我的数学笔记

邱彼郑楠

2024 年 4 月 1 日

目录

1 同伦方法

1.1 预备知识

1.1.1 光滑映射

定义 1.1. *如果映射 $f: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 在定义域 D 中每一点都具有 r 阶连续偏导数, 则称 f 为 C^r 映射; 如果对任一个正整数 r, 映射 f 是 C^r 映射, 则称 f 是光滑映射.*

1. 光滑映射在其定义域内每一点处都可微.
2. 如果 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 都是光滑映射, 则复合映射 $g \circ f: X \to Z$ 也是光滑的.
3. 任意集合上的恒同映射和常值映射都是光滑映射.
4. $\mathbb{R}^m$ 中的任意紧集上的连续映射都可由光滑映射任意逼近.

定理 1.1. *设 $X \subset \mathbb{R}^m$ 是紧集, $f: X \to \mathbb{R}^n$ 是连续映射, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在光滑映射 $g: X \to \mathbb{R}^n$, 使得对任意 $x \in X$, 成立*

$$\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon.$$

1.1.2 正则值

定义 1.2. *设 $f: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是光滑映射, 对 D 中的某一点 $\boldsymbol{x}_0$, 如果 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 Jacobi 矩阵 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)$ 行满秩, 则称 $\boldsymbol{x}_0$ 是映射 f 的正则点. 若 $\boldsymbol{x}_0$ 不是映射 f 的正则点, 即映射 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点处的 Jacobi 矩阵行降秩, 则称 $\boldsymbol{x}_0$ 是映射 f 的临界点.*

定义 1.3. *设 $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, 如果所有 $\boldsymbol{x}_0 \in f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ 都是映射 f 的正则点, 则称 $\boldsymbol{y}_0$ 为映射的正则值; 如果 $\boldsymbol{y}_0$ 不是映射的正则值, 亦即存在 $\boldsymbol{x}_0 \in f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ 使得 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的临界点, 则称 $\boldsymbol{y}_0$ 是映射 f 的临界值. 特别地, 如果 $\boldsymbol{y}_0 \notin f(D) = \{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in D\}$, 即 $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n \backslash f(D)$, 则 $\boldsymbol{y}_0$ 是映射 f 的正则值.*

临界点的像一定是临界值, 但正则点的项不一定是正则值. 只要 $f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ 中有一个临界点, $\boldsymbol{y}_0$ 就是临界值, 同时 $f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ 中可能有多个正则点.

如果 $m = n$, 使得 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = 0$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 称为 f 的临界点.

1.1.3 微分同胚

定义 1.4. *设 X 和 Y 分别是两个欧式空间中的子集, 如果映射 $f: X \to Y$ 是双射 (即一一对应), 且 f 与 f 的逆映射 f^{-1} 都是光滑映射, 则称 f 是 X 到 Y 的一个微分同胚. 如果这样的同胚存在, 则称 X 与 Y 是微分同胚的.*

定义 1.5. *设 X 和 Y 是某两个欧式空间中的子集, 如果 f 给出 X 中点 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域到 Y 中 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 的某个邻域的微分同胚, 则称映射 $f: X \to Y$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点处是局部微分同胚. 如果 f 在 X 的每一点处是局部微分同胚的, 则称 f 是 X 到 Y 的一个局部微分同胚.*

定理 1.2 (反函数定理)**.** *设 W 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个开集, $f: W \to V$ 是光滑映射. 若 f 在 $\boldsymbol{x}_0 \in W$ 处的导映射 $\mathrm{d}f_{\boldsymbol{x}_0}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的同构映射, 则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是局部微分同胚.*

推论 1.1. *设 W 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f: W \to V$ 是光滑映射, 则 f 在 $\boldsymbol{x}_0 \in W$ 是局部微分同胚的充分必要条件是: $\mathrm{d}f_{\boldsymbol{x}_0}$ 是同构映射.*

1.1.4 Sard 定理

定义 1.6. 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集, 如果对任意 $\boldsymbol{x} \in X$, 存在 $\boldsymbol{x}$ 在 X 的一个邻域 $V \subset X$, 使得 V 与 $\mathbb{R}^k$ 的一个开集微分同胚, 则称 X 是 k 维光滑流形. 若光滑流形 X 的子集 Y 也是光滑流形, 就说 Y 是 X 的子流形.

常见的光滑流形:

- $\mathbb{R}^n$ 是 n 维光滑流形;
- $(0,1) \times \mathbb{R}^n$ 是 $n+1$ 维光滑流形;
- $\mathbb{R}^n$ 中的单位开球 $B(1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ 和单位球面 $S(1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ 分别是 n 维光滑流形和 $n-1$ 维光滑流形.

流形之间光滑映射的任一正则值的逆象是一个光滑流形.

定理 1.3 (逆象定理)**.** 设 X 和 Y 分别是 k 维的和 l 维的光滑流形, $k > l$, $f : X \to Y$ 是光滑映射, 如果 $y \in Y$ 是映射 f 的正则值, 则 $f^{-1}(y)$ 或者是空集, 或者是 X 中的 $k-l$ 维子流形.

逆象定理表明, 正则值的逆象有很好的几何结构. 那么 Y 中有多少点是光滑映射 $f : X \to Y$ 的正则值?

定理 1.4 (Sard 定理)**.** 设 X 和 Y 是光滑流形, $f : X \to Y$ 是光滑映射. 记 D 是 f 的临界点集, 则 f 的临界点集 $f(D) \subset Y$ 在 Y 中的测度为零.