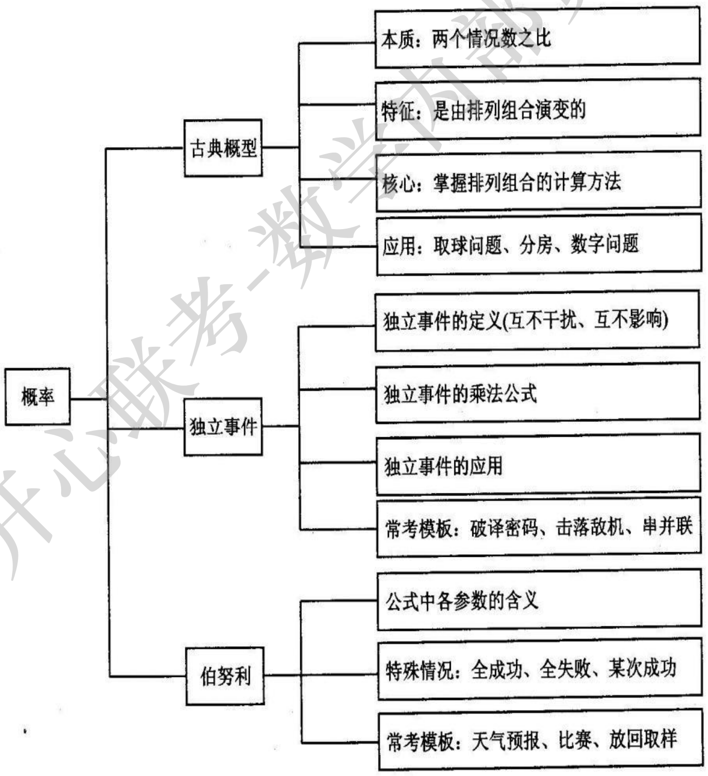
第十章　概率初步

【大纲考点】(1) 事件及其简单运算;(2) 加法公式;(3) 乘法公式;(4) 古典概型;(5) 伯努利概型.

【备考要点】要理解样本空间、随机事件、基本事件、必然事件、不可能事件、和事件、积事件、互不相容事件、对立事件相关概念. 掌握常见古典概型的计算方法,理解求解思路,尤其要弄清楚与排列组合的关系;其次要理解独立事件的含义,掌握常考的独立事件模板,并能够举一反三灵活应用到做题中,最后要理解伯努利公式的含义和应用.

【知识体系】



【备考建议】对于教师,建议课时控制在 6 个课时;对于考生,建议在学习时要注意概念的理解及应用,古典概型是一种随机现象的数学模型,它要求所研究的样本空间是有限的,且各样本点的发生和出现是等可能的. 计算古典概率必须要知道样本点的总数和事件 A 所含的样本点数. 古典概率主要掌握五类基本问题(摸球问题、分球入盒问题、随机取数问题、抽签问题和分组问题). 另外要掌握事件的独立性问题和伯努利概型.

第一节　考试要点剖析

自然界发生的现象是多种多样的.有一类现象，在一定条件下必然要发生，例如，向上抛出一块石头必然下落，同性电荷必然互相排斥，等等.这类现象称为确定性现象.在自然界还存在着另一类现象，例如，在相同条件下抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛币之前无法肯定抛掷的结果是什么；用同一门炮向同一目标射击,各次弹着点不尽相同，在一次射击之前无法预测弹着点的确切位置.这类现象在一定的条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果.但人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象在大量重复试验或观察之下，它的结果却呈现出某种规律性.多次重复抛一枚硬币，得到正面朝上的次数大致有一半；同一门炮射击一定目标的弹着点按一定的规律分布，等等.我们把这种在大量重复试验或观测下，其结果所呈现出的固有规律性，称为统计规律性.而把这种在个别试验中呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象，称之为随机现象.

一、基本概念

1. 随机试验

我们遇到过各种试验,在这里,把试验作为一个含义广泛的术语,它包括各种各样的科学试验,甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验.下面举一些试验性的例子：

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H 、反面 T 出现的情况.

E_2:将一枚硬币抛三次,观察出现正面的次数.

E_3:抛一枚骰子,观察出现的点数.

E_4:记录车站售票处一天内售出的车票数.

E_5:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

E_6:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

这些试验都具有以下的特点：

(1)可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中,我们将具有上述三个特点的试验称为随机试验.

2. 样本空间

对于随机试验,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但试验的一切可能的结果是已知的,把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记为 S. 样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为样本点. 例如,上面的 $E_1\sim E_6$ 这 6 个随机试验的样本空间分别为：

$S_1=\{H,T\}$ ；$S_2=\{0,1,2,3\}$ ；$S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$ ；

$S_4=\{1,2,\cdots,n\}$；这里的 n 是售票处一天内准备出售的车票数 n；

$S_5=\{t \mid t\geqslant 0\}$；

$S_6=\{(x,y) \mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$；这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区的温度不会小于 T_0，也不会大于 T_1.

3. 随机事件

在随机试验中，可能发生也可能不发生的事情称为随机事件. 随机事件常用大写字母 $A,B,C,\cdots$，表示，它是样本空间 S 的子集合. 在每次试验中，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，称事件 A 发生.

例如在 E_3 中，如果用 A 表示事件"掷出奇点数"，那么 A 是一个随机事件. 由于在一次投掷中，当且仅当掷出的点数是 1,3,5 中的任何一个时才称事件 A 发生了，所以我们把事件 A 表示为 $A=\{1,3,5\}$. 同样的，若用 B 表示事件"掷出偶点数"，那么 B 也是一个随机事件，则把 B 表示为 $B=\{2,4,6\}$.

对于一个试验 E，在每次试验中必然发生的事件，称为 E 的必然事件；在每次试验中都不发生的事件，称为 E 的不可能事件. 例如在 E_3 中，"掷出的点数不超过 6"就是必然事件，用集合表示这一事件就是 E_3 的样本空间 $S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$. 而事件"掷出的点数大于 6"是不可能事件，这个事件不包括 E_3 的任何一个可能结果，所以用空集 $\varnothing$ 表示. 对于一个试验 E，它的样本空间 S 是 E 的必然事件；空集 $\varnothing$ 是不可能事件. 必然事件与不可能事件虽已无随机性可言，但在概率论中，常把它们当作两个特殊的随机事件，这样是为了数学处理上的方便.

4. 事件间的关系与运算

因为事件是一个集合，因而事件间的关系和运算是按集合间的关系和运算来处理的. 下面给出这些关系和运算在概率中的提法，并根据"事件发生"的含义，给出它们在概率中的含义. 设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

(1) 事件的包含与相等

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 A 包含事件 B，记为 $B\supset A$ 或者 $A\subset B$. 若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

(2) 互不相容事件(互斥)

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互斥的，或称它们是互不相容的. 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个都互斥，则称事件是两两互斥的.

(3) 对立事件

"A 不发生"的事件称为事件 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$. A 和 $\overline{A}$ 满足：$A\cup\overline{A}=S$，$A\overline{A}=\varnothing$，$\overline{\overline{A}}=A$.

(4) 事件的和

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A\cup B$. 事件 $A\cup B$ 发生意味着：或事件 A 发生，或事件 B 发生，或事件 A 与事件 B 都发生.

事件的和可以推广到多个事件的情景. 设有 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，定义它们的和事件为$\{A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生$\}$，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$.

(5) 事件的积

事件 A 与事件 B 都发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A \cap B$，也简记为 AB. 事件 $A \cap B$（或 AB）发生意味着事件 A 发生且事件 B 也发生，即 A 与 B 都发生.

类似的，可以定义 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = \{A_1, A_2, \cdots, A_n \text{ 都发生}\}$.

(6) 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$.

(7) 事件运算满足的定律

设 A,B,C 为事件，则有

交换律：$A \cup B = B \cup A$；

结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；$(AB)C = A(BC)$.

分配律：$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$；$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$.

对偶律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$；$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

二、概率的统计定义

1. 频率

设 E 为任一随机试验，A 为其中任一事件，在相同条件下，把 E 独立的重复做 n 次，n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数(称为频数). 比值 $f_n(A) = n_A/n$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率.

人们在实践中发现：在相同条件下重复进行同一试验，当试验次数 n 很大时，某事件 A 发生的频率具有一定的"稳定性"，就是说其值在某确定的数值上下摆动. 一般说，试验次数 n 越大，事件 A 发生的频率就越接近那个确定的数值. 因此事件 A 发生的可能性的大小就可以用这个数量指标来描述.

2. 概率的统计定义

设有随机试验 E，若当试验的次数 n 充分大时，事件 A 的发生频率 $f_A(A)$ 稳定在某数 p 附近摆动，则称数 p 为事件的概率，记为：$P(A) = p$.

概率的这种定义，称为概率的统计定义. 统计定义是以试验为基础的，但这并不是说概率取决于试验. 值得注意的是事件 A 出现的概率是事件 A 的一种属性. 也就是说，完全决定于事件 A 本身的结果，是先于试验客观存在的. 概率的统计定义只是描述性的，一般不能用来计算事件的概率. 通常只能在 n 充分大时，以事件出现的频率作为事件概率的近似值.

3. 概率的性质

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

(2) $P(\varnothing) = 0$，$P(\Omega) = 1$.

(3) 对任意两个事件 A,B，有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

(4) 若 $AB = \varnothing$，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

(5) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

三、古典概型

1. 古典概型

随机试验 E 具有以下两个特征：

(1) 样本空间的元素(即基本事件)只有有限个；

(2) 每个基本事件出现的可能性是相等的，称 E 为古典概型试验.

2. 古典概率

在古典概型的情况下，事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 包含的基本事件数 }k}{\text{样本空间中基本事件总数 }n}.$$

【注意】计算古典概率时，首先要弄清随机试验是什么？即判断有限性和等可能性是否满足，其次要弄清样本空间是怎样构成的，构成样本空间的每个基本事件出现一定要等可能的. 忽略了这一点，就会导致错误的结果.

古典概型研究的对象大致可分为三类问题：①摸球；②分房；③随机取数(电话号码)问题. 这几类问题的解决方法将在典型例题或练习题中给出.

3. 互斥事件的概率求法(加法)

一般来讲，如果事件 A,B 互斥，那么事件 $A+B$ 发生(即 A,B 中有一个发生)的概率，等于事件 A,B 分别发生的概率的和.

如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 彼此互斥，那么事件 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 发生(即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中有一个发生)的概率，等于这 n 个事件分别发生的概率的和，即

$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

【注意】由对立事件的意义可知：$A+\overline{A}$ 是一个必然事件，它的概率等于 1，又由于 A 与 $\overline{A}$ 互斥，可以得到：$P(A)+P(\overline{A})=P(A+\overline{A})=1$，对立事件的概率的和等于 1，同样 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

四、事件的独立性

1. 独立事件

如果两事件中任一事件的发生不影响另一事件的概率，则称这两事件是相互独立的.

2. 定义

若 $P(AB)=P(A)\ P(B)$，则称两事件 A 和 B 是相互独立的. 可将其理解为相互独立事件同时发生的概率，即 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$.

3. 常用结论

(1) 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率的积，即 $P(A_1\cdot A_2\cdots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)$.

(2) 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件都不发生的概率等于每个事件不发生的概率的积，即 $P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\cdots\cdot\overline{A_n})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\cdots\cdot P(\overline{A_n})$.

(3) 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,那么这 n 个事件至少有一个发生的概率,可以从其反面求解,即等于每个事件发生的概率的积,$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\cdots\cdot P(\overline{A_n})$.

【注意】独立与互斥的区别:两事件 A,B 独立,则常有 $AB\neq\varnothing$,即 A 与 B 非互斥;事实上,若 A 与 B 互斥,则 $P(AB)=0$,而当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时,$P(A)\,P(B)>0$,可知 $P(AB)\neq P(A)\,P(B)$. 因此两事件互斥并不能得出这两个事件就独立的结论. 互斥事件与相互独立事件研究的都是两个事件的关系,但互斥的两个事件是一次实验中的两个事件,相互独立的两个事件是在两次试验中得到的,注意区别.

五、伯努利公式

1. 独立重复试验

在相同条件下,将某试验重复进行 n 次,且每次试验中任何一事件的概率不受其他次试验结果的影响,此种试验称为 n 次独立重复试验.

2. 伯努利公式

如果在一次试验中某事件发生的概率是 p,那么在 n 次独立重复试验中这个事恰好发生 k 次的概率,即 $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}(k=0,1,2,\cdots n)$,其中 $q=1-p$.

【特殊】

$k=n$ 时,即在 n 次独立重复试验中事件 A 全部发生,概率为 $P_n(n)=C_n^n p^n(1-p)^0=p^n$.

$k=0$ 时,即在 n 次独立重复试验中事件 A 没有发生,概率为 $P_n(0)=C_n^0 p^0(1-p)^n=(1-p)^n$.

【理解】n 次独立重复试验的特征:

①试验的次数不止一次,而是多次,次数 $n\geqslant 1$;

②每次试验的条件是一样的,是重复性的试验序列;

③每次试验的结果只有 A 与 $\overline{A}$ 两种(即事件 A 要么发生,要么不发生),每次试验相互独立,试验的结果互不影响,即各次试验中发生的概率保持不变.

【应用】一般地,n 次独立重复试验中某事件至少发生 k 次的概率公式为

$$P_n(i\geqslant k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}+C_n^{k+1}p^k(1-p)^{n-k-1}+\cdots+C_n^n p^n(1-p)^0.$$

【模型】将一骰子掷 10 次观察出现 6 点的次数——10 重伯努利试验. 在装有 8 个正品,2 个次品的箱子中,有放回地取 5 次产品,每次取一个,观察取得次品的次数——5 重伯努利试验. 向目标独立地射击 n 次,每次击中目标的概率为 P,观察击中目标的次数—n 重伯努利试验,等等.

【评注】$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ 即是二项式$[p+(1-p)]^n$ 的展开式中第 $k+1$ 项的值,$P_n(k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}$ 也称为是二项分布公式. 概率 $P_n(k)=C_n^k P^k(1-P)^{n-k}$ 的分布称为二项分布或称为伯努利(Bernoulli)概型.