División y conquista: Teorema maestro - Ejemplos

Teoría de Algoritmos I (75.29 / 95.06)

Ing. Víctor Daniel Podberezski
vpodberezski@fi.uba.ar

Teorema maestro

Sean

a ≥ 1 y b ≥ 1 constantes,

f(n) una función,

T(n) = aT(n/b) + f(n) una recurrencia con T(0)=cte

Entonces

1) Si $f(n)=O(n^{\log_b a-e})$, e>0 $\Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

2) Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ $\Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a} * \log n)$

3) Si $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+e})$, e>0 $\Rightarrow T(n)=\Theta(f(n))$

Y af(n/b) ≤ cf(n) , c<1 y n>>

Ejemplo 1

T(n) = 9 T(n/3) + n

a= 9 b = 3 f(n) = n

Probamos

Caso 2: $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ $\Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a} * \log n)$

$n \stackrel{?}{=} \Theta(n^{\log_3 9}) \stackrel{?}{=} \Theta(n^2)$ ✗

Caso 1: $f(n)=O(n^{\log_b a-e})$, e> 0 $\Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

$n \stackrel{?}{=} O(n^{\log_3 9-e}) \stackrel{?}{=} O(n^{2-e})$ Si e= 1 → $n=O(n^{2-1})=O(n)$

$\boxed{\Rightarrow T(n)=\Theta(n^2)}$

Ejemplo 2

T(n) = T(2n/3) + 1

a= 1 b = 3/2 f(n) = 1

Probamos

Caso 2: $f(n)=\Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ $\Rightarrow T(n)=\Theta\left(n^{\log_b a} * \log n\right)$

$$1 \stackrel{?}{=} \Theta\left(n^{\log_{3/2} 1}\right) \stackrel{?}{=} \Theta\left(n^0\right)$$

$$\Rightarrow T(n)=\Theta\left(n^{\log_{3/2} 1} * \log n\right)$$

$$\Rightarrow T(n)=\Theta(\log n)$$

Ejemplo 3

T(n) = 3 T(n/4) + n log n

a= 3 b = 4 f(n) = n log n

Probamos

Caso 2: $f(n)=\Theta(n^{\log_b a}) \quad \Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a} * \log n)$

$$n \log n \stackrel{?}{=} \Theta(n^{\log_4 3}) \stackrel{?}{=} \Theta(n^{0,793})$$

Caso 1: $f(n)=O(n^{\log_b a-e})$, e> 0 $\quad \Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

$$n \log n \stackrel{?}{=} O(n^{0,793-e}) \stackrel{?}{=} O(n^{2-e})$$

Ejemplo 3 (cont.)

T(n) = 3 T(n/4) + n log n

a= 3 b = 4 f(n) = n log n

Probamos

Caso 3: $f(n)=\Omega\left(n^{\log_b a+e}\right)$, e>0 $\Rightarrow T(n)=\Theta(f(n))$

$n\log n \stackrel{?}{=} \Omega\left(n^{0{,}793+e}\right)$ Si e= 0,1 → $n\log n=\Omega\left(n^{0{,}893}\right)$

$\exists c<1, n>>/\, a*f(n/b)\leqslant c*f(n)$

$3(n/4*\log(n/4))\leqslant c*n*\log n$

$\text{Si c=3/4} \Rightarrow 3/4\,n*\log(n/4)\leqslant 3/4\,n*\log n$

$\Rightarrow T(n)=\Theta(n\log n)$

Ejemplo 4

T(n) = 2T(n/2) + n log n

a= 2 b = 2 f(n) = n log n

Probamos

Caso 2: $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ $n\log n=\Theta(n)$

Caso 1: $f(n)=O(n^{\log_b a-e})$, e>0 $n\log n=O(n^{1-e})$

Caso 3: $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+e})$, e>0 $n\log n=\Omega(n^{1+e})$

No se puede!

FACULTAD DE INGENIERÍA

Presentación realizada en Abril de 2020