基础过关题型

开心提示：重点掌握例题题型，数列考察等差、等比系列公式需要记熟。

【题型 1】等差数列

【思路点拨】主要掌握等差数列的定义、元素特征、求和公式以及通项公式。

【例 1】在-12 和 6 之间插入 n 个数，使这 $n+2$ 个数组成和为-21 的等差数列，则 n 为（　　）。

（A）4　　（B）5　　（C）6　　（D）7　　（E）8

【解析】$\sum_{i=1}^{n+2} a_i = \frac{n+2}{2}(-12+6) = -21 \Rightarrow (n+2)\times(-6) = -42 \Rightarrow n=5$，选 B。

【例 2】已知等差数列 $\{a_n\}$ 中的 a_{10}, a_1 是方程 $x^2-3x-5=0$ 的两个根，那么 a_3+a_8 等于（　　）。

（A）3　　（B）4　　（C）-3　　（D）-4　　（E）-3 或 3

【解析】$a_3+a_8 = a_1+a_{10} = 3$，故选 A。

【例 3】如果数列 $x, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, y$ 和数列 $x, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, y$ 都是等差数列，则 $\frac{a_2-a_1}{b_4-b_2}$ 的值为（　　）。

（A）$\frac{n}{2m}$　　（B）$\frac{n+1}{2m}$　　（C）$\frac{n+1}{2(m+1)}$　　（D）$\frac{n+1}{m+1}$　　（E）$\frac{n-1}{m+1}$

【解析】设 $x, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m, y$ 的公差为 $d = \frac{y-x}{m+1}$，设 $x, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, y$ 的公差为 $\delta = \frac{y-x}{n+1}$，所以 $\frac{a_2-a_1}{b_4-b_2} = \frac{d}{2\delta} = \frac{\frac{y-x}{m+1}}{2\frac{y-x}{n+1}} = \frac{n+1}{2(m+1)}$，故选 C。

【例 4】在等差数列 $\{a_n\}$ 中 $a_4=9$，$a_9=-6$，$S_n=54$，则 n 的值为（　　）。

（A）4 或 9　　（B）4　　（C）9　　（D）3 或 8　　（E）8

【解析】根据题意可知 $\begin{cases} a_4 = a_1+(4-1)d = 9 \\ a_9 = a_1+(9-1)d = -6 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a_1 = 18 \\ d = -3 \end{cases}$。由前 n 项和公式得 $S_n =$

$na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d = 54 \Rightarrow n^2-13n+36=0$ 解得 $n=4$ 或 $n=9$，故选 A。

【例 5】设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，如果 $a_2=9$，$S_4=40$，求常数 c，使数列 $\{\sqrt{S_n+c}\}$ 成等差数列（　　）。

（A）4 或 9　　（B）4　　（C）9　　（D）3 或 8　　（E）8

【解析】由 $a_2=9$，$S_4=40$，解得 $a_1=7$，$d=2$，故 $a_n=2n+5$，$S_n=n^2+6n$，$\sqrt{S_n+c} = \sqrt{n^2+6n+c}$，所以当 $c=9$ 时，$\sqrt{S_n+c} = n+3$ 是等差数列。故选 C。

【题型 2】等比列数

【思路点拨】主要掌握等比数列的定义、元素特征、求和公式以及通项公式。

【例 6】等比数列$\{a_n\}$中的$a_5+a_1=34$，$a_5-a_1=30$，那么a_3等于（　　）。

（A）5　（B）-5　（C）-8　（D）8　（E）±9

【解析】$a_5=32$，$a_1=2$，故$a_3=8$。选 D。

【题型 3】等差数列和等比数列

【思路点拨】本类问题将等差和等比数列结合出题，考查两者的性质，属于综合题目。

【例 7】若$\{a_n\}$是等比数列，下面四个命题中正确命题的个数是（　　）。※※※

①数列$\{a_n^2\}$也是等比数列　②数列$\{a_{2n}\}$也是等比数列

③数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$也是等比数列　④数列$\{|a_n|\}$也是等比数列

（A）1 个　（B）2 个　（C）3 个　（D）4 个　（E）0 个

【解析】因为等比数列的平方、偶数项、倒数、绝对值都是等比数列，故正确命题有 4 个，选 D。

【例 8】设α,β是方程$x^2+28x+36=0$的两根，则α与β的等差中项 A 和等比中项 G 分别等于（　　）。

（A）A=14，G=6　（B）A=-14，G=±6　（C）A=14，G=36

（D）A=-14，G=±36　（E）A=14，G=±6

【解析】由题得$\begin{cases}\alpha+\beta=-28\Rightarrow\dfrac{\alpha+\beta}{2}=-14=A\\ \alpha\beta=36\Rightarrow\pm\sqrt{\alpha\beta}=\pm6=G\end{cases}$，选 B。

【例 9】已知a,b,c既成等差数列又成等比数列，设α,β是方程$ax^2+bx-c=0$的两根，且$\alpha>\beta$，求$\alpha^3\beta-\alpha\beta^3$等于（　　）。

（A）$\sqrt{2}$　（B）$\sqrt{5}$　（C）$2\sqrt{2}$　（D）$2\sqrt{5}$　（E）无法确定

【解析】因为既成等差又成等比的数列为非零的常数列，从而$a=b=c\neq0$，原方程化为$x^2+x-1=0$，根据韦达定理：$\alpha^3\beta-\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=\alpha\beta[(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)]=(-1)[(-1)\cdot(\alpha-\beta)]$

$[(-1)\cdot(\alpha-\beta)]$，$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5$，从而$\alpha-\beta=\sqrt{5}$，所以原式=$\sqrt{5}$，选 B。

【例 10】已知数列$\{a_n\}$的公差$d\neq0$，且a_1,a_3,a_9成等比数列，则$\dfrac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}$为（　　）。

（A）$\dfrac{9}{10}$　（B）4　（C）-4　（D）$\dfrac{13}{16}$　（E）无法确定

【解析】由a_1,a_3,a_9成等比数列，得$a_1\cdot a_9=a_3^2$，$a_1(a_1+8d)=(a_1+2d)^2$，$a_1^2+8a_1d=a_1^2+4a_1d+4d^2$，$a_1d=d^2\Rightarrow a_1=d$，$a_n=a_1+(n-1)d=nd$，

$$原式=\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=\frac{a_1+a_3+a_9}{a_1+a_3+a_9+3d}=\frac{(1+3+9)d}{(1+3+9+3)d}=\frac{13}{16}$$

选 D。

【例 11】4 个数，前 3 个数成等差数列，它们的和为 12，后 3 个数成等比数列，它们的和是 19，则这 4 个数之积为（　　）。

（A）432 或-18000　　（B）-432 或 18000　　（C）-432 或-18000

（D）432 或 18000　　（E）以上都不正确

【解析】设这 4 个数为 a,b,c,d，则前 3 个数之和 $a+b+c=3b=12\Rightarrow b=4$，后 3 个数之和 $b+c+d=4+c+\frac{c^2}{4}=19\Rightarrow c=6$ 或-10。

（1）当 $c=6$ 时，$a=2$，$d=9$，有 $abcd=2\times4\times6\times9=432$。

（2）当 $c=-10$ 时，$a=18$，$d=25$，有 $abcd=-18000$，所以选 A。

【题型 4】特殊数列求和

【思路点拨】采用通项裂项，进而采用相消求和法。这是分解与组合思想在数列求和中的具体应用。裂项法的实质是将数列中的每项（通项）分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的。通项分解（裂项）如 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$。

【例 12】在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}$，又 $b_n=\frac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 99 项的和（　　）。

（A）$\frac{208}{35}$　　（B）$\frac{208}{25}$　　（C）$\frac{198}{35}$　　（D）$\frac{188}{35}$　　（E）$\frac{198}{25}$

【解析】因为 $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}=\frac{n}{2}$，所以 $b_n=\frac{2}{\frac{n}{2}\cdot\frac{n+1}{2}}=8\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$。

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=8$。

$$\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=8\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{8n}{n+1}$$ （裂项求和），

故 $S_{99}=\frac{8\times99}{100}=\frac{198}{25}$，选 E。

【例 13】数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$，若前 n 项的和为 10，则项数 n 为（　　）。

（A）119　　（B）120　　（C）121　　（D）122　　（E）124

【解析】由于 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，所以

$$S_n=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\sqrt{n+1}-1=10$$

得到 $n=120$，故选 B。

【例 14】求 $1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots1}_{n个1}$ 之和。

【解析】由于$\underbrace{111\cdots1}_{k个1}=\frac{1}{9}\times\underbrace{999\cdots9}_{k个9}=\frac{1}{9}\left(10^k-1\right)$（找通项及特征），所以

$1+11+111+\cdots+\underbrace{111\cdots1}_{n个1}$

$=\frac{1}{9}\left(10^1-1\right)+\frac{1}{9}\left(10^2-1\right)+\frac{1}{9}\left(10^3-1\right)+\cdots+\frac{1}{9}\left(10^n-1\right)$（分组求和）

$=\frac{1}{9}\left(10^1+10^2+10^3+\cdots10^n\right)-\frac{1}{9}\underbrace{\left(1+1+1+\cdots+1\right)}_{n个1}$

$=\frac{1}{9}\cdot\frac{10\left(10^n-1\right)}{10-1}-\frac{n}{9}=\frac{1}{81}\left(10^{n+1}-10-9n\right)$

【注意】先根据数列的结构及特征进行分析，找出数列的通项及其特征，然后再利用数列通项揭示的规律求数列的前 n 项和，这是一个重要的方法。

【例 15】已知方程 $x^2+3x=0$ 的一个根是某等差数列的公差，另一个根为此数列的首项，且此等差数列的 a_4 是 a_3,a_5 的比例中项，求 a_n 的前 100 项之和。

（A）-320　　（B）200　　（C）-200　　（D）300　　（E）-300

【解析】设 $a_3=a_4-d$，$a_5=a_4+d$，则有 $a_4^2=a_3a_5=\left(a_4-d\right)\left(a_4+d\right)=a_4^2-d^2\Rightarrow d=0$；方程 $x^2+3x=0$ 的根为-3，0。

从而 $d=0$，$a_1=-3$，则有 $a_n=-3$，故前 100 项之和为-300，选 E。

【例 16】已知数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{10}$，则 $a_1-a_2+a_3-\cdots+a_9-a_{10}\geq0$。

（1）$a_n\geq a_{n+1},n=1,2,3,\cdots,9$　　（2）$a_n^2\geq a_{n+1}^2,n=1,2,3,\cdots,9$

【解析】条件（1），$a_n\geq a_{n+1},n=1,2,3,\cdots,9$，所以 $\left(a_1-a_2\right)+\left(a_3-a_4\right)+\cdots+\left(a_9-a_{10}\right)\geq0$，充分；

条件（2），$a_n^2\geq a_{n+1}^2,n=1,2,3,\cdots,9$，因为每一项可正可负，所以结果不确定，不充分。故选 A。