6

> Gegeben ist die dreielementige Menge $M = 0, 1, 2$. Definieren Sie auf M zwei Operationen $+$ und $\cdot$ so, dass $(M, +, \cdot)$ ein Körper ist. Dabei soll $1 + 1 = 2$ und $2 + 2 = 1$ sein.

Ich definiere die Operationen so:

- $0 + 0 = 0$
- $0 + 1 = 1$
- $0 + 2 = 2$
- $1 + 1 = 2$
- $1 + 2 = 0$
- $2 + 2 = 1$
- $0 \cdot 0 = 0$
- $0 \cdot 1 = 0$
- $0 \cdot 2 = 0$
- $1 \cdot 1 = 1$
- $1 \cdot 2 = 2$
- $2 \cdot 2 = 1$
- Es gelte das Kommutativgesetz bzgl. $+$ und $\cdot$

zu zeigen: $(M, +, \cdot)$ ist ein Körper

1. zu zeigen: $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe

1a. Assoziativgesetz zu zeigen: $\forall a, b, c \in K : (a + b) + c = a + (b + c)$

- $(0 + 0) + 0 = 0 = 0 + (0 + 0)$ ✓
- $(0 + 0) + 1 = 1 = 0 + (0 + 1)$ ✓
- $(0 + 0) + 2 = 2 = 0 + (0 + 2)$ ✓
- $(0 + 1) + 0 = 1 = 0 + (1 + 0)$ ✓
- $(0 + 1) + 1 = 2 = 0 + (1 + 1)$ ✓
- $(0 + 1) + 2 = 0 = 0 + (1 + 2)$ ✓
- $(0 + 2) + 0 = 2 = 0 + (0 + 0)$ ✓
- $(0 + 2) + 1 = 0 = 0 + (0 + 0)$ ✓
- $(0 + 2) + 2 = 1 = 0 + (2 + 2)$ ✓
- $(1 + 0) + 0 = 1 = 1 + (0 + 0)$ ✓
- $(1 + 0) + 1 = 2 = 1 + (0 + 1)$ ✓
- $(1 + 0) + 2 = 0 = 1 + (0 + 2)$ ✓
- $(1 + 1) + 0 = 2 = 1 + (1 + 0)$ ✓

- $(1+1)+1=0=1+(1+1)$ ✓
- $(1+1)+2=1=1+(1+2)$ ✓
- $(1+2)+0=0=1+(0+0)$ ✓
- $(1+2)+1=1=1+(0+0)$ ✓
- $(1+2)+2=2=1+(2+2)$ ✓
- $(2+0)+0=2=2+(0+0)$ ✓
- $(2+0)+1=0=2+(0+1)$ ✓
- $(2+0)+2=1=2+(0+2)$ ✓
- $(2+1)+0=0=2+(1+0)$ ✓
- $(2+1)+1=1=2+(1+1)$ ✓
- $(2+1)+2=2=2+(1+2)$ ✓
- $(2+2)+0=1=2+(0+0)$ ✓
- $(2+2)+1=2=2+(0+0)$ ✓
- $(2+2)+2=0=2+(2+2)$ ✓

1b. neutrales Element zu zeigen: $\exists e \in K : \forall a \in K : e+a=a$

Wähle $e=0$.

- $0+0=0$ ✓
- $0+1=1$ ✓
- $0+2=2$ ✓

1c. inverses Element zu zeigen: $\forall a \in K : \exists a' \in K : a'+a=e$

- $0+0=0$ ✓
- $2+1=0$ ✓
- $1+2=0$ ✓

2. zu zeigen: $(K^*, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe

2a. Assoziativgesetz zu zeigen: $\forall a,b,c \in K \backslash \{0\} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

- $(1\cdot 1)\cdot 1=1=1\cdot(1\cdot 1)$ ✓
- $(1\cdot 1)\cdot 2=2=1\cdot(1\cdot 2)$ ✓
- $(1\cdot 2)\cdot 1=2=1\cdot(2\cdot 1)$ ✓
- $(1\cdot 2)\cdot 2=1=1\cdot(2\cdot 2)$ ✓
- $(2\cdot 1)\cdot 1=2=1\cdot(1\cdot 1)$ ✓
- $(2\cdot 1)\cdot 2=1=2\cdot(1\cdot 2)$ ✓
- $(2\cdot 2)\cdot 1=1=2\cdot(2\cdot 1)$ ✓
- $(2\cdot 2)\cdot 2=2=2\cdot(2\cdot 2)$ ✓

2b. neutrales Element zu zeigen: $\exists e \in K : \forall a \in K : e \cdot a = a$

Wähle $e = 1$.

- $1 \cdot 0 = 0$ ✓
- $1 \cdot 1 = 1$ ✓
- $1 \cdot 2 = 2$ ✓

3. Distributivgesetze

3a. zu zeigen: $\forall a, b, c \in K : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

- $0 \cdot (0 + 0) = 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0$ ✓
- $0 \cdot (0 + 1) = 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1$ ✓
- $0 \cdot (0 + 2) = 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2$ ✓
- $0 \cdot (1 + 0) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0$ ✓
- $0 \cdot (1 + 1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1$ ✓
- $0 \cdot (1 + 2) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2$ ✓
- $0 \cdot (2 + 0) = 0 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0$ ✓
- $0 \cdot (2 + 1) = 0 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1$ ✓
- $0 \cdot (2 + 2) = 0 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2$ ✓
- $1 \cdot (0 + 0) = 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0$ ✓
- $1 \cdot (0 + 1) = 1 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1$ ✓
- $1 \cdot (0 + 2) = 2 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2$ ✓
- $1 \cdot (1 + 0) = 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0$ ✓
- $1 \cdot (1 + 1) = 2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$ ✓
- $1 \cdot (1 + 2) = 0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2$ ✓
- $1 \cdot (2 + 0) = 2 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0$ ✓
- $1 \cdot (2 + 1) = 0 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$ ✓
- $1 \cdot (2 + 2) = 1 = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2$ ✓
- $2 \cdot (0 + 0) = 0 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0$ ✓
- $2 \cdot (0 + 1) = 2 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1$ ✓
- $2 \cdot (0 + 2) = 1 = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2$ ✓
- $2 \cdot (1 + 0) = 2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0$ ✓
- $2 \cdot (1 + 1) = 1 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1$ ✓
- $2 \cdot (1 + 2) = 0 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2$ ✓

- $2 \cdot (2+0) = 1 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0$ ✓
- $2 \cdot (2+1) = 0 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1$ ✓
- $2 \cdot (2+2) = 2 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2$ ✓

3b. zu zeigen: $\forall a, b, c \in K : (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ siehe 3a, da gilt: $(a+b) \cdot c = c \cdot (a+b)$