

第九章 排列组合例题

开心提示：排列组合解题思如如下

1. 认真审题弄清要做什么事
2. 怎样做才能完成所要做的事, 即采取分步还是分类, 或是分步与分类同时进行, 确定分多少步及多少类。
3. 确定每一步或每一类是排列问题(有序)还是组合(无序)问题, 元素总数是多少及取出多少个元素。
4. 解决排列组合综合性问题, 往往类与步交叉, 因此必须掌握一些常用的解题策略

一. 特殊元素和特殊位置优先策略

例 1. 由 0, 1, 2, 3, 4, 5 可以组成多少个没有重复数字五位奇数.

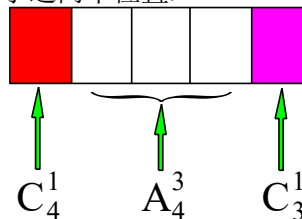
解: 由于末位和首位有特殊要求, 应该优先安排, 以免不合要求的元素占了这两个位置.

先排末位共有 C_3^1

然后排首位共有 C_4^1

最后排其它位置共有 A_4^3

由分步计数原理得 $C_4^1 C_3^1 A_4^3 = 288$



位置分析法和元素分析法是解决排列组合问题最常用也是最基本的方法, 若以元素分析为主, 需先安排特殊元素, 再处理其它元素. 若以位置分析为主, 需先满足特殊位置的要求, 再处理其它位置. 若有多个约束条件, 往往是考虑一个约束条件的同时还要兼顾其它条件

二. 相邻元素捆绑策略

例 2. 7 人站成一排, 其中甲乙相邻且丙丁相邻, 共有多少种不同的排法.

解: 可先将甲乙两元素捆绑成整体并看成一个复合元素, 同时丙丁也看成一个复合元素, 再与其它元素进行排列, 同时对相邻元素内部进行自排. 由分步计数原理可得共有 $A_5^5 A_2^2 A_2^2 = 480$ 种不同的排法



要求某几个元素必须排在一起的问题, 可以用捆绑法来解决问题. 即将需要相邻的元素合并为一个元素, 再与其它元素一起作排列, 同时要注意合并元素内部也必须排列.

三. 不相邻问题插空策略

例 3. 一个晚会的节目有 4 个舞蹈, 2 个相声, 3 个独唱, 舞蹈节目不能连续出场, 则节目的出场顺序有多少种?

解: 分两步进行第一步排 2 个相声和 3 个独唱共有 A_5^5 种, 第二步将 4 舞蹈插入第一步排好的 6 个元素中间

包含首尾两个空位共有 A_6^4 不同的方法, 由分步计数原理, 节目的不同顺序共有 $A_5^5 A_6^4$ 种

元素相离问题可先把没有位置要求的元素进行排队再把不相邻元素插入中间和两端

四. 定序问题倍缩空位插入策略

例 4. 7 人排队, 其中甲乙丙 3 人顺序一定共有多少不同的排法

解: (倍缩法) 对于某几个元素顺序一定的排列问题, 可先把这几个元素与其他元素一起进行排列, 然后用总排列数除以这几个元素之间的全排列数, 则共有不同排法种数是: A_7^7 / A_3^3

(空位法) 设想有 7 把椅子让除甲乙丙以外的四人就坐共有 A_4^4 种方法, 其余的三个位置甲乙丙共有 1 种坐法, 则共有 A_4^4 种方法。

思考: 可以先让甲乙丙就坐吗?

(插入法) 先排甲乙丙三个人, 共有 1 种排法, 再把其余 4 人依次插入共有 _____ 方法

定序问题可以用倍缩法, 还可转化为占位插

五. 重排问题求幂策略

例 5. 把 6 名实习生分配到 7 个车间实习, 共有多少种不同的分法

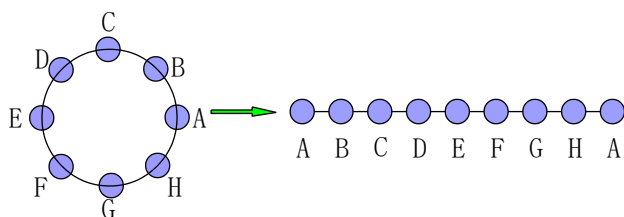
解: 完成此事共分六步: 把第一名实习生分配到车间有 7 种分法. 把第二名实习生分配到车间也有 7 种分法依此类推, 由分步计数原理共有 7^6 种不同的排法

允许重复的排列问题的特点是以元素为研究对象, 元素不受位置的约束, 可以逐一安排各个元素的位置, 一般地 n 不同的元素没有限制地安排在 m 个位置上的排列数为 m^n 种

六. 环排问题线排策略

例 6. 8 人围桌而坐, 共有多少种坐法?

解: 围桌而坐与坐成一排的不同点在于, 坐成圆形没有首尾之分, 所以固定一人 A_4^4 并从此位置把圆形展成直线其余 7 人共有 $(8-1)!$ 种排法即 $7!$

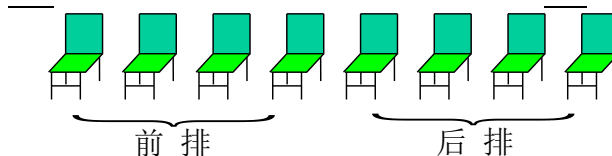


一般地, n 个不同元素作圆形排列, 共有 $(n-1)!$ 种排法. 如果从 n 个不同元素中取出 m 个元素作圆形排列共有 $\frac{1}{m} A_n^m$

七. 多排问题直排策略

例 7. 8 人排成前后两排, 每排 4 人, 其中甲乙在前排, 丙在后排, 共有多少排法

解: 8 人排前后两排, 相当于 8 人坐 8 把椅子, 可以把椅子排成一排. 个特殊元素有 A_4^2 种, 再排后 4 个位置上的特殊元素丙有 A_4^1 种, 其余的 5 人在 5 个位置上任意排列有 A_5^5 种, 则共有 $A_4^2 A_4^1 A_5^5$ 种



一般地, 元素分成多排的排列问题, 可归结为一排考虑, 再分段研

八. 排列组合混合问题先选后排策略

例 8. 有 5 个不同的小球, 装入 4 个不同的盒内, 每盒至少装一个球, 共有多少不同的装法.

解: 第一步从 5 个球中选出 2 个组成复合元共有 C_5^2 种方法. 再把 4 个元素 (包含一个复合元素) 装入 4 个不同的盒内有 A_4^4 种方法, 根据分步计数原理装球的方法共有 $C_5^2 A_4^4$

解决排列组合混合问题, 先选后排是最基本的指导思想. 此法与相邻元素捆绑策略相似吗?

九. 小集团问题先整体后局部策略

例 9. 用 1, 2, 3, 4, 5 组成没有重复数字的五位数其中恰有两个偶数夹 1, 5 在两个奇数之间, 这样的五位数有多少个?

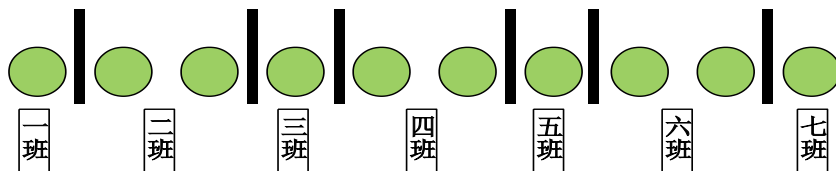
解: 把 1, 5, 2, 4 当作一个小集团与 3 排队共有 A_2^2 种排法, 再排小集团内部共有 $A_2^2 A_2^2$ 种排法, 由分步计数原理共有 $A_2^2 A_2^2 A_2^2$ 种排法.

小集团排列问题中,先整体后局部,再结合其它策略进行处理。

十. 元素相同问题隔板策略

例 10. 有 10 个运动员名额, 分给 7 个班, 每班至少一个, 有多少种分配方案?

解: 因为 10 个名额没有差别, 把它们排成一排。相邻名额之间形成 9 个空隙。在 9 个空档中选 6 个位置插个隔板, 可把名额分成 7 份, 对应地分给 7 个班级, 每一种插板方法对应一种分法共有 C_9^6 种分法。



将 n 个相同的元素分成 m 份 (n, m 为正整数), 每份至少一个元素, 可以用 $m-1$ 块隔板, 插入 n 个元素排成一排的 $n-1$ 个空隙中, 所有分法数为 C_{n-1}^{m-1}

十一. 正难则反总体淘汰策略

例 11. 从 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这十个数字中取出三个数, 使其和为不小于 10 的偶数, 不同的取法有多少种?

解: 这问题中如果直接求不小于 10 的偶数很困难, 可用总体淘汰法。这十个数字中有 5 个偶数 5 个奇数, 所取的三个数含有 3 个偶数的取法有 C_5^3 , 只含有 1 个偶数的取法有 $C_5^1 C_5^2$, 和为偶数的取法共有 $C_5^1 C_5^2 + C_5^3$ 。再淘汰和小于 10 的偶数共 9 种, 符合条件的取法共有 $C_5^1 C_5^2 + C_5^3 - 9$

有些排列组合问题, 正面直接考虑比较复杂, 而它的反面往往比较简捷, 可以先求出它的反面, 再从整体中淘汰。

十二. 平均分组问题除法策略

例 12. 6 本不同的书平均分成 3 堆, 每堆 2 本共有多少分法?

解: 分三步取书得 $C_6^2 C_4^2 C_2^2$ 种方法, 但这里出现重复计数的现象, 不妨记 6 本书为 ABCDEF, 若第一步取 AB, 第二步取 CD, 第三步取 EF 该分法记为 (AB, CD, EF), 则 $C_6^2 C_4^2 C_2^2$ 中还有 (AB, EF, CD), (CD, AB, EF), (CD, EF, AB) (EF, CD, AB), (EF, AB, CD) 共有 A_3^3 种取法, 而这些分法仅是 (AB, CD, EF) 一种分法, 故共有 $C_6^2 C_4^2 C_2^2 / A_3^3$ 种分法。

平均分成的组, 不管它们的顺序如何, 都是一种情况, 所以分组后要一定要除以 A_n^n (n 为均分的组数) 避免重复计数。

十三. 合理分类与分步策略

例 13. 在一次演唱会上共 10 名演员, 其中 8 人能唱歌, 5 人会跳舞, 现要演出一个 2 人唱歌 2 人伴舞的节目, 有多少选派方法

解: 10 演员中有 5 人只会唱歌, 2 人只会跳舞 3 人为全能演员。选上唱歌人员为标准进行研究

只会唱的 5 人中没有人选上唱歌人员共有 $C_3^2 C_3^2$ 种, 只会唱的 5 人中只有 1 人选上唱歌人员

$C_5^1 C_3^1 C_4^2$ 种, 只会唱的 5 人中只有 2 人选上唱歌人员有 $C_5^2 C_3^2$ 种, 由分类计数原理共有

$C_3^2 C_3^2 + C_5^1 C_3^1 C_4^2 + C_5^2 C_3^2$ 种。

解含有约束条件的排列组合问题,可按元素的性质进行分类,按事件发生的连续过程分步,做到标准明确。分步层次清楚,不重不漏,分类标准一旦确定要贯穿于解题过程的始终。

十四. 构造模型策略

例 14. 马路上有编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 的九只路灯, 现要关掉其中的 3 盏, 但不能关掉相邻的 2 盏或 3 盏, 也不能关掉两端的 2 盏, 求满足条件的关灯方法有多少种?

解: 把此问题当作一个排队模型在 6 盏亮灯的 5 个空隙中插入 3 个不亮的灯有 C_5^3 种

一些不易理解的排列组合题如果能转化为非常熟悉的模型, 如占位填空模型, 排队模型, 装盒模型等, 可使问题直观解决

十五. 实际操作穷举策略

例 15. 设有编号 1, 2, 3, 4, 5 的五个球和编号 1, 2, 3, 4, 5 的五个盒子, 现将 5 个球投入这五个盒子内, 要求每个盒子放一个球, 并且恰好有两个球的编号与盒子的编号相同, 有多少投法

解: 从 5 个球中取出 2 个与盒子对号有 C_5^2 种还剩下 3 球 3 盒序号不能对应, 利用实际操作法, 如果剩下 3, 4, 5 号球, 3, 4, 5 号盒 3 号球装 4 号盒时, 则 4, 5 号球有只有 1 种装法, 同理 3 号球装 5 号盒时, 4, 5 号球有也只有 1 种装法, 由分步计数原理有 $2C_5^2$ 种



对于条件比较复杂的排列组合问题, 不易用公式进行运算, 往往利用穷举法或画出树状图会收到意想不到的结果

十六. 分解与合成策略

例 16. 30030 能被多少个不同的偶数整除

分析: 先把 30030 分解成质因数的乘积形式 $30030=2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$

依题意可知偶因数必先取 2, 再从其余 5 个因数中任取若干个组成乘积,

所有的偶因数为: $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 + C_5^0$

分解与合成策略是排列组合问题的一种最基本的解题策略, 把一个复杂问题分解成几个小问题逐一解决, 然后依据问题分解后的结构, 用分类计数原理和分步计数原理将问题合成, 从而得到问题的答案, 每个比较复杂的问题都要用到这种解题策略

十七. 化归策略

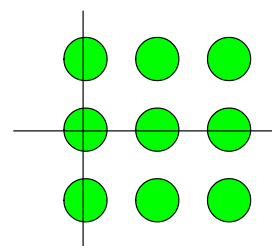
例 17. 25 人排成 5×5 方阵, 现从中选 3 人, 要求 3 人不在同一行也不在同一列, 不同的选法有多少种?

解: 将这个问题退化成 9 人排成 3×3 方阵, 现从中选 3 人, 要求 3 人不在同一行也不在同一列, 有多少选法. 这样每行必有 1 人从其中的一行中选取 1 人后, 把这人在所在的行列都划掉, 如此继续下去. 从 3×3 方队中选 3 人的方法有 $C_3^1 C_2^1 C_1^1$ 种. 再从 5×5 方阵选出 3×3 方阵便可解决问题. 从

5×5 方队中选取 3 行 3 列有 $C_5^3 C_5^3$ 选法所以从 5×5 方阵选不在同一行也不在同一列的 3 人有

$C_5^3 C_5^3 C_3^1 C_2^1 C_1^1$ 选法。

处理复杂的排列组合问题时可以把一个问题退化成一个简要的问题, 通过解决这个简要的问题的解决找到解题方法, 从而进下一步解决原来的问题



十八. 复杂分类问题表格策略

例 20. 有红、黄、兰色的球各 5 只, 分别标有 A、B、C、D、E 五个字母, 现从中取 5 只, 要求各字母均有且三色齐备, 则共有多少种不同的取法

解:

红	1	1	1	2	2	3
黄	1	2	3	1	2	1
兰	3	2	1	2	1	1
取法	$C_5^1C_4^1$	$C_5^1C_4^2$	$C_5^1C_4^3$	$C_5^2C_3^1$	$C_5^2C_3^2$	$C_5^3C_2^1$

一些复杂的分类选取题,要满足的条件比较多, 无从入手,经常出现重复遗漏的情况, 用表格法,则分类明确,能保证题中须满足的条件,能达到好的效果.