Proseminar

Lineare Algebra f. Informatik

SoSe 2020

Übungszettel 2

7. Seien A und B zwei reelle $m \times n$-Matrizen und sei $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

   Bestimmen Sie, ob die Menge aller reellen $m \times n$-Matrizen mit diesen Operationen einen Vektorraum bildet.

8. Überprüfen Sie, ob der $\mathbb{R}^2$ mit der gewöhnlichen Vektoraddition und folgender Skalarmultiplikation alle Vektorraumaxiome erfüllt:

$$\lambda \odot x = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\lambda} \\ \frac{x_2}{\lambda} \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

9. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Zeigen Sie, dass für den Nullvektor $0 \in V$ gilt:

$$\forall \lambda \in K : \lambda \cdot 0 = 0.$$

10. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Zeigen Sie, dass für $x \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

$$\lambda \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda = 0 \vee x = 0).$$

    Hinweis: Die folgende Aussage wurde in der Vorlesung bewiesen und darf verwendet werden:

$$\forall x \in V : 0 \cdot x = 0.$$

11. Sei $B = \{0, 1\}$ und sei $V = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a, b, c \in B \right\}$.

    Definieren Sie eine Addition und eine Multiplikation auf B und darauf aufbauend eine Vektoraddition $+ : V \times V \to V$ und eine Skalarmultiplikation $\cdot : B \times V \to V$ und zeigen Sie, dass V mit diesen Operationen einen Vektorraum bildet.