

NP-C: Clique

Teoría de Algoritmos I (75.29 / 95.06)

Ing. Víctor Daniel Podberezski

✉ vpodberezski@fi.uba.ar

Clique

Sea

$G=(V,E)$ grafo no dirigido

Llamaremos

clique a un subconjunto $V' \subseteq V$ de vértices

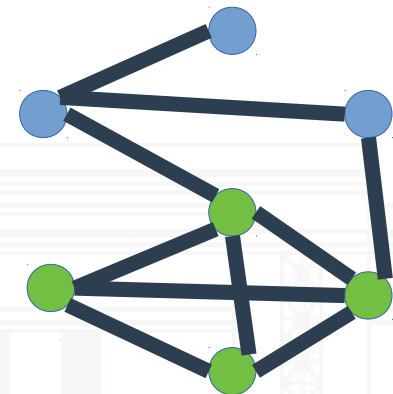
tal que

para todo $v,u \in V'$, el eje $(u,v) \in E$

(Es decir que todos los vértices están conectados entre si)

La cantidad de nodos en V'

Determina el tamaño del clique



Clique de 4 nodos,
(clique de tamaño 4)

Problema de decisión de cliques

Dado

$G = (V, E)$ no dirigido

K valor numérico positivo

Existe

Un clique de tamaño k en G ?

¿Cliques \in “NP”?

Dado

$G=(V,E)$ grafo

K tamaño del clique

T certificado: subconjunto de nodos de V

Puedo verificar (en tiempo polinomial)

La cantidad de nodos en T es igual a K

Cada nodo en T está conectado a los otros nodos de T

$\Rightarrow \text{CLIQUES} \in \text{NP}$

¿Cliques ∈ “P”?

Por fuerza bruta

Puedo probar todas las combinaciones de nodos con k nodos.

$$\binom{k}{|V|} = \frac{|V|!}{k! \cdot (|V| - k)!}$$

Y por cada posibilidad probar si están conectados entre si los k nodos en k^2 operaciones.

Si busco cliques pequeños con |V| grandes

La complejidad total “parece” polinomial

Si busco cliques grandes

la complejidad total es exponencial

¿Cliques ∈ “NP-Hard”?

Probaremos que

CLIQUEES ∈ NP-C

Utilizaremos 3SAT

$3SAT \leq_p CLIQUES$

$3SAT \leq_p CLIQUES$

Dada una

instancia I de 3SAT con k clausulas y n variables

Crearemos

Un nodo por cada variable en una clausula

Por cada par de variables de diferentes cláusulas

Crearemos un eje entre ellas si no corresponden a la misma variable negada

Buscaremos un clique de tamaño k

Ejemplo

$$E = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)$$

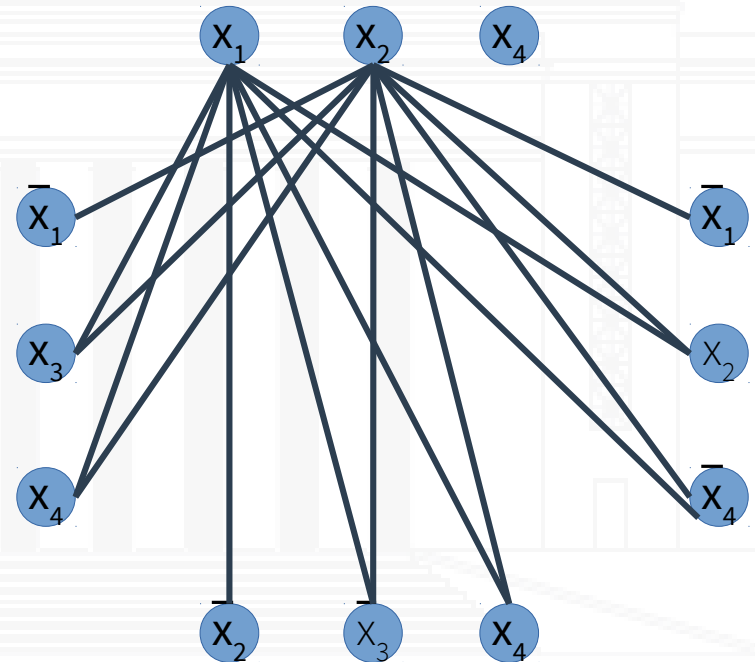
Con 4 variables y 4 clausulas

Armo los nodos

para cada variable de cada clausula

Agrego los ejes

según condición de construcción



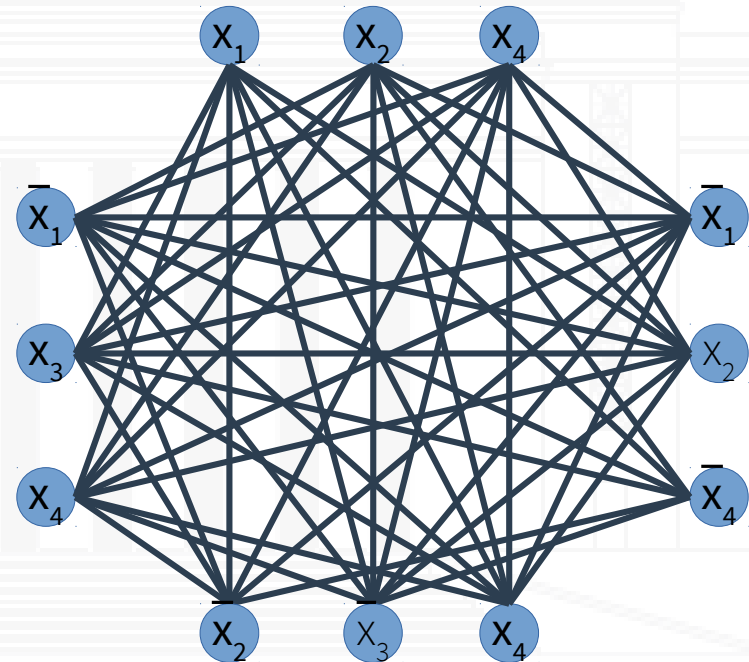
Ejemplo (cont.)

$$E = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)$$

Busco clique

De tamaño $k=4$

(para activar las 4 clausulas)



Ejemplo (cont.)

$$E = (x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_4)$$

Busco clique

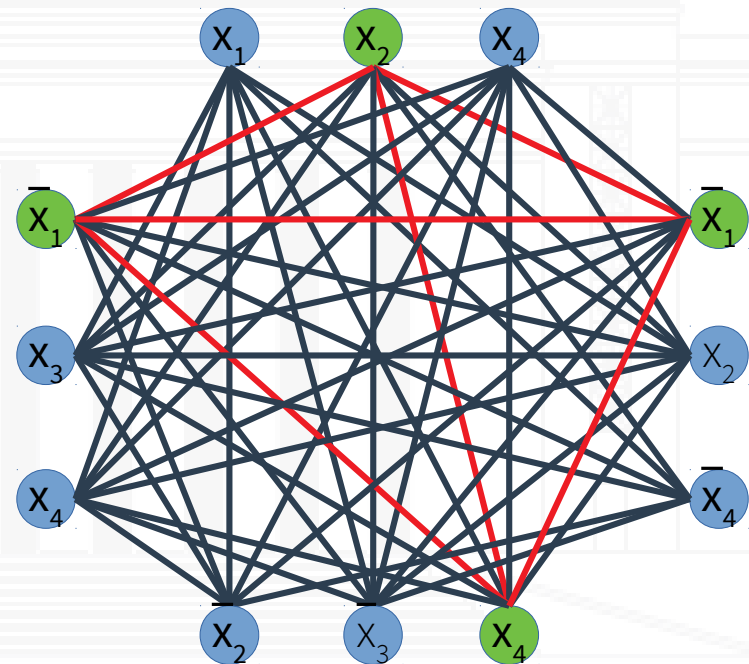
De tamaño $k=4$

(para activar las 4 clausulas)

Los nodos dentro del clique

Indican el valor de las variables

(las variables que no están en el clique se pueden poner en true o en false)



CLIQUE \in “NP-C”

Como

CLIQUE \in NP

Y $3SAT \leq_p \text{CLIQUE}$

Entonces

CLIQUE \in NP-C



Presentación realizada en Junio de 2020