第九章　排列组合

【备考要点】掌握加法原理及乘法原理，并能用这两个原理分析并解决一些简单的问题。理解排列、组合的意义，掌握排列数、组合数的计算公式和组合数的性质，并能用它们解决一些简单的问题。排列、组合主要是为概率来服务的，因此是学好概率的前提。

【知识体系】

【备考建议】对于教师，建议可是控制在 8 课时。对于考生，建议在学习时要注意排列

组合主要解题方法：

①优先法：特殊元素优先或特殊位置优先；

②捆绑法（相邻问题）；

③插空法（不相邻问题）；

④间接扣除法(对有限制条件的问题,先从总体考虑,再把不符合条件的所有情况去掉)；

⑤多排问题单排法；

⑥相同元素分组可采用隔板法（适用于指标分配，每部分至少有一个）；

⑦先选后排，先分再排（注意等分分组问题）；

⑧涂色问题（先分步考虑至某一步时再分类）；

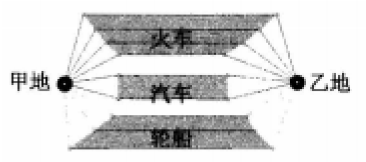
⑨分组问题要注意区分是平均分组还是非平均分组，平均分成n组问题别忘除以$n!$。

第一节　考试要点剖析

一、分类计数原理（加法原理）

如果完成一件事可以有n类方法，只要选择其中一类方法中的任何一种方法，就可以完成这件事；若第一类办法中有m_1种不同的方法，第二类办法中有m_2中不同的方法……第n类办法中有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$种不同的方法。

例：从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘汽车，还可以乘轮船。一天中，火车有 4 班，汽车有 2 班，轮船有 3 班，那么一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

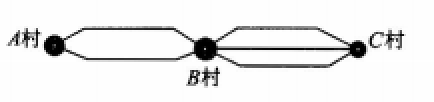


分析：从甲地到乙地有 3 类方法：第一类方法是乘火车，有 4 种方法；第二类方法是乘汽车，有 2 种方法；第三类方法是乘轮船，有 3 种方法；所以，从甲地到乙地共有 4＋3＋2＝9 种方法。

二、分步计数原理（乘法原理）

如果完成一件事，必须依次连续地完成n个步骤，这件事才能完成；若完成第一个步骤有m_1种不同的方法，完成第二个步骤有m_2种不同的方法……完成第n个步骤有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有$N = m_1 m_2 \cdots m_n$种不同的方法。

例：如右图，由 A 村去 B 村的道路有 2 条，由 B 村去 C 村的道路有 3 条，从 A 村经 B 村去 C 村时，共有多少种不同的走法？



分析：从 A 村经 B 村去 C 村有 2 步：

第一步：由 A 村去 B 村有 2 种方法；

第二步：由 B 村去 C 村有 3 种方法。

所以从 A 村经 B 村去 C 村共有 2×3＝6 种不同的方法。

【注意】分类计数原理和分步计数原理，回答的都是有关做一件事的不同方法种数的问题。区别在于：分类计数原理针对的是“分类”问题，其中各种方法相互独立，每一种方法只属于某一类，用其中任何一种方法都可以做完这件事。分步计数原理针对的是“分步”问题，各个步骤中的方法相互依存，某一步骤中的每一种方法都只能做完这件事的一个步骤，只有各个步骤都完成才算做完这件事。

应用两种原理解题：①分清要完成的事情是什么；②是分类完成还是分步完成，“类”

间相互独立，“步”间相互联系；③有无特殊条件的限制。

三、排列

1. 排列的定义

从n个不同元素中，任意取出$m\left(m\le n\right)$个元素，按照一定顺序排成一列，称为从n个不同元素中选出m个元素的一个排列。

【注意】排列的定义包括两个方面：①取出元素；②按一定的顺序进行排列；而两个排列相同的条件是：①元素完全相同；②元素的排列顺序也相同。

2. 排列数

从n个不同元素中取出m个元素$\left(m\le n\right)$的所有排列的种数，称为从n个不同元素中取出m个不同元素的排列数，记作P_n^m或A_n^m。当$m=n$时，P_n^m称为全排列。

【注意】区别排列和排列数的不同：“一个排列”是指：从n个不同元素中，取出m个元素按照一定的顺序排成一排，不是数；“排列数”是指从n个不同元素中，任意取$m\left(m\le n\right)$个元素的所有排列的个数，是一个数。所以符号P_n^m只表示排列数，而不表示具体的排列。

3. 排列数公式

$$P_n^m=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdots\left(n-m+1\right)=\frac{n!}{\left(n-m\right)!}$$

说明：①公式特征：第一个因数是n，后面每一个因数比它前面一个少 1，最后一个因数是$n-m+1$，共有m个因数。

②全排列：当$n=m$时即n个不同元素全部取出的一个排列。全排列数：$P_n^n=n\left(n-1\right)\cdot\left(n-2\right)\cdots2\cdot1=n!$（$n!$称为$n$的阶乘）。

③规定$P_n^0=1$　　　$0!=1$

四、组合

1. 组合的定义

从n个不同元素中，任意取$m\left(m\le n\right)$个元素并为一组，称为从n个不同元素中取出m个元素的一个组合。

【注意】①不同元素；②“只取不排”——无序性；③相同组合：元素相同。

2. 组合数

从n个不同元素中，取$m\left(m\le n\right)$个元素的所有组合的个数，称为从n个不同元素中，取出m个不同元素的组合数，记作C_n^m。

（1）组合数公式：$C_n^m=\dfrac{n\left(n-1\right)\cdots\left(n-m+1\right)}{m\left(m-1\right)\cdots2\cdot1}=\dfrac{n!}{m!\left(n-m\right)!}=\dfrac{P_n^m}{m!}$

（2）排列是先组合再排列：$P_n^m=C_n^m\cdot P_m^m=C_n^m\cdot m!$

3. 组合数的性质

$C_n^m = C_n^{n-m}$。

说　明：

① 规定：$C_n^0 = 1$；$C_n^n = 1$；

② 等式特点：等式两边下标同，上标之和等于下标；

③ 此性质作用：当$m > \dfrac{n}{2}$时，计算C_n^m可变为计算C_n^{n-m}，能够使运算简化。

④ $C_n^x = C_n^y \Rightarrow x = y$或$x + y = n$。

4. 常用组合恒等式

（1）$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$。

（2）$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = 2^{n-1}$。

（3）$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$。