NP-C: Coloreo de grafos

Teoría de Algoritmos I (75.29 / 95.06)

Ing. Víctor Daniel Podberezski
vpodberezski@fi.uba.ar

Función de coloreo

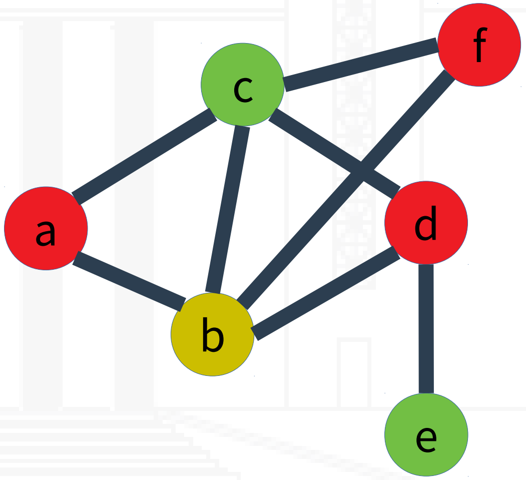
Sea

$G=(V,E)$ grafo no dirigido

$F: v \rightarrow \{1,2,\ldots,k\}$ función que asigna un color a cada vértice

Tal que

Para todo $e=(u,v) \in E$, $f(u) \neq f(v)$



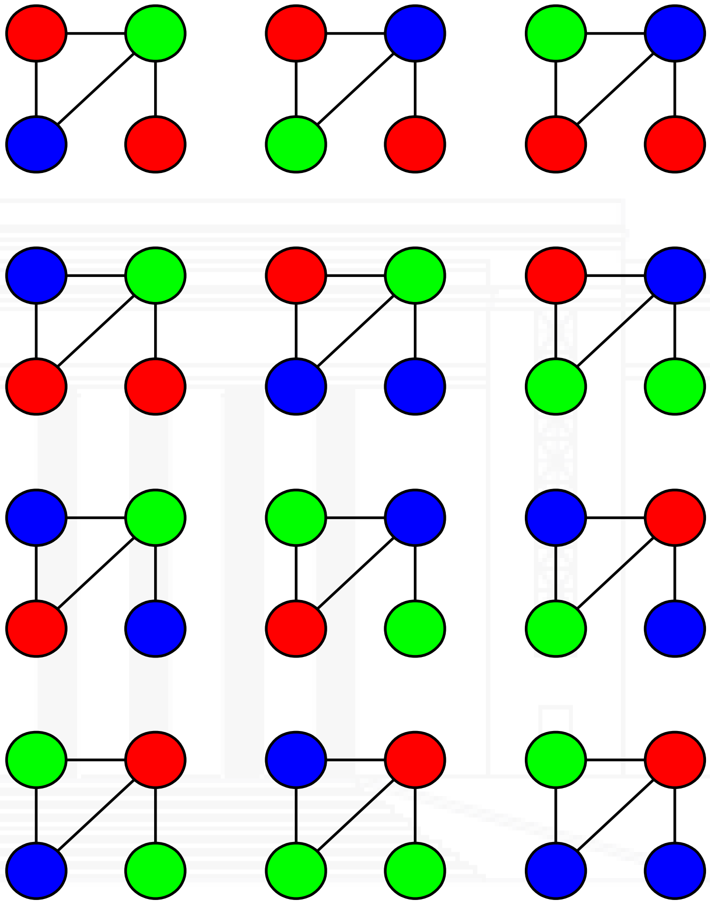
Número y polinomio cromático

Definimos al número cromático $\chi(G)$

como el menor numero de colores necesario para colorear un grafo

Definimos polinomio cromático

Al la ecuación que permite contar el número de maneras en las cueles puede ser coloreado un grafo usando no mas de k colores

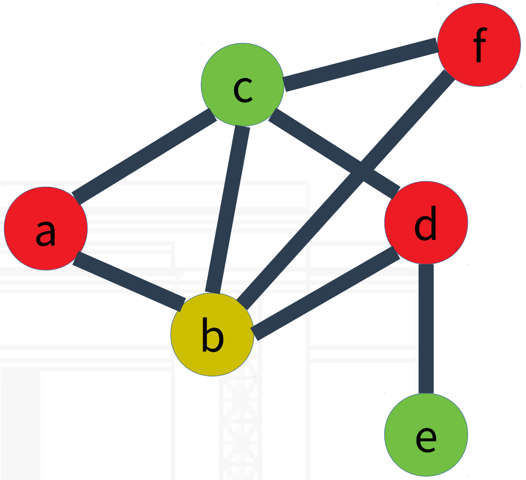


$\chi(G)=3$ y puedo colorear de 12 maneras con 3 colores o menos

Clase de color y conjunto k-partito

Llamaremos clase de color

Al subconjunto de vértices coloreados con el mismo color



Una k-coloración

Equivale a una partición de nodos en k conjuntos independientes.
Si un grafo es k-coloreables entonces es k-partito

X={a,d,f}

Y={c,e}

Z={b}

Problema de decisión coloreo de grafos

Sea

G=(V,E) grafo no dirigido

K valor numérico.

¿Es posible

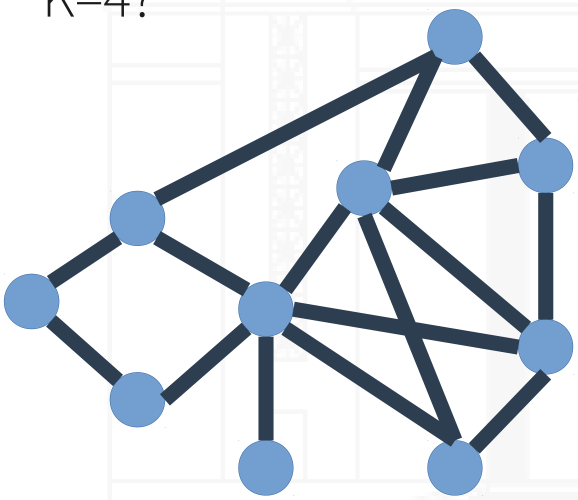
Definir una función de coloreo que utilice k o menos colores?

Ejemplo

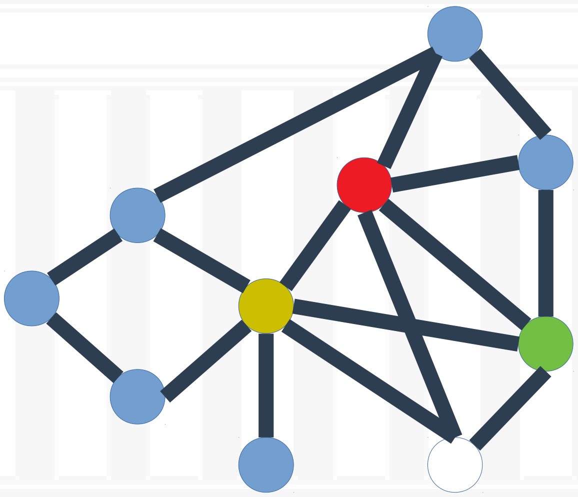
Se puede colorear G con menos de:

K=3?

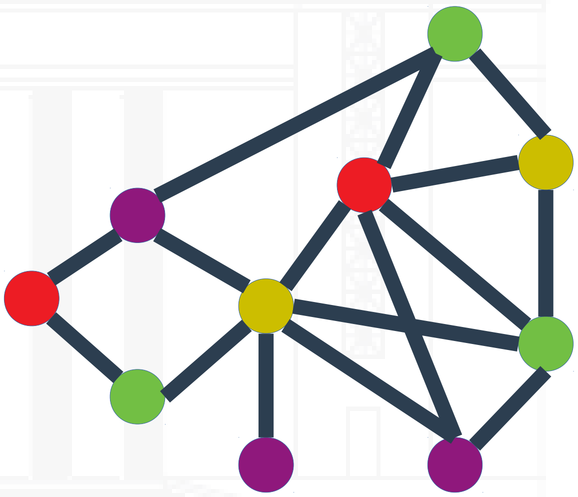
K=4?



G=(V,E)



No se puede colorear con solo 3 colores



Posible coloración con 4 colores

Casos especiales: Grafo completo

Sea G=(V,E)

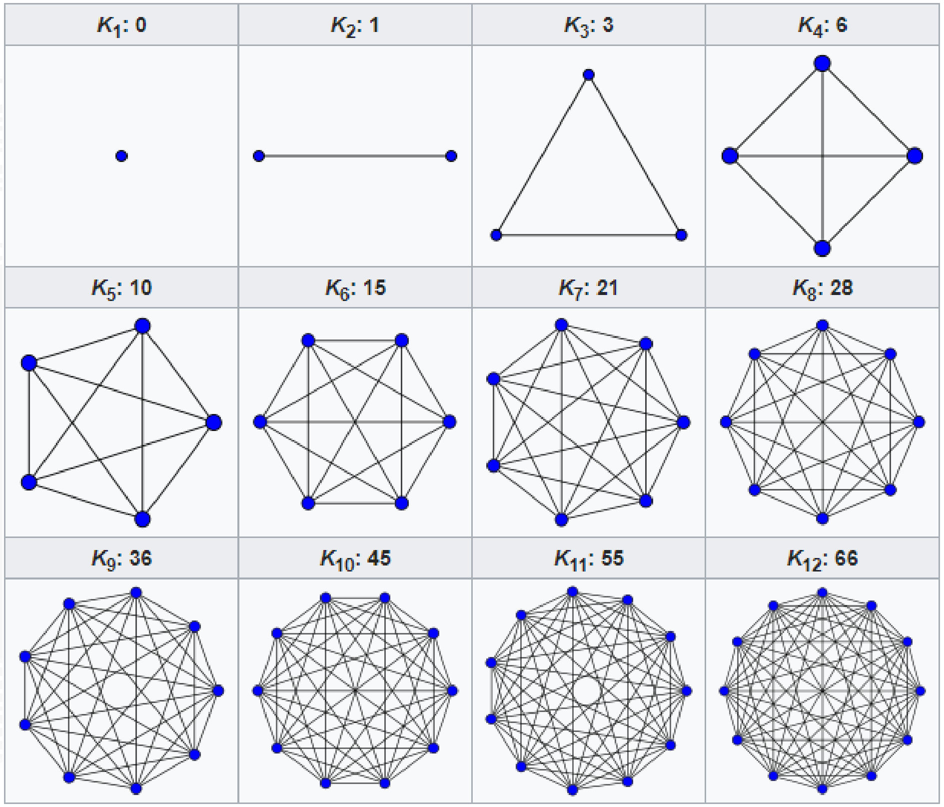
Grafo simple y completo (todos los vértices están comunicados entre si)

Entonces

Se requieren |V| colores para colorear el grafo

Podemos determinar rápidamente si G es completo

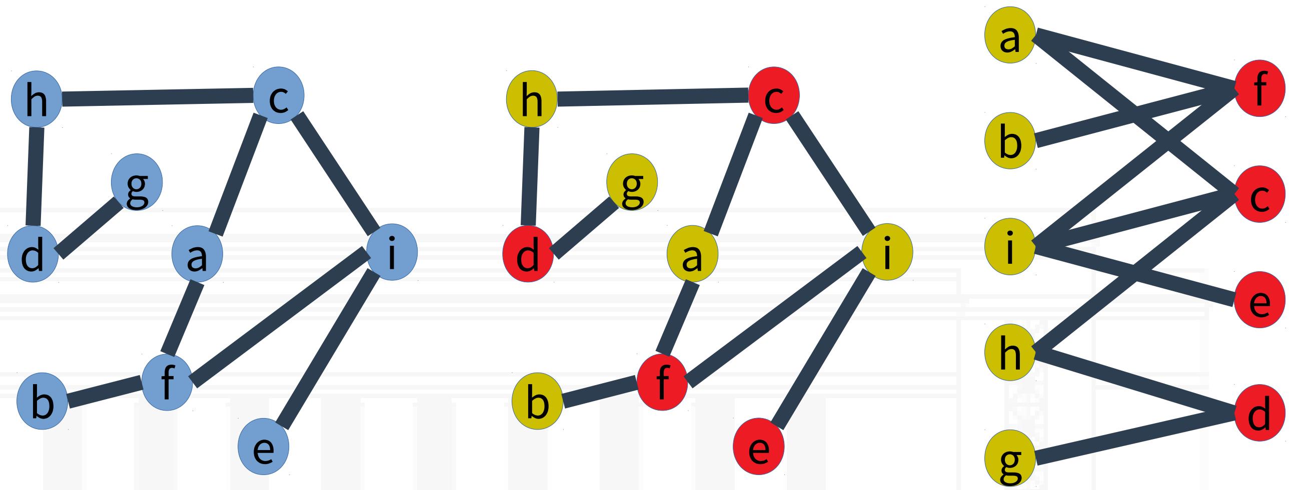
Si tiene |V|(|V|-1)/2 ejes



Casos especiales: Grafo bipartito

Sea G=(V,E)

Grafo bipartito



Entonces

Se requieren 2 colores para colorear el grafo

Mediante un algoritmo de coloreo

derivado de BFS podemos etiquetar cada nodo y determinar si el grafo es bipartito en tiempo polinomial

¿Coloreo de grados ∈ "NP"?

Dado

G=(V,E) grafo

K colores

T certificado: para todo vector que asigna a cada vértice un color

Puedo verificar (en tiempo polinomial)

⇒ COLOREO DE GRAFOS ∈ NP

Todos los nodos en V están en T

Las cantidad de colores usados en T son menores o iguales a k

No existen en G dos vértices adyacentes que en T tengan el mismo color

¿Coloreo de grados $\in$ “NP-Hard”?

Probamos que

COLOREO-GRAFO $\in$ NP-C

Utilizaremos 3SAT

3SAT $\leq_p$ COLOREO-GRAFO

3SAT $\leq_p$ COLOREO-GRAFO

Dada una

instancia I de 3SAT con k clausulas y n variables

Crearemos

Diferentes gadgets que seran subgrafos para colorear

1 gadget para las variables

1 gadget por clausula

$3SAT \leq_p$ COLOREO-GRAFO

Definimos

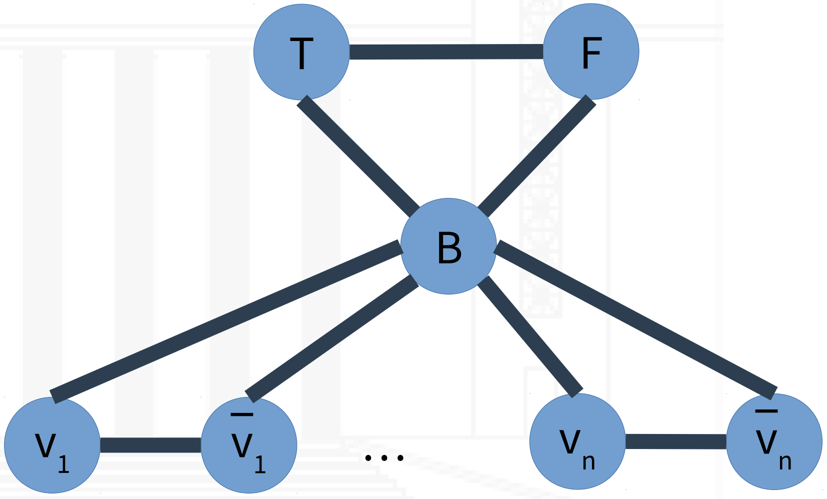
los nodos v_i y $\overline{v}_i$ correspondientes a cada variable x_i y su negada $\overline{x}_i$

los nodos especiales T (true), F (false) y B (base)

Generar los siguientes ejes

Cada v_i y $\overline{v}_i$ entre ellas y con B

T, F y B entre ellas



(la variable tendrá el valor true si tiene el mismo color que T)

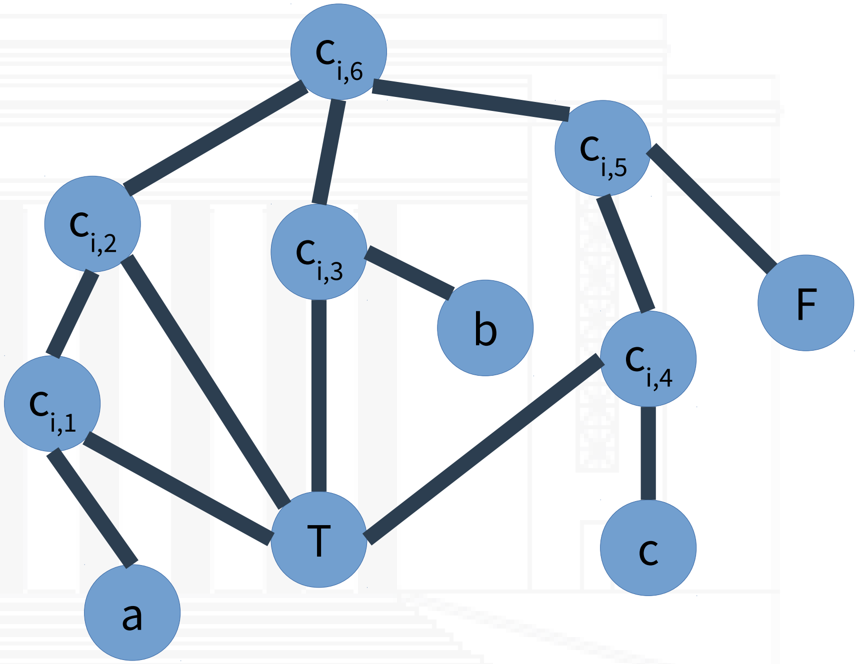
3SAT $\leq_p$ COLOREO-GRAFO

Crearemos 1 gadget para cada clausula

la clausula $c_i = (a,b,c)$ con $a,b,c \in \{x_1,\overline{x}_1,\ldots,x_n,\overline{x}_n\}$

las variables de la clausula corresponden a los nodos creados para las variables

(si $a=x_1$, el gadget en ci,1 se conecta a v_1)



3SAT $\leq_p$ COLOREO-GRAFO

Definimos

K =3 (cantidad de colores)

Si

El grafo resultante se puede pintar con 3 colores, entonces la expresion I se puede satisfacer

Los nodos correspondientes a las variables con igual color a T, deben estar en true.

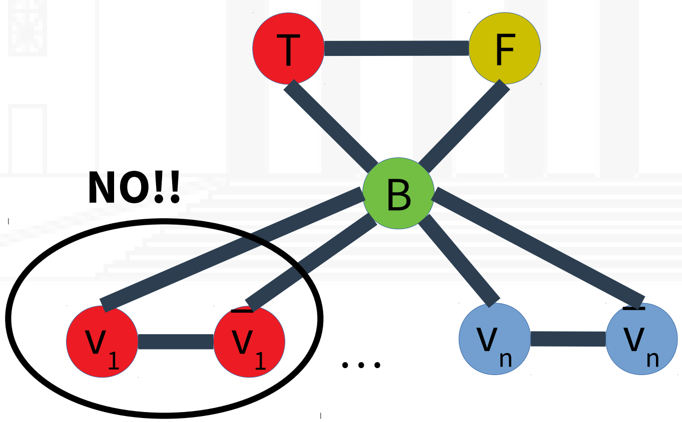
3SAT $\leq_p$ COLOREO-GRAFO

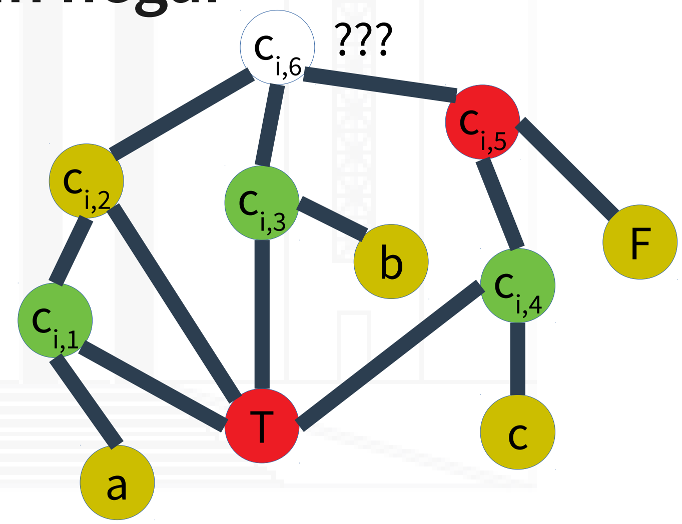
Con al menos 1 variable en True de la clausula i

el subgrafo correspondiente al gadget de la clausula i se puede colorear con 3 colores

Se se requiere que 1 variable este negada y sin negar

No se puede colorear el grafo

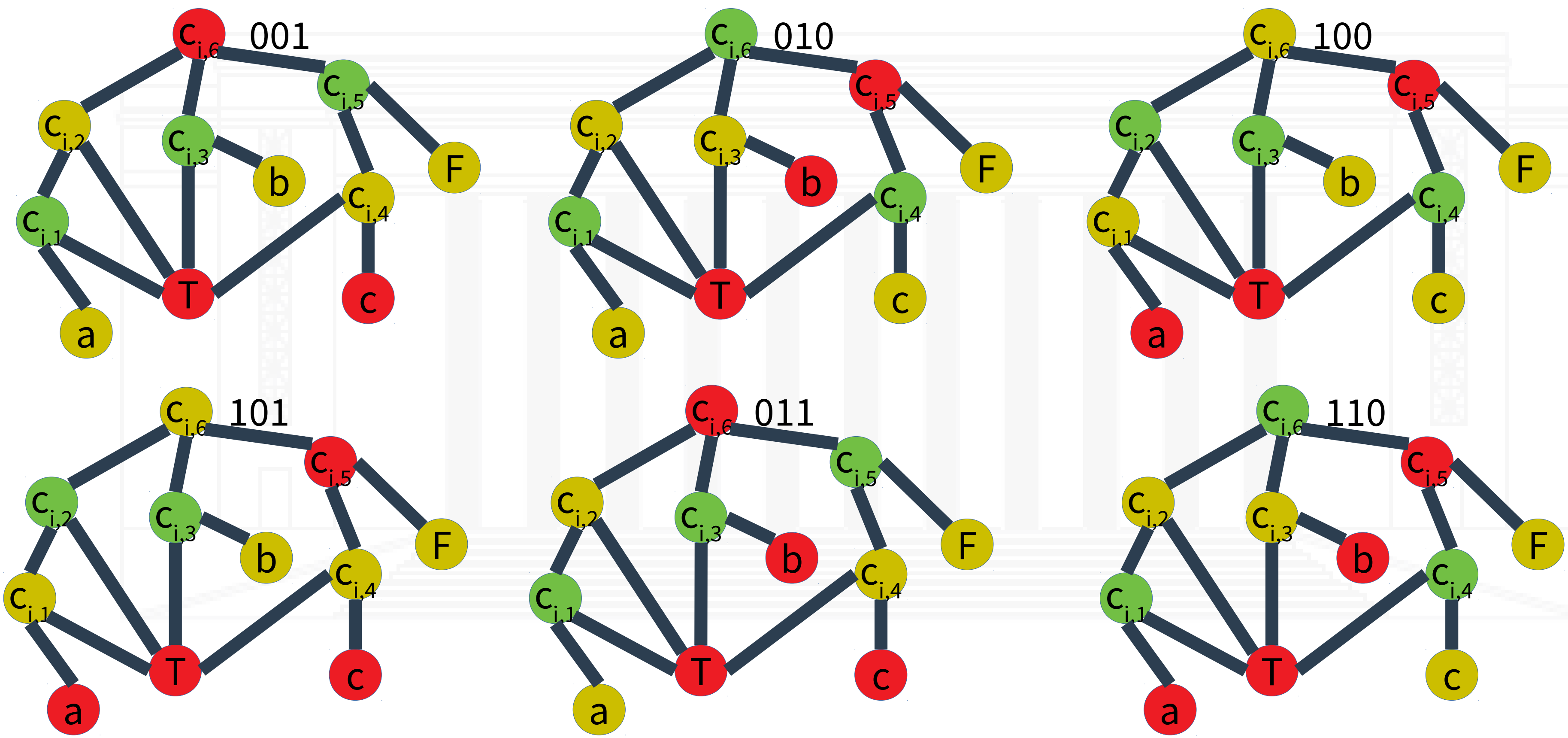




Con a,b,c en “false” no se puede colorear el gadget

$3SAT \leq_p$ COLOREO-GRAFO

Ejemplos de activación de la clausula

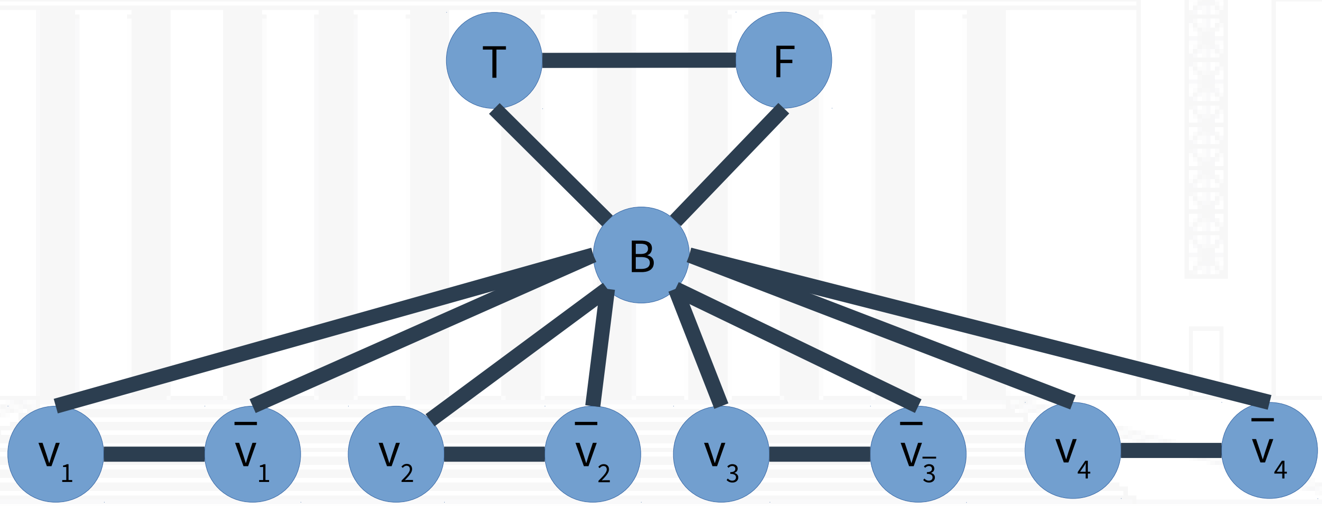


Ejemplo

Si tengo la expresión

$E = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4)$

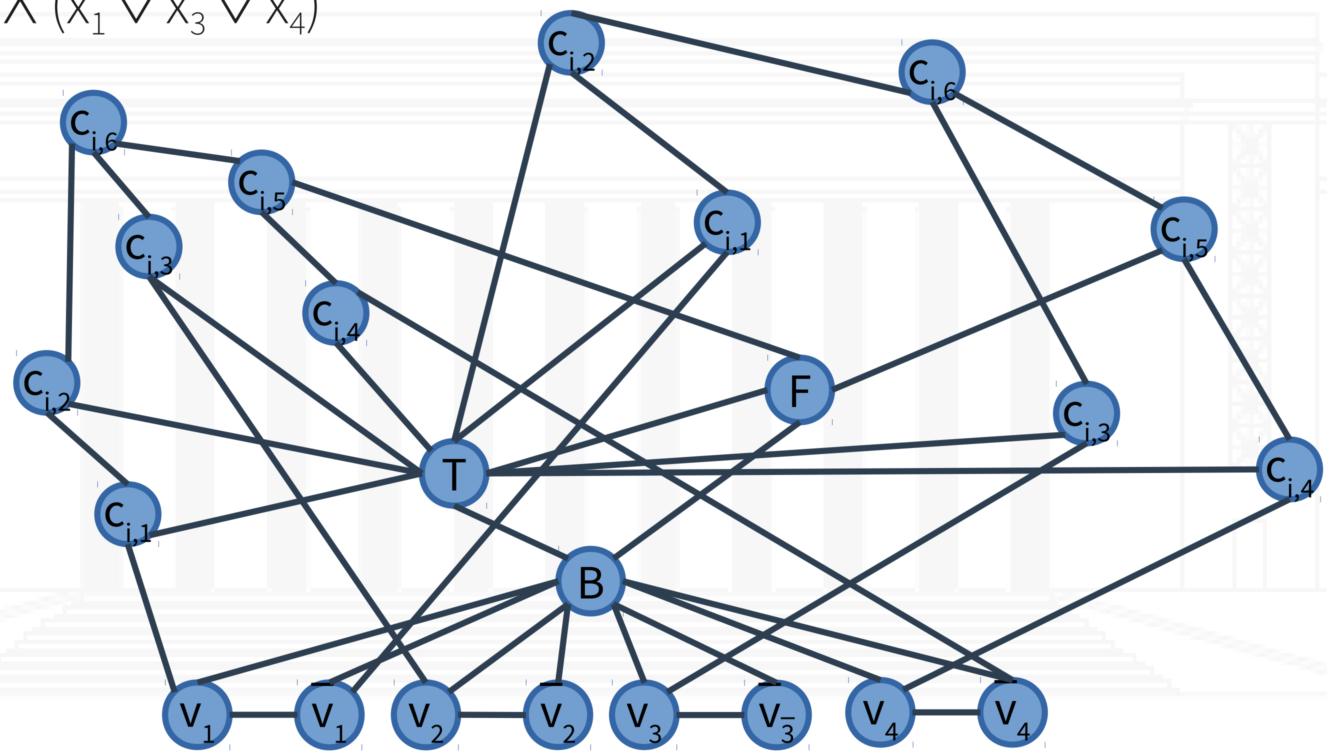
Con 4 variables y 2 clausulas



Ejemplo

Si tengo la expresión

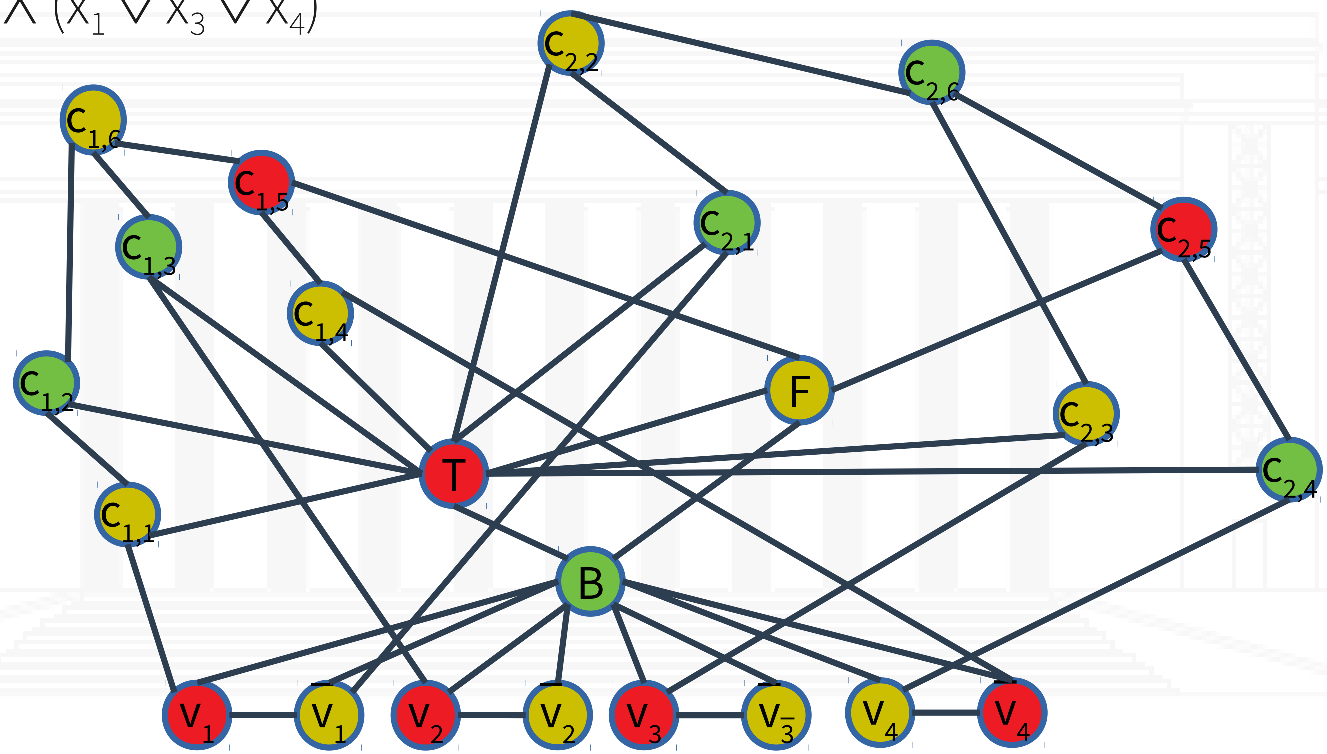
$E = (x_1 \lor x_2 \lor x_4) \land (\overline{x}_1 \lor x_3 \lor x_4)$



Ejemplo

Si tengo la expresión

$$E = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_3 \vee x_4)$$



$x_1=1, x_2=1, x_3=1, x_4=0$

COLOREO-GRAFO $\in$ "NP-C"

Como

COLOREO-GRAFOS $\in$ NP

Y 3SAT $\leq_p$ COLOREO-GRAFOS

Entonces

COLOREO-GRAFOS $\in$ NP-C

Presentación realizada en Junio de 2020