THE FINANCE UNCERTAINTY MULTIPLIER

《THE FINANCE UNCERTAINTY MULTIPLIER》是我第一次接触异质性的企业模型，这一支文献从Krusell and Smith (1998)开始，这篇文章的模型和Bloom, Floetotto, Jaimovich, Saporta and Terry (2018)的很像。下文将解释《THE FINANCE UNCERTAINTY MULTIPLIER》中的模型。

模型设定

企业

生产函数为：$y_{j,t} = X_t z_{j,t} k_{j,t}^{\alpha}$.
X_t 是宏观的生产力，服从一阶自回归：
$\log(X_{t+1}) \quad = \quad \log(\bar{X})(1-\rho^X) + \rho^X \log(X_{t+1}) + \sigma_t^X \varepsilon_{t+1}^X$ 其中ε_{t+1}^X 是独立同分布的标准正态生产力冲击，$\bar{X}$是平均总生产力。ρ^X刻画了自相关。σ_t^X 是宏观的不确定性（其实就是二阶矩，和一系列的宏观不确定性文献一致），是时变的（不随时间变化那意义也不大了）。
$z_{j,t}$ 是企业层面的微观生产力，所以有个下标j，服从$\log(z_{j,t+1}) \quad = \quad \rho^z \log(z_{j,t}) + \sigma_{j,t}^z \varepsilon_{j,t+1}^z$,和宏观生产力差不多。
那上面的两个时变的uncertainty怎么刻画呢？认为它们服从马尔可夫过程：

$$\sigma^X \ \in \ \{\sigma_L^X, \sigma_H^X\}, \text{where } \Pr\left(\sigma_{t+1}^X = \sigma_l^X | \sigma_t^X = \sigma_k^X\right) = \pi_{k,l}^{\sigma^X}$$

$$\sigma_{j,t}^z \ \in \ \{\sigma_L^z, \sigma_H^z\}, \text{where } \Pr\left(\sigma_{j,t+1}^z = \sigma_l^z | \sigma_{j,t}^z = \sigma_k^z\right) = \pi_{k,l}^{\sigma^z}.$$

资本积累满足$k_{j,t+1} = (1-\delta)k_{j,t} + i_{j,t}$,这个没什么好说的
资本调整成本：$g_{j,t} = c_k y_{j,t} 1_{\{i_{j,t} \neq 0\}}$,c_k 是一个常数，这个和投资无关，与产出有关。
前面的实证才说了不确定性会导致预防性储蓄，持有的现金增加。那这个模型里肯定有现金。
$n_{j,t+1} = R_n n_{j,t} + h_{j,t}$
这个模型里持有现金还有利息，不过设定利率R_n 严格小于效用的折旧率。
外生地有货币的总供给：$N_{t+1}^S = \vartheta {R_{f,t}}^{\zeta}$
融资成本为$\psi_{j,t} = \eta_t |e_{j,t}| 1_{\{e_{j,t}<0\}}$ (中间那个是绝对值)，其中：$e_{j,t} = y_{j,t} - i_{j,t} - h_{j,t} - g_{j,t}$. 很好理解，钱不够花了就要借了。边际成本也服从马尔可夫过程：
$\eta_t \in \{\eta_L, \eta_H\}, \text{where } \Pr\left(\eta_{t+1} = \eta_l | \eta_t = \eta_k\right) = \pi_{k,l}^{\eta}.$
说了那么多，可以写出firm的值函数：$v\left(k_{j,t}, n_{j,t}, z_{j,t}, \sigma_{j,t}^z; X_t, \sigma_t^X, \eta_t, \mu_t\right)$.状态变量是公司资本，公司持有的现金，微观生产力，微观不确定性，宏观生产力，宏观不确定性，融资边际成本。最后的μ_t 定义为$\mu_{t+1} = \Gamma\left(X_t, \sigma_t^X, \eta_t, \mu_t\right)$,是上述微观状态变量的联合分布（the joint distribution of idiosyncratic productivity, micro uncertainty and firm-level capital stocks and cash holding，μ_t ,which is defined for the space $\mathbb{S} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \{0 \cup \mathbb{R}_+\}$ ）,μ_t 可以理解为定义在S上的概率测度，可以理解为企业的状态分布。

贝尔曼方程：$v_{j,t}=\max_{i_{j,t},n_{j,t+1}}\left[e_{j,t}-\psi_{j,t}+\mathbb{E}_t M_{t,t+1} v_{j,t+1}\right]$,其中的M是根据下文家庭效用得到的随机折现因子。

家庭

企业是异质的，但家庭是同质的：

$$U_t=\max_{C_t,\phi_{j,t+1}}\left\{\log(C_t)+\beta\mathbb{E}_t U_{t+1}\right\}$$

$$s.t. C_t+\int p_{j,t} d\phi_{j,t+1}=\int q_{j,t} d\mu_t$$

其中$\phi_{j,t+1}$ 是对第j家企业的持股（the shares households invest in firms）， $q_{j,t+1}$ 是股息和转售价值（the sum of dividends and the resale value of their investments），$p_{j,t+1}$ 是购买新股票的价格（the price of the new shares that households buy）。预算约束的左边的积分还挺好理解的，每一家企业买的股票加总就是总支出。但是右边可能有点费解，可以理解为公司回报的期望。

均衡

商品市场出清：$C_t=\int(y_{j,t}-i_{j,t}-g_{j,t}-\psi_{j,t})d\mu_t$
股权市场出清：$\mu_{t+1}=\int\int\phi_{j,t+1}Q\left(z_{j,t+1}|z_{j,t}\right)Q\left(\sigma^z_{j,t+1}|\sigma^z_{j,t}\right)dz_{j,t}d\sigma^z_{j,t}.$ ，这一个不是特别懂，大概的理解是公司状态的变化由微观生产力，微观不确定性的变化和消费者的投资决定。对微观生产力，微观不确定性的变化求期望。我的理解是$\phi_{j,t+1}$ 也是一个测度，衡量了家庭对企业的投资。。
货币市场出清：$N^S_{t+1}=\int n_{j,t+1}d\mu_t$

模型求解

根据家庭优化问题：$\frac{\partial U_t}{\partial C_t}=\frac{1}{C_t}+\lambda=0$,大家都知道这个拉格朗日乘子是shadow price，这里起了一个新名字，叫marginal utility price,起到权重或折现因子的作用,毕竟最大化的不是所有时段的产出之和，而是“价值” 。有$p\left(X,\sigma^X,\eta,\mu\right)=\frac{1}{C(X,\sigma^X,\eta,\mu)}$.

企业的优化问题：

$$\tilde{V}(k,n,z,\sigma^z;X,\sigma^X,\eta,\mu)=\max_{\{i,h\}}\begin{Bmatrix}p(X,\sigma^X,\eta,\mu)(y-i-h-g-\psi)\\+\beta\mathbb{E}\left[\tilde{V}(k',n',z',\sigma^{z'};X',\sigma^{X'},\eta',\mu')\right]\end{Bmatrix}$$

marginal utility price和下一个阶段的μ 可以设为服从这样一个分布：

$$p=\Gamma_p\left(X,\sigma^X,\eta,\mu\right)$$
$$\mu'=\Gamma_\mu\left(X,\sigma^X,\eta,\mu\right)$$

使用总资本$K=\int k\left(k,n,z,\sigma^z\right)d\mu$ 来近似μ 的分布。这也是Krusell and Smith model的主旨思想。从数学的角度上，用有限矩来近似整个分布是让计算可行的数值手段，但这种做法还有经济

上的意义，他们认为agent本来就不知道经济系统的全貌，本来就是“有限理性”的。

$$
\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_p &: \log(\hat{p}) = \alpha_p\left(X, \sigma^X, \eta\right) + \beta_p\left(X, \sigma^X, \eta\right)\log(K) \\
\hat{\Gamma}_K &: \log(\hat{K}') = \alpha_K\left(X, \sigma^X, \eta\right) + \beta_K\left(X, \sigma^X, \eta\right)\log(K).
\end{aligned}
$$

此时贝尔曼方程为：

$$
\tilde{V}\left(k, n, z, \sigma^z; X, \sigma^X, \eta, K\right) = \max_{\{i,h\}} \left\{ \begin{array}{c} p\left(X, \sigma^X, \eta, K\right)(y - i - h - g - \psi) \\ +\beta E\left[\tilde{V}\left(k', n', z', \sigma^{z'}; X', \sigma^{X'}, \eta', K'\right)\right] \end{array} \right\}
$$

求解思路大概是先猜测一对$(\hat{\Gamma}_p, \hat{\Gamma}_K)$,之后用值函数迭代法算出值函数，之后再更新$(\hat{\Gamma}_p, \hat{\Gamma}_K)$，再算值函数......直到收敛。具体的值函数迭代是离散化之后使用格点法，大致思路和我之前讲的那一篇测资本调整成本的结构模型的文章是一样的。

求解贝尔曼方程和政策函数之后还要求市场出清。用到了**Young (2010)** 的基于直方图拟合分布的思想（有点像非参）。这一块很复杂，没看懂。