第四章　重点例题

开心提示：下面例题掌握解法即可，了解思路，不需要深挖！

【题型 1】一次方程（组）

【思路点拨】对于方程组，最常考的是二元一次方程组合三元一次方程组，尤其在解应用题时，应用更广泛。

【例 1】若关于 x，y 的二元一次方程组$\begin{cases}x+y=5k\\x-y=9k\end{cases}$的解也是二元一次方程$2x+3y=6$的解，则 k 的值为(　).

(A)$-\frac{3}{4}$　　(B) $\frac{3}{4}$　　(C)$\frac{4}{3}$　　(D)$-\frac{4}{3}$　　(E)1

【解析】由方程组得 2x=14k，y=-2k，代入 2x+3y=6，得 14k-6k=6，即$k=\frac{3}{4}$.

故选 B.

【例 2】解方程组$\begin{cases}2^{x+3}+9^{y+1}=35\\8^{\frac{x}{3}}+3^{2y+1}=5\end{cases}$，求 xy 的值是(　).

(A) $-\frac{3}{4}$　　(B) $\frac{3}{4}$　　(C)1　　(D)$-\frac{4}{3}$　　(E)-1

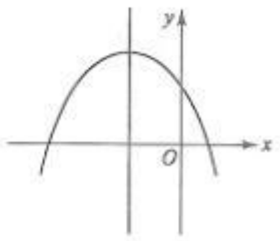
【解析】由题$\Rightarrow\begin{cases}8\times2^x+9\times9^y=35\\2^x+3\times9^y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^x=4\\9^y=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-\frac{1}{2}\end{cases}$，故 $xy=-1$，选 E

开心提示：虽然本题涉及指数，但将指数看成一个整体，可以转化为方程组求解.

【题型 2】抛物线

【思路点拨】主要掌握两方面的技能：一方面根据抛物线的图像来分析系数的符号；另一方面告知系数的符号，能够画出抛物线，并能够判断所经过的象限..

【例 3】已知二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像如图所示，则 a，b，c 满足(　).



(A)a＜0，b＜0，c＞0　　（B）a＜0，b＜0，c＜0

（C）a＜0，b＞0，c＞0　　（D）a＞0，b＜0，c＞0

（E）a＞0，b＞0，c＞0

【解析】首先根据开口向下，可以得到 a＜0，再根据对称轴在 y 轴左侧，可

以得到 b＜0，再根据 y 轴的截距为正，可以得到 c＞0，从而选 A.

【例 4】已知函数$y = x^2 - 4ax$，当 $1 \le x \le 3$ 时，是单调递增的函数，则 a 的取值范围是（　）.

（A）$(-\infty, \frac{1}{2}]$　　(B)　$(-\infty, 1]$　　(C)　$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

(D)　$(\frac{3}{2}, +\infty)$　　(E) $(-\infty, \frac{3}{2})$

【解析】抛物线的单调性主要根据开口方向与对称轴来判断，本题盘无限开口向上，因此对称轴应该在所给区间的左侧，图像在 $1 \le x \le 3$ 是单调增的，所以 $2a \le 1 \Rightarrow a \le \frac{1}{2}$，选 A.

【例 5】若 A(-25/4，y1)，B(-5/4，y2)，C（1/4，y3），为抛物线$y = x^2 + 4x - 5$上的三点，则 y1，y2，y3 的大小关系是（　）.

（A）y1＜y2＜y3　　（B）y2＜y3＜y1　　（C）y3＜y1＜y2

（D）y1＜y3＜y2　　（E）y3＜y2＜y1

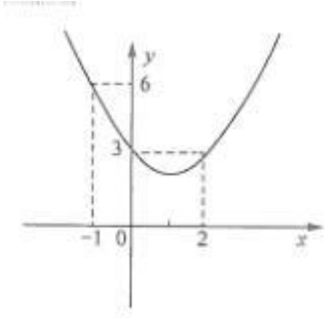
【解析】由 a=1＞0 知，抛物线开口向上，因为对称轴为 x=-2，所以 x＞-2 时，y 随 x 的增大而增大.又$x_2 = -\frac{5}{4} > -2$，$x_3 = \frac{1}{4}$大于-2，且x_2小于x_3，所以 $y_2 < y_3$.

又因为 $\left|\left(-\frac{25}{4}\right)-(-2)\right| > \left|\frac{1}{4}-(-2)\right|$，所以点 $A\left(-\frac{25}{4}, y_1\right)$到对称轴 $x=-2$ 的距离大于 $C\left(\frac{1}{4}, y_3\right)$到对称轴 $x=-2$ 的距离，所以 $y_3 < y_1$，即 $y_2 < y_3 < y_1$，故选 B.

【错解】由 $a=1>0$，抛物线开口向上，显然 y 随 x 的增大而增大，又因为 $-\frac{25}{4} < -\frac{5}{4} < \frac{1}{4}$，所以 $y_1 < y_2 < y_3$，故选 A.

开心提醒：在二次函数 $y=x^2+4x-5$ 种中，当自变量 x 增大时，y 随之变化的值是不确定的，在对称轴两侧，函数值变化是不同的.在对称轴的右侧部分的抛物线是上升的，也就是说，当 x=-2 时。y 随 x 的增大而增大，错解忽视了“y 随 x 的增大而增大”的前提条件.

【例 6】已知 $y=ax^2+bx+c$ 图像如图所示，则抛物线解析式应为（　）.



（A） $y=x^2-2x-3$　　（B）$y=x^2-4x+3$　　（C）$y=x^2-2x+3$

（D）$y=x^2-x+3$　　（E）$y=x^2+2x+3$

【解析】已知 $y=ax^2+bx+c$ 过点（0，3）、（-1,6）和（2,3），代入解得 a=1，b=-2，c=3，故解析式为 $y=x^2-2x+3$.故选 C.

【题型 3】韦达定理※※　　**开心提示：韦达定理很重要，大家要好好掌握。**

【思路点拨】利用韦达定理可以求出关于两个根的对称轮换式的数值.

【例 7】解某个一元二次方程，甲看错了常数项，解得两根为 8 和 2，乙看错了一次项，解得两根为-9 和-1，则正确解为（　）.

（A）-8 和-2　　（B）1 和 9　　(C)-1 和 9　　(D)3 和-3　　（E）-1 和-9

【解析】由于甲把常数项看错了，不影响两根之和：$x_1+x_2=8+2+10$，乙把一次项系数看错了，不影响两根只积：$x_1x_2=(-9)(-1)=9$,

所以得到正确的方程式为 $x^2-10x+9=0$，选择 B.

【例 8】若方程 $3x^2-8x+a=0$ 的两个是数根为x_1，x_2，若$\frac{1}{x_1}$，，$\frac{1}{x_2}$

的算术平均数值为 2，则 a 的值为（　）.

（A）-2　　（B）-1　　（C）1　　（D）$\frac{1}{2}$　　（E）2

【解析】由题$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}=\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}=\frac{\frac{8}{3}}{2\cdot\frac{a}{3}}=\frac{4}{a}$ =2，所以 a=2，选 E.

【例 9】若方程 $x^2+px+37=0$ 恰好有两个正整数解x_1和x_2，则$\frac{(x_1+1)(x_2+1)}{p}$

的值为(　).

(A)-2　　(B)-1　　(C) 1　　（D） $\frac{1}{2}$　　（E）2

【解析】由题得$\begin{cases}x_1+x_2=-p\\ x_1\cdot x_2=37\end{cases}$，$x_1$，$x_2\in N$，因为 37 是质数，所以$x_1=1$，$x_2=37$ 或$x_1=37$，$x_2=1$，所以$\begin{cases}x_1\cdot x_2=37\\ x_1+x_2=38=-p\end{cases}$，所以 p=-38.

$$\frac{(x_1+1))(x_2+1)}{p}=\frac{x_1\cdot x_2+(x_1+x_2)+1}{p}=\frac{37+38+1}{-38}=-2$$

从而选 A.

【例 10】设 x，y 是实数，则可以确定 x^3+y^3的最小值.

（1）xy=1　　　（2）x+y=2

【解析】$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)[(x+y)^2-3xy]$.

条件（1），不能确定最小值；条件（2），x+y=2⇒y=2-x，则原式$=8-6xy=8-12x+6x^2$，为开口向上的抛物线，有最小值，充分.故选 B.

【例 11】x_1，x_2是方程 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 的两个实根，则$x_1^2+x_2^2$的最大值是（　）.

（A）16　　（B）19　　（C）$\frac{14}{3}$　　（D）18　　（E）2

【解析】$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2(x_1x_2)=(k-2)^2-2(k^2+3k+5)=-k^2-10k-6=-k(k+5)^2+19$，根据$\Delta\geq 0$，求出$(k-2)^2-4(k^2+3k+5)\geq 0$，$-4\leq k\leq -\frac{4}{3}$，$k=-4$ 时，$(x_1^2+x_2^2)_{\max}=18$.

从而选 D.

【评注】此题注意判断别式先知 k 的取值范围，如果没有求出 k 的范围，容易选错误答案 B.

【例 12】设抛物线 $y=x^2+2ax+b$ 与 x 的轴相较于 A,B 两点，点 C 的坐标为(0,2)，若ΔABC 的面积等于 6，则（　）.

（A）$a^2-b=9$　（B）$a^2+b=9$　（C）$a^2-b=36$　（D）$a^2+b=36$　（E）$a^2-4b=9$

【解析】设x_1，x_2为 $x^2+2ax+b=0$ 的两个根，由已知有$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\times 2\times|AB|=6\Rightarrow|AB|=|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=6\Rightarrow\sqrt{(2a)^2-4b}=6\Rightarrow a^2-b=9$.

故选 A.

【题型 4】无理方程

【思路点拨】解无理方程，一般通过方程两边同时乘方，使之转化为有理方程，从而求出方程的解.注意：解无理方程时，由于方程两边乘方相同次数，未知数的取值范围可能会扩大，有产生增根的可能，因此，最后必须验根.

【例 13】无理方程 $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=2$ 的所有实根之积为(　　).

(A)12　　(B)14　　(C)48　　(D)36　　(E)24

【解析】含有一个根式的无理方程，可将根式留在等式的一边，把不含根式的其他项全部移到另一边，再将方程两边同时平方.同样，这种思维方法也适用于含有两个根式的方程，只要将$\sqrt{x-3}$移到等号的右边，然后两边平方，就可以化去一个根式，再按照只含有一个根式的无理方程的解法继续运算.

将$\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-3}=2$ 移项，得到$\sqrt{2x+1}=2+\sqrt{x-3}$，两边平方，得 $2x+1=4+x--3+4\sqrt{x-3}$，化得 $x=4\sqrt{x-3}$两边平方，得 x^2=16（x-3），解方程 ，得$x_1=12$，x_2=4.

经验证，$x_1=12$，x_2=4 都是原方程的根，则x_1x_2=48，选 C.

【开心提示：这个特别重要】解无理方程时，经过乘方运算可能会扩大方程中的未知数的取值范围，有可能产生增根，所以解得的根必须代入原方程进行检验.

【题型 5】解分式方程

【思路点拨】1.分式方程的解法，解分式方程的关键是：方程两边都乘以最简公分母，将分式方程转化为整式方程.

2.分式方程的增根问题

（1）增根的产生：分式方程本身隐含着分母不为 0 的条件，当把分式方程转化为整式方程后，方程中未知数允许取值的范围扩大了，如果转化后的整式方程的根恰好使原方程中分母的值为 0，就会出现不合适原方程的根----增根；

（2）验根：因为解分式方程可能出现增根，所以解分式方程必须验根.

【例 14】分式方程 $\frac{2x^2-2}{x-1}+\frac{6x-6}{x^2-1}=7$ 的实根个数是(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3　　(E)4

【解析】当方程中含有未知数的两个分式除数字系数外互为倒数时，可以用换元法解这个分式方程，设$\mathrm{y}=\frac{x^2-1}{\mathrm{x}-1}$,则原方程可化为$2\mathrm{y}+\frac{6}{y}=7$去分母，得$2\mathrm{y}^2-7\mathrm{y}+6=0$，解得$y_1=\frac{3}{2}$，$y_2=2$..

当$y=\frac{2}{3}$时，$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{3}{2}$，即$2x^2-3x+1=0$，有$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=1$；.

当 $y=2$ 时，$\frac{x^2-1}{x-1}=2$,即，$x^2-2x+1=0$，有$x_3=x_1=1$.

显然$x=1$ 是增根，应舍去，故$x=\frac{1}{2}$，故选 B.

【注意】在解分式方程时，一定要注意增根问题，所以解出转化后方程的所有解时，最后一定要进行验证.

【例 15】已知关于 x 的方程$\frac{1}{x^2-\mathrm{x}}+\frac{k-5}{x^2+\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{k}-1}{x^2-1}$无解，那么 k=（　　）

（A）3 或 6　　（B）6 或 9　　（C）3 或 9　　（D）3，6 或 9　　（E）1 或 3

【解析】两边同乘以$x(x+1)(x-1)$，得$(x+1)+(k-5)(x-1)=x(k-1)$，解得$x=\frac{6-k}{3}$. 原方程的增根可能是 0，1，−1，当$x=0$时，$\frac{6-k}{3}=0$，则$k=6$；当$x=1$时，$\frac{6-k}{3}=1$，则$k=3$；当$x=-1$时，$\frac{6-k}{3}=-1$，则$k=9$. 所以当$k=3,6,9$时，方程无解，选 D.

【评注】解题的关键在于理解增根的意义，无论是分式方程的根，还是分式方程的增根，均是去分母后所得到的整式方程的根如果是分式方程的增根，则代入原方程的分母后，至少有一个为零.

【题型 6】一元一次（二次）不等式（组）

【思路点拨】解出得一个不等式，根据交集的情况得到不等式组的解集.

【例 16】不等式组$\begin{cases}x-1\le a^2\\x-4\ge 2a\end{cases}$有解，则实数$a$的取值范围是（　　）

（A）$-1\le a\le 3$　　（B）$a\le -1$ 或$a\ge 3$

（C）$a<-1$ 或$a>3$　　（D）$-1<a<3$

（E）$a\le -3$ 或$a\ge 1$

【解析】$\begin{cases}x-1\le a^2\\x-4\ge 2a\end{cases}\Rightarrow 2a+4\le a^2-2a-3\ge 0$，所以$a\le -1$ 或$a\ge 3$，故选 B.

【例 17】设 x,y 是实数，则$x \le 6$，$y \le 4$.

（1）$x \le y + 2$　　　　（2）$2y \le x + 2$

【解析】条件（1）和条件（2）单独显然都不充分，故联合.根据不等式组同向相加原则：

$\begin{cases} x \le y+2 \\ -x \le -2y+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 6 \\ -y+4 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 6 \\ y \le 4 \end{cases}$,故选 C.

【例 18】不等式组$\begin{cases} x-2(x-3)>4 \\ \frac{x}{3}-(x-2)>\frac{1}{6} \end{cases}$中，包含（　　）个非负整数解.

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3　　（E）无数个

【解析】$\begin{cases} x-2(x-3)>4 \\ \frac{x}{3}-(x-2)>\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x>-2 \\ -\frac{2}{3}x>-\frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x<\frac{11}{4} \end{cases} \Rightarrow x<2$，所以包含两个非负整数解，选 C.

【例 19】若关于 x 不等式解集为$mx^2+2x+n>0$的解集为$\left\{x \middle| -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right\}$则关于 x 的不等式$-nx^2+2x-m>0$的解集为（　　）

（A）(-3,2)　　（B）(-2,3)　　（C）$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$　　（D）$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$

（E）以上结论均不正确

【解析】$mx^2+2x+n>0$的解集为$\left\{x \middle| -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow -\frac{2}{m}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \Rightarrow m=-12$，　$\frac{n}{m}=-\frac{1}{6} \Rightarrow n=2$,由此可得$-nx^2+2x-m>0$

$\Rightarrow -2x^2+2x+12>0 \Rightarrow x^2-x-6<0 \Rightarrow (x-3)(x+2)<0 \Rightarrow x \in (-2,3)$.

【题型 7】分式不等式

【思路点拨】遇到分式不等式，当不确定分母的符号时.不要轻易去掉分母，而应该通过移项通分合并求解.另外，还应该注意分母要有意义.

【例 20】不等式$\frac{2x-1}{x-1}>\frac{x+3}{x+1}$的解集中包含（　　）个质数.

（A）0 个　　（B）1 个　　（C）2 个　　（D）4 个　　（E）无数个

【解析】原不等式可化为$\frac{2x-1}{x-1}-\frac{x+3}{x+1}>0$，整理得$\frac{x^2-x+2}{(x-1)(x+1)}>0$，由于$x^2-x+2$恒大于零，故可转化为$(x-1)(x+1)>0$，从而得到$x<-1$或$x>1$，包含无数个质数，故选 E.

【例 21】$b<a$时，不等式$\frac{x-a}{x-b}>1$的解是（　　）

（A）$\{x|x<b\}$　　（B）$\{x|x>b\}$

（C）$\{x|x>a\}$　　（D）$\{x|x<a\}$

（E）以上均不正确

【解析】原不等式可变为式$\frac{x-a}{x-b}-1>0$，即$\frac{b-a}{x-b}>0$. 又因为$b<a$，所以$x-b<0$，$x<b$.所以选 A.

【例 22】如果x满足$\frac{x-1}{3x-2}<0$，那么化简$\sqrt{4-12x+9x^2}$-$\sqrt{x^2-2x+1}$的结果是（　　）

（A）$2x-1$　（B）$1-2x$　（C）$3-4x$　（D）4x-3　（E）以上均不正确

【解析】因为$(x-1)(3x-2)<0$, 所以$\frac{2}{3}<x<1$.

$\sqrt{4-12x+9x^2}$-$\sqrt{x^2-2x+1}$=$\sqrt{(3x-2)^2}$-$\sqrt{(x-1)^2}=3x-2-(1-x)=4x-3$.故选 D.

【题型 8】指数的计算

【思路点拨】指数的核心在于两点：一个是指数基本公式的应用；另一个是转化形式，比如统一底数或指数，然后比较大小

【例 23】若$a=3^{555}, b=4^{444}, c=5^{333}$, 则$a, b, c$的大小关系是（　　）

（A）$a>b>c$　（B）$b>c>a$　（C）b > a > c　（D）c > b > a　（E）$a>c>b$

【解析】$a=3^{555}=(3^5)^{111}=243^{111}, b=4^{444}=(4^4)^{111}=256^{111}, c=5^{333}=(5^3)^{111}=125^{111}$, 故选$b>a>c$, 故选 C.

【例 24】已知$3^x+3^{-x}=4$，则27^x+27^{-x}的值是（　　）.

（A）64　（B）60　（C）52　（D）48　（E）36

【解析】$27^x+27^{-x}=(3^x)^3+(3^{-x})^3=(3^x+3^{-x})(3^{2x}-1+3^{-2x})=52.$

故选 C.

【题型 9】对数的计算

【思路点拨】遇到公共根的问题，可以先假设公共根为$\boldsymbol{x_0}$.然后代入每个方程，解出公共根，再求解其他参数.对数是指数的逆运算，两者可以结合起来记忆.

【例 25】已知$25^x=2000$，$80^y=2000$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$等于（　　　）

（A）2　　（B）1　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{3}{2}$　　（E）3

【解析】lg2000=lg$25^x=x$lg25,lg2000=ylg80，故$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{lg25}{\lg2000}+\frac{\lg80}{\lg2000}=1.$

故选 B.

【例 26】设$a=\pi^{0.3},b=log_\pi 3,c=3^0$，则$a,b,c$的大小关系是（　　　）

（A）$a>b>c$　　（B）$b>c>a$

（C）$b>a>c$　　（D）$a>c>b$

（E）$c>b>a$

【解析】$a=\pi^{0.3}>1=c>b=log_\pi 3$, 故选 D

【例 27】若$log_a 2<log_b 2<0$，则（　　）

（A）$0<a<b<1$　　（B）$0<b<a<1$　　（C）$a>b>1$　　（D）$b>a>1$

（E）$b>1>a$

【解析】$log_a 2<log_b 2<0\Leftrightarrow\frac{lg2}{lga}<\frac{lg2}{lgb}<0\Leftrightarrow lgb<lga<0\Leftrightarrow 0<b<a<1$. 故选 B.

【例 28】已知 lg(x+y)+lg(2x+3y)-lg3=lg4+lgx+lgy.求 x:y 的值（　　）

（A）2 或$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{1}{2}$或 3　　（C）$\frac{1}{2}$　　（D）$\frac{3}{2}$　　（E）3

【解析】$\lg(x+y)(2x+3y)=\lg(12xy)\Leftrightarrow(x+y)(2x+3y)=12xy$即$2x^2-7xy+3y^2=0\ \Rightarrow 2x=y$或$x=3y$.故选 B.