NP-C: Ciclo Hamiltoniano

Teoría de Algoritmos I (75.29 / 95.06)
Ing. Víctor Daniel Podberezski
vpodberezski@fi.uba.ar

Ciclo Hamiltoneano

Sea

G = (V,E) grafo direccionado

Definimos

Un ciclo C en G como hamiltoneano

Si

Visita cada vértice 1 y solo 1 vez

Comienza y termina por el mismo vértice

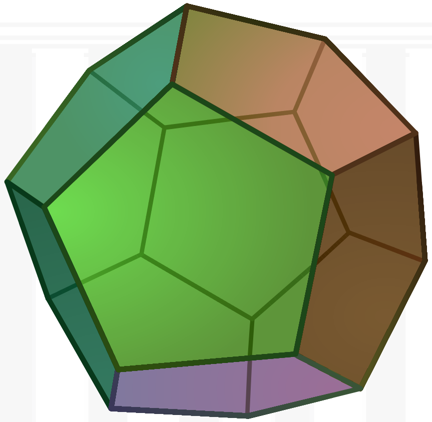
Ciclo Hamiltoneano (cont.)

Recibe su nombre

Por Sir William Rowan Hamilton ,

En 1857

Inventa el Juego “Icosian”



Dado un dodecaedro

Encontrar un ciclo que recorra todos los vértices, iniciando y finalizando por el mismo vértice

Problema de decisión de Ciclo Hamiltoneano

Sea

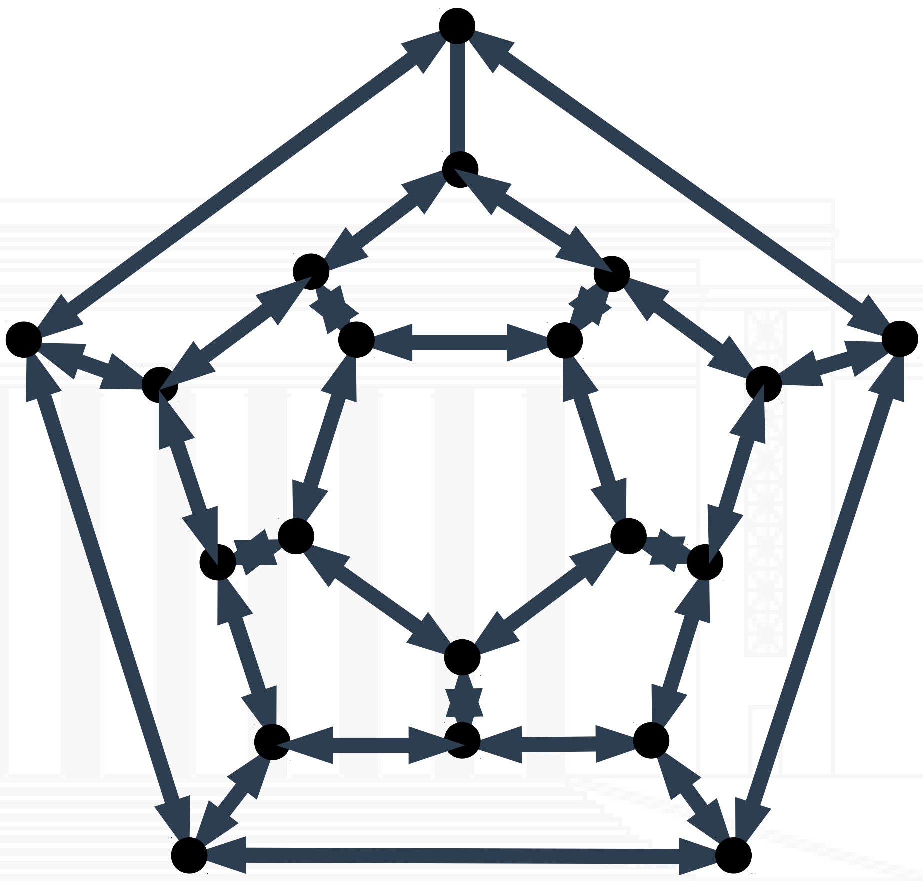
G = (V,E) grafo direccionado

Existe

Un ciclo hamiltoneano?

Llamaremos al problema

HAM-CYCLE



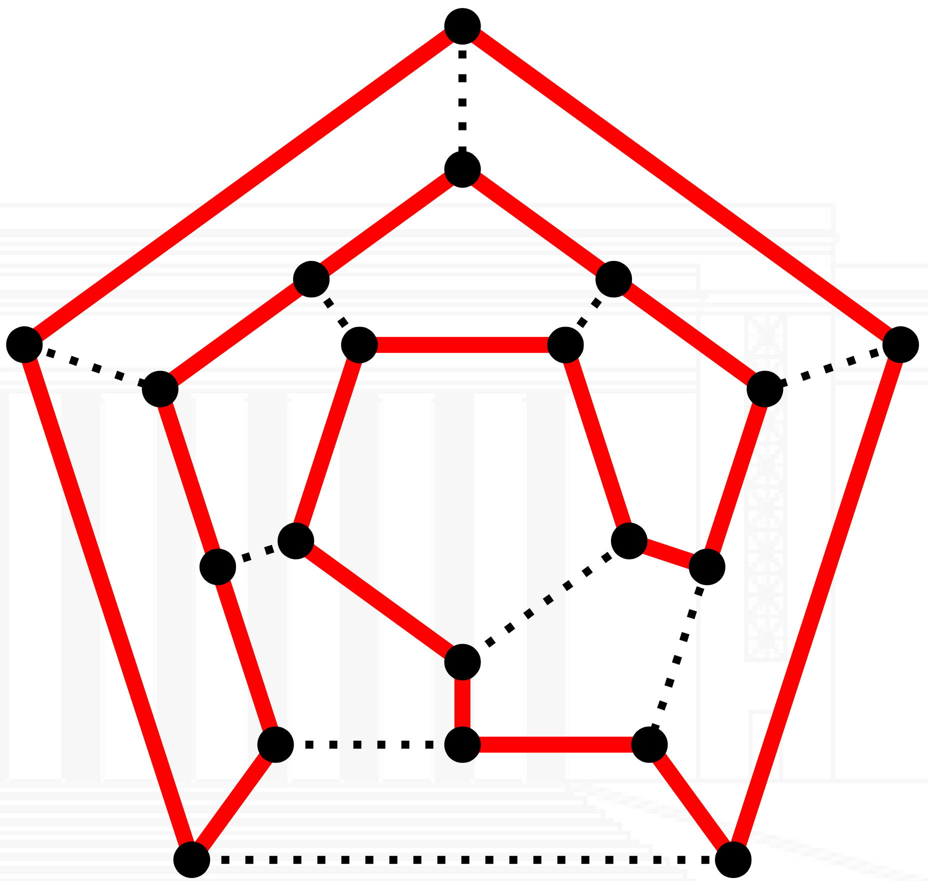
Problema de decisión de Ciclo Hamiltoneano

Sea

G = (V,E) grafo direccionado

Existe

Un ciclo hamiltoneano?



HAM-CYCLE $\in$ "NP"

Dado

$G=(V,E)$

T certitifcado = $\{t_0,\ldots t_{|V|}\}$ lista ordenada de vértices

Puedo verificar (en tiempo polinomial)

$|T| = |V|$, $t_0=t_{|V|}$

Todos los vértices de V están en T

Para todo t_i $t_{i+1} \in T$, $(t_i,t_{i+1}) \in E$

$\Rightarrow$ HAM-CYCE $\in$ NP

¿HAM-CYCLE es “P”?

No se conoce algoritmo

Que resuelva HAM-CYCLE en tiempo polinómico

Si probamos que

HAM-CYCLE $\in$NP-C

(Utilizaremos 3SAT)

Entonces

HAM-CYCLE $\in$ P $\Leftrightarrow$ P = NP

3SAT

Dado

$X=\{x_1,\ldots x_n\}$ conjunto de n Variables booleanas = {0,1}

k clausulas booleanas $T_i = (t_{i1} \vee t_{i2} \vee t_{i3})$

Con cada $t_{ij} \in X \cup \overline{X} \cup \{1\}$

Determinar

Si existe asignación de variables tal que $T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_k = 1$

Reducción de 3SAT a HAM-CYCLE

Para I instancia de3SAT

Con n variables $x_1,...,x_n$

Y k clausulas $c_1,...,C_k$

(existen 2^n asignaciones de variables posibles)

Construiremos

Un grafo G=(V,E) donde encontrar el ciclo hamiltoneano.

Reducción de 3SAT a HAM-CYCLE (cont.)

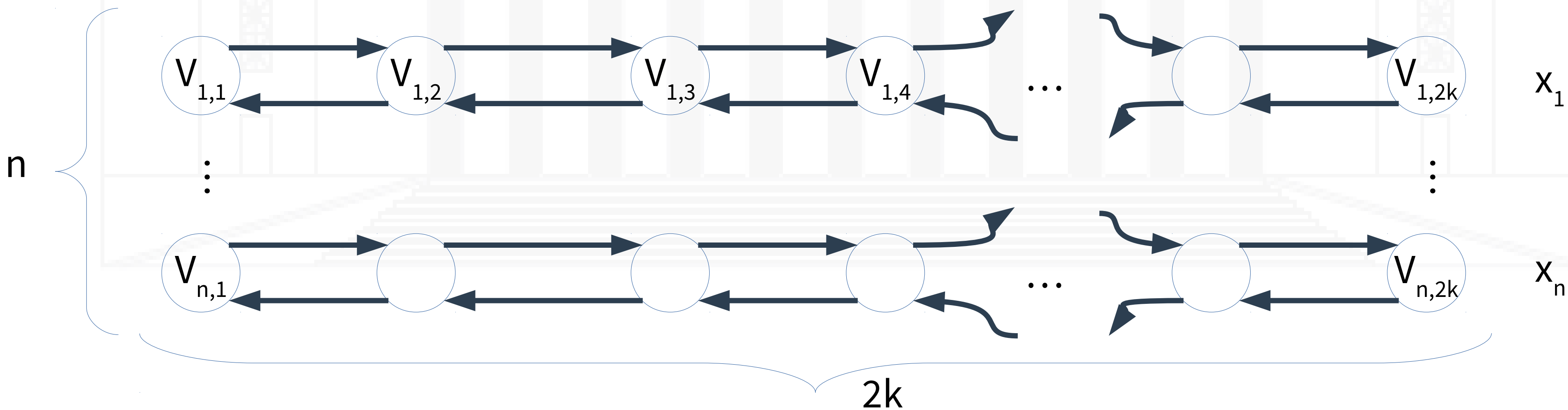
Construimos n caminos p1, …, pn

cada uno representa a una variable

Cada camino estará conformado por 2*k nodos

Unidos entre si por aristas de ida y vuelta

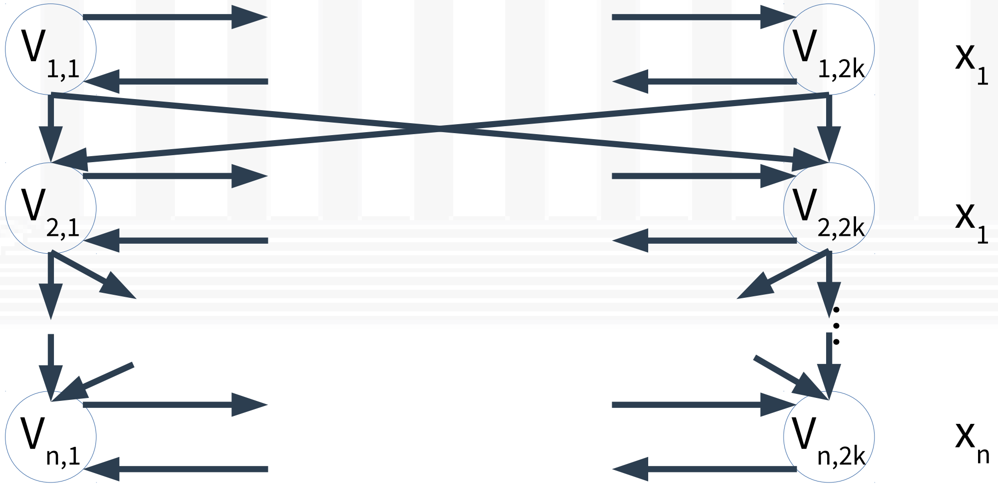
(cada 2 nodos corresponden a la variable en una clausula)



Reducción de 3SAT a HAM-CYCLE (cont.)

Uniremos cada camino

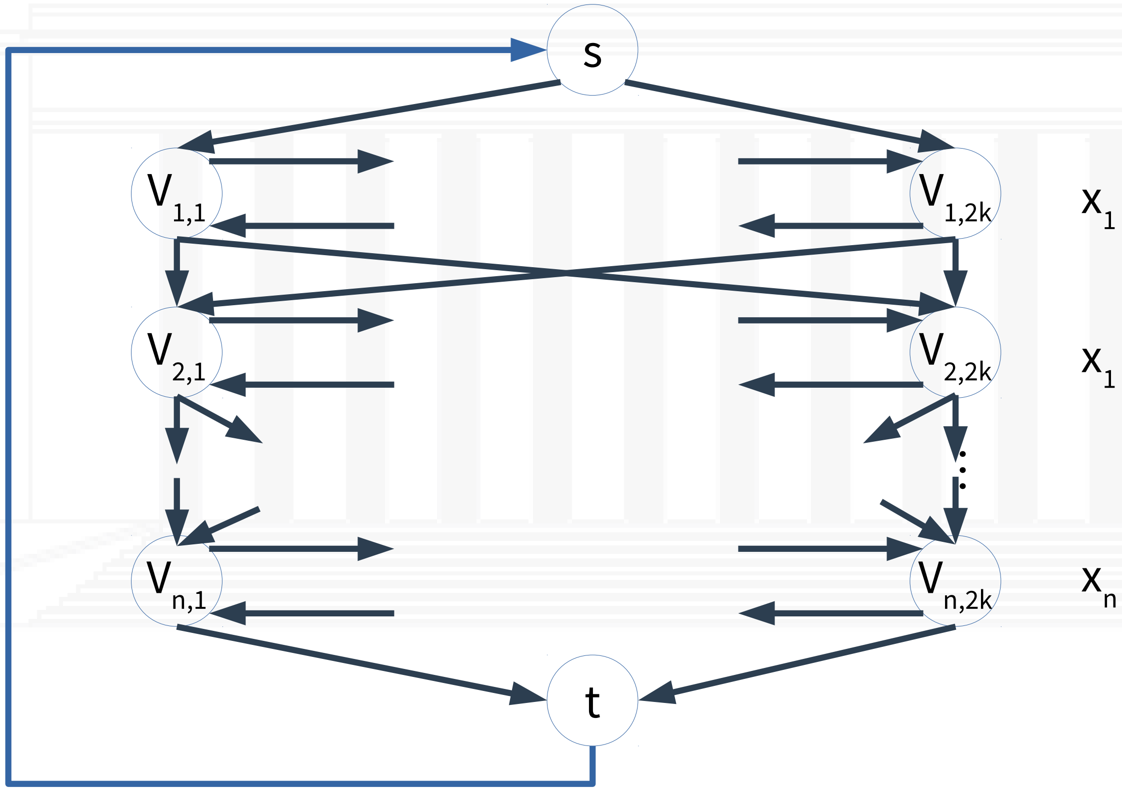
- Desde su nodo inicial hasta el nodo inicial del camino siguiente
- Desde su nodo inicial hasta el nodo final del camino siguiente
- Desde su nodo final hasta el nodo inicial del camino siguiente
- Desde su nodo final hasta el nodo final del camino siguiente



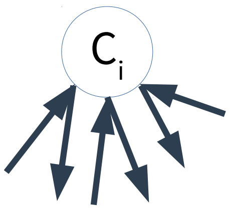
Reducción de 3SAT a HAM-CYCLE (cont.)

Creamos nodos: s y t

Unimos con los ejes s-$v_{1,1}$, s-$v_{1,2k}$, $v_{n,2k}$-t , $v_{n,2k}$-t, t-s



Reducción de 3SAT a HAM-CYCLE (cont.)



Creamos 1 nodo por cada clausula: Ti = $(t_{i1} \vee t_{i2} \vee t_{i3})$

Cada clausula tendrá 3 pares de ejes

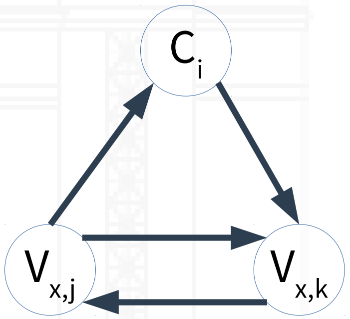
Para cada variable x de la clausula i

Se une 2 nodos del camino de la variable x con el nodo de la clausula i

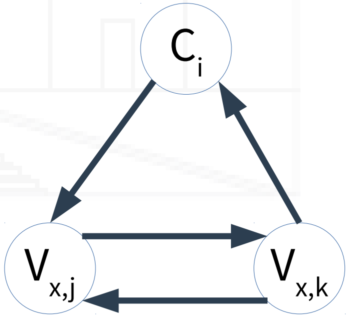
en la posición j=i*2 y k=i*2+1

(el sentido de los ejes depende si la variable esta negada o no)

Variable sin negar



Variable negada



Existencia de camino Hamiltoneano

Si existe un camino hamiltoneano

Que parte de s y llegue a t

(regresando a s desde t para conformar el ciclo)

Pasando por todos los nodos (y por lo tanto activando las clausulas)

Entonces hay forma de satisfacer la expresión booleana

El sentido por el que se recorre el camino que representa la variable determina si su valor es 0 o 1

El eje seleccionado para acceder al nodo “clausula” nos dice que variable la activa

Si una variable requiere estar negado y no estarlo para activar varias clausulas, el ciclo es imposible de construir

Ejemplo

Si tengo la expresión

$E = (x_1 \lor x_2 \lor x_4) \land (\overline{x}_1 \lor x_3 \lor x_4) \land (\overline{x}_2 \lor \overline{x}_3 \lor x_4)$

Con 4 variables y 3 clausulas

Tendré

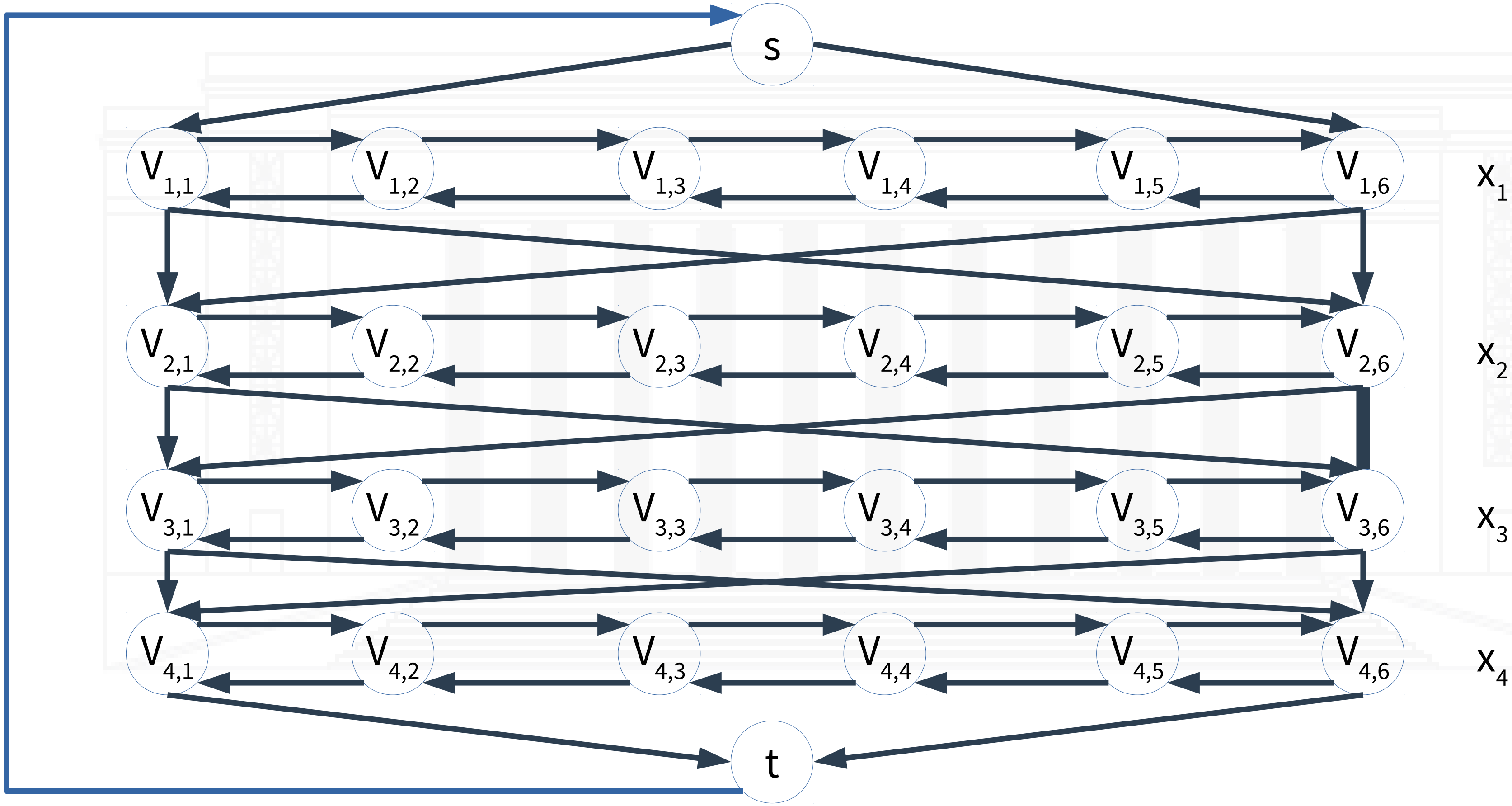
4 caminos (n=4)

3*2 = 6 nodos por caminos

3 nodos clausulas

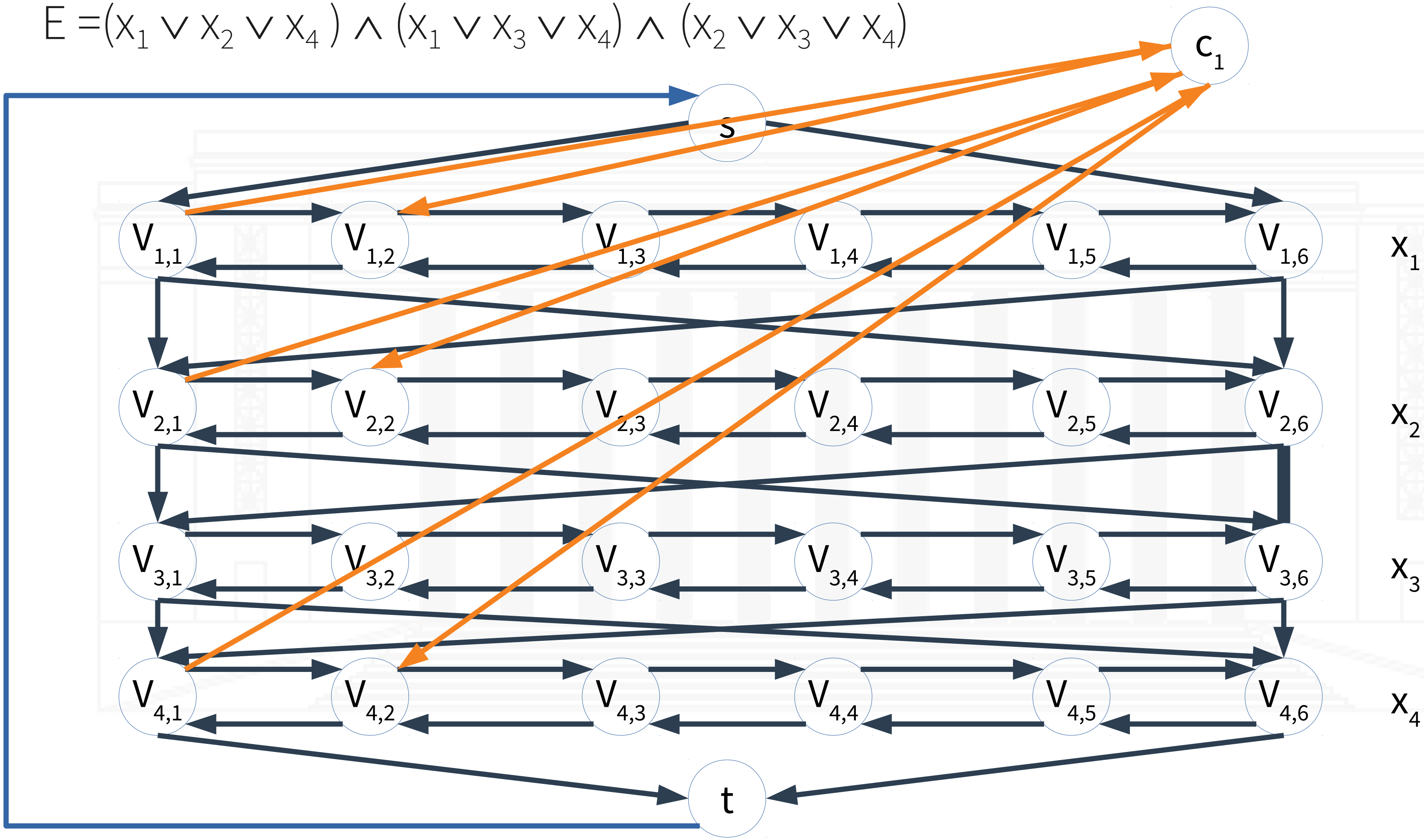
Ejemplo (cont.)

$$E = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$$



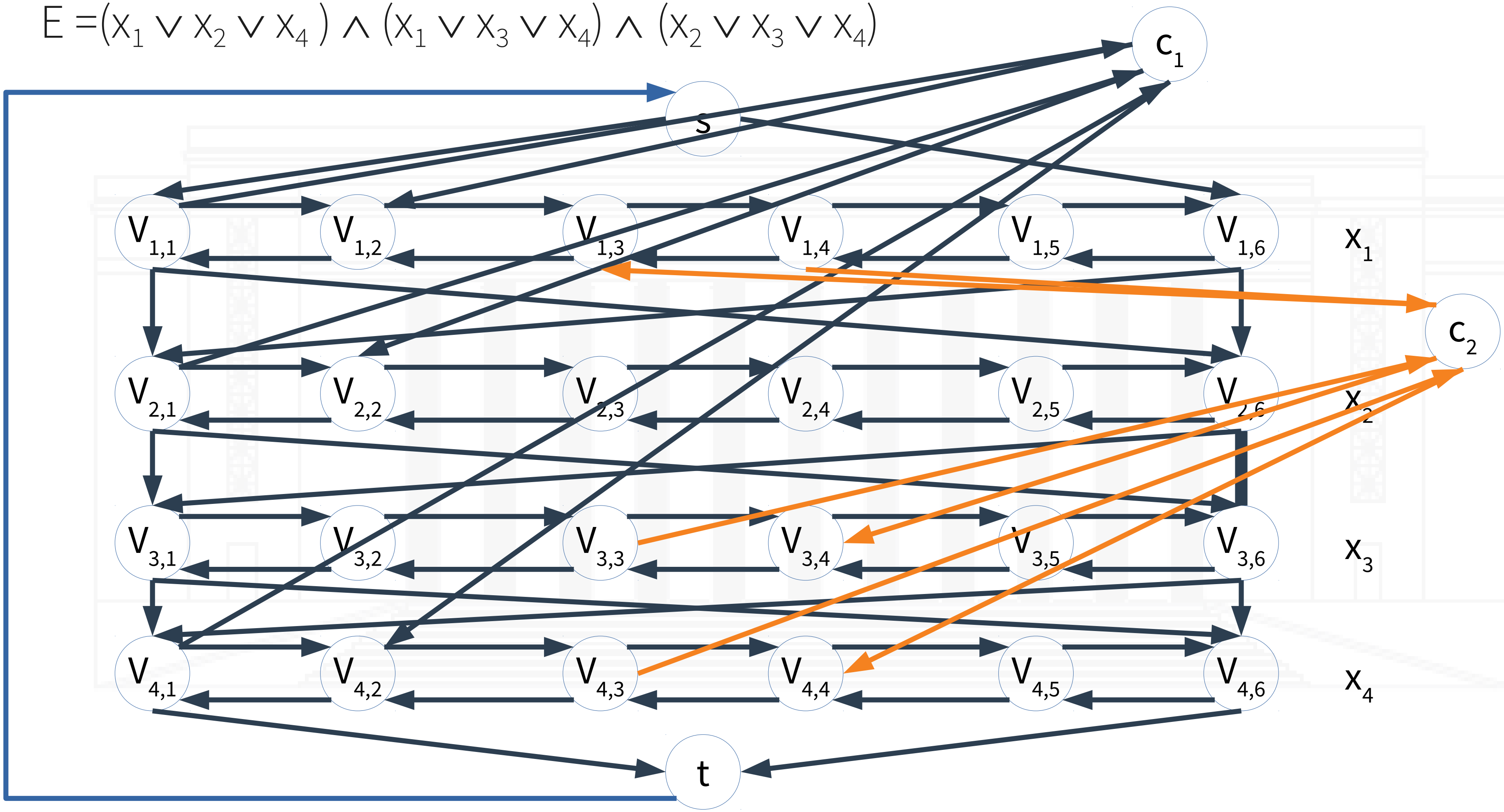
Ejemplo (cont.)

$$E = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$$



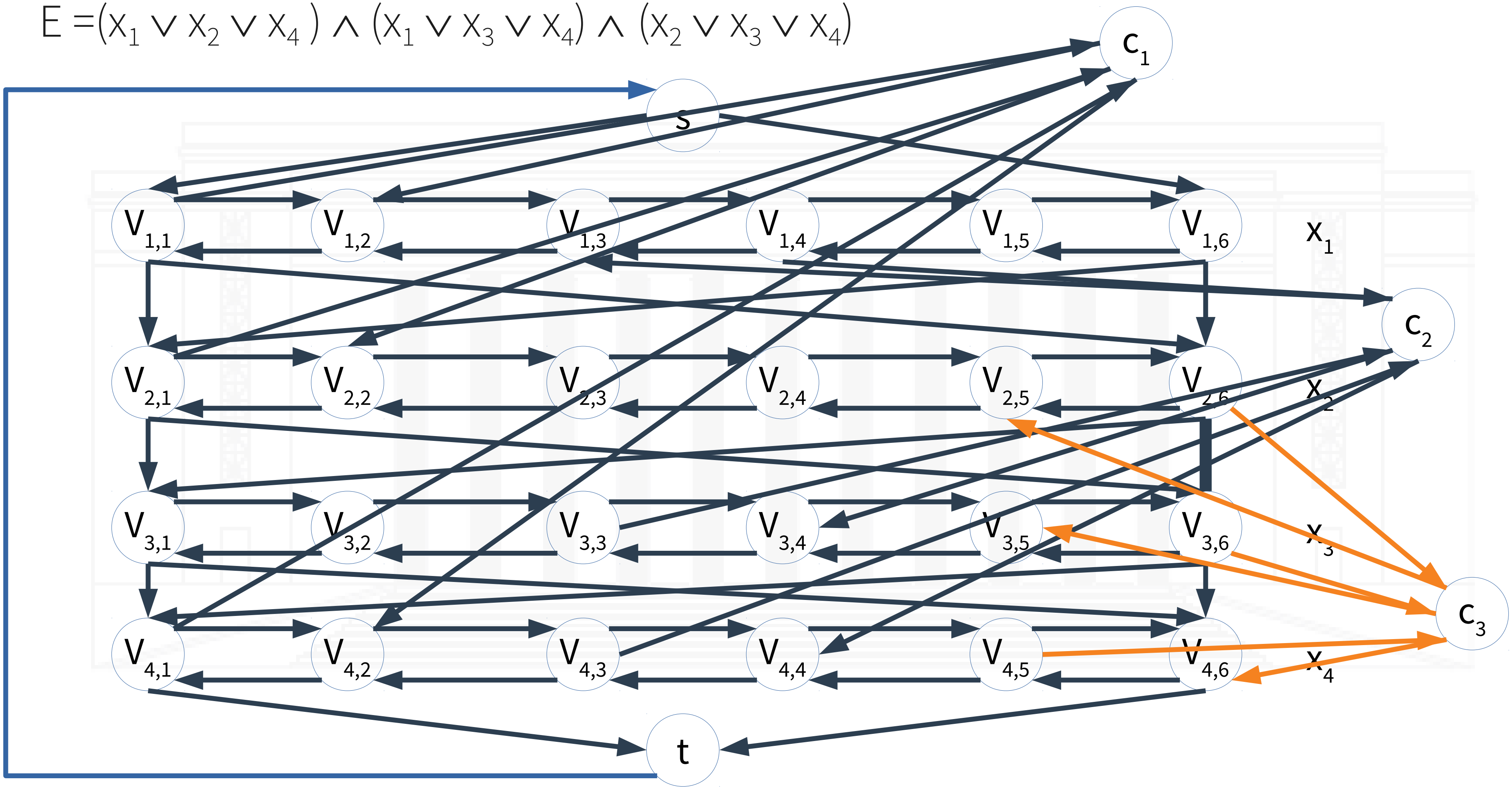
Ejemplo (cont.)

$$E = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$$



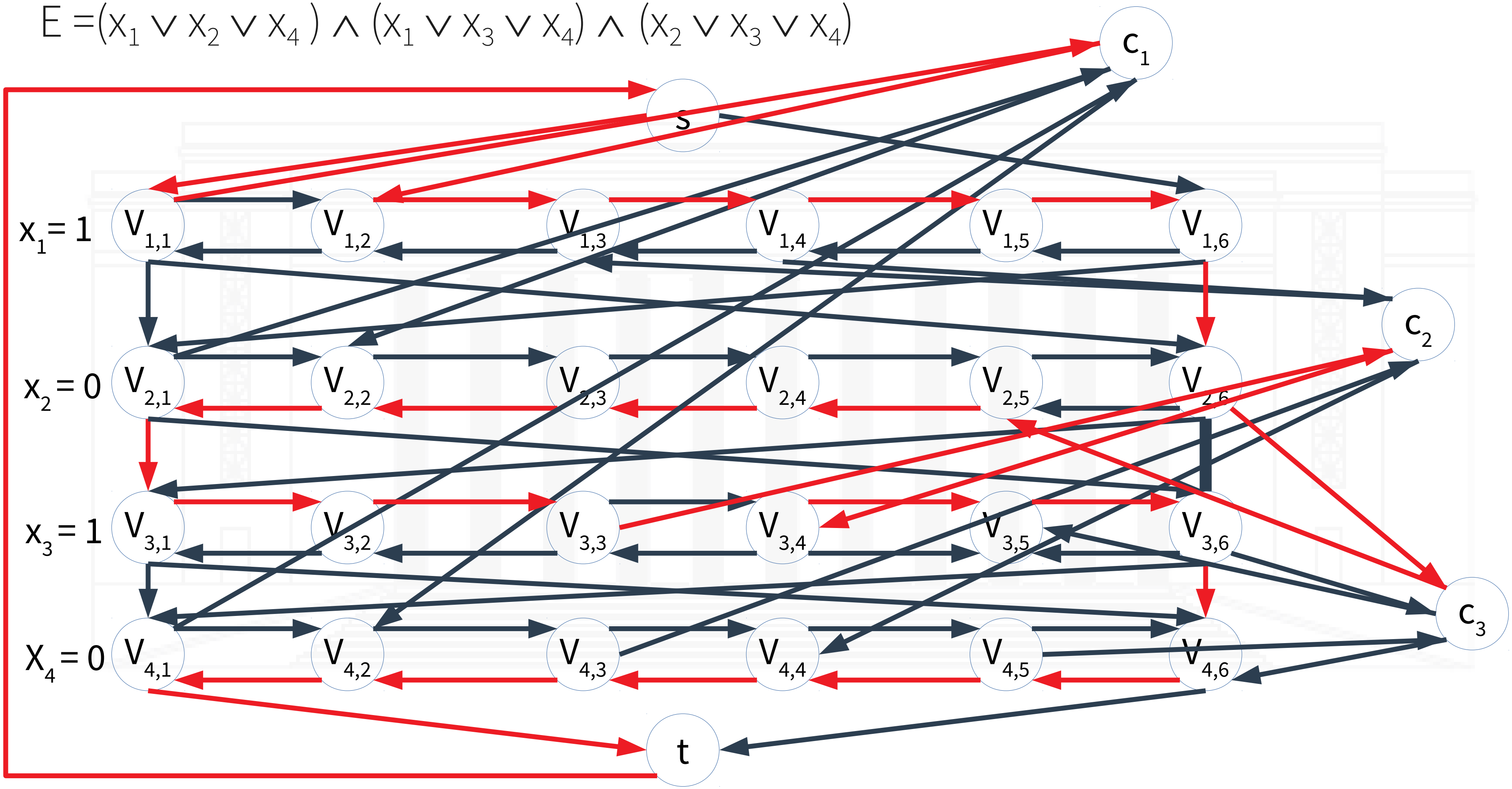
Ejemplo (cont.)

$E = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$



Ejemplo (cont.)

$E = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)$



HAM-CYCLE es NP-C

Como

HAM-CYCLE $\in$ NP

Y 3SAT $\leq_p$ HAM-CYCLE NP

Entonces

HAM-CYCLE $\in$ NP-C

De igual manera (quitando en la transformación el eje t-s)

Puedo demostrar que HAM-PATH es NP-C

HAM-CYCLE para grafos no dirigidos

Utilizando grafos dirigidos

Se conoce al problema como DIRECTED HAMILTONIAN CYCLE

Utilizando grafos no dirigidos

Se conoce al problema como UNDIRECTED HAMILTONIAN CYCLE

Karp demostró en 1972

Que ambos problemas son NP-C

(utilizando otro camino)

.UBA fiuba

FACULTAD DE INGENIERÍA

Presentación realizada en Junio de 2020