17

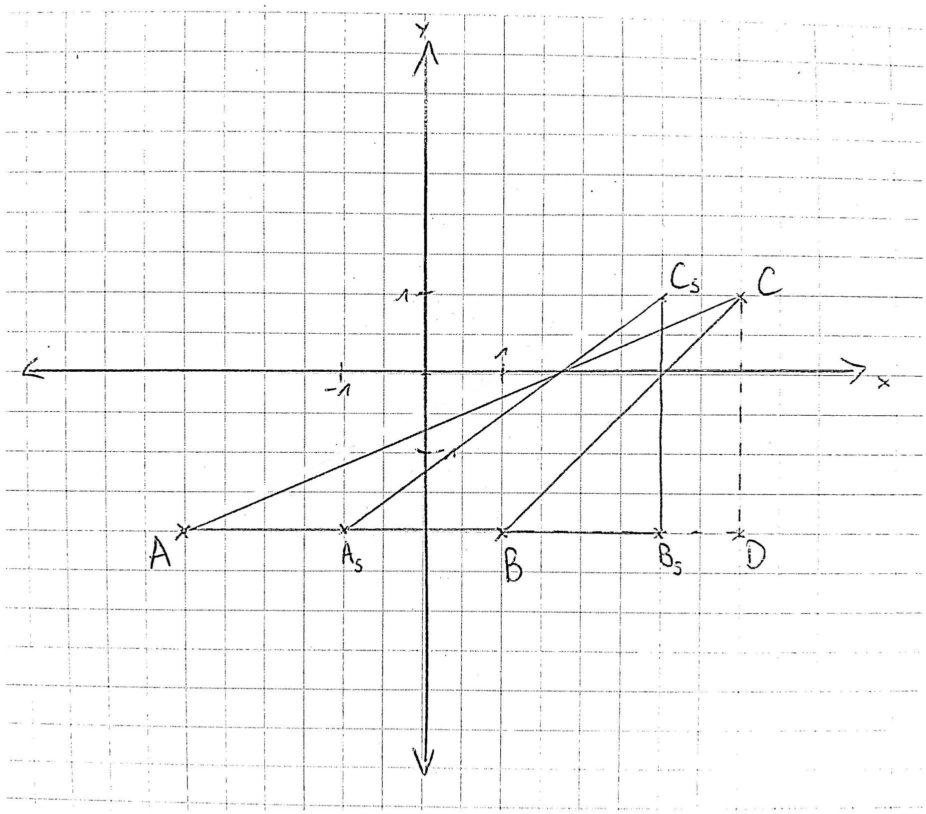

Figure 1: Dreieck ABC mit Hilfspunkt D und Dreieck $A_SB_SC_S$

Berechnung des Flächeninhalts

Sei ACD ein rechtwinkliges Dreieck mit den Eckpunkten A und C, das die Fläche des Dreiecks ABC beinhaltet. Dann hat der neue Eckpunkt D die Koordinaten $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die Fläche des Dreiecks ABC lässt sich dann so berechnen:

$A_{ABC} = A_{ACD} - A_{BCD}$

Da die Dreieicke ACD und BCD beide rechtwinklig sind, gilt:

$A_{ACD} - A_{BCD} = \frac{\Delta_{AD} \cdot \Delta_{CD}}{2} - \frac{\Delta_{BD} \cdot \Delta_{CD}}{2}$

$= \frac{|(-3)-4| \cdot |1-(-2)| - |1-4| \cdot |1-(-2)|}{2} = \frac{7 \cdot 3 - 3 \cdot 3}{2} = \frac{21-9}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Anwendung der Scherung

$A_S = f_S(A) = S \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-3) + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$B_S = f_S(B) = S \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$C_S = f_S(C) = S \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechnung des Flächeninhalts des neuen Dreiecks

$A_{A_S B_S C_S} = \frac{\Delta_{A_S B_S} \cdot \Delta_{B_S C_S}}{2} = \frac{|(-1)-3| \cdot |(-2)-1|}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

direkte Abbildung ohne Matrix-Vektor-Produkt

Sei ein Vektor in $\mathbb{R}^2$ definiert als $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig aber fix.

Dann gilt:

$f_S(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = S \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + (-1) \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$