我的数学笔记

邱彼郑楠

2024 年 4 月 8 日

目录

1 同伦方法

1.1 预备知识

1.1.1 光滑映射

定义 1.1. 如果映射 $f: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 在定义域 D 中每一点都具有 r 阶连续偏导数, 则称 f 为 C^r 映射; 如果对任一个正整数 r, 映射 f 是 C^r 映射, 则称 f 是光滑映射.

1. 光滑映射在其定义域内每一点处都可微.
2. 如果 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 都是光滑映射, 则复合映射 $g \circ f: X \to Z$ 也是光滑的.
3. 任意集合上的恒同映射和常值映射都是光滑映射.
4. $\mathbb{R}^m$ 中的任意紧集上的连续映射都可由光滑映射任意逼近.

定理 1.1. 设 $X \subset \mathbb{R}^m$ 是紧集, $f: X \to \mathbb{R}^n$ 是连续映射, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在光滑映射 $g: X \to \mathbb{R}^n$, 使得对任意 $x \in X$, 成立

$$\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon.$$

1.1.2 正则值

定义 1.2. 设 $f: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ 是光滑映射, 对 D 中的某一点 $\boldsymbol{x}_0$, 如果 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处的 *Jacobi* 矩阵 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{x}_0)$ 行满秩, 则称 $\boldsymbol{x}_0$ 是映射 f 的正则点. 若 $\boldsymbol{x}_0$ 不是映射 f 的正则点, 即映射 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点处的 *Jacobi* 矩阵行降秩, 则称 $\boldsymbol{x}_0$ 是映射 f 的临界点.

定义 1.3. 设 $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, 如果所有 $\boldsymbol{x}_0 \in f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ 都是映射 f 的正则点, 则称 $\boldsymbol{y}_0$ 为映射的正则值; 如果 $\boldsymbol{y}_0$ 不是映射的正则值, 亦即存在 $\boldsymbol{x}_0 \in f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ 使得 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 的临界点, 则称 $\boldsymbol{y}_0$ 是映射 f 的临界值. 特别地, 如果 $\boldsymbol{y}_0 \notin f(D) = \{f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{x} \in D\}$, 即 $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbb{R}^n \backslash f(D)$, 则 $\boldsymbol{y}_0$ 是映射 f 的正则值.

临界点的像一定是临界值, 但正则点的项不一定是正则值. 只要 $f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ 中有一个临界点, $\boldsymbol{y}_0$ 就是临界值, 同时 $f^{-1}(\boldsymbol{y}_0)$ 中可能有多个正则点.

如果 $m = n$, 使得 Jacobi 行列式 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) = 0$ 的点 $\boldsymbol{x}$ 称为 f 的临界点.

1.1.3 微分同胚

定义 1.4. 设 X 和 Y 分别是两个欧式空间中的子集, 如果映射 $f: X \to Y$ 是双射 (即一一对应), 且 f 与 f 的逆映射 f^{-1} 都是光滑映射, 则称 f 是 X 到 Y 的一个微分同胚. 如果这样的同胚存在, 则称 X 与 Y 是微分同胚的.

定义 1.5. 设 X 和 Y 是某两个欧式空间中的子集, 如果 f 给出 X 中点 $\boldsymbol{x}_0$ 的某个邻域到 Y 中 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 的某个邻域的微分同胚, 则称映射 $f: X \to Y$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点处是局部微分同胚. 如果 f 在 X 的每一点处是局部微分同胚的, 则称 f 是 X 到 Y 的一个局部微分同胚.

定理 1.2 (反函数定理)**.** 设 W 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个开集, $f: W \to V$ 是光滑映射. 若 f 在 $\boldsymbol{x}_0 \in W$ 处的导映射 $\mathrm{d}f_{\boldsymbol{x}_0}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的同构映射, 则 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处是局部微分同胚.

推论 1.1. 设 W 和 V 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, $f: W \to V$ 是光滑映射, 则 f 在 $\boldsymbol{x}_0 \in W$ 是局部微分同胚的充分必要条件是: $\mathrm{d}f_{\boldsymbol{x}_0}$ 是同构映射.

1.1.4 Sard 定理

定义 1.6. 设 X 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个子集, 如果对任意 $\boldsymbol{x} \in X$, 存在 $\boldsymbol{x}$ 在 X 的一个邻域 $V \subset X$, 使得 V 与 $\mathbb{R}^k$ 的一个开集微分同胚, 则称 X 是 k 维光滑流形. 若光滑流形 X 的子集 Y 也是光滑流形, 就说 Y 是 X 的子流形.

常见的光滑流形:

- $\mathbb{R}^n$ 是 n 维光滑流形;
- $(0,1) \times \mathbb{R}^n$ 是 $n+1$ 维光滑流形;
- $\mathbb{R}^n$ 中的单位开球 $B(1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ 和单位球面 $S(1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ 分别是 n 维光滑流形和 $n-1$ 维光滑流形.

流形之间光滑映射的任一正则值的逆象是一个光滑流形.

定理 1.3 (逆象定理)**.** 设 X 和 Y 分别是 k 维的和 l 维的光滑流形, $k > l$, $f : X \to Y$ 是光滑映射, 如果 $y \in Y$ 是映射 f 的正则值, 则 $f^{-1}(y)$ 或者是空集, 或者是 X 中的 $k-l$ 维子流形.

逆象定理表明, 正则值的逆象有很好的几何结构. 那么 Y 中有多少点是光滑映射 $f : X \to Y$ 的正则值?

定理 1.4 (Sard 定理)**.** 设 X 和 Y 是光滑流形, $f : X \to Y$ 是光滑映射. 记 D 是 f 的临界点集, 则 f 的临界点集 $f(D) \subset Y$ 在 Y 中的测度为零.

1.2 连续同伦算法

定义 1.7. 设 X 与 Y 是拓扑空间, $f_0, f_1 : X \to Y$ 是连续映像. 记 $I = [0,1]$. 若存在连续映像 $H : X \times I \to Y$, 使得对一切 $x \in X$ 成立 $H(x,0) = f_0(x)$ 与 $H(x,1) = f_1(x)$, 则称 f_0 同伦于 f_1, 记为 $f_0 \simeq f_1 : X \to Y$. 称映像 H 为从 f_0 到 f_1 的**同伦**或**伦移**, 记为 $H : f_0 \simeq f_1$ 或 $f_0 \overset{H}{\simeq} f_1$. 若一个映像 $f : X \to Y$ 同伦于常值映像, 就说 f 是一个**零伦**, 记为 $f \simeq 0$.

定理 1.5. 记 $C(X,Y)$ 是 X 到 Y 的一切连续映像之集合, 则同伦关系在 $C(X,Y)$ 中是一种等价关系.

根据这一定理, 从 X 到 Y 的连续映像集合 $C(X,Y)$ 按同伦关系可分成若干互不相交的等价类, 其中每一类成为一个**同伦类**.

常见同伦:

线性同伦 $H(x,t) = tg(x) + (1-t)f(x)$;

Newton 同伦 $H(x,t) =$;

1.2.1 Householder 变换

定义 1.8. 对任意单位向量 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, 矩阵

$$Q = I - 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$$

称为关于 $\boldsymbol{u}$ 的 *Householder* 变换矩阵.

Householder 变换的性质:

- $Q\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x},\forall\boldsymbol{x}\in P$, 即超平面 P 中的任何向量不能反射到其他任何地方.
- $Q\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{u}$.
- Q 是一个正交矩阵, 向量经反射变换 Q 后不改变长度, $\|Q\boldsymbol{x}\|_2=\|\boldsymbol{x}\|_2,\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$.
- $Q^2=I$, 即 Q 是对合的, 从而 $Q^{\mathrm{T}}=Q$.
- Q 有一个 $n-1$ 重特征值 1 和一个单重特征值 -1, 从而有 $\det Q=-1$.

1.3 单个零点的同伦算法

定理 1.6 (广义 Sard 定理, 参数化 Sard 定理)**.** *设 $U\subset\mathbb{R}^m,V\subset\mathbb{R}^q$ 是开集, $\phi:U\times V\to\mathbb{R}^p$ 是 C^r 映射, $r\geq\max\{0,m-p\}$. 若 $0\in\mathbb{R}^p$ 是 ϕ 的正则值, 则对几乎所有 $a\in V$, 0 是映射 $\phi(\cdot,a):U\to\mathbb{R}^p$ 的正则值.*

1.4 基本微分方程

定理 1.7. *设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 是一有界开凸集, f 是映 $\bar{\Omega}$ 到其自身上的连续映像, 则 f 在 $\bar{\Omega}$ 中有不动点 $\boldsymbol{x}^*$, 即 $f(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{x}^*$. 如果进一步假定 $f\in C^2(\Omega)$, 则对几乎每个 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$, 存在一光滑的简单曲线*

$$\left\{(x(s),t(s))\in\bar{\Omega}\times[0,1]:s\in[0,S)\right\},$$

这里 S 是一正实数或 $+\infty$, 使得

(i) $(x(s),t(s))\in H^{-1}(0)$, 其中

$$H(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{x}-((1-t)\boldsymbol{x}_0+tf(\boldsymbol{x})),$$

且 $(x(0),t(0))=(\boldsymbol{x}_0,0)$;

(ii) $\lim\limits_{s\to S}t(s)=1$, 因而 $\lim\limits_{s\to S}(f(x(s))-x(s))=0$;

(iii) $(x(s),t(s))$ 满足代数微分方程初值问题:

$$\begin{cases}H_x\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}+H_t\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=0,\\ \left\|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s}\right\|_2^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2=1,\\ x(0)=\boldsymbol{x}_0,\\ t(0)=0.\end{cases}\tag{1}$$

该定理的第一部分是 **Brouwer 不动点定理**, 即:

定理 1.8. *设 Ω 为 R^n 中的有界闭凸集, 映像 $F:\Omega\to\Omega$ 连续. 则 F 在 Ω 中必有不动点, 即必有 $\boldsymbol{x}^*\in\Omega$, 使得 $F(\boldsymbol{x}^*)=\boldsymbol{x}^*$.*

后半部分可以看成较弱的 Brouwer 不动点定理的构造型证明. 附加假设 $f\in C^2(\Omega)$ 较弱是因为实际应用中非光滑算子并不多.

任何求解初值问题 (1) 的可靠方法都可以用来求解不动点问题 $\boldsymbol{x}=f(\boldsymbol{x})$. 同伦延拓法的一个较重要的分支实际上是为了求解 (1) 而设计的算法.

微分方程 (1) 确定了 $\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s},\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)$ 的两个解向量集 (根据其方向相反而区分), 但在计算上是麻烦的. 下述定理解决了这一麻烦:

定理 1.9 (基本微分方程). 设 $H:\bar{\Omega}\times[0,1]\to\mathbb{R}^n$ 连续可微, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为开集. 假定

(i) $\mathbf{0}$ 是 H 的正则值;

(ii) $H(\boldsymbol{x}_0,0)=\mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{x}_0\in\Omega$ 是 $H(\cdot,0)$ 的一个正则点;

(iii) $\left\{(\boldsymbol{x}(s),t(s))\in\bar{\Omega}\times[0,1]:s\in[0,S)\right\}\subset H^{-1}(\mathbf{0})$ 是以弧长为参数的同伦道路, 沐足初始条件 $(\boldsymbol{x}(0),t(0))=(\boldsymbol{x}_0,0)$.

则同伦道路 $(\boldsymbol{x}(s),t(s))$ 由以下微分方程初值问题所确定:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}=(-1)^iC(\boldsymbol{x},t)\cdot\det(\mathrm{D}\mathrm{H}_{-i}(\boldsymbol{x},t)),\quad i=1,2,\cdots,n,\\ \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=(-1)^{n+1}C(\boldsymbol{x},t)\cdot\det(H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x},t)),\\ (\boldsymbol{x}(0),t(0))=(\boldsymbol{x}_0,0),\end{cases}$$

这里

$$C(\boldsymbol{x},t)=\frac{(-1)^{n+1}\mathrm{sgn}(\det(H_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}_0,0)))}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n+1}\left(\det(\mathrm{D}\mathrm{H}_{-i})\right)^2}}$$

其中 sgn 为符号函数.

1.5 路径跟踪算法

1. **初始化步**. 确定以下三个量:
   - 初始点 $(\boldsymbol{x},t)_0=(\boldsymbol{x}_0,0)$;
   - 初始步长 δ;
   - 容许误差 ε.
2. **预估步**. 计算 $(\boldsymbol{x},t)_0$ 处的切向量 $\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s},\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)$, 并且用 Euler 法计算一步得
   $$(\boldsymbol{x},t)_1=(\boldsymbol{x},t)_0+\delta\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right).$$
   如果 $(\boldsymbol{x},t)_1$ 中的 t 分量大于 1, 则调整步长 δ 使预估在超平面 $t=1$ 上.
3. **校正步**. 以 $(\boldsymbol{x},t)_1$ 为初值, 用迭代法产生一个序列 $\{(\boldsymbol{x},t)_i\}_{i=1}^k$, 使 $(\boldsymbol{x},t)_*=(\boldsymbol{x},t)_k$ 为 $H^{-1}(\mathbf{0})$ 中点的近似且其误差小于 ε. 如果迭代法不收敛, 则缩小步长转回预估步.
4. **调换步**. 根据某判别准则, 若 $(\boldsymbol{x},t)_*$ 已满足要求, 则置 $(\boldsymbol{x},t)_0=(\boldsymbol{x},t)_*$, 并调整步长 δ, 否则缩小步长转预估步.
5. **调换步**. 如果 $(\boldsymbol{x},t)_*$ 的 t 分量等于 1, 停止, 这时 $(\boldsymbol{x},t)_*$ 的 $\boldsymbol{x}$ 分量是 $f(\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ 的一个近似解. 若 $(\boldsymbol{x},t)_*$ 的 t 分量小于 1, 转预估步.

1.6 切向量的计算方法