20

Berechnen der Matrix von r_ϕ

$r_\phi(e_1) = r_\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}$

$r_\phi(e_2) = r_\phi(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}$

$A_{r_\phi} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

Berechnen der Matrix von $r_\beta \circ r_\alpha$

Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix.

Dann lässt sich die Verknüpfung folgendermaßen darstellen:

$r_\beta(x) \circ r_\alpha(x) = r_\beta(r_\alpha(x)) = r_\beta(r_\alpha(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}))$

$= r_\beta(\begin{pmatrix} x_1 \cdot \cos\alpha - x_2 \cdot \sin\alpha \\ x_1 \cdot \sin\alpha + x_2 \cdot \cos\alpha \end{pmatrix})$

$= \begin{pmatrix} (x_1 \cdot \cos\alpha - x_2 \cdot \sin\alpha) \cdot \cos\beta - (x_1 \cdot \sin\alpha + x_2 \cdot \cos\alpha) \cdot \sin\beta \\ (x_1 \cdot \cos\alpha - x_2 \cdot \sin\alpha) \cdot \sin\beta + (x_1 \cdot \sin\alpha + x_2 \cdot \cos\alpha) \cdot \cos\beta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - x_2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta - x_1 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta - x_2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \\ x_1 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta - x_2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta + x_1 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta + x_2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1 \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) - x_2 \cdot (\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta) \\ x_1 \cdot (\cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta)) + x_2 \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x_1 \cdot \cos(\alpha+\beta) - x_2 \cdot \sin(\alpha+\beta) \\ x_1 \cdot \sin(\alpha+\beta) + x_2 \cdot \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

Daher gilt:

$r_\beta(e_1) \circ r_\alpha(e_1) = r_\beta(r_\alpha(e_1)) = r_\beta(r_\alpha(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

$r_\beta(e_2) \circ r_\alpha(e_2) = r_\beta(r_\alpha(e_2)) = r_\beta(r_\alpha(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha+\beta) \\ \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$

$A_{r_\beta \circ r_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$