

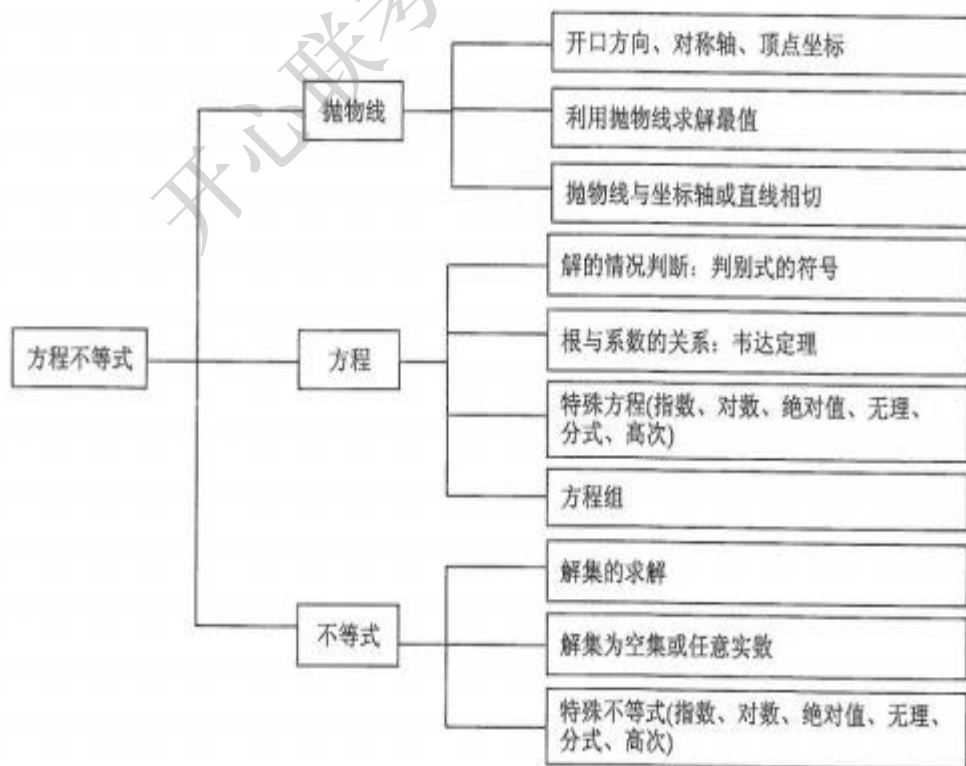
## 第四章 方程与不等式

**开心提示：**此章节，注重掌握基础概念，不会出太难的题目，同学们切记不要做太多难度较高题目，掌握基本题目及概念即可。

**考纲要求：**1. 一元二次函数及其图像；2. 代数方程：（1）一元一次方程；（2）一元二次方程；（3）二元一次方程组；3. 不等式：（1）不等式的性质；（2）均值不等式；（3）不等式求解：一元一次不等式（组），一元二次不等式，简单绝对值不等式，简单分式不等式。

**命题剖析：**方程：从历年考试中可以方程部分的重点是一元二次方程. 在此类方程中主要从方程的解法、根的判别、韦达定理、根的分布以及一元二次方程的应用等角度出题考查. 不等式：对于不等式，主要是以不等式的解法为重点，包括一元二次不等式，以及高次不等式、分式不等式、含绝对值的不等式. 根据历年的考试规律发现，由于方程和不等式是建立数学表达式关系的基本问题，尤其在应用题中，往往要借助方程或不等式来进行求解. 未来的考题方向主要围绕：一个基本（根与解集），两个定理（韦达定理与平均值定理），三个应用（最值、不定方程、线性规划）。

**知识体系：**



## 1. 方程基本概念和定义

(1) 一元一次方程：含有一个未知数，且未知数最高次方是 1 的方程，一般式  $ax=b$  ( $a \neq 0$ )

(2) 一元二次方程：一般式为  $ax^2+bx+c=0$  ( $a \neq 0$ ) 令  $\Delta=b^2-4ac$  则：

$\Delta > 0$	有两个不等实根	$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$\Delta = 0$	有两个相等实根	$x_1, x_2 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	无实根	

## 2. 抛物线、方程、不等式的关系

二次函数的图像： $y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$

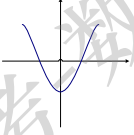
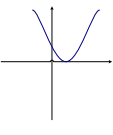
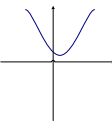
(1) 开口方向：由  $a$  决定， $a>0$  开口向上  $a<0$  开口向下

(2) 对称轴： $x = \frac{-b}{2a}$

(3) 顶点坐标： $(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$

(4)  $y$  轴截距  $y=c$

(5) 最值：当  $a>0$  时有最小值  $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ，当  $a<0$  时有最大值  $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ；

类别	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ( $a>0$ ) 的图像			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ( $a>0$ ) 的根	有两相异实根 $x_1, x_2$	有两相等实根 $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0$ ( $a>0$ ) 的解集	$\{x x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\}$	$\{x x \neq \frac{-b}{2a}\}$	$\mathbb{R}$
$ax^2+bx+c<0$ ( $a>0$ ) 的解集	$\{x x_1<x<x_2\}$	空集	空集

## 根与系数的关系

$x_1, x_2$  是方程  $ax^2+bx+c=0$  ( $a \neq 0$ ) 的两个根，则  $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$   $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

$$(1) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = -\frac{b}{c}$$

$$(2) \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2} = \frac{b^2 - 2ac}{c^2}$$

$$(3) |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|a|}$$

$$(4) x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$(5) \quad (x_1^2 - x_2^2) = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

$$(6) \quad x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

### 3. 不等式的基本性质（注意等级关系）

$$(1) \text{ 传递性: } a > b, b > c \Rightarrow a > c$$

$$(2) \text{ 同向相加性: } \left. \begin{matrix} a > b \\ c > d \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + c > b + d$$

$$(3) \text{ 同向皆正相乘性: } \left. \begin{matrix} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac > bd;$$

$$(4) \text{ 皆正倒数性: } a > b > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > 0;$$

$$(5) \text{ 皆正乘（开）方性: } a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n > 0 (n \in \mathbb{Z}^+)$$

### 4. 二元一次方程组

二元一次方程组的形式是  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$  有三种解的情况;

$$(1) \text{ 如果 } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}, \text{ 则方程组有唯一解 } (x, y);$$

$$(2) \text{ 如果 } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}, \text{ 则方程组有无穷多解};$$

$$(3) \text{ 如果 } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}, \text{ 则方程组无解}.$$

【注意】可以将二元一次方程组的情况看作两条直线的位置关系，上述三种情况分别对应两条直线相交、重合、平行。

### 5. 指数和对数运算公式

名 称	指 数	对 数
定 义	$a^b = N$	$\log_a N = b$ (b 叫做以 a 为底 N 的对数)
关系式	$a^b = N \Leftrightarrow \log_a N = b, (a > 0, a \neq 1, N > 0)$	
运算性质	$(1) a^r \cdot a^x = a^{r+x}$ $(2) (a^r)^s = a^{rs}$ $(3) (ab)^r = a^r b^r$ $(4) a^0 = 1 (a \neq 0)$ $(5) a^{-p} = \frac{1}{a^p},$ $(a \neq 0)$	$(1) \log_a M + \log_a N = \log_a (MN);$ $(2) \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N};$ $(3) \log_a M^n = n \log_a M (M > 0, N > 0, a > 0, a \neq 1);$ $(4) \text{ (换底公式) } \log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$