All pairs shortest paths

mejora al algoritmo inicial

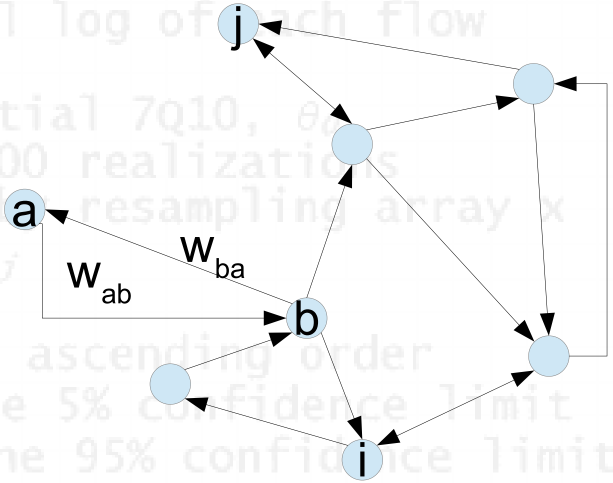
Teoría de Algoritmos
Víctor Podberezski
vpodberezski@fi.uba.ar

por Vpode

Problema

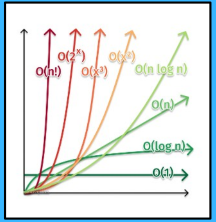
- Sea
  - G=(V,E) un grafo ponderado dirigido
  - Sin ciclos negativos

  Donde
  - cada vértice e=(a,b) ∈ E tiene un peso w_{ab}



- Queremos saber
  - para cada par i,j ∈ V el camino mínimo entre ellos

Relación de recurrencia



- En resumen

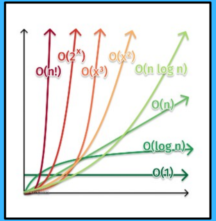
$$L_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i=j \\ \infty & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$L_{ij}^{(1)} = W$$

$$L_{ij}^{(m)} = min_{1 \leq k \leq n}\left(L_{ik}^{(m-1)} + w_{kj}\right)$$

- Si m=|V|-1 conoceremos el camino mínimo entre todos los vértices

Solución iterativa



```
ObtenerCaminosMinimos(W)
    Sea n=|V|
    Sea L[1] = W
    Desde m=2 a n-1
        Sea L[m] una nueva matriz de nxn
        L[m] = calculo_camino_minimo(L[m-1], W)

    Retornar L[n-1]
```

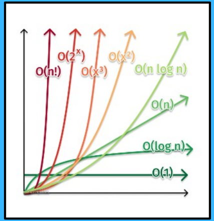
$\Theta(n)$

$\Theta(n^3)$

Complejidad temporal:

$\Theta(n^4)$

Cálculo $L^{(m)}$ con $L^{(m-1)}$



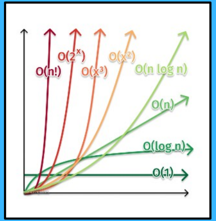

```
calculo_camino_minimo(L, W)
    Sea n=|V|
    Sea L’ una nueva matriz de nxn

    Desde i=1 a n
        Desde j=1 a n
            L’[i,j]=∞
            Desde k=1 a n
                L’[i,j] = min ( L’[i,j] , L[i,k] + W[k,j] )

    Retornar L’
```

$$L_{ij}^{(m)} = min_{1 \le k \le n} \left(L_{ik}^{(m-1)} + w_{kj} \right)$$

Similitud con multiplicación de matrices

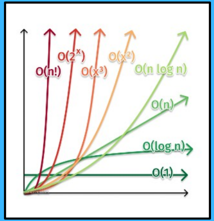


$$L_{ij}^{(m)} = min_{1 \le k \le n} \left(L_{ik}^{(m-1)} + w_{kj} \right)$$

$$\underset{L'}{\begin{array}{c|c} & j \\ \hline i & \cdot \end{array}} = \underset{L}{\begin{array}{c|c} & \\ \hline i & \cdots \end{array}} \lozenge \underset{W}{\begin{array}{c} j \\ \vdots \end{array}}$$

$$L'_{ij} = min \left(L_{i1} + w_{1j}, L_{i2} + w_{2j}, \ldots, L_{\text{¿}} + w_{nj} \right)$$

En búsqueda de una mejora...

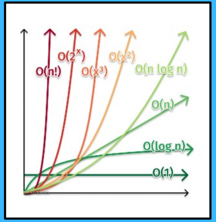


- Para el cálculo de cada L[m] usamos calculo_camino_minimo(L[m-1], W)
  - L[1]=W
  - L[2]=calculo_camino_minimo(W, W)=W◊W
- Generalizando

L[1] =	W	$W^{"1"}$
L[2] =	W◊W	$W^{"2"}$
L[3] =	W◊W◊W	$W^{"3"}$
L[4] =	W◊W ◊ W◊W = $W^{"2"}$ ◊ $W^{"2"}$	$W^{"4"}$
L[r=a+b] =	($W^{"a"}$) ◊ ($W^{"b"}$)	$W^{"r"}$

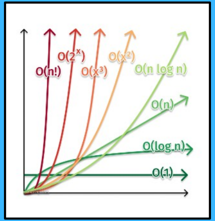
(!) Solo si ◊ es asociativa

Asociatividad



- Sean
  - X,Y,Z matrices de nxn
  - $X◊Y = (X,Y)_{ij} = \min_k (x_{ik} + y_{kj})$ para todo i,j
- Queremos ver que
  - $(X◊Y)◊Z = X◊(Y◊Z)$

Asociatividad: Demostración



$$((X,Y),Z)_{ij} = min_{k'}(min_k(X_{ik}+Y_{kK'})+Z_{k'j})$$

j

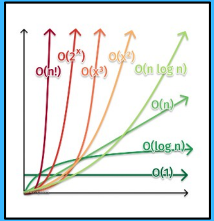
i = i ◊ j

X◊Y Z

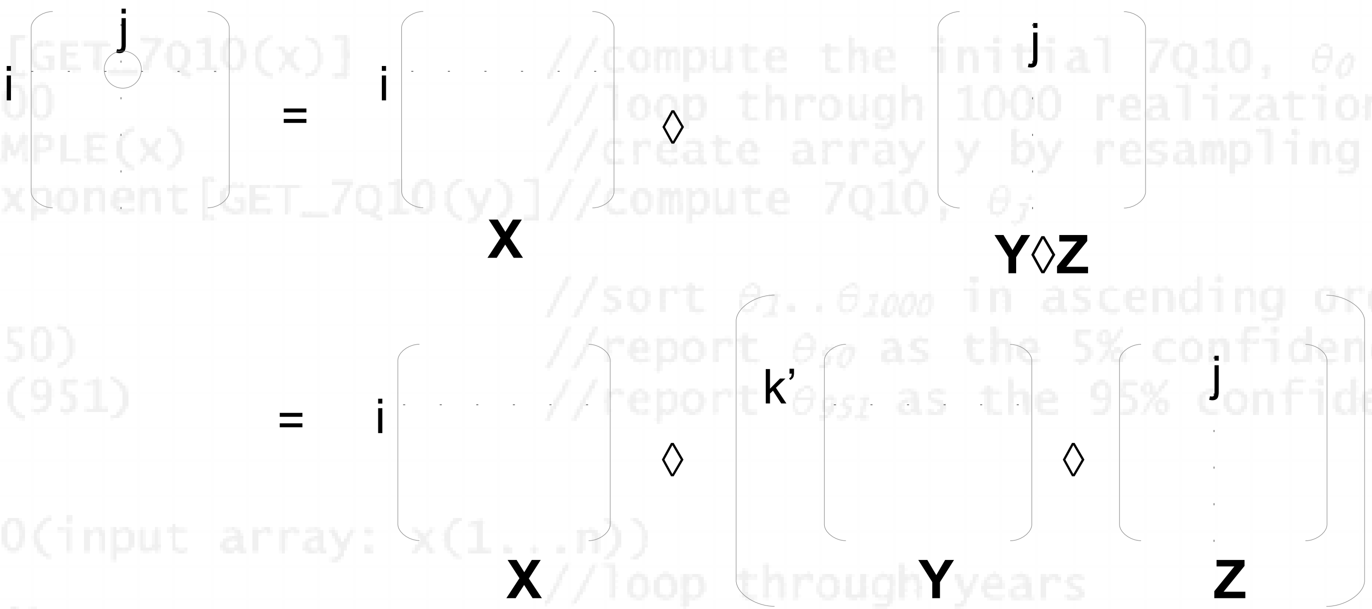
= i ◊ k' ◊ j

X Y Z

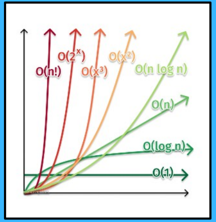
Asociatividad: Demostración (cont.)



$$(X,(Y,Z))_{ij} = min_{k'}(X_{ik'} + min_k(Y_{k'k} + Z_{kj}))$$



Asociatividad: Demostración (cont.)



- Si partimos de

$$((X,Y),Z)_{ij}=min_{k'}(min_k(X_{ik}+Y_{kK'})+Z_{k'j})$$

- Podemos ver que $Z_{k'j}$ no depende de k

$$((X,Y),Z)_{ij}=min_{k'}(min_k(X_{ik}+Y_{kK'}+Z_{k'j}))$$

- Renombramos k’ → a y k → b

$$((X,Y),Z)_{ij}=min_a(min_b(X_{ib}+Y_{ba}+Z_{aj}))$$

- Invertimos el calculo de los mínimos

$$((X,Y),Z)_{ij}=min_b(min_a(X_{ib}+Y_{ba}+Z_{aj}))$$

Asociatividad: Demostración (cont.)

- Si partimos de

$$(X,(Y,Z))_{ij}=min_{k'}(X_{ik'}+min_k(Y_{k'k}+Z_{kj}))$$

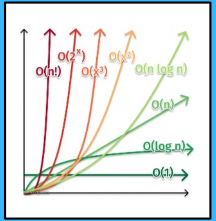
- Podemos ver que $X_{ik'}$ no depende de k

$$(X,(Y,Z))_{ij}=min_{k'}(min_k(X_{ik'}+Y_{k'k}+Z_{kj}))$$

- Renombramos k' → b y k → a

$$(X,(Y,Z))_{ij}=min_b(min_a(X_{ib}+Y_{ba}+Z_{aj}))$$

La operación es asociativa



- Como:

$$(X,(Y,Z))_{ij} = min_b(min_a(X_{ib}+Y_{ba}+Z_{aj}))$$

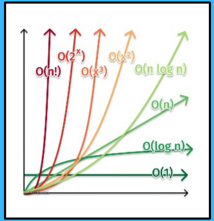
$$((X,Y),Z)_{ij} = min_b(min_a(X_{ib}+Y_{ba}+Z_{aj}))$$

- Entonces

$$(X,(Y,Z))_{ij} = ((X,Y),Z)_{ij}$$

- Y la operación es asociativa (c.q.d)

Regresando a la mejora

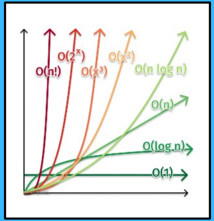


- Utilizando las potencias de 2

L[1] =	W	W"1"
L[2] =	W◊W	W"2"
L[4] =	W"2" ◊ W"2"	W"4"
L[8] =	W"4" ◊ W"4"	W"8"
L[2^x] =	$W^{2^{x-1}} \lozenge W^{2^{x-1}}$	W"r"

- Recordamos que para todo m≥n-1, L[m]=L[n-1]
  - Por lo tanto alcanza que $2^x \geq$ n-1 para hallar el resultado final
  - Usaremos $x = \lceil \log_2 n - 1 \rceil$

Solución iterativa (mejorada)




```
ObtenerCaminosMinimos(W)
    Sea n=|V|
    Sea L[1] = W
    Sea m=1
    Desde m < n-1
        Sea L[2m] una nueva matriz de nxn
        L[2m] = calculo_camino_minimo(L[m], L[m])
        m = 2m

    Retornar L[m]
```

$\Theta(\log n)$

$\Theta(n^3)$

$\Theta(n^3 \log n)$