29

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; c_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}; c_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$$

zz. (a, b, c_1) ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$

zz. a, b, c_1 sind linear unabhängig

zz. $\exists! \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}. \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c_1 = 0$

$$(A, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 & 0 \\ 5 & 3 & -9 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$I_S \leftrightarrow II_S$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & -9 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$-\frac{1}{4} \cdot I = I$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -9 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$-3 \cdot I + II = II$

$I + III = III$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{5} \cdot II = II$

$-\frac{1}{2} \cdot III = III$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$-1 \cdot II + III = III$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L\ddot{O}S(A, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind nicht eindeutig

$\Rightarrow a, b, c_1$ sind nicht linear unabhängig

$\Rightarrow (a, b, c_1)$ ist keine Basis des $\mathbb{R}^3$

zz. (a, b, c_2) ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$

zz. a, b, c_2 sind linear unabhängig

zz. $\exists! \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}. \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c_2 = 0$

$$(A, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 & 0 \\ 5 & 3 & -9 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$I_S \leftrightarrow II_S$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 & 0 \\ 3 & 5 & -9 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$-\frac{1}{4} \cdot I = I$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -9 & 0 \\ -1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$-3 \cdot I + II = II$

$I + III = III$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{5} \cdot II = II$

$-\frac{1}{2} \cdot III = III$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$-1 \cdot II + III = III$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{4} \cdot III = III$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$-2 \cdot III + I = I$

$3 \cdot III + II = II$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L\ddot{O}S(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind eindeutig

$\Rightarrow a, b, c_2$ sind linear unabhängig

zz. $LIN\{a, b, c_2\} = \mathbb{R}^3$

Seien $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix.

zz. $\exists \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$

Es ergibt sich das Gleichungssystem:

$x_1 = -4\mu_2 - 8\mu_3$ (I)

$x_2 = 5\mu_1 + 3\mu_2 - 9\mu_3$ (II)

$x_3 = -2\mu_1 - \mu_2 - 4\mu_3$ (III)

$2 \cdot II$:

$2x_2 = 10\mu_1 + 6\mu_2 - 18\mu_3$ (A)

$5 \cdot III$:

$5x_3 = -10\mu_1 - 5\mu_2 - 20\mu_3$ (B)

$A + B$:

$2x_2 + 5x_3 = \mu_2 - 38\mu_3$

$\mu_2 = 2x_2 + 5x_3 + 38\mu_3$ (C)

$3 \cdot III$:

$3x_3 = -6\mu_1 - 3\mu_2 - 12\mu_3$ (D)

$II + D$:

$x_2 + 3x_3 = -\mu_1 - 21\mu_3$

$\mu_1 = -x_2 - 3x_3 - 21\mu_3$ (E)

C in I:

$x_1 = -4 \cdot (2x_2 + 5x_3 + 38\mu_3) - 8\mu_3$

$x_1 = -8x_2 - 20x_3 - 160\mu_3$

$\mu_3 = -\frac{1}{160}x_1 - \frac{1}{20}x_2 - \frac{1}{8}x_3$ (F)

F in C:

$\mu_2 = 2x_2 + 5x_3 + 38(-\frac{1}{160}x_1 - \frac{1}{20}x_2 - \frac{1}{8}x_3)$

$\mu_2 = -\frac{38}{160}x_1 - \frac{40-38}{20}x_2 - \frac{40-38}{8}x_3$

$\mu_2 = -\frac{19}{80}x_1 - \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{4}x_3$ (G)

F in E:

$\mu_1 = -x_2 - 3x_3 - 21(-\frac{1}{160}x_1 - \frac{1}{20}x_2 - \frac{1}{8}x_3)$

$\mu_1 = -\frac{1}{160}x_1 + \frac{1}{20}x_2 - \frac{3}{8}x_3)$ (H)

$F, G, H \Rightarrow \exists \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} -8 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow LIN\{a, b, c_2\} = \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow (a, b, c_2)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$