# Teorema Maestro - Demostración

Teoría de Algoritmos I (75.29 / 95.06)

Ing. Víctor Daniel Podberezski
vpodberezski@fi.uba.ar

FACULTAD DE INGENIERÍA

# Teorema maestro

## Sean

a ≥ 1 y b ≥ 1 constantes,

f(n) una función,

T(n) = aT(n/b) + f(n) una recurrencia con T(0)=cte

## Entonces

1) Si $f(n)=O(n^{\log_b a-e})$ , e>0 $\Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

2) Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ $\Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a}*\log n)$

3) Si $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+e})$ , e>0 $\Rightarrow T(n)=\Theta(f(n))$

Y af(n/b) ≤ cf(n) , c<1 y n>>

# Estrategia

## Se puede probar el teorema

En 2 partes

## Primero

Para el caso donde T(n) esta definida en potencia exacta de b >1

Es decir decir para n = 1, b, b2…

## Segundo

Extender el análisis a todos los números enteros

# Lemma 1

## Sean

a ≥ 1 y b ≥ 1 constantes,

f(n) una función,

T (n) definida en potencia exacta de b >1 como

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1) & \text{si } n=1\\ aT(n/b)+f(n) & \text{si } n=b^i,\ \text{i entero positivo}\end{cases}$$

## Entonces

$$T(n)=\Theta\left(n^{\log_b a}\right)+\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f\left(n/b^j\right)$$

# Lemma 1 - Demostración

## Desenrollaremos el árbol de recursión

En cada nivel con tamaño "n"

se crean a subproblemas de tamaño n/b con un costo f(n/b)

## La raíz

tiene costo de f(n)

Tiene a hijos con costo f(n/b)

$$T(n)=\begin{cases} \Theta(1) & \text{si } n=1 \\ aT(n/b)+f(n) & \text{si } n=b^i,\ \text{i entero positivo} \end{cases}$$

## El segundo nivel

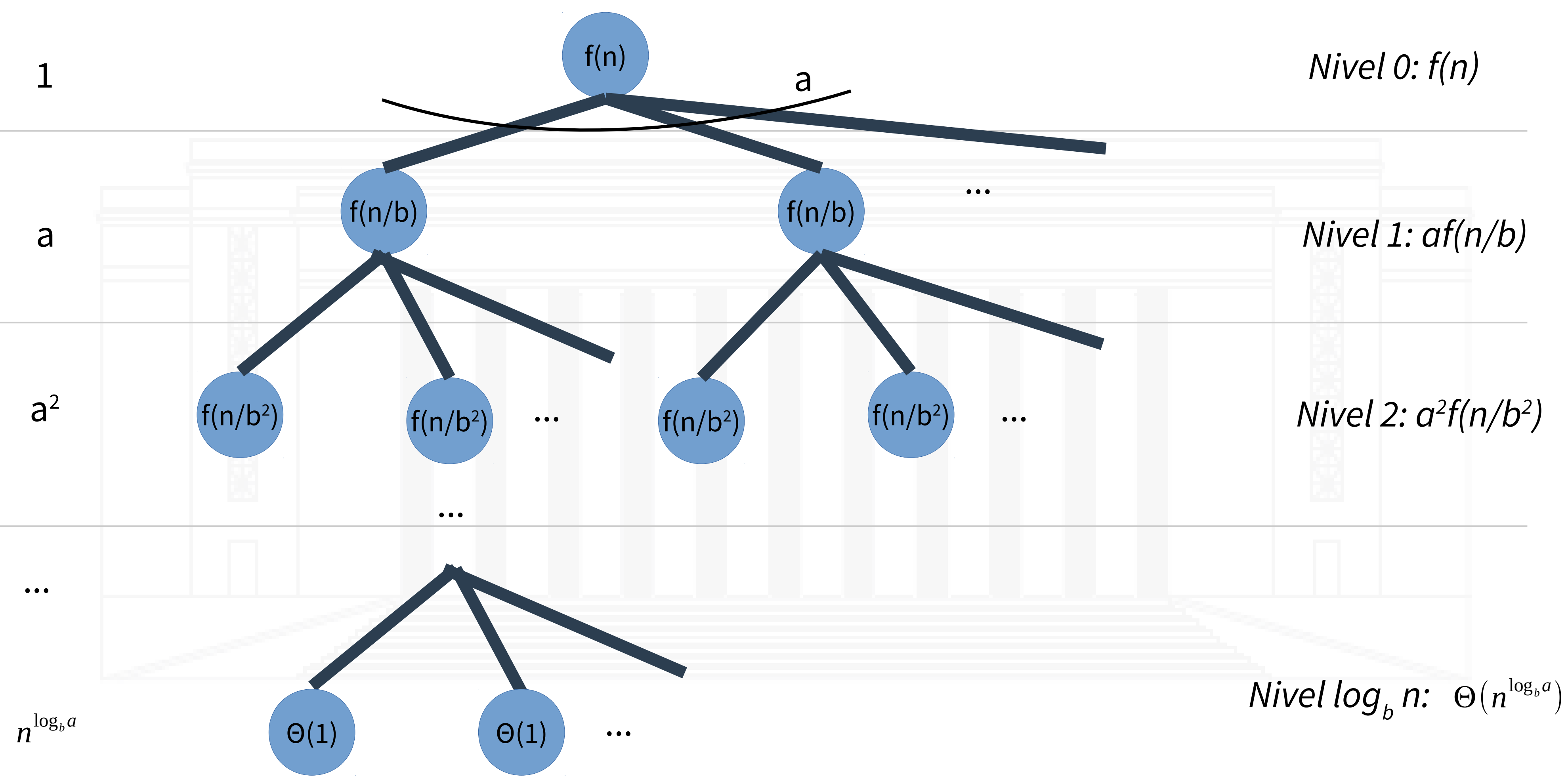
Tiene $a^2$ hijos en total (a por cada subproblema anterior)

Estos subproblemas de tamaño $n/b^2$ con un costo de $f(n/b^2)$

## Llegaremos al casa base

En $\log_b(n)$ niveles

# Lemma 1 – Demostración (cont.)



# Lemma 1 – Demostración (cont.)

## Sumando el costo de cada nivel

$T(n) = f(n) + a^1 * f(n/b^1) + a^2 * f(n/b^2) + \dots + \Theta(n^{\log_b a})$

*NIVEL* $\log_b n$

## Agrupando

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j f(n/b^j)$$

Cqd.

# Lemma 2

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})+\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$$

**Sean**

a ≥ 1 y b ≥ 1 constantes,

f(n) una función no negativa definida en potencias exactas de b,

g(n) una función definida en potencias exactas de b como:

$$g(n)=\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$$

## g(n) tiene las siguientes cotas asintóticas

(para potencias exactas de b)

1) Si $f(n)=O(n^{\log_b a-e})$ , e>0 $\Rightarrow g(n)=O(n^{\log_b a})$

2) Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ $\Rightarrow g(n)=\Theta(n^{\log_b a}*\log n)$

3) Si af(n/b) ≤ cf(n) , c<1 y n>> $\Rightarrow g(n)=\Theta(f(n))$

# Lemma 2 – Demostración: Parte 1

## Queremos ver que

Si $f(n)=O(n^{\log_b a-e})$ , e>0 $\Rightarrow g(n)=O(n^{\log_b a})$

## Podemos ver que

Si $f(n)=O(n^{\log_b a-e})$ $\Rightarrow f(\frac{n}{b^j})=O((\frac{n}{b^j})^{\log_b a-e})$

## Sustituimos en g(n)

$$g(n)=O\left(\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j(\frac{n}{b^j})^{\log_b a-e}\right)$$

$$g(n)=\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$$

# Lemma 2 – Demostración: Parte 1 (cont.)

## Trabajamos sobre la cota de g(n)

$$\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a-e} = n^{\log_b a-e} \sum_{j=0}^{\log_b n-1} \left(\frac{a\,b^e}{b^{\log_b a}}\right)^j$$

$$= n^{\log_b a-e} \sum_{j=0}^{\log_b n-1} \left(b^e\right)^j$$

$$= n^{\log_b a-e} \left(\frac{b^{e\log_b n}-1}{b^e-1}\right)$$

$$= n^{\log_b a-e} \left(\frac{n^e-1}{b^e-1}\right)$$

$$g(n)=O\left(\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a-e}\right)$$

$$b^{\log_b a}=a$$

# Lemma 2 – Demostración: Parte 1 (cont.)

Por lo tanto

$$g(n) = O\left(n^{\log_b a - e}\left(\frac{n^e - 1}{b^e - 1}\right)\right)$$

Como b y e son constantes

$$g(n) = O\left(n^{\log_b a - e} n^e\right)$$

Podemos simplificar $n^e$ y llegar a

$$g(n) = O\left(n^{\log_b a}\right)$$

Cqd.

$$g(n) = O\left(\sum_{j=0}^{\log_b n - 1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a - e}\right)$$

# Lemma 2 – Demostración: Parte 2

$$g(n)=\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$$

## Queremos ver que

Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ $\Rightarrow g(n)=\Theta(n^{\log_b a} * \log n)$

## Podemos ver que

Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ $\Rightarrow f(\frac{n}{b^j})=\Theta((\frac{n}{b^j})^{\log_b a})$

## Sustituimos en g(n)

$$g(n)=\Theta\left(\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a}\right)$$

# Lemma 2 – Demostracion: Parte 2 (cont.)

## Trabajamos sobre la cota de g(n)

$$\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a} = n^{\log_b a} \sum_{j=0}^{\log_b n-1} \left(\frac{a}{b^{\log_b a}}\right)^j$$

$$= n^{\log_b a - e} \sum_{j=0}^{\log_b n-1} (1)^j$$

$$= n^{\log_b a - e} \log_b n$$

$$g(n) = \Theta\left(\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a}\right)$$

$$b^{\log_b a} = a$$

# Lemma 2 – Demostración: Parte 2 (cont.)

$$g(n)=\Theta\left(\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j\left(\frac{n}{b^j}\right)^{\log_b a}\right)$$

**Por lo tanto**

$$g(n)=\Theta\left(n^{\log_b a}\log_b n\right)$$

**En definitiva**

$$g(n)=\Theta\left(n^{\log_b a}\log n\right)$$

Cqd.

# Lemma 2 – Demostración: Parte 3

## Queremos ver que

Si $af(n/b) \leq cf(n)$ , $c<1$ y $n>>$ $\Rightarrow g(n)=\Theta(f(n))$

## Podemos ver que

g(n) es una sumatoria de todos términos no negativos (con f(n))

## Entonces

$g(n)=\Omega(f(n))$

## Por otro lado, podemos reescribir

$f(n/b)\leq(\frac{c}{a})f(n)$

$$g(n)=\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$$

# Lemma 2 – Demostración: Parte 3 (cont.)

## Ademas

$$f(n/b^j) \leq \left(\frac{c}{a}\right)^j f(n)$$

## Reemplazando en g(n)

$$g(n) \leq \sum_{j=0}^{\log_b n-1} c^j f(n) + O(1)$$

$$\leq f(n) \sum_{j=0}^{\infty} c^j f(n) + O(1)$$

$$\leq f(n) \left(\frac{1}{1-c}\right) + O(1)$$

Para cubrir términos cuando n no es lo suficientemente grande

## Como c es constante

$$g(n) = O(f(n))$$

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$$

$$f(n/b) \leq \left(\frac{c}{a}\right) f(n)$$

# Lemma 2 – Demostración: Parte 3 (cont.)

**Como**

$$g(n)=\Omega(f(n))$$

**Y**

$$g(n)=O(f(n))$$

**Entonces**

$$g(n)=\Theta(f(n))$$

Cqd.

# Lemma 3

## Sean

a ≥ 1 y b ≥ 1 constantes,

f(n) una función,

T (n) definida en potencia exacta de b >1 como

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(1) & \text{si } n=1\\ a\,T(n/b)+f(n) & \text{si } n=b^i,\ \text{i entero positivo}\end{cases}$$

## Entonces

1) Si $f(n)=O(n^{\log_b a-e})$ , e>0 $\Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$

2) Si $f(n)=\Theta(n^{\log_b a})$ $\Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a}*\log n)$

3) Si $f(n)=\Omega(n^{\log_b a+e})$ , e>0

Y af(n/b) ≤ cf(n) , c<1 y n>> $\Rightarrow T(n)=\Theta(f(n))$

# Lemma 3 – Demostración: Parte 1

**Por lemma 1 sabemos que**

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})+\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$$

**Por lemma 2 – Parte 1 sabemos que**

$$g(n)=\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$$

Si $f(n)=O(n^{\log_b a-e})$ , e>0 $\Rightarrow g(n)=O(n^{\log_b a})$

**Por lo tanto**

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})+O(n^{\log_b a}) \quad \Rightarrow T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$$

Cqd.

# Lemma 3 – Demostración: Parte 2

**Por lemma 1 sabemos que**

$$T(n)=\Theta\left(n^{\log_b a}\right)+\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f\left(n/b^j\right)$$

**Por lemma 2 – Parte 2 sabemos que**

$$g(n)=\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f\left(n/b^j\right)$$

Si $f(n)=\Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ $\Rightarrow g(n)=\Theta\left(n^{\log_b a} * \log n\right)$

**Por lo tanto**

$$T(n)=\Theta\left(n^{\log_b a}\right)+\Theta\left(n^{\log_b a} * \log n\right) \qquad \Rightarrow T(n)=\Theta\left(n^{\log_b a} * \log n\right)$$

Cqd.

# Lemma 3 – Demostración: Parte 3

## Por lemma 1 sabemos que

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})+\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$$

## Por lemma 2 – Parte 3 sabemos que

$$g(n)=\sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$$

Si af(n/b) ≤ cf(n) , c<1 y n>> $\Rightarrow g(n)=\Theta(f(n))$

## Por lo tanto

$$T(n)=\Theta(n^{\log_b a})+\Theta(f(n))$$

## Y como

$f(n)=\Omega(n^{\log_b a+e})$ $\Rightarrow T(n)=\Theta(f(n))$ cqd.

# Extendiendo a todos los valores de “n”

**Las demostraciones anteriores**

Suponen que n es potencia de b

**Se debe extender las demostraciones**

a cualquier valor de n

**Para lograrlo se debe analizar las relaciones de recurrencia**

Con la aparición de pisos y techos

$T(n) = aT(\lceil n/b \rceil) + f(n)$ ← cota superior

$T(n) = aT(\lfloor n/b \rfloor) + f(n)$ ← cota inferior

# Análisis de la recursión

## A medida que vamos descendiendo en llamadas recursivas

Se van reevaluando las parámetros (se desarrolla para la cota superior)

$n$

$\lceil n/b \rceil$

$\lceil \lceil n/b \rceil / b \rceil$

$\lceil \lceil \lceil n/b \rceil / b \rceil / b \rceil$

…

## Podemos expresarlo como

$$n_j = \begin{cases} n & \text{si} \quad j = 0 \\ \lceil n_{j-1} / b \rceil & \text{si} \quad j > 0 \end{cases}$$

# Caso base

## ¿Cuantos niveles de n?

se realizan hasta llegar al caso base?

## Partamos de la inecuación

$\lceil x \rceil \leq x + 1$

## Obtenemos

$n_0 \leq n$

$n_1 \leq n/b + 1$

$n_2 \leq (n/b + 1)/b + 1 = n/b^2 + 1/b + 1$

$n_3 \leq n/b^3 + 1/b^2 + 1/b + 1$

...

$$n_j = \begin{cases} n & \text{si } j = 0 \\ \lceil n_{j-1}/b \rceil & \text{si } j > 0 \end{cases}$$

# Caso base (cont.)

## Unificando

$$n_j \leq \frac{n}{b^j} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{b^i}$$

$$n_j < \frac{n}{b^j} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{b^i}$$

$$n_j < \frac{n}{b^j} + \frac{b}{b-1}$$

## Cuantos niveles tenemos que descender para el caso base?

Cuando el tamaño del problema sea como mucho constante

## Esto ocurre con

$j = \lfloor \log_b n \rfloor$

# Caso base (cont.)

## Reemplazando en la inecuación

$$n_{\lfloor \log_b n \rfloor} < \frac{n}{b^{\lfloor \log_b n \rfloor}} + \frac{b}{b-1}$$

$$< \frac{n}{b^{\log_b n - 1}} + \frac{b}{b-1}$$

$$= \frac{n}{n/b} + \frac{b}{b-1}$$

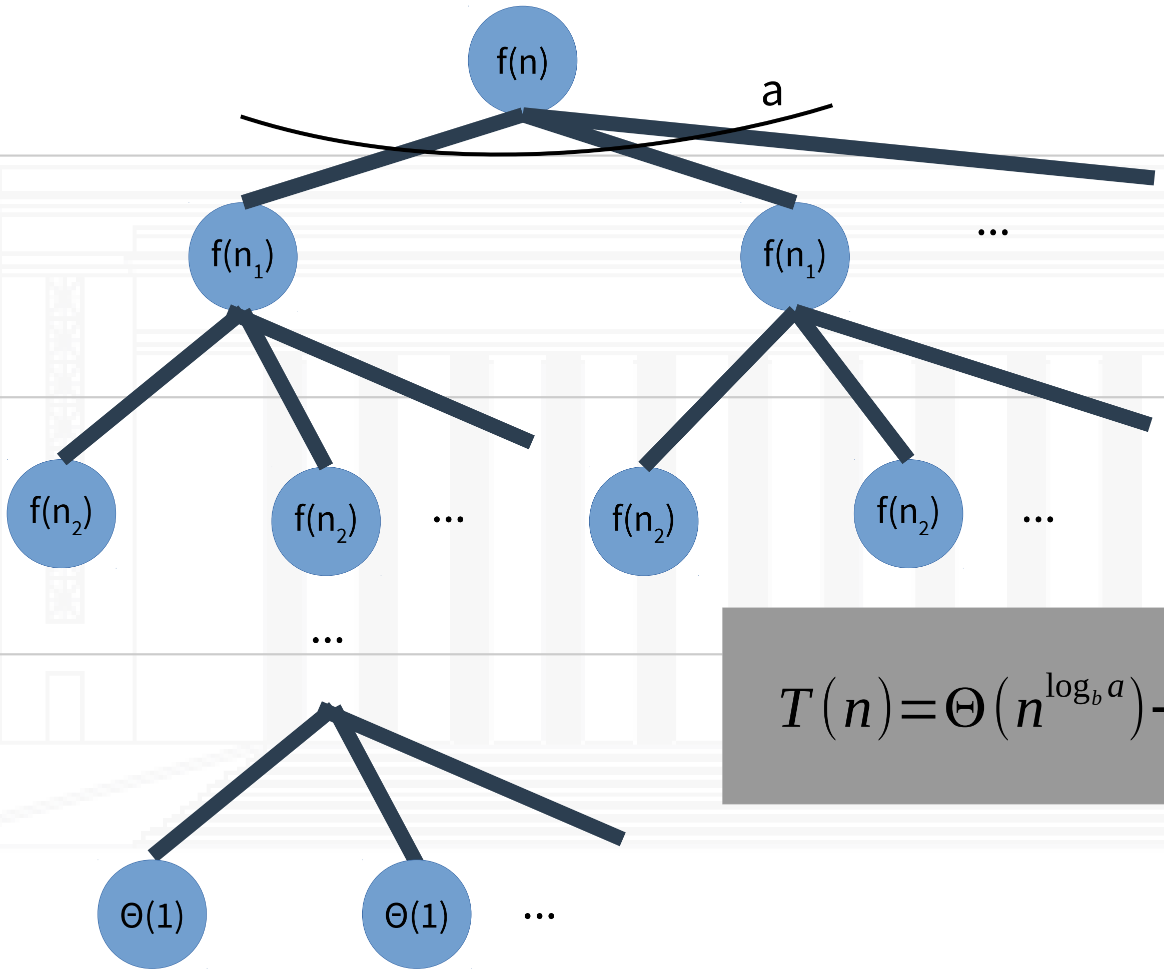
$$= b + \frac{b}{b-1}$$

$$= O(1)$$

$$n_j < \frac{n}{b^j} + \frac{b}{b-1}$$

$$\lceil x \rceil \leq x + 1$$

# Para valores de n arbitrarios




1 — *Nivel 0: f(n)*

a — *Nivel 1: $af(n_1)$*

$a^2$ — *Nivel 2: $a^2 f(n_2)$*

…

$n^{\log_b a}$ — *Nivel $\lfloor \log_b n \rfloor$: $\Theta(n^{\log_b a})$*

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\lfloor \log_b n \rfloor - 1} a^j f(n_j)$$

# Para valores de n arbitrarios

## Partiendo de

$$T(n)=\Theta\left(n^{\log_b a}\right)+\sum_{j=0}^{\lfloor \log_b n\rfloor-1} a^j f(n_j)$$

## Se deben extender las demostraciones

del lemma 3 para cada uno de los casos

(es artimeticamente trabajoso. Pero posible)

## Se debe realizar

Tanto para la cota inferior como superior.

.UBA fiuba

FACULTAD DE INGENIERÍA

Presentación realizada en Abril de 2021