Proseminar

Lineare Algebra f. Informatik

SoSe 2020

Übungszettel 3

12. Im RGB-Farbraum wird eine Farbe durch additive Mischung der drei Grundfarben rot, grün und blau dargestellt. Bei 8 Bit pro Kanal lässt sich dies durch einen dreielementigen Vektor beschreiben, dessen drei Komponenten (Rotanteil, Grünanteil und Blauanteil) ganze Zahlen von 0 bis 255 sind. Als erster Schritt der JPEG-Komprimierung wird ein Vektor aus dem RGB-Farbraum in einen ebenfalls dreielementigen Vektor im YCbCr-Farbmodell umgerechnet, bestehend aus einer Luminanz-Komponente (Helligkeit) und zwei Chrominanz-Komponenten (Farbigkeit blau und rot), wobei alle drei Komponenten wiederum ganze Zahlen von 0 bis 255 sind. Die Umrechnungsformel dazu lautet (hier gerundet auf nur eine Kommastelle):

$$\begin{pmatrix} Y \\ Cb \\ Cr \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 & 0,1 \\ -0,2 & -0,3 & 0,5 \\ 0,5 & -0,4 & -0,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$$

Rechnen Sie anhand dieser Formel folgende Farben aus dem RGB-Farbraum um: $\begin{pmatrix} 128 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix}$ (mittelgrau), $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 255 \end{pmatrix}$ (blau), $\begin{pmatrix} 0 \\ 255 \\ 255 \end{pmatrix}$ (cyan), und eine weitere Farbe Ihrer Wahl.

13. Für einen gegebenen Vektor $v_S = \begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ beschreibt die 2×2-Matrix

$$S = \frac{1}{x_S^2 + y_S^2} \cdot \begin{pmatrix} x_S^2 - y_S^2 & 2x_S y_S \\ 2x_S y_S & y_S^2 - x_S^2 \end{pmatrix}$$

eine Spiegelung entlang der Geraden, die durch den Nullpunkt und den Punkt $\begin{pmatrix} x_S \\ y_S \end{pmatrix}$ geht. (v_S ist Richtungsvektor der Geraden). Mit dieser Matrix lässt sich das Spiegelbild eines Punktes $p \in \mathbb{R}^2$ durch Berechnung von $S \cdot p$ ermitteln. Berechnen Sie jeweils das Spiegelbild von $p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der durch $v_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sowie durch $v_S = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ gegebenen Geraden und zeichnen Sie eine Skizze.

14. Das *Kreuzprodukt* im $\mathbb{R}^3$: Seien $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$x \times y := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

(Fortsetzung und weitere Beispiele auf Seite 2.)

(Fortsetzung von 14.)

Dabei ist $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ die Determinante einer 2×2-Matrix.

Sei $y \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ T(x) &= x \times y \end{aligned}$$

linear ist und berechnen Sie die Matrix von T.

15. Überprüfen Sie jeweils, ob folgende Abbildungen T_1 und T_2 linear sind:

$$T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+z \\ x-z \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie in beiden Fällen die Matrix, deren Spalten die Bilder der Einheitsvektoren sind – auch dann, wenn die betreffende Abbildung nicht linear ist. Geben Sie anschließend an, welcher linearen Abbildung diese Matrizen jeweils entsprechen.

16. Sei $T : V \to W$ linear. Dann gilt:

$$T(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_s x_s) = \lambda_1 T(x_1) + \cdots + \lambda_s T(x_s).$$

Präzisieren Sie diese Aussage durch Beantwortung folgender Fragen: Was ist (welche Struktur hat) V, was W? Aus welchen Mengen stammen $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sowie $x_1, \ldots, x_s$?

Beweisen Sie die Aussage anschließend durch vollständige Induktion.