Някои части от теория по ДИС-2, СУ ФМИ

Румен Димитров

Дефиниция 1 Несобствен интеграл от **първи** род наричаме интеграл от вида $I_1 = \int_a^{\infty} f(x)dx$ или от вида $I_2 = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx$.
Интегралът I_1 наричаме сходящ, ако съществува границата $\lim\limits_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx$.
Съответно I_2 е сходящ, ако съществува границата $\lim\limits_{B\to-\infty} \int_B^b f(x)dx$.

Дефиниция 2 Несобствен интеграл от **втори** род наричаме интеграл от вида $\int_a^b f(x)dx$, където е изпълнено поне едното от

- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)dx = \pm\infty$;
- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)dx = \pm\infty$.

Несобственият интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с особена точка a е сходящ, ако съществува границата $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$.

Дефиниция 3 Несобственият интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ се нарича абсолютно сходящ, ако е сходящ интегралът $\int_a^{\infty} |f(x)|\, dx$.

Дефиниция 4 Нека е дадена редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Сумата $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ ще наричаме $n-$та парциална (частична) сума. (*Отбелязваме, че S_n само по себе си е редица, по-общо - функция.*)
Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ще наричаме границата $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Ако границата съществува, т.е $S < \infty$, то редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ наричаме сходящ, а S - неговата сума.

Дефиниция 5 Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича абсолютно сходящ, ако е сходящ редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Дефиниция 6 Редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ се нарича условно сходящ, ако не е абсолютно сходящ, но е сходящ.

Твърдение 1 ***(Необходимо условие (на Коши?) за сходимост на ред)***
Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *е сходящ, тогава следва, че редицата* a_n *клони към* 0, *т.е* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказателство:
Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, значи $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S < \infty$. Да разгледаме парциалните суми

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

Имаме

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \\
&= S - S \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Твърдение 2 ***(Необходимо и достатъчно условие за сходимост на ред)***
Редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *е сходящ тогава и само тогава, когато*
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \nu \in \mathbb{N}$ *такова, че* $n > m > \nu \implies |S_n - S_m| < \varepsilon$.

Твърдение 3 ***(Сравнителен критерий на Вайерщрас)***
Дадени са редовете $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Нека съществува* $n_1 \in \mathbb{N}$, *за което е изп.* $n \geq n_1 \implies 0 \leq a_n \leq b_n$.
Тогава е изпълнено

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *е разходящ* $\implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *е разходящ.*

2. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *е сходящ* $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *е сходящ.*

Доказателство:
Ще докажем второто твърдение. Нека $S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, значи за него е изпълнено НДУ за сходимост на ред.
Нека $\varepsilon > 0$, за него съществува $\nu \in \mathbb{N}$ такова, че $n > m > \nu \implies |S_n - S_m| < \varepsilon$.
Нека сега $\nu' = max\{\nu, n_1\}$. Тогава имаме
$n > m > \nu' \implies |S_n - S_m| < \varepsilon$. Дясната страна на импликацията може да се запише като

$$b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_n < \varepsilon$$

Но понеже $\nu' \geq n_1$, имаме, че

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n \leq b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_n < \varepsilon$$

Значи условието от НДУ е изпълнено също и за реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и той е сходящ.
Първото твърдение е контрапозиция на второто, значи сме готови.

Задача 1 Нека за редиците с положителни членове a_n и b_n е изпълнено $a_n \leq 3b_n$ за $n \geq 2021$. Докажете, че ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е разходящ.

Доказателство:

Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ, тогава за него не е изпълнено НДУ за сходимост на ред, т.е имаме
$\exists\, \varepsilon > 0\, \forall\, \nu\, \exists n, m : n > m > \nu$ и $a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n \geq \varepsilon$.
Нека изберем това ε, за което горното е изпълнено и нека също изберем $\nu = 2017$.
Тогава съществуват $n > m > 2017$, за които
$a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n \geq \varepsilon$, също от условието имаме $a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n \leq 3(b_{m+1} + b_{m+2} + \dots + b_n)$.

От тук

$$b_{m+1} + b_{m+2} + \dots + b_n \geq \frac{\varepsilon}{3}$$

Значи НДУ не е изпълнено и за редът $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, и той също е разходящ.

Задача 2 Нека за редиците с положителни членове a_n и b_n е изпълнено $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 155$. Докажете, че ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ.

Доказателство:

Ще използваме дефиницията за граница. Имаме
$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \nu :\ \forall n > \nu$ е изпълнено $\left|\frac{a_n}{b_n} - 155\right| < \varepsilon$. Това е същото като

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - 155 < \varepsilon$$

$$155 - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < 155 + \varepsilon$$

Разглеждайки само лявата част на неравенството и умножавайки на кръст:

$$b_n < \frac{a_n}{155 - \varepsilon}$$

По условие $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, значи и $\frac{1}{155-\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, а от сравнителен критерий следва, че и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ.

Твърдение 4 ***(Интегрален критерий за сходимост на ред)***
Нека $f(x)$ е непрекъсната, положителна и монотонно намаляваща в интервала $[1, \infty)$ и нека $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогава $\int_1^{\infty} f(x)dx$ е сходящ $\iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.

Доказателство:

Нека $x \in [n, n+1]$. Тогава имаме

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1)$$

Ще интегрираме неравенството в граници от n до $n+1$:

$$\int_n^{n+1} f(n)dx \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq \int_n^{n+1} f(n+1)dx$$

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq f(n+1)$$

$$a_n \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq a_{n+1}$$

Горното е валидно за произволно естествено n, да сумираме от 1 до $N-1$:

$$\sum_{n=1}^{N-1} a_n \geq \int_1^N f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{N-1} a_{n+1}$$

Нека сега интегралът $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ е сходящ, взимаме граничен преход ($N \to \infty$) на дясната част от неравенството и имаме

$$\int_1^\infty f(x)dx \geq \sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

Понеже интегралът е сходящ, т.е $\displaystyle\int_1^\infty f(x)dx$ е крайно число и $a_n > 0$, то остава $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ също да е крайно число, от тук и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

също е крайно число, т.е редът е сходящ.

Обратно, нека редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ е сходящ, взимаме граничен преход на лявата част на неравенството по-горе и имаме

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \int_1^\infty f(x)dx$$

Редът е сходящ, т.е интегралът е ограничен от крайно число отгоре и е положителен (защото $f(x)$ е положителна), значи интегралът също е крайно число, т.е е сходящ.

Твърдение 5 ***(Критерий на Даламбер за сходимост на ред)***

Нека $a_n > 0$ *за всяко* $n \in \mathbb{N}$, *разглеждаме реда* $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

1. *Ако съществува* $n_1 : \forall n \geq n_1 \; \exists\, q < 1 : \; \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, *то* S *е сходящ.*

2. *Ако съществува* $n_1 : \forall n \geq n_1 \; \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *то* S *е разходящ.*

Доказателство:

1) Нека за някакво n_1 е изпълнено $\forall n \geq n_1 \; \exists q < 1 : \; \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$.

Имаме

$a_{n_1+1} \leq q a_{n_1}$

$a_{n_1+2} \leq q a_{n_1+1}$

$\dots$

$a_{n-1} \leq q a_{n-2}$

$a_n \leq q a_{n-1}$

От тук,

$$a_n \leq q a_{n-1} \leq q^2 a_{n-2} \leq \dots \leq q^{n-n_1} a_{n_1} = q^n \cdot \frac{a_{n_1}}{q^{n_1}}$$

За $n > n_1$. Числото $\dfrac{a_{n_1}}{q^{n_1}} := c$ е константа. Значи от n_1 нататък,

$$a_n \leq c \cdot q^n, \ \ |q| < 1.$$

Но редът $\displaystyle\sum_{n=n_1+1}^{\infty} c \cdot q^n$ е сходящ, значи от сравнителен критерий имаме, че и $\displaystyle\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_n$ е сходящ, от тук по-общо $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.

2) Нека сега съществува $n_1 : \ \forall n \geq n_1 \ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.
Тогава от n_1 нататък редицата a_n е монотонно растяща, значи не е изпълнено необходимото условие за сходимост на ред и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ със сигурност е разходящ.

Твърдение 6 ***(Критерий на Коши за сходимост на ред)***
Нека $a_n \geq 0$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.

1. *Ако съществува $n_1 : \ \forall n \geq n_1 \ \exists q : \ \ \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, то редът е сходящ.*
2. *Ако съществува $n_1 : \ \forall n \geq n_1 \ \ \sqrt[n]{a_n} \geq 1$, то редът е разходящ.*

Доказателство:

1) Нека е изпълнено условието от първото твърдение, разглеждаме произволно $n \geq n_1$, имаме

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q$$

$$a_n \leq q^n$$

Понеже $q < 1$, редът $\displaystyle\sum_{n=n_1}^{\infty} q^n$ е сходящ и от сравнителен критерий следва, че $\displaystyle\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n$ е сходящ, по-общо $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.

2) Нека е изпълнено условието от второто твърдение и нека $n \geq n_1$, имаме

$$a_n \geq 1$$

Значи необходимото условие за сходимост на ред не е изпълнено и от тук редът $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

Твърдение 7 ***(Крийтерий на Кумер за сходимост на ред)***
Нека $a_n > 0, \ c_n > 0$. Нека $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ е разходящ и

$k_n = c_n \dfrac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$. *Тогава е изпълнено*

1. *Ако съществува $n_1 : \ \forall n \geq n_1 \ \exists \, \delta > 0 \ \ k_n \geq \delta$, то редът е сходящ.*

2. *Ако съществува* $n_1 : \forall n \geq n_1 \;\; k_n \leq 0$, *то редът е разходящ.*

Доказателство:

1) Нека за някое естествено n_1 е изпълнено $\forall n \geq n_1$

$$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \geq \delta, \;\; \delta > 0.$$

$$c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \geq \delta a_{n+1} > 0 \qquad (1)$$

Дефинираме реда
$b_n = c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} > 0$.

Разглеждаме сумата

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_n &= c_1 a_1 - c_2 a_2 + c_2 a_2 - c_3 a_3 + \cdots + c_n a_n - c_{n+1} a_{n+1} \\ &= c_1 a_1 - c_{n+1} a_{n+1} \leq c_1 a_1. \end{aligned}$$

Тоест редът $\sum_{k=1}^{n} b_k$ винаги е ограничен и от тук $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ.

Връщайки се на (1), имаме $b_n \geq \delta a_{n+1}$. Но редът $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, значи от сравнителен критерий следва, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \delta a_{n+1}$ е сходящ, по-общо редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.
2) Нека сега за някое естествено n_1 е изпълнено $\forall n \geq n_1 \;\; k_n \leq 0$.

$$c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \leq 0$$

$$c_n a_n \leq c_{n+1} a_{n+1}$$

Тоест имаме

$$const = c := c_{n_1} a_{n_1} \leq \cdots \leq c_n a_n \leq c_{n+1} a_{n+1}$$

В частност,

$$a_{n+1} \geq \frac{c}{c_{n+1}}$$

Но по условие знаем, че редът $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{c_{n+1}}$ е разходящ, значи от сравнителен критерий имаме, че и редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ също е разходящ. Очевидно от тук $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ също е разходящ.

Твърдение 8 ***(Критерий за сходимост на ред на Раабе-Дюамел)***
Нека $a_n > 0 \, \forall n \in \mathbb{N}$.

1. *Ако съществува естествено* $n_1 : \forall n \geq n_1 \, \exists q : \;\; n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq q > 1$, *то редът е сходящ.*

2. *Ако съществува естествено* $n_1 : \forall n \geq n_1 \;\; n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \leq 1$, *то редът е разходящ.*

Доказателство:

Критерият на Раабе-Дюамел е частен случай на критерият на Кумер, където редицата $c_n = n$.

Дефиниция 7 R наричаме **радиус на сходимост** на реда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, ако редът е сходящ за $x \in (-R, R)$ и разходящ за $x \in (-\infty,\ -R) \cup (R,\ \infty)$.
Ако редът е винаги разходящ при $x \neq 0$, приемаме, че $R = 0$. Ако е сходящ за всяко x, пишем $R = (-\infty, \infty)$.

Задача 3 Нека a_n е редица, за която $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{2021}$. Докажете, че радиусът на сходимост на степенния ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е равен на 2021.

Доказателство:

Използваме критерия на Коши за сходимост на ред, т.е разглеждаме

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \frac{|x|}{2021}$$

Според критерия на Коши, за да е сходим реда, трябва

$$\frac{|x|}{2021} < 1$$

или

$$|x| < 2021$$

Тоест радиусът на сходимост на реда е 2021.

Дефиниция 8 Редът $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, където $a_n > 0$ ще наричаме алтерниращ.

Твърдение 9 ***(Критерий на Лайбниц за сходимост на алтерниращ ред)***
Нека редицата $a_n > 0$ е монотонно намаляваща и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Тогава алтерниращият ред $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ е сходящ (наричаме го условно сходящ).

Доказателство:

Ще разгледаме поотделно парциалните суми съответно с четни и нечетни индекси. Имаме (за някакво $n \geq 1$)

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$$

Също,

$$S_{2n+1} = S_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leq S_{2n-1}$$

По-точно, редицата от четни индекси расте монотонно, а редицата от нечетни индекси намалява монотонно. Но също така, понеже нечетните индекси са винаги положителни, имаме $S_{2n} \leq S_{2n+1}$. От тук, за някакво n,

$$S_2 \leq S_4 \leq S_6 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n-1} \leq \cdots \leq S_1$$

Тоест, $\{S_{2n}\}$ е монотонно растяща и ограничена отгоре от S_1, а $\{S_{2n-1}\}$ е монотонно намаляваща и ограничена отдолу от S_2. Значи и двете редици са сходящи, нека тогава

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S', \ \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S''$$

Да разгледаме равенството

$$S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}$$

Вземаме граница и използваме, че $a_n \to 0$:

$$S' - S'' = 0$$

$$S' = S''$$

Значи S_n клони към едно и също S' независимо как вземаме границата, т.е редът е сходящ.

Задача 4 (Бонус) Нека за редицата с положителни членове a_n е изпълнено, че $\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = \frac{1}{2021}$. Докажете, че a_n е монотонно намаляваща и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказателство:

Щом $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \to \frac{1}{2021}$, то съществува $n_1 : \forall n \geq n_1$

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 0$$

След малко манипулация на горното неравенсто получаваме

$$a_n > a_{n+1}$$

Тоест наистина a_n е монотонно намаляваща.

Нека сега разгледаме реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k, \ k \in \mathbb{N}$. Разглеждаме границата от критерия на Раабе-Дюамел:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n^k}{a_{n+1}^k}-1) &= \lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\left((\frac{a_n}{a_{n+1}})^{k-1}+(\frac{a_n}{a_{n+1}})^{k-2}+\cdots+1\right)\\
&= \frac{1}{2021}\left((\frac{a_n}{a_{n+1}})^{k-1}+(\frac{a_n}{a_{n+1}})^{k-2}+\cdots+1\right)\\
&> \frac{k}{2021}
\end{aligned}
$$

Нека например $k = 2022$, тогава от критерия на Раабе-Дюамел следва, че редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^{2022}$ е сходящ. От необходимо условие за сходимост имаме, че $a_n^{2022} \to 0$, от тук и $a_n \to 0$.