

# LINEARE ALGEBRA I

BEGLEITSKRIPT ZUR ÜBUNGSSTUNDE HS 2025

BASIEREND AUF DER VORLESUNG VON PROF. DR. PAUL BIRAN

RUOCHENG WANG

Version: 22. September 2025

# Einleitung

Herzlich willkommen an der ETH! Ihr seid jetzt auf einer spannenden Reise, die Welt der Linearen Algebra zu entdecken — eines der grundlegenden und zentralen Gebiete der Mathematik. Ihr werdet lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Vektorräume, und lineare Abbildungen kennenlernen, die euch während eures gesamten Studiums begleiten werden. Abstrakter wird es bei Dualräumen und Isomorphiesätzen, wobei ihr einen Einblick in ein paar der wichtigsten und schönsten Strukturen in der Mathematik erhalten werdet. Viele Konzepte aus Linearer Algebra werdet ihr künftig noch brauchen in z.B. Analysis II und Numerischer Mathematik.

Diese Notizen sind für die Übungsstunden geschrieben und sollen dazu dienen, durch zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben euer Verständnis zu den Themen aus der Vorlesung zu verbessern und vertiefen. Es wird auch hier die Lösung zu den Quizen präsentiert, und am Ende der Notizen für jede Woche gibt es noch Hinweise zu den Serien. Wenn ihr Fragen habt oder Fehler in den Notizen findet, schreibt mir gerne eine E-Mail an [ruocwang@student.ethz.ch](mailto:ruocwang@student.ethz.ch). Die aktuelle Version der Notizen findet ihr unter <https://ruocheng-w.github.io>.

Ich wünsche euch viel Spass und Erfolg in eurem Studium!

Ruocheng Wang

September 2025, Zürich

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>i</b>
<b>1 Einführung in die mathematische Arbeit und Lineare Algebra</b>	<b>1</b>
1.1 Quiz 1 . . . . .	1
1.2 Tipps zum Mathematikstudium . . . . .	1
1.3 Beweisstrategien . . . . .	2
1.4 Die Fibonacci-Folge . . . . .	3
1.5 Hinweise zur Serie 1 . . . . .	4
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>6</b>

# Übungsstunde 1

---

## Einführung in die mathematische Arbeit und Lineare Algebra

---

22.09.2025

### Organisatorisches:

1. Bitte ladet eure Serien mit dem Namen `Nachname_Vorname_Serie01.pdf` als ein PDF hoch (mit sam-up).
2. Ihr könnt die Serien auf Deutsch oder Englisch lösen. Ihr werdet ermutigt, so viele Serienaufgaben zu lösen wie möglich.
3. Ihr könnt jeder Zeit Fragen auch auf Englisch stellen, insbesondere wenn es sich um Fachbegriffe handelt.

### 1.1 Quiz 1

Formulieren Sie die Negation so weit wie möglich nach innen in die folgende logische Aussage über eine Menge  $X$  und ein Element  $z \in X$ :

$$\neg((\forall x \in X, \exists y \in X : x + y = 0) \wedge (\exists x \in X, \exists y \in X : x + y > z)).$$

*Lösung.*

$$(\exists x \in X, \forall y \in X : x + y \neq 0) \vee (\forall x \in X, \forall y \in X : x + y \leq z).$$

□

### 1.2 Tipps zum Mathematikstudium

1. Es ist immer hilfreich, Mathematik zu lesen. Dadurch lernt man nicht nur das Wissen, sondern auch wie man selbst Mathematik schreibt. Am besten liest man Mathematik mit einem Stift und einem Blatt Papier, da das Mitdenken eine grosse Rolle spielt. Des Weiteren finde ich es wichtiger, die Ideen von Beweisen zu verstehen als die Details.
2. Wenn man Mathematik schreibt, soll man auf Folgendes achten:

- (a) Verwende nicht überall Symbole wie z.B.  $\implies$ ,  $\forall$ ,  $\exists$  usw., da sie spezielle Bedeutungen haben.
- (b) Schreibe vollständige Sätze. Ihr erklärt euren Lösungsweg.
- (c) Präzision ist sehr wichtig, besonders wenn es sich um Definitionen oder Annahmen handelt.

Mehr zu den Notationen und wie man Mathematik richtig schreibt, findet man im Buch [Beu09].

## 1.3 Beweisstrategien

### Direkter Beweis

**Beispiel 1.1.** Seien  $a, b \in \mathbb{Z}$  ungerade, dann ist  $a \cdot b$  ungerade.

*Beweis.* Per Definition ungerader Zahlen gibt es  $k, m \in \mathbb{Z}$ , sodass  $a = 2k + 1$ ,  $b = 2m + 1$ . Multiplizieren gibt uns

$$a \cdot b = (2k + 1) \cdot (2m + 1) = 4km + 2k + 2m + 1 = 2(2km + k + m) + 1,$$

d.h.  $a \cdot b$  ist ungerade. □

### Induktionsbeweis

**Beispiel 1.2.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  ist die Summe der ersten  $n$  ungeraden natürlichen Zahlen gleich  $n^2$ .

*Beweis.* Induktionsverankerung: für  $n = 1$  ist  $1 = 1^2$ .

Induktionsschritt: angenommen gilt die Aussage für  $n$ . Für  $n + 1$  folgt

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) \stackrel{\text{I.A.}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Daher ist die Aussage wahr für alle  $n \geq 1$ . □

### Beweis mit Kontraposition

**Beispiel 1.3.** Sei  $n \in \mathbb{Z}$ . Falls  $n^2$  gerade ist, dann ist auch  $n$  gerade.

*Beweis.* Wir zeigen  $n$  ungerade  $\implies n^2$  ungerade. Sei  $n$  ungerade, d.h.  $n = 2k + 1$  für  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann ist

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

also  $n^2$  ist ungerade. Alternativ verwendet man Beispiel 1.1. □

**Beweis mit Fallunterscheidung****Beispiel 1.4.** Zeigen Sie: Es gibt  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , sodass  $a^b \in \mathbb{Q}$ .*Beweis.* Es genügt, ein Beispiel zu finden, bei dem dies gilt. Wir betrachten  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  und machen eine Fallunterscheidung

- (i) Falls  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ , dann sind wir fertig: Wir können  $a = b = \sqrt{2}$  setzen.
- (ii) Falls  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ , seien  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ,  $b = \sqrt{2}$ . Dann ist

$$a^b = \left( \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = \left( \sqrt{2} \right)^2 = 2 \in \mathbb{Q}.$$

□

Die Stärke der Fallunterscheidung besteht darin, dass man nicht wissen muss, welcher genau der Fall ist. Wir brauchen nicht zu wissen, ob  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  rational ist oder nicht, trotzdem können wir damit nützliche Sachen beweisen. (Eigentlich ist  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  transzendent, daher irrational.)

**Widerspruchsbeweis****Beispiel 1.5.**  $\sqrt{2}$  ist irrational.

*Beweis.* Angenommen ist es nicht der Fall, dann können wir  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  für  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 0$ , mit  $\text{ggT}(p, q) = 1$ . Dann ist  $p^2 = 2q^2$ , also  $p^2$  ist gerade. Nach Beispiel 1.3 ist  $p$  gerade, also  $p = 2k$ . Dies impliziert wiederum, dass  $q^2 = 2k^2$  und daher ist  $q$  gerade. Das ist ein Widerspruch zur Annahme  $\text{ggT}(p, q) = 1$ . □

**1.4 Die Fibonacci-Folge****Übung 1.6** (0.2.12). Zeigen Sie, dass

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Was bedeutet überhaupt dieser Ausdruck?

*Lösung.* Wir definieren zuerst Ausdrücke von dieser Form (wie in [Hal24]).

**Definition 1.7.** Ein **unendlicher** Kettenbruch ist ein nicht abbrechender Bruch von der Form

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots}}},$$

wobei  $b_0, b_1, b_2 \dots$  ganze Zahlen und höchstens mit Ausnahme von  $b_0$  alle  $b_i$  positiv sind.

Ist  $\xi \in \mathbb{R}$  eine beliebige, positive, irrationale Zahl, so können wir  $\xi$  immer als unendlichen Kettenbruch schreiben. Dazu definieren wir für positive reelle Zahlen  $\alpha$ ,

$$\lfloor \alpha \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq \alpha\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{ll} \xi = b_0 + r_1 & \text{mit } b_0 := \lfloor \xi \rfloor \text{ und } r_1 = \xi - b_0, \text{ wobei } 0 < r_1 < 1 \text{ bzw. } \frac{1}{r_1} > 1 \\ \frac{1}{r_1} = b_1 + r_2 & \text{mit } b_1 := \left\lfloor \frac{1}{r_1} \right\rfloor \text{ und } r_2 = \frac{1}{r_1} - b_1, \text{ wobei } 0 < r_2 < 1 \text{ bzw. } \frac{1}{r_2} > 1 \\ \frac{1}{r_2} = b_2 + r_3 & \text{mit } b_2 := \left\lfloor \frac{1}{r_2} \right\rfloor \text{ und } r_3 = \frac{1}{r_2} - b_2, \text{ wobei } 0 < r_3 < 1 \text{ bzw. } \frac{1}{r_3} > 1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

und wir erhalten den Kettenbruch.

Jetzt zeigen wir die folgende Behauptung mit Induktion.

**Behauptung.**  $r_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

*Beweis.*  $n = 1$ :  $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Angenommen, die Gleichung gilt für  $n$ . Für  $n+1$  haben wir

$$\frac{1}{r_n} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

also folgt ähnlich wie im Basisfall  $r_{n+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . □

Wenn wir  $r_n$  kennen, ist es einfach  $b_n = 1$  abzulesen, da  $1 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$ . □

## 1.5 Hinweise zur Serie 1

1. (a) Welches lineare Gleichungssystem kann uns helfen?

- (b) Verwendet (a).
- 2. (a) Verwendet Wahrheitstabellen.  
(b) Können wir etwas ähnliches wie eine Wahrheitstabelle aufstellen?
- 3. Verwendet die Definition einer Fibonacci-Folge. Wie können wir ein Folgenglied  $F_n$  umschreiben? Alternativ versucht man, den Grenzwert mittels expliziter Berechnung zu bestimmen.
- 4. Verwendet De Morgan (Afg. 2).
- 5. Relativ direkt.
- 6. Wie lässt sich  $\mathcal{F}_{a,b}$  ausdrücken mithilfe von  $\mathcal{F}_{0,1}$  und  $\mathcal{F}_{1,0}$ ?



# Literaturverzeichnis

- [Beu09] Albrecht Beutelspacher. „*Das ist o. B. d. A. trivial!*“. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009. ISBN: 978-3-8348-0771-7.
- [Hal24] Lorenz Halbeisen. „Grundstrukturen“. Vorlesungsskript. 2024.