18

Bestimmen aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ mit $f_A(x) = x$

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix. Dann gilt:

$f_A(x) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \cdot x_1 + \frac{6}{7} \cdot x_2 \\ \frac{4}{7} \cdot x_1 - \frac{5}{7} \cdot x_2 \end{pmatrix}$

Daher muss gelten:

$x_1 = \frac{5}{7} \cdot x_1 + \frac{6}{7} \cdot x_2$

$\frac{2}{7} \cdot x_1 = \frac{6}{7} \cdot x_2$

$2 \cdot x_1 = 6 \cdot x_2$

$x_1 = 3 \cdot x_2$

Weiterhin muss auch gelten:

$x_2 = \frac{4}{7} \cdot x_1 - \frac{5}{7} \cdot x_2$

$\frac{12}{7} \cdot x_2 = \frac{4}{7} \cdot x_1$

$12 \cdot x_2 = 4 \cdot x_1$

$3 \cdot x_2 = x_1$

Somit lassen sich alle Vektoren, für die die Bedingung erfüllt ist, so ausdrücken:

$x \in \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} | x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 = 3 \cdot x_2 \}$

zu zeigen: $\forall x \in \mathbb{R}^2 : f_A(f_A(x)) = x$

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix. Dann gilt:

$f_A(f_A(x)) = A \cdot (A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \cdot x_1 + \frac{6}{7} \cdot x_2 \\ \frac{4}{7} \cdot x_1 - \frac{5}{7} \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \cdot (\frac{5}{7} \cdot x_1 + \frac{6}{7} \cdot x_2) + \frac{6}{7} \cdot (\frac{4}{7} \cdot x_1 - \frac{5}{7} \cdot x_2) \\ \frac{4}{7} \cdot (\frac{5}{7} \cdot x_1 + \frac{6}{7} \cdot x_2) - \frac{5}{7} \cdot (\frac{4}{7} \cdot x_1 - \frac{5}{7} \cdot x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25}{49} \cdot x_1 + \frac{30}{49} \cdot x_2 + \frac{24}{49} \cdot x_1 - \frac{30}{49} \cdot x_2 \\ \frac{20}{49} \cdot x_1 + \frac{24}{49} \cdot x_2 - \frac{20}{49} \cdot x_1 + \frac{25}{49} \cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \square$

direkte Abbildung ohne Matrix-Vektor-Produkt

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix. Dann gilt:

$f_A(x) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \cdot x_1 + \frac{6}{7} \cdot x_2 \\ \frac{4}{7} \cdot x_1 - \frac{5}{7} \cdot x_2 \end{pmatrix}$