

# Redes de Flujo: Matching y Diseño de encuestas

Teoría de Algoritmos I (75.29 / 95.06)

Ing. Víctor Daniel Podberezski

✉ [vpodberezski@fi.uba.ar](mailto:vpodberezski@fi.uba.ar)

# Grafo bipartito y Matching

**Un grafo  $G=(V,E)$  no dirigido es bipartito si**

Se puede dividir  $V = X$  unión  $Y$

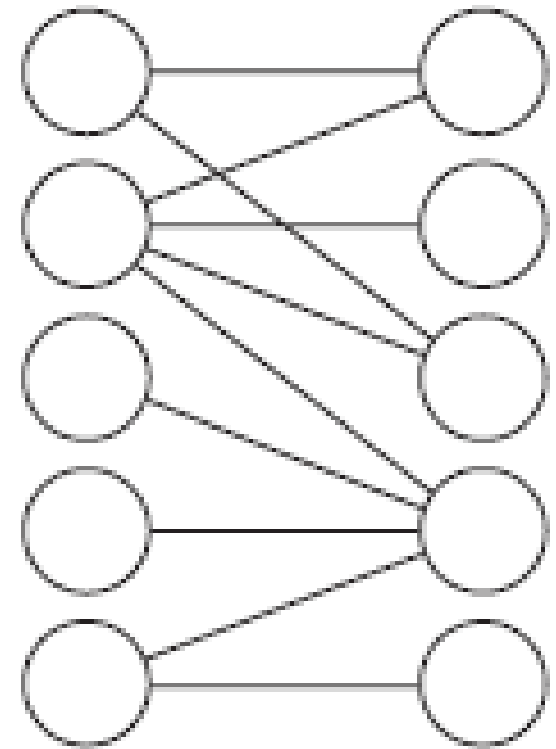
Tal que cada eje de  $E$  sale de  $X$  y llega a  $Y$ .

**Un matching  $M$  en  $G$**

es el subconjunto de ejes  
tal que cada nodo aparece como mucho en un  
eje.

**Bipartite Matching problem**

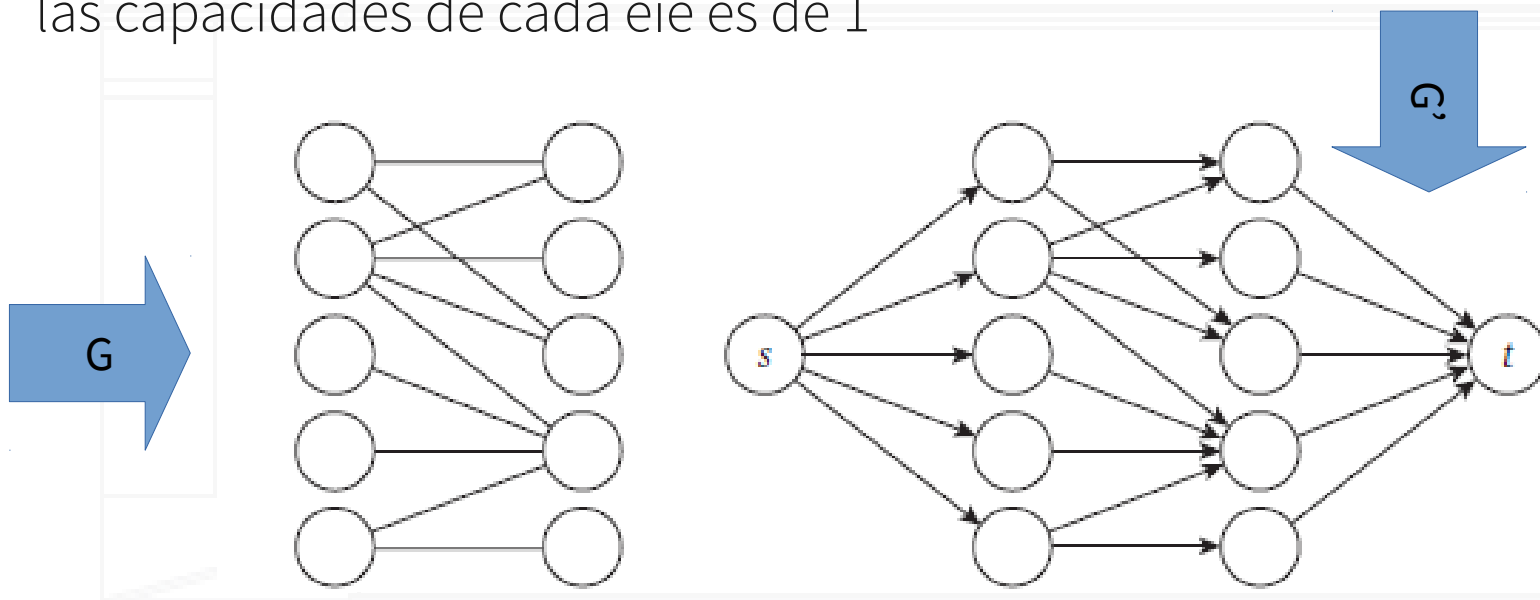
encontrar el set  $M$  del mayor tamaño posible.



# Resolver utilizando el problema de flujo máximo

## Dado el Grafo $G$ del problema de matching

Podemos construir una red de flujo  $G'$  de la siguiente forma  
las capacidades de cada  $e \in E$  es de 1



# Idea detrás

## Resolvemos el problema de red de flujo máximo con $G'$

Obtenemos el flujo máximo  $s$ - $t$ .

El valor del flujo total es igual al tamaño del matching máximo.

## Podemos usar el flujo mismo para recuperar el matching

Aquellos ejes que van de un elemento de  $X$  a  $Y$  con flujo en 1 forman una pareja

La suma del flujo de los ejes que salen de  $s$  indican la cantidad de parejas formadas

# Análisis de la solución

## Supongamos

que hay un matching en  $G$  de  $k$  ejes.

## Consideremos en $G'$ un flujo $f$

que envía un flujo de  $s$  a  $t$  pasando por cada uno de esos vértices.

Las condiciones de conservación se cumplen.

## Si $M'$ son los ejes $(x,y)$ que tienen 1 de flujo

Sabemos que hay  $k$  de esos ejes (podemos probarlo con un corte A-B)

Cada nodo en  $X$  es como mucho el inicio de un eje en  $M'$  (no pueden pertenecer a mas por que el flujo es entero y 1 es el mínimo)

Cada nodo en  $Y$  es como mucho el final de un eje en  $M'$

# Diseño de encuestas

## Sea

$k$  productos que vende una empresa  
 $n$  clientes que realizaron compras a la empresa

## Se desea

Construir una encuesta de satisfacción “personalizada”

## Con las restricciones

Cada cliente puede responder únicamente por productos que haya comprado

El cliente  $i$  puede responder consultas entre  $c_i$  y  $c'_i$  productos

El producto  $j$  debe tener entre  $p_j$  y  $p'_j$  respuestas de clientes

# Análisis del problema

## Cada cliente

Compró un subconjunto de productos

## Cada producto

Fue comprado por un subconjunto de clientes

## Se los puede modelizar como

conjuntos disjuntos

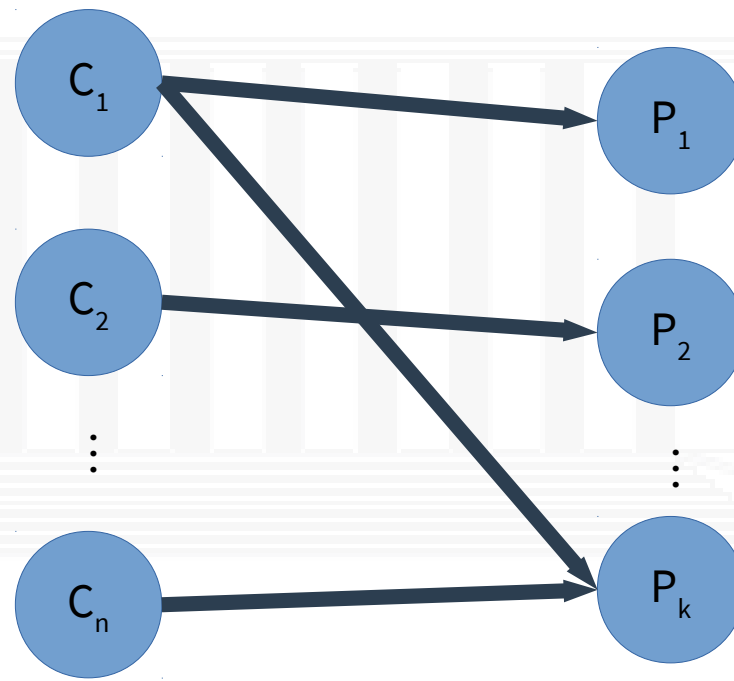
Existe una relación entre un elemento  $i$  del conjunto “cliente” y  $j$  del conjunto “producto” si  $i$  “compro”  $j$

# Grafo

## Podemos construir

Utilizando ambos conjuntos y la relación entre ellos

Un grafo bipartito





# Restricciones

## Para construir las encuestas

Se deben cumplir con las restricciones

### Para el cliente $i$

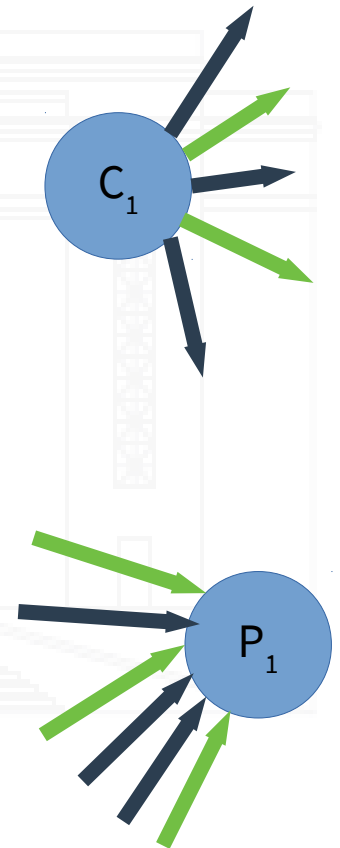
Tenemos que elegir un subconjunto  $x$  de sus “relaciones”

Con  $C_i \leq |x| \leq C'_i$

### Para el producto $j$

Tenemos que elegir un subconjunto  $y$  de sus “relaciones”

Con  $P_j \leq |y| \leq P'_j$



# Reducción a red de flujo

## Podemos transformar el problema

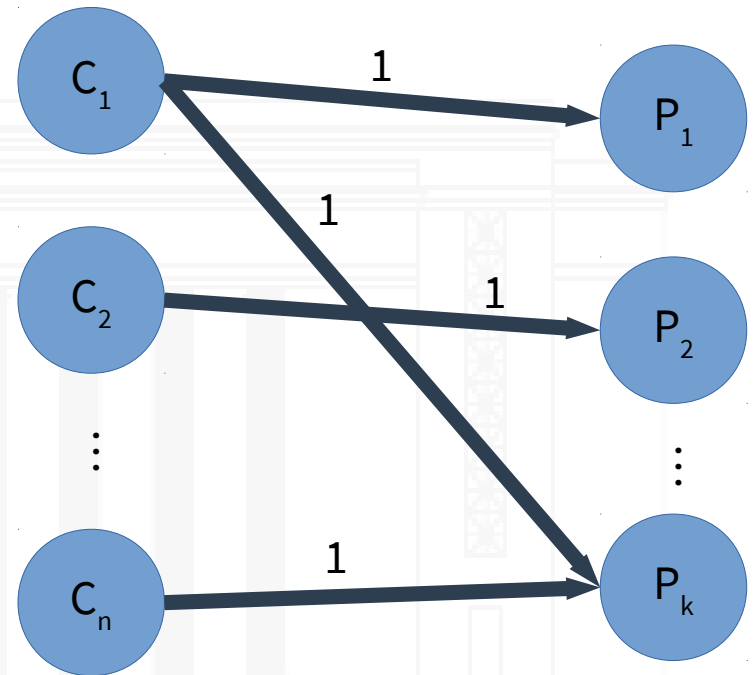
A un problema de determinación de flujo máximo

## Cada cliente y producto

Es un nodo

## Cada relación cliente-producto

Define un eje de capacidad 1 entre el cliente y el producto



# Reducción a red de flujo (cont.)

## Agregamos

nodo ficticio “s”

nodo ficticio “t”

## Por cada cliente i

Agregamos un eje s-i

Con capacidad  $C'_i$  y

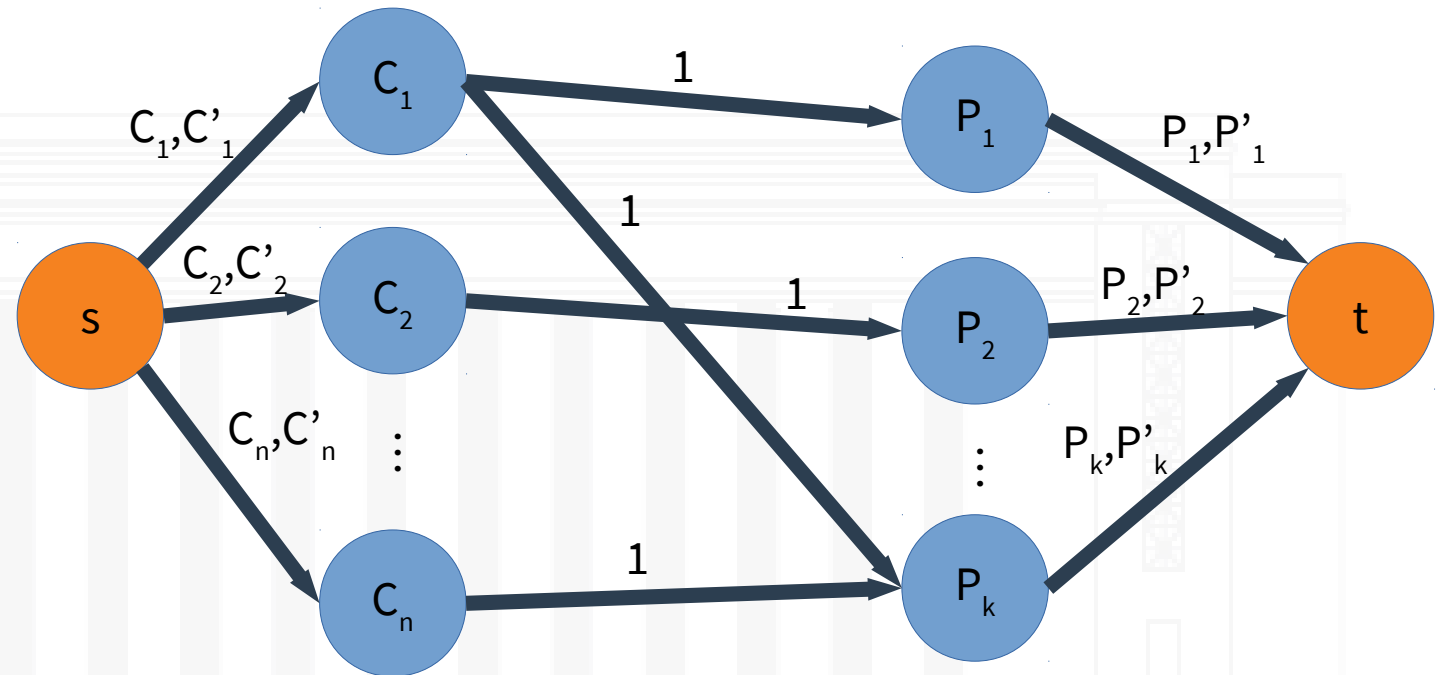
Límite inferior  $C_i$

## Por cada producto j

Agregamos un eje j-t

Con capacidad  $P'_j$  y

Límite inferior  $C_{jx}$



# Reducción a red de flujo (cont.)

## Agregamos

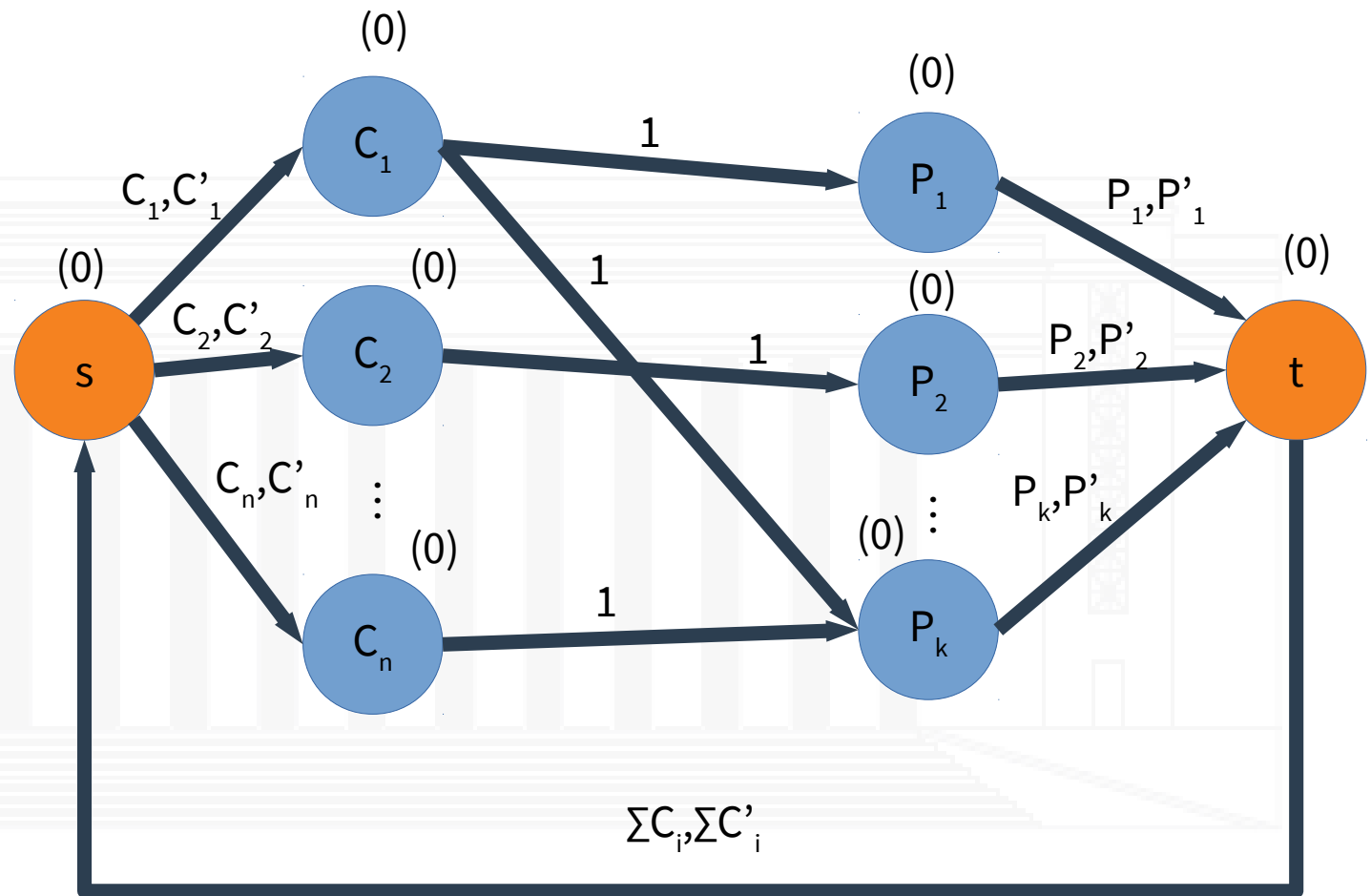
Eje t-s

Con capacidad  $\sum C'_i$

Y límite inferior  $\sum C_i$

## Todos los nodos

tienen demanda 0



# Resolución del problema

## Queda planteado un problema

De circulación con demanda y limite inferior

## Reducirlo

A un problema de circulación con demanda

Y luego a un problema de flujo máximo

## Resolver el problema

Mediante Ford-Fulkerson

# Verificación Factibilidad

## Una vez obtenido el flujo máximo

El flujo en eje s-t contiene la cantidad total de preguntas a realizar

El flujo de cada s-ci contiene cuantas preguntas debe contestar el cliente i

El flujo de cada pj-t contiene cuantas preguntas se realizan al producto j

Aquellos ejes ci-pj con flujo 1 corresponden a preguntar al cliente i sobre el producto j

## Si algún flujo no cumple las restricciones

No se puede hacer la encuesta con las restricciones solicitadas.



Presentación realizada en Mayo de 2020