动态随机一般均衡模型

佘子远

2024 年 3 月 19 日

本文根据B站视频整理而得，请点击这里访问原视频。

目录

1 符号说明

(可跳过，回头再看)
t : 时间下标
对于某一个时刻： n_t : 该期的劳动力 x_t : 该期的资本, k_t : 该期租借给公司的资本 y_t : 该期的总产出
c_t : 该期的消费
i_t : 该期的投资 p_t : 产出的价格 w_t : 真实工资，r_t : 资本的真实租金
β : 效用折现系数 $\bar{x_0}$: 初始资本禀赋 δ : 资本折旧系数 w : 帕累托分配下消费者终身效用之和

2 数学准备

(可跳过，需要时再看)

2.1 包络定理

对于：

$$v(q) = \max f(x;q)$$
$$s.t. g_i(x;q) = b_i, i = \{1, 2, ..., m\}$$

其中q为参数。
设$\lambda_i, i = \{1, 2, ..., m\}$为与最大值相伴的拉格朗日算子，$L$为拉格朗日函数，$x*$为最大值，有：
$\frac{\partial v(q)}{q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}\Big|_{x=x*}$
证明其实很简单，链式法则之后套上一阶条件就好了。尽管简单，但是还是很有用，因为它刻画了参数对最大值边际效应。

2.2 压缩映射定理

令(S, d)是完备度量空间，若映射$T : S \to S$满足: $d(T_x, T_y) \leq \beta d(x, y), \forall x, y \in S, \beta \in (0, 1)$，则称其为压缩映射. 压缩映射有下述两个性质：
(1):T有且仅有一个不动点$v* \in S$
(2): $d(T^n v_0, v*) \leq \beta^n d(v_0, v*), \forall v_0 \in S, \forall n \in \mathbb{N}$

2.3 Blackwell定理

（是压缩映射的充分条件）
令$B(x)$为有界函数$f : X \to \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}$组成的空间,且$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$
这满足下列两条条件的映射$T : B(x) \to B(x)$为关于β的压缩映射
(1)单调性:$f, g \in B(x), f \leq g \implies Tf \leq Tg$
(2)折旧性：定义$(f + a)x = f(x) + a, f \in B(x), a \in \mathbb{R}_+$.
对$\exists \beta \in (0, 1), \forall f, a \geq 0, x \in X$，满足：
$[T(f, a)](x) \geq [Tf](x) + \beta a$

3 模型说明

索洛模型的设定如下

3.1 信息

假设为完全信息

3.2 偏好

人群的偏好同质化，且寿命无限（无限期模型，不考虑代际）,故不妨考虑只有一个代表性的个体，其效用函数为：

$$u(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$

其中U为连续可微递增凸函数，而且是有界的，并满足：$\lim_{c \to 0} U'(c) = \infty, \lim_{c \to \infty} U'(c) = 0$
折现系数有：$\beta \in (0, 1)$

3.3 禀赋

初始资本为$\bar{x_0}$ 不妨将劳动力单位化，令每一期仅可供给一单位的劳动力

3.4 技术

假设只有一个代表性的公司，其生产函数为：$y_t = F(k_t, n_t)$，其中k_t为公司拥有的资本
其中F为连续可微函数，而且是严格递增和严格凸的，并满足：$\lim_{k \to 0} F_k(k, 1) = \infty, \lim_{k \to \infty} F_k(k, 1) = 0$.同时是一阶齐次的（满足规模报酬不变）
产出可以用于投资或消费：$y_t = c_t + i_t$
投资自然就是资本的流量：$x_{t+1} = (1 - \delta)x_t + i_t$
假设资本存量非负：$\forall t, x_t \geq 0$
家庭会将部分资本k_t出租给公司，显然有$0 \leq k_t \leq x_t$
资本折旧系数有：$\delta \in (0, 1)$

3.5 价格

p_t : 产出的价格，设$p_0 = 1$
w_t : 真实工资，r_t : 资本的真实租金
自然，名义工资和租金分别为：$p_t w_t, p_t r_t$

4 模型分析

4.1 生产者问题

尽管假设了仅有一个代表性公司，但它不是垄断的，而是价格接受者，无法影响市场价格。对于外生给定的$\{p_t, w_t, r_t\}_{t=0}^{\infty}$,公司行为为利润最大化：

$$\max_{\{k_t,n_t\}_{t=0}^{\infty}} \pi = \sum_{t=0}^{\infty} p_t(y_t - r_k k_t - w_t n_t)$$
$$s.t. \forall t,\ y_t = F(k_t, n_t), k_t, n_t, y_t \geq 0$$

4.2 消费者问题

对家庭同理，家庭追求效用最大化：

$$\max_{\{c_t,k_t,n_t\}_{t=0}^{\infty}} u(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$
$$s.t.\ \sum_{t=0}^{\infty} p_t(c_t + i_t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} p^t(r_t k_t + w_t n_t) + \pi$$
$$\forall t \geq 0, x_{t+1} = (1-\delta)x_t + i_t,\ n_t \in [0,1],\ k_t \in [0, x_t]$$

顺便补充一句，在市场出清的假设下，家庭供给的劳动力和资本即为公司需求的劳动力和资本，这一点已经隐含在上面了。我们希望找到竞争性均衡点，事实上就是要找到一组$\{c_t, i_t, k_t, n_t\}_{t=0}^{\infty}$,满足上面两个优化式。(均衡理论需要高微基础，这块细节我还不太懂)

5 求解均衡

5.1 生产者问题

观察到对于生产者，每一期之间是独立的，无相互影响，不妨逐期考虑：

$$\max_{\{k_t,n_t\}} \pi_t = p_t(F(k_t, n_t) - r_k k_t - w_t n_t)$$

约束条件直接带进去了，现在是一个无约束优化问题，易得一阶条件：

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_t}{\partial k_t} = 0 \\ \frac{\partial \pi_t}{\partial n_t} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} F_k(k_t, n_t) - r_t = 0 \\ F_n(k_t, n_t) - w_t = 0 \end{cases}$$

带入利润表达式：$\pi_t = F(k_t, n_t) - F_k(k_t, n_t)k_t - F_n(k_t, n_t)n_t$

回顾规模报酬不变：$\lambda F(k, n) = F(\lambda k, \lambda n)$,对$\lambda$求导可得：$F(k, n) = F_k(\lambda k, \lambda n)k + F_n(\lambda k, \lambda n)n$

代入$k = k_t, n = n_t, \lambda = 1$,可得$F(k_t, n_t) - F_k(k_t, n_t)k_t - F_n(k_t, n_t)n_t = 0 \implies \pi_t = 0$

当然，完全竞争下企业是没有利润的，这和微观经济学的理论是一致的。

5.2 消费者问题

考虑k_t, n_t,在这个模型中劳动力没有负效用，不可能留着不租借给企业，资本也是同理。故下文中这两者均可直接取上界，直接用$k_t, 1$表示。同时预算约束应当总是取等号，不然家庭总可以通过增

加消费来增加效用。同时不要忘记（5.1）的结论：$\forall t, \pi_t = 0$.此时（4.1）中的优化式可以简化为：

$$\max_{\{c_t,k_t\}_{t=0}^{\infty}} u(\{c_t\}_{t=0}^{\infty}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$
$$s.t.\ \sum_{t=0}^{\infty} p_t(c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t) = \sum_{t=0}^{\infty} p^t(r_t k_t + w_t n_t)$$

有约束优化问题自然是先构建拉格朗日函数：
$L = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t) + \lambda[\sum_{t=0}^{\infty} p_t(r_t k_t + w_t n_t - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t)]$

有一阶条件：$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial c_t} = \beta^t U'(c_t) - \lambda p_t = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c_{t+1}} = \beta^{t+1} U'(c_{t+1}) - \lambda p_{t+1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial c_{k+1}} = \lambda[-p_t + p_{t+1}(r_{t+1} + (1-\delta))] = 0 \end{cases}$

$\therefore\ p_t = p_{t+1}(r_{t+1} + 1 - \delta)$

$U'(c_t) = \beta U'(c_{t+1})(r_{t+1} + 1 - \delta)$,该方程叫欧拉方程，反应了家庭的跨期决策，可以看到由资本折旧系数和效用贴现系数影响。

将上式结合（5.1）的一阶条件，在给定资源配置，即$\{c_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$的前提下，即可求出$\{p_t, r_t, w_t\}_{t=0}^{\infty}$

那么问题来了，怎么求出$\{c_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$呢？

6 求解资源配置

6.1 重新归约为优化问题

根据福利经济学第一定理和第二定理，在该模型设定下，竞争均衡的资源配置是等价于帕累托最优分配的。

即对一组可行分配$\{\hat{c}_t, \hat{k}_t\}_{t=0}^{\infty}$，有$\forall\{c_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}, \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(\hat{c}_t) \geq \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$

由于同质化假设，这其实是一种退化的帕累托分配，在市场中只有一个人的情况下，也就是使得其效用最大的分配方式。

即为：

$$\max_{\{c_t,k_t\}_{t=0}^{\infty}} w(\bar{k_0}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_t)$$
$$s.t.\ F(k_t, n_t) = c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t$$

还有一些包含在模型假设里的显然的约束没有写出。可以看到该优化式与（5.2）中的很相似，区别在于前者的约束条件是资源配置的可行性约束，后者的约束条件是消费者的预算约束。注意到引入了w这个记号，其意为帕累托分配下消费者终身效用之和，是资本禀赋的函数。根据福利经济学第二定理，给定可行域内任何一个资本禀赋$\bar{k_0}$,在竞争市场中看不见的手会使资源配置达到帕累托最优。在我们的例子中，就是效用的最大化。

6.2 引入贝尔曼方程

出于简便，令$f(k_t) = F(k_t, 1) + (1-\delta)k_t$,则可行性约束可写为：$c_t = f(k_t) - k_{t+1}$.优化式可简化为：

$$\max_{\{k_t\}_{t=0}^{\infty}} w(\bar{k_0}) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(f(k_t) - k_{t+1})$$
$$s.t.\ f(k_t) - k_{t+1} \geq 0$$

其中：

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(f(k_t) - k_{t+1}) &= U(f(k_0) - k_1) + \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t U(f(k_t) - k_{t+1}) \\ &= U(f(k_0) - k_1) + \beta \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(f(k_t) - k_{t+1}) \\ &= U(f(k_0) - k_1) + \beta \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(f(k_{t+1}) - k_{t+2})\end{aligned}$$

可得：$w(k_0) = max_{k_1} U(f(k_0) - k_1) + \beta w(k_1)$
不难得知$\forall t$，$w(k_{t-1}) = max_{k_t} U(f(k_{t-1}) - k_t) + \beta w(k_t)$，该方程就是动态规划中的贝尔曼方程
由此我们将一个无穷维的优化问题归约为了一个递归问题。当然敏锐的读者可能注意到，在有限维的情况下等价性是显然的，而在无限维的情况下很多东西的性质都会变得很复杂，这个归约还不知道成不成立。不过幸好Stokey, Lucas with Prescott已经证明了无穷维下的等价性。留给我们的问题还剩下：这个无限个方程组成的方程组怎么解？

7 贝尔曼方程的求解

7.1 有穷期下的shooting算法

回顾：$w(k_t) = max_{0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t)} U(f(k_t) - k_{t+1}) + \beta w(k_{t+1})$
一阶条件：$\frac{\partial U(f(k_t) - k_{t+1}) + \beta w(k_{t+1})}{\partial k_{t+1}} = -U'(f(k_t) - k_{t+1}) + \beta w'(k_{t+1}) = 0$
同时注意到该优化式是不是和（2.1）里面的有点像？k_t可以视为参数，运用包络定理：
$w'(k_t) = U'(f(k_t) - k_{t+1}) f'(k_t) \implies w'(k_{t+1}) = U'(f(k_{t+1}) - k_{t+2}) f'(k_{t+1})$
代入一阶条件有：$\beta U'(f(k_{t+1} - k_{t+2}) f'(k_{t+1}) = U'(f(k_t) - k_{t+1})$
也就是欧拉方程：$\beta U'(c_{t+1}) f'(k_{t+1}) = U'(c_t)$，我们在(5.2)中见过它
既然我们在这一节讨论的是有穷期的情况，不妨假设最终的一期为第T期。
有：$w(k_T) = \max_{0 \geq k_{T+1} \geq f(k_T)} U(F(k_T) - k_{T+1}) + \underbrace{\beta w(k_{T+1})}_{=0}$
一阶条件可得$k_{T+1} = 0$,其实这也是符合直觉的，反正之后都不进行生产了，为什么还留有资本呢？不如消费掉换取效用。
但是现在问题来了，先前推出的欧拉方程是一个二阶差分方程，我们仅仅知道$k_{T+1} = 0$也无法进行求解。因此引入名为“shooting”的数值算法来进行求解。先初始化一个$\hat{k_T}$的值，从而根据欧拉方程求解出$\hat{k_0}$,当然不可能第一次“shoot”就能命中目标，$\hat{k_0}$和k_0恐怕还是差的很远，所以我们要调整角度再进行一次“shoot”。那怎么调整角度呢？直觉地就能想到k_T和k_0是正相关的，初期的禀赋越多，末期剩下的也就越多。这点在此不做严格的证明，姑且拿来用就好了。
如果$\hat{k_0}$比k_0大（小），那么我们判断上一次估计的$\hat{k_T}$就偏大（小）了，应该稍微调小一点，再shoot一次。如此重复多次以后，我们就能估计到一个恰当的$\hat{k_T}$能（在一定的给定误差范围内）命中目标（即$\hat{k_0}$和k_0相当接近）。从而完成求解

7.2 无限期下的横截性条件

回顾欧拉方程：$\beta U'(c_{t+1})f'(k_{t+1}) = U'(c_t)$
可写为：$\beta^{t+1}U'(c_{t+1})f'(k_{t+1}) = \beta^t U'(c_t) \implies \beta^{t+1}U'(f(k_{t+1}) - k_{t+2})f'(k_{t+1}) = \beta^t U'(f(k_t) - k_{k+1})$
为什么要把c_t消去？因为写成这种形式便可以清晰地看出等号左边的经济意义：效用关于k_{t+1}的边际。换句话说，就是第$t+1$期增加无穷小的投资所获得的效用增加，由于之前已经知道消费者会将所有的消费剩余用于投资，这也就是第t期减少无穷小的消费所获得的效用增加。
在有限期的情况下，我们通过$k_{T+1} = 0$来获得一个“停止条件”，在无限期的情况下我们提出横截性条件来充当类似的职能：

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t U'(f(k_t) - k_{t+1})f'(k_t)k_t = 0$$

直观上可以认为，在很久以后，放弃一单位消费获取的效用趋于0.
满足横截性条件求解无穷期贝尔曼方程的充分条件。

7.3 值函数迭代法

回顾：$w(k_t) = \max_{0\le k_{t+1}\le f(k_t)} U(f(k_t) - k_{t+1}) + \beta w(k_{t+1})$
我们希望使用不动点迭代法解决这个问题。
给出映射：$T_w(k) = \max_{0\le k'\le f(k)}\{U(f(k) - k') + \beta w(k')\}$,接下来将证明它满足单调性和折旧性，是压缩映射，有且仅有一个不动点。(可参考(2.2),(2.3))
单调性：设$u \le w, k^* = argmax_{0\le k'\le f(k)}\{U(f(k) - k') + \beta u(k')\}$,有:

$$\begin{aligned}
T_u(k) &= \max_{0\le k'\le f(k}\{U(f(k) - k') + \beta u(k')\} \\
&= U(f(k) - k^*) + \beta u(k^*) \\
&\le U(f(k) - k^*) + \beta w(k^*) \\
&\le \max_{0\le k'\le f(k)}\{U(f(k) - k') + \beta w(k')\} \\
&= T_w(k)
\end{aligned}$$

折旧性：

$$\begin{aligned}
T(w+a)(k) &= \max_{0\le k'\le f(k)}\{U(f(k) - k') + \beta(w(k') + a)\} \\
&= \max_{0\le k'\le f(k)}\{U(f(k) - k') + \beta w(k')\} + \beta a = T_w(k) + \beta a
\end{aligned}$$

由此我们就可以求解贝尔曼方程了，只用先初始化一个函数($v_0 = 0$就行)。之后只要不断施加上文提到的压缩映射，即可逼近真实解。