Research Article

Integrales definidas mediante el método de Romberg y la extrapolación Richardson

Brayan Iván de la Cruz Martínez,[1]
[1] *Universidad Autónoma de Nuevo León , FCFM, México, Monterrey N.L*
Matrículas en orden de aparición: 1904210, 1904527,
Grupo: 021

Martes 22 de Noviembre del 2022

Key words: Romberg – Python – Fortran

1 INTRODUCCIÓN

Las integrales definidas tienen un sin fin de aplicaciones en el mundo de la física y de la ingeniería en donde la evaluación de las mismas se vuelve un procedimiento complicado si tratamos de hacerlas de una manera tradicional, es por eso que existen algunos métodos numéricos que nos permiten realizar este tipo de integrales mediante un algoritmo implementado a un lenguaje de programación.

En el siguiente reporte se presentará un resumen breve, del método de Romberg implementado en el lenguaje Python y Fortran, junto con una aplicación del método.

1.1 Objetivos

- Implementar el método de Romberg en Python y Fortran,
- Solucionar un ejercicio con el código desarrollado en Python.

2 Marco teórico

2.1 Método de Romberg

El método de Romberg es una técnica numérica que se utiliza para poder el valor de una integral definida. Está basada en la combinación de diferentes estimaciones de la integral, obtenidas a través de métodos de integración de trapecios y de Simpson. El método luego se puede aproximar usando la extrapolación de Richardson.

Es importante destacar que, aunque el método de Romberg es más preciso que otros métodos de integración numérica, también requiere más cálculos y, por lo tanto, puede ser más computacionalmente costoso. Sin embargo, es una técnica muy útil en situaciones en las que la precisión es crucial y se dispone de recursos computacionales adecuados.

Las formulas usadas son las siguientes:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h_k}{2}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a+ih_k)\right) \tag{1}$$

$$= R_{k,1} \tag{2}$$

Donde se puede esribir en forma recursiva de la siguiente forma

$$R_{k,1} = \frac{1}{2}\left(R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a+\frac{2i-2}{2}h_{k-1,1})\right) \tag{3}$$

Extrapolación de Richardson

$$R_{i,j} = \frac{4^{j-1}R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1}-1} \tag{4}$$

donde $i = 1, 2, 3 \ldots$ y $j = 2, 3, \ldots$

3 PROCEDIMIENTOS

3.1 Descripción del algoritmo

Al iniciar el programa se le pregunta al usuario, ¿hasta qué error quiere hacer los cálculos?, es entonces cuando le pide ingresar los límites de la integral una vez hecho esto, el programa corre y se calcula la primera aproximación con la formula 2 para k=1, R_{11} y se guarda en una matriz M de tamaño 2×2 en el elemento M_{11}.

Una vez hecho esto, se calcula el término siguiente, con la fórmula 3 y se guarda el elemento de la matriz M_{21}.

Finalmente es que se calcula el siguiente valor de la matriz con la extrapolación de Richardson 4. Este procedimiento sigue hasta poder completar el error requerido por el usuario. El error es calculado mediante la comparación entre los valores de la integral calculada y el valor anterior calculado, es decir, por ejemplo, el primer error calculado que se hace. Es entre el elemento R_{22} y el R_{11}. Para después calcular el error entre el elemento R_{32} y el R_{31}, así hasta que se logre cumplir la condición del error.

4 RESULTADOS

Se resolvió el siguiente problema, como ejemplo para poder aplicar el método.

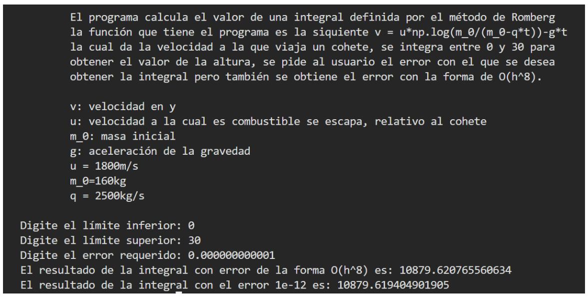
The upward velocidy of a rocket can be computed by the following formula:

$$v = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - qt}\right) - gt$$

Where v = upward velocity, u = velocity at which fuel is expelled relative to the rocket, m_0 = initial mass of the rocket at time $t = 0$, q = fuel consumption rate, and

g = downward acceleration of gravity (assumed constant $= 9.8m/s^2$). If $u = 1800m/s$, $m_0 = 160,000kg$ and $q = 2500kg/s$, use six-segment trapezoidal and Simpson's $1/3$ rule, six-point Gauss quadrature, and $O(a^5)$ Romberg methods to determine how high the rocket will fly in $30s$.

Al implementar la función al método de python he integral la altura nos da un resultado de $y = 10879.619$.



```
        El programa calcula el valor de una integral definida por el método de Romberg
        la función que tiene el programa es la siquiente v = u*np.log(m_0/(m_0-q*t))-g*t
        la cual da la velocidad a la que viaja un cohete, se integra entre 0 y 30 para
        obtener el valor de la altura, se pide al usuario el error con el que se desea
        obtener la integral pero también se obtiene el error con la forma de O(h^8).

        v: velocidad en y
        u: velocidad a la cual es combustible se escapa, relativo al cohete
        m_0: masa inicial
        g: aceleración de la gravedad
        u = 1800m/s
        m_0=160kg
        q = 2500kg/s

Digite el límite inferior: 0
Digite el límite superior: 30
Digite el error requerido: 0.000000000001
El resultado de la integral con error de la forma O(h^8) es: 10879.620765560634
El resultado de la integral con el error 1e-12 es: 10879.619404901905
```

Figure 1: Resultado de aplicar el programa para solucionar el problema.

Debido a la gran extensión del programa se optó por no colocarlo dentro del reporte, sin embargo se pueden encontrar el código del programa y las gráficas mostradas, en GitHub en el siguiente url: https://github.com/runnnie/M-todos-num-ricos.

5 CONCLUSIÓN

En conclusión, el método de Romberg es una técnica útil y eficiente para la aproximación de la integración numérica de una función. Aunque no es tan preciso como otros métodos como el método de Monte Carlo, su simplicidad y eficiencia lo hacen una buena opción para muchos problemas de integración numérica. Es importante tener en cuenta que como todos los métodos numéricos, la precisión del método de Romberg depende del tamaño de los intervalos de integración y la complejidad de la función a integrar.

6 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Chapra, S. C., Canale, R. P., Brito, J. E., Hano, M. C. R. (2006). Métodos numéricos para ingenieros. McGraw-Hill Education.