30

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} . b - 2c + d = 0 \right\}; W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} . a = d; b = 2c \right\}$$

gesucht: Basis von U

$(A,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$I_S \leftrightarrow II_S$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow rg(A,0) = 1$

$$L\ddot{O}S(A,0) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

zz. $\left(x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist Basis für U

zz. (x, y, z) sind linear unabhängig

zz. $\exists! \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}. \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich das Gleichungssystem:

$I. \lambda_1 = 0 \; II. 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \; III. \lambda_2 = 0 \; IV. \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow \exists! \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}. \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z = 0$

$\Rightarrow x, y, z$ sind linear unabhängig

zz. $LIN\{x, y, z\} = U$

✓

$\Rightarrow (x, y, z)$ ist Basis für U

gesucht: Basis für W

$a - d = 0$

$b - 2c = 0$

$\Rightarrow (A, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$L\ddot{O}S(A, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

zz. $\left(x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist Basis für W

zz. x, y sind linear unabhängig

zz. $\exists! \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \lambda_1 x + \lambda_2 y = 0$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$I. \lambda_2 = 0$

$II. 2\lambda_1 = 0$

$III. \lambda_1 = 0$

$IV. \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \exists! \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \lambda_1 x + \lambda_2 y = 0$

$\Rightarrow x, y$ sind linear unabhängig

zz. $LIN\{x, y\} = W$

✓

$\Rightarrow (x, y)$ ist Basis für W

gesucht: Basis für $U \cap W$

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} . b - 2c + d = 0; a = d; b = 2c \right\}$$

Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem:

$I. b - 2c + d = 0$

$II. a - d = 0$

$III. b - 2c = 0$

III in I einsetzen:

$0 + d = 0$

$d = 0$ (A)

A in II einsetzen:

$a - 0 = 0$

$a = 0$

$\Rightarrow$ Es gibt drei Bedingungen:

1. $a = 0$
2. $d = 0$
3. $b = 2c$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Basis für $U \cap W$