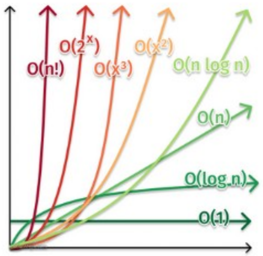
All pairs shortest paths

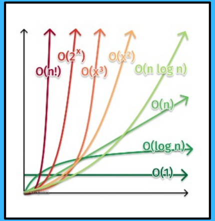
Floyd Warshall

por Vpode



Teoría de Algoritmos
Víctor Podberezski
vpodberezski@fi.uba.ar

Algoritmo Floyd-Warshall



- Algoritmo para la resolución del problema
  - All pairs shortest path
- Utiliza programación dinámica
- Publicado por
  - Robert Floyd en 1962
- Similar a algoritmos publicados previamente por
  - Bernard Roy en 1959
  - Stephen Warshall en 1962

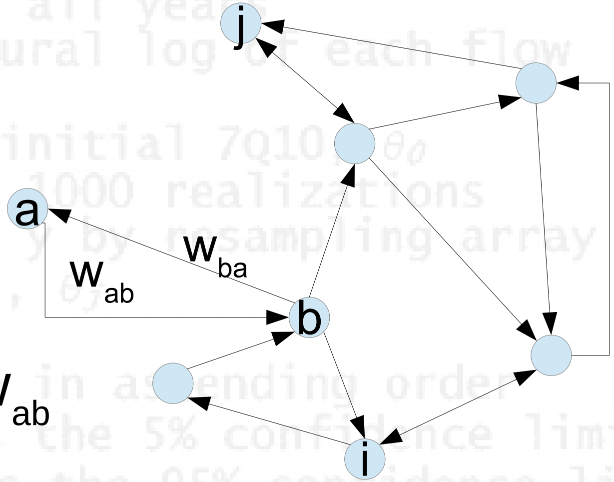
Robert Floyd

Stephen Warshall

Problema

- Sea
  - G=(V,E) un grafo ponderado dirigido
  - Sin ciclos negativos

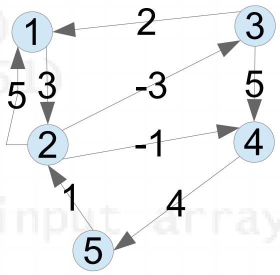
  Donde
  - cada vértice e=(a,b) ∈ E tiene un peso w_{ab}
- Queremos saber
  - para cada par i,j ∈ V el camino mínimo entre ellos



Matriz de adyacencias

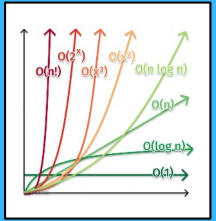
- Para representar el grafo usaremos
  - una matriz W de |V| x |V| adyacencias levemente modificada

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i=j \\ \text{peso arista de i a j} & \text{si } (i,j) \in E \\ \infty & \text{si } (i,j) \notin E \end{cases}$$



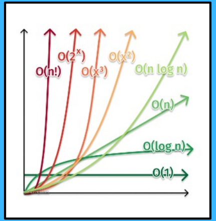
	1	2	3	4	5
1	0	3	∞	∞	∞
2	3	0	-3	-1	∞
3	2	∞	0	5	∞
4	∞	∞	∞	0	4
5	∞	1	∞	∞	0

Salida de la ejecución del algoritmo

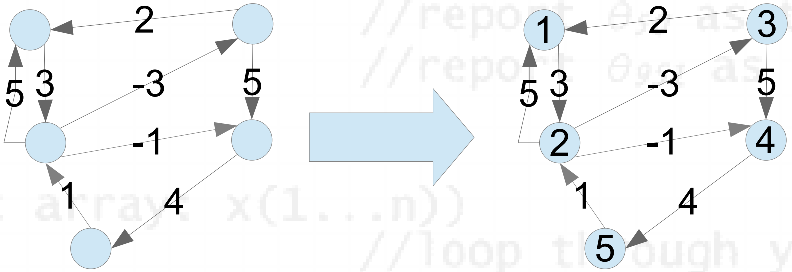


- Matriz “D” de distancias mínimas
  - tamaño |V| x |V|
  - d_{ij} contiene el peso del camino mínimo desde el vértice i al vertice j (∞ si no existe un camino)
- Matriz “π” de predecesores
  - tamaño |V| x |V|
  - π_{ij} el vértice predecesor j en el camino mínimo desde i (NULL si i=j o si no existe un camino mínimo entre i y j)

Denominación de los vértices



- Sea el Grafo G=(V,E)
  - Numeraremos los vértices V={1,2,…, n} (con N=|V|)
  - Cualquier forma de numerar es válida
- Esta numeración es teórica
  - determinará un orden de procesamiento

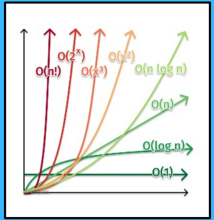


Vértices intermedios

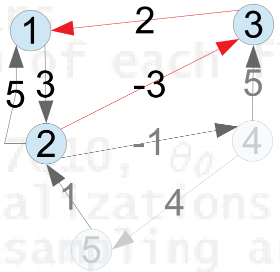
- Sea p un camino simple entre 2 vértices v_1, v_l
  - $p=(v_1, v_2, \ldots, v_{l-1}, v_l)$
- Los vértices intermedios
  - Son aquellos vértices que no son v_1 y v_l

$$v_1 \rightarrow \underbrace{v_2 \rightarrow \quad \ldots \quad \rightarrow v_{l-1}}_{\text{Vértices intermedios}} \rightarrow v_l$$

Camino mínimo “p” en subset



- Consideremos
  - el subset de vértices { 1, 2, …, k } para un k ≤ n
  - Un par de vértices i, j ∈ V
- Pueden existir varios caminos simples desde i hasta j
  - cuyos vértices intermedios se encuentran dentro del subset de vértices
- Seleccionamos al de menor peso entre ellos
  - Y lo denominamos “p”

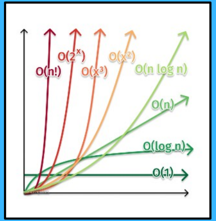


i=2, j=1

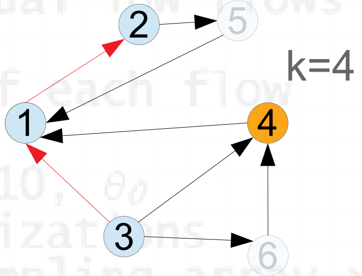
Caminos:
2 → 1 (5)
2 → **3** → 1 (-1)

p: 2 → 3 → 1 (-1)

Relación entre subsets

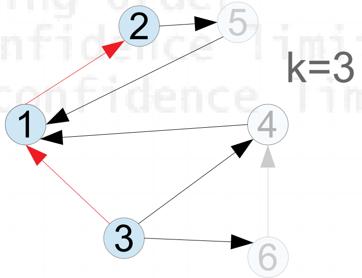


- Consideremos
  - el subset “S_k” de vértices con { 1, 2, …, k }
  - Un par de vértices i, j $\in$ V
  - El camino mínimo “p” desde i hasta j
  - El subset “S_{k-1}” de vértices { 1, 2, …, k-1 }
- Si k no es un vértice intermedio de p
  - Todos los vértices intermedios de p están en el subset S_{k-1}
- Por lo tanto
  - El camino mínimo p es también el camino mínimo para el subset S_{k-1}

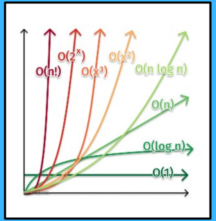


i=3, j=2

P:3→**1**→2

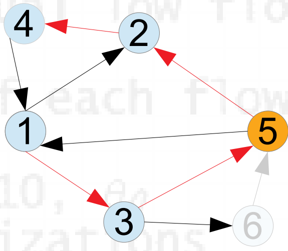


Relación entre subsets (cont.)



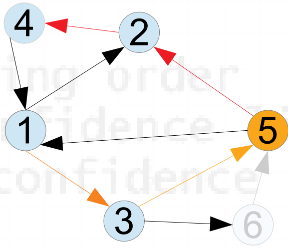
- Consideremos
  - el subset "S_k" de vértices con { 1, 2, …, k }
  - Un par de vértices i, j $\in$ V
  - El camino mínimo "p" desde i hasta j
  - El subset "S_{k-1}" de vértices { 1, 2, …, k-1 }
- Si k es un vértice intermedio de p
  - P no existe en S_{k-1} (Aunque puede existir otro camino mínimo entre i y j)
  - Podemos descomponer el camino p en dos subcaminos
  - P_1 de i a k con todos sus vértices intermedios en S_{k-1}
  - P_2 de k a j con todos sus vértices intermedios en S_{k-1}
  - P_1 y P_2 son caminos mínimos entre sus extremos en el subset S_{k-1}

i=1, j=4



k=5

P:1→**3**→**5**→**2**→4

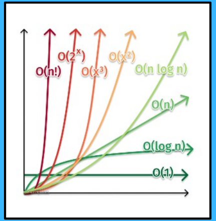


k=4

P_1: 1→**3**→5

P_2: 5→**2**→4

Relación de recurrencia

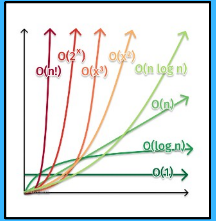


- Sea
  - d_{ij}^{k} el peso del camino mínimo del vértice i al j en el que todos sus vértices intermedios están en el set {1,2,…,k}
- Si k=0
  - El camino entre i y j no tiene vértices intermediarios
- Relación de recurrencia:

$$d_{ij}^{k}=\begin{cases} w_{ij} & si\, k=0 \\ min\left(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1}+d_{kj}^{k-1}\right) & si\, k\geq 1 \end{cases}$$

- Tendremos en d_{ij}^{n} las distancias mínimas entre todos los vértices

Solución iterativa



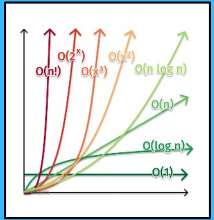
```
Floyd_Warshall(W)
    D[0] = W
    n = |V|
    Desde k=1 a n
        Sea D[k] una nueva matriz de nxn
        Desde i=1 a n
            Desde j=1 a n
                D[k][i,j] = min ( D[k-1][i,j] ,
                                  D[k-1][i,k] + D[k-1][k,j] )

    Retornar D[n]
```

Complejidad temporal:

$\Theta(n^3)$

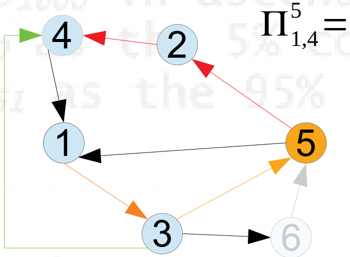
Construcción del camino mínimo



- La reconstrucción del camino mínimo
  - La podemos generar paso a paso en el algoritmo
- Por cada iteración
  - Generaremos una secuencia de matrices “π” de predecesores

$$\Pi_{ij}^{0}=\begin{cases} NULL & si\; i=j\; o\; w_{ij}=\infty \\ i & si\; i\neq j\; y\; w_{ij}<\infty \end{cases}$$

$$\Pi_{ij}^{k}=\begin{cases} \Pi_{ij}^{k-1} & si\; d_{ij}^{k-1}\leq d_{ik}^{k-1}+d_{kj}^{k-1} \\ \Pi_{kj}^{k-1} & si\; d_{ij}^{k-1}> d_{ik}^{k-1}+d_{kj}^{k-1} \end{cases}$$



$$\Pi_{1,4}^{5}=\begin{cases} \Pi_{1,4}^{4} & si\; d_{1,4}^{4}\leq d_{1,5}^{4}+d_{5,4}^{4} \\ \Pi_{5,4}^{4} & si\; d_{1,4}^{4}> d_{1,5}^{4}+d_{5,4}^{4} \end{cases}$$