

Teoría de Algoritmos I (75.29 / 95.06) Ejercicios de Algoritmos de aproximación

- 1) Un río posee un conjunto de buques transportadores, cada uno con una capacidad de K kilos que cruzan automóviles de una orilla a la otra. Es un paso muy concurrido y requiere reservar con algunas horas de anticipación para el cruce. En ese proceso los vehículos son registrados y pesados.

El encargado va cargando los vehículos a medida que se van presentando. En simultáneo va calculando el peso transportado. En el momento que llega un vehículo que de ingresar supere la máxima capacidad de carga. Lo hace esperar. Cierra el barco. El barco cruza, descarga y vuelve por el próximo cargamento.

- a) Demostrarle al encargado que su método puede no utilizar la menor cantidad de viajes posibles.
- b) Demostrarle al encargado que su método no superará el doble de la menor cantidad de viajes posibles para ningún conjunto posible de vehículos y diferentes valores de k

- 2) En un concurso televisivo nos ofrecen un vale por " D " dólares y un catálogo de productos. Cada producto tiene un valor. La consigna del juego es seleccionar un subconjunto de productos que no supere el precio del vale (si lo hacemos nos quedamos con las manos vacías).

Nuestro compañero sugiere simplemente ir seleccionando los productos en el orden del catálogo, agregando aquellos cuya adición no supere el valor D . Por otro lado, a nosotros no nos parece la mejor alternativa.

- a) Dar un ejemplo donde esta estrategia nos puede dar menos de la mitad que la solución máxima posible.
- b) Proponer una solución de complejidad no mayor a $O(n \log n)$ que nos asegure obtener una solución en el peor caso más a la mitad que la solución máxima posible.

- 3) Un centro de fotocopiado tiene un conjunto de máquinas para procesar diferentes trabajos. Las mismas las compró en dos momentos diferentes. Teniendo " m " fotocopadoras de la primera compra y " k " fotocopadoras más modernas de la segunda. Como la tecnología mejoró las más nuevas trabajan el doble de rápido que las viejas. Cada día recibe un conjunto de pedidos con diferentes longitudes. Desea asignar las tareas a las máquinas de tal forma de terminar lo antes posible la jornada de trabajo.

Proponer un algoritmo de aproximación de tal forma que la diferencia con el óptimo sea como mucho 3 veces mayor.

- 4) Un rey aburrido (y bastante sádico) ha propuesto un acertijo a todo el reino. Construyó en sus jardines una gran cuadrícula de $n \times n$ celdas. En cada una de ellas depositó una bolsa con monedas de oro. Un gran cartel informa cuántas monedas hay en cada una de ellas y se puede ver que no hay dos celdas con igual cantidad de monedas. La cuadrícula solo se puede ver desde lo alto de la torre de su castillo.

El desafío consiste en seleccionar un subconjunto de celdas cuya suma sea la mayor posible. Esas celdas no pueden ser contiguas entre sí (una celda central por ejemplo tiene 6 celdas contiguas). Los candidatos irán ingresando de a uno y tendrán un tiempo acotado para indicar su solución. A medida que pasen se los aislará para que no puedan informar a otros que vieron ni que propusieron. El ganador se podrá llevar todo el oro, los perdedores serán llevados como mano de obra esclava a las minas del reino.

Un compañero de aventuras nos cuenta que piensa presentarse y que tiene un método infalible para seleccionar las celdas: Comenzará eligiendo desde la más cara a la menos cara. Y con cada selección desechará aquellas inválidas luego de la elección.

- a) Demuestre a su amigo que su método no es infalible
- b) Demuestre que su método devuelve un conjunto independiente de peso total al menos $1/4$ veces el peso total máximo de cualquier conjunto independiente en el gráfico de cuadrícula G .

HINT: Se puede ayudar demostrando previamente: Sea S el conjunto independiente devuelto por su algoritmo, y sea T cualquier otro conjunto independiente en G . Para cada nodo $v \in T$, el nodo $v \in S$, o existe un $v' \in S$ tal que $w(v) \leq w(v')$ y (v, v') son contiguos.