基础过关题型

开心提示：此部分例题为基础题型，考试会出 1-2 个题目大家要熟练掌握。

【题型 1】乘法公式

【思路点拨】乘法公式是在多项式乘法的基础上，将一般法则应用于特殊形式的多项式相乘，得出的既有特殊性、又有实用性的具体结论，在代数式的化简求值、恒等变形等方面有广泛的应用.在学习乘法公式时，做到以下几点：1.熟悉每个公式的结构特征，理解掌握公式；2.根据待求式的特点，模仿套用公式；3.对公式中字母全面理解，灵活运用公式；4.既能正用、又可逆用且能适当变形或重新组合，综合运用公式，乘法公式常用的变形有：

（1）$a^2+b^2=\left(a\pm b\right)^2\mp 2ab$，$ab=\dfrac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\dfrac{(a^2+b^2)-(a-b)^2}{2}$；

（2）$\left(a+b\right)^2+\left(a-b\right)^2=2a^2+2b^2$；

（3）$\left(a+b\right)^2-\left(a-b\right)^2=4ab$；

（4）$a^2+b^2+c^2=\left(a+b+c\right)^2-2\left(ab+bc+ac\right)$.

【例 1】如果 $a^2+b^2+2c^2+2ac-2bc=0$，则 $a+b$ 的值为（　　）.

（A）0　　（B）1　　（C）-1　　（D）-2　　（E）2

【解析】$a^2+b^2+2c^2+2ac-2bc=\left(a+c\right)^2+\left(b-c\right)^2=0$，根据非负性，所以 $a=-c$，$b=c$，从而 $a+b=0$，故选 A.

【评注】也可以采用特值法求解.

【例 2】若 $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$，则 a，b，c 三者的关系为（　　）.

（A）$a+b=b+c$　　（B）$a+b+c=1$　　（C）$a=b=c$

（D）$ab=bc=ac$　　（E）$abc=1$

【解析】$3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\dfrac{1}{2}[(a-c)^2+(b-c)^2+(a-b)^2]=0$，

所以得到 $a=b=c$，选 C.

【例 3】已知 $x^2-3x+1=0$，则 $\left|x-\dfrac{1}{x}\right|=$（　　）.

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{3}$　　（C）1　　（D）2　　（E）$\sqrt{5}$

【解析】$x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}=3$，$\left|x-\frac{1}{x}\right|=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}-2}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4}=\sqrt{5}$，故选 E.

【例 4】已知x，y满足$x^2+y^2+\frac{5}{4}=2x+y$，求代数式$\frac{xy}{x+y}=$（　　）.

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{1}{4}$　　（C）$\frac{1}{5}$　　（D）$\frac{2}{3}$　　（E）$\frac{3}{4}$

【解析】由已知得$(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=0$，得$x=1$，$y=\frac{1}{2}$，原式$=\frac{1}{3}$，故选 A.

【例 5】已知$(2010-a)(2008-a)=2009$，那么$(2010-a)^2+(2008-a)^2=$（　　）.

（A）4002　　（B）4012　　（C）4022　　（D）4020　　（E）4000

【解析】$(2010-a)^2+(2008-a)^2=\left[(2010-a)-(2008-a)\right]^2+2(2010-a)\cdot(2008-a)=4+2\times2009=4022$，所以选 C.

【评注】(1) 建立两个连续奇数的方程组；(2) 视$(2010-a)\cdot(2008-a)$为整体，由平方和想到完全平方公式及其变形.

【例 6】若x，y，z为实数，设$A=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$，$B=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$，$C=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$，则在A，B，C中（　　）.

（A）至少有一个大于零　　（B）至少有一个小于零　　（C）都大于零

（D）都小于零　　（F）至少有两个大于零

【解析】$A+B+C=x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2-2z+1+(\pi-3)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(\pi-3)>0 \Rightarrow A,B,C$至少有一个大于$0$，故选 A.

【评注】记住一个结论：若几个数之和大于零，则至少有一个大于零；若几个数之和小于零，则至少有一个小于零.此外，本题也可以采用特殊值求解.

【题型 2】完全平方式

【思路点拨】完全平方式是平方公式的特殊应用，主要借助平方公式来找到系数关系，求出

未知参数.

【例 7】已知 $x^2-x+a-3$ 是一个完全平方式，求 $a=$（　　）.

（A）$3\frac{1}{4}$　　（B）$2\frac{1}{4}$　　（C）$1\frac{1}{4}$　　（D）$3\frac{3}{4}$　　（E）$2\frac{3}{4}$

【解析】方法一：因为 $x^2-x+a-3$ 是一个完全平方式，所以 $x^2-x+a-3=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(a-3\frac{1}{4}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$，即 $a-3\frac{1}{4}=0$，所以 $a=3\frac{1}{4}$.

方法二：因为 $x^2-x+a-3$ 是一个完全平方式，所以方程 $x^2-x+a-3=0$ 有两个相等实根，即 $\Delta=(-1)^2-4(a-3)=0$，所以 $1-4a+12=0$，解得 $a=3\frac{1}{4}$，选 A.

【评注】如果一个整式恰好是另一个整式的平方，那么这个整式叫做完全平方式.解决这类问题，可用配方法或者用方程观点去解.

【例 8】若 $4x^4-ax^3+bx^2-40x+16$ 是完全平方式，则 ab 等于（　　）

（A）820 或 180　　（B）-820 或 -180　　（C）820 或 -180

（D）-820 或 180　　（E）± 820 或 ± 180

【解析】根据题意得，设

$$4x^4-ax^3+bx^2-40x+16=\left(2x^2+mx+4\right)^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a=4m\\ b=16+m^2\\ -40=8m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=20\\ b=16+25=41\end{cases}，此时\ ab=820.$$

或
$$4x^4-ax^3+bx^2-40x+16=\left(-2x^2+mx+4\right)^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a=-4m\\ b=-16+m^2\\ -40=8m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-20\\ b=9\end{cases}，此时\ ab=-180，$$

所以选 C.

【评注】当使用待定系数法求解平方式的时候，不要忘记讨论系数的符号.此外，本题无需讨论常数项的正负符号，因为 $(a-b)^2=(-a+b)^2$.

【题型 3】因式定理及因式分解

【思路点拨】因式分解是代数变形的重要工具，是学习分式、一元二次方程等知识的基础.

因式分解在数值计算、代数式的化简求值、不定方程（组）、代数等式的变形等方面有广泛的应用.同时，通过因式分解的训练和应用，能使我们的观察能力、运算能力、变形能力、逻辑思维能力、探究能力得以提高.因此，因式分解是学好代数的基础之一.

【例 9】若 $x^2+xy+y=14$，$y^2+xy+x=28$，则 $x+y$ 的值为（　　）.

（A）6 或 -7　　（B）6 或 7　　（C）-6 或 -7　　（D）-6 或 7　　（E）6

【解析】由已知得 $(x+y)^2+x+y-42=0$，分解得到 $(x+y+7)(x+y-6)=0$，故 $x+y+7=0$ 或 $x+y-6=0$，所以 $x+y=6$ 或 -7，选 A.

【评注】恰当处理两个等式，分解关于 $x+y$ 的二次三项式.代数式求值的常用方法是：（1）代入字母的值求值；（2）通过变形，寻找字母间的关系，代入关系求值；（3）整体代入求值.

【例 10】已知多项式 $f(x)=x^3+a^2x^2+ax-1$ 能被 $x+1$ 整除，则实数 a 的值为（　　）.

（A）2 或 -1　　（B）2　　（C）-1　　（D）±2　　（E）±1

【解析】因为 $f(x)$ 能被 $(x+1)$ 整除，从而

$f(-1)=-1+a^2-a-1=a^2-a-2=(a-2)(a+1)=0\Rightarrow a=-1$ 或 2，故选 A.

【题型 4】表达式化简计算

【思路点拨】表达式的化简计算主要包括根号的化简变形、分子分母的约分化简、多项求和的裂项抵消化简等.

【例 11】已知 $x=2+\sqrt{3}$，$y=2-\sqrt{3}$，求 $\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)$ 的值为（　　）.

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4　　（E）0

【解析】方法一：$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)=\left(2+\sqrt{3}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{3}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)=4$.

方法二：由于 $xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=1$，故 $\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)=2+xy+\frac{1}{xy}=4$，选 D.

【例 12】$\dfrac{(2\times5+2)(4\times7+2)(6\times9+2)(8\times11+2)\cdots(2014\times2017+2)}{(1\times4+2)(3\times6+2)(5\times8+2)(7\times10+2)\cdots(2013\times2016+2)}$ 的值为（　　）.

（A）1002　　（B）1008　　（C）1028　　（D）988　　（E）968

【解析】观察每个括号的数值，考虑一般性：$n(n+3)+2=n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$，

故原式$=\dfrac{(3\times4)(5\times6)(7\times8)(9\times10)\cdots(2015\times2016)}{(2\times3)(4\times5)(6\times7)(8\times9)\cdots(2014\times2015)}=1008$，选 B.

【例 13】$\dfrac{2015^3-2\times2015^2-2013}{2015^3+2015^2-2016}$的值为（　　）.

（A）$\dfrac{2013}{2015}$　（B）$\dfrac{2013}{2016}$　（C）$\dfrac{2012}{2015}$　（D）$\dfrac{2015}{2016}$　（E）$\dfrac{2011}{2016}$

【解析】设$2015=a$，则原式$=\dfrac{a^3-2a^2-(a-2)}{a^3+a^2-(a+1)}=\dfrac{(a-2)(a^2-1)}{(a+1)(a^2-1)}=\dfrac{a-2}{a+1}=\dfrac{2013}{2016}$，选 B.

【评注】观察分子、分母数字间的特点，用字母表示数，从一般情形考虑，通过分解变形，寻找复杂数值下隐含的规律.

【例 14】化简$\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}+\dfrac{1}{x^2+7x+12}+\cdots+\dfrac{1}{x^2+201x+10100}$为（　　）.

（A）$\dfrac{100}{(x-1)(x-101)}$　（B）$\dfrac{100}{(x+1)(x-101)}$

（C）$\dfrac{100}{(x+1)(x+101)}$　（D）$\dfrac{100}{(x-1)(x+101)}$

（E）$\dfrac{101}{(x-1)(x+101)}$

【解析】$\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}+\dfrac{1}{x^2+7x+12}+\cdots+\dfrac{1}{x^2+201x+10100}$

$=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\cdots+\dfrac{1}{(x+100)(x+101)}$

$=\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}\right)+\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{x+100}-\dfrac{1}{x+101}\right)$

$\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+101}=\dfrac{100}{(x+101)(x+1)}$，

故选 C.