Problema 1.

Verificar que el conjunto de los números complejos de la forma $x + iy\sqrt{2}$ con $x, y \in \mathbb{Q}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$.

Solucion

Procedemos a ver cada uno de los axiomas para comprobar que es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ teniendo que $z_1 = x_1 + iy_1\sqrt{2}$ y que $z_2 = x_2 + iy_2\sqrt{2}$ con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$

i. Con $x_1 = y_1 = 0$, $z_1 = 0$ por lo tanto el 0 esta en el conjunto.

ii. Con $x_1 = 1$ y $y_1 = 0$, $z_1 = 1$ por lo tanto el 1 esta en el conjunto.

iii. $z_1 + z_2 = x_1 + iy_1\sqrt{2} + x_2 + iy_2\sqrt{2} = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\sqrt{2}$ por lo tanto $z_1 + z_2$ pertenece al conjunto.

iv. $-z_1$ esta en el conjunto ya que basta tomar x_1 y y_1 como negativos.

v. Veamos que $z_1 z_2$ pertenecen al conjunto

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1\sqrt{2})(x_2 + iy_2\sqrt{2}) \\
&= x_1x_2 + ix_1y_2\sqrt{2} + ix_2y_1\sqrt{2} + 2y_1y_2 \\
&= (x_1x_2 + 2y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)\sqrt{2}
\end{aligned}$$

vi. Veamos que z_1^{-1} con $x_1, y_1 \neq 0$ pertenece al conjunto

$$\begin{aligned}
z_1^{-1} &= \left(\frac{1}{x_1 + iy_1\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x_1 - iy_1\sqrt{2}}{x_1 - iy_1\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{x_1 - iy_1\sqrt{2}}{\left(x_1 + iy_1\sqrt{2}\right)\left(x_1 - iy_1\sqrt{2}\right)} \\
&= \frac{x_1 - iy_1\sqrt{2}}{x_1^2 + 2y_1^2} \\
&= \frac{x_1}{x_1^2 + 2y_1^2} + i\frac{-y_1}{x_1^2 + 2y_1^2}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Luego el conjunto de los números complejos de la forma $x + iy\sqrt{2}$ con $x, y \in \mathbb{Q}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$. ■