

Inngangur að líkinda ~~og~~ fræði

DEMI

1.

Leiðið fléttufræðilega út eftirfarandi jöfnu:

$$\begin{aligned}(n \text{ yfir } r) &= (n - m \text{ yfir } 0)(m \text{ yfir } r) \\ &+ (n - m \text{ yfir } 1)(m \text{ yfir } r - 1) \\ &+ \dots \\ &+ (n - m \text{ yfir } r)(m \text{ yfir } 0)\end{aligned}$$

$$\binom{n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{n-m}{k} \binom{m}{r-k}$$

fyrir $r \leq m \leq n$ og $r \leq n - m$.

ATHS.

Í fléttufræðilegri (kombinatorískri) útleiðslu er ekki notaður beinn reikningur heldur röksemdafærsla sem byggir á því að $(n \text{ yfir } r)$ táknar fjölda hlutmengja með r stök í mengi með n stök.

2.

Maður nokkur skrifar bréf til fimm stofnana, A, B, C, D og E, og skrifar því næst utan á fimm frímerkt umslög fyrir bréfin. Hann þarf svo að hengja upp úr þvottavélinni og á meðan verður syni hans ólæsum á að sópa öllum bréfunum og umslögunum niður á gólf. Þegar sonurinn er að tína þetta upp af gólfinu dettur honum það snjallræði í hug að hjálpa föður sínum. Henn setur nú eitt bréf í hvert umslag og hleypur svo með þau í póst. Reiknið líkurnar á að

- a) A fái sitt bréf
- b) A og B fái sín bréf
- c) A fái sitt en B ekki sitt
- d) minnst einn fái sitt bréf
- e) enginn fái sitt bréf

3.

Í skál eru 4 hvítar og 6 svartar kúlur. Í annarri skál 6 hvítar og 4 svartar. Valin er kúla af handahófi úr hvorri skál um sig og þær færðar milli skála. Eftir þessa tilfærslu er valin kúla af handahófi úr seinni skálinni. Hverjar eru líkurnar á að hún sé hvít?

4.

Skoðum þriggja barna fjölskyldu. Göngum út frá að kyn barnanna séu óháð og að líkurnar á að barn sé stúlka sé p þar sem p er stærra en 0 og minna en 1. Sannið að atburðirnir

A = það eru bæði stúlkur og drengir í barnahópnum

B = það er í mesta lagi ein stúlka í barnahópnum

eru óháðir ef og aðeins ef $p = 0,5$.

5.

Tveim teningum er kastað og líkurnar á öllum 36 útkomunum eru jafnar. Finnið þrjá óháða atburði A , B og C (sem hvorki eru tóma mengið eða allt útkomurúmið).

6.

Látum A og B vera ósamræmanlega atburði í tilraun, látum þá báða hafa jákvæðar líkur. Sannið að við óháðar endurtekningar á tilrauninni gerist atburðurinn A á undan atburðinum B með líkunum $P(A)/(P(A) + P(B))$.

ATH:

Atburðurinn " A gerist á undan B " er sammengi ósamræmanlegu atburðanna " $hvorki A né B$ gerist í fyrstu $n - 1$ tilraununum og A gerist í tilraun n ", $n = 1, 2, \dots$

7.

Fyrst er valin tala af handahófi úr tölunum 1, 2, \dots , 7. Ef talan k er valin er svo valin önnur tala af handahófi úr tölunum 1, 2, \dots , k . Reiknið út og setjið upp í töflu

líkurnar á því að fyrri talan sé k og seinni talan sé n .

Reiknið ennfremur út

líkurnar á því að seinni talan sé 1

og

skilyrtu líkurnar á að fyrri talan sé 3 gefið að sú seinni sé 1.

8.

Ákvarðið, í eftirfarandi tilvikum, $P(X = k)$ fyrir öll gildi k sem X getur tekið. Ef dreifingin á sér nafn dugar að geta þess.

- (a) X er fjöldi gallaðra eininga í skúffu sem inniheldur 48 einingar. Hver og ein eininganna hefur líkurnar 0,05 að vera gölluð og einingarnar eru óháðar.
- (b) X er fjöldi ása þegar 13 spil eru dregin (án skila) úr venjulegum spilastokk.
- (c) X er fjöldi kúlna í tiltekinni skál þegar n kúlur eru lagðar af handahófi í ~~skálar~~ skálar.
- (d) X er fjöldi kasta þegar tveim teningum er kastað þar til tvær sexur koma upp.
- (e) X er fjöldi litblindra í hópi 10 manna sem valdir hafa verið af handahófi (með skilum) úr flokki 100 manna þar sem 3 eru litblindir.

9.

Maður nokkur ætlar að senda tvær bækur til kunningja síns. Bækurnar kosta 1000 og 1500 krónur. Líkurnar á að pakki tapist í póstinum eru 0,1 (þetta er í Bandaríkjunum). Maðurinn þarf að gera upp við sig hvort betra sé að senda bækurnar í einum pakka eða tveim. Sendingarkostnaðurinn fyrir einn og tvo pakka er sá sami. Berið saman kostina með því að nota:

- (a) væntigildi tapsins,
- (b) líkurnar á að kunninginn fái báðar bækurnar,
- (c) líkurnar á að kunninginn fái minnst aðra bókina.

Hvað myndir þú ráðleggja manninum?

10.

Blaðasali er með 2000 krónur í grunnlaun á dag. Dag hvern fær hann 150 blöð. Sérhvert blað selst með líkunum 0,8 óháð hinum. Fyrir hvert selt blað fær hann 20 krónur.

- (a) Ákvarðið væntigildi og dreifni fyrir heildar daglaun blaðasalans.
 - (b) Ákvarðið líkindafall (probability mass function) þessara heildarlauna.
-

11.

Flugfélag selur 205 miða í flugvél með 200 sæti. Reiknað er með að líkindin á því að sérhver farþegi komi ekki í flugið séu 0,05 óháð hinum.

- (a) Hverjar eru líkurnar (nákvæmlega eða um það bil) á að of margir mæti í flugið?
 - (b) Hversu marga miða mætti selja til að líkurnar á því að of margir komi í flugið séu í mesta lagi 0,005. Og hver verður þá væntanlegur fjöldi tómlra sæta?
-

12.

Lesið er af vatnsmagnsmáli einu sinni á ári. Mælirinn er ekki nákvæmur og er mæliskekkjan normleg með væntigildi 0 og dreifni $0,0001x$ þar sem x er raunverulegt vatnsmagn í rúmmetrum. Á nokkuð er raunverulegt vatnsmagn 230 rúmmetrar. Reiknið líkurnar á því að mælirinn sýni tölu á milli 229,8 og 230,3 rúmmetra.

13.

Tæki nokkurt er samsett úr 5 óháðum þáttum sem hver um sig er með veldisdreifðan endingartíma með væntigildi 1000 klst. Hverjar eru líkurnar á:

- (a) að tiltekinn þáttur endist meira en 1500 klst?
 - (b) að nákvæmlega 3 þættir endist í meira en 1500 klst?
 - (c) að tiltekinn þáttur endist í meira en 1500 klst ef gefið er að hann endist í meira en 1000 klst?
 - (d) að nákvæmlega 3 þættir endist í meira en 1500 klst ef gefið er að nákvæmlega 4 þættir endist í meira en 1000 klst?
-

14.

Frumeind hefur minnislausan klofningstíma X mínútur, þ.e.a.s. til er c þannig að X er veldisdreifð með stika c . Miðgildi X er tala m sem er þannig að líkurnar á því að X sé fyrir neðan m eru $1/2$ (líkurnar á því að X sé fyrir ofan m eru þá einnig $1/2$).

- (a) Ákvarðið m sem fall af c .
 - (b) Hverjar eru líkurnar á að frumeindin klofni ekki fyrr en eftir km mínútur? (Hér er k einhver jákvæð tala.)
 - (c) Geislavirkt efni samanstendur af n óháðum frumeindum af þessu tagi. Látum Y vera fjölda þeirra frumeinda sem ekki hafa klofnað eftir km mínútur. Hver er líkindadreifing Y ? Hvert er væntigildi Y ?
-

Dæmi 15

Látum X og Y vera óháðar veldisstærðir með stika c . Setjum

$$V = X + Y$$

og

$$U = X/V.$$

- (a) Ákvarðið þéttleika V og þéttleika U .
 - (b) Ákvarðið samþéttleika V og U .
 - (c) Eru V og U óháðar?
-

Dæmi 16

Látum X taka gildin $-2, -1, 0, 1, 2$ með jöfnum líkum. Látum Y vera X í öðru ($Y = X^2$).

- (a) Ákvarðið samdreifni og fylgni X og Y .
 - (b) Eru X og Y óháðar?
-

Dæmi 17

Stöng sem er metri að lengd er skipt í tvennt af handahófi, p.e.a.s. brotpunkturinn X hefur jafna dreifingu á $[0, 1]$. Vinstrihlutanum er aftur skipt af handahófi, köllum nýja brotpunktinn Y .

- (a) Ákvarðið skilyrtan þéttleika Y gefið $X = x$.
- (b) Ákvarðið skilyrt væntigildi Y gefið $X = x$.
- (c) Ákvarðið skilyrta dreifni Y gefið $X = x$?
- (d) Ákvarðið væntigildi Y .
- (e) Ákvarðið dreifni Y .

18.

Viðgerðaverkstæði kaupir samskonar linsur frá tveim framleiðendum A og B í hlutföllunum 20% og 80%. Að jafnaði eru 6% linsanna frá A gallaðar en aðeins 1% frá B. Nú er linsa gripin af handahófi á verkstæðinu og reynist gölluð. Hverjar eru skilyrtu líkurnar á að hún komi frá B?

19.

Réttthyrringur hefur hliðlengdir X og Y, sem eru óháðar og báðar veldisdreifðar með stika $c = 1/2$. Ákvarðið væntigildi og dreifni flatarmáls réttthyrringsins.

20.

Innhringingar á stofnun eru innbyrðis óháðar, meðaltíðnin er jöfn og að meðaltali hringja 10 á klukkustund. Hversu lengi má símvróðurinn bregða sér frá til að líkurnar á því að enginn hringi á meðan séu 90%?

21.

Atburðirnir A og B eru ósamrýmanlegir (sundurlægir) og óháðir. Líkurnar á A eru 30%. Hverjar eru líkurnar á B?

22.

Viss gerð málmteina hefur normlega dreift þvermál með væntigildi 2,99 sm og staðalfrávik 0,004 sm. Teinarnir eru óháðir. Til þess að teinn sé nothæfur verður þvermál hans að vera minna en 3 sm.

(a) Hversu stór hluti teinanna er nothæfur?

(b) Hverjar eru líkurnar á að pakki með 50 teinum innihaldi minnst einn sem er ónothæfur?

23.

Langur og mjór teinn er brotinn í tveim punktum sem valdir eru af handahófi. Hverjar eru líkurnar á að mynda megi þríhyrning úr brotunum?