第七章 平面解析几何基础概念

一、直线与方程

1.直线的倾斜角

规定：当直线l与x轴平行或重合时，它的倾斜角为0

范围：直线的倾斜角α的取值范围为$[0,\pi)$

2.斜率：$k=\tan\alpha(a\neq\frac{\pi}{2})$，$k\in R$

斜率公式：经过两点$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$的直线的斜率公式为$k_{P_1P_2}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

3.直线方程的几种形式

名称	方程	说明	适用条件
斜截式	$y=kx+b$	k是斜率 b是纵截距	与x轴不垂直的直线
点斜式	$y-y_0=k(x-x_0)$	(x_0,y_0)是直线上的已知点	
两点式	$\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$ $(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)$	$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$是直线上的两个已知点	与两坐标轴均不垂直的直线
截距式	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$	a是直线的横截距 b是直线的纵截距	不过原点且与两坐标轴均不垂直的直线
一般式	$Ax+By+C=0$ $(A^2+B^2\neq 0)$	当$B=0$时，直线的横截距为$-\dfrac{C}{A}$ 当$B\neq 0$时， $-\dfrac{A}{B},-\dfrac{C}{A},-\dfrac{C}{B}$分别为直线的斜率、横截距，纵截距	所有直线

二、两直线位置关系

两条直线的位置关系

位置关系		$\begin{array}{l} l_1: y=k_1x+b_1 \\ l_2: y=k_2x+b_2 \end{array}$	$\begin{array}{l} l_1: A_1x+B_1y+C_1=0 \\ l_2: A_2x+B_2y+C_2=0 \end{array}$
平行	$\Leftrightarrow$	$k_1=k_2$，且$b_1\neq b_2$	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$ (A_1B_2-A_2B_1=0)
重合	$\Leftrightarrow$	$k_1=k_2$，且$b_1=b_2$	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$
相交	$\Leftrightarrow$	$k_1\neq k_2$	$\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$
垂直	$\Leftrightarrow$	$k_1\cdot k_2=-1$	$A_1A_2+B_1B_2=0$

设两直线的方程分别为：$\begin{array}{l} l_1: y=k_1x+b_1 \\ l_2: y=k_2x+b_2 \end{array}$ 或 $\begin{array}{l} l_1: A_1x+B_1y+C_1=0 \\ l_2: A_2x+B_2y+C_2=0 \end{array}$；当 $k_1\neq k_2$ 或

$A_1B_2\neq A_2B_1$时它们相交，交点坐标为方程组$\begin{cases} y=k_1x+b_1 \\ y=k_2x+b_2 \end{cases}$或$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$

三、距离问题

1. 平面上两点间的距离公式$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 则 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)+(y_2-y_1)}$

2. 点到直线距离公式

点$P(x_0,y_0)$到直线$l: Ax+By+C=0$的距离为：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

3. 两平行线间的距离公式

已知两条平行线直线l_1和l_2的一般式方程为l_1：$Ax+By+C_1=0$，

l_2：$Ax+By+C_2=0$，则l_1与l_2的距离为$d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

4. 直线系方程:若两条直线l_1：$A_1x+B_1y+C_1=0$，l_2：$A_2x+B_2y+C_2=0$有交点，则过

l_1与l_2交点的直线系方程为$(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$或

$(A_2x+B_2y+C_2)+\lambda(A_1x+B_1y+C_1)=0$（λ为常数）

四、对称问题

1. 中点坐标公式：已知点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则A,B中点$H(x,y)$的坐标公式为

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2} \end{cases}$$

2. 轴对称： 点 $P(a,b)$ 关于直线 $Ax+By+c=0(B\neq 0)$ 的对称点为 $P'(m,n)$，则有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{n-b}}{\mathrm{m-a}}\times(-\dfrac{A}{B})=-1 \\ A\cdot\dfrac{a+m}{2}+B\cdot\dfrac{b+n}{2}+C=0 \end{cases}$$，直线关于直线对称问题可转化 为点关于直线对称问题。

【开心提示下面的记忆并且掌握】对称规律补充：

1. 点 A(a,b)关于 x 轴的对称点 A’(a,-b);2. 点 A(a,b)关于 y 轴的对称点 A’(-a,b);

3. 点 A(a,b)关于圆心(0,0)的对称点 A’(-a,-b);

4. 点 A(a,b)关于直线 y=x 的对称点 A’(b,a);

5. 点 A(a,b)关于直线 y=-x 的对称点 A’(-b,-a);

6. 点 A(a,b)关于 B(m,n)的对称点 A’(2m-a,2n-b);

7. 点 A(a,b)关于直线 x=m 的对称点 A’(2m-a,b);

8. 点 A(a,b)关于直线 y=n 的对称点 A’(a,2n-b);

五、线性规划问题：

（1）设点 $P(x_0,y_0)$ 和直线 $l:Ax+By+C=0$，

①若点 P 在直线 l 上，则 $Ax_0+By_0+C=0$；②若点 P 在直线 l 的上方，则 $B(Ax_0+By_0+C)>0$；

③若点 P 在直线 l 的下方，则 $B(Ax_0+By_0+C)<0$；

（2）二元一次不等式表示平面区域：

对于任意的二元一次不等式 $Ax+By+C>0(<0)$，

①当 $B>0$ 时，则 $Ax+By+C>0$ 表示直线 $l:Ax+By+C=0$ 上方的区域；

$Ax+By+C<0$ 表示直线 $l:Ax+By+C=0$ 下方的区域；

②当 $B<0$ 时，则 $Ax+By+C>0$ 表示直线 $l:Ax+By+C=0$ 下方的区域；

$Ax+By+C<0$ 表示直线 $l:Ax+By+C=0$ 上方的区域；

注意：通常情况下将原点 $(0,0)$ 代入直线 $Ax+By+C$ 中，根据 >0 或 <0 来表示二元一次不等式表示平面区域。

六、圆与方程

1．圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 圆心 $C(a,b)$，半径 r

特例：圆心在坐标原点，半径为 r 的圆的方程是：$x^2+y^2=r^2$.

2．一般方程：$x^2+y^2+ax+by+c=0$,圆的标准方程为$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$,

圆心坐标$(-\frac{a}{2}$， $-\frac{b}{2})$，半径 $r=\sqrt{\frac{a^2+b^2-4c}{4}}>0$

3．点与圆的位置关系：

（1）设点到圆心的距离为 d，圆半径为 r：

(1)点在圆上 $\Longleftrightarrow$d=r；(2)点在圆外 $\Longleftrightarrow$d＞r；(3)点在圆内 $\Longleftrightarrow$d＜r.

（2）给定点 $M(x_0,y_0)$ 及圆 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

①M 在圆 C 内 $\Leftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$　　②M 在圆 C 上 $\Leftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$

③M 在圆 C 外 $\Leftrightarrow (x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$

4．直线与圆的位置关系： 直线 $Ax+By+C=0$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的位置关系有三种，d 是圆心到直线的距离，$d=\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

（1）$d>r \Leftrightarrow$ 相离 $\Leftrightarrow \Delta<0$；(2) $d=r \Leftrightarrow$ 相切 $\Leftrightarrow \Delta=0$；

（3）$d<r \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow \Delta>0$

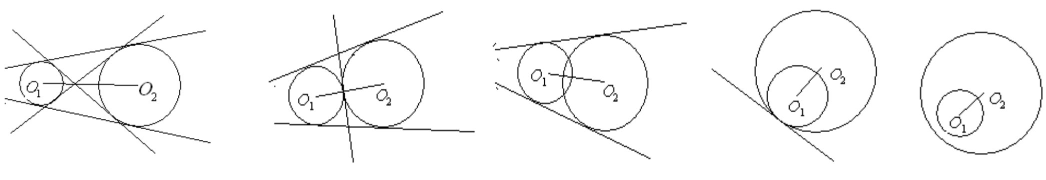
5．两圆的位置关系

设两圆圆心分别为 O_1，O_2，半径分别为 r_1，r_2，$|O_1O_2|=d$。

（1）$d>r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外离 $\Leftrightarrow$ 4条公切线；（2）$d=r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 外切 $\Leftrightarrow$ 3条公切线；

（3）$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2 \Leftrightarrow$ 相交 $\Leftrightarrow$ 2条公切线；（4）$d=|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内切 $\Leftrightarrow$ 1条公切线；

（5）$0<d<|r_1-r_2| \Leftrightarrow$ 内含 $\Leftrightarrow$ 无公切线；



外离　　　　外切　　　　相交　　　　内切　　　　内含