

División y conquista: puntos extremos en polígonos

Teoría de Algoritmos I (75.29 / 95.06)

Ing. Víctor Daniel Podberezski

✉ vpodberezski@fi.uba.ar

Obtención de extremos de un polígono

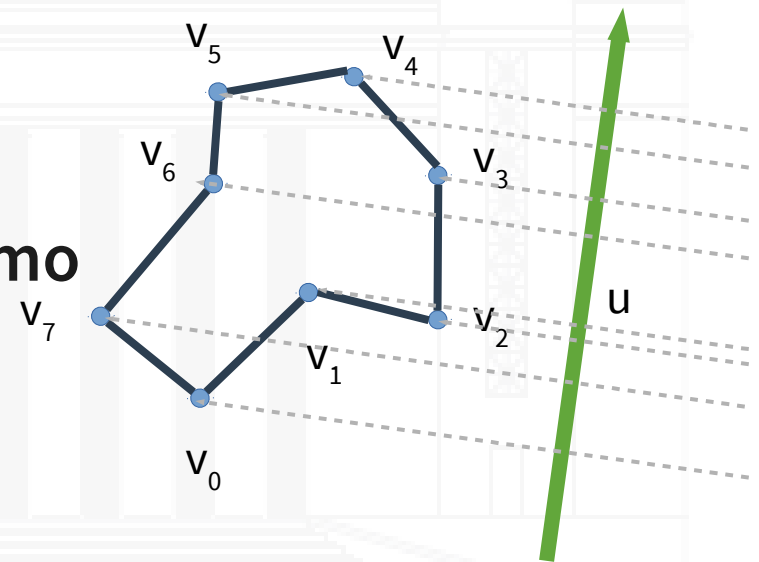
Sea un polígono de n vértices $V=(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$

con $v_n = v_0$

en orden contra reloj

Queremos determinar el vértice extremo

(mayor o menor) a un eje u



Solución por fuerza bruta

Por cada punto v_i

Realizamos la proyección ortogonal a u

Verificamos si es mayor (o menor) al mayor (o menor) de los anteriores

Complejidad algorítmica

$O(n)$

Se puede hacer mejor?

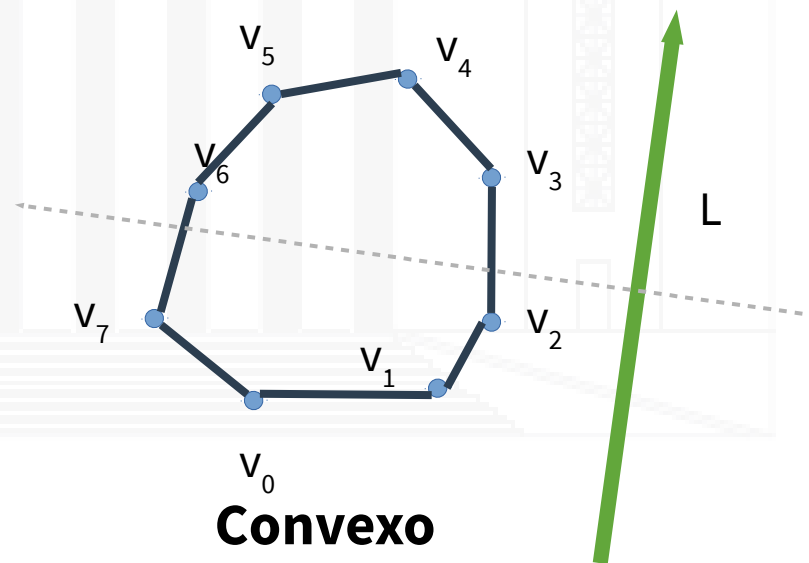
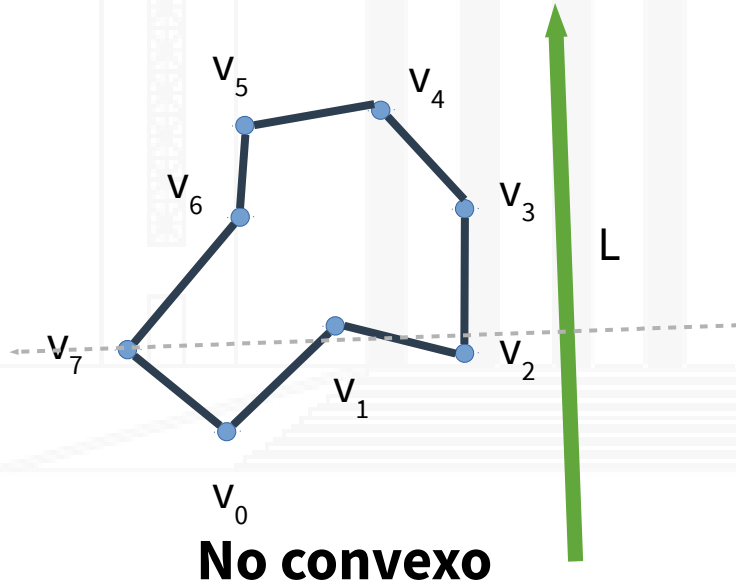
Si, aunque SOLO si el polígono es CONVEXO

Polígonos convexos

Un polígono es convexo si

Es monotónico para todo L segmento (Cualquier línea perpendicular a L cortará a los sumo 2 veces al polígono)

Sus ángulos interiores miden a lo sumo 180 grados



Nomenclatura

Llamaremos:

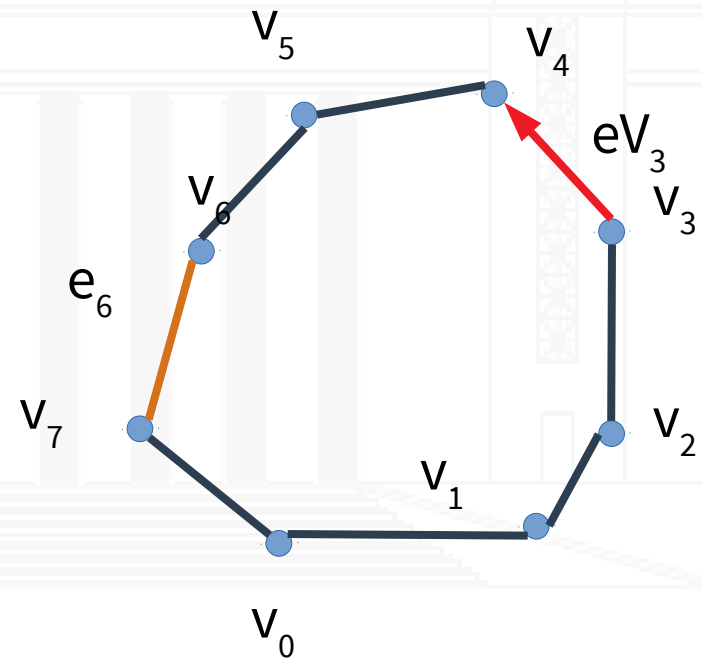
e_i al i -ésimo segmento del vértice v_i a v_{i+1} para $i=0$ a $n-1$

ev_i al vector $V_{i+1} - V_i$

ev_i puede, en la proyección u ,

Tener sentido positivo o negativo

“para arriba” o “para abajo”



Idea

Supongamos que

el vértice máximo se encuentra en el polígono entre los vértices V_a y V_b

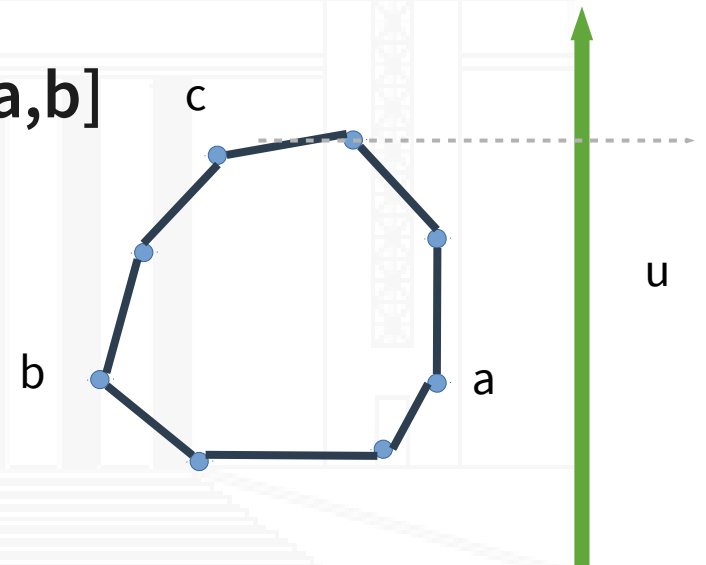
Podemos extresar la línea poligonal como $[a,b]$

$$[a,b] = \{a, a+1, \dots, a+k=b \pmod{n}\} \quad k>0$$

Seleccionamos un vértice V_c entre a y b

Dividimos en 2 líneas poligonales $[a,c]$ y $[c,b]$

El máximo estará en alguno de los 2 segmentos

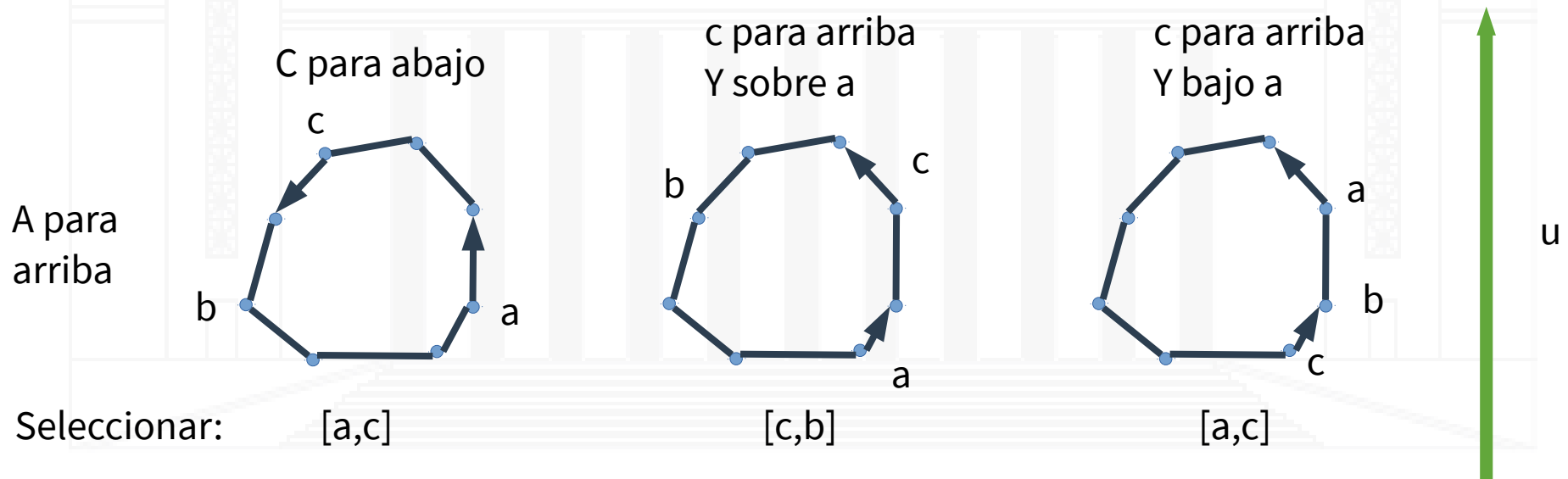


Idea (cont.)

Analizamos el vector eV_a y eV_c

Tenemos 6 casos diferentes

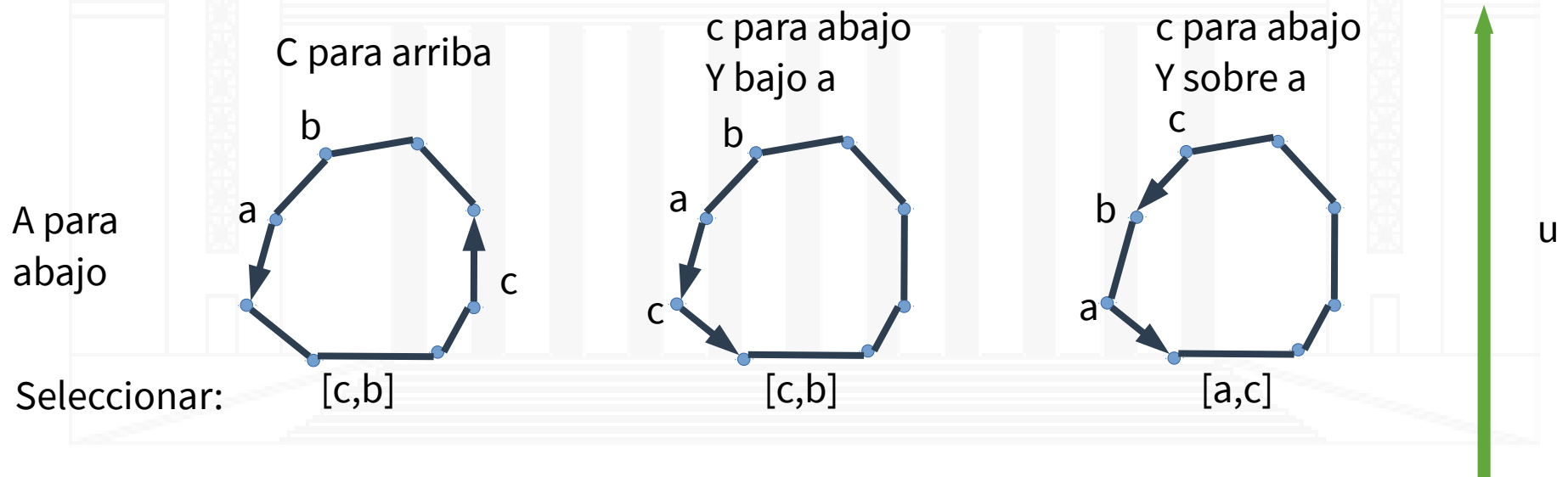
Los primeros 3



Idea (cont.)

Analizamos el vector eV_a y eV_c (cont.)

Los últimos 3



Solución

Iniciamos con

$a=0$ y $b=0$ (todo el polígono)

$c=n/2$ (el punto intermedio)

Iteramos

Si solo nos quedan 3 vértices compararlos uno a uno y obtener el máximo

Sino determinar cual de los casos aplica.

Actualizar a, b y c según corresponda

Al finalizar tenemos el punto extremo

Complejidad

En cada iteración

Reducimos a la mitad la cantidad de vértices

Se convierte en un nuevo sub problema

Realizamos operaciones $O(1)$

Relación de recurrencia

$$T(n) = T(n/2) + c$$

Por teorema maestro

$$O(\log n)$$



Presentación realizada en Abril de 2020