24

$$(A,b) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 9 & 6 \\ -2 & -4 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 12 & 13 \\ -4 & -8 & 2 & -21 & -19 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{3} \cdot I = I$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 12 & 13 \\ -4 & -8 & 2 & -21 & -19 \end{pmatrix}$$

$2 \cdot I + II = II$

$-1 \cdot I + III = III$

$4 \cdot I + IV = IV$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & -9 & -11 \end{pmatrix}$$

$II_S \leftrightarrow III_S$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 9 & 11 \\ 0 & 2 & 0 & 9 & 11 \\ 0 & -2 & 0 & -9 & -11 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{2} \cdot II = II$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 9 & 11 \\ 0 & -2 & 0 & -9 & -11 \end{pmatrix}$$

$-2 \cdot II + III = III$

$2 \cdot II + IV = IV$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{(Halbdiagnalform)}$$

$n = 4$

$rg(A) = 2$

$rg(A,b) = 2$

$rg(A) < n \wedge rg(A) = rg(A,b) \Rightarrow Ax = b$ hat unendlich viele Lösungen

---

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$II + I = I$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{15}{2} & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{(Gaussnormalform)}$$

$$L\ddot{O}S(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^4 | x = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ \frac{11}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{15}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^4 | x = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} - 2\lambda_1 - \frac{15}{2}\lambda_2 \\ \frac{11}{2} - \frac{9}{2}\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

Weil Spalten II und III getauscht wurden, ist der Lösungsvektor als $\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \\ w \end{pmatrix}$ zu interpretieren. Das bedeutet, mögliche Lösungen des Gleichungssystems sind alle, die diese beiden Bedingungen erfüllen:

$x = \frac{15}{2} - 2y - \frac{15}{2}w$

$z = \frac{11}{2} - \frac{9}{2}w$

(mit $y, w \in \mathbb{R}$ beliebig)