

中国科学技术大学

硕士学位论文



非局部算法在图像去噪中的应用

作者姓名 : 冯文强

学科专业 : 计算数学

导师姓名 : 李书敏 副教授

完成时间 : 二〇一一年五月

University of Science and Technology of China
A dissertation for master's degree



**The Application of the Non-Local
Algorithm in Image Denoising**

Author's Name : Wenqiang Feng

Speciality : Computational Mathematics

Supervisor : Shumin Li Associate Professor

Finished Time : May 2011

中国科学技术大学学位论文原创性和授权使用声明

本人声明所呈交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

本人授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构递交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

作者签名：_____

年 月 日

摘要

图像去噪作为一种数字图像相关应用的重要预处理步骤，尽管它已经被研究了近半个世纪，但仍然是最经典和最富有挑战性的课题之一。到目前为止，已经有许多种图像去噪算法被提出。其中绝大多数的算法都是以原始图像的正则性假设为前提的，并且在去噪过程中图像的许多细节都被光滑掉了。A. Buades 等人提出的非局部均值算法有效地克服了这些弱点。

非局部均值算法通过利用数字图像中大量的冗余信息，建立待去噪像素点邻域与搜索区域的像素点邻域的相似函数，计算搜索区域各像素点与待去噪像素点的相似度权重，然后对搜索区域内的像素点进行加权平均，从而得到去噪点的灰度值。该算法在纹理，边缘信息的保持，以及去噪效果方面是目前最好的两种算法之一，但由于非局部算法是从像素点到像素点逐个进行处理的，故其计算复杂度较大。

本文在非局部均值框架下，根据图像自身的几何特征，做了以下工作：

1. 本文引入了光滑样条估计和广义的交叉验证准则，基于小波分解给出了更为精确的噪声方差估计，这为后续的去噪步骤提供了精确的去噪参数；
2. 本文在原有基于图像邻域的灰度值计算权重的方法上，引入了相应的邻域的高斯曲率，给出了更精确的权重计算方法，提出了非局部双边滤波算法；
3. 本文基于图像几何结构的像素融合生长算法，给出了更为合理的搜索区域，提出了快速的非局部自适应滤波算法；
4. 本文最后基于非局部算子的定义，介绍了和实现了前沿的非局泛函下的非局部全变差算法。

大量的数值试验验证了本文算法在纹理，边缘信息的保持，以及去噪效果的稳健性。

关键词： 噪声方差；图像去噪；非局部均值算法；小波变换；全变差；ROF 模型；非局部算子；分裂 Bergman 算法。

ABSTRACT

As an important preprocessing step in various digital image related applications, image denoising is still one of the most classical and challenging problems, although it has been studied for nearly half a century. So far, Many methods have been proposed for image denoising. However, the most of these methods are just underlying the regularity assumptions on the original image, and the details and the fine structure are smoothed out. Non-local means (NL-means) method which proposed by Buades *et al* Effectively overcomes those weaknesses.

Digital images have a lot of redundant information, Nonlocal Means method utilizes those information redundancy to compute the similarity between the noised point and those points in the searching region, then weights averagely the similar parts of an image to reduce the noise. This method produces state-of-art texture preserving, edge preserving and denoising performance, however, the computation cost is high for its pixel-to-pixel neighborhoods matching.

In this paper, according to the geometric features of the image, we did the following work under the framework of non-local mean.

1. In this paper, we introduce a new method to provide more precise noise variance estimation based on the discrete wavelet transform, the smoothing spline estimation and generalized cross-validation criterion, which provides a more precise parameter for the follow-up works;
2. In this paper, we introduce the corresponding neighborhoods' Gaussian curvature based on the original neighborhoods' gray value to compute the wights, which constructs the nonlocal bilateral filter algorithm.
3. In this paper, we propose a new adaptive non-local means algorithm for image denoising based on the geometrical structure region via pixel region growing and merging algorithm, which Gives a more reasonable search region;
4. In this paper, we introduce and perform the nonlocal total variation algorithm based on the nonlocal operator.

Experiment results demonstrate that the proposed method is robust and efficient for image denoising.

Keywords: Noise Variance; Image Denoising; Nonlocal Means Algorithm; Wavelet

ABSTRACT

Transform; Total Variation; Nonlocal Operator

目 录

| | |
|------------------------------|-----|
| 摘要 | I |
| ABSTRACT | III |
| 目录 | V |
| 第 1 章 绪论 | 1 |
| 1.1 图像的基本表示 | 1 |
| 1.1.1 图像作为离散空间定义的函数 | 1 |
| 1.1.2 图像作为矩阵 | 1 |
| 1.1.3 图像作为向量 | 1 |
| 1.1.4 图像作为连续空间定义的函数 | 2 |
| 1.2 图像噪声模型及其分类 | 2 |
| 1.2.1 根据噪声的来源分类 | 2 |
| 1.2.2 根据噪声的性质分类 | 3 |
| 1.2.3 根据与图像的关系分类 | 5 |
| 1.3 图像去噪质量评价准则 | 6 |
| 1.3.1 客观评价方法 | 6 |
| 1.3.2 主观评价方法 | 7 |
| 1.4 全文组织结构 | 7 |
| 第 2 章 图像去噪方法概述 | 9 |
| 2.1 空间域去噪方法 | 9 |
| 2.1.1 平滑线性滤波 | 9 |
| 2.1.2 排序统计滤波 | 11 |
| 2.1.3 基于 PDE 的去噪法 | 12 |
| 2.2 频率域去噪方法 | 12 |
| 2.2.1 基于 Fourier 变换去噪法 | 12 |
| 2.2.2 基于 Wiener 滤波去噪法 | 13 |
| 2.2.3 基于小波变换去噪法 | 14 |
| 2.3 本章小结 | 15 |
| 第 3 章 图像噪声方差估计 | 17 |
| 3.1 二维小波分解算法 | 17 |
| 3.2 Donoho 估计算法 | 18 |

| | |
|-----------------------------------|----|
| 3.3 基于离散小波变换的光滑样条估计 | 19 |
| 3.4 数值结果 | 24 |
| 3.5 本章小结 | 24 |
| 第 4 章 非局部滤波去噪算法 | 27 |
| 4.1 非局部均值滤波去噪算法 | 27 |
| 4.2 非局部双边滤波去噪算法 | 28 |
| 4.2.1 数值结果 | 29 |
| 4.3 自适应非局部均值去噪算法 | 30 |
| 4.3.1 种子像素生长融合算法 | 31 |
| 4.3.2 基于像素融合生长的自适应非局部均值去噪算法 | 31 |
| 4.3.3 数值结果 | 33 |
| 4.4 本章小结 | 37 |
| 第 5 章 非局部全变差去噪算法 | 41 |
| 5.1 全变差去噪算法 | 41 |
| 5.1.1 全变差去噪模型 | 41 |
| 5.1.2 全变差去噪算法数值格式 | 42 |
| 5.1.3 数值结果 | 44 |
| 5.2 非局部全变差去噪算法 | 47 |
| 5.2.1 非局部算子的定义和非局部全变差模型 | 47 |
| 5.2.2 非局部全变差去噪算法 | 48 |
| 5.2.3 非局部全变差去噪算法数值格式 | 49 |
| 5.3 本章小结 | 50 |
| 第 6 章 总结与展望 | 51 |
| 参考文献 | 53 |
| 致 谢 | 57 |
| 攻读硕士学位期间发表的学术论文 | 59 |

表 格

| | | |
|-----|--------------------------------------------------|----|
| 1.1 | MOS 图像质量平均意见指数表 | 8 |
| 3.1 | Donoho 估计方法与光滑样条估计对比 | 25 |
| 4.1 | 非局部双边滤波算法和带搜索区域的非局部均值算法 PSNR 效果 对比表 | 29 |
| 4.2 | 非局部双边滤波和其他滤波对于乘性噪声去噪效果对比表 | 31 |
| 4.3 | ONL 算法和 ANL 算法对于高斯白噪声 PSNR 对比表 | 35 |
| 4.4 | NLR 算法和 ANL 算法对于高斯白噪声 PSNR 对比表 | 36 |
| 4.5 | ANL 算法对于高斯白噪声 PSNR 数据表 | 38 |
| 5.1 | 全变差算法对于高斯白噪声 PSNR 数据表 | 44 |
| 5.2 | 全变差算法对于高斯白噪声 PSNR 数据表 | 47 |

插 图

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 含高斯噪声的图像 | 3 |
| 1.2 含椒盐噪声的图像 | 4 |
| 2.1 领域示意图 | 10 |
| 3.1 小波分解示意图 | 17 |
| 3.2 Lenna 三层小波分解 | 18 |
| 3.3 最优 λ 的迭代过程及其相应的噪声方差 | 25 |
| 3.4 噪声方差估计模拟结果, $\sigma = 30$. 左: 噪声方差结果, 右: 残差 | 25 |
| 4.1 权重示意图 | 27 |
| 4.2 NLR 算法和 NLB 算法对于方差为 $\sigma = 40$ 的去噪效果图。左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左中: 由 NLR 算法恢复图像, PSNR=25.70, 右中:NLR 算法的方法噪声, 左下: NLB 算法恢复图像, PSNR=28.00, 右下: NLB 算法的方法噪声。 | 30 |
| 4.3 NLB 对 SAR 图像去噪效果图左上: 原始的 SAR 图像: 小桥 (river) , 右上: 原始 SAR 田野 (terra) , 左中: NLB 算法对小桥的去噪图, 右中: NLB 算法对田野的去噪图, 左下: NLB 算法对小桥的方法噪声, 右下: NLB 算法对田野的方法噪声 | 32 |
| 4.4 种子像素生长融合区域示意图 | 32 |
| 4.5 ONL, NLR, ANL 三种算法的耗费时间 | 33 |
| 4.6 ONL 算法对于 $\sigma = 40$ 高斯噪声去噪效果图。左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: ONL 去噪图像 PSNR=24.20, 右下: 方法噪声 | 34 |
| 4.7 Results of the ANL 算法对于 $\sigma = 40$ 高斯噪声去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: ANL 去噪图像 PSNR=28.02, 右下: 方法噪声 | 35 |
| 4.8 NLR 算法在 $\sigma = 70$ 时的去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: NLR 去噪图像 PSNR=24.07, 右下: 方法噪声 | 36 |
| 4.9 ANL 算法在 $\sigma = 70$ 去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: ONL 去噪图像 PSNR=25.97, 右下: 方法噪声 | 37 |
| 4.10 ONL 算法对于 $\sigma = 40$ 的椒盐噪声去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: ONL 去噪图像 PSNR=15.46, 右下: 方法噪声 | 38 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.11 ANL 算法对于 $\sigma = 40$ 的椒盐噪声去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: ONL 去噪图像 $PSNR=20.05$, 右下: 方法噪声 | 39 |
| 4.12 ANL 算法对于 $\sigma = 20$ 的椒盐噪声去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: ONL 去噪图像 $PSNR=23.06$, 右下: 方法噪声 | 40 |
| 4.13 ONL, NLR, ANL 三种算法的平均 PSNR 图 | 40 |
| 5.1 不动点迭代全变差算法对于 $\sigma = 20$ 的椒盐噪声去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: 全变差去噪图像 $PSNR=30.5203db$, 右下: 方法噪声 | 45 |
| 5.2 全变差算法每步迭代后的能量 | 45 |
| 5.3 分裂的 Bregman 算法对于 $\sigma = 20$ 的高斯噪声去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: 全变差去噪图像 $PSNR=30.7798db$, 右下: 方法噪声 | 46 |
| 5.4 不动点迭代全变差算法与分裂的 Bregman 算法消耗时间对比 | 46 |

第1章 绪论

自20世纪80年代以来，计算机技术得到了迅猛发展，为利用计算机实现图像分析和处理的学科领域—数字图像处理学科的发展奠定了物质基础。由于数字图像处理在现实生活中的广泛应用，使得数字图像处理学科已成为信息技术中的最重要的学科分支之一。

图像处理是一门交叉性学科，它与相邻的学科（如模式识别、计算机视觉等）之间不存在明确的分界。图像中的“图”是物体透射或反射光的分布，是客观存在的，“像”是人的视觉系统对图在大脑中形成的印象或认识，是人的感觉。图像是图和像的有机结合，既反映物体的客观存在，有体现人的心理因素，是客观对象的一种可视表示，它包含了被描述对象的有关信息。本章将给出一些图像和图像噪声的基本知识。

1.1 图像的基本表示

根据图像空间坐标和幅度的连续性，图像可以分为模拟图像和数字图像。模拟图像是空间坐标和幅度都连续变化的图像，而数字图像是空间坐标和幅度都是用离散的数字表示的图像。最常见的几种离散表示和连续表示如下

1.1.1 图像作为离散空间定义的函数

最简单的描述图像的方式就是采用记号 $I(m, n)$ ，就是把图像 I 看做定义在点 (m, n) 处的像素值；像素值 $I(m, n)$ 一般隶属于集合 $0, 1, 2, \dots, 2^q - 1$ ，而定义域为 $(m, n) \in 1, 2, \dots, M \times 1, 2, \dots, N$ 。此时称图像 $I(m, n)$ 是尺寸为 $M \times N$ q 位图像。

1.1.2 图像作为矩阵

也可以把图像 I 理解成一个 $M \times N$ 的矩阵

$$I = \begin{bmatrix} f(1, 1) & f(1, 2) & \cdots & f(1, N) \\ f(2, 1) & f(2, 2) & \cdots & f(2, N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(M, 1) & f(M, 2) & \cdots & f(M, M) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

1.1.3 图像作为向量

利用离散函数的观念，注意到图像矩阵 I 具有 MN 个自由变动的元素，又

称其为 MN 的图像。它可以用一个 MN 维的列向量 I 来表示

$$I = \{f(1, 1), f(1, 2), \dots, f(M, 1), f(2, 1), \dots, f(M, M)\} \quad (1.2)$$

1.1.4 图像作为连续空间定义的函数

把图像看做函数 $I(x, y)$, 这里的 (x, y) 可以是定义在整个二维平面上的点, 也可以是定义在平面的一个矩形子集

$$\Omega = (0, L) \times (0, H) \quad (1.3)$$

内的点。采用连续空间形式的表述, 由于可以方便地使用微积分, 更加便于在理论上算法的提出和进行算法性能的分析。

1.2 图像噪声模型及其分类

在图像处理中经常使用的基本模型是

$$v(i, j) = K * u(i, j) + n(i, j) \quad (1.4)$$

这里的 v 是传感器获得的含有噪声 n 的图像。 K 模糊算子, 已知或者未知, 或者只有部分信息。当 K 为恒等算子的时候, 该问题就退化成单纯的去噪问题。图像去噪的基本任务就是从含有噪声的图像 v 中恢复出真实的图像 u 。

噪声一般都被理解为某种或许多种非确定性因素造成的。噪声的种类很多, 也有多种分类方式。

1.2.1 根据噪声的来源分类

1. 人为噪声。

人为噪声是指人类活动所产生的对通信造成干扰的各种噪声。其中包括工业噪声和无线电噪声。工业噪声来源于各种电气设备, 如开关接触噪声、工业的点火辐射及荧光灯干扰等。无线电噪声来源于各种无线电发射机, 如外台干扰、宽带干扰等。

2. 自然噪声。

自然噪声是指自然界存在的各种电磁波源所产生的噪声。如雷电、磁暴、太阳黑子、银河系噪声、宇宙射线等。可以说整个宇宙空间都是产生自然噪声的来源。

3. 内部噪声。

内部噪声是指通信设备本身产生的各种噪声。它来源于通信设备的各种电子器件、传输线、天线等。如电阻一类的导体中自由电子的热运动产生的热噪

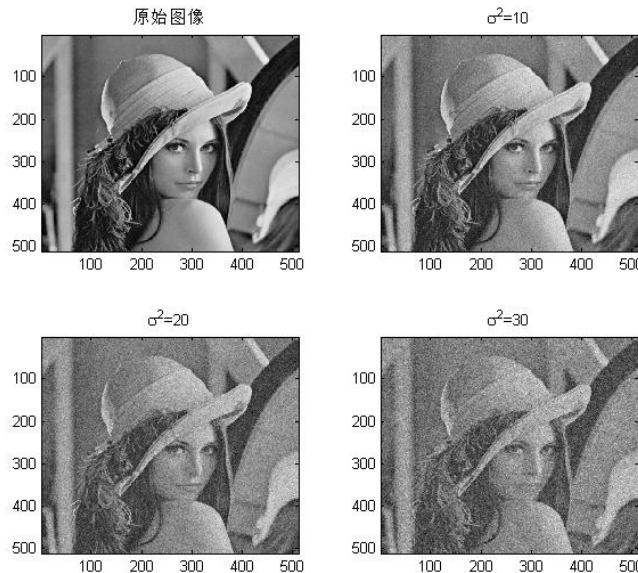


图 1.1 含高斯噪声的图像

声、电子管中电子的起伏发射或晶体管中载流子的起伏变化产生的散弹噪声等。

1.2.2 根据噪声的性质分类

根据噪声在各个像素点的密度估计，噪声可以分为高斯噪声、椒盐噪声、重尾分布噪声。

1. 高斯噪声

高斯噪声（图 1.1）是一种具有高斯分布概率密度函数的噪声。换句话说，高斯噪声的值 n 遵循高斯分布或者它在各个频率分量上的能量具有高斯分布。它被及其普遍地应用为用以产生加成性高斯白噪声（AWGN）的迭代白噪声。其概率密度函数为：

$$n \sim N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1.5)$$

其中， n 表示灰度值， μ 表示 n 的数学期望， σ^2 表示 n 方差。理论上噪声 n 取值范围无限制，但是在工程上把噪声的范围理解为 $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ 。根据概率论中的结论，在区间 $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ ，噪声的分布面积大约是 70%，在区间 $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ ，噪声的分布面积大约是 95%。后文中，我们将用噪声的方差 σ^2 来度量噪声的大小。

2. 椒盐噪声

椒盐噪声（图 1.2）描述的是图像双极型噪声。只有个别像素上有噪声，但

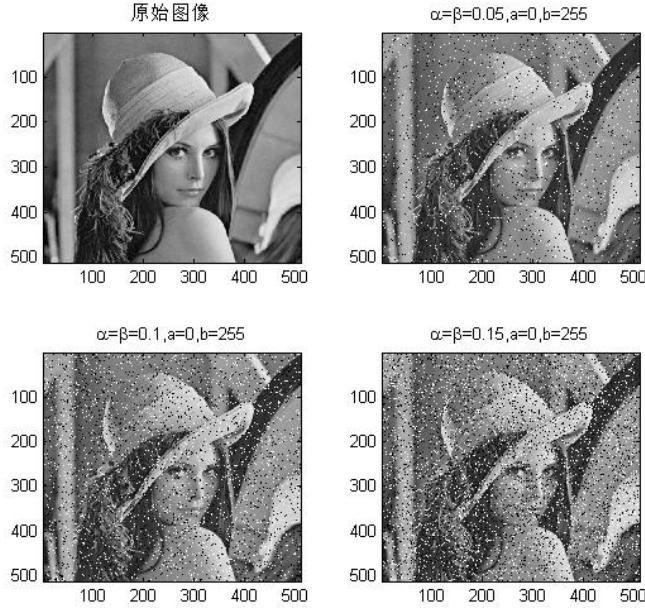


图 1.2 含椒盐噪声的图像

是这些噪声的效应不是简单的叠加上去的。对于图像像素 u , 椒盐噪声 n 的概率密度函数为

$$p(v) = \begin{cases} \alpha & v = u \\ \beta & v = a \\ \gamma & v = b \end{cases}$$

其中, $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 。通常模型是直接对噪声进行刻画, 而此模型是对椒盐噪声污染后的图像进行统计描述, 带噪声的像素只会出现两种取值: a 或 b 。

3. 重尾分布噪声

在许多情况下, 如产生噪声的因素不是相互独立, 或参与求和的项不是足够多等。在此情况下噪声只能粗略的定义为高斯模型。

定义 1.1 (重尾分布^[35])。噪声分布的中心部分接近于高斯分布, 但是在分布的尾部, 即

$$\int_{y \geq |n|} f(y) dy \quad (1.6)$$

随着 $n \rightarrow \infty$ 的衰减比高斯噪声分布的情形要慢, 把这类分布成为重尾分布。

常见的重尾分布有以下几种

1. 混合高斯噪声

两个高斯分布分别符合 $p_1(n) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $p_2(n) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 则混合高斯噪声的密度函数为

$$p_\alpha(n) = \alpha p_1(n) + (1 - \alpha)p_2(n) \quad (1.7)$$

2. 广义高斯噪声

广义高斯噪声的概率密度函数为

$$p(n) = A \exp(-\beta |n - \mu|^\alpha) \quad (1.8)$$

其中 $p(n)$ 的值, 通过调节 α 、 β 、 μ 来得到。

3. Laplace 噪声

Laplace 噪声的概率密度函数为

$$p(n) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left[-\frac{|n - \mu|}{\sigma}\right] \quad (1.9)$$

4. 负指数噪声

负指数噪声的概率密度函数为

$$p(n) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{n}{\mu}\right) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

合负指数分布常用来描述斑纹, 合成孔径雷达的图像中的斑纹符合这一分布。

5. Γ 噪声

Γ 噪声, 又成为 Erlang 噪声, 其概率密度为

$$p(n) = \begin{cases} \frac{a^b n^{b-1}}{\Gamma(b)} \exp(-an) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

其中参数 $a > 0, b$ 都是正数。该噪声的数字特征为

$$E(n) = \frac{b}{a}, \quad \sigma^2(n) = \frac{b}{a^2} \quad (1.12)$$

6. Cauchy 噪声

Cauchy 噪声的概率密度函数为

$$p(n) = \frac{\alpha}{\pi(a^2 + n^2)} \quad (1.13)$$

1.2.3 根据与图像的关系分类

根据噪声与图像的关系, 噪声可以分为两类: 加性噪声和乘性噪声。

1. 加性噪声

加性噪声虽然独立于有用信号,但它却始终存在,干扰有用信号,因而不可避免地对通信造成危害。其模型可以定义为

$$v(i) = u(i) + n(i) \quad (1.14)$$

2. 乘性噪声

乘性噪声一般是由信道不理想引起,它们依存于信号,也就是说,当没有信号输入时就不会有乘性噪声,其模型可以定义为

$$v(i, j) = u(i, j)(1 + n(i, j)) \quad (1.15)$$

1.3 图像去噪质量评价准则

图像质量的评价准则主要是用来评价图像处理算法或是图像编码的质量,评价图像质量的方法主要分为客观评价和主观评价两大方面。

1.3.1 客观评价方法

客观评价法主要是通过计算一些反映图像特性的数字值量化指标或通过描绘能反映图像自身性能的曲线来评价图像处理效果的方法。常用的量化指标有均方差 (Mean Square Error, MSE)、信噪比 (Signal-to-Noise Ratio, SNR)、峰值性噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 和归一化互相关 (Normalized Cross-Relation, NCR)。假定原始图像为 $I(i, j)$, 噪声为 $I_n(i, j)$, 去噪后的图像为 $\tilde{I}(i, j)$, 图像尺寸为 $M \times N$ 。

1. 均方差 (MSE)

均方差是估计值与被估计量的差平方的期望值。

$$MSE = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |\tilde{I}(i, j) - I(i, j)|^2 \quad (1.16)$$

2. 信噪比 (SNR)

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_s}{P_n} \right) \quad (1.17)$$

其中信号能量 P_s 和噪声能量 P_n

$$P_s = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (I - mean(I))^2; \quad P_n = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N I_n^2$$

3. 峰值性噪比 (PSNR)

$$PSNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{(Peak)^2}{MSE} \right) \quad (1.18)$$

其中 $Peak$ 表示图像点颜色的最大数值，如果每个采样点用 8 位表示，那么就是 255。更为通用的表示是，如果每个采样点用 B 位线性脉冲编码调制表示，那么 $Peak = 2^B - 1$ 。峰值信噪比是以分贝（dB）为计量单位的。

4. 归一化互相关 (NCR)

$$NCR = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N I(i, j) \tilde{I}(i, j)}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N I^2(i, j)}$$

本文中主要选取信噪比和峰值信噪比作为客观评价准则。

1.3.2 主观评价方法

尽管客观准则能够简单方便地评估出图像的质量，但是客观评价标准往往是以函数（波形）为基础来评价图像的，虽常用但是实则是一种失真的评价方法。它仅仅将图像看做一个数学函数，进行的是函数逼近意义喜爱的失真评价。这种评价主要是围绕随机误差进行的，而忽略了图像的认知特点。基于图像认知特点的主观评价标准主要有，方法噪声（Method Noise）、平均指数法和图像指数法。

1. 方法噪声

定义 1.2 (方法噪声^[10]). 设 I 是图像， D_h 是依赖于 h 的去噪算子. 则图像 I 的方法噪声定义为 I 和经去噪算子作用后的图像的差：

$$n(D_h, v) = I - D_h I \quad (1.19)$$

方法噪声也称为残差，方法噪声分析也称为残差分析。去噪后，我们希望图像的方法噪声尽可能地接近白噪声，而且希望方法噪声尽可能的小。

2. 主观 MOS 模型评价准则

MOS (Mean Opinion Score) 被称为平均意见指数方法，是一种基于认知的图像评价方法。MOS 是在国际电信联盟的无线电分委会确定的电视图像质量主观评价方法中建立的。它对图像的评价等级如表 1.1 所示。

本文的图像去噪的评价准则主要选取客观评价准则中的 MSE, SNR , PSNR 和主观评价准则中的方法噪声。

1.4 全文组织结构

本文的主要章节的安排如下：第一章主要介绍了图像的基本表示，图像的噪声模型，以及评判去噪算法的图像质量评价准则；第二章主要介绍了图像去噪算法的基本概念、理论以及相关的一些经典去噪算法的讨论；第三章主要阐述了基于邻域的灰度值和相应的邻域的高斯曲率给出了更精确的权重计算方法，

表 1.1 MOS 图像质量平均意见指数表

| 指数 | 舒适度 | impairment |
|----|-------------|-------------------------------|
| 5 | 无察觉 | imperceptible |
| 4 | 有感知，但没有不舒适感 | perceptible, but not annoying |
| 3 | 略讨厌 | slightly annoying |
| 2 | 讨厌 | annoying |
| 1 | 非常讨厌 | very annoying |

提出了非局部双边滤波算法；第四章则着重讨论基于几何结构的像素融合生长算法给出了更为快速的非局部自适应算法；第五章主要是研究非局部全变差算法。最后通过实验考证其有效性；而在第六章给出了工作的总结与展望。

第2章 图像去噪方法概述

图像去噪作为一种数字图像相关应用的重要预处理步骤，尽管它已经被研究了近半个世纪，但其仍然是最经典和最富有挑战性的问题之一。到目前为止，已有许多种图像去噪算法被提出。本章将简要介绍现在一些常用的图像去噪方法。现有的图像处理的方法大致可以分为基于空间域的去噪方法，如平滑线性滤波、统计线性滤波和基于 PDE 的去噪方法和基于频率域的去噪方法，如基于 Fourier 变换去噪法、基于 Wiener 滤波去噪法、基于小波变换去噪法和基于 SVD 去噪法。

2.1 空间域去噪方法

基于空间域的去噪方法是直接对图像的像素灰度值进行操作。常见的基于空间域的滤波器有几大类，包括平滑线性滤波、统计线性滤波、自适应均值滤波器和基于 PDE 的去噪方法和基于频率域的去噪方法。

2.1.1 平滑线性滤波

平滑线性滤波实际上代表一大类基于空间域的滤波，其中最常见的是均值滤波^{[16][35][39]}。它将含噪声的图像中一个像素用其邻域内的像素点的灰度值得平均值来代替该点的灰度值。

定义 2.1 (n- 邻域). 称集合 $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_k\}_{k \in I}$ 为 $I(i, j)$ 的 n- 邻域若，

1. $\mathcal{N}_k \in (I(i, j) - \delta, I(i, j) + \delta)$
2. 集合 \mathcal{N}_k 的元素为 n

常用的有 4- 领域（图 2.1 左）和 8- 领域（图 2.1 右）。

1. 算术均值滤波

给定一个 $m \times n$ 模板，它所覆盖的图像 $I(i, j)$ 里以 (i, j) 为中心的区域 \mathcal{N} 的算术平均值为

$$\bar{I}(i, j) = \frac{1}{mn} \sum_{(p, q) \in \mathcal{N}} I(p, q) \quad (2.1)$$

值得注意的，该滤波器在消除一些噪声的同时也模糊了图像。其中常用的模板有

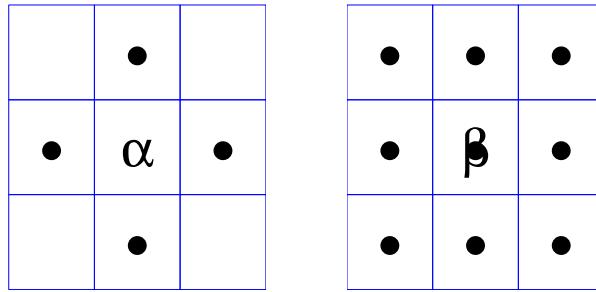


图 2.1 领域示意图

4- 邻域模板:

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8- 邻域模板:

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 几何均值滤波

根据几何均值的定义, 用几个均值得到的去噪后的图像 $\hat{I}(i, j)$ 为

$$\hat{I}(i, j) = \left[\prod_{(p,q) \in \mathcal{N}} I(p, q) \right]^{\frac{1}{mn}} \quad (2.2)$$

几何均值滤波对图像的平滑作用与算术均值滤波相当, 但它相比算术均值滤波能在去噪的过程中保持更多的细节。

3. 谐波均值滤波

根据谐波均值的定义, 用谐波均值得到的去噪后的图像 $\hat{I}(i, j)$ 为

$$\hat{I}(i, j) = \frac{mn}{\sum_{(p,q) \in \mathcal{N}} \frac{1}{I(p, q)}} \quad (2.3)$$

谐波均值滤波对高斯噪声有较好的去噪效果。但是对椒盐噪声的两部分作用不对称, 对盐噪声的滤除效果要比对椒噪声好的多。

4. 逆谐波均值滤波

逆谐波均值是一种比较通用的均值类滤波方法, 由它得到的恢复图像 $\hat{I}(i, j)$ 为

$$\hat{I}(i, j) = \frac{\sum_{(p,q) \in \mathcal{N}} I(p, q)^{k+1}}{\sum_{(p,q) \in \mathcal{N}} I(p, q)^k} \quad (2.4)$$

其中 k 为滤波器的阶数。逆滤波均值滤波对椒盐噪声的滤除效果比较好，但不能同时滤除椒噪声和盐噪声。当 $k > 0$ 时，滤波器可以滤除椒噪声；当 $k < 0$ 时，滤波器可以滤除盐噪声。另外，当 $k = 0$ ，逆谐波均值滤波退化为算术滤波，当 $k = -1$ 时，逆谐波均值滤波退化为谐波均值滤波。

2.1.2 排序统计滤波

排序统计滤波又称百分比滤波，是另一大类空间域滤波。排序统计滤波基于对模板所覆盖的像素的灰度值进行排序，根据某一确定的百分比选取排序后序列中的像素值为去噪后的值。中值滤波、最大值和最小值滤波和中点滤波是比较典型的排序统计滤波。

1. 中值滤波

中值滤波用模板所覆盖的区域中像素的中间值作为输出结果

$$\hat{I}(i, j) = \text{median}_{(p,q) \in \mathcal{N}} I(p, q) \quad (2.5)$$

中值滤波对消除脉冲噪声有比较好的效果。

2. 最大值和最小值滤波

根据特定的应用，可以去序列里的任意值作为输出结果。如果选取序列的最大值，即排序为 100% 的那个值，就得到最大值滤波

$$\hat{I}(i, j) = \max_{(p,q) \in \mathcal{N}} I(p, q) \quad (2.6)$$

最大值滤波可以用来检测图像中的最亮的点，并可以减弱低取值的噪声，因此最大值滤波对消除椒噪声比较有效。

如果取序列的最小值，即排序为 0% 的那个值，就得到最小值滤波

$$\hat{I}(i, j) = \min_{(p,q) \in \mathcal{N}} I(p, q) \quad (2.7)$$

最小值滤波可以用来检测图像中的最暗的点，并可以减弱高取值的噪声，因此最大值滤波对消除盐噪声比较有效。

3. 中点滤波

中点滤波是将最大值滤波和最小值滤波结合使用，其取最大值和最小值中点的像素的灰度值作为输出值

$$\hat{I}(i, j) = \frac{1}{2} [\max_{(p,q) \in \mathcal{N}} I(p, q) + \min_{(p,q) \in \mathcal{N}} I(p, q)] \quad (2.8)$$

中点滤波选取了最大值滤波和最小值滤波的平均值，可以认为结合了排序统计计算和平均计算。中点滤波对消除多种随机分布噪声，如高斯噪声和均匀随机噪声都比较有效。

2.1.3 基于 PDE 的去噪法

在图像处理和计算机视觉中，系统地采用偏微分方程（Partial Differential Equations, PDE）方法是近十多年发展起来的信邻域^{[5][9][34]}。

基于 PDE 的图像去噪的基本思想是，在图像的连续数学模型上，令图像遵循某一指定的 PDE 发生变化，而 PDE 的解，就是去噪后的输出值。基于 PDE 的图像处理方法的最主要的步骤就是建立一个合乎处理要求的偏微分方程。常用的建模方法有：1. 建立能量泛函，通过变分法，得到 Euler-Lagrange 方程，比如经典的 ROF 模型^{[27][28]}(我们将在第 5 章做详细的讨论)；2. 将所期望实现的图像变化与某种物理过程进行类比，如将图像的平滑处理与杂质的扩散类比，建立对应的 PDE，如 Perona-Malik 模型^{[26][9]}。

2.2 频率域去噪方法

在频域中，频率越大说明原始信号变化速度越快；频率越小说明原始信号越平缓。当频率为 0 时，表示直流信号，没有变化。因此，频率的大小反应了信号的变化快慢。高频分量解释信号的突变部分，而低频分量决定信号的整体形象。在图像处理中，频域反应了图像在空域灰度变化剧烈程度，也就是图像灰度的变化速度，也就是图像的梯度大小。对图像而言，图像的边缘部分是突变部分，变化较快，因此反应在频域上是高频分量；图像的噪声大部分情况下是高频部分；图像平缓变化部分则为低频分量。

基于频率域的去噪方法是在图像的变换域中，对图像的变换值进行操作，然后经逆变换获得去噪图像。常见的基于空间域的滤波器有几大类，包括基于 Fourier 变换去噪法、基于 Wiener 滤波去噪法、基于小波变换去噪法和基于 SVD 去噪法。

2.2.1 基于 Fourier 变换去噪法

Fourier 变换是信号分析的强有力的工具，它为信号在时域（Time Domain）和频域（Frequency Domain）的表达之间的转换。它的连续形式为

$$\hat{s}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.9)$$

其中 ω 称为角频率。逆变换（IFT）为

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(\omega)e^{j\omega t} dt \quad (2.10)$$

它的离散形式（DFT）为

$$S_k = \sum_{n=0}^{k-1} s_n e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (2.11)$$

其逆变换为

$$s_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_k e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (2.12)$$

在图像处理中, 对图像数据 $f(x, y), (x = 0, 1, \dots, M-1; y = 0, 1, \dots, N-1)$ 。则其离散傅立叶变换定义可表示为:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp \left[-i2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] \quad u = 0, \dots, M-1; v = 0, \dots, N-1 \quad (2.13)$$

其逆变换为

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F(u, v) \exp \left[i2\pi \left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right) \right] \quad u = 0, \dots, M-1; v = 0, \dots, N-1 \quad (2.14)$$

在本文中, 选择的是方形数据, 即 $M = N$ 。

影像 $f(x, y)$ 的振幅谱或傅立叶频谱:

$$|F(u, v)| = \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)} \quad (2.15)$$

相位谱:

$$\varphi(u, v) = \arctan \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \quad (2.16)$$

能量谱 (功率谱) :

$$E(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v) \quad (2.17)$$

其中 $R(u, v) = \text{Re}\{F(u, v)\}$, $I(u, v) = \text{Im}\{F(u, v)\}$

2.2.2 基于 Wiener 滤波去噪法

Wiener 滤波是 Wiener 于 1942 年提出的对于线性图像恢复的经典模型, 也是一个典型最小二乘滤波。Wiener 滤波是基于退化函数和噪声统计特征来对图像进行恢复。Wiener 滤波的目标就是寻求一个恢复的图像 \hat{f} , 让其与原始图像 f 之间的均方差最小, 即

$$e^2 = E\{(f - \hat{f})^2\} \quad (2.18)$$

其中 E 是期望算子。式 2.19 在频率域的解为

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + \frac{S_\eta(u, v)}{S_f(u, v)}} \right] F(u, v) \quad (2.19)$$

其中 $H(u, v)$ 为退化函数, $H^*(u, v)$ 为 $H(u, v)$ 的复共轭矩阵。

$$|H(u, v)|^2 = H^*(u, v)H(u, v)$$

噪声的功率谱:

$$S_\eta(u, v) = |N(u, v)|^2$$

未退化图像的功率谱:

$$S_f(u, v) = |F(u, v)|^2$$

采用 Wiener 滤波的去噪过程如下:

1. 对图像 $f(x, y)$ 利用二维离散 Fourier 变换, 得到 $F(u, v)$;
2. 计算点扩散函数 $h_w(x, y)$ 的二维离散 Fourier 变换;
3. 计算图像的功率谱 $S_f(u, v)$ 和噪声谱密度 $S_\eta(u, v)$ ¹;
4. 根据公式 2.19 计算图像估计值 $\hat{F}(u, v)$;
5. 根据二维离散逆 Fourier 变换, 计算图像估计值 $\hat{F}(u, v)$ 的逆变换, 得到恢复后的图像 $\hat{f}(u, v)$ 。

2.2.3 基于小波变换去噪法

小波变换是继 Fourier 变换后的一重大突破, 它是一种窗口面积恒定、窗口形状可变(时间域窗口和频率域窗口均可改变)的时频局域化分析方法, 它具有这样的特性; 在低频段具有较高的频率分辨率及较低的时间分辨率, 在高频段具有较高的时间分辨率及较低的频率分辨率, 实现了时频窗口的自适应变化, 具有时频分析局域性。小波变换的一个重要应用就是图像信号去噪。将小波变换用于信号去噪, 它能在去噪的同时而不损坏信号的突变部分。在过去的十多年, 小波方法在信号和图像去噪方面的应用引起学者广泛的关注。

一维小波变换 (Wavelet Transform, WT) 的定义为

定义 2.2(小波变换). 设 $\psi(x)$ 是一个有足够阶导数(光滑性)的带通函数, 对任意一维信号 $f(x)$ 的积分变换:

$$Wf(b, a) = \left\langle f(x), \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \quad (2.20)$$

称为小波变换, 或者称作连续小波变换。

小波应用于图像去噪的基本思路为: 把小波变换记为 W , 逆变换记为 W^{-1} , 图像极为 f , 则基于小波的图像处理, 主要针对小波域的数据进行调整, 把这

¹在实际操作中对于 $S_\eta(u, v)$, 都是进行估算的, 即在图像上找一块恒定灰度的区域, 然后测定区域灰度图像的功率谱作为 $S_\eta(u, v)$ 。

个调整的过程记为 T_λ , 其中 λ 是参数, 则经过小波变换域调整后的数据成为 $T_\lambda Wf$, 最终去噪后的图像为 $W^{-1}T_\lambda Wf$ 。

小波图像去噪效果比经典的方法要好, 实际应用中将小波和经典的方法结合起来, 去噪效果往往更好, 优于单独的小波去噪或经典方法。小波图像去噪与经典方法的结合主要有以下几种:

1. 小波变换与维纳滤波器或中值滤波等结合起来;
2. 将小波变换、小波收缩、小波压缩与广义验证法结合起来去噪;
3. 利用聚类分析和小波变换结合起来进行去噪;
4. 将小波与 PDE 结合起来去噪, 在去噪的同时较好的解决了突变边缘的问题。

2.3 本章小结

图像去噪作为一种数字图像相关应用的重要预处理步骤, 尽管它已经被研究了近半个世纪, 但其仍然是最经典和富有挑战性的问题之一。到目前为止, 已有许多中图像去噪算法被提出。本章对现有的一些经典的图像去噪的方法做了详细的介绍。本章从空间域去噪方法和频率域去噪方法两大方面详细阐述了现有的常用的去噪方法, 以及这些方法适合消除的噪声类型。

第3章 图像噪声方差估计

图像噪声方差的大小是一个重要的去噪参数，其精确度直接影响着最后的去噪效果。到目前为止，对于噪声方差 σ 的估计，已经有多种方法被提出。这些方法大致上可以分为两大类：基于频域^[13] 和基于空间域^{[3][6][4]}。基于频域的方法，主要先对含噪声的图像做离散变换，然后用近似只含噪声的子带来做噪声方差的估计；基于空间域的方法，主要是先将含噪声的图像，按一定的大小分割成一个图像序列，然后对每个小块做估计，最后根据概率分布得到整体的噪声方差。Olsen 在^[23] 中，给出了一系列的噪声方差估计的对比。本章将着重介绍基于频域的噪声方差估计。

3.1 二维小波分解算法

一维的小波变换可以通过两对低通和高通滤波器来实现，而二维小波分解可以采用类似的方法，通过张量积形式来建立。所谓的张量积形式，大体上相当于对图像在水平上进行一次一维的处理，然后对结果再进行一次垂直方向上的一维处理。当然，两个方向上的次序是可以交换的。

通过张量积小波分解，从一维小波分解建立起二维图像 $f(x, y)$ 的小波分解为

$$f(x, y) = \sum_{\alpha} \sum_{d, m, n} c_{d, m, n}^{\alpha} \psi_{d, m, n}^{\alpha} \quad (3.1)$$

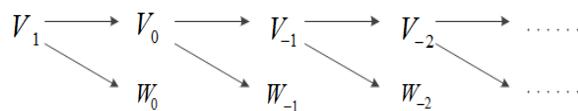


图 3.1 小波分解示意图

借助小波分解 Mallat 算法里的正交投影：

正交投影 $P_J(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$

$$P_J f(x) = \sum_n \langle f, \tilde{\phi}_{J, n} \rangle \phi_{J, n}(x) \quad (3.2)$$

正交投影 $Q_J(\mathbb{R}) \rightarrow W_j$

$$Q_J f(x) = \sum_n \langle f, \tilde{\psi}_{J, n} \rangle \psi_{J, n}(x) \quad (3.3)$$

我们可以得到多尺度分析 V_J 和相应的小波空间 W_J (如图 3.1)。

定义 3.1. 假如 ϕ 生成了多尺度分析 V_J 和相应的小波空间，则张量积形式的多尺度分析由以下的子空间序列构成：

$$LL_{-J} = V_J^x \otimes V_J^y = \left\{ \sum_{m,n} c_{m,n} \phi_{J,m}(x) \phi_{J,n}(y); \quad \sum_{m,n} |c_{m,n}|^2 < \infty \right\} \quad (3.4)$$

并且有空间的直和分解

$$LL_{-(J+1)} = V_J^{x+1} \otimes V_J^{y+1} = LL_{-J} + LH_{-J} + HL_{-J} + HH_{-J} \quad (3.5)$$

其中

$$LH_{-J} = V_J^x \otimes V_J^y = \left\{ \sum_{m,n} c_{m,n} \phi_{J,m}(x) \psi_{J,n}(y); \quad \sum_{m,n} |c_{m,n}|^2 < \infty \right\} \quad (3.6)$$

$$HL_{-J} = V_J^x \otimes V_J^y = \left\{ \sum_{m,n} c_{m,n} \psi_{J,m}(x) \phi_{J,n}(y); \quad \sum_{m,n} |c_{m,n}|^2 < \infty \right\} \quad (3.7)$$

$$HH_{-J} = V_J^x \otimes V_J^y = \left\{ \sum_{m,n} c_{m,n} \psi_{J,m}(x) \psi_{J,n}(y); \quad \sum_{m,n} |c_{m,n}|^2 < \infty \right\} \quad (3.8)$$

本文采用的三层小波分解，Lenna 的三层小波分解如图

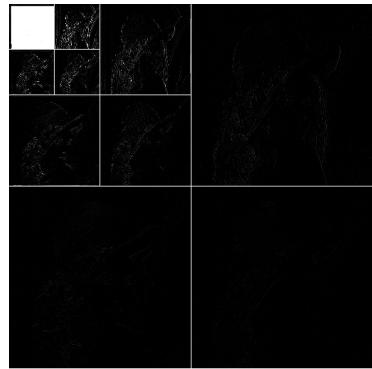


图 3.2 Lenna 三层小波分解

3.2 Donoho 估计算法

Donoho 等人，在 1994 年^[13] 中提出了一种基于小波变换的稳健的图像中噪声方差估计方法。此方法，先利用正交小波变换将噪声图像分解为 J 层的三个子带，然后在高通 - 高通子空间利用中值绝对偏差估计出图像噪声方差。

Donoho 估计算法的中值绝对偏差估计为

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{median}(|y_i|)}{0.6745} \quad (3.9)$$

其中 y_i 为二维小波变换的高通 - 高通子空间的小波变换系数。

3.3 基于离散小波变换的光滑样条估计

我们在文^[14]中，提出了基于小波变换和光滑样条估计的一种更加精确的图像噪声方差估计方法。对于高通 - 高通子带的小波变换系数，我们考虑如下的回归模型

$$y_i = x_i^\top \beta + \epsilon_i, i = 1, \dots, n, \quad (3.10)$$

或者

$$y_i = f(t_i) + \epsilon_i, t_i = i/n, i = 1, \dots, n.$$

在此，由于 n 是离散小波变换的系数，我们有 $n \gg 1$ 。并且假设 f 是在 $t \in [0, 1]$ 上的一个足够光滑的函数，我们引入如下的无限维空间^{[32][33]}：

$$\begin{aligned} W_2(\text{per}) &= \{f : f \text{ 和 } f' \text{ 是绝对连续的,} \\ &f(0) = f(1), f'(0) = f'(1), \int_0^1 |f''(t)| dt < \infty\} \end{aligned}$$

为函数 f 的模型空间。 f 的光滑样条估计记为如下的惩罚最小二乘解^{[32][33]}

$$J_\lambda(f) = \min_{f \in W_2(\text{per})} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - f(t_i)|^2 + \lambda \int_0^1 |f''(t)| dt \right\} \quad (3.11)$$

其中第一项为保真项，第二项为惩罚项， $\lambda(0 \leq \lambda < \infty)$ 即为光滑参数，我们接下来将用广义交叉验证算法（Generalized Cross-Validation (GCV)）给出最优的 $\lambda^*(0 \leq \lambda^* < \infty)$ 。

事实上，我们将采用如下的三角函数空间

$$M_\alpha = \text{span}\{1, \sqrt{2} \sin 2\pi\nu t, \sqrt{2} \cos 2\pi\nu t, \nu = 1, \dots, \alpha\}$$

并且在 M_α 引入范数 $\|f\|_{M_\alpha} = (\beta_1^2 + \sum_{\nu=1}^{\alpha} (\beta_{2\nu}^2 + \beta_{2\nu+1}^2))^{\frac{1}{2}}$ ，对任意的 $f = \beta_1 + \sum_{\nu=1}^{\alpha} (\beta_{2\nu} \sqrt{2} \sin 2\pi\nu t_i + \beta_{2\nu+1} \sqrt{2} \cos 2\pi\nu t_i) \in M_\alpha$ 。在大多数的应用中，阶 α 都是未知的，其中 $M_0 = \text{span}\{1\}$ 。对于固定的 α ， M_α 为

$$y_i = \beta_1 + \sum_{\nu=1}^{\alpha} \left(\beta_{2\nu} \sqrt{2} \sin 2\pi\nu t_i + \beta_{2\nu+1} \sqrt{2} \cos 2\pi\nu t_i \right) + \epsilon_i$$

其中 $i = 1, \dots, n$ 。我们将其重写成矩阵形式，于是得到

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}_\alpha \vec{\beta}_\alpha + \vec{\epsilon} \quad (3.12)$$

其中 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$,

$$\mathbf{X}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \sin 2\pi t_1 & \sqrt{2} \cos 2\pi t_1 & \cdots & \sqrt{2} \sin 2\pi \alpha t_1 & \sqrt{2} \cos 2\pi \alpha t_1 \\ 1 & \sqrt{2} \sin 2\pi t_2 & \sqrt{2} \cos 2\pi t_2 & \cdots & \sqrt{2} \sin 2\pi \alpha t_2 & \sqrt{2} \cos 2\pi \alpha t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \sqrt{2} \sin 2\pi t_n & \sqrt{2} \cos 2\pi t_n & \cdots & \sqrt{2} \sin 2\pi \alpha t_n & \sqrt{2} \cos 2\pi \alpha t_n \end{pmatrix}$$

是固定的矩阵, $\vec{\beta}_\alpha = (\beta_1, \dots, \beta_{2\alpha+1})^\top$ 和 $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)^\top$. 其中, 系数 $\vec{\beta}_\alpha$ 则由最小二乘估计得到

$$\begin{aligned} \min_{\vec{\beta}_\alpha \in \mathbb{R}^{2\alpha+1}} & \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \beta_1 - \sum_{\nu=1}^{\alpha} \left(\beta_{2\nu} \sqrt{2} \sin 2\pi \nu t_i + \beta_{2\nu+1} \sqrt{2} \cos 2\pi \nu t_i \right) \right)^2 \right. \\ & \left. + \lambda \int_0^1 \left| \frac{d^2}{dt^2} \left(\beta_1 + \sum_{\nu=1}^{\alpha} (\beta_{2\nu} \sqrt{2} \sin 2\pi \nu t_i + \beta_{2\nu+1} \sqrt{2} \cos 2\pi \nu t_i) \right) \right| dt \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

因为 t_i 是等距的, 且 $n \gg 1$, 所以我们有如下的正交关系:

$$\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \cos 2\pi \nu t_i \cos 2\pi \mu t_i \approx \delta_{\nu, \mu}, \quad 1 \leq \nu, \mu \leq \alpha,$$

$$\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \sin 2\pi \nu t_i \sin 2\pi \mu t_i \approx \delta_{\nu, \mu}, \quad 1 \leq \nu, \mu \leq \alpha,$$

$$\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \sin 2\pi \nu t_i \cos 2\pi \mu t_i \approx 0, \quad 1 \leq \nu, \mu \leq \alpha,$$

其中 $\delta_{\nu, \mu}$ 为 Kronecker 符号。所以, 我们有

$$\mathbf{X}_\alpha^\top \mathbf{X}_\alpha \approx n I_{2\alpha+1}. \quad (3.14)$$

对于 f , 我们有如下的引理:

引理 3.1. 对任意的 $f_1, f_2 \in M_\alpha$, 如果 $f_1 \neq f_2$, 则有 $\sum_{i=1}^n |f_1(t_i) - f_2(t_i)|^2 \neq 0$ 。

证明. 事实上, 由 $f_1, f_2 \in M_\alpha$, 我们有

$$f_j(t) = \beta_1^j + \sum_{\nu=1}^{\alpha} \left(\beta_{2\nu}^j \sqrt{2} \sin 2\pi \nu t + \beta_{2\nu+1}^j \sqrt{2} \cos 2\pi \nu t \right), \quad j = 1, 2,$$

并设

$$\mathbf{F}_j = (f_j(t_1), f_j(t_2), \dots, f_j(t_n))^T \quad j = 1, 2.$$

由 $f_1 \neq f_2$, 则

$$\|f_1 - f_2\|_{M_\alpha}^2 = (\beta_1^1 - \beta_1^2)^2 + \sum_{\nu=1}^{\alpha} ((\beta_{2\nu}^1 - \beta_{2\nu}^2)^2 + (\beta_{2\nu+1}^1 - \beta_{2\nu+1}^2)^2) \neq 0,$$

因此, $\beta_1^1 \neq \beta_1^2$, $\beta_{2\nu}^1 \neq \beta_{2\nu}^2$, $\beta_{2\nu+1}^1 \neq \beta_{2\nu+1}^2$, $\nu = 1, \dots, \alpha$ 。

现用反证法, 证明引理:

假设 $\sum_{i=1}^n |f_1(t_i) - f_2(t_i)|^2 = 0$, 又有

$$\mathbf{F}_j = \mathbf{X}_\alpha \vec{\beta}_\alpha^j$$

其中, $\vec{\beta}_\alpha^j = (\beta_1^j, \beta_2^j, \dots, \beta_{2\nu+1}^j)^T$, 所以有

$$\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = \mathbf{X}_\alpha (\vec{\beta}_\alpha^1 - \vec{\beta}_\alpha^2) = 0$$

所以有 $\mathbf{X}_\alpha (\vec{\beta}_\alpha^1 - \vec{\beta}_\alpha^2) = 0$, 进而有 $\mathbf{X}_\alpha^T \mathbf{X}_\alpha (\vec{\beta}_\alpha^1 - \vec{\beta}_\alpha^2) = 0$ 。又由于 $\mathbf{X}_\alpha^T \mathbf{X}_\alpha \approx nI_{2\alpha+1}$, 所以

$$\vec{\beta}_\alpha^1 = \vec{\beta}_\alpha^2$$

这与 $\beta_1^1 \neq \beta_1^2$, $\beta_{2\nu}^1 \neq \beta_{2\nu}^2$, $\beta_{2\nu+1}^1 \neq \beta_{2\nu+1}^2$, $\nu = 1, \dots, \alpha$ 矛盾, 故引理得证。 \square

对于式 (3.11) 和式 (3.13), 我们有如下定理:

定理 3.2. 对任意的 $0 \leq \lambda < \infty$, 式 (3.11) 和式 (3.13) 在 M_α 中存在唯一解。

证明. 存在性: 由三角函数张成的有限维空间 M_α 是凸闭的, 所以解存在。

唯一性: 令

$$J(f) \triangleq \sum_{i=1}^n |y_i - f(t_i)|^2$$

$$\tilde{J}(f) \triangleq \int_0^1 |f''(t)| dt$$

- 先证 $J(f)$ 是严格凸的, 对于任意的 $0 < \theta < 1$, 对于任意的 $f_1, f_2 \in M_\alpha$,

$$f_1 \neq f_2,$$

$$\begin{aligned}
& J(\theta f_1 + (1 - \theta) f_2) \\
&= \sum_{i=1}^n |y_i - (\theta f_1(t_i) + (1 - \theta) f_2(t_i))|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n |\theta(y_i - f_1(t_i)) + (1 - \theta)(y_i - f_2(t_i))|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \theta^2 |y_i - f_1(t_i)|^2 + \sum_{i=1}^n (1 - \theta)^2 |y_i - f_2(t_i)|^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^n 2\theta(1 - \theta) |(y_i - f_1(t_i))| |(y_i - f_2(t_i))| \\
&= \sum_{i=1}^n \theta |y_i - f_1(t_i)|^2 + \sum_{i=1}^n (1 - \theta) |y_i - f_2(t_i)|^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^n (\theta^2 - \theta) |y_i - f_1(t_i)|^2 + \sum_{i=1}^n ((1 - \theta)^2 - (1 - \theta)) |y_i - f_2(t_i)|^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^n 2\theta(1 - \theta) |(y_i - f_1(t_i))| |(y_i - f_2(t_i))| \\
&= \theta \sum_{i=1}^n |y_i - f_1(t_i)|^2 + (1 - \theta) \sum_{i=1}^n |y_i - f_2(t_i)|^2 \\
&\quad - \theta(1 - \theta) \sum_{i=1}^n (|y_i - f_1(t_i)|^2 + |y_i - f_2(t_i)|^2 - 2|y_i - f_1(t_i)||y_i - f_2(t_i)|) \\
&= \theta \sum_{i=1}^n |y_i - f_1(t_i)|^2 + (1 - \theta) \sum_{i=1}^n |y_i - f_2(t_i)|^2 - \theta(1 - \theta) \sum_{i=1}^n |f_1(t_i) - f_2(t_i)|^2 \\
&= \theta J(f_1) + (1 - \theta) J(f_2) - \theta(1 - \theta) \sum_{i=1}^n |f_1(t_i) - f_2(t_i)|^2
\end{aligned}$$

。由于 $f_1 \neq f_2$, 由引理 3.1 可知 $\sum_{i=1}^n |f_1(t_i) - f_2(t_i)|^2 > 0$, 所以

$$J(\theta f_1 + (1 - \theta) f_2) < \theta J(f_1) + (1 - \theta) J(f_2)$$

所以, $J(f)$ 是严格凸的。

2. 接下来证 $\tilde{J}(f)$ 是凸的, 对于任意的 $0 < \theta < 1$, 对于任意的 $f_1, f_2 \in M_\alpha$,

$$\begin{aligned} & \tilde{J}(\theta f_1 + (1 - \theta) f_2)) \\ &= \int_0^1 |\theta f_1''(t) + (1 - \theta) f_2''(t)| dt \\ &\leq \int_0^1 |\theta f_1''(t)| dt + \int_0^1 (1 - \theta) |f_2''(t)| dt \\ &= \theta \int_0^1 |f_1''(t)| dt + (1 - \theta) \int_0^1 |f_2''(t)| dt \\ &= \theta \tilde{J}(f_1) + (1 - \theta) \tilde{J}(f_2) \end{aligned}$$

$\tilde{J}(f)$ 是凸的.

因此 $J_\lambda(f) = J(f) + \lambda \tilde{J}(f)$ 为严格凸的, 所以式 (3.11) 和式 (3.13) 存在唯一解。 \square

下面我们以 $\lambda = 0$ 为例, 说明 \hat{f}_α 的具体求解。当 $\lambda = 0$ 时, 根据^[32]和^[33], $\vec{\beta}_\alpha$ 的最小二乘估计为

$$\widehat{\vec{\beta}}_\alpha = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_{2\alpha+1}) \triangleq \widehat{\vec{\beta}}_{\alpha,0} = (\mathbf{X}_\alpha^\top \mathbf{X}_\alpha)^{-1} \mathbf{X}_\alpha^\top \mathbf{y} \quad (3.15)$$

更准确的说,

$$\hat{\beta}_1 \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad 1 \leq \nu \leq \alpha,$$

$$\hat{\beta}_{2\nu} \approx \frac{\sqrt{2}}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sin 2\pi \nu t_i, \quad 1 \leq \nu \leq \alpha,$$

$$\hat{\beta}_{2\nu+1} \approx \frac{\sqrt{2}}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cos 2\pi \nu t_i, \quad 1 \leq \nu \leq \alpha$$

这样 f 的光滑样条估计式 (3.11) 的精确解为

$$\hat{f}_\alpha(t) = \hat{\beta}_1 + \sum_{\nu=1}^{\alpha} \left(\hat{\beta}_{2\nu} \sqrt{2} \sin 2\pi \nu t + \hat{\beta}_{2\nu+1} \sqrt{2} \cos 2\pi \nu t \right). \quad (3.16)$$

由式 (3.15) 和 (3.16), 可知 f 的估计式 \hat{f}_α 可以被显示表达为依赖于 α 的表达式:

$$\hat{\mathbf{f}}_\alpha \triangleq \left(\hat{f}_\alpha(t_1), \dots, \hat{f}_\alpha(t_n) \right)^\top = \mathbf{X}_\alpha \widehat{\vec{\beta}}_\alpha = \mathbf{X}_\alpha (\mathbf{X}_\alpha^\top \mathbf{X}_\alpha)^{-1} \mathbf{X}_\alpha^\top \mathbf{y} = H(0) \mathbf{y},$$

当 $\lambda > 0$ 时, 类似的可以得到

$$\hat{\mathbf{f}}_{\alpha,\lambda} \triangleq \left(\hat{f}_{\alpha,\lambda}(t_1), \dots, \hat{f}_{\alpha,\lambda}(t_n) \right)^\top = H(\lambda) \mathbf{y}_\circ$$

对于 $\lambda \in [0, \infty)$, 我们将利用文^[2]中提出的广义交叉验证算法 (Generalized Cross-Validation (GCV)), 来得到最优的 λ (如图 3.3)。

$$GCV(\lambda) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|y_i - \hat{f}_\lambda(t_i)\|^2}{\|1 - tr H(\lambda)/n\|^2}. \quad (3.17)$$

其中 n 是高通 - 高通子带的小波变换系数的数目。

该算法可以被描述如下:

算法: 基于小波变换的光滑样条估计

输入: 噪声图像 v

Processing:

Step 1: 利用正交小波分解算法, 将 v 做三层小波分解 (如图 3.1)

Step 2: 抽取高通 - 高通子带的小波变换系数 y_i

Step 3: 利用广义交叉验证方法得到最优的光滑参数 λ^*

Step 4: 执行取最优参数 λ^* 的光滑样条估计, 得到恢复的噪声

$$\hat{\mathbf{f}}_{\alpha, \lambda^*} = (\hat{f}_{\alpha, \lambda^*}(t_1), \hat{f}_{\alpha, \lambda^*}(t_2), \dots, \hat{f}_{\alpha, \lambda^*}(t_n))^T$$

Step 5: 然后从 \hat{f}_α 中, 得出噪声方差 $\tilde{\sigma} = (\sum_{i=1}^n |\hat{f}_{\alpha, \lambda^*}(t_i)|^2)^{\frac{1}{2}}$

输出: 估计到的噪声方差 $\tilde{\sigma}$

3.4 数值结果

本节我们将给出,Donoho 方法和我们提出的光滑样条估计方法的数值结果。本节所有的实验都是在 Lenovo Thinkpad SL400 笔记本 (Intel Core2 Duo T5870 @2.00G and 2G RAM) 上的 Matlab 2008a 平台上完成的。本节实验是用来估计重要的去噪参数 – 图像噪声方差。试验中, 我们取 $\alpha = 2, 0 \leq \lambda < 1.5625 \times 10^{22}$ 。如表 4.3 所示, 我们提出的基于小波变换的光滑样条估计对于图像噪声方差估计比 Donoho 的方法更为精准, 其不仅仅具有小的偏差, 还有小的标准差, 当噪声越来越大时, 其优势越明显。

3.5 本章小结

本章主要阐述了去噪参数的两种估计方法: Donoho 估计方法和光滑样条估计方法。Donoho 估计方法, 主要是先利用正交小波变换将噪声图像分解为 J 层

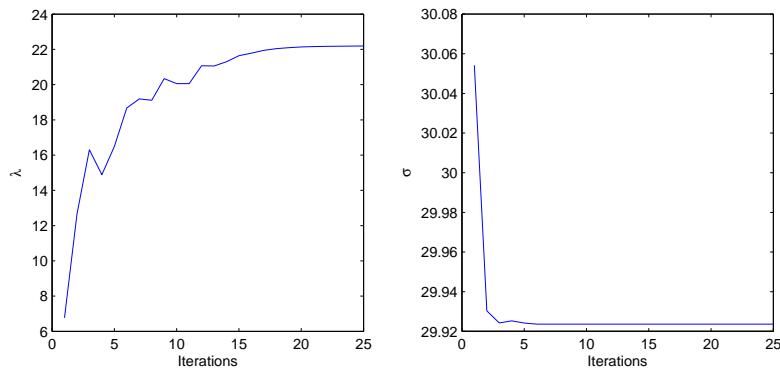
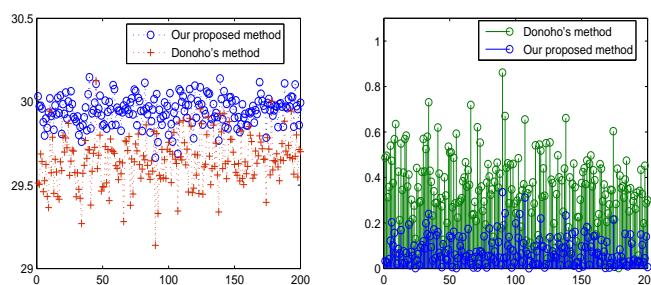
图 3.3 最优 λ 的迭代过程及其相应的噪声方差

表 3.1 Donoho 估计方法与光滑样条估计对比

| σ | 噪声方差估计的均值, 标准差和残差 | | | | | |
|----------|-------------------|---------------------|---------|----------------|---------------------|---------|
| | 光滑样条估计 | | | Donoho 方法估计 | | |
| | $\hat{\sigma}$ | $std(\hat{\sigma})$ | error | $\hat{\sigma}$ | $std(\hat{\sigma})$ | error |
| 20 | 20.10794 | 0.04989 | 0.10843 | 19.89248 | 0.08079 | 0.11522 |
| 30 | 29.96061 | 0.08573 | 0.07609 | 29.64905 | 0.13927 | 0.35132 |
| 40 | 39.84851 | 0.10844 | 0.15790 | 39.42996 | 0.18398 | 0.57004 |
| 50 | 49.75546 | 0.13737 | 0.24950 | 49.25226 | 0.22526 | 0.74774 |
| 60 | 59.65546 | 0.15552 | 0.34477 | 59.05103 | 0.27051 | 0.94897 |
| 70 | 69.59464 | 0.18967 | 0.40536 | 68.88102 | 0.32663 | 1.11898 |
| 80 | 79.49332 | 0.20572 | 0.50696 | 78.66864 | 0.36024 | 1.33136 |
| 90 | 89.40475 | 0.23898 | 0.59553 | 88.48418 | 0.37809 | 1.51582 |
| 100 | 99.35521 | 0.25951 | 0.64590 | 98.34519 | 0.45176 | 1.65481 |

图 3.4 噪声方差估计模拟结果, $\sigma = 30$. 左: 噪声方差结果, 右: 残差

的三个子带，然后在对高通 - 高通子带中小波变换系数利用中值绝对偏差估计出图像噪声方差；光滑样条估计方法，主要是先利用正交小波变换，对噪声图像做三层小波分解，然后在对高通 - 高通子带中小波变换系数利用光滑样条估计得出图像噪声方差。

第4章 非局部滤波去噪算法

4.1 非局部均值滤波去噪算法

A.Buades 等人在^[10]提出的原始非局部均值算法 (Original Non-Local means, ONL) 有效的克服现有的去噪算法以原始图像的正则假设为前提的，并且在去噪过程中图像的许多细节都被光滑掉了这些弱点。此算法的基本思想是，自然图像 $v = \{v(i) | i \in I\}$ 都有大量的信息冗余，因此可以对噪声图像中的所有像素值加权平均得到要恢复像素点的像素值，即

$$NL[v](i) = \frac{1}{C(i)} \sum_{j \in I} w(i, j)v(j), \quad (4.1)$$

其中

$$C(i) = \sum_{j \in I} w(i, j) \quad (4.2)$$

是归一化常数。相似权重 $\{w(i, j)\}_j$ (5.25) 则由像素点 i 的邻域和像素点 j 的邻域的相似度来度量。此权重可以定义为

$$w(i, j) = \exp\left(-\frac{\|v(N(i)) - v(N(j))\|_{2,a}^2}{h^2}\right). \quad (4.3)$$

其中 $N(i)$ 表示中心点在像素点 i 的正方形领域， $\|\cdot\|_{2,a}$ 为高斯加权欧氏距离函数， a 为高斯核的标准差， h 为衰减参数，即为我们的去噪参数，本文此参数将用噪声方差。连续形式的 $NL(v)(x)$, $C(x)$ 和 G_a 为

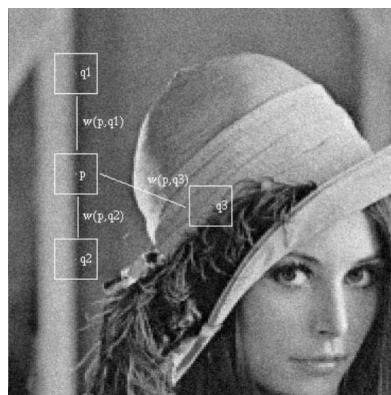


图 4.1 权重示意图

$$NL(v)(x) = \frac{1}{C(x)} \int_{\Omega} e^{-\frac{(G_a * |v(x+\cdot) - v(y+\cdot)|^2)(0)}{h^2}} v(y) dy \quad (4.4)$$

$$C(x) = \int_{\Omega} e^{-\frac{(G_a * |v(x+\cdot) - v(y+\cdot)|^2)(0)}{h^2}} dz \quad (4.5)$$

$$(G_a * |v(\cdot) - v(y+\cdot)|^2)(0) = \int_{\mathbb{R}^2} G_a(t) |v(x+t) - v(y+t)|^2 dt \quad (4.6)$$

正如我们在前面提到的，非局部滤波的计算代价很大，对于一个有 $M \times N$ 像素点的图像，那么对于每一个像素点，将有 $(M \times N)^2$ 权重需要计算。对于整个算法 $(M \times N)^2$ 权重的计算使得该算法不是很高效，这样也使得该算法没有广泛的使用价值。更重要的是，很多不相关的邻域也被赋予了权重，这样就降低了去噪效果。

下面算法的改进降低了原始非局部滤波算法的计算复杂度。

Buades 等人在^[11] 中提出带搜索区域的非局部均值算法（Non-Local means method with search radius, NLR），对于每一个要恢复的像素点，给定一个定的搜索领域，此方法对搜索半径为 Ω_i 的像素点加权平均来得到要恢复的像素点 $NL[v](i)$ 的像素值，而非用整个图像的像素点。

$$NL[v](i) = \sum_{j \in \Omega_i} w(i, j)v(j). \quad (4.7)$$

这样一来，对于一个 $s \times s$ 的搜索邻域，对于一个有 $m \times n$ 像素点的图像，其计算复杂度只有 $m \times n \times (s \times s - 1)$ ，这样就大大降低了原始非局部滤波算法的计算复杂度。事实上，我们通过实验得到， $s = 10$ 就已经足够得到较好的恢复效果。

4.2 非局部双边滤波去噪算法

受文^[31] 的启发，我们在文^[14] 在非局部框架下基于邻域的灰度值和邻域的高斯曲率，提出了一种图像去噪的非局部双边滤波算法（Non-Local Bilateral filter, NLB），该算法可以描述为

$$NL[v](i) = \sum_{j \in \Omega_i} w(i, j)v(j). \quad (4.8)$$

其中的权重 $w(i, j)$ 定义为

$$w(i, j) = \exp\left(-\frac{\|v(N(i)) - v(N(j))\|_{2,a}^2}{h^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\|g(N(i)) - g(N(j))\|_{2,a}^2}{h^2}\right) \quad (4.9)$$

其中 $N(i)$ 表示中心点在像素点 i 的正方形领域， $\|\cdot\|_{2,a}$ 为高斯加权欧氏距离函数， a 为高斯核的标准差， h 为衰减参数， g 是相应邻域的高斯曲率。

表 4.1 非局部双边滤波算法和带搜索区域的非局部均值算法 PSNR 效果对比表

| Image | NLR 算法和 NLB 算法的 PSNR 效果对比表 | | | | | | | | |
|---------|----------------------------|-------|----------|---------------|-------|----------|---------------|-------|----------|
| | $\sigma = 20$ | | | $\sigma = 30$ | | | $\sigma = 40$ | | |
| | NLR | NLB | Δ | NLR | NLB | Δ | NLR | NLB | Δ |
| Lena | 31.44 | 31.77 | 0.33 | 28.67 | 29.64 | 0.97 | 25.70 | 28.00 | 2.30 |
| Barbara | 29.60 | 30.02 | 0.42 | 27.08 | 27.61 | 0.53 | 24.60 | 25.84 | 1.24 |
| Peppers | 30.00 | 30.43 | 0.43 | 27.44 | 28.27 | 0.83 | 24.70 | 26.52 | 1.82 |
| Rice | 33.25 | 33.71 | 0.46 | 29.23 | 30.55 | 1.32 | 25.52 | 28.12 | 2.60 |
| House | 32.20 | 32.22 | 0.02 | 28.96 | 29.78 | 0.82 | 25.76 | 28.03 | 2.27 |
| Baboon | 27.53 | 27.36 | -0.17 | 25.75 | 25.67 | -0.08 | 23.96 | 24.64 | 0.68 |
| Average | 30.67 | 30.92 | 0.25 | 27.86 | 28.59 | 0.73 | 25.04 | 26.86 | 1.82 |

4.2.1 数值结果

本节的第一组实验，我们用来比较原始非局部均值算法（Original Non-Local means, ONL），带搜索区域的非局部均值算法（Non-Local means method with search radius, NLR）和非局部双边滤波算法（Non-Local Bilateral filter, NLB），对于高斯白噪声的去噪效果。我们选取了 Lena, Barbara, Peppers, Rice, House and Baboon 图片作为测试图像。表 4.3-4.2 给出了 ONL, NLR 和 NLB 去噪效果数据。从表 4.4 可以看出，NLB 滤波在噪声方差为 $\sigma = 20, 30$ 和 40 时，峰值信噪比值的均值分别比 NLR 高出 0.25db, 0.73db 和 1.82db。

本节的第二组实验，我们用来比较原始非局部均值算法（Original Non-Local means, ONL），带搜索区域的非局部均值算法（Non-Local means method with search radius, NLR）和非局部双边滤波算法（Non-Local Bilateral filter, NLB），对于乘性噪声的去噪效果。其中均值滤波 (Mean filter, Meaf) 和中值滤波 (Median filter, Medf) 将被实现用于对比。在本组实验中，我们选取了 3 幅合成孔径雷达 (SAR) 图像¹作为我们的测试图像。其中，等效视数 (Equivalent Number of Looks, ENL) 和保边指标 (Edge Save Index, ESI) 将作为我们的去噪准则。等效视数 (Equivalent Number of Looks, ENL) :

$$ENL = \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2$$

其中 μ 和 σ 分别为平滑区域的均值和标准方差。等效视数 ENL 越大，则说明相应的去噪效果相对越好。但是，如果一幅图像有很强的纹理特征，那么大的等效视数，也可能说明对图像细节纹理的过度平滑，这样将会严重损害图像的细节和纹理特征。因此，这一评判标准经常和其他的评判标准结合使用。

¹SAR 图像中的噪声主要为乘性噪声

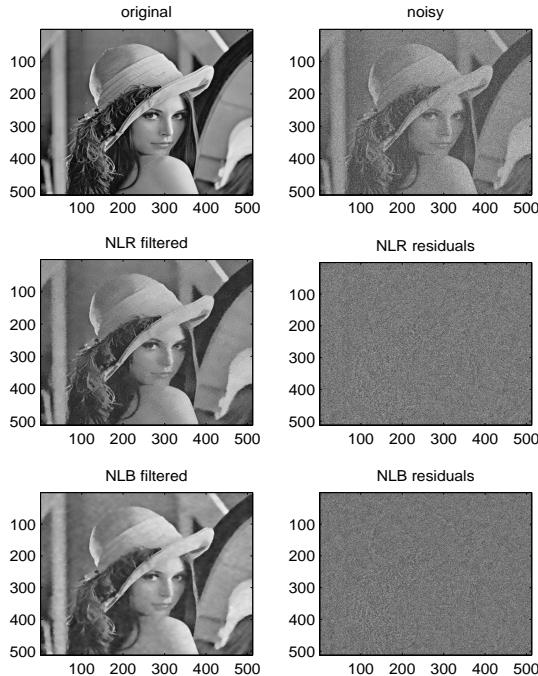


图 4.2 NLR 算法和 NLB 算法对于方差为 $\sigma = 40$ 的去噪效果图。左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左中: 由 NLR 算法恢复图像, $PSNR=25.70$, 右中:NLR 算法的方法噪声, 左下: NLB 算法恢复图像, $PSNR=28.00$, 右下: NLB 算法的方法噪声。

保边指标 (Edge Save Index, ESI) :

$$ESI = \frac{\sum_{i=1}^m |I_{R_1} - I_{R_2}|_{\text{filtered}}}{\sum_{i=1}^m |I_{R_1} - I_{R_2}|_{\text{original}}}$$

其中 m 是测试图像的像素点的数目。 I_{R_1} 和 I_{R_2} 分别为沿边界的上下像素点的像素值和沿边界左右像素点的像素值。保边指标 ESI 的值越大，则说明该算法的保持边界的能力越强。

从表 4.2 和图 4.3 我们可以看出，非局部双边滤波算法在噪声去除和边界保持上有很好的平衡。

4.3 自适应非局部均值去噪算法

正如，我们在前面提到的，原始的非局部算法不仅算法复杂度高，而且很多不相关的邻域也被赋予了权重，这样就降低了去噪效果。我们在文^[38] 中基于种子像素生长融合算法，提出了一种自适应非局部均值去噪算法 (Adaptive Non-local means, ANL)，该算法不仅高效，而且有更好的去噪效果。

²水平保边指标, Horizontal Edge Save Index

³垂直保边指标, Vertical Edge Save Index

表 4.2 非局部双边滤波和其他滤波对于乘性噪声去噪效果对比表

| Criterion | MSE, ENL 和 ESI 去噪效果对比 | | | | | |
|-------------------|-----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | River | | | Terra | | |
| | MeaF | MedF | NLB | MeaF | MedF | NLB |
| MSE | 305.82 | 306.68 | 161.32 | 836.87 | 819.55 | 378.28 |
| ENL | 3.97 | 3.78 | 3.55 | 7.06 | 5.58 | 5.27 |
| HESL ² | 0.36 | 0.38 | 0.5 | 0.42 | 0.47 | 0.49 |
| VESL ³ | 0.32 | 0.35 | 0.37 | 0.37 | 0.40 | 0.56 |

4.3.1 种子像素生长融合算法

种子像素生长融合算法是 R. Adams 和 L. Bischof 在文^[1]中提出的，其主要用来分割图像。种子像素生长融合算法主要思想是，先选取一种子像素，然后根据其 4-邻域的与种子像素的相似度，把较为接近的像素点融入到该种子像素的区域，该算法可以描述如下：

- Step 1:** 选取种子像素，将其坐标存入到队列矩阵中；
- Step 2:** 选择在矩阵队列后面的像素为种子像素；
- Step 3:** 逐一检查种子 4-邻域中的四个像素点与种子像素的相似度；
- Step 4:** 如果像素点与种子像素相似，则将此像素的坐标加入到矩阵队列的头中，请将其放入融合区域里，计数器 counter=counter+1；
- Step 5:** 删除矩阵队列尾部的像素点；
- Step 6:** 重复 2-5 步，直到矩阵队列非空，或者融合区域里的像素点数目达到指定的数目。

这个步骤表明，在执行种子像素生长融合算法时，融合区域会根据图像的自身固有的几何信息自适应的变化（如图 4.4），此融合区域将被作为我们自适应非局部均值算法中的搜索区域，也就是说我们将用融合区域内的像素点的像素值的加权平均来恢复被噪声污染的像素点。

4.3.2 基于像素融合生长的自适应非局部均值去噪算法

对于离散的被噪声污染的图像 $v = \{v(i) | i \in I\}$ ，我们提出的算法^[38]利用融合区域内的像素点的像素值的加权平均来恢复被噪声污染的像素点 $NL[v](i)$ 。

$$NL[v](i) = \frac{1}{C(i)} \sum_{j \in \Lambda_i} w(i, j)v(j), \quad (4.10)$$

其中 Λ_i 是种子像素点 i 的生长融合区域，这个区域根据我们参数的选定，它可以是局部的也可以是全局的。相似权重 $\{w(i, j)\}_j$ 仍然取决于像素点 i 的邻域和像素点 j 的邻域的相似度。

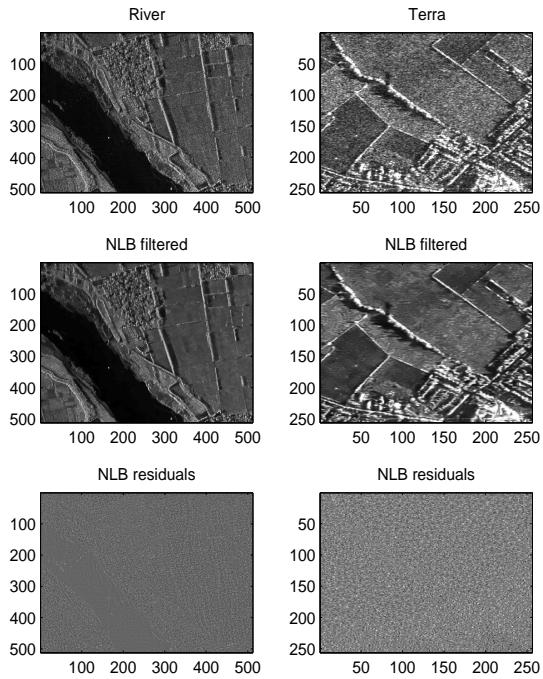


图 4.3 NLB 对 SAR 图像去噪效果图
左上: 原始的 SAR 图像: 小桥 (river), 右上: 原始 SAR 田野 (terra), 左中: NLB 算法对小桥的去噪图, 右中: NLB 算法对田野的去噪图, 左下: NLB 算法对小桥的方法噪声, 右下: NLB 算法对田野的方法噪声

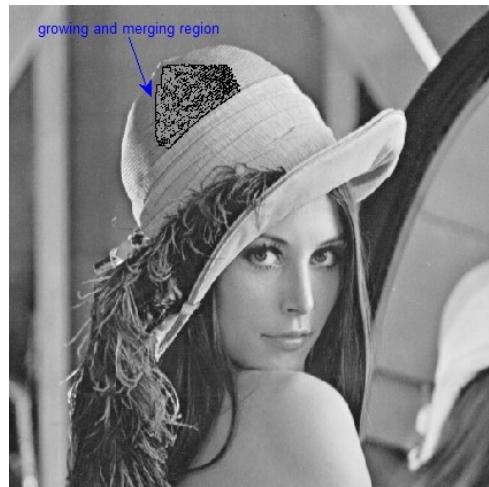


图 4.4 种子像素生长融合区域示意图

基于像素融合生长的自适应非局部均值去噪算法可以按以下步骤实现：

Step 1: 先对噪声图像和高斯滤波做卷积 $G(0, \sigma^2)$;

Step 2: 选取噪声图像中的像素点为种子像素点;

Step 3: 执行种子像素生长融合算法，获得种子像素生长融合区域，用融合区域内的像素点的像素值的加权平均来恢复被噪声污染的像素点；

Step 4: 重复 2-3 步，直到噪声图像中所有的点都被处理；

Step 5: 输出被恢复的图像。

4.3.3 数值结果

本小节，我们用来比较原始非局部均值算法（Original Non-Local means, ONL），带搜索区域的非局部均值算法（Non-Local means method with search radius, NLR）和自适应的非局部滤波算法（Non-Local Bilateral filter, NLB）去噪效果。为了确保公平比较，我们在所有的试验中选取同样的 7×7 领域大小，并且收缩半径固定为 10。在 ANL 算法中，我们相似度和融合区域的像素点数目分别取为 200 和 50。我们选取峰值信噪比和方法噪声为我们此实验的评价准则。本节所有实验都是在 DELL OptiPlex 760 台式机（Intel Core2 Duo E7400 @2.8G and 2G RAM）上的 Matlab2008a 平台上实现的。

本节的第一个实验用来评估原始非局部均值算法（Original Non-Local means, ONL），带搜索区域的非局部均值算法（Non-Local means method with search radius, NLR）和自适应的非局部滤波算法（Non-Local Bilateral filter, NLB）的算法效率。在本试验中，我们测试了一列 $n \times n$ 大小的图像，其中 n 取 64, 128, 256 和 512。从图 4.13，我们可以看到，对于一幅 256×256 的图像 ONL 算法，几乎要花费近 1.44 小时，但是 NLR 算法和 ANL 仅需 30 秒和 11 秒。

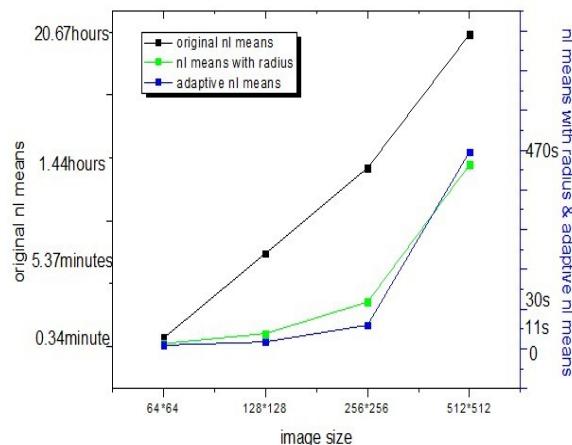


图 4.5 ONL, NLR, ANL 三种算法的耗费时间

在本节的第二个试验中，我们用来评估原始非局部均值算法（Original Non-Local means, ONL），带搜索区域的非局部均值算法（Non-Local means method with search radius, NLR）和自适应的非局部滤波算法（Non-Local Bilateral filter, NLB）对高斯白噪声的去噪效果。图 4.6-4.9 给出了 ONL 算法，NLR 算法和 ANL 算法的去噪效果图。从表 4.3，我们提出的 ANL 算法、在噪声方差为 $\sigma = 20, 30$ 和 40 时，峰值信噪比值的均值分别比 ONL 高出 0.39db , 1.77db 和 2.99db 。当噪声不断加大时，ONL 几乎不能找到匹配领域，如表 4.4 所给出的 ANL 算法在噪声方差为 $\sigma = 50, 60$ 和 70 时，峰值信噪比值的均值分别比 NLR 高出 0.85db , 1.09db 和 1.48db

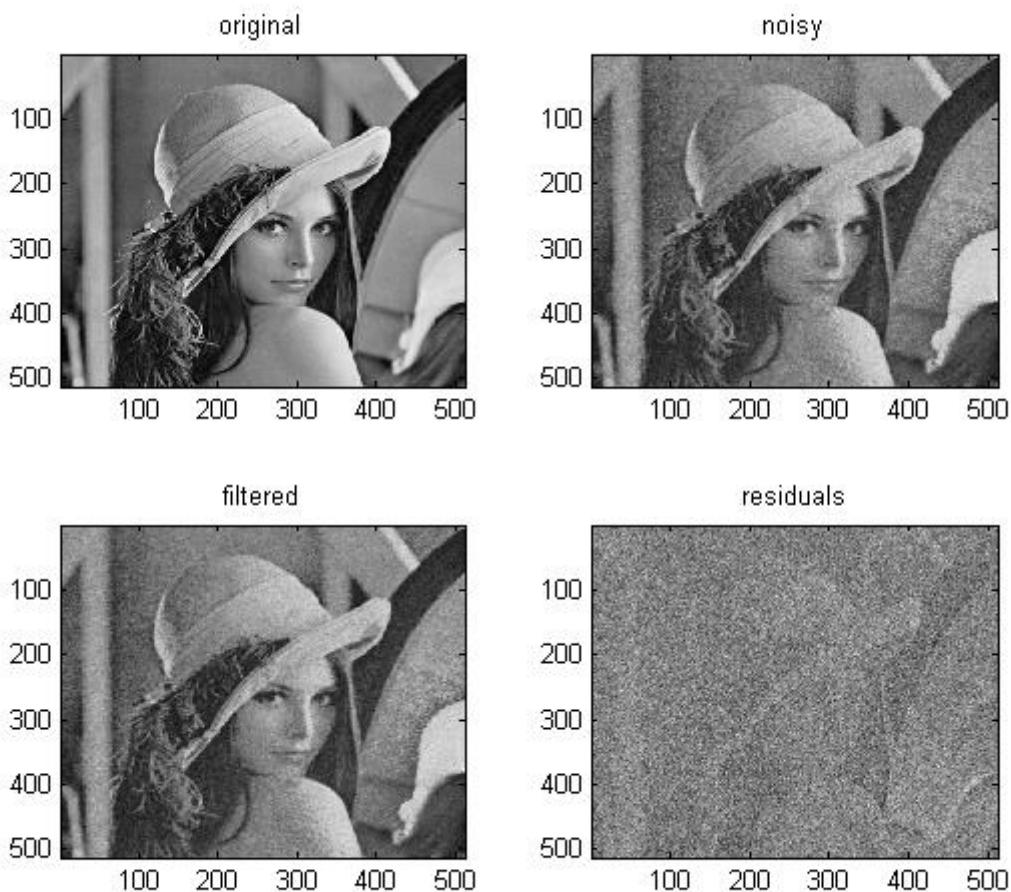


图 4.6 ONL 算法对于 $\sigma = 40$ 高斯噪声去噪效果图。左上：原始图像，右上：噪声图像，左下：ONL 去噪图像 PSNR=24.20，右下：方法噪声

本节第三组实验用来评估 ANL 算法对椒盐噪声的去噪效果。图 4.10 表明 ONL 算法对于椒盐噪声几乎没有去噪效果，相反，图 4.11-4.12 表明，我们提出的 ANL 算法对于椒盐噪声也有较好的去噪效果。表 4.5 ANL 算法对于 $\sigma = 20, 30$ and 40 的椒盐噪声有相应的平均 PSNR 23.03db , 21.43db 和 20.03db 。



图 4.7 Results of the ANL 算法对于 $\sigma = 40$ 高斯噪声去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: ANL 去噪图像 PSNR=28.02, 右下: 方法噪声

表 4.3 ONL 算法和 ANL 算法对于高斯白噪声 PSNR 对比表

| Image | 对于高斯白噪声的平均 PSNR(db) 值 | | | | | | | | |
|---------|-----------------------|-------|----------|---------------|-------|----------|---------------|-------|----------|
| | $\sigma = 20$ | | | $\sigma = 30$ | | | $\sigma = 40$ | | |
| | ONL | ANL | Δ | ONL | ANL | Δ | ONL | ANL | Δ |
| Lena | 28.55 | 29.96 | 1.41 | 26.26 | 28.96 | 2.7 | 24.20 | 28.02 | 3.82 |
| peppers | 27.68 | 26.26 | -1.42 | 25.24 | 25.64 | 0.4 | 23.20 | 24.86 | 1.66 |
| Lion | 25.45 | 25.47 | 0.02 | 23.25 | 24.91 | 1.66 | 21.64 | 24.34 | 2.70 |
| Rice | 30.87 | 31.69 | 0.82 | 28.28 | 30.00 | 1.72 | 25.62 | 28.43 | 2.81 |
| Brain | 30.36 | 31.47 | 1.11 | 27.34 | 29.71 | 2.37 | 24.42 | 28.38 | 3.96 |
| Average | 28.58 | 28.97 | 0.39 | 26.07 | 27.84 | 1.77 | 23.82 | 26.80 | 2.99 |

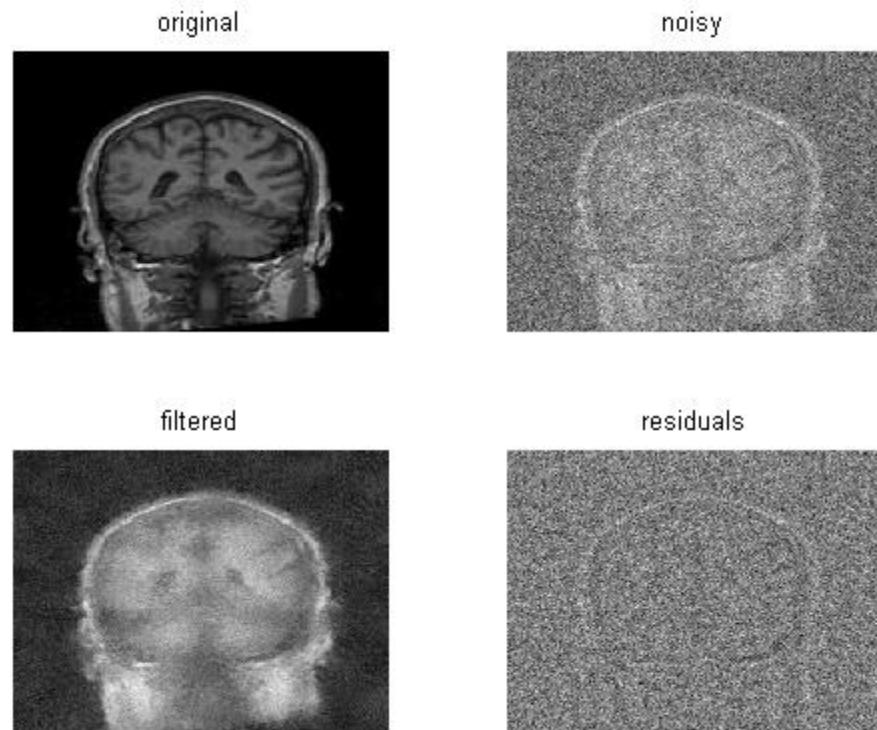


图 4.8 NLR 算法在 $\sigma = 70$ 时的去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像,
左下: NLR 去噪图像 PSNR=24.07, 右下: 方法噪声

表 4.4 NLR 算法和 ANL 算法对于高斯白噪声 PSNR 对比表

| Image | 对于高斯白噪声的平均 PSNR(db) 值 | | | | | | | | |
|---------|-----------------------|-------|----------|---------------|-------|----------|---------------|-------|----------|
| | $\sigma = 50$ | | | $\sigma = 60$ | | | $\sigma = 70$ | | |
| | NLR | ANL | Δ | NLR | ANL | Δ | NLR | ANL | Δ |
| Lena | 26.57 | 27.13 | 0.56 | 25.60 | 26.38 | 0.78 | 24.71 | 25.69 | 0.98 |
| peppers | 24.32 | 24.17 | -0.15 | 23.24 | 23.42 | 0.18 | 22.24 | 22.88 | 0.64 |
| House | 26.15 | 26.46 | 0.31 | 24.99 | 25.56 | 0.57 | 24.05 | 25.10 | 1.05 |
| Lion | 23.50 | 23.94 | 0.44 | 23.10 | 23.54 | 0.44 | 22.58 | 23.18 | 0.6 |
| Rice | 24.86 | 27.19 | 2.33 | 23.18 | 26.28 | 3.1 | 21.87 | 25.56 | 3.69 |
| Brain | 25.85 | 27.46 | 1.61 | 25.08 | 26.54 | 1.46 | 24.07 | 25.97 | 1.90 |
| Average | 25.21 | 26.06 | 0.85 | 24.20 | 25.29 | 1.09 | 23.25 | 24.73 | 1.48 |

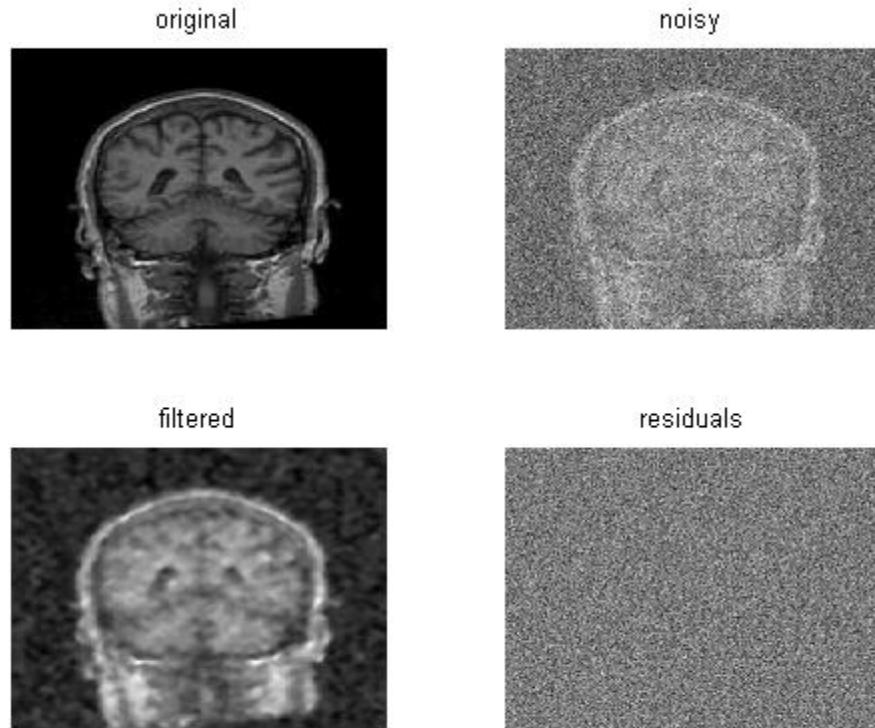


图 4.9 ANL 算法在 $\sigma = 70$ 去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: ONL 去噪图像 PSNR=25.97, 右下: 方法噪声

4.4 本章小结

本章我们给出了两种改进的非局部均值算法：非局部双边滤波算法和基于种子像素生长融合算法的自适应算法。非局部的双边滤波基于邻域的灰度值和邻域高斯曲率，给出了更加精确的权重计算式；基于种子像素生长融合算法的自适应算法，利用种子像素生长融合算法来得到根据图像几何信息生成的搜索域。数值试验表明，非局部双边滤波算有更好的去噪效果，而基于种子像素生长融合算法的自适应算法不仅可以加速算法，还具有更好的去噪效果。

我们提出的基于种子像素生长融合算法的自适应算法对于一幅 512×512 图像，比原始的非局部均值算法快 150 倍，并且由于剔除了一些不相关的领域，使得该算法还有更好的去噪效果。除此之外，基于种子像素生长融合算法的自适应算法不仅对于高斯白噪声有很好的去噪效果，对于椒盐噪声也有较好的去噪效果。

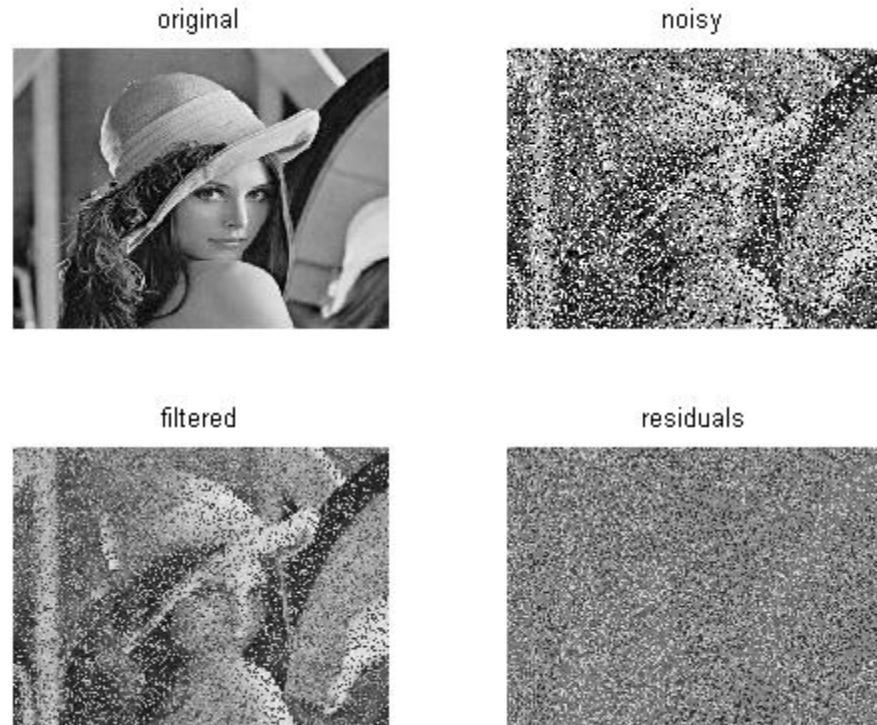


图 4.10 ONL 算法对于 $\sigma = 40$ 的椒盐噪声去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: ONL 去噪图像 $PSNR=15.46$, 右下: 方法噪声

表 4.5 ANL 算法对于高斯白噪声 PSNR 数据表

| Image | 对于椒盐噪声的平均 PSNR(db) | | |
|---------|--------------------|---------------|---------------|
| | $\sigma = 20$ | $\sigma = 30$ | $\sigma = 40$ |
| Lena | 23.24 | 21.59 | 20.05 |
| House | 22.79 | 21.09 | 19.97 |
| Rice | 23.06 | 21.61 | 20.06 |
| Average | 23.03 | 21.43 | 20.03 |

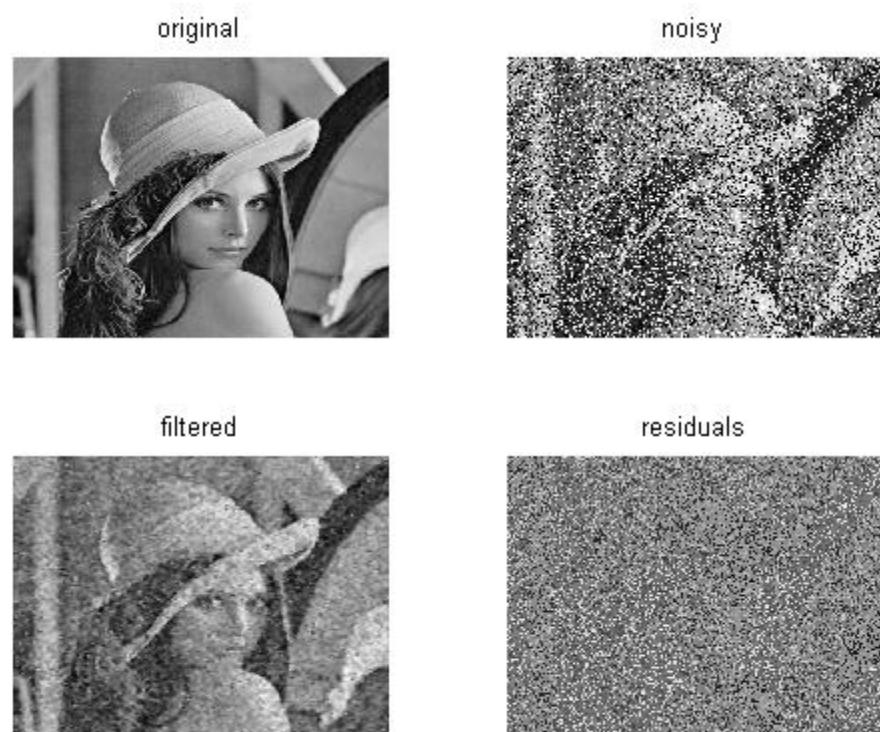


图 4.11 ANL 算法对于 $\sigma = 40$ 的椒盐噪声去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上:
噪声图像, 左下: ONL 去噪图像 PSNR=20.05, 右下: 方法噪声

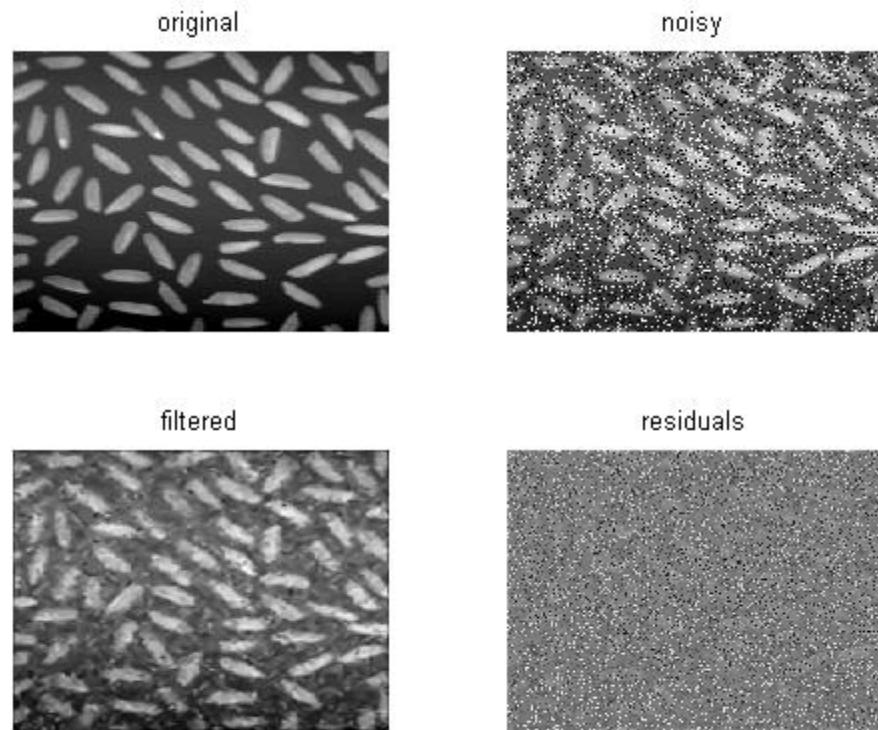


图 4.12 ANL 算法对于 $\sigma = 20$ 的椒盐噪声去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: ONL 去噪图像 $PSNR=23.06$, 右下: 方法噪声

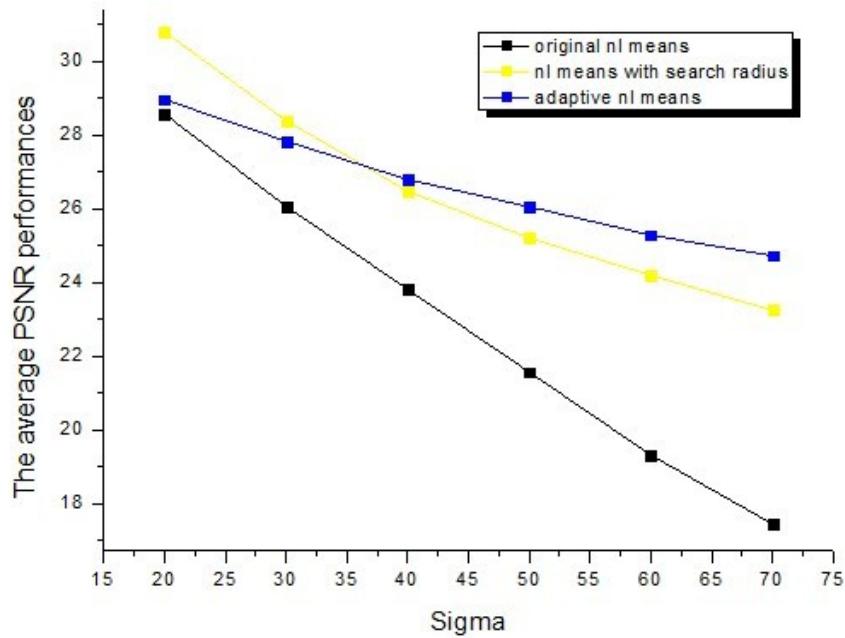


图 4.13 ONL, NLR, ANL 三种算法的平均 PSNR 图

第 5 章 非局部全变差去噪算法

正如在第 1 章中所指出，图像有很多故有的特征，比如边缘就是其一故有特征。若以 $\int |\nabla u|^2$ 作为平滑性度量，则它将对“梯度”有较大的惩罚，这必然导致图像边缘的模糊化。基于这一考虑在^[27] 中 L. Rudin, S. Osher 和 E. Fatemi 首先提出了以 $\int |\nabla u|$ 为平滑性度量的全新的图像复原方法 – 全变差 (Total Variation, TV) 图像复原方法。

5.1 全变差去噪算法

全变差去噪模型是现如今运用最广泛和最成功的一图像恢复模型，至此，在原始的的 ROF 模型基础上也做出了很多的改进。

5.1.1 全变差去噪模型

变差有界函数空间的定义为

定义 5.1 (变差有界函数空间).

$$BV(\Omega) = \{u, \int_{\Omega} |u_x| d\Omega < \infty\} \quad (5.1)$$

其中 u_x 表示在分布意思下的 u 的导数。一维情况下的有界变差函数的全变差可以定义为

定义 5.2 (1D 全变差).

$$TV(u) = \int_{\Omega} |u_x| dx \quad (5.2)$$

此定义可以直接推广到二维或更高维的情况

定义 5.3 (全变差).

$$TV(u) = \int_{\Omega} |u_x| d\Omega \quad (5.3)$$

根据图像噪声模型 1.4 和全变差模 5.3 的定义，L. Rudin, S. Osher 和 E. Fatemi 提出了一类去噪去模糊模型，该模型就是解一个带约束的最优化问题

$$\begin{cases} \min_u & \int_{\Omega} |u_x| d\Omega \\ s.t & \|k * u - v\|_{l^2}^2 = |\Omega| \delta^2 \end{cases} \quad (5.4)$$

我们可以将此带约束的最优化问题转化为等价的无约束的问题

$$u = \operatorname{argmin}_u \int_{\Omega} |\nabla u| d\Omega + \frac{\lambda}{2} \int (k * u - v)^2 d\Omega \quad (5.5)$$

此即为经典的 ROF 去噪去模糊模型。

其相应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\lambda k * (k * u - v) - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = 0 \quad (5.6)$$

由于图像中存在着 $|\nabla u| = 0$ 的点，因此式 5.6 是病态的 PDE。我们通过正则化的方法，即在全变差中引入一个很小的正数 β 来解决这一问题。此时全变差表达式为

$$TV(u) = \int \int_{\Omega} |u_x|_{\beta} d\Omega = \int \int_{\Omega} \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + \beta} dx \quad (5.7)$$

此时的 Euler-Lagrange 方程为

$$\lambda k * (k * u - v) - \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|_{\beta}} \right) = 0 \quad (5.8)$$

5.1.2 全变差去噪算法数值格式

5.1.2.1 不动点有限差分法的显示格式

对于 5.8 我们可以用不动点有限差分法的显示格式来求解，对于单一的去噪模型，即 $k = I$

$$\begin{cases} u = v + \frac{1}{\lambda} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|_{\beta}} \right) & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 & \text{on } \partial \Omega \end{cases} \quad (5.9)$$

我们简单的记 $\Omega = (0, 1)^2, h > 0$ 并且对于 $0 \leq i, j \leq M, x_i = ih, y_j = jh, h = \frac{1}{M}$ 为离散点。同时，我们引入如下的差分记号：

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j)$$

$$v_{i,j} = v(x_i, y_j)$$

$$\Delta_{\pm}^x = \pm(u_{i\pm1,j} - u_{i,j})$$

$$\Delta_{\pm}^y = \pm(u_{i,j\pm1} - u_{i,j})$$

$$\Delta_0^x = \frac{(u_{i+1,j} - u_{i-1,j})}{2}$$

$$\Delta_0^y = \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j-1})}{2}$$

因此，式 5.9 的离散格式为

$$\begin{aligned}
 u_{i,j} &= v_{i,j} + \frac{1}{\lambda h} \Delta_-^x \left[\frac{1}{\sqrt{\beta + (\frac{\Delta_+^x u_{i,j}}{h})^2 + (\frac{\Delta_0^y u_{i,j}}{h})^2}} \frac{\Delta_+^x u_{i,j}}{h} \right] \\
 &\quad + \frac{1}{\lambda h} \Delta_-^y \left[\frac{1}{\sqrt{\beta + (\frac{\Delta_+^x u_{i,j}}{h})^2 + (\frac{\Delta_+^y u_{i,j}}{h})^2}} \frac{\Delta_+^y u_{i,j}}{h} \right] \\
 &= v_{i,j} + \frac{1}{\lambda h^2} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\sqrt{\beta + (\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h})^2 + (\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h})^2}} \\
 &\quad - \frac{1}{\lambda h^2} \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\sqrt{\beta + (\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h})^2 + (\frac{u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}}{2h})^2}} \\
 &\quad + \frac{1}{\lambda h^2} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\sqrt{\beta + (\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h})^2 + (\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h})^2}} \\
 &\quad - \frac{1}{\lambda h^2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\sqrt{\beta + (\frac{u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{2h})^2 + (\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h})^2}}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

我们用 Gauss-Seidel 不动点迭代求解 5.10, 于是有

$$u_{i,j}^{n+1} = \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda h^2} (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)} \right) \cdot [v_{i,j} + \frac{1}{\lambda h^2} (c_1 u_{i+1,j}^n + c_2 u_{i-1,j}^n + c_3 u_{i,j+1}^n + c_4 u_{i,j-1}^n)] \tag{5.11}$$

其中

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{1}{\sqrt{\beta + (\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{h})^2 + (\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2h})^2}} \\
 c_2 &= \frac{1}{\sqrt{\beta + (\frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{h})^2 + (\frac{u_{i-1,j+1}^n - u_{i-1,j-1}^n}{2h})^2}} \\
 c_3 &= \frac{1}{\sqrt{\beta + (\frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h})^2 + (\frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{h})^2}} \\
 c_4 &= \frac{1}{\sqrt{\beta + (\frac{u_{i+1,j-1}^n - u_{i-1,j-1}^n}{2h})^2 + (\frac{u_{i,j}^n - u_{i,j-1}^n}{h})^2}}
 \end{aligned}$$

我们将按以下方法处理边界条件: 用上述算法算出 $u_{i,j}^n, 1 \leq i, j \leq M-1$, 令 $u_{0,j}^n = u_{1,j}^n, u_{M,j}^n = u_{M-1,j}^n, u_{i,0}^n = u_{i,1}^n, u_{i,M}^n = u_{i,M-1}^n$ 和 $u_{0,0}^n = u_{1,1}^n, u_{0,M}^n = u_{1,M-1}^n, u_{M,0}^n = u_{M-1,1}^n, u_{M,M}^n = u_{M-1,M-1}^n$

5.1.2.2 分裂的 Bregman 迭代格式

本节, 我们将给出求解 ROF 模型 (5.29) 的分裂的 Bregman 算法^[19]。分裂的 Bregman 算法最先是由 Goldstein 和 Osher 提出来求解基于正则化的经典的 TV

模型的。其主要是思想是，将 (5.29) 转化为带约束的最优化问题：

$$\begin{cases} \min_{u,d} (\mu|d|_1 + \frac{1}{2}\|u - v\|^2) \\ s.t \quad d = \nabla u \end{cases} \quad (5.12)$$

带强制约束的 Bregman 迭代过程如下：

$$\begin{aligned} (u^{k+1}, d^{k+1}) &= \operatorname{argmin}_{u,d} (\mu|d|_1 + \frac{1}{2}\|u - v\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|d - \nabla u - b^k\|^2) \\ b^{k+1} &= b^k + \nabla u^{k+1} - d^{k+1} \end{aligned} \quad (5.13)$$

5.1.3 数值结果

本节数值实验，第一组实验我们将评估不动点有限差分法的显示格式算法的去噪效果和算法效率，实验中我们取 $\lambda = 0.056$, $\beta = 1 * 10^{-12}$, 迭代步数 $iter = 50$, 其中表 5.1 给出了不动点有限差分法的显示格式算法的去噪效果，其去噪效果示意图为图 5.1。图 5.2, 给出了不动点有限差分法的显示格式算法每次迭代后的残差能量图。

表 5.1 全变差算法对于高斯白噪声 PSNR 数据表

| Image | Fixed Point 算法对于高斯噪声的平均 PSNR(db) | | | |
|---------|----------------------------------|---------------|---------------|---------------|
| | $\sigma = 20$ | $\sigma = 30$ | $\sigma = 40$ | $\sigma = 50$ |
| Lena | 30.5203 | 26.8836 | 23.2461 | 20.0736 |
| barbara | 26.1046 | 24.5149 | 22.0607 | 19.5459 |
| peppers | 24.3600 | 23.0506 | 21.1531 | 18.9247 |
| square | 34.0258 | 28.1600 | 23.7022 | 20.2636 |
| rice | 30.6598 | 26.7179 | 23.0627 | 19.8550 |
| Average | 29.1341 | 25.8654 | 22.6450 | 19.7326 |

本节数值实验，第二组实验我们将评估分裂的 Bregman 迭代算法的去噪效果和算法效率，实验中我们取 $\lambda = 0.056$, $\beta = 1 * 10^{-12}$, 迭代步数 $iter = 50$

从表 5.1 和表 5.2, 可以看出分裂的 Bregman 算法比不动点迭代全变差算法拥有更高的 PSNR, 但是从图 5.1 和图 5.3 中的方法噪声可以看出分裂的 Bregman 算法虽然高效 (图 5.4), 但是处理出来的视觉效果不好。

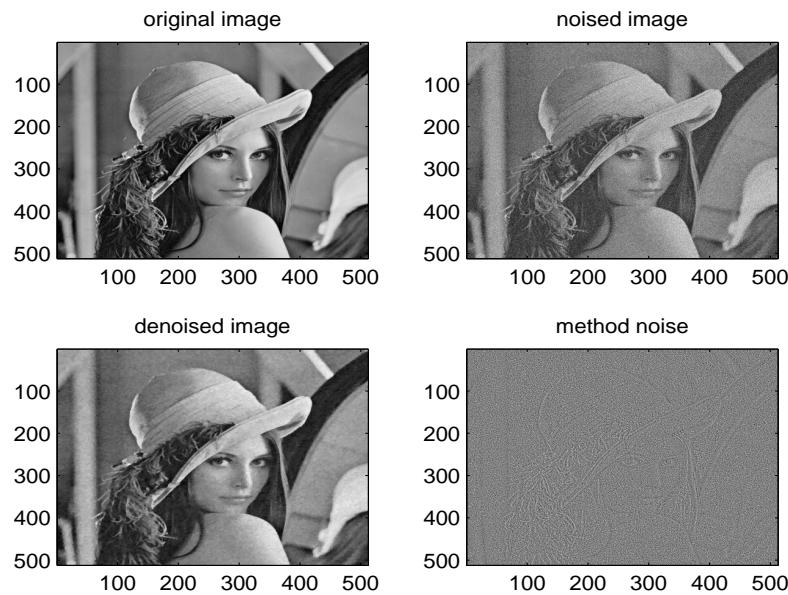


图 5.1 不动点迭代全变差算法对于 $\sigma = 20$ 的椒盐噪声去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: 全变差去噪图像 $PSNR=30.5203db$, 右下: 方法噪声

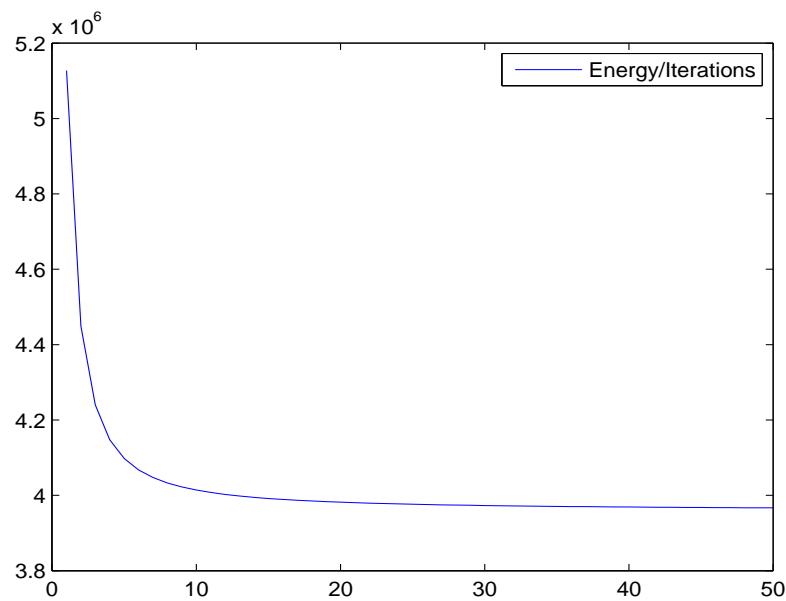


图 5.2 全变差算法每步迭代后的能量

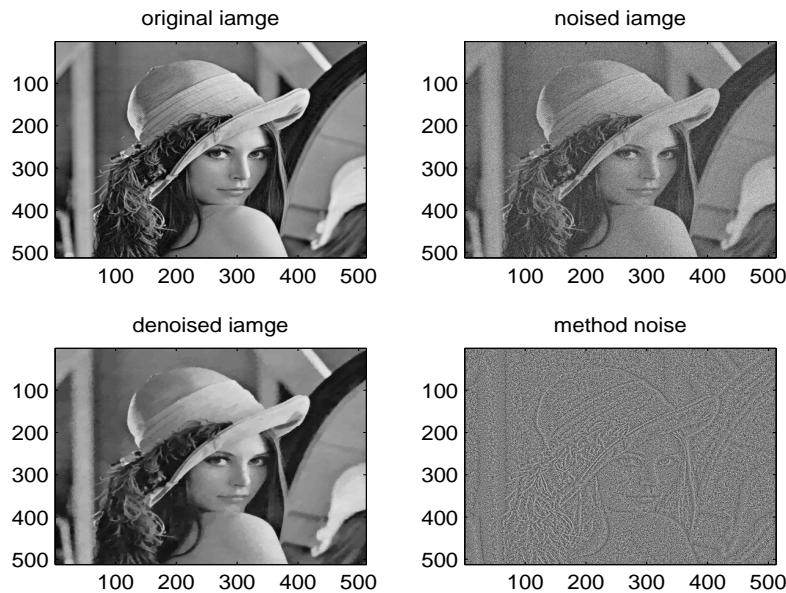


图 5.3 分裂的 Bregman 算法对于 $\sigma = 20$ 的高斯噪声去噪效果图. 左上: 原始图像, 右上: 噪声图像, 左下: 全变差去噪图像 $PSNR=30.7798db$, 右下: 方法噪声

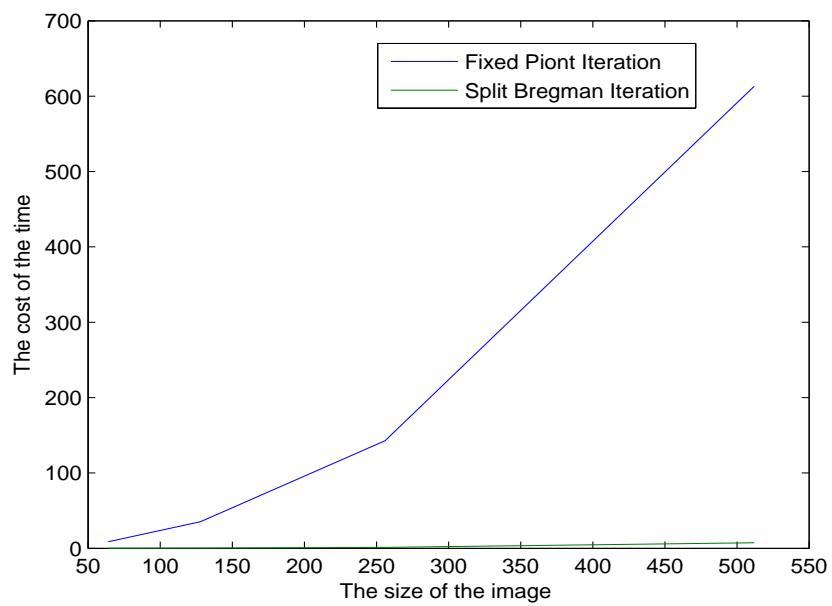


图 5.4 不动点迭代全变差算法与分裂的 Bregman 算法消耗时间对比

表 5.2 全变差算法对于高斯白噪声 PSNR 数据表

| Image | Split Bregman 对于高斯噪声的平均 PSNR(db) | | | |
|---------|----------------------------------|---------------|---------------|---------------|
| | $\sigma = 20$ | $\sigma = 30$ | $\sigma = 40$ | $\sigma = 50$ |
| Lena | 30.7798 | 28.7494 | 24.8289 | 21.2726 |
| barbara | 25.5582 | 24.9684 | 22.9871 | 20.4468 |
| peppers | 29.3715 | 27.4048 | 24.0981 | 20.8076 |
| square | 43.2143 | 32.6250 | 25.7989 | 21.5814 |
| rice | 31.3645 | 28.3807 | 24.5108 | 20.9616 |
| Average | 32.0577 | 28.4257 | 24.4448 | 21.0140 |

5.2 非局部全变差去噪算法

非局部全变差去噪模型是非局部框架下引入非局部度量后的全变差去噪模型。本节将给出在非局部泛函下的非局部全变差去噪算法框架。

5.2.1 非局部算子的定义和非局部全变差模型

设 $\Omega \in \mathbb{R}^n, x \in \Omega, u(x)$ 是一个实函数 $u \rightarrow \mathbb{R}$ 。在^[17] 中 G. Gilboa, S. Osher, 给出了非局部框架下的导数的如下定义：

定义 5.4 (非局部导数).

$$\partial_y u(x) = \frac{u(y) - u(x)}{\tilde{d}(x, y)}, \quad y, x \in \Omega \quad (5.14)$$

其中 $\tilde{d}(x, y)$ 是定义在点 x 和 y 之间的正测度, $0 < \tilde{d}(x, y) \leq \infty$ 。为了能与关于图的标准记号保持一致性, 在^[17] 中 G. Gilboa, S. Osher 定义权函数

定义 5.5.

$$w(x, y) = \tilde{d}^{-2}(x, y) \quad (5.15)$$

本文中, 我们假定权函数 $w(x, y)$ 是对称的, 也就是 $w(x, y) = w(y, x)$ 。因此非局部导数可以改写成

$$\partial_y u(x) = (u(y) - u(x)) \sqrt{w(x, y)} \quad (5.16)$$

定义 5.6 (非局部梯度). 非局部梯度 $\nabla u(x) : \Omega \rightarrow \omega \times \Omega$ 被定义为所有偏导数的向量

$$(\nabla_w u)(x, y) = (u(y) - u(x)) \sqrt{w(x, y)}, \quad x, y \in \Omega \quad (5.17)$$

记向量 $\vec{v} = v(x, y) \in \omega \times \Omega$. 根据标准的 L^2 内积

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \int_{\Omega} u_1(x) u_2(x) dx \quad (5.18)$$

向量的点乘、内积和向量的大小可以定义为

定义 5.7 (向量的点乘).

$$(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = \int_{\Omega} v_1(x, y) v_2(x, y) dx \quad (5.19)$$

定义 5.8 (向量的内积).

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2, 1) = \int_{\Omega \times \Omega} v_1(x, y) v_2(x, y) dx dy \quad (5.20)$$

定义 5.9 (向量的大小).

$$|\vec{v}|(x) = \sqrt{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} = \sqrt{\int_{\Omega} v_1(x, y)^2 dy} \quad (5.21)$$

有了上面内积的定义，我们可以定义非局部的散度 $div_w \vec{x}(x) : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ 为非局部梯度（定义 5.6）的伴随方程

定义 5.10 (非局部散度).

$$(div_w \vec{v})(x) = \int_{\Omega} (v(x, y) - v(y, x)) \sqrt{w(x, y)} dy \quad (5.22)$$

由此，非局部的 Laplace 算子可以定义为

定义 5.11 (非局部 Laplace 算子).

$$\Delta_w u(x) = \frac{1}{2} div_w(\nabla_w u(x)) = \int_{\Omega} (u(y) - u(x)) w(x, y) dy \quad (5.23)$$

5.2.2 非局部全变差去噪算法

根据在 4.1 章和文^[10] 中关于权重的定义，对于 f 其非局部解 u 在点 x 处的 NLM_f 的连续形式为

$$NLM_f(u)(x) = \frac{1}{C(x)} \int_{\Omega} w(f, h)(x, y) u(y) dy \quad (5.24)$$

其中

$$w(f, h)(x, y) = \exp \left\{ -\frac{G_a * (||f(x + \cdot) - f(y + \cdot)||^2)(0)}{h^2} \right\} \quad (5.25)$$

$$C(x) = \int_{\Omega} \exp \left\{ -\frac{G_a * (||f(x + \cdot) - f(y + \cdot)||^2)(0)}{h^2} \right\} dy \quad (5.26)$$

又根据 5.2.1 节的定义非局部算子有一些性质。如 Laplacian 算子是自伴算子：

$$\langle \Delta_\omega u, u \rangle = \langle u, \Delta_\omega u \rangle$$

并且是半负定的：

$$\langle \Delta_\omega u, u \rangle = -\langle \nabla_\omega u, \nabla_\omega u \rangle \leq 0$$

非局部的 TV 模则是加权平均的梯度 $\nabla_\omega u(x)$ 的各向同性 L^1 模，其定义为^[40]：

定义 5.12 (TV 模)。

$$\begin{aligned} J_\omega(u) &= \int_{\Omega} |\nabla_\omega u(x)| dx \\ &= \int_{\Omega} \sqrt{\int_{\Omega} (u(x) - u(y))^2 \omega(x, y) dy} dx \end{aligned} \quad (5.27)$$

5.27 的相应的 Euler-Lagrange 方程为

$$-\int_{\Omega} (u(y) - u(x)) \omega(x, y) \left[\frac{1}{|\nabla_\omega u(x)|} + \frac{1}{\nabla_\omega u(y)} \right] dy = 0 \quad (5.28)$$

其中 $w(x, y)$ 取 5.25 中的非局部权函数。

由此，非局部的 ROF 模型为

$$\min_u \left(\mu J_\omega(u) + \frac{1}{2} \|u - v\|^2 \right) \quad (5.29)$$

5.2.3 非局部全变差去噪算法数值格式

本节，我们将给出求解非局部的 ROF 模型 (5.29) 的分裂的 Bregman 算法^[19]。

$$\begin{cases} \min_{u,d} (\mu|d|_1 + \frac{1}{2}\|u - v\|^2) \\ s.t \quad d = \nabla u \end{cases} \quad (5.30)$$

非局部的分裂的 Bregman 迭代，只需要用非局部 TV 模替换 (5.13) 中的标准 TV 模，即

$$\begin{aligned} (u^{k+1}, d^{k+1}) &= \operatorname{argmin}_{u,d} \left(\mu|d|_1 + \frac{1}{2}\|u - v\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|d - \nabla_\omega u - b^k\|^2 \right) \\ b^{k+1} &= b^k + \nabla_\omega u^{k+1} - d^{k+1} \end{aligned} \quad (5.31)$$

式 (5.31) 的解可以通过以执行以下的交替最小化过程得到：

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= \operatorname{argmin}_u \left(\frac{1}{2}\|u - v\|^2 + \frac{\lambda}{2}\|d - \nabla_\omega u - b^k\|^2 \right) \\ d^{k+1} &= \operatorname{argmin}_d \left(\mu|d|_1 + \frac{\lambda}{2}\|d - \nabla_\omega u - b^k\|^2 \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

根据 (5.28), 对于 u^{k+1} 的 Euler-Lagrange 方程为

$$(u^{k+1} - v) - \lambda \operatorname{div}_\omega(\nabla u^{k+1} + b^k - d^k) = 0 \quad (5.33)$$

因此,

$$u^{k+1} = (1 - \Delta_\omega)^{-1}(v + \lambda \operatorname{div}_\omega(b^k - d^k)) = 0 \quad (5.34)$$

其中

$$d^{k+1} = \operatorname{shrink}(\nabla_\omega u^{k+1} + b^k, \frac{\mu}{\lambda}) \quad (5.35)$$

而

$$\operatorname{shrink}(v, \mu\delta) = \operatorname{sign}(v) \max\{|v| - \mu\delta, 0\} \quad (5.36)$$

又由于非局部的 Laplacian 算子 Δ_ω 是半负定的, 因此 $1 - \Delta_\omega$ 是对角占优的, 所以我们可以用 Gauss-Seidel 算法来求解 u^{k+1}

5.3 本章小结

本章介绍了经典的全变差 ROF 模型的去噪方法, 该方法在图像的连续数学模型上, 令图像遵循 ROF 模型的 PDE 变化, 而 ROF 的解, 就是去噪后的处理结果。除此之外, 我们还给出了求解 ROF 模型对应的 Euler-lagrange 方程的不动点迭代算法以及分裂的 Bergman 迭代算法。虽然不动点迭代算法耗时长, PSNR 值略低, 但是该算法处理出来的图像有很好的视觉效果, 而分裂的 Bergman 迭代算法, 虽然算法快速, 但是其稳态解中有明显的‘阶梯’效应。

本章最后我们在非局部框架下, 利用非局部泛函, 给出了文^[40] 中提出的非局部全变差的分裂的 Bergman 迭代算法。

第6章 总结与展望

通过实验，我们得出以下结论：

- (1) 整体而言，基于偏微分方程的 TV 模型有较高的去噪声能力并且 TV 模型的区域平滑能力更强一些，但是其去噪效果相对滤波方法较弱。
- (2) 非局部算法对于大信噪比的图像也有很好的去噪效果，具有很强的稳定性，同时从 cup 的运算时间上可以得出，改进后的算法具有很高的效率。
- (3) 本文所研究的各种去噪方法在理论上的叙述具有一般性，可以应用于其他领域的图像去噪处理研究之中。

本文的研究工作也存在不足：

- (1) 对基于偏微分方程的去噪模型的数学理论和分裂的 Begrman 算法的数学理论在一些方面的理解还不够深刻，文章在阐述这些方法时并未给出完备的理论推导，需要本人进一步加强理论上的学习，以求改进。
- (2) 限于自身水平，本文仅对各种既有方法进行研究，并未在此基础上提出完备的改善措施，应用性上略显不足，需要本人在以后的学习中，不断提高自身能力，以求创新。

由于 TV 模型的区域平滑能力很强，该 TV 偏微分方程模型对基于纹理的图像的处理结果不是很理想，下一步我们可以将高阶偏微分方程作为研究的重点，高阶偏微分方程对图像的特征有着良好的检测能力，在保留图像细节方面明显优于二阶偏微分方程，所以进一步研究高阶偏微分方程的去噪很有意义，现在已经有很多前辈致力于此，相信这一领域的发展会很迅速，从而为我们获得更清晰、更具价值的图像创造良好的条件。同时我们也可以考虑 Krylov 子空间的加速迭代和代数多从网格算法来提高算法的效率。

参考文献

- [1] R. Adams, L. Bischof, Seeded region growing, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.16, No.6, 1994, pp.641-647.
- [2] D. Allen, The Relationship between variable selection and data augmentation and a method for prediction, Technometrics, Vol. 16, 1974, pp.125-127.
- [3] A. Amer, A. Mitiche, E. Dubois, Reliable and fast structure-oriented video noise estimation, Image Processing. 2002. Proceedings. 2002 International Conference, Vol. 1, 2002, pp.840-843.
- [4] K. Andrej, M. Aljo, S. Nermin, F. Jurij, Noise variance estimation based on measured maximums of sampled subsets, Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 65, 2004, pp.629-639.
- [5] G. Aubert, P. Kornprobst, Mathematical problems in image processing, Springer , 2000.
- [6] A. Bosco, A. Bruna, G. Messina, G. Spampinato, Fast method for noise level estimation and integrated noise reduction, IEEE Transactions on Consumer electronics, Vol. 51, No. 3, 2003, pp.1028-1033
- [7] T. Brox, O. Kleinschmidt, and D. Cremers, Efficient Nonlocal Means for Denoising of Textural Patterns, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 17, No. 7, July 2008, pp.1083 - 1092 .
- [8] T. Brox, D. Cremers, Iterated Nonlocal Means for Texture Restoration. In Scale Space and Variational Methods in Computer Vision, Springer LNCS 4485, pp. 13-24, May 2007.
- [9] Tony F.Chan and Jianhong Shen, Image processing and analysis: Variation, PDE, Wavelet and Stochastic methods, SIAM, 2005.
- [10] A. Buades, B. Coll, and J. M. Morel, A non-local algorithm for image denoising, in IEEE CVPR, 2005, pp. 60-65.
- [11] A. Buades, B. Coll, and J. M. Morel, A review of image denoising algorithms, with a new one, SIAM Mult. Anal. and Sim. Vol. 4, No. 2, 2005, pp. 490-530.
- [12] P. Coupe, P. Yger, S. Prima, P. Hellier, C. Kervrann, and C. Barillot, An Opti-

- mized Blockwise Nonlocal Means Denoising Filter for 3-D Magnetic Resonance Images, IEEE Transactions on Medical Imaging, Vol. 27, No. 4, April 2008.
- [13] D. Donoho, J. Johnstone, Ideal spatial adaption via wavelet shrinkage. Biometrika, Vol. 81, No. 3, 1994, pp. 425-455.
- [14] W. Feng, S. Li, K. Zheng, A non-local bilateral filter for image denoising, ICA-CIA(2010), pp. 253-257.
- [15] Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods and Steven L. Eddins, Digital image processing using matlab, Gatesmark Publishing,2009.
- [16] 冈萨雷斯, 数字图像处理 (第二版), 北京, 电子工业出版社, 2003.
- [17] G. Gilboa, S. Osher, Nonlocal operators with applications to image processing. Multiscale Model. Simul. 7(3), 1005 – 1028 (2008)
- [18] G. Gilboa, S. Osher, Nonlocal linear image regularization and supervised segmentation, SIAM Mult. Anal. and Sim., 6(2007), pp. 595-630.
- [19] T. Goldstein and S. Osher. The split bregman method for l1 regularized problems. CAM Report 08-29, UCLA, 2008.
- [20] S. Kindermann, S. Osher, P. W. Jones, Deblurring and denoising of images by nonlocal functionals. SIAM Mult. Anal. and Sim., Vol. 4, No. 4, pp. 1091-1115, 2005.
- [21] Y. L. Liu, J. Wang , X. Chen et al. A robust and fast non-local means algorithm for image denoising. Journal of Computer Science and Technology, 23(2): 270-279, 2008.
- [22] M. Mahmoudi, G. Sapiro, Fast image and video denoising via nonlocal means of similar neighborhoods, IEEE Signal Processing Letters, Vol. 12, No. 12, pp. 839-842, 2005.
- [23] S. Olsen, Noise variance estimation in images, Proc. 8th SCIA, Tromsø, Norway, way, 1993, pp.25-28.
- [24] J. Orchard, M. Ebrahimi and A. Wong, Faster Nonlocal-Means Image Denoising using the FFT, IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 4, No. 1, 2008.
- [25] J. Orchard, M. Ebrahimi, A. Wong, Efficient nonlocal-means denoising using the SVD. ICIP 2008, pp.1732-1735.
- [26] P. Perona, J. Malik, Scale space and dege detecting using anisotropic diffusion,

- IEEE PAMI Vol. 12, 1990, pp. 629-239.
- [27] L. Rundin, S. Osher, E. Fatemi, Nonlinear total variation based noise removal algorithms, Phys.D, Vol. 60, 1992, pp. 259-268.
- [28] L. Rundin, S. Osher, Total variation based image restoration with free local constraints, In proc. IEEE conference Image processing, 1994, pp. 31-35
- [29] A. Singer, Y. Shkolnisky, B. Nadler, Diffusion Interpretation of nonlocal neighborhood filters for signal denoising, SIAM J. Imaging Sciences, Vol. 2, No. 1, 1998, pp. 118-139
- [30] T. Tanaphol, B. T. Oh, P. Wu, J. Kuo, C. C. Jay Kuo, Adaptive nonlocal means algorithm for image denoising. ICCE 2010, pp. 417-418.
- [31] C.Tomasi, R.Manduchi, Bilateral filtering for gray and color images, Proceedings of the 1998IEEE International Conference on Computer Vision, Bombay, 1998, pp. 839-846.
- [32] G. Wahba, Smoothing Noisy data with spline functions, Numer. Math, Vol. 24, 1975, pp. 383-393.
- [33] G. Wahba, Spline models for obsercational data, SIAM, 1990.
- [34] 王大凯, 侯榆青, 彭进业, 图像处理的偏微分方程方法, 科学出版社, 2008.
- [35] 王桥, 数字图像处理, 科学出版社, 2009.
- [36] H. Xu, J. Xu, F. Wu, A post-compensation scheme for Nonlocal Means filter based image restoration. ICIP 2008, pp.545-548.
- [37] 闫敬文, 数字图像处理 (MATLAB 版), 国防工业出版社, 2007.
- [38] K. Zheng, W. Feng, H. Chen, An adaptive non-local means algorithm for image denoising via pixel region growing and merging, CISP(2010), pp. 621-625.
- [39] 章毓晋, 图像处理和分析教程, 人民邮电出版社, 2009.
- [40] X. Zhang, M. Burger, X. Bresson, and S. Osher, Bregmanized Nonlocal Regularization for Deconvolution and Sparse Reconstruction, presented at SIAM J. Imaging Sciences, 2010, pp.253-276.

致 谢

从论文选题到搜集资料，从写稿到反复修改，期间经历了喜悦、聒噪、痛苦和彷徨，在写作论文的过程中心情是如此复杂。如今，伴随着这篇毕业论文的最终成稿，复杂的心情烟消云散，自己甚至还有一点成就感。

在毕业论文完成之际，我首先要感谢我的导师李书敏老师。自从 2010 年开始对反问题的学习，李老师在学习和生活上均给予我极大的关怀和帮助。李老师为人随和热情，治学严谨细心。在闲聊中她总是能像知心朋友一样鼓励你，在讨论班上以及论文的写作和措辞等方面她也总会以“专业标准”，严格要求你。正是李老师的无私帮助与热忱鼓励，我的毕业论文才能够得以顺利完成，在此，谨向李老师致以崇高的敬意和衷心的感谢！

在此，还要感谢西南科技大学的郑克龙教授和陈翰林教授，以及中国科学院数学与系统科学研究院的常谦顺教授，正是他们的帮助和指导，我才有机会接触 UCLA 图像处理组的最新方向和结果，正是对图像处理组前沿知识的了解，才使得我对图像处理如此痴迷与热爱。

同时，我要感谢李志远师兄。正在撰写硕士研究生毕业论文的他，百忙之中抽出时间和我一起讨论讨论班中的问题，对我的论文提出了诸多宝贵的意见和建议，我从他那里学到不少关于偏微分方程的知识，对学长的帮助与指导表示真挚的感谢；同时我也要感谢高旭，钟一民师弟以及盛丹丹师妹，和他们在一起对于偏微分方程和反问题的讨论，使我受益匪浅。

最后，我要深深感谢我的父母，感谢他们多年来对我细致入微的关怀和教育。他们为我的成长付出了极大的心血，没有他们无私的爱与默默的支持，我是不能顺利完成学业的。同时我要感谢我的妹妹，正是你的不断鼓励与大力支持，才使得我能顺利的到国外继续我的学业！

两年，来也匆匆，去也匆匆。我是科大的过客，我现在唯一能做的就是不断努力，使自己将来能成为一名合格的科大人。

攻读硕士学位期间发表的学术论文

- [1] . Wenqiang Feng, Shumin Li, Kelong Zheng, A non-local bilateral filter for image denoising, ICACIA(2010), pp. 253-257.
- [2] . Kelong Zheng, Wenqiang Feng, Hanlin Chen, An adaptive non-local means algorithm for image denoising via pixel region growing and merging, CISP(2010), pp. 621-625.