27

$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

$N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$

zz: M ist Teilraum von $\mathbb{R}^2$

1. zz. $M \subseteq \mathbb{R}^2$

siehe Angabe ✓

2. zz. $M \neq \emptyset$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in M$ ✓

3. zz. $\forall m, n \in M : (m + n) \in M$

Seien $u, v \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix und gelte $u + v = w$.

Dann ist auch $w \in \mathbb{R}$.

Dann sind $\begin{pmatrix} u \\ 2u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ 2v \end{pmatrix} \in M$.

Es gilt $\begin{pmatrix} u \\ 2u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ 2u+2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ 2(u+v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ 2w \end{pmatrix} \in M$ ✓

4. zz. $\forall m \in M, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda m \in M$

Seien $u, \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix und gelte $\lambda \cdot u = v$.

Dann ist auch $v \in \mathbb{R}$.

Dann ist $\begin{pmatrix} u \\ 2u \end{pmatrix} \in M$.

Es gilt $\lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ 2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot u \\ \lambda \cdot 2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 2v \end{pmatrix} \in M$ ✓

zz: N ist Teilraum von $\mathbb{R}^2$

1. zz. $N \subseteq \mathbb{R}^2$

siehe Angabe ✓

2. zz. $N \neq \emptyset$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in N$ ✓

3. zz. $\forall m, n \in N : (m+n) \in N$

Seien $u, v \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix und gelte $u + v = w$.

Dann ist auch $w \in \mathbb{R}$.

Dann sind $\begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix} \in N$.

Es gilt $\begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ -(u+v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ -w \end{pmatrix} \in N$ ✓

4. zz. $\forall m \in N, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda m \in N$

Seien $u, \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix und gelte $\lambda \cdot u = v$.

Dann ist auch $v \in \mathbb{R}$.

Dann ist $\begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} \in N$.

Es gilt $\lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot u \\ -\lambda \cdot u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix} \in N$ ✓

gesucht: $M \cap N$

$M \cap N = \{m | m \in M \wedge m \in N\} = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} | u, v \in \mathbb{R} \wedge v = 2u \wedge v = -u \right\}$

$v = 2u \wedge v = -u \Rightarrow 2u = -u \Rightarrow u = 0 \Rightarrow v = 2u = 0$

$\Rightarrow M \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$