NP-C: 3 Dimensional Matching

Teoría de Algoritmos I (75.29 / 95.06)

Ing. Víctor Daniel Podberezski
vpodberezski@fi.uba.ar

3 Dimensional Matching

Dados

3 sets disjuntos X.Y,Z de tamaño n cada uno.

Un set C $\subseteq$ X,Y,Z de triplas ordenadas

Determinar

Si existe un subset de n triplas en C tal que cada elemento de X$\cup$Y$\cup$Z sea contenido exactamente en una de esa triplas?

Ejemplo

Ver si es posible asignar un chofer, auto y pasajeros según preferencias

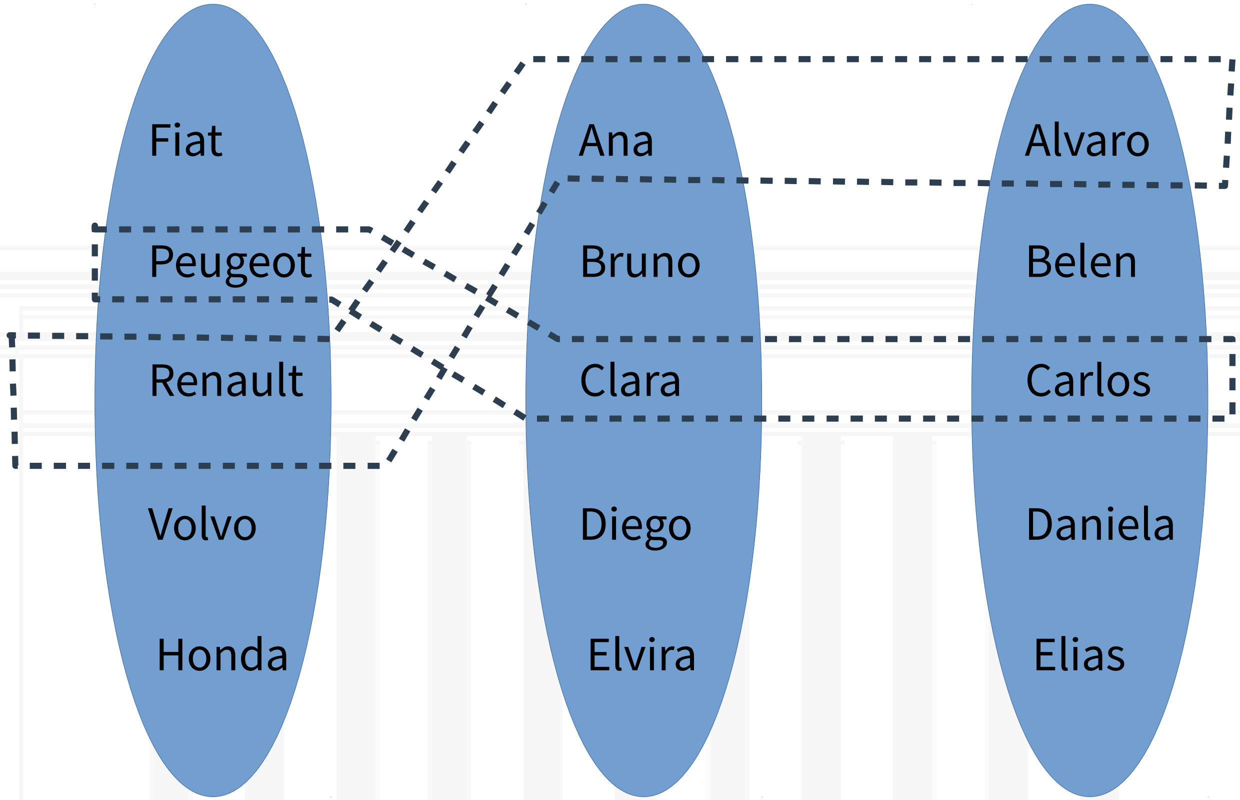
Autos={Fiat, Peugeot, Renault, Volvo, Honda}

Choferes={Ana, Bruno, Clara, Diego, Elvira}

Pasajeros={Alvaro, Belen, Carlos, Daniela, Elias}

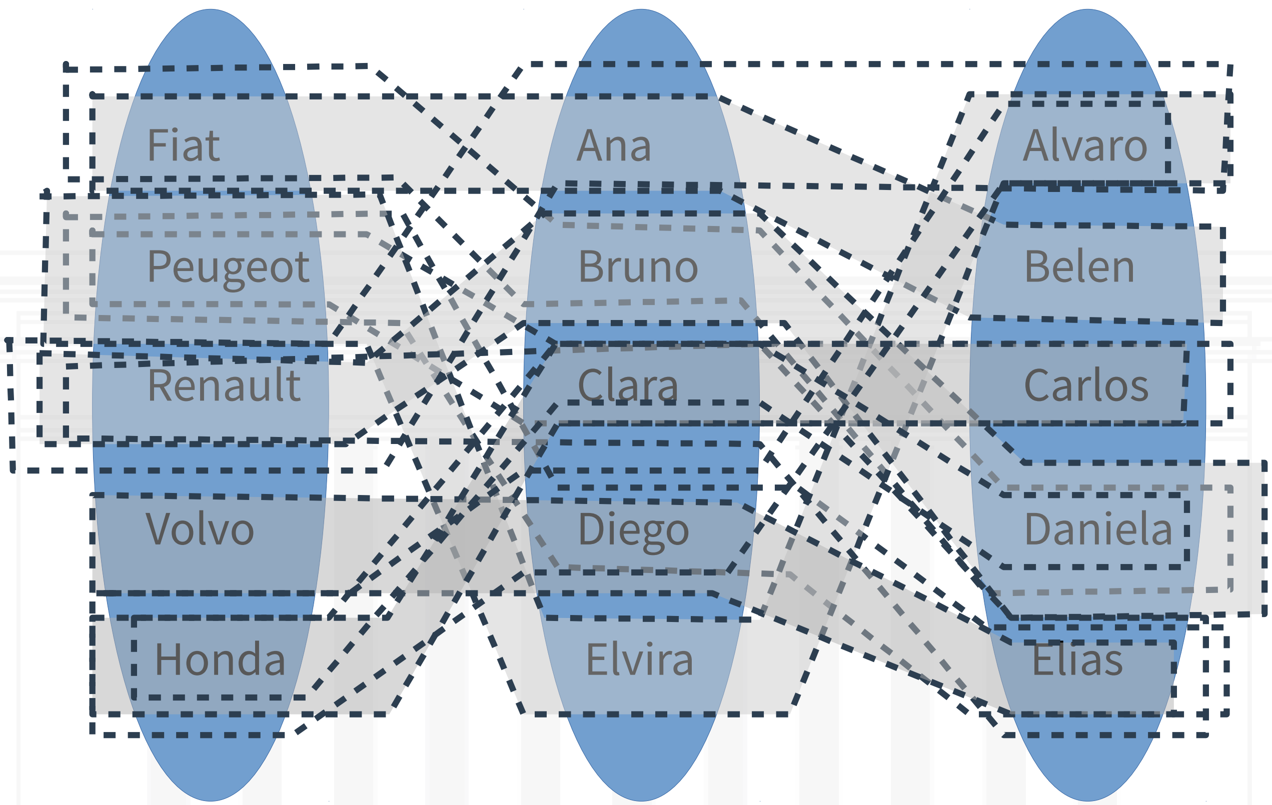
Posibles equipos = { (Fiat,Ana,Belen), (Fiat,Bruno,Daniela), (Peugeot,Clara,Carlos), (Peugeot,Diego,Elias), (Peugeot,Elvira,Alvaro), (Renault,Bruno,Daniela), (Renault,Ana,Alvaro), (Renault,Clara,Elias), (Volvo,Diego,Elias), (Honda,Clara,Carlos), (Honda,Clara,Daniela), (Honda,Diego,Alvaro) }

Ejemplo (cont)



Posibles equipos = { (Fiat,Ana,Belen), (Fiat,Bruno,Daniela), (Peugeot,Clara,Carlos), (Peugeot,Diego,Elias), (Peugeot,Elvira,Alvaro), (Renault,Bruno,Daniela), (Renault,Ana,Alvaro), (Renault,Clara,Elias), (Volvo,Diego,Elias), (Honda,Clara,Carlos), (Honda,Clara,Daniela), (Honda,Diego,Alvaro) }

Ejemplo (cont)

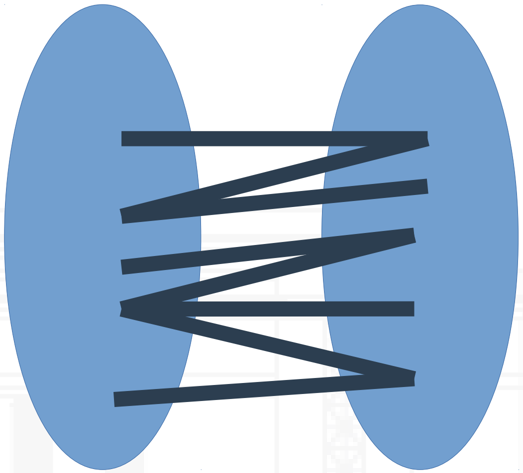


Posibles equipos = { **(Fiat,Ana,Belen)**, (Fiat,Bruno,Daniela), (Peugeot,Clara,Carlos), (Peugeot,Diego,Elias), **(Peugeot,Elvira,Alvaro)**, **(Renault,Bruno,Daniela)**, (Renault,Ana,Alvaro), (Renault,Clara,Elias), **(Volvo,Diego,Elias)**, **(Honda,Clara,Carlos)**, (Honda,Clara,Daniela), (Honda,Diego,Alvaro) }

3DM: variante de 2DM

2 Dimensional Macthing

(También conocido como bipartite Mathing)



Versión de decisión

Existe un subconjunto de tamaño máximo que empareje a todos los elementos de los 2 conjuntos

Existe un algoritmo polinomial que lo resuelve

Analizamos uno cuando trabajamos redes de flujo

¿ 3DM ∈ “NP”?

Dado

X,Y,Z conjuntos de n elementos

C=(x,y,z) conjunto de triplas

T certificado, triplas con un subconjunto de C

Podemos certificar en tiempo polinomial

|T| igual a n

Todo elemento en X,Y y Z, se encuentra 1 y solo 1 vez en algun T_i

$\Rightarrow$ 3DM $\in$ NP

¿ 3DM ∈ “NP-Hard”?

Probaremos que

$3SAT \leq_p 3DM$

Sea

I instancia de 3SAT

con n variables = $\{x_1,...x_n\}$

y k clausulas = $\{c_1,...,c_k\}$

Reduciremos en tiempo polinomial

La instancia I a un problema de 3DM

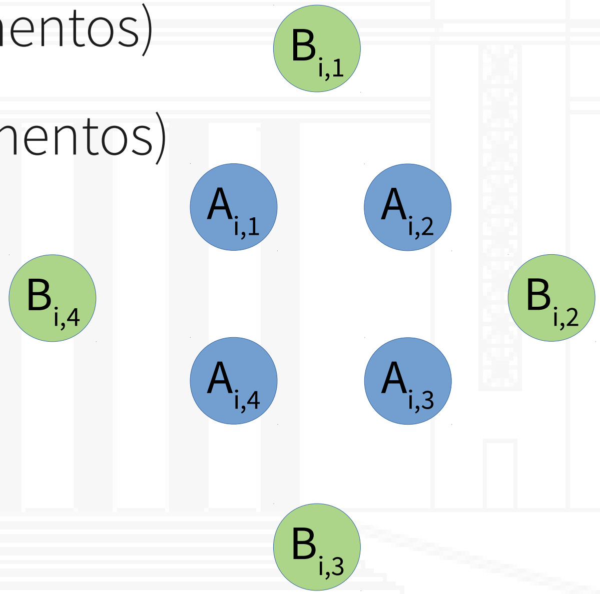
Reducción de 3SAT a 3DM

Por cada variable Xi

Crearemos un "gadget" formado por los siguientes elementos:

$A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,2k}\}$ ← nucleo del gadget (2k elementos)

$B_i = \{b_{i,1}, b_{i,2}, \ldots, b_{i,2k}\}$ ← puntas del gadget (2k elementos)



Variable i: ejemplo para k=2 clausulas

Reducción de 3SAT a 3DM (cont.)

Por cada variable Xi

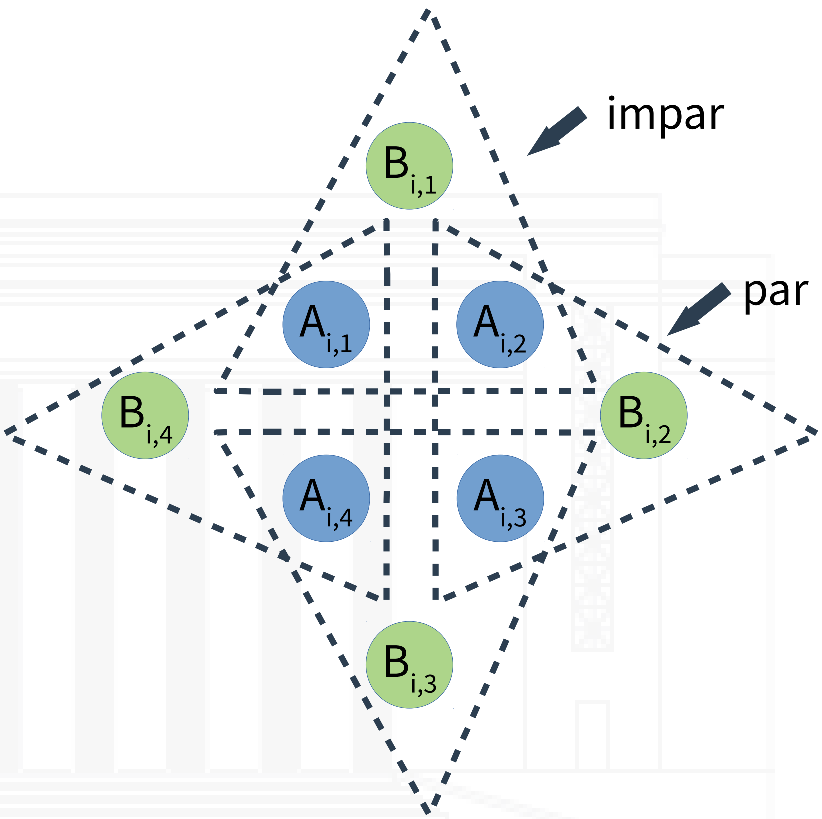
Crearemos las triplas:

$t_{ij} = \{a_{i,j}, a_{i,j+1}, b_{i,j}\}$

Llamaremos

Tripla par, si j es par

Tripla inpar si j es impar



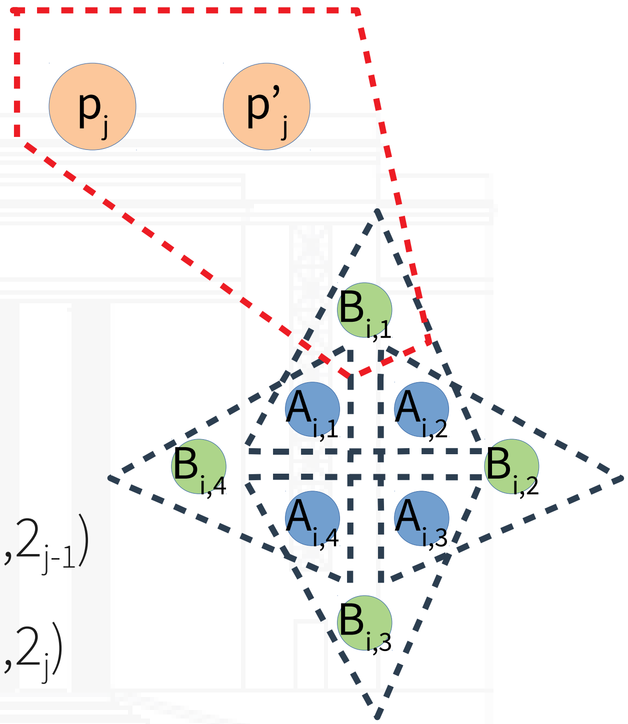
Variable i: ejemplo para k=2 clausulas

Reducción de 3SAT a 3DM (cont.)

Por cada clausula Cj

Crearemos un set de elementos núcleo:

$Cj = \{p_j, p'_j\}$



Clausula 1: con la variable $\overline{xi}$

Por cada variable i en la clausula Cj

Si contiene la variable $\overline{x}_i$ → Crearemos un tripla $(p_j, p'_j, bi,2_{j-1})$

Si contiene la variable x_i → Crearemos un tripla $(p_j, p'_j, bi,2_j)$

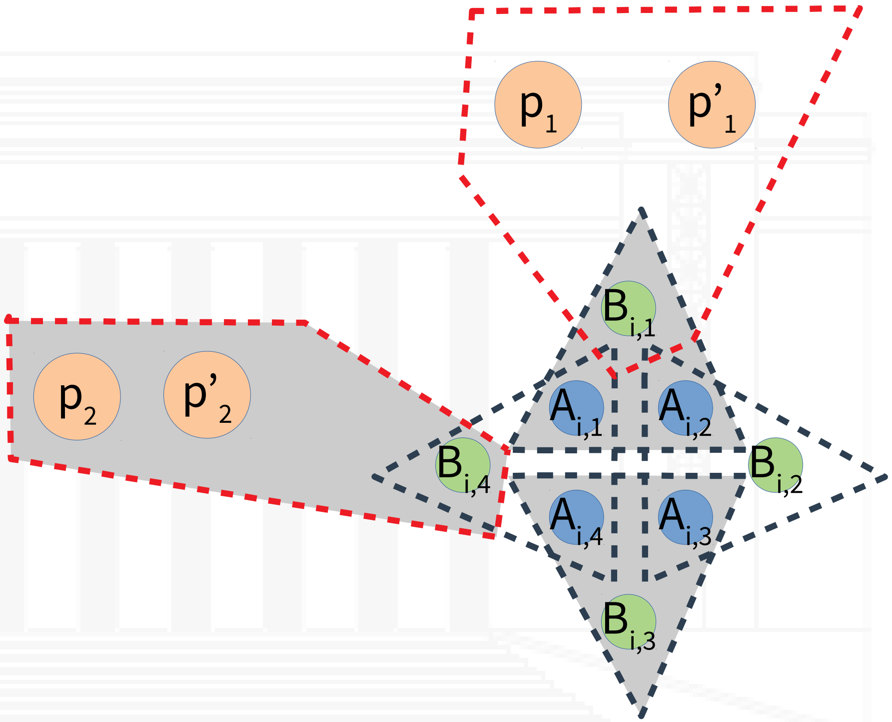
(cada clausula tendrá 3 triplas)

Reducción de 3SAT a 3DM (cont.)

Si una variable i en la solución esta en 1 (x_i=1)

Las puntas del gadget i correspondientes a su valor 0 estarán cubiertas por las triplas de su nucleo.

Las puntas correspondientes a su valor 1, pueden usarse para activar clausulas



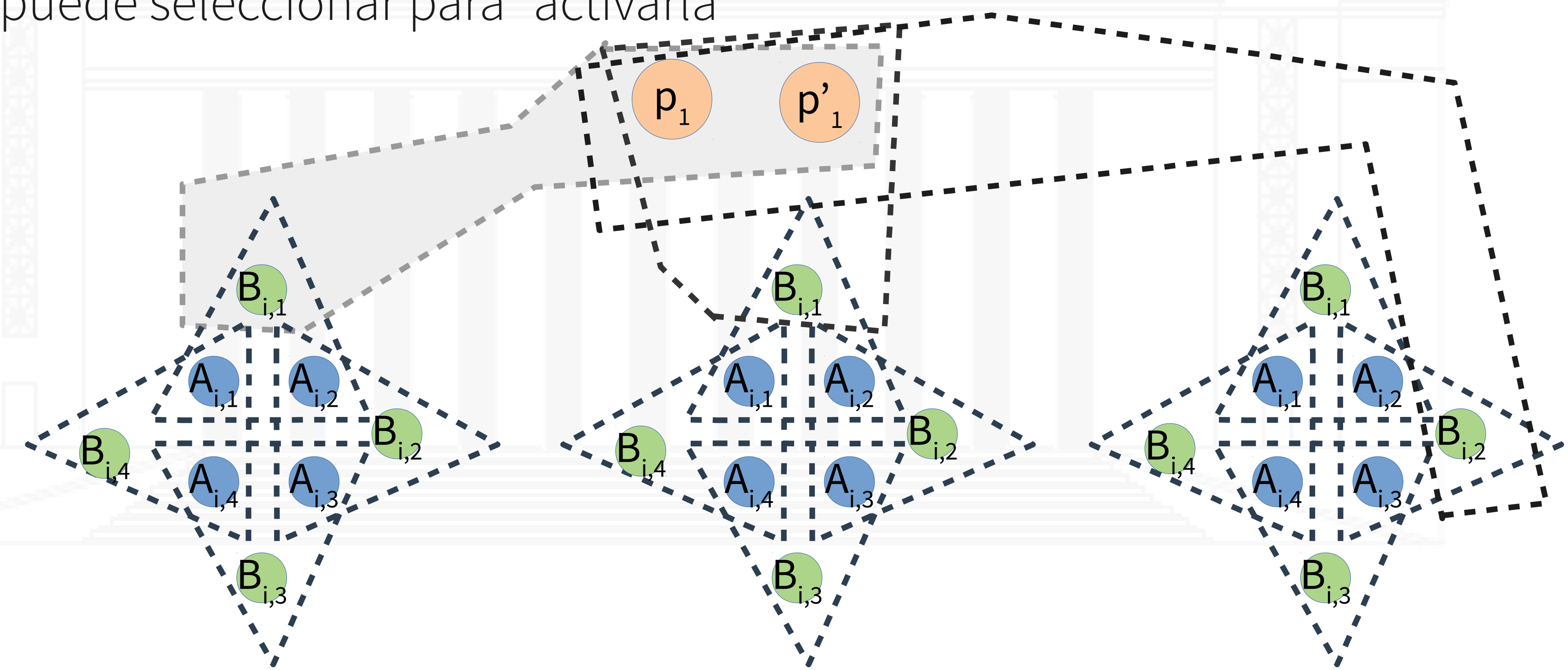
(lo mismo aplica para la variable en 0)

Reducción de 3SAT a 3DM (cont.)

Cada clausula

Tiene 3 triplas asociadas

Solo 1 se puede seleccionar para “activarla”



Reducción de 3SAT a 3DM (cont.)

En total hay 2*n*k puntas, si hay solución

- Las triplas de la clausulas cubren k de ellas
- Las triplas de los gadget cubren nk puntas
- Faltan cubrir (n-1)k puntas

Agregaremos un tipo de gadget

- “Cleanup gadgets”

Reducción de 3SAT a 3DM (cont.)

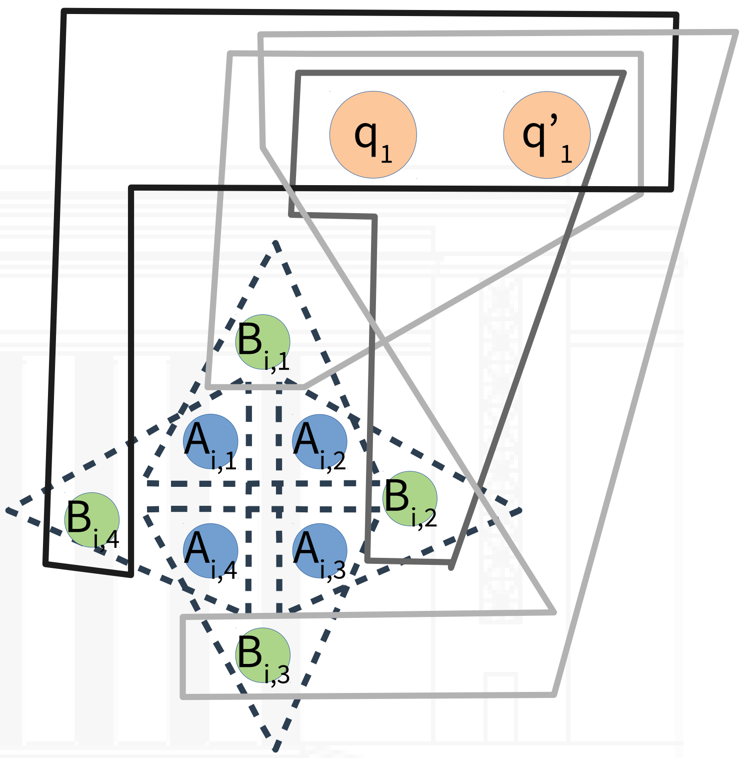
Construiremos (n-1)k

Cleanup gadgets

Cada Cleanup gadget i

Tendrá los elementos Qi = {q_i, q'_1}

Agregaremos las triplas {q_i, q'_1,b} con b son todas las puntas de los gadgets



Ejemplo de cleanup gadget (solo mostrando las triplas en 1 gadget de variable)

Reducción de 3SAT a 3DM (cont.)

Para terminar

Necesitamos construir los conjuntos disjuntos X,Y,Z

Conjunto X

a_{ij} con j par (de los widgets variables) → nk

p_j (de los widget clausula) → k

q_j (de los widget cleanups) → (n-1)k

Conjunto Y

a_{ij} con j impar (de los widgets variables) → nk

p'_j (de los widget clausula) → k

q'_j (de los widget cleanups) → (n-1)k

Conjunto Z

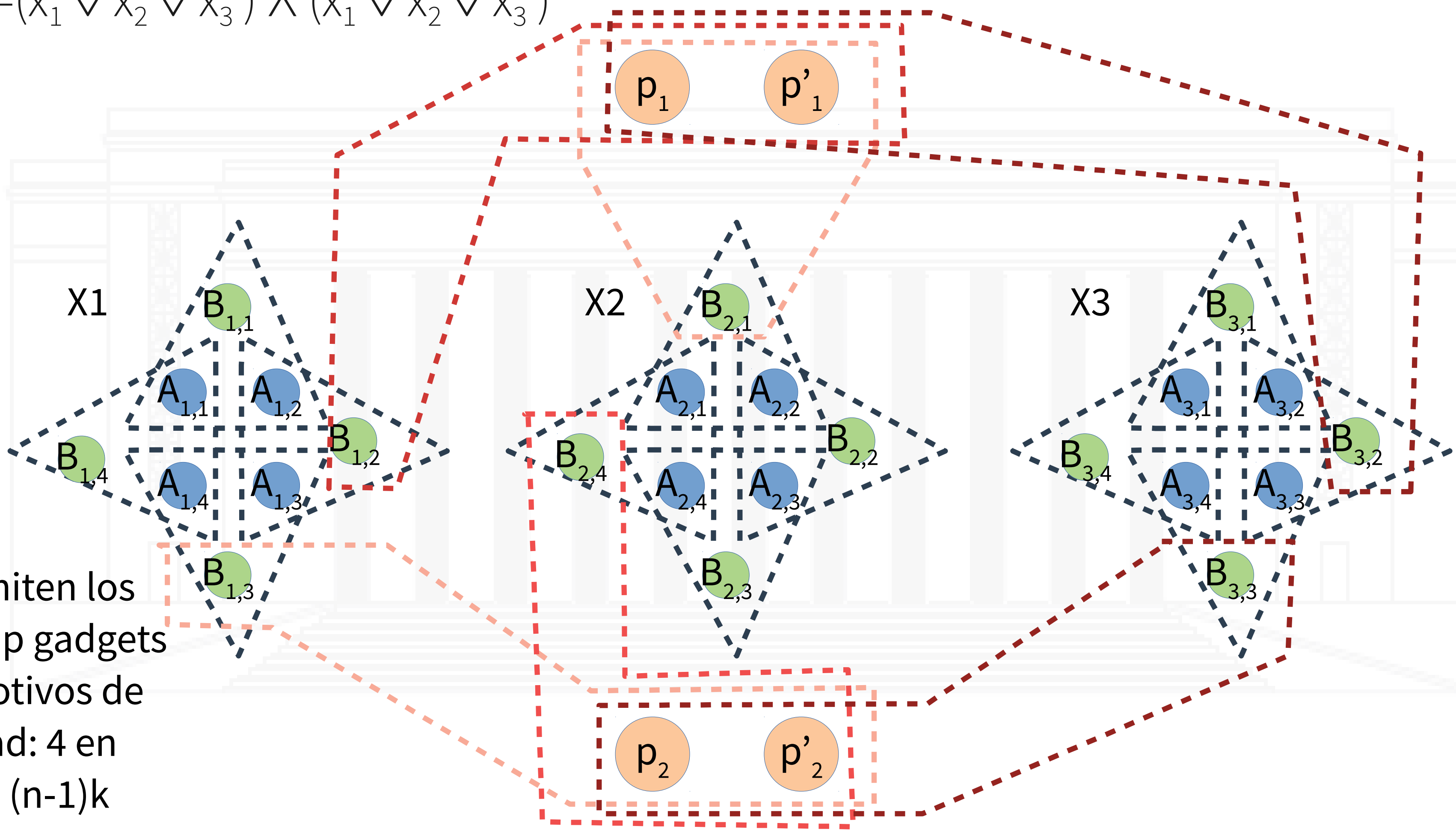
Todos los b_{ij} (de los widgets variables) → 2nk

Triplas "C"

serán todas las triplas definidas

Ejemplo

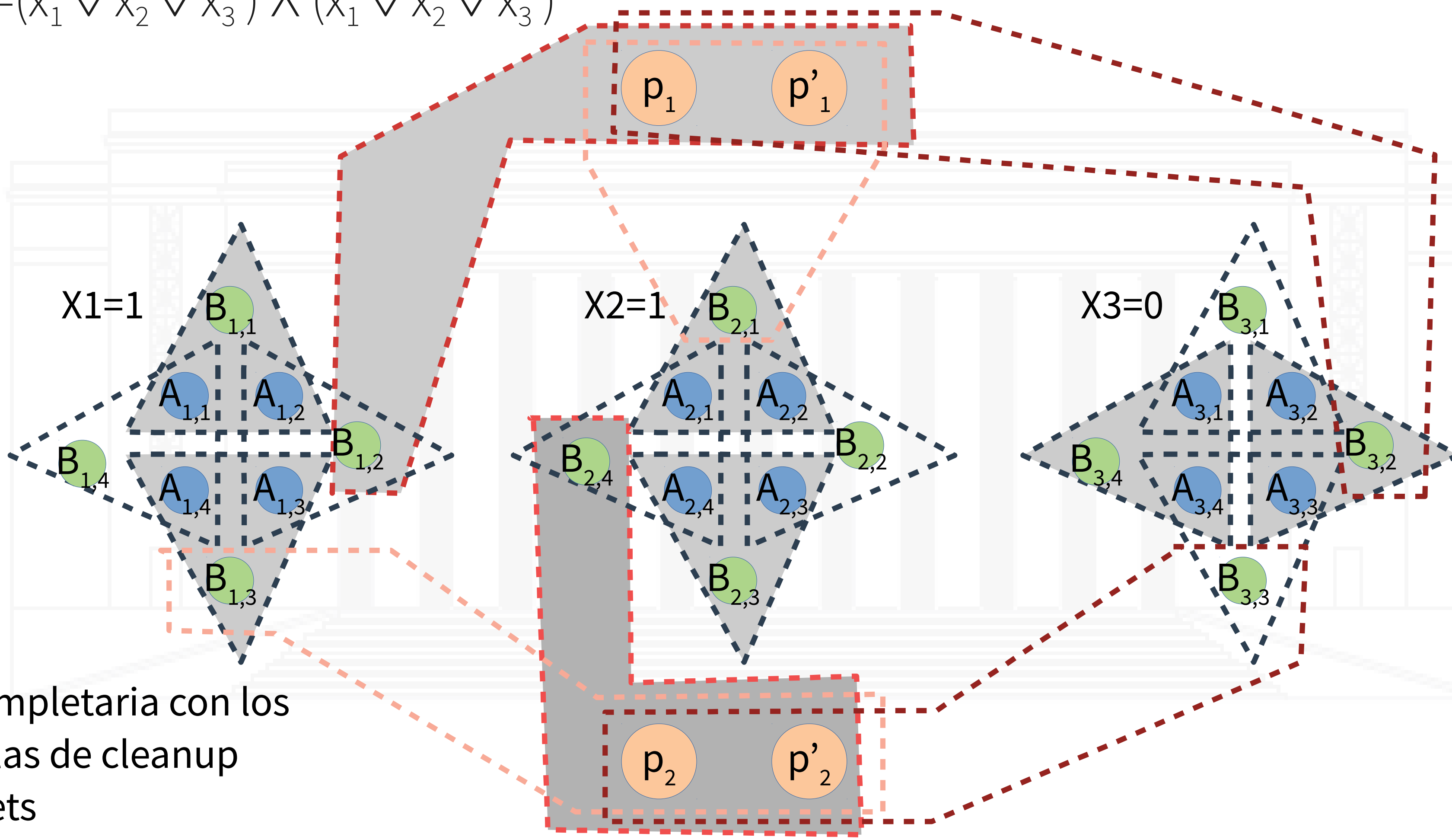
$$E = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)$$



*Se omiten los cleanup gadgets por motivos de claridad: 4 en total → (n-1)k

Ejemplo

$$E = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$$



Se completaria con los 4 triplas de cleanup gadgets

3DM es NP-C

Como

$3DM \in NP$

Y $3SAT \leq_p 3DM$

Entonces

$3DM \in NP\text{-}C$

.UBA fiuba

FACULTAD DE INGENIERÍA

Presentación realizada en Junio de 2020