11

Sei $B = \{0,1\}$ und sei $V = \{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : a,b,c \in B\}$.

Definieren Sie eine Addition und eine Multiplikation auf B und darauf aufbauend eine Vektoraddition $+ : V \times V \to V$ und eine Skalarmultiplikation $\cdot : B \times V \to V$ und zeigen Sie, dass V mit diesen Operationen einen Vektorraum bildet.

Ich definiere die Operationen in B so (Addition als bitweises `XOR` und Multiplikation als bitweises `AND`):

a	b	$a+b$	$a \cdot b$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Die Vektoraddition + sei so definiert:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

Die Skalarmultiplikation $\cdot$ sei so definiert:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a \\ \lambda \cdot b \\ \lambda \cdot c \end{pmatrix}$$

1. zu zeigen: $(B, +, \cdot)$ ist ein Körper

1a. zu zeigen: $(B, +)$ ist eine abelsche Gruppe

- Die Kommutatitvität ist gegeben, da die Zeilen 2 und 3 dieselben Ergebnisse liefern.
- Assoziativität bzgl. + ist gegeben:
  - $(0+0)+0 = 0 = 0+(0+0)$
  - $(0+1)+0 = 1 = 0+(1+0)$
  - $(0+1)+1 = 0 = 0+(1+1)$
  - $(1+1)+1 = 1 = 1+(1+1)$
  - Alle weiteren Kombinationen lassen sich mittels Kommutativität in die gelisteten umformen.
- Das neutrale Element bzgl. Addition ist 0
- Für jedes Element in B existiert ein inverses Element:
  - 0 für 0

  - 1 für 1

1b. zu zeigen: $(B^*, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe

- Kommutativität: $1 \cdot 1 = 1 = 1 \cdot 1$ ✓
- Assoziativität: $(1 \cdot 1) \cdot 1 = 1 = 1 \cdot (1 \cdot 1)$ ✓
- neutrales Element ist 1
- inverses Element bzgl. 1 ist 1

1c. zu zeigen: Distributivgesetze bzgl. $+$ und $\cdot$ gelten

- $0 \cdot (0 + 0) = 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0$
- $0 \cdot (0 + 1) = 0 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0$
- $0 \cdot (1 + 1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1$
- $1 \cdot (0 + 0) = 0 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0$
- $1 \cdot (0 + 1) = 1 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1$
- $1 \cdot (1 + 1) = 0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1$
- Alle weiteren Kombinationen lassen sich mittels Kommutativität in die gelisteten umformen.

2. zu zeigen: die Vektorraum-Axiome sind erfüllt

V1 Abgeschlossenheit der Vektoraddition

gilt, da die Addition in B abgeschlossen ist

$a_1 \in B \land a_2 \in B \Rightarrow a_1 + a_2 \in B$

und die Vektoraddition feldweise in B geschieht

V2 Assoziativität der Vektoraddition

gilt, da die Addition in B assoziativ ist und die Vektoraddition feldweise in B durchgeführt wird

V3 neutrales Element bzgl. Vektoraddition

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+0 \\ b+0 \\ c+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

V4 inverses Element bzgl. Vektoraddition

Jeder Vektor ist das inverse Element bzgl. sich selbst: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

V5 Kommutativität bzgl. Vektoraddition

ist gegeben, da die Vektoraddition als feldweise Addition in B durchgeführt wird und Addition in B kommutativ ist.

V6 Abgeschlossenheit bzgl Skalarmultiplikation

Da die Skalarmultiplikation als feldweise Multiplikation in B durchgeführt wird und diese abgeschlossen ist, ist auch die Skalarmultiplikation abgeschlossen.

V7 und V8

Die Distributivgesetze bezüglich beider Operationen gelten, da die Operationen feldweise in B durchgeführt werden und dort die Distributivgesetze gelten.

V9

$\lambda \cdot (\mu \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} \mu \cdot a \\ \mu \cdot b \\ \mu \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot (\mu \cdot a) \\ \lambda \cdot (\mu \cdot b) \\ \lambda \cdot (\mu \cdot c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda \cdot \mu) \cdot a \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot b \\ (\lambda \cdot \mu) \cdot c \end{pmatrix} = (\lambda \cdot \mu) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

V10

$1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a \\ 1 \cdot b \\ 1 \cdot c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Alle Voraussetzungen sind erfüllt und V bildet mit den entsprechenden Operationen einen Vektorraum.