

## NP-C: Vertex Cover

Teoría de Algoritmos I (75.29 / 95.06)

Ing. Víctor Daniel Podberezski

✉ [vpodberezski@fi.uba.ar](mailto:vpodberezski@fi.uba.ar)

# Cobertura de Vértices

**Sea**

Grafo  $G=(V,E)$

**Diremos**

Set  $S \subseteq V$  es una cobertura de vértices

**Si**

$\forall e \in E=(u,v), u \in S \text{ y/o } v \in S$

# Problema de decisión de cobertura de vértices

Sea

Grafo  $G=(V,E)$

**Determinar**

Si existe una cobertura de vértices (VERTEX-COVER) de tamaño al menos  $k$

**(El problema de optimización busca el subconjunto de menor tamaño)**

# Ejemplo

## Dado el Grafo

Existe una cobertura de vértices de  $k=3$ ?



# VERTEX-COVER $\in$ “NP”

## Sea

Grafo  $G=(V,E)$

Certificado  $t$ : conjunto de nodos de  $V$  que forman el cubrimiento

## Verificamos

Para todo  $e=(u,v) \in E$ , si  $u \in t$  o  $v \in t \rightarrow O(VE)$

Si  $|t| = k$

$\Rightarrow$  VERTEX-COVER  $\in$  “NP”

# INDEPENDENT-SET

Sea

Un grafo  $G=(V,E)$

Un valor  $k$

**Determinar**

Si existe un conjunto independiente de nodos de como mucho tamaño  $K$

**Un conjunto de nodos  $C \subseteq V$  es independiente si**

No existe  $a,b \in C$  tal que existe eje  $(a,b) \in E$

# Relación entre INDEPENDENT-SET y VERTEX-COVER

**Sea**

Grafo  $G=(V,E)$

$S$  conjunto independiente de tamaño  $|S|$

**Llamaremos**

$C = V-S$  (complemento de  $S$ )

**Para todo eje**

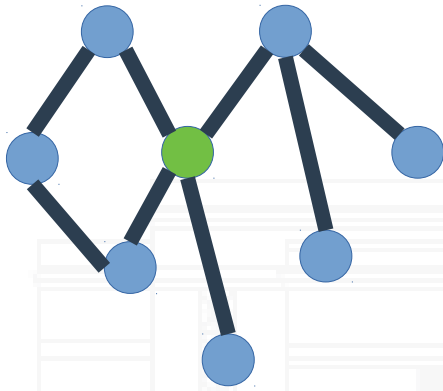
$e=(u,v) \in E, u \in S \Rightarrow v \in C$  (porque  $S$  es set independiente)

Por lo tanto para todo eje al menos un vértice pertenece a  $V-S$

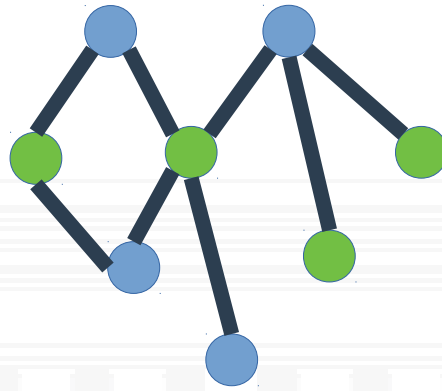
**Entonces**

$V-S$  es una cobertura de vértices de  $G$  de tamaño  $|V-S|$

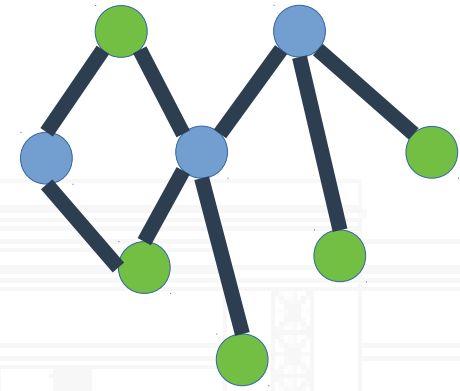
# Ejemplo



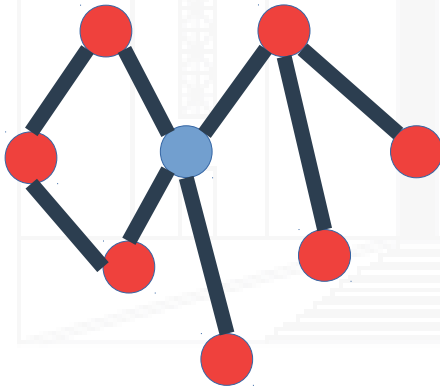
Set independiente  $k=1$



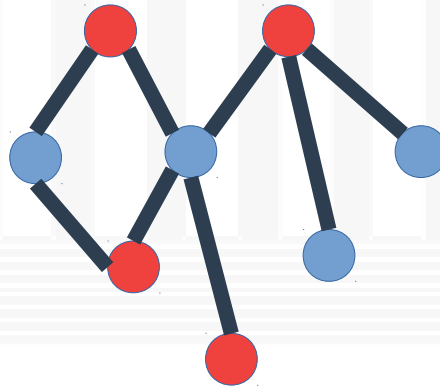
Set independiente  $k=4$



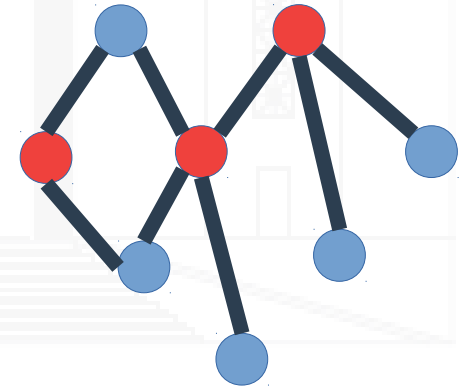
Set independiente  $k=5$



Cobertura de vértices  $k=7$



Cobertura de vértices  $k=4$



Cobertura de vértices  $k=3$



# VERTEX-COVER es NP-C

## INDEPENDENT-SET $\leq_p$ VERTEX-COVER

Mantengo el mismo gráfo  $G=(V,E)$

Y tomo  $k' = |V|-k$

### De forma equivalente

VERTEX-COVER  $\leq_p$  INDEPENDENT-SET



Presentación realizada en Junio de 2020