我的数学笔记

邱彼郑楠

2024 年 3 月 31 日

1 同伦方法

1.1 预备知识

1.1.1 光滑映射

定义 1.1. *如果映射 $f: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 在定义域 D 中每一点都具有 r 阶连续偏导数，则称 f 为 C^r 映射; 如果对任一个正整数 r, 映射 f 是 C^r 映射, 则称 f 是光滑映射.*

1. 光滑映射在其定义域内每一点处都可微.
2. 如果 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 都是光滑映射, 则复合映射 $g \circ f: X \to Z$ 也是光滑的.
3. 任意集合上的恒同映射和常值映射都是光滑映射.
4. $\mathbb{R}^m$ 中的任意紧集上的连续映射都可由光滑映射任意逼近.

定理 1.1. *设 $X \subset \mathbb{R}^m$ 是紧集, $f: X \to \mathbb{R}^n$ 是连续映射, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在光滑映射 $g: X \to \mathbb{R}^n$, 使得对任意 $x \in X$, 成立*

$$\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon.$$

1.1.2 正则值

定义 1.2. *设 $f: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是光滑映射, 对 D 中的某一点 $\boldsymbol{x}_0$, 如果 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 Jacobi 矩阵 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)$ 行满秩, 则称 $\boldsymbol{x}_0$ 是映射 f 的正则点. 若 $\boldsymbol{x}_0$ 不是映射 f 的正则点, 即映射 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点处的 Jacobi 矩阵行降秩, 则称 $\boldsymbol{x}_0$ 是映射 f 的临界点.*

定义 1.3. *设 $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, 如果所有 $\boldsymbol{x}_0 \in f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ 都是映射 f 的正则点, 则称 $\boldsymbol{y}_0$ 为映射的正则值; 如果 $\boldsymbol{y}_0$ 不是映射的正则值, 亦即存在 $\boldsymbol{x}_0 \in f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ 使得 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的临界点, 则称 $\boldsymbol{y}_0$ 是映射 f 的临界值. 特别地, 如果 $\boldsymbol{y}_0 \notin f(D) = \{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in D\}$, 即 $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n \backslash f(D)$, 则 $\boldsymbol{y}_0$ 是映射 f 的正则值.*

临界点的像一定是临界值, 但正则点的项不一定是正则值. 只要 $f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ 中有一个临界点, $\boldsymbol{y}_0$ 就是临界值, 同时 $f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ 中可能有多个正则点.

如果 $m = n$, 使得 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = 0$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 称为 f 的临界点.

1.1.3 微分同胚

定义 1.4. *设 X 和 Y 分别是两个欧式空间中的子集, 如果映射 $f: X \to Y$ 是双射 (即一一对应), 且 f 与 f 的逆映射 f^{-1} 都是光滑映射, 则称 f 是 X 到 Y 的一个微分同胚. 如果这样的同胚存在, 则称 X 与 Y 是微分同胚的.*