Introduction and Determinant

Sebelumnya kita telah menyelesaikan persamaan $Ax = b$. Saat ini, kita memelajari mengenai persamaan eigen $Ax = \lambda x$ dimana λ berupa skalar (eigen value) dan x berupa vektor (eigen vector).

Learning Outcomes for the Fisrt Term

1. Menyelesaikan sistem persamaan linear.
2. Mempelajari konsep eigenvalues dan eigenvectors dari matriks persegi.

Determinant

Properties of Determinant

Biasa dinotasikan sebagai $\det(A)$.

Tujuan utama mempelajari determinan:

1. Membantu menyelesaikan $Ax = b$
2. **Menghitung eigenvalues dari suatu matriks**

Determinan bisa dibilang sebagai area dari suatu matriks setelah dioperasikan dengan matriks transformasi A.

1. Determinan $n \times n$ dari I adalah 1.
2. Tanda determinan berbalik apabila mengganti baris.
3. Determinan adalah fungsi linear setiap baris secara terpisah.
   - (Row addition) $(a + a')d - (b + b')c$
   - (Scalar-row multiplication) $tad - tcd = t(ad - cd)$

> ⚠ Properti ini tidak melazimkan bahwa $|A + B| = |A| + |B|$ karena **seluruh row berubah**

4. Jika terdapat baris dari A yang sama, maka $|A| = 0$.
5. Jika salah satu baris di A dikurangi oleh kelipatan baris lain dari A, tidak mengubah determinannya.
6. Sebuah matriks yang mengandung setidaknya 1 baris nol memiliki determinan nol.
7. Jika A berupa triangular matriks (U atau L), maka determinanya adalah perkalian dari entri diagonalnya ($a_{1,1}, \cdots, a_{n,n}$).
8. Jika A singular, maka determinannya nol (vice versa).
9. Determinan dari matriks $AB = \det(A) \times \det(B)$
10. Transpose dari A memiliki determinan yang sama dari A pula. **Memiliki konsekuensi bahwa seluruh sifat yang menempel pada baris, juga menempel pada kolom.**

Calculating Determinants

Terdapat 3 metode:

1. Pivot formula
2. Big formula
3. Cofactors formula

Pivot formula

Determinan dari A dicari menggunakan faktorisasi LU. Diketahui pula bahwa matriks L memiliki determinan 1, maka $\det(A) = \det(U) = u_{1,1} \times \cdots \times u_{n,n}$. Namun, jika terjadi row exchange, maka

$$PA = LU \rightarrow |A| = \frac{|L||U|}{|P|}$$

Dimana determinan $|P|$ adalah alternating sign dari $(-1)^n$ tergantung banyaknya penukaran baris.

Big formula

Men-split matriks A per baris dengan bentuk penjumlahan nol, sehingga setiap barisnya memiliki n terms. Jika di expand, maka akan menghasilkan n terms lagi untuk tiap barisnya, sehingga dengan aturan perkalian memiliki n^n terms dengan $n!$ non-zero untuk determinan.

Cofactors formula

Berikut adalah ekspansi kofaktor:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Dimana C_{ij} adalah kofaktor dari a_{ij}, yaitu determinan dari matriks A setelah menghilangkan baris ke-i dan kolom ke-j. Dimana positif negatifnya bergantung pada $(-1)^{i+j}$.

Cramer's Rule

Jika A berupa matriks persegi dan A memiliki determinan yang tidak nol, maka solusi dari $Ax = b$ adalah:

$$|A||X_i| = |B_i| \quad \text{dimana} \quad |X_i| = x_i$$

< L01

Question? Give us feedback →
Edit this page