第五章　数列

开心提示：数学已经完成一半的复习任务，下半部分大家要加油！

【大纲考点】数列、等差数列、等比数列。

【命题剖析】数列每年考 2~3 题，近年来对数列的考查逐渐由考查定义、概念向考查综合能力演变，试题灵活多变，从而向考生提出了更高的要求。只了解一般概念、会用几个基本公式已不可能达到联考的要求。试题大致分两类，一类是纯数列知识的基本计算题；另一类是中等以上难度的综合应用题。从知识点看，近几年主要的命题热点有：（1）关于等差、等比数列的概念、性质、通项公式、前 n 项和公式的就用，是必考内容；（2）从 a_n 到 S_n，从 S_n 到 a_n 的关系推导计算；（3）某些简单的递推式问题；（4）应用前述公式解应用题，从解题思想方法的规律看，主要有：（1）方程思想的应用，利用公式列方程（组），例如，等差、等比数列中的“知三求三”问题；（2）函数思想的应用；（3）待定系数法、分类讨论等方法的应用。

【备考建议】对于考生，在复习过程中，一定要重视数列这部分知识，对其要看成既是重点，又是难点，要适当地多花一点精力和时间，多做一些有益的练习，以求真正掌握这部分知识的精髓，达到一定的熟练程度。要想掌握数列一章，就要深刻理解概念，重点抓住性质定理，学会灵活使用公式，熟练掌握规律，记住典型题型。（开心提示：红字部分是学会数列的精髓）

第一节　考试要点剖析

一、基本定义

1. 数列的定义

按一定次序排列的一列数叫做数列。

一般形式：$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，简记为$\{a_n\}$。

【注意】它可以理解为正整数集（或它的有限子集）为定义域的函数。运用函数的观念分析和解决有关数列问题，是一条基本思路。递推是数列特有的表示法，它更能反映数列的特征。

2. 通项公式

$a_n=f(n)$（第 n 项 a_n 与项数 n 之间的函数关系）。

【注意】并非每一个数列都可以写出通项公式，有些数列的通项公式也并非是唯一的。

3. 数列前 n 项和

记为 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$

4. 数列的分类

（1）按项分类

有穷数列，项数有限；无穷数列，项数无限。

（2）按 a_n 的增减性分类

递增数列$(a_n>a_{n-1})$，递减数列$(a_n<a_{n-1})$，摆动数列（例：-1，1，-1，1，…），常数数列（例：6，6，6，…），有界数列，无界数列。

5. 递推公式

a_n与其前后项之间的关系式称为递推公式。

若已知数列的递推关系式及首项，可以写出其他项，因此递推公式是确定数列的一种重要方式。

二、a_n与S_n的关系（数列的万能公式）

1. 已知a_n，求S_n

公式：$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i$。

2. 已知S_n，求a_n

$$a_n=\begin{cases}a_1=S_1 & (n-1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geq 2).\end{cases}$$

三、等差数列

1. 定义

如果在数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}-a_n=d$（常数）$(n\in N)$，则称数列$\{a_n\}$为等差数列，d为公差。

2. 通项公式

$a_n=a_1+(n-1)d=a_k+(n-k)d=dn+(a_1-d)$。

当公差d不为零时，可将其抽象成关于n的一次函数$f(n)=dn+(a_1-d)$，其斜率为一次项系数d，一次函数各项系数之和为首项，在y轴上的截距为a_1-d。

如：$a_n=3n-5$，可知其通项公式的数列是一个等差数列，且公差是3，首项为-2.

3. 前n项和公式（重点）

$S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\left(\frac{d}{2}\right)n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$。

当公差d不为0时，可将其抽象成关于n的二次函数$f(n)=\left(\frac{d}{2}\right)n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$。

其特点如下：

（1）常数项为零，过零点；

（2）开口方向由d的符号决定；

（3）二次项系数为半公差$\left(\frac{d}{2}\right)$；

（4）对称轴$x=\frac{1}{2}-\frac{a_1}{d}$（求最值）；

（5）若d不为零，则等差数列的前n项和只能为二次函数；若d等于零，则退化成一次函数。二次函数各项系数之和是首项。

【评注】等差数列的前n项和的解析表达式是不含常数项的二次函数。如$S_n=3n^2-5n$，可以肯定，S_n是等差数列的前n项之和的表达式，这个等差数列的公差是6，首项是-2。

【注意】如果S_n是一个含有常数项的二次函数，则常数项被加在首项，其余各项不变，所以第一项与其作项不再构成等差数列，但从第二项以后的各项仍然构成等差数列，其特点仍符合上述规律。

如：$S_n=2n^2-3n+4$，$a_1=S_1=3$，以后的各项仍为等差数列，公差为4，即$S_n=2n^2-3n+4$

所形成的数列为 3，3，7，11，15，19，…。

【应用】如果一个数列的通项公式是 n 的一次函数，则它的和为 n 的二次函数；如果它的通项公式是 n 的二次函数，则它的和为 n 的三次函数，以此类推。

4. 等差数列的性质

（1） $a_n = a_m + (n-m)d$ ， $d = \dfrac{a_n - a_m}{n-m}$ 。

（2）若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，则数列 $\{\lambda a_n + b\}$ （ λ, b 为常数）为公差为 λd 的等差数列；

若 $\{b_n\}$ 也是公差为 d 的等差数列，则 $\{\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n\}$ （ λ_1, λ_2 为常数）也是等差数列，且公差为 $\lambda_1 d + \lambda_2 d$ 。

（3）下标成等差数列且公差为 m 的项 a_k ， a_{k+m} ， a_{k+2m} ，…组成的数列仍是等差数列，公差为 md 。

（4）若 $m,n,l,k \in Z^+$ ， $m+n=l+k$ ，则 $a_m + a_n = a_l + a_k$ 。

【注意】可以将此公式推广到多个，但要满足两个成立条件：一是下标之和要分别相等，二是等号两端的项数要分别相等。如 $a_2 + a_8 + a_{12} = a_4 + a_7 + a_{11} \neq a_6 + a_{16}$ （因为项数不同）。

（5）若 S_n 为等差数列的前 n 项和，则 S_n ， $S_{2n} - S_n$ ， $S_{3n} - S_{2n}$ ，…仍为等差数列，其公差为 $n^2 d$ 。

（6）若等差数列 $\{a_n\}$ 的项数为 $2n\left(n \in Z^+\right)$ ，则

$S_{偶} - S_{奇} = nd$ ， $\frac{S_{偶}}{S_{奇}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$， $S_{2n} = n(a_n + a_{n+1})$ （ a_n, a_{n+1} 为中间两项）

若数列 $\{a_n\}$ 的项为 $2n-1\left(n \in Z^+\right)$ ，则

$S_{奇} - S_{偶} = a_n$， $\frac{S_{奇}}{S_{偶}} = \frac{n}{n-1}$， $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$ （ a_n 为中间项）

四、等比数列

1. 定义

如果在数列 $\{a_n\}$ 中， $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ （常数），则称数列 $\{a_n\}$ 为等比列数， q 为公比。

2. 通项

$a_n = a_1 q^{n-1} = a_k q^{n-k} = \dfrac{a_1}{q} q^n$ 。

【注意】可以将其抽象成一个指数函数，其中底数等于公比。

3. 前 n 项和公式

$$S_n = \begin{cases} na_1 \quad (q=1), \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q} \quad (q \neq 0 且 q \neq 1). \end{cases}$$

【注意】 $q \neq 1$ 时， $\dfrac{S_n}{S_m} = \dfrac{1-q^n}{1-q^m}$ 。

4. 所有项和 S

对于无穷递缩等比数列（$|q|<1$，$q \neq 0$），当$n \to +\infty$时，$q^n \to 0$，从而存在所有项和为$S=\dfrac{a_1}{1-q}$。

5.等比数列的性质

（1）$a_n = a_m q^{n-m}$。

（2）若数列$\{a_n\}$（λ,b）为常数是等比数列，则数列$\{\lambda_1 a_n\}$（λ_1为常数）是公比为q的等比数列；若$\{b_n\}$是公比为q_2的等比数列，则$\{\lambda_1 a_n \cdot \lambda_2 b_n\}$（$\lambda_1,\lambda_2$为常数）是等比数列且公比为$q \cdot q_2$。

（3）下标成等差数列且公差为m的项a_k，a_{k+m}，a_{k+2m}，…组成的数列仍是等比数列，公比为q^m。

（4）若$m,n,l,k \in Z^+$，$m+n=l+k$，则$a_m \cdot a_n = a_l \cdot a_k$。

【注意】可以将此公式推广到多个，但要满足两个成立条件：一是下标之和要分别相等，二是等号两端的项数要分别相等。如$a_2 \cdot a_8 \cdot a_{12} = a_4 \cdot a_7 \cdot a_{11} \neq a_6 \cdot a_{16}$（因为项数不同）。

（5）若S_n为等比数列前n项和，则S_n，S_{2n}，$-S_n$，$-S_{2n}$，…仍为等比数列，其公比为q^n。

（6）当$q \neq 1$时，$\dfrac{S_m}{S_n}=\dfrac{1-q^m}{1-q^n}$。

【注意】等比数列任一个元素均不能为零。不为零的常数列既成等差数列，也成等比数列。