Подготовка за ДИС 1.2

Румен Димитров

February 2019

1.1 (3 точки) Довършете дефиницията: Неопределен интеграл от функция $f(x)$ е функция $F(x)$, удовлетворяваща условието...

Решение: F е диференцируема в Д.М. на f и $F'(x) = f(x)$. □

1.2 (3+6 точки) Формулирайте и докажете правилото за интегриране на интеграли $\int f(g(x))g'(x)dx$ (правило за интегриране чрез непосредствено внасяне под знака на диференциала при неопределен интеграл).

Решение:

$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g(x))dg(x)$

Д-во: Нека F е примитивна на f.
Спрямо x,

$$F(g(x))' = f(g(x))g'(x) \implies \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

Спрямо $g(x)$,

$$F(g(x))' = f(g(x)) \implies \int f(g(x))dg(x) = F(g(x)) + C$$

$$\Longrightarrow \int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C = \int f(g(x))dg(x)$$

.

1.3 (8 точки) Дайте дефиниция по Дарбу за интегруемост на функция $f : [a, b] \to [c, d]$.

Решение:
Нека f е дефинирана и ограничена върху $[a, b]$. Тогава тя е интегруема по Дарбу $\iff$
$\forall\, \epsilon > 0\; \exists$ разбиване τ на $[a, b] = \{x_0, ..., x_n\}$:
$S_\tau - s_\tau < \epsilon$, където S_τ и s_τ са съответно голямата и малка суми на Дарбу при разбиване τ, или:

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \tag{1}$$

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \tag{2}$$

където

$$M_i = \underset{x\in[x_{i-1},x_i]}{sup} f(x), i = \overline{1, n} \tag{3}$$

$$m_i = \underset{x\in[x_{i-1},x_i]}{inf} f(x), i = \overline{1, n} \tag{4}$$

Edit: (Поне във ФМИ) това всъщност се води Необходимо и Достатъчно условие (Критерий) на Дарбу за интегруемост на функция. Тогава би следвало, че в дефиницията вместо $S_\tau - s_\tau < \epsilon$ ще имаме следното:

Нека $\underline{\int_a^b} f(x)dx = inf\{S_\tau : \tau$ е разбиване на $[a,b]\}$ (долен интеграл на Дарбу),
Нека $\overline{\int_a^b} f(x)dx = sup\{s_\tau : \tau$ е разбиване на $[a,b]\}$ (горен интеграл на Дарбу)
Ако $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$,
то тяхната стойност наричаме интеграл на Дарбу и записваме просто $\int_a^b f(x)dx$. На някои места пише, че двете (дефиницията и НДУ) са еквивалентни, но за по-сигурно на изпита е по-добре да се пише дефиницията.

1.4 (6 точки) Формулирайте теоремата за средните стойности при определен интеграл от непрекъсната функция.

Решение:
Нека f е непрекъсната в $[a,b]$, тогава $\exists\, c \in [a,b]$, за което е изпълнено $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. $\square$

Доказателство на теоремата:

Нека F е примитивна на f. Тогава F е диференцируема в (a,b) и е непрекъсната в $[a,b]$. От формулата на Лайбниц-Нютон е изпълнено:
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Ще приложим теоремата на Лагранж за F (можем, тъй като горните две условия за F са изпълнени).

$F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}, c \in (a,b)$
$\implies F(b) - F(a) = F'(c)(b-a) = f(c)(b-a)$
$\implies \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a),\ c \in (a,b).$

1.5 (6 точки) Формулирайте правилото за интегриране по части при определен интеграл.

Решение:

Нека f и g са непрекъснати в $[a, b]$. Тогава е в сила
$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b u(x)dv(x) = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v(x)du(x)$. $\square$

1.6 Формулирайте и докажете теоремата за интегруемост на непрекъсната функция.

Решение:

Нека f е непрекъсната в интервала $[a, b]$, тогава следва, че f е интегруема в този интервал.

Д-во:
Щом f е непрекъсната в крайния и затворен интервал $[a, b]$, то тя е равномерно непрекъсната, $\implies$

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta : \forall x', x'' \in [a, b]$:
$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon$

Ще използваме Критерий на Дарбу. Избираме си τ, $d(\tau) < \delta$. Тогава, заради условието за равномерна непрекъснатост, е изпълнено $|M_i - m_i| < \epsilon, i = \overline{1, n}$, където

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), i = \overline{1, n} \tag{5}$$
$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), i = \overline{1, n} \tag{6}$$

Тогава е изпълнено
$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n}\epsilon(x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b-a)$

Ако $\epsilon := \frac{\epsilon}{b-a}$, то условието
$S_\tau - s_\tau < \epsilon$ е изпълнено. $\square$