28

$a = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}; c = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

zz. c ist Linearkombination von a und b

zz. $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 a + \lambda_2 b = c$

Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften.

$\lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

Es ergibt sich das Lineare Gleichungssystem:

$I : -2\lambda_1 + 3\lambda_2 = -7$

$II : -5\lambda_1 - 3\lambda_2 = -7$

$III : 6\lambda_1 + 5\lambda_2 = 7$

$(A, c) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ -5 & -3 & -7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

$-\frac{1}{2} \cdot I = I$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ -5 & -3 & -7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

$5 \cdot I + II = II$

$-6 \cdot I + III = III$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{21}{2} & \frac{21}{2} \\ 0 & 14 & -14 \end{pmatrix}$

$(-\frac{21}{2}) \cdot II = II$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 14 & -14 \end{pmatrix}$

$-14 \cdot II + III = III$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Halbdiagonalform

$rg(A) = 2 = n$

$rg(A) = 2 = rg(A, c)$

$\Rightarrow Ax = c$ hat eine einzige Lösung

$\frac{3}{2} \cdot II + I = I$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Gaussnormalform

$\text{LÖ}S(A, c) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = -1 \; \square$

Probe

$2 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} \checkmark$

zz. $\exists d \in \mathbb{R}^3$: d ist keine Linearkombination von a und b

Sei $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

zz. $\nexists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 a + \lambda_2 b = d$

Annahme: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit diesen Eigenschaften.

$\lambda_1 \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Es ergibt sich das Lineare Gleichungssystem:

$I : -2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1$

$II : -5\lambda_1 - 3\lambda_2 = 1$

$III : 6\lambda_1 + 5\lambda_2 = 1$

$$(A,d) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$-\frac{1}{2} \cdot I = I$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & -3 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$5 \cdot I + II = II$

$-6 \cdot I + III = III$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{21}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 14 & 4 \end{pmatrix}$$

$-\frac{2}{21} \cdot II = II$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 14 & 4 \end{pmatrix}$$

$-14 \cdot II + III = III$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Halbdiagonalform

$rg(A) = 2 \neq rg(A,d) = 3$

$\Rightarrow Ax = d$ hat keine Lösung

Widerspruch zur obigen Annahme

$\Rightarrow \nexists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 a + \lambda_2 b = d \; \square$