4

Die zweistellige Verknüpfung $*$ auf $\mathbb{R}$ sei für alle $a, b \in \mathbb{R}$ definiert als $a * b = b$. Beweisen Sie nacheinander die folgenden vier Aussagen:

- Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ.

zu zeigen: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a * b) * c = a * (b * c)$

$(a * b) * c = b * c = c$

$a * (b * c) = a * c = c$

- $\exists e \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : e * a = a.$

e kann beliebig gewählt werden, da $\forall e, a \in \mathbb{R} : e * a = a$

- $\forall a \in \mathbb{R} \exists a' \in \mathbb{R} : a * a' = e.$

Wähle $a' = e$

- $(R, *)$ ist keine Gruppe.

Angenommen, $(R, *)$ wäre es eine Gruppe, dann müsste es ein neutrales Element geben. Dann würde gelten: $\exists a' \in \mathbb{R} \forall a \in \mathbb{R} : a' * a = e$. (**A**)

Generell gilt: $\forall a, a' \in \mathbb{R} : a' * a = a$

Seien $m = 1$ und $n = 2$.

Dann ergibt sich $a' * m = 1 \neq a' * n = 2$.

Das ist ein Widerspruch zu **A**!

$\Rightarrow (R, *)$ hat kein neutrales Element.

$\Rightarrow (R, *)$ ist keine Gruppe.