BGG金融加速器

SZY

2025 年 12 月 23 日

目录

1 模型结构图 2

2 家庭 2

3 企业与银行 3

3.1 债务合约 3

3.2 银行 3

3.3 企业利润最大化问题 4

4 企业的生产经营 6

4.1 企业家动态 6

4.2 企业的生产经营 7

5 最终品厂商 7

6 零售商 8

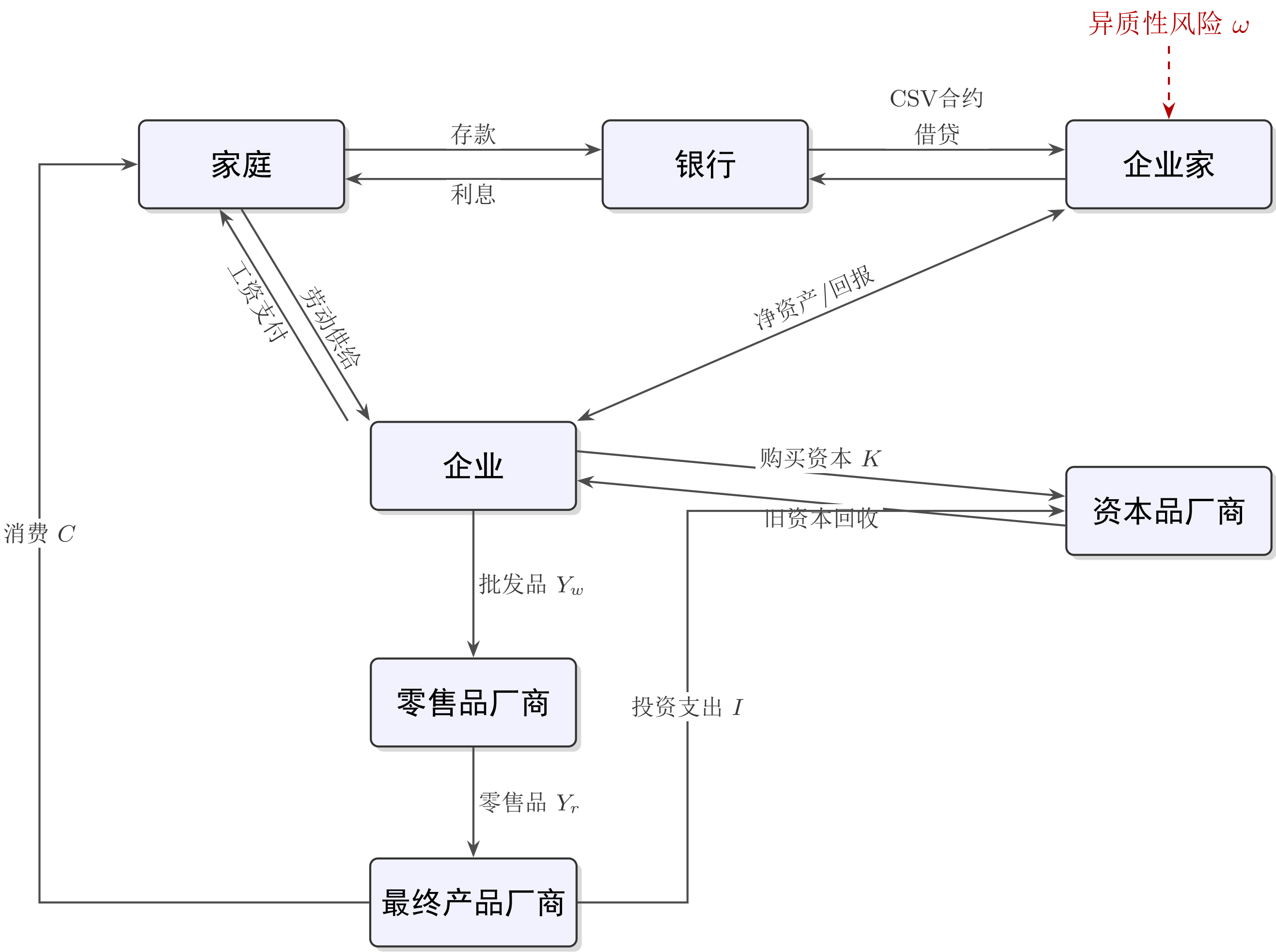
7 资本品生产商 8

7.1 资本积累方程 8

7.2 资本品企业 8

8 稳态求解 8

1 模型结构图



2 家庭

$$\max_{\{C_t,M_t,B_t,H_t\}} \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{\ln C_t + \zeta \ln(M_t) + \xi \ln(1-H_t)\}$$

S.t.:

$$C_t + M_t + B_t = w_t H_t + \frac{M_{t-1}}{\pi_t} + R_{t-1}B_{t-1} + J_t - T_t$$

其中企业利润J_t和税收T_t不进入家庭的决策。

$$\mathcal{L} = \mathbb{E}_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{\ln C_t + \zeta \ln(M_t) + \xi \ln(1-H_t) + \lambda_t(w_t H_t + \frac{M_{t-1}}{\pi_t} + R_{t-1}B_{t-1} + J_t - T_t - C_t - M_t - B_t)\}$$

FOC:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = 0 \implies \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial M_t}=0 \implies \zeta\frac{1}{M_t}-\lambda_t+\beta\lambda_{t+1}\frac{1}{\pi_{t+1}}=0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t}=0 \implies -\lambda_t+\beta\lambda_{t+1}R_t=0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_t}=0 \implies -\xi\frac{1}{1-H_t}+\lambda_t w_t=0$$

值得注意的是通胀和利率的下标。其实也很好理解，利率一般指的是未来的收益，通胀是过去的物价水平变化。

3 企业与银行

企业j从资本品厂商购买资本K_t^j,从银行贷款B_t^j用于生产。它当然不能决定资本价格和投资回报率，认为它们(Q_t和R_t^k)是外生给定的。
资产负债表为资产等于净资产加上债务，在t期末：$Q_tK_{t+1}^j=N_{t+1}^j+B_t^j$
可能大家注意到之前的公式有一个上标j,这说明企业是异质的。企业的异质性体现在它们面临独立同分布的风险ω_t^j，设CDF为$F(\omega^j), E(\omega^j)=1$
收入就是:$\omega_t^j R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j$

3.1 债务合约

银行以利率R_t^L为企业提供贷款，那显然有一个问题就是企业如果运气比较差，就会还不上钱，这个临界值就是：

$$\bar{\omega}_t^j R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j = R_t^L B_t^j$$

如果$\omega_t^j \geq \bar{\omega}_t^j$，那么皆大欢喜。不然企业就会破产，银行得到$(1-\mu)\omega_t^j R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j$,其中的$\mu$是清算成本。

3.2 银行

银行完全竞争，利润为0，所以成本等于收益。利润：

$$\int_0^{\bar{\omega}_t^j}(1-\mu)\omega^j R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j \, dF(\omega^j)+\int_{\bar{\omega}_t^j}^{\infty} R_t^L B_t^j \, dF(\omega^j)$$

注意$\bar{\omega}_t^j$是一个每一个时刻都不一样的数，是有时间下标的，但是ω^j是一个随机变量，长得很像但意义不一样。
把被积变量以外的变量提出：

$$(1-\mu)R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j \int_0^{\bar{\omega}_t^j} \omega^j \, dF(\omega^j)+R_t^L B_t^j \int_{\bar{\omega}_t^j}^{\infty} \, dF(\omega^j)$$

等于：

$$(1-\mu)R^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}\int_0^{\bar{\omega}^j_t}\omega^j\,dF(\omega^j)+\bar{\omega}^j_tR^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}(1-F(\omega^j))$$

成本就是付给家庭的利息：$R_tB^j_t$ 所以得到：

$$R_tB^j_t=(1-\mu)R^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}\int_0^{\bar{\omega}^j_t}\omega^j\,dF(\omega^j)+\bar{\omega}^j_tR^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}(1-F(\omega^j))$$

3.3 企业利润最大化问题

由于有破产保护，即使破产了企业也不会倒亏钱，最多利润就是0.所以企业的利润就是成功的收益，减去还给银行的成本。

$$V^j_t=\max_{\bar{\omega}^j_t,K^j_{t+1}}E_t\left\{\int_{\bar{\omega}^j_t}^{\infty}\omega^jR^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}\,dF(\omega^j)-(1-F(\bar{\omega}^j_t))\bar{\omega}^j_tR^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}\right\}$$

S.t.

$$R_tB^j_t=(1-\mu)R^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}\int_0^{\bar{\omega}^j_t}\omega^j\,dF(\omega^j)+\bar{\omega}^j_tR^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}(1-F(\omega^j))$$

银行除了决定投资以外，还可以决定下一期的$\bar{\omega}$，可以理解为和银行商定利率。企业不知道下一期的产出，但是可以决定未来的“破产点”是多少。举一个具体的例子:可能企业制定了一个无比激进的融资计划，以至于下一期有90%的几率会破产. 当然这样的计划必定意味着有10%的几率有其丰富的回报。
可以看到上面的式子很繁琐，不妨做变量替换：

$$F_t\equiv F(\bar{\omega}^j_t)$$

$$G_t=\int_0^{\bar{\omega}^j_t}\omega^j\,dF(\omega^j)$$

$$\Gamma_t\equiv\int_0^{\bar{\omega}^j_t}\omega^j\,dF(\omega^j)+\bar{\omega}^j_t(1-F(\bar{\omega}^j_t))=G_t+\bar{\omega}^j_t(1-F(\bar{\omega}^j_t))$$

目标函数可以化简为：

$$\begin{aligned}
&\int_{\bar{\omega}^j_t}^{\infty}\omega^j\,dF(\omega^j)R^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}-(1-F(\bar{\omega}^j_t))\bar{\omega}^j_tR^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}\\
&=\left\{\int_{\bar{\omega}^j_t}^{\infty}\omega^j\,dF(\omega^j)-(1-F(\bar{\omega}^j_t))\bar{\omega}^j_t\right\}R^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}\\
&=\left\{\int_0^{\infty}\omega^j\,dF(\omega^j)-\int_0^{\bar{\omega}^j_t}\omega^j\,dF(\omega^j)-(1-F(\bar{\omega}^j_t))\bar{\omega}^j_t\right\}\times R^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}\\
&=\left\{E(\omega^j)-\Gamma_t\right\}R^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}\\
&=(1-\Gamma_t)R^k_{t+1}Q_tK^j_{t+1}
\end{aligned}$$

同样地，对约束条件也进行化简：

银行零利润条件左侧：

$$
\begin{aligned}
&(1-F(\bar{\omega}_t^j))\bar{\omega}_t^j R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j + (1-\mu)\int_0^{\bar{\omega}_t^j} \omega^j R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j \, dF(\omega^j) \\
&= \left\{(1-F(\bar{\omega}_t^j))\bar{\omega}_t^j + (1-\mu)\int_0^{\bar{\omega}_t^j} \omega^j \, dF(\omega^j)\right\} R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j \\
&= \left\{(1-F(\bar{\omega}_t^j))\bar{\omega}_t^j + \int_0^{\bar{\omega}_t^j} \omega^j \, dF(\omega^j) - \mu\int_0^{\bar{\omega}_t^j} \omega^j \, dF(\omega^j)\right\} R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j \\
&= (\Gamma_t - \mu G_t) R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j
\end{aligned}
$$

零利润条件右侧：

$$R_t B_t^j = R_t(Q_t K_{t+1}^j - N_{t+1}^j)$$

此时，优化问题转为：

$$V_t^j = \max_{\bar{\omega}_t^j, K_{t+1}^j} (1-\Gamma_t) R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j$$

$$\text{s.t.} \quad (\Gamma_t - \mu G_t) R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j = R_t(Q_t K_{t+1}^j - N_{t+1}^j)$$

$$\mathcal{L} = (1-\Gamma_t) R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j + r_t \left\{(\Gamma_t - \mu G_t) R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j - R_t(Q_t K_{t+1}^j - N_{t+1}^j)\right\}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\omega}_t^j} = 0 \implies -\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\omega}_t^j}(R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j) + r_t(\frac{\partial \Gamma}{\partial \bar{\omega}_t^j} - \mu \frac{\partial G}{\partial \bar{\omega}_t^j}) R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j = 0$$

可以写为：$-\Gamma' + r_t(\Gamma' - \mu G') = 0$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{t+1}^j} = 0 \implies (1-\Gamma_t) R_{t+1}^k Q_t + r_t\{(\Gamma_t - \mu G_t) R_{t+1}^k Q_t - R_t Q_t\}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_t} = 0 \implies (\Gamma_t - \mu G_t) R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j = R_t(Q_t K_{t+1}^j - N_{t+1}^j)$$

设风险利差：$S_{t+1} \equiv \frac{R_{t+1}^k}{R_t}$,杠杆率：$L_{t+1} \equiv \frac{Q_t K_{t+1}^j}{N_{t+1}^j}$ 代入FOC，消去拉格朗日乘子：

$$S_{t+1}[\frac{\Gamma_t' - \mu G_t'}{\Gamma_t'}(1-\Gamma_t) + (\Gamma_t - \mu G_t)] = 1$$

银行零利润条件两边同除以$R_t N_{t+1}^j$:$(\Gamma_t - \mu G_t) R_{t+1}^k Q_t K_{t+1}^j \frac{1}{R_t N_{t+1}^j} = \frac{Q_t K_{t+1}^j}{N_{t+1}^j} - 1$
等于：$(\Gamma_t - \mu G_t) S_{t+1} = \frac{L_{t+1}-1}{L_{t+1}}$
上面两个式子决定了企业，银行部门。资本外部环境和异质性风险无关，所以上式对所有企业成立。根据隐函数定理，上面地两个式子可以写为：

$$S_{t+1} = h(\bar{\omega}_t^j)$$

$$g(\bar{\omega}_t^j)S_{t+1} = 1 - \frac{1}{L_{t+1}}$$

可以写为：$g(h^{-1}(S_{t+1}))S_{t+1} = 1 - \frac{1}{L_{t+1}} \implies S_{t+1} = m(\frac{1}{L_{t+1}})$
可以证明$m'()$小于0，所以杠杆率越高，风险利差越大。
进一步地，

$$\frac{N_{t+1}}{Q_t K_{t+1}} = m^{-1}\left(\frac{R_{t+1}^k}{R_t}\right)$$

那么

$$\left(1 - \frac{N_{t+1}}{Q_t K_{t+1}}\right) Q_t K_{t+1} = \left(1 - m^{-1}\left(\frac{R_{t+1}^k}{R_t}\right)\right) Q_t K_{t+1}$$

$$\underbrace{B_t}_{\substack{\text{企业贷款}\\\text{(居民存款)}}} = \underbrace{\left(1 - m^{-1}\left(\frac{R_{t+1}^k}{R_t}\right)\right)}_{\substack{\text{可贷资金比例}\\\text{(依存于利差)}}} \underbrace{Q_t K_{t+1}}_{\text{企业资产价值}}$$

直觉上不难理解，利差上升，借到的钱肯定多了。

4 企业的生产经营

4.1 企业家动态

6、均衡状态下（即最优合约下）的企业价值

$$\begin{aligned} V_t &= (1 - \Gamma_t) R_{t+1}^k Q_t K_{t+1} \\ &= (1 - \Gamma_t) \frac{R_{t+1}^k}{R_t} R_t Q_t K_{t+1} \\ &= (1 - \Gamma_t) S_{t+1} R_t Q_t K_{t+1} \end{aligned}$$

假设每期企业家消费掉一部分：
$C_t^e = (1 - \gamma^e) V_t$
并且企业家投入自己的工资，使之与残存的企业价值形成新的净资产：
$N_{t+1} = \gamma^e V_t + H_t^e W_t^e$
企业家把所有工资用于再生产看起来有一点奇怪，但是和设定一部分消费一部分投资本质上是一样的。设定企业家的消费是为了防止企业无限增殖，从而不需要向银行借钱。如果企业家永生不死且只存不花（Self-financing Paradox），利用复利效应，他们的净资产 N 最终会增长到覆盖所有资本需求 K。一旦 N⩾K，企业家就不再需要借款，或者借款无风险。
虽然企业家的工资W_t^e在总量中占比很小（通常校准为0.01左右），但它有一个重要的技术性作用：确保新生的企业家有“启动资金”。如果没有这笔工资收入，新进入市场的企业家净资产为零，根据杠杆约束，他们将无法借款启动生产

4.2 企业的生产经营

向资本品生产商购买资本品，向家庭购买劳动，自己也供给无弹性的劳动：

$$Y_t^e = A_t K_t^\alpha \left[H_t^\Omega (H_t^e)^{1-\Omega} \right]^{1-\alpha}$$

在 t 期末把折旧之后的资本以 Q_{t-1} 买给资本品厂家，向资本品生产商购买新的资本品，把产出以 $P_{m,t}$ 的价格卖给零售商。

$$\max_{H_t, H_t^e} J_t = P_{m,t} Y_t^e + Q_t (1-\delta) K_t - R_t^k Q_{t-1} K_t - w_t H_t - w_t^e H_t^e$$

s.t. $Y_t^e = A_t K_t^\alpha \left[H_t^\Omega (H_t^e)^{1-\Omega} \right]^{1-\alpha}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_t} = W_t = P_{m,t} A_t K_t^\alpha (1-\alpha) [H_t^\Omega (H_t^e)^{1-\Omega}]^{-\alpha} \Omega H_t^{\Omega-1} (H_t^e)^{1-\Omega}$$

$$\Rightarrow W_t H_t = (1-\alpha) \Omega P_{m,t} \underbrace{A_t K_t^\alpha [H_t^\Omega (H_t^e)^{1-\Omega}]^{1-\alpha}}_{Y_t^e}$$

$$= (1-\alpha) \Omega P_{m,t} Y_t^e$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial H_t^e} : W_t^e H_t^e = (1-\alpha)(1-\Omega) P_{m,t} Y_t^e$$

假设企业家完全竞争，零利润条件下

$$0 = P_{m,t} Y_t^e + Q_t (1-\delta) K_t - R_t^k Q_{t-1} K_t - W_t H_t - W_t^e H_t^e$$

$$0 = \alpha P_{m,t} Y_t^e + Q_t (1-\delta) K_t - R_t^k Q_{t-1} K_t$$

$$\Rightarrow R_t^k = \frac{\alpha P_{m,t} Y_t^e}{Q_{t-1} K_t} + \frac{Q_t (1-\delta)}{Q_{t-1}}$$

5 最终品厂商

最终品厂商以 P_t^i 价格从零售商处购买异质性中间商品 Y_t^i，打包后以价格 P_t 出售给家庭与资本品厂商：

$$
\begin{aligned}
\max_{Y_t^i} \quad & P_t Y_t - \int_0^1 P_t^i Y_t^i \, di \\
\text{s.t.} \quad & Y_t = \left[\int_0^1 (Y_t^i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \, di \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} \\
\text{FOC:} \quad & P_t \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \left[\int_0^1 (Y_t^i)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \, di \right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \cdot \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} (Y_t^i)^{-\frac{1}{\varepsilon}} = P_t^i \\
\Rightarrow \quad & Y_t^i = \left(\frac{P_t^i}{P_t} \right)^{-\varepsilon} Y_t
\end{aligned}
$$

将 FOC 代入目标函数，根据 0 利润条件可得

$$
\begin{aligned}
& P_t Y_t - \int_0^1 P_t^i \left(\frac{P_t^i}{P_t} \right)^{-\varepsilon} Y_t \, di = 0 \\
\Rightarrow \quad & P_t = \left(\int_0^1 (P_t^i)^{1-\varepsilon} \, di \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}
\end{aligned}
$$

6 零售商

常规的calvo定价。

7 资本品生产商

7.1 资本积累方程

$$
K_{t+1} = (1-\delta) K_t + I_t - \frac{\chi}{2} \left(\frac{I_t}{K_t} - \delta \right)^2 K_t
$$

其中，$I_t - \frac{\chi}{2} \left(\frac{I_t}{K_t} - \delta \right)^2 K_t$ 为新增资本量，由资本品厂商提供。

7.2 资本品企业

假设资本生产的费用为 1 单位，则资本品企业的利润最大化问题为：

$$
\begin{aligned}
\max_{I_t} \quad & Q_t \left[I_t - \frac{\chi}{2} \left(\frac{I_t}{K_t} - \delta \right)^2 K_t \right] - I_t \\
\Rightarrow \quad & Q_t = \left[1 - \chi \left(\frac{I_t}{K_t} - \delta \right) \right]^{-1}
\end{aligned}
$$

8 稳态求解