19

zu zeigen: r_ϕ ist eine lineare Abbildung

1. zu zeigen: $\forall u, v \in \mathbb{R}^2 : r_\phi(u+v) = r_\phi(u) + r_\phi(v)$

Seien $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix.

$r_\phi(u+v) = r_\phi(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}) = r_\phi(\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} (u_1+v_1)\cdot\cos\phi - (u_2+v_2)\cdot\sin\phi \\ (u_1+v_1)\cdot\sin\phi + (u_2+v_2)\cdot\cos\phi \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} (u_1\cdot\cos\phi - u_2\cdot\sin\phi) + (v_1\cdot\cos\phi - v_2\cdot\sin\phi) \\ (u_1\cdot\sin\phi + u_2\cdot\cos\phi) + (v_1\cdot\sin\phi + v_2\cdot\cos\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1\cdot\cos\phi - u_2\cdot\sin\phi \\ u_1\cdot\sin\phi + u_2\cdot\cos\phi \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} v_1\cdot\cos\phi - v_2\cdot\sin\phi \\ v_1\cdot\sin\phi + v_2\cdot\cos\phi \end{pmatrix} = r_\phi(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}) + r_\phi(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}) = r_\phi(u) + r_\phi(v)$ $\square$

2. zu zeigen: $\forall u \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R} : r_\phi(\lambda\cdot u) = \lambda\cdot r_\phi(u)$

Sei $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ und seien $u_1, u_2, \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix.

$r_\phi(\lambda\cdot x) = r_\phi(\begin{pmatrix} \lambda\cdot u_1 \\ \lambda\cdot u_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda\cdot u_1\cdot\cos\phi - \lambda\cdot u_2\cdot\sin\phi \\ \lambda\cdot u_1\cdot\sin\phi + \lambda\cdot u_2\cdot\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot(u_1\cdot\cos\phi - u_2\cdot\sin\phi) \\ \lambda\cdot(u_1\cdot\sin\phi + u_2\cdot\cos\phi) \end{pmatrix} =$
$\lambda\cdot\begin{pmatrix} u_1\cdot\cos\phi - u_2\cdot\sin\phi \\ u_1\cdot\sin\phi + u_2\cdot\cos\phi \end{pmatrix} = \lambda\cdot r_\phi(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}) = \lambda\cdot r_\phi(u)$ $\square$

Somit ist r_ϕ eine lineare Abbildung.

Berechnen

$r_{\frac{\pi}{2}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1\cdot\cos\frac{\pi}{2} - 2\cdot\sin\frac{\pi}{2} \\ 1\cdot\sin\frac{\pi}{2} + 2\cdot\cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$r_\pi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1\cdot\cos\pi - 2\cdot\sin\pi \\ 1\cdot\sin\pi + 2\cdot\cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) - 2\cdot 0 \\ 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$r_{\frac{3}{2}\pi}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1\cdot\cos\frac{3}{2}\pi - 2\cdot\sin\frac{3}{2}\pi \\ 1\cdot\sin\frac{3}{2}\pi + 2\cdot\cos\frac{3}{2}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 - 2\cdot(-1) \\ 1\cdot(-1) + 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

r_ϕ dreht den Ursprungsvektor um $\frac{\phi}{\pi}\cdot 180$ř gegen den Uhrzeigersinn.

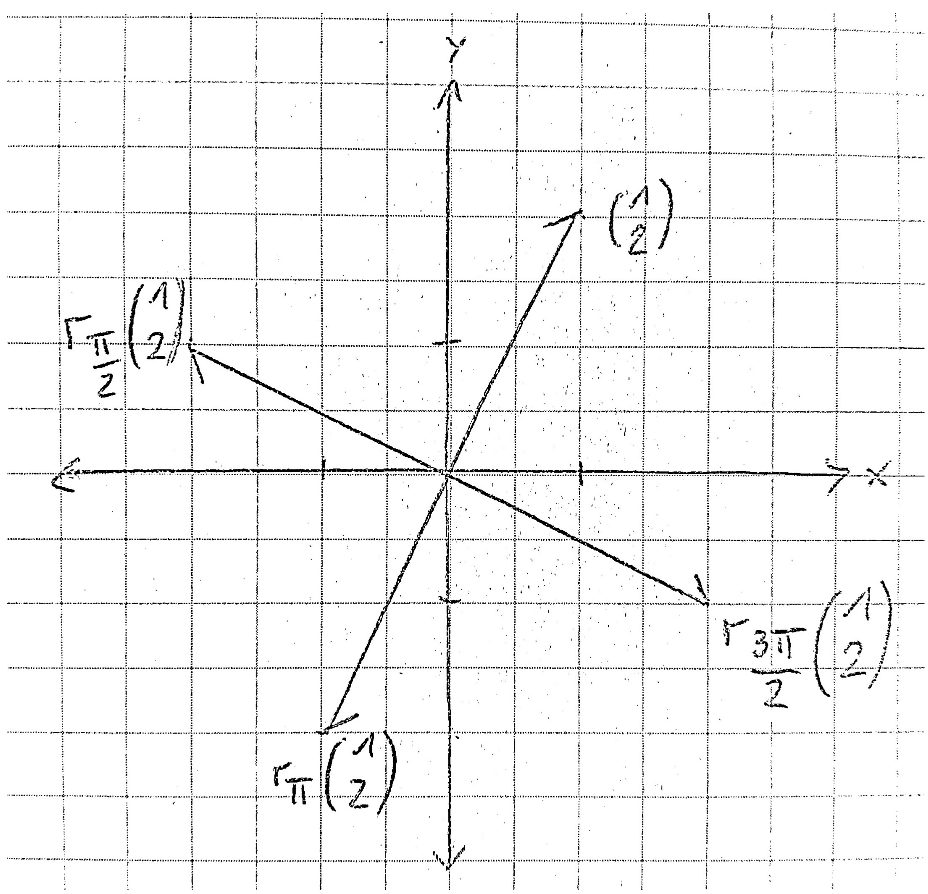

Figure 1: Vektor mit drei Abbildungen