Proseminar

Lineare Algebra f. Informatik

SoSe 2020

Übungszettel 6

25. Sei $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -8 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 7 & -9 \end{pmatrix}$, $b_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $b_3 = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

    Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $Ax_1 = b_1$, $Ax_2 = b_2$ und $Ax_3 = b_3$ simultan mit dem Gauß-Algorithmus. (Hinweis: Durch geeignete Zeilenvertauschungen ist eine Lösung mit ausschließlich ganzzahligen Zwischenergebnissen möglich.)

26. Gegeben ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ und ein Vektor $v \in \mathbb{R}^4$:

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d \\ 2c - d \\ 3a - 4c + 3d \\ 6a + 4b - 6c + 3d \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

    Bestimmen Sie die Matrix der Abbildung f. Berechnen Sie anschließend das Urbild $f^{-1}(\{v\})$, also die Menge aller $x \in \mathbb{R}^4$, die durch f auf v abgebildet werden, durch Verwendung der Matrix und des Gauß-Algorithmus mit der Einschränkung, dass keine Zeilenvertauschungen verwendet werden dürfen. Überprüfen Sie die Korrektheit Ihres Ergebnisses, indem Sie für die Elemente x aus dem erhaltenen Urbild jeweils den Funktionswert $f(x)$ berechnen.

27. Seien M und N folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad N = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

    Zeigen Sie, dass M und N Teilräume des $\mathbb{R}^2$ sind und beschreiben Sie $M \cap N$.

28. Im $\mathbb{R}^3$ seien die Vektoren $a = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$ gegeben.

    Bestimmen Sie, ob c eine Linearkombination von a und b ist. Wählen Sie weiters einen geeigneten Vektor $d \in \mathbb{R}^3$ und zeigen Sie, dass d keine Linearkombination von a und b ist.