Problema 1.

Demostrar que no existe ningún numero racional que su cuadrado sea 12.

Solucion

Procederemos por reducción al absurdo. Suponemos que sí existe ese numero racional, sea $x = \sqrt{12} = \frac{a}{b}$, es decir, $12 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 12b^2 = a^2$, a^2 no puede ser impar ya que $12b^2 = a^2$ con $b = 2s + 1$ y $a = 2t + 1$ tenemos $12(4s^2 + 4s + 1) = 4t^2 + 4t + 1 \Rightarrow -48s^2 - 48s + 4t^2 + 4t = 11 \Rightarrow 4(-12s^2 - 12s + t^2 + t) = 11$ lo cual es una contradicción porque 11 es primo.

Si a^2 es par entonces $a = 2k \Rightarrow a^2 = 4k^2$ luego $4k^2 = 12b^2 \Rightarrow k^2 = 3b^2$ si k^2 es impar b^2 también es impar, esto es $k = 2y + 1$ y $b = 2w + 1$ entonces $4y^2 + 4y + 1 = 3(4w^2 + 4w + 1) \Rightarrow 4y^2 + 4y + 1 = 12w^2 + 12w + 3$ finalmente $4(y^2 + y - 3w^2 - 3w) = 2$ lo cual es una contradicción porque 2 no es múltiplo de 4 $\blacksquare$