i, a_{i+1}) \in \Theta(a_1, \ldots, a_n)$$
   així
   $$\Theta(a_i, a_{i+1}) \subseteq \Theta(a_1, \ldots, a_n)$$
   Així,
   $$\boxed{\Theta(a_1, a_2) \vee \cdots \vee \Theta(a_{n-1}, a_n) \subseteq \Theta(a_1, \ldots, a_n)}$$
   D'altra banda per a $1 \leq i < j \leq n$ tenim
   $$(a_i, a_j) \in \Theta(a_i, a_{i+1}) \circ \cdots \circ \Theta(a_{j-1}, a_j)$$
   per tant,
   $$(a_i, a_j) \in \Theta(a_1, a_2) \vee \cdots \vee \Theta(a_{n-1}, a_n)$$
   llavors
   $$(a_i, a_j) \in \Theta(a_1, a_2) \vee \cdots \vee \Theta(a_{n-1}, a_n)$$
   però ara per 1.
   $$\boxed{\Theta(a_1, \ldots, a_n) \subseteq \Theta(a_1, a_2) \vee \cdots \vee \Theta(a_{n-1}, a_n)}$$
4. Per a $(a, b) \in \theta$ clarament
   $$(a, b) \in \Theta(a, b) \subseteq \theta$$
   per tant,
   $$\theta \subseteq \bigcup\{\Theta(a, b) \mid (a, b) \in \theta\} \subseteq \bigvee\{\Theta(a, b) \mid (a, b) \in \theta\} \subseteq \theta$$
5. Similar a 4.

□

Teorema 8.3. *Per a qualsevol reticle algebraic L existeix una $\Sigma-$àlgebra $\mathbf{A}$ tal que $L \cong \mathbf{Con}(\mathbf{A})$.*

Demostració. Per Grätzer i Schmidt en 1963. □

Nota. Notem que aquesta caracterització és la mateixa que hem trobat per al reticle de subàlgebres d'un àlgebra. Així, no es esperable tindre una caracterització més forta a no ser que li exigim més a les àlgebres. Per exemple tenim, el reticles de congruències dels reticles satisfà la llei distributiva. El reticle de congruències dels grups (o anells) satisfà la llei modular. Introduïm així, la següent definició.

Definició 8.4. Una $\Sigma-$àlgebra és *congruent-distributiva* (resp. *congruent-modular*) si $\mathbf{Con}(\mathbf{A})$ és un reticle distributiu (resp. modular). Si $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ i $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ aleshores direm que són permutables o que permuten. $\mathbf{A}$ es dirà *congruent-permutable.*

Teorema 8.5. *Siga* $\mathbf{A}$ *una* $\Sigma-$*àlgebra i* $\theta_1, \theta_2 \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. *Les següents afirmacions són equivalents:*

1. $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$
2. $\theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \circ \theta_2$
3. $\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$

Demostració. Provem: $1 \iff 2$ i $1 \iff 3$.

$\boxed{1. \implies 2.}$ Notem que si θ és una relació d'equivalència $\theta \circ \theta = \theta$, així per l'expressió de $\theta_1 \vee \theta_2$ tenim el resultat.

$\boxed{1. \implies 3.}$ Trivial.

$\boxed{2. \implies 1.}$ Com

$$\theta_2 \circ \theta_1 \subseteq \theta_1 \vee \theta_2$$

de 2. obtenim que

$$\theta_2 \circ \theta_1 \subseteq \theta_1 \circ \theta_2.$$

Simètricament tenim l'altra relació i en conclusió la igualtat.

$\boxed{3. \implies 1.}$ Donat 3. hem de provar que $\theta_2 \circ \theta_1 \subseteq \theta_1 \circ \theta_2$. Ara bé, tenim que per 3.,

$$\theta_1 \circ \theta_2 \subseteq \theta_2 \circ \theta_1$$

aplicant inverses

$$(\theta_1 \circ \theta_2)\breve{} \subseteq (\theta_2 \circ \theta_1)\breve{}$$

i aleshores

$$\theta_2^{\smallsmile} \circ \theta_1^{\smallsmile} \subseteq \theta_1^{\smallsmile} \circ \theta_2^{\smallsmile}.$$

Però ara com la inversa d'una relació d'equivalència és una relació d'equivalència, hem provat 1.. □

Teorema 8.6 (Birkhoff)**.** *Si* **A** *és congruent-permutable, aleshores,* **A** *és congruent-modular.*

Demostració. Siguen θ_1, θ_2 i $\theta_3 \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ amb $\theta_1 \subseteq \theta_2$. Volem provar que

$$\theta_2 \cap (\theta_1 \vee \theta_3) \subseteq \theta_1 \vee (\theta_2 \cap \theta_3),$$

suposem així que $(a, b) \in \theta_2 \cap (\theta_1 \vee \theta_3)$. Ara, per teorema anterior existeix un element c tal que

$$a\theta_1 c\theta_3 b$$

per simetría

$$(c, a) \in \theta_1$$

així

$$(c, a) \in \theta_2$$

per transitivitat

$$(c, b) \in \theta_2$$

així,

$$(c, b) \in \theta_2 \cap \theta_3$$

per tant de

$$a\theta_1 c(\theta_2 \cap \theta_3)b$$

se segueix que

$$(a, b) \in \theta_1 \circ (\theta_2 \cap \theta_3)$$

per tant

$$(a, b) \in \theta_1 \vee (\theta_2 \cap \theta_3)$$

□

Exemple 8.0.1 . **Si A és una $\Sigma-$àlgebra unària i B és un subunivers definim θ com $(a,b) \in \theta$ si, i només si, $a = b$ o $\{a,b\} \subseteq B$. Demostrar que θ és una congruència sobre A.**

Demostració: Ho provem per definició.

1. Reflexiva. Per definició de la relació.
2. Simètrica. Per definició de la relació.
3. Transitiva. $a\theta b\theta c \implies (a = b \vee \{a,b\} \subseteq B) \wedge (b = c \vee \{b,c\} \subseteq B)$. Si tenim una de les igualtats és trivial que $a\theta c$. Suposem que no tenim dites igualtats, i.e., $\{a,b\},\{b,c\} \subseteq B \implies a\theta c$.
4. Compatible. Siga $\sigma \in \Sigma \implies \mathrm{ar}(\sigma) = 1$. Siguen $a,b \in A$ tals que $a\theta b \implies a = b \vee \{a,b\} \in B$. Si $a = b$, $\sigma(a)\theta\sigma(b)$ és trivial. Si $\{a,b\} \subseteq B \xRightarrow{B \text{ és subunivers}} \{\sigma(a),\sigma(b)\} \subseteq B \implies \sigma(a)\theta\sigma(b)$.

9. Teoremes d'isomorfia 1: 30/11/2020

Durant les següents dos sessions busquem provar la versió dels tres teoremes d'isomorfia per a les $\Sigma-$àlgebres amb les quals estem treballant. Aquestes proves fan que queden provats els teoremes d'isomorfia en grups, anells, cossos, àlgebres booleanes, àlgebres de Heyting... i, en general, qualsevol estructura que generalitzem amb les àlgebres siguen cassos particulars d'aquests que provem en aquesta secció.

Teorema 9.1. *Siguen* **A** *i* **B** *dues $\Sigma-$àlgebres i X un generador d'A. Una condició necessària i suficient per a que els homomorfismes $f,g : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ siguen iguals és que coincideixen en X, i.e.,*

$$f = g \leftrightarrow \forall x \in X \; f(x) = g(x)$$

Demostració. Que és condició necessària és evident, així, provem que és condició suficient. Fem inducció per a provar que per a qualsevol n natural, f i g coincideixen en $E^n(X)$, amb E^n l'operador definit amb anterioritat. En el cas $n = 0$, $E^0(X) = X$ i tenim el resultat per suposició. Ara, donat $n \in \mathbb{N}$, si $f = g$ en $E^n(X)$ aleshores donat $x \in E^{n+1}(X) = E^n(x) \cup \{\sigma((a_i)_{i\in m}) \mid \sigma \in \Sigma_m, (a_i)_{i\in m} \in (E^n(X))^m\}$ arbitrari però fixe (considerem que $x = \sigma((a_i)_{i\in m})$ ja que en altre cas és evident que $f(x) = g(x)$) tenim,

$$f(x) = f(\sigma((a_i)_{i\in m})) = \sigma((f(a_i))_{i\in m}) = \sigma((g(a_i))_{i\in m}) = g(\sigma((a_i)_{i\in m})) = g(x)$$

i concloem que $f = g$ en $E^{n+1}(X)$, pel principi d'inducció, $f = g$ en $E^n(X)$ per a qualsevol n natural.

Després, per la relació entre els operador Sg i E^n tenim el resultat. □

Teorema 9.2. *Siga $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfisme. Aleshores, la imatge directa d'un subunivers d'$\mathbf{A}$, C, és un subunivers de $\mathbf{B}$. Denotarem per $f[\mathbf{C}]$ la subàlgebra amb subunivers $f[C]$. També, la imatge inversa d'un subunivers de $\mathbf{B}$, D, és un subunivers d'$\mathbf{A}$. Denotarem per $f^{-1}[\mathbf{D}]$ la subàlgebra amb subunivers $f^{-1}[D]$.*

Teorema 9.3. *Siguen $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ i $g : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ són dos homomorfismes, aleshores la composició $g \circ f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$ és homomorfisme.*

Teorema 9.4. *Els homomorfismes i l'operador clausura Sg commuten, i.e.,*

$$\forall f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}\, \forall X \subseteq A(f[\mathrm{Sg}(X)] = \mathrm{Sg}(f[X]))$$

Demostració. Per una inducció similar a l'anterior se pot provar que $f[E^n(X)] = E^n(f[X])$, així ara tenim que

$$f[\mathrm{Sg}(X)] = f[\cup_{n\in\mathbb{N}} E^n(X)] = \cup_{n\in\mathbb{N}} f[E^n(X)] = \cup_{n\in\mathbb{N}} E^n(f[X]) = \mathrm{Sg}(f[X])$$

□

Definició 9.5. Donat un homomorfisme $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ definim el seu *nucli* com els parells ordenats tals que ambdós elements tenen la mateixa imatge, i.e.,

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(a, b) \in A^2 \mid f(a) = f(b)\}.$$

Teorema 9.6 (Primer teorema d'isomorfisme, Emmy Noether, 1927)**.** *Siguen $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ dues $\Sigma-$àlgebres i $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ un homomorfisme. Aleshores,*

$\mathrm{Ker}(f) \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. *Com a conseqüència, se pot considerar l'àlgebra quocient* $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f)$. *A més, l'aplicació donada per*

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f) &\longrightarrow \mathbf{Im}(f) \\ [a]_{\mathrm{Ker}(f)} &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

és un isomorfisme, i.e., $\mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathbf{Im}(f)$. *Dit d'un altra forma, el diagrama*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{pr}_{\mathrm{Ker}(f)}"'] & \mathbf{B} \\ \mathbf{A}/\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, hook, two heads, dashed, "\hat{f}"'] & \mathbf{Im}(f) \arrow[u, hook, "\mathrm{in}_{\mathbf{Im}(f)}"'] \end{tikzcd}$$

commuta.

Demostració. El fet que $\mathrm{Ker}(f) \in \mathrm{Eqv}(A)$ és evident per la seua definició. Siga ara $\sigma \in \Sigma_n$ qualsevol amb n natural qualsevol i $(a_i)_{i\in n}, (b_i)_{i\in n} \in A^n$ tals que cada a_i es troba relacionat amb b_i, i.e., $f(a_i) = f(b_i)$ per a tot i. Així, tenim que

$$f(\sigma((a_i)_{i\in n})) = \sigma((f(a_i))_{i\in n}) = \sigma((f(b_i))_{i\in n}) = f(\sigma((b_i)_{i\in n})),$$

i per tant, el nucli d'f és una congruència.

Provem ara que l'aplicació $\hat{f}$ està ben definida, és homomorfisme, és injectiva i sobrejectiva tenint així provat el resultat.

La demostració de que està ben definida i és injectiva és trivial a partir de la definició del nucli, ja que $[a]_{\mathrm{Ker}(f)} = [b]_{\mathrm{Ker}(f)} \leftrightarrow f(a) = f(b)$.

Per a veure que es sobrejectiva és suficient en notar que si y és un element d'$\mathrm{Im}(f)$, aleshores existeix un a en A tal que $y = f(a)$ i amb eixa igualtat tenim que $\hat{f}([a]_{\mathrm{Ker}(f)}) = y$.

Acabem la demostració verificant que és $\Sigma-$homomorfisme. Siga $\sigma \in \Sigma_n$

qualsevol amb n natural qualsevol i $([a_i]_{\mathrm{Ker}(f)})_{i\in n} \in \left(A/_{\mathrm{Ker}(f)}\right)^n$. Aleshores,

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\sigma^{\mathbf{A}/_{\mathrm{Ker}(f)}}(([a_i]_{\mathrm{Ker}(f)})_{i\in n})) &= \hat{f}([\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})]_{\mathrm{Ker}(f)}) && (\because \text{ def de } \sigma^{\mathbf{A}/_{\mathrm{Ker}(f)}}) \\
&= f(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})) && (\because \text{ def de } \hat{f}) \\
&= \sigma^{\mathbf{B}}((f(a_i))_{i\in n}) && (\because f \text{ és homomorfisme }) \\
&= \sigma^{\mathbf{Im}(f)}((f(a_i))_{i\in n}) && (\because \mathbf{Im}(f) \text{és subunivers}) \\
&= \sigma^{\mathbf{Im}(f)}((\hat{f}([a_i]_{\mathrm{Ker}(f)}))_{i\in n}) && (\because \text{ def de } \hat{f})
\end{aligned}
$$

Per tant, f és un $\Sigma-$isomorfisme i tenim provat el teorema. $\square$

Definició 9.7. Donada una $\Sigma-$àlgebra $\mathbf{A}$ i dos congruències $\theta, \phi \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ tals que $\theta \subseteq \phi$ definim la relació $\phi/_\theta$ com segueix

$$\phi/_\theta = \left\{ \left([a]_\theta, [b]_\theta\right) \in \left(\mathbf{A}/_\theta\right)^2 \;\middle|\; (a,b) \in \phi \right\}$$

Teorema 9.8 (Segon teorema d'isomorfisme, Emmy Noether, 1927)**.** *Siga* $\mathbf{A}$ *un* $\Sigma-$*àlgebra i* $\theta, \phi \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *dues congruències tals que* $\theta \subseteq \phi$. *Aleshores,* $\phi/_\theta \in \mathrm{Con}\left(\mathbf{A}/_\theta\right)$. *Per tant, podem considerar* $\left(\mathbf{A}/_\theta\right)/_{\left(\phi/_\theta\right)}$. *A més, l'aplicació donada per*

$$
\begin{aligned}
f : \mathbf{A}/_\theta &\longrightarrow \mathbf{A}/_\phi \\
[a]_\theta &\longmapsto [a]_\phi
\end{aligned}
$$

és un epimorfisme (homomorfisme sobrejectiu) amb $\mathrm{Ker}(f) = \phi/_\theta$. *Conseqüentment, pel primer teorema d'isomorfisme,* $\left(\mathbf{A}/_\theta\right)/_{\left(\phi/_\theta\right)} \cong \mathbf{A}/_\phi$. *Dit d'una altra forma, el diagrama*

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{A} \arrow[dl, "\mathrm{pr}_\theta"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_\phi"] & \\
\mathbf{A}/_\theta \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_{\phi/_\theta}"'] & & \mathbf{A}/_\phi \\
& \left(\mathbf{A}/_\theta\right)/_{\left(\phi/_\theta\right)} \arrow[ur, hook, dashed, "\hat{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

commuta.

Demostració. Provem que ${}^{\phi}\!/_{\theta} \in \mathrm{Eqv}\left({}^{\mathbf{A}}\!/_{\theta}\right)$. En primer lloc, $([a]_\theta, [a]_\theta) \in {}^{\phi}\!/_{\theta}$ per a $a \in A$ qualsevol ja que $(a,a) \in \phi$. Per tant, ${}^{\phi}\!/_{\theta}$ és reflexiva. Suposem que $([a]_\theta, [b]_\theta) \in {}^{\phi}\!/_{\theta}$ aleshores, per definició $(a,b) \in \phi$ però per ser aquesta congruència, en particular equivalència, és simètrica i tenim $(b,a) \in \phi$, és a dir, $([b]_\theta, [a]_\theta) \in {}^{\phi}\!/_{\theta}$. Per tant, ${}^{\phi}\!/_{\theta}$ és simètrica. Finalment, si $([a]_\theta, [b]_\theta), ([b]_\theta, [c]_\theta) \in {}^{\phi}\!/_{\theta}$ és perquè $(a,b), (b,c) \in \phi$ i ara per transitivitat de ϕ, $(a,c) \in \phi$ i així, $([a]_\theta, [b]_\theta) \in {}^{\phi}\!/_{\theta}$ i aquesta és transitiva, en conseqüència, equivalència.

Veiem ara que es compatible amb les operacions. Siga $\sigma \in \Sigma_n$ qualsevol per a n natural qualsevol i siguen $([a_i]_\theta)_{i\in n}, ([b_i]_\theta)_{i\in n} \in \left({}^{\mathbf{A}}\!/_{\theta}\right)^n$ tals que $([a_i]_\theta, [b_i]_\theta) \in {}^{\phi}\!/_{\theta}$ per a i qualsevol, és a dir, $(a_i, b_i) \in \phi$ per a qualsevol i. Aleshores, $(\sigma^{\mathbf{A}/\theta}(([a_i]_\theta)_{i\in n}), \sigma^{\mathbf{A}/\theta}(([b_i]_\theta)_{i\in n})) = ([\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})]_\theta, [\sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n})]_\theta) \in {}^{\phi}\!/_{\theta}$ si, per definició, $(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n}), \sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n})) \in \phi$, però aquesta darrera pertinença és trivial per ser ϕ una congruència.

Així, acabem de provar que ${}^{\phi}\!/_{\theta} \in \mathrm{Con}({}^{\mathbf{A}}\!/_{\theta})$.

Notem en primer lloc que l'aplicació f està ben definida ja que $\theta \subseteq \phi$; $[a]_\theta = [b]_\theta \to (a,b) \in \theta \subseteq \phi \to [a]_\phi = [b]_\phi$.

Per a comprovar que és un homomorfisme siga $\sigma \in \Sigma_n$ qualsevol amb n un natural qualsevol i $([a_i]_\theta)_{i\in n} \in \left({}^{\mathbf{A}}\!/_{\theta}\right)^n$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
f(\sigma^{\mathbf{A}/\theta}(([a_i]_\theta)_{i\in n})) &= f([\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})]_\theta) && (\because \text{ def de } \sigma^{\mathbf{A}/\theta}) \\
&= [\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})]_\phi && (\because \text{ def de } f) \\
&= \sigma^{\mathbf{A}/\phi}(([a_i]_\phi)_{i\in n}) && (\because \text{ def de } \sigma^{\mathbf{A}/\phi}) \\
&= \sigma^{\mathbf{A}/\phi}((f([a_i]_\theta))_{i\in n}) && (\because \text{ def de } f)
\end{aligned}$$

Per tant, és homomorfisme i com $y \in {}^{\mathbf{A}}\!/_{\phi} \to \exists a \in A\ y = [a]_\phi = f([a]_\theta)$ prova que f és sobrejectiva.

Per a donar per finalitzada la prova calculem $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \left\{([a]_\theta,[b]_\theta)\in \left({}^{\mathbf{A}}\!/\!_{\theta}\right)^2 \;\middle|\; f([a]_\theta)=f([b]_\theta)\right\}\\ &= \left\{([a]_\theta,[b]_\theta)\in \left({}^{\mathbf{A}}\!/\!_{\theta}\right)^2 \;\middle|\; [a]_\phi=[b]_\phi\right\}\\ &= \left\{([a]_\theta,[b]_\theta)\in \left({}^{\mathbf{A}}\!/\!_{\theta}\right)^2 \;\middle|\; (a,b)\in\phi\right\}\\ &= {}^{\phi}\!/\!_{\theta}\end{aligned}$$

□

10. Teoremes d'isomorfia 2: 10/12/2020

Definició 10.1. Donada una $\Sigma-$àlgebra $\mathbf{A}$, $B\subseteq A$ i $\theta\in\mathrm{Con}(\mathbf{A})$, la seva *saturació per* θ és el conjunt $B^\theta := \{a\in A \mid B\cap[a]_\theta\neq\varnothing\} = \{[b]_\theta \mid b\in B\}$. Denotarem per $\mathbf{B}^\theta$ la subalgèbra d'$\mathbf{A}$ generada per B^θ.

Proposició 10.2. *Si* $\mathbf{B}$ *és una subàlgebra d'*$\mathbf{A}$ *i* $\theta\in\mathrm{Con}(\mathbf{A})$*, aleshores,*

1. *El subunivers de* $\mathbf{B}^\theta$ *és* B^θ*.*
2. $\theta\restriction_B$ *és una congruència en* $\mathbf{B}$*.*

Demostració. 1. Per definició el subunivers de $\mathbf{B}^\theta$ és $\mathrm{Sg}(B^\theta)$, demostrem que B^θ és un subunivers i tindrem el resultat. Siga $\sigma\in\Sigma_n$ per a n un natural qualsevol i $(a_i)_{i\in n}\in(B^\theta)^n$.A Aleshores, per definició de la seua saturació, tenim que existeixen elements $(b_i)_{i\in n}\in B^n$ tals que $(a_i,b_i)\in\theta$ per a i qualsevol, així, com θ és una congruència, $(\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n}),\sigma^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n}))\in\theta$ i, per tant, $\sigma^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})\in B^\theta$ concloent que B^θ és un subunivers.

2. La demostració de que és congruència en $\mathbf{B}$ és trivial. □

Teorema 10.3 (Tercer teorema d'isomorfisme, Emmy Noether, 1927)**.** *Siga* $\mathbf{A}$ *un* $\Sigma-$*àlgebra i* $\mathbf{B}$ *una subàlgebra d'*$\mathbf{A}$ *i* $\theta\in\mathrm{Con}(\mathbf{A})$*, aleshores,* $\mathbf{B}/\theta\restriction_B\cong \mathbf{B}^\theta/\theta\restriction_{B^\theta}$*.*

Demostració. És suficient amb considerar el isomorfisme que envia cada $[b]_{\theta\restriction_B}\in B/\theta\restriction_B$ a $[b]_{\theta\restriction_{B^\theta}}\in B^\theta/\theta\restriction_{B^\theta}$. □

Definició 10.4. Per a $[a, b]$ un interval tancat d'un reticle $\mathbf{L}$ denotem $[[a, b]]$ el corresponent subreticle.

Teorema 10.5 (de correspondència)**.** *Siga* $\mathbf{A}$ *un àlgebra i* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$, *aleshores*

$$f \begin{cases} [[\theta, \nabla_A]] & \longrightarrow & \mathbf{Con}(\mathbf{A}/\theta) \\ \Phi & \longmapsto & \Phi/\theta \end{cases} \tag{2}$$

és un isomorfisme de reticles.

Demostració. És senzill comprovar que és una aplicació bijectiva que preserva i reflecteix l'ordre. □

11. Producte directe, congruències factor i àlgebres directament indescomposables: 15/02/21

Totes les construccions vistes fins ara (subàlgebres i quocients d'àlgebres) sempre resulten àlgebres amb una cardinalitat menor. Les construccions que estudiarem a continuació naixen a partir de la idea de construir noves àlgebres amb una cardinalitat major. Aquesta idea motiva la següent definició.

Definició 11.1. Siguen $\mathbf{A_1}$ i $\mathbf{A_2}$ dues àlgebres de tipus Σ, definim el seu *producte directe* $\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2}$ com l'àlgebra que té per subunivers el conjunt $A_1 \times A_2$ i on, per a cada natural n i cada $\sigma \in \Sigma_n$ l'operació actúa com segueix:

$$\sigma^{\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2}}\left(\Big((a_i, b_i)\Big)_{i \in n}\right) = \left(\sigma^{\mathbf{A_1}}\Big((a_i)_{i \in n}\Big), \sigma^{\mathbf{A_2}}\Big((b_i)_{i \in n}\Big)\right)$$

per a $(a_i)_{i \in n} \in A_1^n$ $(b_i)_{i \in n} \in A_2^n$. A més, definim l'aplicació *projecció a la component i-èssima* com

$$\begin{array}{rccc} \pi_i : & A_1 \times A_2 & \longrightarrow & A_i \\ & (a_1, a_2) & \longmapsto & a_i \end{array}$$

per a $i \in \{1, 2\}$.

Teorema 11.2. *π_i és un homomorfisme sobrejectiu per a $i \in \{1,2\}$. A més, en $\mathbf{Con}(\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2})$ es té:*

- $\mathrm{Ker}(\pi_1) \cap \mathrm{Ker}(\pi_2) = \Delta_{A_1 \times A_2}$
- $\mathrm{Ker}(\pi_1) \vee \mathrm{Ker}(\pi_2) = \nabla_{A_1 \times A_2}$
- $\mathrm{Ker}(\pi_1)$ *i* $\mathrm{Ker}(\pi_2)$ *permuten.*

Demostració. És evident que π_i és sobrejectiu. Vegem a continuació que és un homomorfisme. Siga $\sigma \in \Sigma_n$ per a n un natural qualsevol i $(a_i)_{i \in n} \in A_1^n$, $(b_i)_{i \in n} \in A_2^n$ dues famílies qualssevol. Aleshores, tenim la següent cadena d'igualtats.

$$\begin{aligned}
\pi_1\left(\sigma^{\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2}}\left(((a_i, b_i))_{i \in n}\right)\right) &= \pi_1\left(\left(\sigma^{\mathbf{A_1}}\left((a_i)_{i \in n}\right), \sigma^{\mathbf{A_2}}\left((b_i)_{i \in n}\right)\right)\right) \\
&= \sigma^{\mathbf{A_1}}\left((a_i)_{i \in n}\right) \\
&= \sigma^{\mathbf{A_1}}\left((\pi_1((a_i, b_i)))_{i \in n}\right)
\end{aligned}$$

Així, tenim que π_1 és un homomorfisme sobrejectiu i anàlogamet obtenim el mateix resultat per a π_2.

Provem a continuació les afirmacions sobre els kernels. Suposem $((a_1, a_2), (b_1, b_2)) \in \mathrm{Ker}(\pi_1) \cap \mathrm{Ker}(\pi_2)$, aleshores ambdós elements han de tindre les mateixes projeccions, i.e., $\pi_i((a_1, a_2)) = \pi_i((b_1, b_2))$, és a dir, $a_1 = b_1$ i $a_2 = b_2$. La qual cosa prova que $\mathrm{Ker}(\pi_1) \cap \mathrm{Ker}(\pi_2) \subseteq \Delta_{A_1 \times A_2}$. Com l'altra implicació és trivial es té la igualtat.

Per a la resta del teorema és suficient amb observar que si $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$ aleshores tenim la següent cadena de relacions $(a_1, a_2)\mathrm{Ker}(\pi_1)(a_1, b_2)\mathrm{Ker}(\pi_2)(b_1, b_2)$. Així, $\mathrm{Ker}(\pi_1) \circ \mathrm{Ker}(\pi_2) \supseteq \nabla_{A_1 \times A_2}$ però això, junt amb un raonament anàleg per a $\mathrm{Ker}(\pi_2) \circ \mathrm{Ker}(\pi_1)$, implica que $\mathrm{Ker}(\pi_1) \circ \mathrm{Ker}(\pi_2) = \mathrm{Ker}(\pi_2) \circ \mathrm{Ker}(\pi_1) = \nabla_{A_1 \times A_2}$. Per tant finalment, $\mathrm{Ker}(\pi_1) \vee \mathrm{Ker}(\pi_2) = \nabla_{A_1 \times A_2}$ completant la prova. □

Aquest teorema, donat que les projeccions son homomorfismes sobrejectius sobre $\mathbf{A_i}$, aleshores, cadascuna de les components del producte directe es una *imatge homomorfa* del producte. Al cas concret dels grups, per exemple, també es té que cada component és embebible en el producte. Aquest fet no és cert en general ja que no sempre el conjunt $1 = \{\varnothing\}$ és una subàlgebra.

Per altra banda, utilitzant el primer teorema d'isomorfía per a cada π_i s'obté que $\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2}/\mathrm{Ker}(\pi_i) \cong A_i$. Així, $\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \cong \mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2}/\mathrm{Ker}(\pi_1) \times \mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2}/\mathrm{Ker}(\pi_2)$. Tractem de generalitzar aquest fet amb la segünt definició i posterior teorema.

Definició 11.3. Una congruència θ en $\mathbf{A}$ una Σ-àlgebra és una *congruència factor* si existeix una congruència θ^* en $\mathbf{A}$ que compleixen:

- $\theta \cap \theta^* = \Delta_A$
- $\theta \vee \theta^* = \nabla_A$
- $\theta \circ \theta^* = \theta^* \circ \theta$

Al parell θ, θ^* se li anomena *parell de congruències factor.*

Teorema 11.4. *Si θ, θ^* és un parell de congruències factor en $\mathbf{A}$, aleshores $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}/\theta \times \mathbf{A}/\theta^*$.*

Demostració. Considerem la següent aplicació:

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & A/\theta \times A\theta^* \\ & a & \longmapsto & ([a]_\theta, [a]_{\theta^*}) \end{array}$$

demostrem que és un isomorfisme entre les àlgebres.

Suposem $a, b \in A$ tals que $f(a) = f(b)$, aleshores, $[a]_\theta = [b]_\theta$ i també $[a]_{\theta^*} = [b]_{\theta^*}$. Però això vol dir que $(a, b) \in \theta \cap \theta^* = \Delta_A$ que implica $a = b$ i la injectivitat de f.

D'altra banda si a i b són elements d'A qualssevol és evident que $(a, b) \in \nabla_A = \theta \circ \theta^*$, per tant, existeix un c en A tal que $a\theta c\theta^* b$ i, en particular, $[a]_\theta = [c]_\theta$ i $[b]_{\theta^*} = [c]_{\theta^*}$. Per tant, $f(c) = ([c]_\theta, [c]_{\theta^*}) = ([a]_\theta, [b]_{\theta^*})$. Justificant la sobrejectivitat d'f.

Per a finalitzar la prova considerem $\sigma \in \Sigma_n$ amb n un natural qualsevol i $(a_i)_{i\in n} \in A^n$. Calculem

$$\begin{aligned} f\left(\sigma^{\mathbf{A}}\left((a_i)_{i\in n}\right)\right) &= \left(\left[\sigma^{\mathbf{A}}\left((a_i)_{i\in n}\right)\right]_\theta, \left[\sigma^{\mathbf{A}}\left((a_i)_{i\in n}\right)\right]_{\theta^*}\right) \\ &= \left(\sigma^{\mathbf{A}/\theta}\left(([a_i]_\theta)_{i\in n}\right), \sigma^{\mathbf{A}/\theta^*}\left(([a_i]_{\theta^*})_{i\in n}\right)\right) \\ &= \sigma^{\mathbf{A}/\theta\times\mathbf{A}/\theta^*}\left((([a_i]_\theta, [a_i]_{\theta^*}))_{i\in n}\right) \\ &= \sigma^{\mathbf{A}/\theta\times\mathbf{A}/\theta^*}\left((f(a_i))_{i\in n}\right) \end{aligned}$$

15Així, provem que l'aplicació f és un homomorfisme entre àlgebres bijectiu, és a dir, un isomorfisme. □

Definició 11.5. Donada una Σ-àlgebra $\mathbf{A}$ es *directament indescomponible* si $\mathbf{A}$ no és isomorfa a un producte directe de dos àlgebres no trivials.

Un exemple directe d'algebres indescomponibles són totes elles que tingan un univers amb cardinalitat un nombre primer.

Dels teoremes anteriors el resultat següent és trivial.

Corol·lari 11.6. *Una condició suficient i necessària per a que una Σ-àlgebra $\mathbf{A}$ siga directament indescomponible és que les úniques congruències factor siguen Δ_A i ∇_A.*

Definició 11.7. Donats una família de conjunt $(A_i)_{i\in I}$ on I pot ser un conjunt amb un cardinal transfinit, definim el seu producte com $\Pi_{i\in I} = \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i | (\forall i \in I)\ f(i) \in A_i\}$. Notem que en el cas de que I siga finit és equivalent amb la definició del producte directe habitual. Donada $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$ una família de Σ-àlgebres, aleshores, definim la *Σ-àlgebra producte* $\Pi_{i\in I}\mathbf{A_i}$ com l'algebra amb subunivers $\Pi_{i\in I}A_i$ i on per a cada natural n i cada $\sigma \in \Sigma_n$. Si $(a_j)_{j\in n} \in (\Pi_{i\in I}A_i)^n$, aleshores, $\sigma^{\Pi_{i\in I}\mathbf{A_i}}\left((a_j)_{j\in n}\right)(i) = \sigma^{\mathbf{A_i}}\left((a_j(i))_{j\in n}\right)$. El productori buit $\Pi\varnothing$ queda definit com l'àlgebra trivial $\{\varnothing\} = 1$. Igual que abans definim també les *projeccions a la component j-èssima* com

$$\begin{array}{rccc} \pi_j : & \Pi_{i\in I}A_i & \longrightarrow & A_j \\ & a & \longmapsto & a(j) \end{array}$$

per a $j \in I$ que se pot provar de forma similar a l'anterior que són homomorfismes sobrejectius. Al cas que $\mathbf{A_i} = \mathbf{A}$ per a tot i en I escriurem $\mathbf{A}^I$ i l'anomenarem potència directa d'$\mathbf{A}$. $\mathbf{A}^{\varnothing} = 1$.

Teorema 11.8. *El producte directe de Σ-àlgebres verifica les lleis conmutativa i associativa, i.e., si $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}$ i $\mathbf{A_3}$ són 3 Σ-àlgebres, aleshores,*

1. $\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \cong \mathbf{A_2} \times \mathbf{A_1}$
2. $\mathbf{A_1} \times (\mathbf{A_2} \times \mathbf{A_3}) \cong (\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2}) \times \mathbf{A_3}$

Demostració. Per al primer isomorfisme considerem l'aplicació donada per

$$\begin{array}{rccc} f: & A_1 \times A_2 & \longrightarrow & A_2 \times A_1 \\ & (a_1, a_2) & \longmapsto & (a_2, a_1) \end{array}$$

És evident que és bijectiva. Provem que és un homomorfisme. Siga n un natural qualsevol i $\sigma \in \Sigma_n$ qualsevol. Considerem $((a_i, b_i))_{i \in n} \in (A_1 \times A_2)^n$ una família qualsevol. Aleshores,

$$\begin{aligned} f\left(\sigma^{\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2}}\left(((a_i, b_i))_{i \in n}\right)\right) &= f\left(\left(\sigma^{\mathbf{A_1}}\left((a_i)_{i \in n}\right), \sigma^{\mathbf{A_2}}\left((b_i)_{i \in n}\right)\right)\right) \\ &= \left(\sigma^{\mathbf{A_2}}\left((b_i)_{i \in n}\right), \sigma^{\mathbf{A_1}}\left((a_i)_{i \in n}\right)\right) \\ &= \sigma^{\mathbf{A_2} \times \mathbf{A_1}}\left((((b_i, a_i))_{i \in n})\right) \\ &= \sigma^{\mathbf{A_2} \times \mathbf{A_1}}\left(((f((a_i, b_i)))_{i \in n})\right) \end{aligned}$$

Provem així la primera part del teorema. La prova de la segona és anàloga. □

I ara, similarment amb el que passa amb la descomposició en nombres primers tenim el següent resultat.

Teorema 11.9. *Qualsevol algebra finita es isomorfa a un producte directe d'àlgebres directament indescomponibles.*

Demostració. Per inducció completa amb el cardinal de l'univers. □

A continuació, provem que el producte d'àlgebres verifica la propietat universal i provem després que se tracta, sota certes condicions, d'un homomorfisme.

Definició 11.10. Si tenim una col·lecció d'aplicacions $f_i : A \longrightarrow A_i$ per a qualsevol $i \in I$, aleshores, existeix una única aplicació d'A a $\prod_{i\in I} A_i$ que anomenarem $\prod_{i\in I} f_i$ i definida com:

$$\begin{array}{rccccccc} \prod_{i\in I} f_i : & A & \longrightarrow & \Pi_{i\in I} A_i & & & \\ & a & \longmapsto & \prod_{i\in I} f_i(a) : & I & \longrightarrow & \bigcup_{i\in I} A_i \\ & & & & i & \longmapsto & f_i(a) \end{array}.$$

Fem el cas concret $A \times B$ per a entendre millor aquesta aplicació. L'enunciat se pot expressar considerant el diagrama següent:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, dashed, "f\times g"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & A \times B \arrow[dl, bend right, "\pi_1"'] \arrow[dr, bend left, "\pi_2"] & \\ A & & B \end{tikzcd}$$

on l'aplicació està definida com segueix

$$\begin{array}{rccc} f \times g : & C & \longrightarrow & A \times B \\ & c & \longmapsto & (f(c), g(c)) \end{array}.$$

Notem que podem extendre aquesta definició. Si tenim donats unes aplicacions $f_j : A_j \longrightarrow B_j$ podem extendre-les a una entre els conjunts $\Pi_{i\in I} A_i$ i $\Pi_{i\in I} B_i$ considerant les composicions $f_j \circ \pi_j$. El següent diagrama il·lustra la situació.

$$\begin{tikzcd} \Pi_{i\in I} A_i \arrow[r, dashed, "\prod_{i\in I} f_i"] \arrow[d, "\pi_j"'] \arrow[dr, "f_j\circ\pi_j"] & \Pi_{i\in I} B_i \arrow[d, "\pi_j"] \\ A_j \arrow[r, "f_j"'] & B_j \end{tikzcd}$$

Teorema 11.11. *Sota les condicions de la definició anterior si per a tot i en I, $f_i : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A_i}$ és un homomorfisme, aleshores $\prod_{i\in I} f_i$ és un homomorfisme.*

Demostració. Siga n un natural qualsevol i $\sigma \in \Sigma_n$. Considerem $(a_i)_{i\in n} \in A^n$ una família d'elements d'A. Aleshores per a cada i en I tenim

$$\begin{aligned}\prod_{k\in I} f_k\left(\sigma^{\mathbf{A}}\left((a_j)_{j\in n}\right)\right)(i) &= f_i\left(\sigma^{\mathbf{A}}\left((a_j)_{j\in n}\right)\right)\\ &= \sigma^{\mathbf{A_i}}\left(\left(f_i(a_j)\right)_{j\in n}\right)\\ &= \sigma^{\mathbf{A_i}}\left(\left(\prod_{k\in I} f_k(a_j)(i)\right)_{j\in n}\right)\\ &= \sigma^{\prod_{k\in I}\mathbf{A_k}}\left(\left(\prod_{k\in I} f_k(a_j)\right)_{j\in n}\right)(i)\end{aligned}$$

□

12. Producte subdirecte, àlgebres subdirectament irreduïbles i àlgebres simples: 22/02/21

Teorema 12.1. *Considerem una familia d'aplicacions $f_i : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{A}_i$ $I-$indexada aleshores, les següents condicions són equivalents.*

(1) La família $\{f_i \mid i \in I\}$ separa punts.
(2) $\Pi_{i\in I} f_i$ és injectiva.
(3) $\bigcap_{i\in I} \operatorname{Ker}(f_i) = \Delta_C$.

Demostració. (1) implica (2). Com la família separa punts, per a cada $c_1, c_2 \in C$, existeix un $i \in I$ tal que $f_i(c_1) \neq f_i(c_2)$, així $(\Pi_{i\in I} f_i(c_1))(i) \neq (\Pi_{i\in I} f_i(c_2))(i)$ i, conseqüentment, $(\Pi_{i\in I} f_i(c_1)) \neq (\Pi_{i\in I} f_i(c_2))$.

(2) implica (3). Eś evident que $\bigcap_{i\in I} \operatorname{Ker}(f_i) \supseteq \Delta_C$. Recíprocament, siguen $c_1, c_2 \in C$. Si $c_1 \neq c_2$, aleshores $(\Pi_{i\in I} f_i(c_1)) \neq (\Pi_{i\in I} f_i(c_2))$. Per tant, existeix un $i \in I$ tal que $(\Pi_{i\in I} f_i(c_1))(i) \neq (\Pi_{i\in I} f_i(c_2))(i)$ que és equivalent a $f_i(c_1) neq f_i(c_2)$, per tant, $(c_1, c_2) \notin \operatorname{Ker}(f_i) \geq \bigcap_{i\in I} \operatorname{Ker}(f_i)$.

(3) implica (1). Siguen $c_1, c_2 \in C$ diferents, aleshores $(c_1, c_2) \in \Delta_C = \bigcap_{i\in I} \operatorname{Ker}(f_i)$, i.e., existeix un $i \in I$ tal que $(c_1, c_2) \notin \operatorname{Ker}(f_i)$. Per tant, $f_i(c_1) \neq f_i(c_2)$. □

Definició 12.2. Una àlgebra $\mathbf{A}$ és un *producte subdirecte de la familia* $\{\mathbf{A}_i \mid i \in I\}$ si $\mathbf{A} \leq \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ i, per a cada $i \in I$, $\pi_i(\mathbf{A}) = \mathbf{A}_i$. una aplicació $f : \mathbf{A} \longrightarrow \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$ és una imbibició és *subdirecta* si $f(\mathbf{A})$ és un producte subdirecte de les $\{\mathbf{A}_i \mid i \in I\}$.

Lema 12.3. *Siga* $\{\theta_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ *una família de congruències en* $\mathbf{A}$. *Si* $\bigcap_{i\in I} \theta_i = \Delta_A$ *aleshores,*

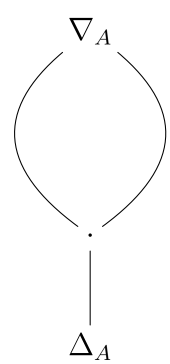
$$\nu \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbf{A} & \longrightarrow & \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i/\theta_i \\ a & \longmapsto & \nu(a) \left\{ \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \bigcup_{i\in I} \mathbf{A}_i/\theta_i \\ i & \longmapsto & [a]_{\theta_i} \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{3}$$

és una imbibició subdirecta.

Demostració. Considerem pr^{θ_i} que sabem $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^{\theta_i}) = \theta_i$, per tant, $\bigcap_{i\in I} \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^{\theta_i}) = \Delta_A$, per tant, ν és una imbibició. Tenint en compte que pr^{θ_i} és sobrejectiu, se segueix que $\pi_i(\nu(\mathbf{A})) = \mathbf{A}/\theta_i$, i.e., ν és una imbibició subdirecta. $\square$

Definició 12.4. Una àlgebra $\mathbf{A}$ és *subdirectament irreduïble* si, per a cada imbibició subdirecta $f : \mathbf{A} \longrightarrow \Pi_{i\in I}\mathbf{A}_i$, aleshores, existeix un $i \in I$ tal que $\pi_i \circ f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}_i$ és un isomorfisme.

Teorema 12.5. *Siga* $\mathbf{A}$ *una àlgebra aleshores, ua condició necessària i suficient per a que diga subdirectament irreduïble és que* $\mathbf{A}$ *siga trivial o* $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) \setminus \{\Delta_A\}$ *tinga mínim que, a més, és una congruència principal. És a dir, el reticle de congruències és de la forma:*



Demostració. La condició és necessària. Suposem que $\mathbf{A}$ és subdirectament irreduïble, no trivial i que $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) \setminus \{\Delta_A\}$ no té mínim. Considerem $\bigcap \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \setminus \{\Delta_A\}$ que, evidentment és una fita inferior per a $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) \setminus \{\Delta_A\}$ que, per no tindre mínim ha d'ocórrer que $\bigcap \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \setminus \{\Delta_A\} = \Delta_A$. Per tant, $f : \mathbf{A} \longrightarrow \Pi_{\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \setminus \{\Delta_A\}} \mathbf{A}/\theta$ definida con al lema anterior és una imbibició subdirecta, però, com cap de les congruències en $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) \setminus \{\Delta_A\}$ és la diagonal, se té que $\mathbf{A}$ no és isomorfa a cap de les $\mathbf{A}/\theta$ contradient que siga subdirectament irreduïble.

La condició és suficient. Si $\mathbf{A}$ és trivial el resultat és evident. Suposem que $\mathbf{A}$ és no trivial i denotem per θ el mínim del conjunt $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) \setminus \{\Delta_A\}$ que és, evidentment, $\bigcup \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \setminus \{\Delta_A\}$. Notem que $\theta \neq \Delta_A$. Siguen $a, b \in A$ diferents tals que $(a, b) \in \theta$. Ara bé, si $f : \mathbf{A} \longrightarrow \Pi_{i \in I} \mathbf{A}_i$ és una imbibició subdirecta com és injectiva, per a algún $i \in I$, $(\pi_i \circ f)(a)(f(a))(i) \neq (f(b))(i) = (\pi_i \circ f)(b)$, i.e., $(a, b) \notin \mathrm{Ker}(\pi_i \circ f)$. Així, $\theta \nsubseteq \mathrm{Ker}(\pi_i \circ f)$ la qual cosa implica que $\mathrm{Ker}(\pi_i \circ f) = \Delta_A$ i $\pi_i \circ f$ és un isomorfisme. A més, per a dits a, b se té que $\Delta_A \subset \Theta(a, b) \subseteq \theta$, per tant, $\theta = \Theta(a, b)$ i és una congruència principal. $\square$

Teorema 12.6. *Tota àlgebra subdirectament irreduïble és directament indescomposable.*

Demostració. Sigeun $\theta, \theta^* \in \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \setminus \{\Delta_A\}$ que, com té element mínim $\theta \cap \theta^* \supseteq \bigcap \mathrm{Con}(\mathbf{A}) \setminus \{\Delta_A\} \neq \Delta_A$, per tant, $\theta \cap \theta^* = \Delta_A$ si, i només si, $\theta = \Delta_A$ o $\theta^* = \Delta_A$. $\square$

Teorema 12.7 (Birkhoff)**.** *Tota àlgebra* $\mathbf{A}$ *és isomorfa a un producte subdirecte d'àlgebres subdirectament irreduïbles (que són imatges homomorfes d'*$\mathbf{A}$*).*

Demostració. Suposem $\mathbf{A}$ no trivial ja que, en altre cas, el resultat és evident. Siguen $a, b \in A$ diferents aleshores, pel lema de Zorn, existeix $\theta_{a,b} \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ maximal per a la propietat que $(a, b) \notin \theta_{a,b}$. Així, $\Theta(a, b) \vee \theta_{a,b}$ és la menor congruència en $[\theta_{a,b}, \nabla_A] \setminus \{\theta_{a,b}\}$, pel teorema de correspondència i un teorema anterior tenim que $\mathbf{A}/\theta_{a,b}$ és subdirectament irreduïble. A més, com $\bigcap \{\theta_{a,b} \mid a \neq b\} = \Delta_A$ per un teorema anterior sabem que $\mathbf{A}$ és subdirectament embibible en un producte de àlgebres subdirectament irreduïbles. $\square$

Definició 12.8. Un àlgebra $\mathbf{A}$ és *simple* si $\mathrm{Con}(\mathbf{A} = \{\Delta_A, \nabla_A\}$. Una congruència θ és maximal si $[\theta, \nabla_A] = \{\theta, \nabla_A\}$.

Proposició 12.9. *Siga $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. $\mathbf{A}/\theta$ és simple si, i només si, θ és maximal o $\theta = \nabla_A$.*

13. Operadors de classe i varietats: 01/03/21

Definició 13.1. Una *classe* és una familia o col·lecció de conjunts que no necessàriament és un conjunt i que tractarem com a un objecte estrictament més complexe que un conjunt. Denotarem una classe per lletres majúscules i cal·ligràfiques per a distingir clarament els objectes classe i conjunt. Donada una classe d'àlgebres qualsevol $\mathcal{K}$ definim els 5 operadors de classe que estudiarem: (1) $\mathbf{A} \in I(\mathcal{K})$ si, i només si $\mathbf{A}$ és isomorfa a algun membre de $\mathcal{K}$. (2) $\mathbf{A} \in S(\mathcal{K})$ si, i només si $\mathbf{A}$ és subàlgebra d'algun membre de $\mathcal{K}$. (3) $\mathbf{A} \in H(\mathcal{K})$ si, i només si $\mathbf{A}$ és imatge homomorfa d'algun membre de $\mathcal{K}$. (4) $\mathbf{A} \in P(\mathcal{K})$ si, i només si $\mathbf{A}$ és producte directe d'una família no buida d'elements de $\mathcal{K}$. (5) $\mathbf{A} \in P_S(\mathcal{K})$ si, i només si $\mathbf{A}$ és producte subdirecte d'una família no buida d'elements de $\mathcal{K}$.

Per a una signatura Σ que suposem hem suposat fixada per a tot el document denotem per Alg la classe de totes les àlgebres de tipus Σ.

Ressaltem el fet que als operadors P i P_S exigim que la família siga no buida, així, per a ambdós operadors es té que $O(\varnothing) = \varnothing$. Convenim ara que encara que una classe no és estrictament parlant un conjunt utilitzarem la notació de teoria de conjunts habitual, com ja hem fet a la definició anterior.

Nota. Si O_1 i O_2 són dos operadors de classe escriurem O_1O_2 per a la composició dels dos operadors, i.e., $O_1O_2(\mathcal{K}) = O_1(O_2(\mathcal{K}))$. A més, $\leq$ denotarà l'ordre parcial habitual donat per la inclusió, i.e., $O_1 \leq O_2$ si, i només si, $O_1(\mathcal{K}) \subseteq O_2(\mathcal{K})$.

Definició 13.2. Per a O un operador de classe direm que és *idempotent* si $O^2 = O$. A més, donada una classe $\mathcal{K}$ direm que es *tancada respecte a l'operador* O si $O(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$.

Nota. En general si $\mathcal{K}$ és una classe d'àlgebres del mateix tipus i $O \in \{I, S, H, P, P_S\}$ aleshores, $\mathcal{K} \subseteq O(\mathcal{K})$, i.e., els operadors són extensius. La comprovació es senzilla ja que si $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, aleshores, $id : \mathbf{A} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}$, $\mathbf{A} \leq \mathbf{A}$ i $\mathbf{A} = \prod_{i\in 1} \mathbf{A}$ proven que $\mathbf{A} \in O(\mathcal{K})$.

Lema 13.3. *Els operadors I, H, S i IP són idempotents.*

Demostració. Per la nota anterior es té que, per a cada O en $\{I, H, S, IP\}$, $O \leq O^2$. Per a les desigualtats contraries només provem que $S^2 \leq S$, les altres són similars. Si $\mathbf{A} \in S^2(\mathcal{K})$ per definició, existeix $\mathbf{B} \in S(\mathcal{K})$ tal que $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Ara bé, de nou per definició, existeix $\mathbf{C} \in \mathcal{K}$ complint que $\mathbf{B} \leq \mathbf{C}$. Però aleshores, tenim que $\mathbf{A} \leq \mathbf{B} \leq \mathbf{C}$, i.e., $\mathbf{A}$ és una subàlgebra d'una àlgebra de $\mathcal{K}$. Per tant, per definició $\mathbf{A} \in S(\mathcal{K})$ i S és idempotent. □

Lema 13.4. *Es tenen les següents relacions: $SH \leq HS$, $PS \leq SP$, $PH \leq HP$, $IH = H$, $P_S \leq SP$ i $IO = OI$*

Demostració. Suposem $\mathcal{K}$ una classe d'àlgebres qualsevol. Per a la demostració de (1) si $\mathbf{A}$ pertany a $SH(\mathcal{K})$ aleshores existeixen $\mathbf{B}$ una àlgebra de $\mathcal{K}$ i un epimorfisme $f : \mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbf{C}$ tals que $\mathbf{A} \leq \mathbf{C}$. Ara bé, $f^{-1}[\mathbf{A}]$ és una subàlgebra de $\mathbf{B}$ i per ser f sobrejectiu es té que $f[f^{-1}[\mathbf{A}]] = \mathbf{A}$ per tant, $\mathbf{A}$ pertany a $HS(\mathcal{K})$.

Les afirmacions restants se segueixen de les definicions corresponents. □

Definició 13.5. Una classe $\mathcal{K}$ no buida d'àlgebres del mateix tipus és una varietat si queda tancada per a subàlgebres, imarges homomorfes i productes directes, i.e., $S(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}, H(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$ i $P(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$

Nota. La intersecció de varietats torna a ser varietat. Així, podem concloure que donada una classe d'àlgebres qualsevol existeix la menor varietat que la conté.

Definició 13.6. Siga $\mathcal{K}$ una classe d'àlgebres del mateix tipus. La *varietat generada per* $\mathcal{K}$, denotada per $V(\mathcal{K})$, és la intersecció de totes les varietats que contenen a a $\mathcal{K}$. Si la varietat només està composta per l'element $\mathbf{A}$ aleshores abreujarem $V(\mathbf{A})$. Una varietat V és *finitament generada* si, per a algún nombre finit d'àlgebres $\mathcal{K}$, $V = V(\mathcal{K})$.

Teorema 13.7. $V = HSP$

Demostració. Siga $\mathcal{K}$ una classe d'àlgebres d'un mateix tipus fixada per a tota la demostració.

Provem en primer lloc que $V(\mathcal{K})$ és anterior a $HSP(\mathcal{K})$. En efecte, $HSP(\mathcal{K})$ és una varietat ja que (1) $HHSP(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K})$; (2) $SHSP(\mathcal{K}) \subseteq HSSP(\mathcal{K}) = HSP(\mathcal{K})$; i (3) $PHSP(\mathcal{K}) \subseteq HPSP(\mathcal{K}) \subseteq HSPP(\mathcal{K}) = HIISPP(\mathcal{K}) \subseteq HSIPIP(\mathcal{K}) = HSIP(\mathcal{K}) \subseteq HSP(\mathcal{K})$. A més, per una nota anterior sabem que els operadors son extensius, és a dir, $\mathcal{K} \subseteq HSP(\mathcal{K})$. Així, com $V(\mathcal{K})$ és la menor de les varietats es té que $V(\mathcal{K}) \subseteq HSP(\mathcal{K})$.

D'altra banda, com $\mathcal{K} \subseteq V(\mathcal{K})$ es té que $HSP(\mathcal{K}) \subseteq HSP(V(\mathcal{K}))$. Ara bé, $HSP(V(\mathcal{K})) \subseteq V(\mathcal{K})$ ja que $V(\mathcal{K})$ és una varietat i així, $HSP(\mathcal{K}) \subseteq V(\mathcal{K})$. $\square$

14. Termes i àlgebra de termes: 8/03/21

Definició 14.1. Siga Σ una signatura.

(1) Definim l'operador E com per a C un conjunt qualsevol,

$$E(C) = \{\sigma((c_j)_{j\in n}) \mid n \in \mathbb{N}, \sigma \in \Sigma_n, (c_j)_{j\in n} \in C^n\}. \tag{4}$$

(2) Si X és un conjunt d'elements distints que anomenarem *variables*, aleshores denotem per $(B^n_\Sigma(Z) \mid n \in \mathbb{N})$ la família definida per recurssió com

$$\begin{aligned} B^0_\Sigma(X) &= X \cup \Sigma_0 \\ B^{n+1}_\Sigma(X) &= E_\Sigma\left(B^n_\Sigma(X)\right) \cup B^n_\Sigma(X), n \geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

(3) Siga X un conjunt d'elements distints que anomenarem *variables.* El conjunt de *termes per a la signatura* Σ *generats per* X, denotat per $T_\Sigma(X)$, com $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B^n_\Sigma(X)$.

Exemple 14.0.1 . Siga la signatura $\Sigma = \{\cdot\}$ amb $\mathrm{ar}(\cdot) = 2$ i el conjunt de variables $X = \{x, y, z\}$. *Alguns* dels termes que es troben a $T_\Sigma(X)$ són

$$x, y, z, x \cdot y, x \cdot z, y \cdot z, x \cdot x, x \cdot (y \cdot z), (x \cdot y) \cdot z. \tag{6}$$

Remarquem el fet que al conjunt de termes $x \cdot (y \cdot z)$ i $(x \cdot y) \cdot z$ són elements distints ja que

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot z) &= \cdot(x, \cdot(y, z)) \\ (x \cdot y) \cdot z &= \cdot(\cdot(x, y), z) \end{aligned} \tag{7}$$

Nota. Siguen $\sigma, \tau \in \Sigma_n$ i $(P_j)_{j\in n}, (Q_j)_{j\in n} \in (T_\Sigma(X))^n$. Els termes $\sigma((P_j)_{j\in n})$ i $\tau((Q_j)_{j\in n})$ són iguals si, i només si, $\sigma = \tau$ i, per a tot j en n, $P_j = Q_j$.

De la definició per recursivitat és senzill comprovar el següent resultat.

Proposició 14.2. *Siga Σ una signatura i X un conjunt de variables. Aleshores $P \in T_\Sigma(X)$ si, i només si, $P = x$ per a un únic x en X, $P = \sigma$ per a una única constant $\sigma \in \Sigma_0$ o $\sigma((P_i)_{i\in n})$ per a un únic símbol d'aplicació $\sigma \in \Sigma_n$ i una única família $(P_i)_{i\in n} \in (T_\Sigma(X))^n$*

Així, quasi totes les definicions vinents les farem per al cas base ($x \in X$ o $\sigma \in \Sigma_0$) i per recursivitat per als altres termes.

Definició 14.3. Siguen Σ una signatura i X un conjunt de variables.

(1) Definim la funció *variables* de $T_\Sigma(X)$ en Sub(X) com

$$\mathrm{Var} \begin{cases} T_\Sigma(X) \longrightarrow \mathrm{Sub}(X) \\ P \longmapsto \begin{cases} \{x\} & \text{si } P = x \in X \\ \varnothing & \text{si } P = \sigma \in \Sigma_0 \\ \bigcup\{\mathrm{Var}(P_j) \mid j \in n\} & \text{si } P = \sigma((P_j)_{j\in n}) \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

(2) Siga un terme P en $T_\Sigma(X)$ i una $\Sigma-$àlgebra $\mathbf{A}$. Definim l'*avaluació sobre* $\mathbf{A}$, denotada com $P^{\mathbf{A}}$, com l'aplicació de $A^{|\mathrm{Var}_\Sigma(t)|}$ en A definida per cassos com segueix:

(a) si $P = x \in X$,

$$x^{\mathbf{A}} \begin{cases} A \longrightarrow A \\ a \longmapsto a \end{cases} \tag{9}$$

(b) si $P = \sigma \in \Sigma_0$,

$$\sigma^{\mathbf{A}} \begin{cases} 1 \longrightarrow A \\ 0 \longmapsto \sigma^{\mathbf{A}} \end{cases} \tag{10}$$

(c) si $P = \sigma((P_j)_{j\in n})$,

$$P^{\mathbf{A}} \begin{cases} A^{|\mathrm{Var}(P)|} & \longrightarrow & A \\ (a_j)_{j\in|\mathrm{Var}(P)|} & \longmapsto & \sigma^{\mathbf{A}}((P_i^{\mathbf{A}}((a_j)_{j\in|\mathrm{Var}(P)|}))_{i\in|\mathrm{Var}(P)|}) \end{cases} \tag{11}$$

Exemple 14.0.2 . Siga el terme $P = x\cdot(y+z) \in T_{\{\cdot,+\}}(\{x,y,z\})$ i la $\{\cdot,+\}-$àlgebra $\mathbf{R} = (\mathbb{R},\cdot,+)$. Aleshores la seua avaluació funciona com segueix, $P^{\mathbf{R}}(a_1,a_2,a_3) = a_1\cdot(a_2+a_3)$.

Teorema 14.4. *Siga* Σ *una signatura i* $\mathbf{A},\mathbf{B}$ *dues* $\Sigma-$*àlgebres, aleshores,*

(a) Siga $P \in T_\Sigma(X)$ *un terme* $n-$*ari i* $\theta \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. *Si, per a tot* i *en* n, $a_i\theta b_i$, *aleshores,* $P^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})\theta P^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n})$

(b) Siga $P \in T_\Sigma(X)$ *un terme* $n-$*ari i* $f : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ *un homomorfisme, aleshores, per a* $(a_i)_{i\in n} \in A^n$ $,f(P^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})) = P^{\mathbf{B}}((f(a_i))_{i\in n})$.

(c) Siga S *un subconjunt d'*A. *Aleshores*

$$\mathrm{Sg}(S) = \{P^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n}) \mid P \in T_\Sigma(X), n \in \mathbb{N}, |\mathrm{Var}(P)| = n, (a_i)_{i\in n} \in S^n\} \tag{12}$$

Demostració. Definim la *longitud d'un terme* P, denotat com $l(P)$, com el número de símbols d'operació $n-$aris amb $n \geq 1$ que existeixen al terme. Notem que $l(P) = 0$ si, i només si, $P \in X \cup \Sigma_0$.

(a) Fem la demostració per inducció sobre $l(P)$. En primer lloc si $l(P) = 0$, aleshores, o bé $P = x$ i en eixe cas $(P^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n}), P^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n})) = (a,b) \in \theta$. En altre cas, $P = \theta$ i en eixe cas $(P^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n}), P^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n})) = (\sigma^{\mathbf{A}},\sigma^{\mathbf{A}}) \in \theta$. Suposem ara $l(P) > 0$ i que se compleix el resultat per a $l(Q) < l(P)$. Si $P = \sigma((P_j)_{j\in n})$ és evident que, per a tot i en n, $l(P_i) < l(P)$, així, $P_i^{\mathbf{A}}((a_j)_{j\in n})\theta P_i^{\mathbf{A}}((b_j)_{j\in n})$ però, per definició de congruència, $\sigma^{\mathbf{A}}((P_i^{\mathbf{A}}((a_j)_{j\in n}))_{i\in n})\theta\sigma^{\mathbf{A}}((P_i^{\mathbf{A}}((b_j)_{j\in n}))_{i\in n})$.

(b) Prova anàloga a (a).

(c) Evident a partir de la caracterització de l'operador Sg. $\square$

Definició 14.5. L'*àlgebra de termes de tipus* Σ *sobre* X, denotada $\mathbf{T}_\Sigma(X)$, és l'àlgebra amb univers $T_\Sigma(X)$ i on les operacions actuen, per a $n \in \mathbb{N}$, $\sigma \in \Sigma_n$ i $(P_j)_{j\in n} \in (T_\Sigma(X))^n$, com $\sigma^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}((P_j)_{j\in n}) = \sigma((P_j)_{j\in n})$. Recordem que $T_\Sigma(\varnothing)$ existeix si, i només si, $\Sigma_0 \neq \varnothing$.

Definició 14.6. Siguen $\mathcal{K}$ una classe d'àlgebres de tipus Σ i $\mathbf{U}(X)$ una $\Sigma-$àlgebra generada per X. Direm que $\mathbf{U}(X)$ té la *propietat universal per a $\mathcal{K}$ sobre X* si, per a tota àlgebra $\mathbf{A}$ de $\mathcal{K}$ i tota funció $f: X \longrightarrow \mathbf{A}$, existeix un homomorfisme $f^\sharp : \mathbf{U}(X) \longrightarrow \mathbf{A}$ que estén f, i.e., per a tot x d'X, $f^\sharp(x) = f(x)$. Dit d'una altra forma, el següent diagrama és commutatiu:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\text{in}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{U}(X) \arrow[d, dashed, "f^\sharp"] \\ & \mathbf{A} \end{tikzcd}$$

X és un conjunt de *generadors lliures d'*$\mathbf{U}(X)$ o que $\mathbf{U}(X)$ està *lliurement generada* per X.

Nota. Si existeix dita aplicació $f^\sharp$, per les condicions que se li demanen, és única del fet que dues aplicacions coincideixen si, i només si, coincideixen en un conjunt de generadors.

Teorema 14.7. *Suposem que $\mathbf{U_1}(X_1)$ i $\mathbf{U_2}(X_2)$ són dos àlgebres en una classe $\mathcal{K}$ amb la propietat universal sobre els conjunts indicats. Si $|X_1| = |X_2|$, aleshores $\mathbf{U_1}(X_1) \cong \mathbf{U_2}(X_2)$.*

Demostració. És evident que l'aplicació identitat de X_j té una única extensió a un homomorfisme de $\mathbf{U}_j(X_j)$ a $\mathbf{U}_j(X_j)$ com a l'homomorfisme identitat. Com X_1 i X_2 tenen la mateixa cardinalitat, podem considerar $f : X_1 \longrightarrow X_2$ que s'estén per la propietat universal a un homomorfisme $f^\sharp : \mathbf{U}_1(X_1) \longrightarrow \mathbf{U}_2(X_2)$ i un altre homomorfisme $f^{-1^\sharp} : \mathbf{U}_2(X_2) \longrightarrow \mathbf{U}_1(X_1)$ estenent, respectivament, f i f^{-1}.

Així, $f^\sharp \circ f^{-1^\sharp}$ és un endomorfisme de $\mathbf{U}_2(X_2)$ i $f^{-1^\sharp} \circ f^\sharp$ és un endomorfisme de $\mathbf{U}_1(X_1)$. Per la unicitat de l'extensió, $f^\sharp \circ f^{-1^\sharp} = \mathrm{id}_{\mathbf{U}_2(X_2)}$ i $f^{-1^\sharp} \circ f^\sharp = \mathrm{id}_{\mathbf{U}_1(X_1)}$. Per tant, $f^{-1^\sharp} = f^{\sharp^{-1}}$ i $\mathbf{U}_1(X_1) \cong \mathbf{U}_2(X_2)$. $\square$

Teorema 14.8. *L'àlgebra de termes $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ té la propietat universal per a la classe d'àlgebres de tipus Σ sobre X sempre que $X \neq \varnothing$ o $\Sigma_0 \neq \varnothing$.*

Demostració. Siga $f : X \longrightarrow A$ on $\mathbf{A}$ és de tipus Σ. Definim $f^\sharp : T_\Sigma(X) \longrightarrow A$ recursivament com, per a $x \in X$, $f^\sharp(x) = f(x)$ i, per a $\sigma \in \Sigma_n, (P_j)_{j\in n}$, $f^\sharp(\sigma((P_j)_{j\in n})) = \sigma^{\mathbf{A}}((f^\sharp(P_j))_{j\in n})$ i així, per pròpia definició, és un homomorfisme. □

Definició 14.9. Siga $\mathcal{K}$ una família d'àlgebres de tipus Σ i una família de variables X.

(1) La $\mathcal{K}-$*congruència sobre* X, denotada per $\theta_{\mathcal{K}}(X)$, es defineix com $\bigcup \Phi_{\mathcal{K}}(X)$ on $\Phi_{\mathcal{K}}(X) = \{\phi \in \mathrm{Con}(\mathbf{T}_\Sigma(X)) \mid \mathbf{T}_\Sigma(X)/\phi \in IS(\mathcal{K})\}$.

(2) Definim l'*àlgebra* $\mathcal{K}-$*lliure sobre* $\overline{X}$, denotada com $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$, com $\mathbf{T}_\Sigma(X)/\theta_{\mathcal{K}}(X)$ on $\overline{X} = X/\theta_{\mathcal{K}}(X)$. Per simplificar notació escrivim, per a $x \in X$, $\overline{x}$ per denotar $[x]_{\theta_{\mathcal{K}}(X)}$ i per a $P = \sigma((P_j)_{j\in n}) \in T_\Sigma(X)$ escriurem $\overline{P}$ per denotar $\sigma^{\mathbf{T}_\Sigma(\overline{X})}((\overline{P_j})_{j\in n})$.

Nota. (1) $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$ existeix si, i només si, existeix $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ existeix si, i només si, $X \neq \varnothing$ o $\Sigma_0 \neq \varnothing$. (2) Si $|X| = |Y|$ i $T_\Sigma(X)$ existeix, aleshores $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \cong \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{Y})$. Així, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(X)$ queden determinades, salvant isomorfisme, per $\mathcal{K}$ i $|X|$.

Teorema 14.10 (Birkhoff)**.** *Si $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ existeix. Aleshores, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$ té la propietat universal per a $\mathcal{K}$ sobre X.*

Demostració. Siga $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ i f una aplicació de $\overline{X}$ en A. Si considerem la projecció canònica $\mathrm{pr} : \mathbf{T}_\Sigma(X) \twoheadrightarrow \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$, aleshores $(f \circ \mathrm{pr}) \restriction_X$ és una aplicació d'X en A, així, per la propietat universal per a $\mathbf{T}_\Sigma(X)$ existeix un homomorfisme $(f \circ \mathrm{pr}) \restriction_X^\sharp$: $\mathbf{T}_\Sigma(X) \longrightarrow \mathbf{A}$ estenent $(f \circ \mathrm{pr}) \restriction_X$. Per definició de $\theta_{\mathcal{K}}(X)$ com $\mathrm{Ker}((f \circ \mathrm{pr}) \restriction_X^\sharp) \in \Phi_{\mathcal{K}}(X)$, es té que $\mathrm{Ker}(\mathrm{pr}) = \theta_{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathrm{Ker}((f \circ \mathrm{pr}) \restriction_X^\sharp)$, aleshores, existeix un homomorfisme $f^\sharp : \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \longrightarrow \mathbf{A}$ complint que $(f \circ \mathrm{pr}) \restriction_X^\sharp = f^\sharp \circ \mathrm{pr}$. Així, per a $x \in X$ tenim que $f^\sharp(\overline{x}) = f^\sharp \circ \mathrm{pr}(x) = (f \circ \mathrm{pr}) \restriction_X^\sharp (x) = f \circ \mathrm{pr}(x) = f(\overline{x})$ provant així que $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(X)$ té la propietat universal. □

Exemple 14.0.3 . El *monoide lliure en* S, denotat per $\mathbf{S}^\star$, és $(S^\star, \curlywedge, \lambda)$, on $S^\star$, el conjunt de totes les *paraules en* S, és $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(n, S)$, $\curlywedge$, la *concatenació* de paraules en S, és l'operació binaria en $S^\star$ que envia un parell de paraules (w, v) de S a l'aplicació $w \curlywedge v$ de $|w| + |v|$ a S, on $|w|$ i $|v|$ són les longituds

($\equiv$ dominis) de les aplicacions w i v respectivament, definida com segueix: $w \curlywedge v(i) = w_i$, si $0 \leq i < |w|$; $w \curlywedge v(i) = v_{i-|w|}$, si $|w| \leq i < |w| + |v|$, i λ, la *paraula buida en* S, és l'única aplicació de $0 = \varnothing$ a S.

$$w \curlywedge v \begin{cases} |w| + |v| & \longrightarrow \quad S \\ \quad i & \longmapsto \quad \begin{cases} w_i, & \text{si } 0 \leq i < |w|; \\ v_{i-|w|} & \text{si } |w| \leq i < |w| + |v|. \end{cases} \end{cases} \tag{13}$$

Corol·lari 14.11. *Si $\mathcal{K}$ és una classe d'àlgebres de tipus Σ i $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, aleshores per a X suficientment gran,* $\mathbf{A} \in H(\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}))$

Demostració. Considerem X tal que $|X| \geq |A|$ i una aplicació sobrejectiva $f : \overline{X} \twoheadrightarrow A$, aleshores per la propietat universal existeix un homomorfisme $f^\sharp : \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \longrightarrow \mathbf{A}$ i, per tant, $\mathbf{A} \in H(\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}))$. $\square$

15. Teorema de Magari, existència d'àlgebres simples: 22/03/21

Corol·lari 15.1. *Siguen $\mathcal{K}$ i $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ aleshores, per a X suficientment gran* $\mathbf{A} \in H(\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}))$.

Demostració. Considerem X tal que $|X| > |A|$ i $f : \overline{X} \twoheadrightarrow A$ aleshores, per propietat universal, existeix $f^\# : F_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \twoheadrightarrow \mathbf{A}$ epimorfisme, i.e., $\mathbf{A} \in H(F_{\mathcal{K}}(\overline{X}))$. $\square$

Teorema 15.2 (Birkhoff)**.** $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \in ISP(\mathcal{K})$. *En particular si $\mathcal{K}$ és una varietat aleshores,* $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \in \mathcal{K}$.

Demostració. Com $\theta_{\mathcal{K}}(X) = \bigcap \Phi_{\mathcal{X}}$ aleshores, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) = T_\Sigma(X)/\theta_{\mathcal{K}}(X) \in IP_S(\{T_\Sigma(X)/\theta \mid \theta \in \Phi_{\mathcal{K}}(X)\})$, per tant, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \in IP_S IS(\mathcal{K})$. Per les relacions entre els operadors, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \in IPS(\mathcal{K})$. $\square$

Teorema 15.3 (Magari)**.** *Si $\mathcal{V}$ és una varietat no trivial aleshores, existeix $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ àlgebra no trivial simple.*

Demostració. Considerem un conjunt de variables $X = \{x, y\}$ i definim el conjunt $S = \{P(\overline{x}) \mid P \in T_\Sigma(\{x\})\} \subseteq F_\mathcal{V}(\overline{X})$. Si estudiem la congruència generada per S tenim dos cassos.

(1) $\Theta(S) \neq \nabla_{F_\mathcal{V}(\overline{X})}$. Aleshores considerem $[\Theta(S), \nabla_{F_\mathcal{V}(\overline{X})}] \setminus \{\nabla_{F_\mathcal{V}(\overline{X})}\} \neq \varnothing$. Aplicant el lema de Zorn obtenim una congruència maximal θ_0 i, per tant, $\nabla_{F_\mathcal{V}(\overline{X})}/\theta_0$ és un àlgebra simple no trivial.

Podem aplicar el lema de Zorn. Siga $\{\theta_i \mid i \in I\} \subseteq [\Theta(S), \nabla_{F_\mathcal{V}(\overline{X})}] \setminus \{\nabla_{F_\mathcal{V}(\overline{X})}\}$ comprovem que $\bigvee_{i\in I} \theta_i \neq \nabla_{F_\mathcal{V}(\overline{X})}$. Per a fer-ho veiem en primer lloc

$$\theta \in [\Theta(S), \nabla_{F_\mathcal{V}(\overline{X})}] \implies \Big(\theta = \nabla_{F_\mathcal{V}(\overline{X})} \iff (\overline{x}, \overline{y}) \in \theta\Big) \tag{14}$$

Supoosem que $(\overline{x}, \overline{y}) \in \theta$ aleshores per a tot $P(x, y)$ tenim que $P^{\mathbf{F}_\mathcal{V}(\overline{X})}(\overline{x}, \overline{y}) \equiv_\theta P^{\mathbf{F}_\mathcal{V}(\overline{X})}(\overline{x}, \overline{x}) \equiv_{\Theta(S)} \overline{x}$. Així $\theta = \nabla_{F_\mathcal{V}(\overline{X})}$. La implicació contraria és directa. Així, concloem que com, per a cada $i \in I$, $(\overline{x}, \overline{y}) \notin \theta_i$, ja que en altra cas serien la relació total, $(\overline{x}, \overline{y}) \notin \bigvee_{i\in I} \theta_i$ i $\bigvee_{i\in I} \theta_i \neq \nabla_{F_\mathcal{V}(\overline{X})}$ completant la primera part de la prova.

(2) $\Theta(S) = \nabla_{F_\mathcal{V}(\overline{X})}$. Com Θ és un operador clausura algebraic aleshores existeix $S_0 \subseteq_\mathrm{f} S$ tal que $(\overline{x}, \overline{y}) \in \Theta(S_0)$. Denotem $\mathbf{S}$ la subàlgebra amb subunivers $S = \mathrm{Sg}(\{x\})$. En primer lloc per la propietat universal S no és trivial. Provem que $\nabla_S = \Theta(S_0)$. En efecte si considerem per a $P(\overline{x}) \in S$ l'homomorfisme f de $\mathbf{F}_\mathcal{V}(\overline{X})$ en $\mathbf{S}$ definit per $f(\overline{x}) = \overline{x}$ i $f(\overline{y}) = P(\overline{x})$ aleshores, com $(\overline{x}, \overline{y}) \in \Theta(S_0)$, $(f(\overline{x}), f(\overline{y})) = (\overline{x}, P(\overline{x})) \in \Theta(f(S_0)) = \Theta(S_0)$. Per tant, $\Theta(S_0) = \nabla_S$. Aplicant de manera similar a l'anterior (ocnsiderant un S_0 amb cardinal mínim) existeix una congruència màximal θ_0 i, en conseqüència $\mathbf{S}/\theta_0$ és simple no trivial. $\square$

Definició 15.4. $\mathbf{A}$ una àlgebra és *localment finita* si qualsevol àlgebra finitament generada és finita. Una classe $\mathcal{K}$ és localment finita si tota àlgebra de $\mathcal{K}$ és localment finita.

Teorema 15.5. *Siga $\mathcal{V}$ una varietat. $\mathcal{V}$ és localment finita si, i només si*

$$|X| < \aleph_0 \iff |\mathbf{F}_\mathcal{V}(\overline{X})| < \aleph_0 \tag{15}$$

Demostració. La condició és necessària. Evident

La condició és suficient. Siga $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ finitament generada i $B \subseteq_{\mathrm{f}} A$ un conjunt de generadors. Podem considerar X tal que existeix una bijecció $f : \overline{X} \xrightarrow{\sim} B$, per propietat universal existeix un homomorfisme $f^{\#} : \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{X}) \longrightarrow \mathbf{A}$. Ara bé, $f^{\#}(\mathbf{F}_{\mathcal{V}}) \leq \mathbf{A}$ i com $B \subseteq f^{\#}(\mathbf{F}_{\mathcal{V}})$ aleshores, $f^{\#}(\mathbf{F}_{\mathcal{V}}) = \mathbf{A}$. Com, per suposició, $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}| < \aleph_0$ aleshores, $|A| < \aleph_0$. □

Teorema 15.6. *Siga $\mathcal{K}$ un conjunt finit d'àlgebres finites aleshores, $V(\mathcal{K})$ és localment finita.*

Demostració. Siga $\mathbf{A} \in V(\mathcal{K}9$ finitament generada i $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunt de generadors. Considerem en $T_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ la relació següent

$$p \sim q \iff \forall\, \mathbf{C} \in \mathcal{K}\; p^{\mathbf{C}} = q^{\mathbf{C}} \tag{16}$$

Per la forma de $\mathcal{K}$ aleshores, $T_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)/\sim$ és finit i així, $\mathbf{A} = \mathrm{Sg}(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \{p^{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n) \mid p \in T_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)\} = \{p^{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n) \mid p \in T_\Sigma(x_1, \ldots, x_n)/\sim$ $\}$, per tant, A és finit. □

16. Identitats d'una classe: 29/03/21

Una volta estudiats els termes i la seua àlgebra associada i l'àlgebra lliure associada a una classe, l'objectiu, entre altres, caracteritzar la noció ja donada de varietat pel teorema de Birkhoff que expressa que un conjunt és una varietat si, i només si, és equacional. Seguidament, donem una altra expressió per a l'operador de classe V en funció de les imatges homomorfes i productes subdirectes.

Començarem la secció definint formalment les nocions de identitat, satisfer-se una identitat i identitats d'una classe d'àlgebres. Seguidament, estudiem algunes de les seues propietat com les relacions entre les identitats entre classes d'àlgebres, concretament i final, entre $\mathcal{K}$, $I(\mathcal{K})$, $S(\mathcal{K})$, $H(\mathcal{K})$ i $P(\mathcal{K})$.

Definició 16.1. Siga Σ una signatura i X un conjunt de variables, tals que, $T_\Sigma(X)$ existeix.

(1) Una *identitat* és qualsevol element $(P, Q) \in T_\Sigma(X)^2$ abreujat, per convenció de notació, com $P \approx Q$. Podem fer explícita la dependència de les variables

escrivint-ho com $P((x_i)_{i\in n}) \approx Q((x_i)_{i\in n})$ on $n = |\mathrm{Var}(P) \cup \mathrm{Var}(Q)|$. Farem aquesta assumpció respecte a l'index n d'ara en davant. Al conjunt de totes les identitats de tipus Σ sobre X, i.e., $T_\Sigma(X)^2$, el denotarem també com $\mathrm{Id}(X)$.

(2) Una $\Sigma-$àlgebra $\mathbf{A}$ *satisfà* la identitat $P((x_i)_{i\in n}) \approx Q((x_i)_{i\in n})$, denotat com $\mathbf{A} \models P((x_i)_{i\in n}) \approx Q((x_i)_{i\in n})$ i abreujat com $\mathbf{A} \models P \approx Q$, si $P^{\mathbf{A}} = Q^{\mathbf{A}}$, i.e., per a cada $(a_i)_{i\in n} \in A^n$, $P^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n}) = Q^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})$. L'expressarem també dient que la identitat $P \approx Q$ *és certa* en $\mathbf{A}$ o *se verifica* en $\mathbf{A}$. Siga $\Gamma \subseteq \mathrm{Id}(X)$ direm que l'àlgebra $\mathbf{A}$ *satisfà* Γ si, per a cada identitat $P \approx Q \in \Gamma$, $\mathbf{A} \models P \approx Q$.

(3) Una classe $\mathcal{K}$ de tipus Σ *satisfà* la identitat $P \approx Q$, denotat per $\mathcal{K} \models P \approx Q$, si, per a cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$, $\mathbf{A} \models P \approx Q$. Siga $\Gamma \subseteq \mathrm{Id}(X)$ direm que una classe de $\Sigma-$àlgebres $\mathcal{K}$ *satisfà* Γ si, per a cada $P \approx Q \in \Gamma$, $\mathcal{K} \models P \approx Q$.

(4) Donada una classe d'àlgebres $\mathcal{K}$ denotem per $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$ el conjunt de identitats que se verifiquen en $\mathcal{K}$, i.e. , $\{P \approx Q \in \mathrm{Id}(X) \mid \mathcal{K} \models P \approx Q\}$.

També podem utilitzar el simbol $\not\models$ per a expressar que *no se satisfà*, *no se verifica* o que la identitat *no és certa*.

Nota. Podem entendre la definició anterior com una relació entre les classes de $\Sigma-$àlgebres i les identitats sobre un conjunt de variables en el següent sentit,

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Classes} & \longrightarrow & \mathsf{Identitats} \\ \mathcal{K} & \longmapsto & \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) \end{array} \tag{17}$$

L'objectiu d'aquesta secció és estudiar esta relació per a, seguidament, buscar i entendre la relació contraria, i.e., la que donades un conjunt d'indentitats li assigna una classe de $\Sigma-$àlgebres. Aquestes relacions terminaran donant el teorema de Birkhoff que expressa, sota certes condicions, com es tracta la composició d'aquests dues operadors.

Nota. Si considerem dues classes $\mathcal{K}$ i $\mathcal{S}$ amb la relació $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{K}$ de les definicions és evident que, donat un conjunt de variables X, $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathcal{S}}(X)$.

Suposem d'ara endavant, mentre no es diga el contrari, que X és un conjunt de variables qualsevol. Caracteritzem ara la noció de que una classe d'àlgebres satisfaça una identitat per mitjà d'homomorfismes ja que resulta més útil que la definició original.

Proposició 16.2. *Siga $\mathcal{K}$ classe d'àlgebres de tipus Σ i $P \approx Q$ una identitat de tipus Σ sobre X. Aleshores, $\mathcal{K} \models P \approx Q$ si, i només si, per a cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ i cada $\mathbf{T}_\Sigma(X) \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbf{A}$, $f(P) = f(Q)$.*

Demostració. Veïem en primer lloc que la condició és necessària. Suposem que $\mathcal{K} \models P((x_i)_{i\in n}) \approx Q((x_i)_{i\in n})$ i suposem arbitràries però fixes una $\Sigma-$àlgebra $\mathbf{A}$ i un homomorfisme $\mathbf{T}_\Sigma(X) \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbf{A}$. Aleshores, per definició, $P^{\mathbf{A}}((f(x_i))_{i\in n}) = Q^{\mathbf{A}}((f(x_i))_{i\in n})$, que, per ser f homomorfisme, es té que, $f(P^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}((x_i)_{i\in n})) = f(Q^{\mathbf{T}_\Sigma(X)}((x_i)_{i\in n}))$ la qual cosa implica que $f(P) = f(Q)$.

Recíprocament suposem $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ i $(a_i)_{i\in n} \in A^n$, aleshores per la propietat universal, existeix un homomorfisme $\mathbf{T}_\Sigma(X) \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbf{A}$ tal que, per a cada $i \in n$, $f(x_i) = a_i$. Aleshores, $P^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n}) = P^{\mathbf{A}}((f(x_i))_{i\in n}) = f(P) = f(Q) = Q^{\mathbf{A}}((f(x_i))_{i\in n}) = Q^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})$. Cosa que prova que $\mathcal{K} \models P \approx Q$. $\square$

Proposició 16.3. *Siga $\mathcal{K}$ una classe de $\Sigma-$àlgebres, aleshores, $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) = \mathrm{Id}_{I(\mathcal{K})}(X)$.*

Demostració. Per una nota anterior i notant que $\mathcal{K} \subseteq I(\mathcal{K})$, es té que $\mathrm{Id}_{I(\mathcal{K})}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$.

Per a la inclusió recíproca suposem $P \approx Q \in \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$, i.e., $\forall \mathbf{A} \in \mathcal{K}$ $(\mathbf{A} \models P \approx Q)$. Suposem $\mathbf{B} \in I(\mathcal{K})$ i $(b_i)_{i\in n} \in B^n$ arbitraris però fixes. Així, per definició, existeix $\mathbf{A} \xrightarrow{\quad \sim \quad} f\, \mathbf{B}$ isomorfisme i, per ser sobrejectiva, existeix una familia $(a_i)_{i\in n} \in A^n$ complint que, per a cada $i \in n$, $f(a_i) = b_i$. Ara bé, si evaluem $P^{\mathbf{B}}((b_i)_{i\in n}) = P^{\mathbf{B}}((f(a_i))_{i\in n}) = f(P^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})) = f(Q^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})) = Q^{\mathbf{B}}((f(a_i))_{i\in n}) = Q^{\mathbf{B}}((b_i)_{i\in n})$. Per tant, $\mathbf{B} \models P \approx Q$ i $P \approx Q \in \mathrm{Id}_{I(\mathcal{K}}(X)$.

Conseqüentment, $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{I(\mathcal{K})}(X)$ i tenim la igualtat. $\square$

Proposició 16.4. *Siga $\mathcal{K}$ una classe de $\Sigma-$àlgebres, aleshores, $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) = \mathrm{Id}_{H(\mathcal{K})}(X) = \mathrm{Id}_{S(\mathcal{K})}(X) = \mathrm{Id}_{P(\mathcal{K})}(X)$.*

Demostració. En primer lugar notemos que todos los operadores H, S y P són extensivos, por tanto, $\mathcal{K} \subseteq H(\mathcal{K})$, $\mathcal{K} \subseteq S(\mathcal{K})$ i $\mathcal{K} \subseteq P(\mathcal{K})$, la qual cosa implica que $\mathrm{Id}_{H(\mathcal{K})}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$, $\mathrm{Id}_{S(\mathcal{K})}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$ i $\mathrm{Id}_{P(\mathcal{K})}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$.

Per a provar totes les igualtats contràries siga $P \approx Q \in \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$.

La prova de que $\mathrm{Id}_{H(\mathcal{K})}(X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$ és exactament igual que la prova del prop anterior ja que, en eixa prova, només hem utilitzat la sobrejectivitat de l'aplicació.

Suposem ara $\mathbf{B} \in S(\mathcal{K})$, aleshores, existeix $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ amb $\mathbf{B} \leq \mathbf{A}$. Així, per a qualsevol família $(b_i)_{i\in n} \in B^n \subseteq A^n$, per tant, $P^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n}) = Q^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n})$ però, per ser $\mathbf{B}$ una subàlgebra, en concret, el conjunt B és tancat per a totes les operacions, $P^{\mathbf{B}}((b_i)_{i\in n}) = P^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n}) = Q^{\mathbf{A}}((b_i)_{i\in n}) = Q^{\mathbf{B}}((b_i)_{i\in n})$ la qual cosa verifica que $\mathbf{B} \models P \approx Q$ i prova que $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{S(\mathcal{K})}(X)$, per tant, $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) = \mathrm{Id}_{S(\mathcal{K})}(X)$.

Finalment, si $\mathbf{A} \in P(\mathcal{K})$, aleshores, existeixen n un natural i, per cada $i \in n$, $\mathbf{A}_i \in \mathcal{K}$ tals que $\mathbf{A} = \prod_{i\in n} \mathbf{A}_i$. Siga una família $(a_i)_{i\in n} \in \mathbf{A}$, així, sabem que, per a cada $j \in n$, $P^{\mathbf{A_j}}((a_i(j))_{i\in n}) = Q^{\mathbf{A_j}}((a_i(j))_{i\in n})$, que, per definició d'àlgebra producte, és equivalent a $P^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})(j) = Q^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})(j)$. Però, finalment, com tenim la igualtat per a qualsevol j, aleshores, $\mathbf{A} \models P \approx Q$ i $P \approx Q \in \mathrm{Id}_{P(\mathcal{K})}(X)$ provant la última inclusió $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{P(\mathcal{K})}(X)$. □

Corol·lari 16.5. *Siga $\mathcal{K}$ una classe de $\Sigma-$àlgebres, aleshores,* $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) = \mathrm{Id}_{V(\mathcal{K})}(X)$

Demostració. Evident tenint en compte que l'operador V és igual a HSP. □

Proposició 16.6. $\mathrm{Id}_{\mathsf{Alg}}(X) = \{P \approx P \mid P \in T_\Sigma(X)\}$.

Demostració. La prova és evident si notem que $\mathbf{T}_\Sigma(X) \in \mathsf{Alg}$ i recordem que, en dita àlgebra, per a $\sigma, \tau \in \Sigma$, $(P_j)_{j\in n} \in T_\Sigma(X)^n$ i $(Q_j)_{j\in m} \in T_\Sigma(X)^m$, $\sigma((P_j)_{j\in n}) = \tau((Q_j)_{j\in m})$ si, i només si, $\sigma = \tau$, $n = m$ i, per a cada $i \in n$, $P_i = Q_i$. □

És evident de la definició d'àlgebra $\mathcal{K}-$lliure que ha d'existir una relació entre ella i el conjunt d'indentitats associades a una classe. En concret, per exemple, el residual associat a la classe Alg era $\theta_{\mathsf{Alg}}(X) = \Delta_{T_\Sigma(X)}$ precisament perquè Alg conté a l'àlgebra absolutament lliure, com passava a l'últim prop. Així, la següent caracterització ens serà molt útil per a utilitzar-la d'ací en davant.

Teorema 16.7. *Donats una classe de $\Sigma-$àlgebres $\mathcal{K}$ i dos termes $P, Q \in T_\Sigma(X)$, les següents afirmacions són equivalents*

(1) $\mathcal{K} \models P \approx Q$;

(2) $\mathbf{F}_\mathcal{K}(\overline{X}) \models P \approx Q$;

(3) $\overline{P} = \overline{Q}$ *en* $\mathbf{F}_\mathcal{K}(\overline{X})$;

(4) $(P, Q) \in \theta_\mathcal{K}(X)$.

Demostració. Provem que cada afirmació implica la següent i, finalment, que la quarta afirmació implica la primera.

Suposem (1) i $P \approx Q \in \mathrm{Id}_\mathcal{K}(X)$, per un resultat anterior, $\mathbf{F}_\mathcal{K}(\overline{X}) \in ISP(\mathcal{K})$ i, per tant, com $\mathrm{Id}_{ISP(\mathcal{K})}(X) = \mathrm{Id}_\mathcal{K}(X)$, es té que $\mathbf{F}_\mathcal{K}(X) \models P \approx Q$.

Suposem (2), aleshores, per definició, per a cada $(\overline{x_i})_{i\in n} \in \overline{X}^n$, $P^{\mathbf{F}_\mathcal{K}(\overline{X})}((\overline{x_i})_{i\in n}) = Q^{\mathbf{F}_\mathcal{K}(\overline{X})}((\overline{x_i})_{i\in n})$, la qual cosa és, per definició, que $\overline{P} = \overline{Q}$ en $\mathbf{F}_\mathcal{K}(\overline{X})$.

Suposem (3), aleshores, si considerem la projecció natural de l'àlgebra de termes a l'àlgebra lliure

$$\mathrm{pr}^{\theta_\mathcal{K}(X)} \begin{cases} \mathbf{T}_\Sigma(X) & \longrightarrow & \mathbf{T}_\Sigma(X)/\theta_\mathcal{K}(X) \\ P & \longmapsto & \overline{P} = [P]_{\theta_\mathcal{K}(X)} \end{cases} \tag{18}$$

així, $\mathrm{pr}^{\theta_\mathcal{K}(X)}(P) = \overline{P} = \overline{Q} = \mathrm{pr}^{\theta_\mathcal{K}(X)}(Q)$, per tant $(P, Q) \in \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^{\theta_\mathcal{K}(X)}(P)) = \theta_\mathcal{K}(X)$.

Suposem (4), i considerem $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ i $(a_i)_{i\in n} \in A^n$ arbitraris però fixes. Per la propietat universal podem considerar un homomorfisme $\mathbf{T}_\Sigma(X) \longrightarrow f\ \mathbf{A}$ tal que, per a cada $i \in n$, $f(x_i) = a_i$. Com $\mathrm{Ker}(f) \in \Phi_\mathcal{K}(X)$, $\mathrm{Ker}(f) \supseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}^{\theta_\mathcal{K}(X)}) = \theta_\mathcal{K}(X)$. Construïm ara un homomorfisme $\mathbf{F}_\mathcal{K}(\overline{X}) \longrightarrow g\ \mathbf{A}$ com segueix, per a $\overline{P} \in \mathbf{F}_\mathcal{K}(\overline{X})$ envia $\overline{P}$ en $f(P)$, i.e., tenim el diagrama conmutatiu següent

$$\begin{tikzcd} \mathbf{T}_\Sigma(X) \arrow[r, "\mathrm{pr}^{\theta_{\mathcal{K}}(X)}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(X) \arrow[d, "g"] \\ & \mathbf{A} \end{tikzcd} \tag{19}$$

Aleshores $f(P) = g \circ \mathrm{pr}^{\theta_{\mathcal{K}}(X)}(P) = g \circ \mathrm{pr}^{\theta_{\mathcal{K}}(X)}(Q) = f(Q)$. Per tant, per la primera caracterització de la secció anterior, $\mathcal{K} \models P \approx Q$. $\square$

Corol·lari 16.8. *Siga $\mathcal{K}$ una classe de $\Sigma-$àlgebres i $P, Q \in T_\Sigma(X)$, aleshores, per a cada conjunt de variables Y amb $|Y| \geq |X|$, $\mathcal{K} \models P \approx Q$ si, i només si, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{Y}) \models P \approx Q$.*

Demostració. Que la condició és necessària és vident ja que, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{Y}) \in ISP(\mathcal{K})$. Provem ara que la condició és suficient.

Considerem $X_0 \supseteq X$ amb $|X_0| = |Y|$, aleshores, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{Y}) \cong \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X_0})$ i, com $\mathcal{K} \models P \approx Q$ si, i només si, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X_0})$ que implica $\mathcal{K} \models P \approx Q$ si, i només si, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{Y})$. $\square$

Corol·lari 16.9. *Siga $\mathcal{K}$ una classe de $\Sigma-$àlgebres i $P, Q \in T_\Sigma(X)$, aleshores, per a cada conjunt de variables infinit Y, $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) = \mathrm{Id}_{\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{Y})}(X)$.*

Demostració. Per a $P((x_i)_{i \in n}) \approx Q((x_i)_{i \in n}) \in \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$ com $|\{x_i \mid i \in n\}| < |Y|$ pel corolari anterior $\mathcal{K} \models P \approx Q$ si, i només si, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{Y}) \models P \approx Q$. $\square$

Corol·lari 16.10. *Siguen $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}'$ classes de $\Sigma-$àlgebres. Si $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{K}'}(X)$, alehores, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) = \mathbf{F}_{\mathcal{K}'}(\overline{X})$*

Demostració. La demostració és evident si notem que si $\overline{P} = \overline{Q}$ en $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$, aleshores $P \approx Q \in \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{K}'}(X)$ i, per tant, si $\overline{P} = \overline{Q}$ en $\mathbf{F}_{\mathcal{K}'}(\overline{X})$. $\square$

17. Models: 19/04/21

Hem definit i caracteritzat la noció d'identitat i d'identitats definides per una classe. L'objectiu d'aquesta secció és estudiar la relació contrària, i.e., donats un grup d'identitats associar-li la classe d'àlgebres que satisfan dites igualtats.

Definició 17.1. Siga Σ una signatura i X un conjunt de variables. Per a cada $\Gamma \subseteq \mathrm{Id}(X)$, definim el seu *model*, denotat per $\mathrm{Mod}(\Gamma)$, com $\{\mathbf{A} \in \mathsf{Alg} \mid \mathbf{A} \models \Gamma\}$. Una classe $\mathcal{K}$ d'algebres de tipus Σ és *equacional* si existeix $\Gamma \subseteq \mathrm{Id}(X)$ tal que $\mathcal{K} = \mathrm{Mod}(\Gamma)$. També direm que $\mathcal{K}$ està *definida* o *axiomatitzada* per Γ.

Nota. Hem d'entendre el concepte de model com una correspondència entre identitats i classes com hem fet amb el concepte d'identitats derivades d'una classe.

$$\begin{array}{ccc} \textsf{Classes} & \longleftarrow & \textsf{Identitats} \\ \mathrm{Mod}(\Gamma) & \longleftarrow\!\shortmid & \Gamma \end{array} \tag{20}$$

Resulta esperable que aquesta correspondència tinga relació amb la correspondència contraria. En concret, el teorema de Birkhoff ressalta aquesta relació, en el següent sentit, si $\mathcal{V}$ és una varietat, $\mathrm{Mod} \circ \mathrm{Id}$ és la correspondència identitat.

Proposició 17.2. *Per a cada classe de $\Sigma-$àlgebres $\mathcal{K}$ i cada conjunt de variables X,* $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X))}(X)$

Demostració. La inclusió $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X))}(X)$ és evident. Recíprocament suposem $P \approx Q \in \mathrm{Id}_{\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X))}(X)$, aleshores per definició, per a cada $\Sigma-$àlgebra $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}(\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}(X))$, $\mathbf{A} \models P \approx Q$. Ara bé, sabem que, per la definició de model, tenim que, per a cada àlgebra $\mathbf{A}$, si $\mathbf{A} \models \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$ aleshores $\mathbf{A} \models P \approx Q$. En particular, tota àlgebra de $\mathcal{K}$, verifica la identitat $P \approx Q$, i.e., $P \approx Q \in \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}(X)$. $\square$

Proposició 17.3. *Si $\mathcal{V}$ és una varietat i X és finit, aleshores,* $\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}(X)) = \mathcal{V}$

Demostració. Sabem que $\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}(\mathcal{V}))$ y $V(\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}(\mathcal{V})))$ satisfan les mateixes identitats, per tant, $\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}(\mathcal{V})) = V(\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}(\mathcal{V})))$ i és una varietat.

És evident que $V \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Id}(\mathcal{V}))$.

Per a la inclusió reciproca notem que, $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}(X) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}(X))}(X)$, així, $\mathbf{F}_{\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}(\mathcal{V}))}(\overline{X}) = \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{X})$.

Més en general, per a qualsevol conjunt de variables Y infinit sabem per resultats anterior que

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}(\mathcal{V}))}(Y) = \mathrm{Id}_{\mathbf{F}_{\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}(\mathcal{V}))}(\overline{X})}(Y) = \mathrm{Id}_{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{X})}(Y) = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}}(Y). \tag{21}$$

I per la caracterització, $\theta_{\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}(X))}(Y) = \theta_{\mathcal{V}}(Y)$, la qual cosa implica que, $\mathbf{F}_{\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}(X))}(\overline{Y}) = \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{Y})$.

Finalment, suposem $\mathbf{A} \in \mathrm{Mod}(\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}(X))$, aleshores, per un resultat anterior, existeix un conjunt infinit suficientment gran Y tal que

$$\mathbf{A} \in H(\mathbf{F}_{\mathrm{Mod}(\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}(X))}(\overline{Y})) = H(\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{Y})), \tag{22}$$

per tant, com $\mathcal{V}$ és una varietat $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{Y}) \in \mathcal{V}$ i $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ completant la prova. $\square$

Teorema 17.4 (Birkhoff)**.** *$\mathcal{V}$ és una varietat si, i només si, $\mathcal{V}$ és equacional.*

Demostració. Que la condició és necessària és conseqüència directa de la proposició anterior. Recíprocament, suposem que $\mathcal{V}$ és equacional, i.e., $\exists\, \Gamma \subseteq \mathrm{Id}(X)$ ($\mathcal{V} = \mathrm{Mod}(\Gamma)$). Així, $V(\mathcal{V}) \models \Gamma$, per tant, $V(\mathcal{V}) \subseteq \mathrm{Mod}(\Gamma) = \mathcal{V}$ i concloem que $V(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ completant la prova. $\square$

Corol·lari 17.5. *Siguen $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}'$ dues classes de $\Sigma-$àlgebres tals que $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}' \subseteq V(\mathcal{K})$, aleshores $\mathbf{F}_{\mathcal{K}'}(\overline{X}) = \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$. Conseqüentment $\mathbf{F}_{\mathcal{K}'}(\overline{X}) \in ISP(\mathcal{K})$.*

Demostració. Com sabem que $V(\mathcal{K})$ verifica les mateixes identitats que $\mathcal{K}$ concluim que $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{K}'}(X) = \mathrm{Id}_{V(\mathcal{K})}(X)$. Aleshores, $\theta_{\mathcal{K}'}(X) = \theta_{\mathcal{K}}(X)$ i, per tant, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}'}(\overline{X}) = \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X})$. $\square$

Nota. Hem estudiat la *composició* $\mathrm{Mod} \circ \mathrm{Id}$, però, també podem estudiar la composició contraria. És senzill veure que $\mathrm{Id} \circ \mathrm{Mod}$ no és sempre la correspondència identitat. Per exemple, si $\Gamma = \{x(yz) \approx (xy)z\}$ és senzill comprovar que $x(xy) \approx (xx)y \in \mathrm{Id}_{\mathrm{Mod}(\Gamma)}(X)$ però $x(xy) \approx (xx)y \notin \Gamma$. Ara bé, si Γ és un conjunt d'identitats, $\mathrm{Id} \circ \mathrm{Mod}(\Gamma)$ és la teoria derivada/deduïda de Γ, però, com no és l'objecte d'estudi d'aquest document el deixem com a curiositat.

Fins ara hem fet la descripció de l'operador V com HSP i, el teorema de Birkhoff caracteritza quan una classe és una varietat. El propòsit és provar la igualtat entre operadors $V = HP_S$.

Teorema 17.6. *Per a cada $\mathcal{K} \neq \varnothing$ classe de $\Sigma-$àlgebres existeix un cardinal m complint que*

$$|X| \geq m \implies \mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \in IP_S(\mathcal{K}) \tag{23}$$

Demostració. En primer lloc, construïm $\mathcal{K}^*$ una part de $\mathcal{K}$ complint que $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}^*}(X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$.

Siga Y un conjunt infinit de variables i $P \approx Q \in \mathrm{Id}(Y) \setminus \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(Y)$, aleshores, per definició de $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$, existeix $\mathbf{A}_{P,Q} \in \mathcal{K}$ tal que $\mathbf{A}_{P,Q} \not\models P \approx Q$. Considerem el conjunt $\mathcal{K}^* = \{\mathbf{A}_{P,Q} \mid P \approx Q \in \mathrm{Id}(Y) \setminus \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(Y)\}$.

Comprovem que $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}^*}(X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$. Per construcció $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}^*}(X) \subseteq \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$. Recíprocament, com $\mathcal{K}^* \subseteq \mathcal{K}$, aleshores, $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}^*}(X) \supseteq \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$ i $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}^*}(X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$.

Així, considerem m com una fita infinita superior de $\{|A| \mid \mathbf{A} \in \mathcal{K}^*\}$. Definim $\Psi_{\mathcal{K}^*}(X)$ com $\{\phi \in \mathrm{Con}\mathbf{T}_\Sigma(X) \mid \mathbf{T}_\Sigma(X)/\phi \in I(\mathcal{K}^*)\}$ i recordem que $\Phi_{\mathcal{K}}(X) = \{\phi \in \mathrm{Con}\mathbf{T}_\Sigma(X) \mid \mathbf{T}_\Sigma(X)/\phi \in IS(\mathcal{K}^*)\}$.

Notem que $\Psi_{\mathcal{K}^*}(X) \subseteq \Phi_{\mathcal{K}^*}(X)$ i, per tant, $\cap\Psi_{\mathcal{K}^*}(X) \supseteq \cap\Phi_{\mathcal{K}^*}(X) = \theta_{\mathcal{K}^*}(X)$.

Recíprocament, suposem un conjunt X amb $|X| \geq m$ i un parell $(P, Q) \notin \theta_{\mathcal{K}^*}(X)$. Aleshores, $\mathcal{K}^* \not\models P \approx Q$, i.e., existeix $\mathbf{A} \in \mathcal{K}^*$ tal que $\mathbf{A} \not\models P \approx Q$. En concret, existeix $(a_i)_{i\in n} \in A^n$ amb $P^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n}) \neq Q^{\mathbf{A}}((a_i)_{i\in n})$. Com $|X| \geq m \geq |A|$ podem trobar una aplicació $X \longrightarrow f\ A$ el qual, envia cada x_i a a_i. Per propietat universal, podem estendre eixa aplicació a un epimorfisme $\mathbf{F}_{\mathcal{K}^*}(\overline{X}) \longrightarrow f^\#\ \mathbf{A}$ que, per una caracterització anterior, $f^\#(P) \neq f^\#(Q)$. Per tant, $(P, Q) \notin \mathrm{Ker} \in \Psi_{\mathcal{K}^*}(X)$, que implica $(P, Q) \notin \cap\Psi_{\mathcal{K}^*}(X)$. Així, $\cap\Psi_{\mathcal{K}^*}(X) = \theta_{\mathcal{K}^*}(X)$.

Recordem ara que $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}^*}(X) = \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(X)$ implica que $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) = \mathbf{F}_{\mathcal{K}^*}(\overline{X})$. Així, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) = \mathbf{T}_{\mathcal{K}}(X)/\cap\Psi_{\mathcal{K}^*}(X)$.

Per tant, per resultats anteriors, $\mathbf{F}_{\mathcal{K}}(\overline{X}) \in IP_S(\mathcal{K}^*) \subseteq IP_S(\mathcal{K})$. $\square$

Teorema 17.7. $V = HP_S$

Demostració. Com $P_S \leq SP$, aleshores $HP_S \leq HSP = V$. Recíprocament, donada $\mathcal{K}$ una classe d'àlgebres, existeix una X suficientment gran tal que $\mathbf{F}_{V(\mathcal{K})}(\overline{X}) \in IP_S(\mathcal{K})$, però, sabem doncs que, $V(\mathcal{K}) \subseteq HP_S(\mathcal{K})$ la qual cosa implica $V \leq HP_S$ completant la prova. $\square$

18. Condicions de Mal'cev: 26/04/21

Proposició 18.1. *Siguen $\mathcal{V}$ una varietat, $X = \{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n\}$ el conjunt de variables i $P(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n), Q(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ dos termes. Si*

$$P^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{X})}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \equiv_{\Theta(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)} Q^{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{X})}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \tag{24}$$

aleshores,

$$\mathcal{V} \models P(x_1, \ldots, x_m, y, \ldots, y), \approx Q(x_1, \ldots, x_m, y, \ldots, y) \tag{25}$$

Demostració. Considerem el homomorfisme f de $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$ en $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, \overline{y})$ definida com segueix: $f(\overline{x}_i) = \overline{x}_i$, si $1 \leq i \leq n$; $f(\overline{y}_i) = \overline{y}$, si $1 \leq i \leq m$. Aleshores, es té que $\Theta(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, per tant, $f(P(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)) = f(Q(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n))$, i.e., $P(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, \overline{y}, \ldots, \overline{y}) = Q(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, \overline{y}, \ldots, \overline{y})$ en $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, \overline{y})$. Per una caracterització anterior,

$$\mathcal{V} \models P(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, y, \ldots, y), \approx Q(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m, y, \ldots, y). \tag{26}$$

$\square$

Teorema 18.2 (Mal'cev)**.** *Siga $\mathcal{V}$ una varietat. Per a que $\mathcal{V}$ siga congruent-permutable és suficient y necessari que existisca un terme $P(x, y, z)$ tal que $\mathcal{V} \models \{P(x, x, y) \approx y, P(x, y, y) \approx x\}$.*

Demostració. La condició és necessaria. Suposem que $\mathcal{V}$ és congruent-permutable. En $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ tenim que $(\overline{x}, \overline{z}) \in \Theta(\overline{x}, \overline{y}) \circ \Theta(\overline{y}, \overline{z}) = \Theta(\overline{y}, \overline{z}) \circ \Theta(\overline{x}, \overline{y})$. Així, ha d'existir un terme $P(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ tal que

$$\overline{x} \equiv_{\Theta(\overline{y}, \overline{z})} P(x, y, z) \equiv_{\Theta(\overline{x}, \overline{y})} z \tag{27}$$

Per la proposició anterior se conclou el resultat.

La condició és suficient. Suposem que existeix dit terme. Siguen $\mathbf{A} \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ i $\Phi, \Psi \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Notem que és suficient provar que $\Phi \circ \Psi \subseteq \Psi \circ \Phi$. Siguen $a, b \in A$ tals que $(a, b) \in \Phi$. Així, existeix $c \in A$ tal que $a \equiv_\Phi c \equiv_\Psi b$. Però, com podem escriure,

$$b = P(c, c, b) \equiv_\Phi P(a, c, b) \equiv_\Psi P(a, b, b) = a. \tag{28}$$

Concloem que $(b, a) \in \Phi \circ \Psi$ o, equivalentment, $(a, b) \in \Psi \circ \Phi$. □

Teorema 18.3. *Siga $\mathcal{V}$ una varietat. Si existeix $M(x, y, z) \in F_{\mathcal{V}}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ tal que*

$$\mathcal{V} \models \{M(x, x, y) \approx M(x, y, x) \approx M(y, x, x) \approx x\} \tag{29}$$

aleshores, $\mathcal{V}$ és congruent-distributiva.

Demostració. Suposem que existeix dit terme. Siguen $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ i $\Phi, \Psi, \Lambda \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Recordem que era suficient provar que $\Phi \wedge (\Psi \vee \Lambda) \subseteq (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Lambda)$. Siguen $a, b \in A$ tals que $(a, b) \in \Phi \wedge (\Psi \vee \Lambda)$ aleshores, $(a, b) \in \Phi$ i existeixen $n \in \mathbb{N}, (c_i)_{i \in n} \in A^n$ tals que $a \equiv_\Psi c_0 \equiv_\Lambda c_1 \cdots \equiv_\Psi c_{n-1} \equiv_\Lambda b$. Ara bé, per a cada $i \in n$ tenim que $M(a, c_i, b) \equiv_\Phi M(a, c_i, a) = a$, per tant,

$$\begin{aligned} a = M(a, a, b) &\equiv_{\Phi \wedge \Psi} M(a, c_0, b) \\ &\equiv_{\Phi \wedge \Lambda} M(a, c_1, b) \\ &\dots \\ &\equiv_{\Phi \wedge \Psi} M(a, c_{n-1}, b) \\ &\equiv_{\Phi \wedge \Lambda} M(a, b, b) = b \end{aligned} \tag{30}$$

d'on concloem que $(a, b) \in (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Lambda)$. □

Teorema 18.4 (Pixley)**.** *Són equivalents*

(1) $\mathcal{V}$ és congruent-distributiva i congruent-permutable.
(2) Existeixen termes P i M complint els teoremes anteriors.
(3) Existeix $Q(x, y, z)$ tal que

$$\mathcal{V} \models \{Q(x, y, x) \approx Q(x, y, y) \approx Q(y, y, x) \approx x\} \tag{31}$$

Demostració. Si suposem (2) aleshores, podem definir $Q(x,y,z) = P(x, M(x,y,z), z)$. Si suposem (3) aleshores, podem definir $P(x,y,z) = Q(x,y,z)$ i $M(x,y,z) = Q(x, Q(x,y,z), z)$.

Evidentment (2) implica (1) pels teoremes anteriors.

Provem, finalment, que (1) implica (2). Suposem que $\mathcal{V}$ és congruent-distributiva i congruent-permutable aleshores, per un teorema anterior existeix el terme $P(x,y,z)$. En $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ tenim que $(\overline{x},\overline{z}) \in \Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap [\Theta(\overline{x},\overline{y}) \vee \Theta(\overline{y},\overline{z})] = [\Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap \Theta(\overline{x},\overline{y})] \vee [\Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap \Theta(\overline{y},\overline{z})] = [\Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap \Theta(\overline{x},\overline{y})] \circ [\Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap \Theta(\overline{y},\overline{z})]$. Per tant, existeix $M(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \in F_{\mathcal{V}}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ tal que

$$\overline{x} \equiv_{\Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap \Theta(\overline{x},\overline{y})} M(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \equiv_{\Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap \Theta(\overline{y},\overline{z})} \overline{z} \tag{32}$$

Per tant, se segueix que $\mathcal{V} \models \{M(x,x,y) \approx M(x,y,x) \approx M(y,x,x) \approx x\}$ □

Teorema 18.5 (Jónsson)**.** *Siga $\mathcal{V}$ una varietat. Per a que $\mathcal{V}$ siga congruent-distributiva és suficient i necessari que existisca un $n \in \mathbb{N}$ i $\{P_i(x,y,z)\}_{i \in n+1}$ termes tals que*

$$\mathcal{V} \models \left\{ \begin{array}{cl} P_i(x,y,x) \approx x & 0 \leq i \leq n+1 \\ P_0(x,y,z) \approx x & \\ P_n(x,y,z) \approx z & \\ P_i(x,x,y) \approx P_{i+1}(x,x,y) & \textit{per a } i \textit{ parell} \\ P_i(x,y,y) \approx P_{i+1}(x,y,y) & \textit{per a } i \textit{ imparell} \end{array} \right\} \tag{33}$$

Demostració. La condició és necessària. En $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ tenim que $(\overline{x},\overline{z}) \in \Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap [\Theta(\overline{x},\overline{y}) \vee \Theta(\overline{y},\overline{z})] = [\Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap \Theta(\overline{x},\overline{y})] \vee [\Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap \Theta(\overline{y},\overline{z})]$. Per tant, existeix $(P_i(\overline{x},\overline{y},\overline{z}))_{1 \leq i \leq n-1}$ tals que

$$\begin{aligned} \overline{x} &\equiv_{\Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap \Theta(\overline{x},\overline{y})} P_1(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \\ &\equiv_{\Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap \Theta(\overline{y},\overline{z})} P_2(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \\ &\dots \\ &\equiv_{\Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap \Theta(\overline{x},\overline{y})} P_{n-1}(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \\ &\equiv_{\Theta(\overline{x},\overline{z}) \cap \Theta(\overline{y},\overline{z})} \overline{z} \end{aligned} \tag{34}$$

Amb $P_0(x,y,z) = x$ i $P_n(x,y,z) = z$ se conclouen les equacions anteriors. *La condició és suficient.* Siguen $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$ i $\Phi, \Psi, \Lambda \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Siguen $a, b \in A$ tals que $(a,b) \in \Phi \wedge (\Psi \vee \Lambda)$ aleshores, $(a,b) \in \Phi$ i existeixen $n \in \mathbb{N}, (c_i)_{i\in n} \in A^n$ tals que $a \equiv_\Psi c_0 \equiv_\Lambda c_1 \cdots \equiv_\Psi c_{n-1} \equiv_\Lambda b$. Ara bé, per a $* \in \{a, b, c_0, \ldots, c_{n-1}\}$ tenim que $P_i(a,*,b) \equiv_\Phi P_i(a,*,a) = a$, per tant,

$$
\begin{aligned}
P_i(a,a,b) &\equiv_{\Phi\wedge\Psi} P_i(a,c_0,b) \\
&\equiv_{\Phi\wedge\Lambda} P_i(a,c_1,b) \\
&\ldots \\
&\equiv_{\Phi\wedge\Psi} P_i(a,c_{n-1},b) \\
&\equiv_{\Phi\wedge\Lambda} P_i(a,b,b)
\end{aligned}
\tag{35}
$$

d'on concloem que $P_i(a,a,b) \equiv_{(\Phi\wedge\Psi)\vee(\Phi\wedge\Omega)} P_i(a,b,b)$ que, amb les relacions donades implica que $(a,b) \in (\Phi \wedge \Psi) \vee (\Phi \wedge \Omega)$. $\square$