第十章 概率例题

【例 1】（1） 一个盒子装有 5 个白球 3 个黑球，这些球除颜色外，完全相同，从中任意取出两个球，求取出的两个球都是白球的概率；

【解析】（1）从袋内 8 个球中任取两个球共有 $C_8^2=28$ 种不同结果，从 5 个白球中取出 2 个白球有 $C_5^2=10$ 种不同结果，则取出的两球都是白球的概率为 $P(A)=\frac{10}{28}=\frac{5}{14}$

【例 2】 甲、乙两袋装有大小相同的红球和白球，甲袋装有 2 个红球，2 个白球；乙袋装有 2 个红球，n 个白球，两甲、乙两袋中各任取 2 个球.

(1) 若 n＝3，求取到的 4 个球全是红球的概率；

(2) 若取到 4 个球中至少有 2 个红球的概率为 $\frac{3}{4}$，求 n.

【解析】（1）记“取到的 4 个球全是红球”为事件 $A.P(A)=\frac{C_2^2}{C_4^2}\cdot\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{60}$.

（2）记“取到的 4 个球至多有 1 个红球”为事件 B，“取到的 4 个球只有 1 个红球”为事件 B_1，“取到的 4 个球全是白球”为事件 B_2，由题意，得

$P(B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}.P(B_1)=\frac{C_2^1\times C_2^1}{C_4^2}\times\frac{C_n^2}{C_{n+2}^2}+\frac{C_2^2}{C_4^2}\times\frac{C_2^1\times C_n^1}{C_{n+2}^2}=\frac{2n^2}{3(n+2)(n+1)}$

$P(B_2)=\frac{C_2^2}{C_4^2}\cdot\frac{C_n^2}{C_{n+2}^2}=\frac{n(n-1)}{6(n+2)(n+1)}$

所以 $P(B)=P(B_1)+P(B_2)=\frac{2n^2}{3(n+2)(n+1)}+\frac{n(n-1)}{6(n+2)(n+1)}=\frac{1}{4}$，化简，得 $7n^2-11n-6=0$，解得 n＝2，或 $n=-\frac{3}{7}$（舍去），故 n＝2.

【例 3】袋中装着标有数字 1,2,3,4,5 的小球各 2 个，从袋中任取 3 个小球，按 3 个小球上最大数字的 9 倍计分，每个小球取出的可能性都相等，用 ξ 表示取出的 3 个小球上的最大数字，求：取出 3 个小球上的数字互不相同的概率；

【解析】“一次取出的 3 个小球上的数字互不相同”的事件记为 A，

则 $P(A)=\frac{C_5^3\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{2}{3}$

【例 4】在一次口试中，要从 20 道题中随机抽出 6 道题进行回答，答对了其中的 5 道就获得优秀，答对其中的 4 道就可获得及格．某考生会回答 20 道题中的 8 道题，试求：

（1）他获得优秀的概率是多少？

（2）他获得及格与及格以上的概率有多大？

【解析】从 20 道题中随机抽出 6 道题的结果数，即是从 20 个元素中任取 6 个元素的组合数 C_{20}^6．由于是随机抽取，故这些结果出现的可能性都相等．

(1)记“他答对 5 道题.”为事件 A_1，由分析过程已知在这 C_{20}^{6} 种结果中，他答对 5 题的结果有 $C_8^6+C_8^5C_{12}^1=700$ 种，故事件 A_1 的概率为 $P(A_1)=\frac{700}{C_{20}^{6}}=\frac{35}{1938}$.

(2)记“他至少答对 4 道题”为事件 A_2，由分析知他答对 4 道题的可能结果为 $C_8^6+C_8^5C_{12}^1+C_8^4C_{12}^2=5320$ 种，故事件 A_2 的概率为：$P(A_2)=\frac{5320}{C_{20}^{6}}=\frac{7}{51}$

【例 5】 袋中有红、黄、白 3 种颜色的球各 1 只，从中每次任取 1 只，有放回地抽取 3 次，求：

（1）3 只全是红球的概率.

（2）3 只颜色全相同的概率.

（3）3 只颜色不全相同的概率.

（4）3 只颜色全不相同的概率.

【解析】(1)记“3 只全是红球”为事件 A．从袋中有放回地抽取 3 次，每次取 1 只，共会出现 $3\times3\times3=27$ 种等可能的结果，其中 3 只全是红球的结果只有一种，故事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{1}{27}$.

(2) “3 只颜色全相同”只可能是这样三种情况：“3 只全是红球”(事件 A)；“3 只全是黄球”(设为事件 B)；“3 只全是白球”(设为事件 C)．故“3 只颜色全相同”这个事件为 A+B+C，由于事件 A、B、C 不可能同时发生，因此它们是互斥事件．再由于红、黄、白球个数一样，故不难得 $P(B)=P(C)=P(A)=\frac{1}{27}$，

故 $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{9}$.

(3) 3 只颜色不全相同的情况较多，如是两只球同色而另一只球不同色，可以两只同红色或同黄色或同白色等等；或三只球颜色全不相同等．考虑起来比较麻烦，现在记“3 只颜色不全相同”为事件 D，则事件 $\overline{D}$ 为“3 只颜色全相同”，显然事件 D 与 $\overline{D}$ 是对立事件.

$\therefore P(D)=1-P(\overline{D})=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

(4) 要使 3 只颜色全不相同，只可能是红、黄、白各一只，要分三次抽取，故 3 次抽到红、黄、白各一只的可能结果有 $C_3^1C_2^1C_1^1=6$ 种，故 3 只颜色全不相同的概率为

$\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$.

【例 6】从男女学生共 36 名的班级中，任意选出 2 名委员，任何人都有同样的当选机会，如果选得同性委员的概率等于 $\frac{1}{2}$，求男女相差几名？

【解析】 设男生有 x 名，则女生有 $36-x$ 名，选得 2 名委员都是男生的概率为：

$\frac{C_x^2}{C_{36}^2}=\frac{x(x-1)}{36\times 35}$

选得 2 名委员都是女生的概率为$\frac{C_{36-x}^2}{C_{36}^2}=\frac{(36-x)(35-x)}{36\times 35}$

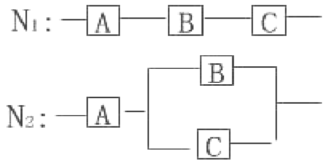
以上两种选法是互斥的，又选得同性委员的概率是$\frac{1}{2}$

得：$\frac{x(x-1)}{36\times 35}+\frac{(36-x)(35-x)}{36\times 35}=\frac{1}{2}$

解得：$x=15$ 或 $x=21$

即：男生有 15 名，女生有 21 名；或男生有 21 名，女生有 15 名．总之，男、女生相差 6 名．

【例 7】 如图所示，用 A、B、C 三类不同的元件连接成两个系统 N_1、N_2，当元件 A、B、C 都正常工作时，系统 N_1 正常工作，当元件 A 正常工作且元件 B、C 至少有 1 个正常工作时系统 N_2 正常工作，已知元件 A、B、C 正常工作的概率依次为 0.8、0.9、0.9，分别求系统 N_1、N_2 正常工作时的概率．



【解析】分别记元件 A、B、C 正常工作为事件 A、B、C，

由已知条件 $P(A)=0.80,P(B)=0.90,P(C)=0.90$

(Ⅰ)因为事件 A、B、C 是相互独立的，所以，系统 N_1 正常工作的概率

$P_1=P(A\bullet B\bullet C)=P(A)\bullet P(B)\bullet P(C)$
$=0.80\times 0.90\times 0.90=0.648$

故系统 N_1 正常工作的概率为 0.648.

(Ⅱ)系统 N_2 正常工作的概率

$P_2=P(A)\bullet\left[1-P\left(\overline{B}\bullet\overline{C}\right)\right]=P(A)\bullet\left[1-P\left(\overline{B}\right)\bullet P\left(\overline{C}\right)\right],$
$\because P\left(\overline{B}\right)=1-P(B)=1-0.90=0.10,$

$P\left(\overline{C}\right)=1-P(C)=1-0.90=0.10,$
$\therefore P_2=0.80\times[1-0.10\times 0.10]=0.80\times 0.99=0.792.$

故系统正常工作的概率为 0.792.

【例 8】有三种产品，合格率分别为 0.90，0.95 和 0.95，各取一件进行检验．

（1）求恰有一件不合格的概率；

（2）求至少有两件不合格的概率．（精确到 0.01）

【解析】设三种产品各取一件，抽到的合格产品的事件分别为 A、B 和 C

(Ⅰ)因为事件 A、B、C 相互独立，恰有一件不合格的概率为

$P\left(A\bullet B\bullet\overline{C}\right)+P\left(A\bullet\overline{B}\bullet C\right)+P\left(\overline{A}\bullet B\bullet C\right)$
$=P(A)\bullet P(B)\bullet P\left(\overline{C}\right)+P(A)\bullet P\left(\overline{B}\right)\bullet P(C)+P\left(\overline{A}\right)\bullet P(B)\bullet P(C)$
$=0.90\times 0.95\times 0.05+0.90\times 0.05\times 0.95+0.10\times 0.95\times 0.95$
$=0.176$

答：恰有一件不合格的概率为 0. 176.

（Ⅱ）解法一：至少有两件不合格的概率为

$$P\left(A\bullet\overline{B}\bullet\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\bullet B\bullet\overline{C}\right)+P\left(\overline{A}\bullet\overline{B}\bullet C\right)+P\left(\overline{A}\bullet\overline{B}\bullet\overline{C}\right)$$

$$=0.90\times0.05^2+2\times0.10\times0.95\times0.05+0.10\times0.05^2$$

$$=0.012$$

答：至少有两件不合格的概率为 0. 012.

解法二：三件都合格的概率为：

$$P\left(A\bullet B\bullet C\right)=P\left(A\right)\bullet P\left(B\right)\bullet P\left(C\right)=0.90\times0.95^2=0.812$$

由（Ⅰ）可知恰好有一件不合格的概率为 0. 176，所以至少有两件不合格的概率为

$1-\left[P\left(A\bullet B\bullet C\right)+0.176\right]=1-\left(0.812+0.176\right)=0.012$ 答：至少有两件不合格的概率为 0. 012.

【例 9】甲、乙两人独立地解同一问题，甲解决这个问题的概率是 P_1，乙解决这个问题的概率是 P_2，则其中至少有一个人解决这个问题的概率是（　　）

A. P_1+P_2　　B. $P_1\bullet P_2$　　C. $1-P_1\bullet P_2$　　D. $1-(1-P_1)(1-P_2)$　　E $1-P_1-P_2$

【解析】由题意可得，甲、乙二人都不能解决这个问题的概率是 （1-P1）（1-P2），

故么其中至少有 1 人解决这个问题的概率是 1-（1-P1）（1-P2），故选 D.