Turing undecidible: El problema de la parada

Teoría de Algoritmos I (75.29 / 95.06)

Ing. Víctor Daniel Podberezski
vpodberezski@fi.uba.ar

Maquina de turing universal

Una Turing Machine universal (UTM)

Corresponde a una TM que simula cualquier otra TM con un input arbitrario

Propuesto por Turing entre 1936 y 1937

Tanto el input como la descripción de la TM a simular

Se incluyen en el input de la UTM

Se lo considera el origen de la idea

De un programa de computador almacenado utilizado por Von Neumann

¿Es decidible si una TM acepta un input?

Construimos el lenguaje

A_{TM} = {(M,w) / M es una TM y M acepta w}

Construimos la siguiente turing machine universal:

U = “con input (M,w) donde M es una TM y w un input

Simulamos M con input w

Si M entra en algun momento a su estado de aceptación, acepta

Si M entra en algún momento a su estado de rechazo, rechazamos

A_{TM} es Turing reconocible

Queremos saber

¿A_{TM} es Turing reconocible?

Podemos ver que si

M reconoce el lenguaje A_{TM} entonces U lo reconoce

M rechaza el lenguaje A_{TM} entonces U lo rechaza

Pero si

M loopea, U tambien lo hace ...

Problema de la parada (Halting Problem)

¿Existe una TM que

tome por parámetro cualquier TM y diga si la misma es decidible?

(recordemos que una TM es equivalente a un lenguaje)

Sea

$A_{TM} = \{(M,w) \ / \ M \text{ es una TM y } M \text{ acepta } w\}$

Asumimos que A_{TM} es decidible

Y esperamos obtener una contradicción.

Halting Problem: proof

Suponemos H un TM decididor de A_{TM}

H(<M,w>)= { acepta si M acepta w y

rechaza si M no acepta W }

Construimos D una TM que usa H como subrutina

D= con input (M), con M es una TM

Ejecutar H con la entrada (<M,<M>>)

Responder lo opuesto que indique H

En resumen

D(<M>)= { acepta si M no acepta < M> y

rechaza si M no acepta <M> }

Halting Problem: proof

¿Que pasa

Si D se ejecuta con su propia descripción <D> como entrada?

D(<D>)= { acepta si D no acepta < D> y

rechaza si D no acepta <D> }

No importa que haga D,

Esta forzado a hacer lo contrario. LO QUE ES UNA CONTRADICCIÓN

Por lo tanto

No puede exisitr ni D ni H

Existen lenguajes no decidibles!

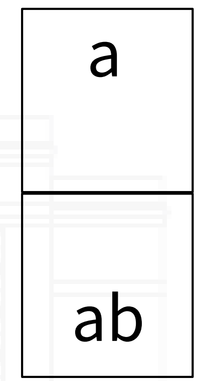
Ejemplos de lenguajes turing no decidibles

- Halting problem
- Post correspondence problem
- Wang Tiles
- Conway's Game of Life: dado dos patrones. Determinar si es posible que partiendo de uno, el segundo aparezca en alguna generación
- 10mo problema de Hilbert
- …

Post Correspondence Problem (PSP)

Se cuenta con un conjunto de piezas tipo dominó

Cada una ellas contiene 2 strings, uno por lado



Encontrar una secuencia de dominos

(con repetición permitida) tal que el string leido de un extremo superior sea igual al leido en el extremo inferior

Llamaremos match a esta lista

que cumple con el requisito

Ejemplo

Sea el siguiente set de donimos

b	a	ca	abc
ca	ab	a	c

El siguiente corresponde a un match

a	b	ca	a	abc	→ abcaaabc
ab	ca	a	ab	c	→ abcaaabc

Post Correspondence Problem (PSP)

Existen

- Conjuntos de dominos en el que no importa la combinación o longitud no es posible conformar un match
- Conjuntos de dominos en el que para lograr el match debemos conformar un secuencia de gran cantidad de dominos

Estos casos

- impiden conocer si el proceso esta en un loop, probando cada vez secuencias mas largas con un set donde no es posible o simplemento aun no hayo el match
- PSP corresponde a un lenguaje no turing decidible

Presentación realizada en Julio de 2020