NP-C: Conjunto independiente

Teoría de Algoritmos I (75.29 / 95.06)

Ing. Víctor Daniel Podberezski
vpodberezski@fi.uba.ar

Conjunto independiente

Sea

Un grafo G=(V,E)

Un valor k

Determinar

Si existe un conjunto independiente de nodos de como mucho tamaño K

(Problema conocido como “Independent Set”)

Definiciones

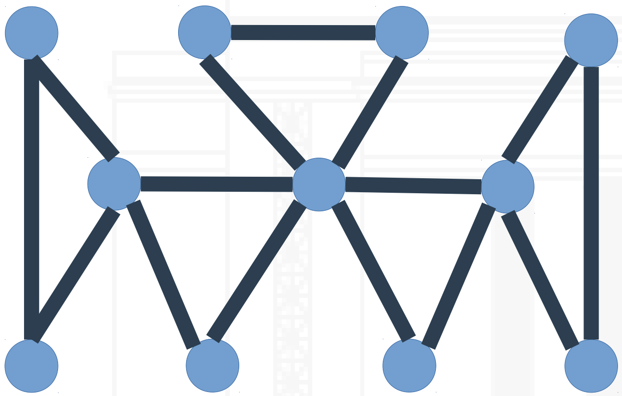
Un conjunto de nodos $C \subseteq V$ es independiente si

No existe $a,b \in C$ tal que existe eje $(a,b) \in E$

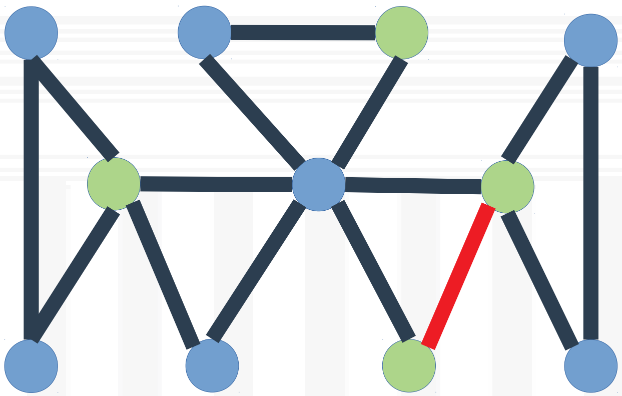
El tamaño del conjunto independiente

Corresponde a la cantidad de nodos dentro del conjunto C

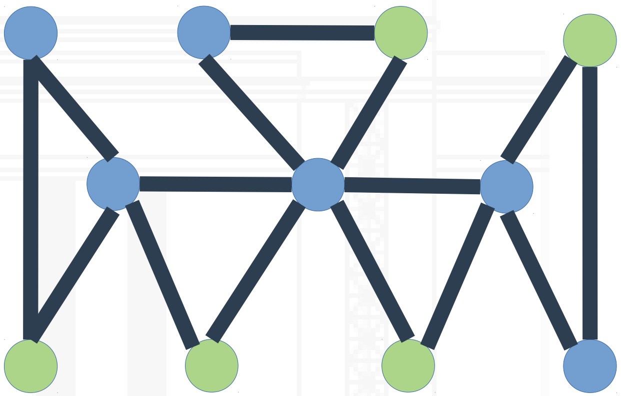
Ejemplo



Grafo G



Set no independiente



Set independiente de tamaño 5

¿Conjunto independiente es "NP"?

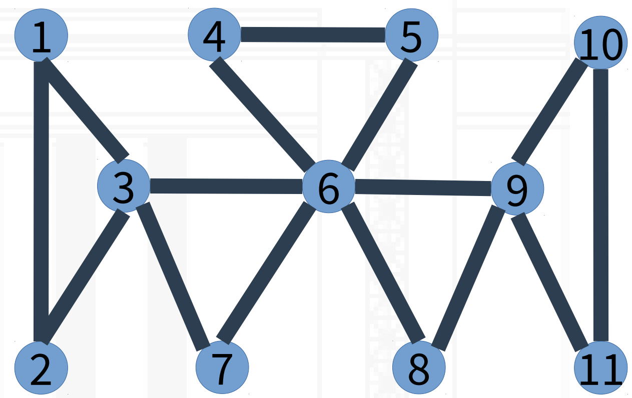
Dado

G=(V,E)

k tamaño del conjunto

T certitifcado = subconjunto de nodos

k = 3



T={3, 4, 9}

Puedo verificar (en tiempo polinomial)

$|T| = k$

$\forall$ a,b $\in$ T, !$\exists$ (a,b) $\in$ E

$\Rightarrow$ INDEPENDENT-SET $\in$ NP

¿Conjunto independiente es “P”?

No se conoce algoritmo

Que resuelva INDEPENDENT-SET en tiempo polinómico

Si probamos que

INDEPENDENT-SET $\in$ NP-C

(Utilizaremos 3SAT)

Entonces

INDEPENDENT-SET $\in$ P $\Leftrightarrow$ P = NP

3SAT

Es una variante de SAT

Karp probó en 1972 SAT $\leq_p$ 3SAT $\Rightarrow$ 3sat $\in$ NP-C

Dado

$X=\{x_1,\ldots x_n\}$ conjunto de n Variables booleanas = {0,1}

k clausulas booleanas $T_i = (t_{i1} \vee t_{i2} \vee t_{i3})$

Con cada $t_{ij} \in X \cup \overline{X} \cup \{1\}$

Determinar

Si existe asignación de variables tal que $T_1 \wedge T_2 \wedge \ldots \wedge T_k = 1$

Ejemplo

Sea la expresión

$$E = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)$$

La asignación

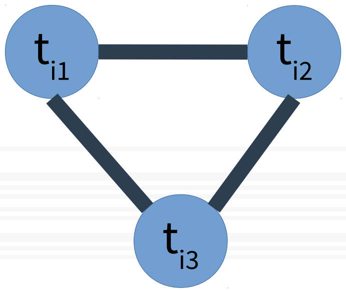
X1 = 0 X2 = 0 X3 = 0 X4 = 0, Genera E=0

X1 = 1 X2 = 0 X3 = 0 X4 = 1, Genera E=1

Reducción de 3SAT a INDEPENDENT-SET

Por cada clausula Ti = $(t_{i1} \vee t_{i2} \vee t_{i3})$

Se crearan 3 vértices conectados entre si



Por cada $t_{ij} = x_a$, $t_{kl} = \overline{x}_a$

Crear un eje entre t_{ij} y t_{kl}

El grafo resultante G

Corresponde a una instancia del problema INDEPENDENT-SET

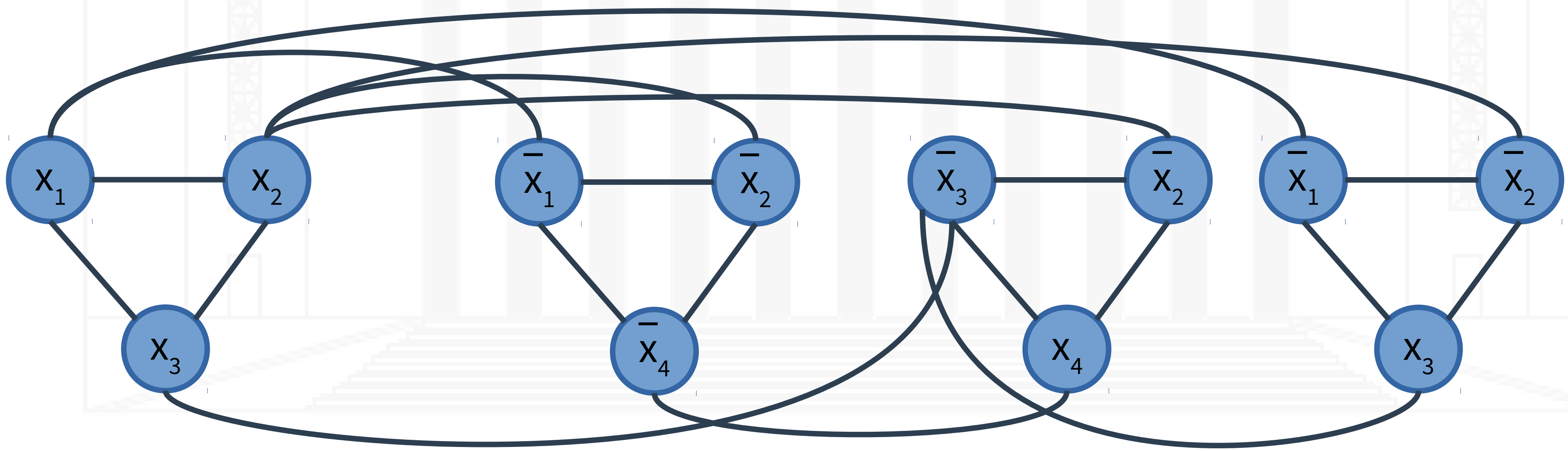
Con k=numeros de clausulas en la expresión

Ejemplo

Sea la expresión

$$E = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_4) \wedge (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)$$

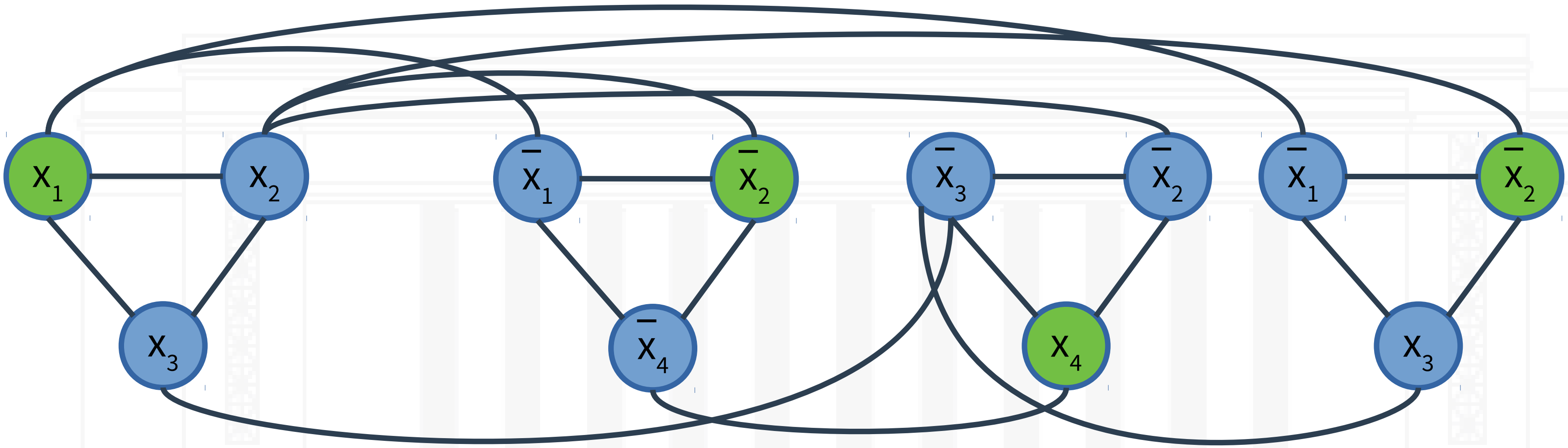
La reducimos polinomialmente a:



$k=4$

Ejemplo (cont.)

Si resuelvo



Entonces resuelvo 3SAT

$X_1 = 1$ $\quad \overline{X}_2 = 1 \rightarrow X_2 = 0$ $\quad X_4=1$ $\quad X_3 = 0$ (en este caso es indistinto 0 o 1)

INDEPENDENT-SET es NP-C

Como

INDEPENDENT-SET $\in$ NP

Y 3SAT $\leq_p$ INDEPENDENT-SET NP

Entonces

INDEPENDENT-SET $\in$ NP-C

Presentación realizada en Junio de 2020