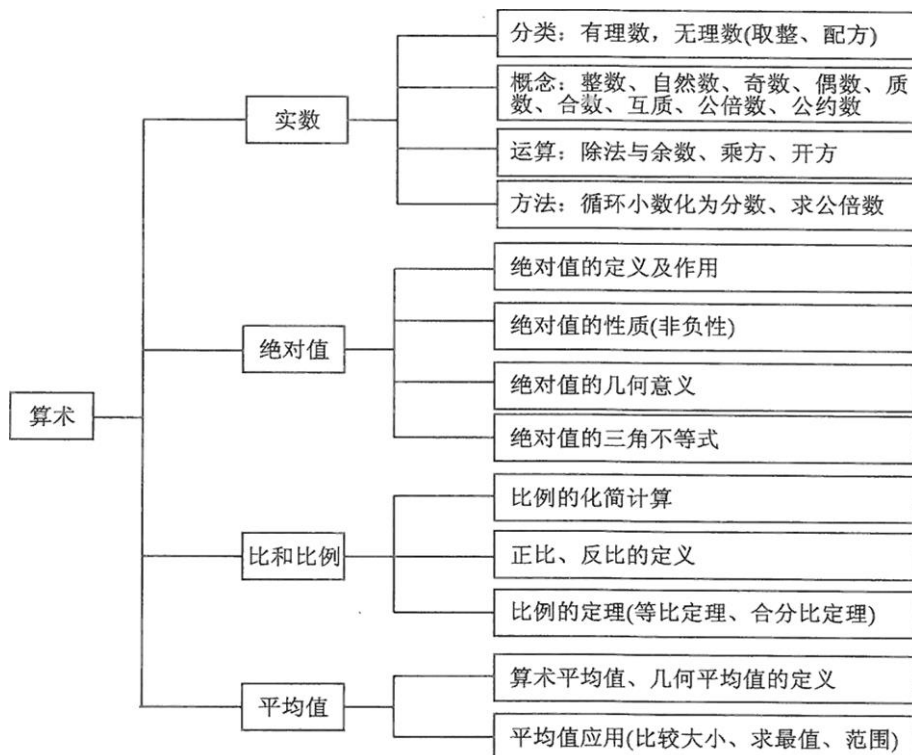


实数、绝对值、比和比例基础概念

【大纲考点】 1. 整数：(1) 整数及其运算，(2) 整除、公倍数、公约数，(3) 奇数、偶数，(4) 质数、合数；2. 分数、小数、百分数；3. 比与比例；4. 数轴与绝对值.

【命题剖析】 本章命题主要体现在五个方面：1. 概念型的题目，主要围绕奇数、偶数、质数、合数、公倍数和公约数来展开；2. 计算型的题目，主要围绕很长一串数字的化简计算及比例定理的应用；3. 有理数与无理数的性质及其化简；4. 利用绝对值的几何意义进行化简计算；5. 平均值的定义及求最值的应用.

【知识体系】



【开心复习建议】。学习班同学，建议在学习时要注意概念的理解及应用，不要死记硬背概念和公式，要通过做题来加深对概念和公式的掌握。

定义及考试要点剖析

一、充分性判断题【开心提示：全部数学题目适用】

1. 充分性命题定义

对两个命题 A 和 B 而言，若由命题 A 成立，肯定可以推出命题 B 也成立（即 $A \Rightarrow B$ 为真命题），则称命题 A 是命题 B 成立的充分条件，或称命题 B 是命题 A 成立的必要条件。

【注意】A 是 B 的充分条件可以巧妙地理解为：有 A 必有 B，无 A 时 B 不定。

2. 解题说明与各选项含义

本类题要求判断所给出的条件能否充分支持题干中陈述的结论，即只要分析条件是否充分即可，而不必考虑条件是否必要。阅读条件（1）和条件（2）后选择：

- (A) 条件（1）充分，但条件（2）不充分；
- (B) 条件（2）充分，但条件（1）不充分；
- (C) 条件（1）和条件（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分；
- (D) 条件（1）充分，条件（2）也充分；
- (E) 条件（1）和条件（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分。

▲以上规定全书都适用，以后不再重复说明。

3. 图示描述

(1)条件一	(2)条件二	
√	×	(A)
×	√	(B)
×	+	×=√ (C)
√	√	(D)
×	+	×=×
		(E)

“√”表示充分，“×”表示不充分，“+”表示两条件需要联合。

4. 常用的求解方法

(1) 解法一直接定义分析法（即由 A 推导 B）

若由 A 可推导出 B，则 A 是 B 的充分条件；若由 A 推导出与 B 矛盾的结论，则 A 不是 B 的充分条件。解法一是解“条件充分性判断”型题的最基本的解法，应熟练掌握。

(2) 解法二题干等价推导法（寻找题干结论的充分必要条件）

要判断 A 是否是 B 的充分条件，可找出 B 的充分必要条件 C，再判断 A 是否是 C 的充分条件。

(3) 解法三特殊反例法

由条件中的特殊值或条件的特殊情况入手，推导出与题干矛盾的结论，从而得出条件不充分的选择。

【注意】此种方法不能用在条件具有充分性的判断上。因为某一个特值充分，不能说明其他数值也充分。

3. 解题相应的技巧

(1) 当条件给定的参数范围落入题干成立的范围时,即判断该条件是充分的.对条件做不同标记,这样方便答题.

(2) 当发现所给的两个条件是矛盾的关系时,备选答案范围为 A, B, D, E.

(3) 当发现所给的条件是包含关系时,比如条件二的范围包含条件一的范围,则备选答案范围为 A, D, E.

(4) 当确定条件 1(2)具备充分性,条件 2(1)未定的情况时,备选答案范围为 A(B), D.

(5) 当确定条件 1(2)不具备充分性,条件 2(1)未定的情况时,备选答案范围为 B(A), C, E.【注意】考试中,很多考生不敢选 E 而导致丢掉应该得到的分数,所以在确定无误的情况下,要能够果敢地选 E.

二、实数(开心提示:实数阶段重点是概念性的问题,大家记住,到题中灵活掌握)

1. 数的概念与性质

(1) 整数与自然数

整数 Z : $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

自然数 N : $0, 1, 2, \dots$

整数=正整数+负整数+0

自然数=0+正整数

(2) 质数与合数

质数: 如果一个大于 1 的正整数,只能被 1 和它本身整除(只有 1 和其本身两个约数),那么这个正整数叫做质数(质数也称素数).

合数: 一个正整数除了能被 1 和本身整除外,还能被其他的正整数整除(除了 1 和其本身之外,还有其他约数),这样的正整数叫做合数.

▲质数与合数有如下重要性质:

① 质数和合数都在正整数范围,且有无数多个.

② 2 是唯一的既是质数又是偶数的整数,且是唯一的偶质数.大于 2 的质数必为奇数.质数中只有一个偶数 2,最小的质数为 2.

③ 若正整数 a, b 的积是质数 p ,则必有 $a = p$ 或 $b=p$

④ 1 既不是质数也不是合数.

⑤ 如果两个质数的和或差是奇数,那么其中必有一个是 2;如果两个质数的积是偶数,那么其中也必有一个是 2.

⑥ 最小的合数为 4.任何合数都可以分解为几个质数的积,能写成几个质数的积的正整数就是合数.

互质数: 公约数只有 1 的两个数称为互质数,如 9 和 16.

(3) 奇数与偶数

奇数: 不能被 2 整除的数.

偶数: 能被 2 整除的数. (注意: 0 属于偶数).

整数 Z 奇数: $2n+1$

偶数: $2n$

【重点注意】两个相邻整数必为一奇一偶.除了最小质数 2 是偶数外,其余质数均为奇数.

(4) 分数与小数

分数:将单位“1”平均分成若干份,表示这样的一份或几份的数叫做分数.

小数:实数的一种特殊的表现形式.所有分数都可以表示成小数,小数中的圆点叫做小数点,它是一个小数的整数部分和小数部分的分界号.其中整数部分是零的小数叫做纯小数,整数部分不是零的小数叫做带小数.

(5) 整除、倍数、约数

数的整除:当整数 a 除以非零整数 b ,商正好是整数而无余数时,则称 a 能被 b 整除或 b 能整除 a .

倍数,约数:当 a 能被 b 整除时,称 a 是 b 的倍数, b 是 a 的约数.

最小公倍数:几个数公有的倍数叫做这几个数的公倍数,其中最小的一个叫做这几个数的最小公倍数.

最小公倍数的表示:数学上常用方括号表示.如 $[12, 18, 20]$ 即表示 12、18 和 20 的最小公倍数.

最小公倍数的求法:求几个自然数的最小公倍数,有两种方法:

① 分解质因数法.先把这几个数分解质因数,再把它们一切公有的质因数和其中几个数公有的质因数以及每个数的独有的质因数全部连乘起来,所得的积就是它们的最小公倍数.例如,求 $[12, 18, 20]$, 因为 $12 = 2^2 \times 3$, $18 = 2 \times 3^2$, $20 = 2^2 \times 5$, 其中三个数公有的质因数为 2, 两个数公有的质因数为 2 与 3, 每个数独有的质因数为 5 与 3, 所以, $[12, 18, 20] = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$.

② 公式法.由于两个数的乘积等于这两个数的最大公约数与最小公倍数的积, $(a, b) \times [a, b] = a \times b$, 所以,求两个数的最小公倍数,就可以先求出它们的最大公约数,然后用上述公式求出它们的最小公倍数.例如,求 $[18, 20]$, 即得 $[18, 20] = 18 \times 20 \div (18, 20) = 18 \times 20 \div 2 = 180$. 求几个自然数的最小公倍数,可以先求出其中两个数的最小公倍数,再求这个最小公倍数与第三个数的最小公倍数,依次求下去,直到最后一个为止.最后所得的那个最小公倍数,就是所求的几个数的最小公倍数.

2. 常见整除的特点 (开心提示: 以下内容非常重要☺)

能被 2 整除的数:个位为 0, 2, 4, 6, 8. \triangle

能被 3 整除的数:各数位数字之和必能被 3 整除. \triangle

能被 4 整除的数:末两位(个位和十位)数字必能被 4 整除.

能被 5 整除的数:个位为 0 或 5. \triangle

能被 6 整除的数:同时满足能被 2 和 3 整除的条件.

能被 8 整除的数:末三位(个位、十位和百位)数字必能被 8 整除.

能被 9 整除的数:各数位数字之和必能被 9 整除. \triangle

能被 10 整除的数:个位必为 0.

能被 11 整除的数:从右向左,奇数位数字之和减去偶数位数字之和能被 11 整除(包括 0).

能被 12 整除的数:同时满足能被 3 和 4 整除的条件.

三、绝对值

▲考试要求：理解绝对值的定义及其几何意义，掌握其性质及其运算法则，会求解含有绝对值的等式或不等式的计算问题.

1. 定义

正数的绝对值是它本身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值还是零.

2. 数学描述

实数 a 的绝对值定义为： $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0, \end{cases}$ 其几何意义是一个实数 a 在数轴上所

对应的点到原点的距离值.

3. 基本不等式△

适合不等式 $|x| < a (a > 0)$ 的所有实数所对应的就是全部与原点距离小于 a 的点，即 $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a (a > 0)$. 同理可得， $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ 或 $x > a (a > 0)$.

4. 绝对值的性质【开心提示：下面是重点】

(1) 对称性： $|-a| = |a|$ ，即互为相反数的两个数的绝对值相等.

(2) 等价性： $\sqrt{a^2} = |a|$ ， $|a^2| = |a|^2 = a^2 (a \in \mathbb{R})$

(3) 自比性： $-|a| \leq a \leq |a|$ ，推而广之， $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

(4) 非负性：即 $|a| \geq 0$ ，任何实数 a 的绝对值非负.

推而广之，具有非负性的数还有正偶数次方（根式），如 a^2 ， a^4 ， \dots ， \sqrt{a} ， $\sqrt[4]{a}$ ， \dots .

▲考点规则：如果若干个具有非负性质的数之和等于零，则每个非负数应该为零；有限个非负数之和仍为非负数.

5. 三角不等式

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|.$$

左边等号成立的条件： $ab \geq 0$ 且 $|a| \geq |b|$ ；

右边等号成立的条件： $ab \leq 0$.

【注意】考试要求掌握等号成立条件的判断.

四、比和比例

1. 比

两个数相除，又称为这两个数的比，即 $a:b = \frac{a}{b}$. 其中 a 叫做比的前项， b 叫做比的后项. 相除所得的商叫做比值，记作 $a:b = \frac{a}{b} = k$. 在实际应用中，常将比值表

示成百分数，称为百分比.

2. 比例

相等的比称为比例，记作 $a:b=c:d$ 或 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 其中 a 和 d 称为比例外项， b 和 c 称为比例内项. 当 $a:b=b:c$ 时，称 b 为 a 和 c 的比例中项，显然当 a, b, c 均为正数时， b 是 a 和 c 的几何平均值.

3. 正比

若 $y=kx$ (k 不为零)，则称 y 与 x 成正比， k 称为比例系数.

【注意】并不是 x 和 y 同时增大或减小才称为正比. 比如当 $k<0$ 时， x 增大， y 反而减小.

4. 反比

若 $y=k/x$ (k 不为零)，则称 y 与 x 成反比， k 称为比例系数.

5. 比例的基本性质

(1) $a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc$.

(2) $a:b=c:d \Leftrightarrow b:a=d:c \Leftrightarrow b:d=a:c \Leftrightarrow d:b=c:a$.

6. 重要定理【开心提示：下面内容很重要】

(1) 更比定理： $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

(2) 反比定理： $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

(3) 合比定理： $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

(4) 分比定理： $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

(5) 合分比定理： $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a \pm mc}{b \pm md} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$.

(6) 等比定理： $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$. ($b+d+f \neq 0$)

7. 增减性变化关系 ($a, b, m>0$)

若 $\frac{a}{b}>1$ ，则 $\frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b}$. 注意，反之也成立.

若 $0<\frac{a}{b}<1$ ，则 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$. 注意，反之也成立.

五、平均值

1. 算术平均值

设 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n ，称 $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$ 为这 n 个数的算术平均值，简

记为 $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$.

2. 几何平均值

设 n 个正数 x_1, x_2, \dots, x_n , 称 $x_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ 为这 n 个正数的几何平均值, 简

记为 $x_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$.

【开心提示】 几何平均值是对于正数而言.

3. 基本定理 (\triangle)

(1) 当 x_1, x_2, \dots, x_n , 为 n 个正数时, 它们的算术平均值不小于它们的几何平均值, 即 $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} (x_i > 0, i = 1, \dots, n)$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时, 等号成立.

(2) 当 $n=2$ 时, 正数 x_1, x_2 的几何平均值 $\sqrt{x_1 x_2}$ 称为 x_1, x_2 的比例中项.

(3) $a + b \geq 2\sqrt{ab} (a, b > 0)$.

(4) $a + \frac{1}{a} \geq 2 (a > 0)$, 即对于正数而言, 互为倒数的两个数之和不小于 2, 且当 $a=1$ 时取得最小值 2.