Übungsstunde 7

Basis von Vektorräumen

7.1 Quiz 5

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

1. Für alle linear **abhängig** (über K) Menge $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ gibt es $j \in \{1, \ldots, n\}$ sodass $S \setminus \{v_j\}$ linear **unabhängig** über K ist.
2. Für alle linear **abhängig** (über K) Menge $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ gibt es $j \in \{1, \ldots, n\}$ sodass $\operatorname{span}(S \setminus \{v_j\}) = \operatorname{span}(S)$.
3. Für alle $d \geq 0$, die folgenden Polynome vom Grad d sind linear **unabhängig** über $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + &x^d \\ x + x^2 + x^3 + \cdots + &x^d \\ x^2 + x^3 + \cdots + &x^d \\ &\vdots \\ &x^d. \end{aligned}$$

Lösung.

1. Falsch. Gegenbeispiel: $\{(1,0), (2,0), 3,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
2. Wahr. Siehe Vorlesung.
3. Wahr.

□

7.2 Besprechung Serie 6

1. Aufgabe 4 ist sehr ähnlich zu was wir letzte Woche gemacht haben. Der Unterschied ist, dass der Vektor x fix ist und wir eine Matrix A auf Ax abbilden. Diese Abbildung ist ebenfalls linear, wir sind also in einer guten Situation. Obwohl diese Aufgabe nicht

besonders schwer ist, wollte ich einiges dazu Sagen. Wir wissen dass Matrizen linearen Abbildungen entsprechen, somit können wir die Abbildung als $T_A \mapsto T_A(x)$ auffassen für fixes x. Allgemeiner können wir die lineare Abbildung $T \mapsto T(x)$ für beliebige lineare Abbildungen betrachten, die im gewissen Sinne „dual" zu $x \mapsto T(x)$ ist. Diese Idee ist zentral in der linearen Algebra, wie ihr später noch sehen werdet.

2. Für Aufgabe 6 habt manche von euch nur eine endliche Menge als Basis geschrieben. Leider sind beide Vektorräume unendlich dimensional. Wichtig: das N in der Definition der Vektorräume ist keine fixe Zahl für alle Vektoren/Folgen, sondern hängt von der Folge ab und kann beliebig gross sein. Daher ist eine endliche Basis nicht genug.

7.3 Basis

Übung 7.1. Betrachten Sie die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$U := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\},$$
$$V := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4,\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0\}.$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von

a) U,
b) V,
c) $U \cap V$.

Lösung. a) U ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit einer Gleichung

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 0.$$

Zur Parametrisierung wählen wir x_1, x_3, x_4 als freie Parameter. Aus der Gleichung folgt

$$x_2 = 2x_3 - x_4.$$

Damit lässt sich ein Vektor $x \in U$ schreiben als

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher bilden die Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von U. So ist $\dim U = 3$.

b) V ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Aus $x_1 = x_4$ folgt durch Einsetzen in die zweite Gleichung

$$x_4 + x_2 - 2x_3 - x_4 = x_2 - 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_3.$$

Wir wählen x_3 und x_4 als freie Parameter. Dann gilt

$$x = \begin{pmatrix} x_4 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher bilden die Vektoren

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von V. Folglich ist $\dim V = 2$.

c) Ein Vektor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ liegt in $U \cap V$, genau dann, wenn er alle drei Gleichungen erfüllt:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Aus $x_1 - x_4 = 0$ folgt $x_1 = x_4$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, erhält man

$$x_4 + x_2 - 2x_3 - x_4 = x_2 - 2x_3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2x_3.$$

Nun überprüft man die erste Gleichung:

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 2x_3 - 2x_3 + x_4 = x_4 = 0.$$

Also muss $x_4 = 0$ und damit $x_1 = 0$. Damit bleibt x_3 als freier Parameter und

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$c^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $U \cap V$ und wir erhalten $\dim U \cap V = 1$.

□

Übung 7.2. Es sei $V = \mathbb{R}[x]_3$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3. Man betrachte $W = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 : p(0) = p(1) = 0\} \subseteq V$.

1. Man zeige, dass W ein Unterraum von V ist.
2. Man bestimme eine Basis von W . Was ist die Dimension von W ?

Lösung.

1. Man kann natürlich die Unterraumaxiome überprüfen, aber mit was wir letzte Woche gesehen haben, haben wir bessere Werkzeuge, mit denen wir die Struktur eines Unterraums bestimmen können. Definiere $T : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$p \longmapsto (p(0), p(1)).$$

Man prüft, dass diese Abbildung linear ist. Somit ist $W = \ker T$ ein Unterraum.

2. Ein Polynom aus $\mathbb{R}[x]_3$ sieht wie folgt aus $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Damit $p \in W$

muss gelten

$$p(0) = a_0 = 0 \implies a_0 = 0,$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \implies a_3 = -(a_0 + a_1 + a_2) = -(a_1 + a_2).$$

Es wir erhalten

$$p(x) = a_1 x + a_2 x^2 - (a_1 + a_2)x^3 = a_1(x - x^3) + a_2(x_2 - x3).$$

Eine Basis von W ist somit $\{x - x^3, x^2 - x^3\}$ und die Dimension von W ist $\dim(W) = 2$.

□

In Übung 7.2 haben wir eine lineare Abbildung definiert, wobei $\mathrm{im}(T) = \mathbb{R}^2$, weil $T(1) = (1, 1)$ und $T(x) = (0, 1)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden. Also gilt

$$\dim V = 4, \quad \dim\ker(T) = 2, \dim\mathrm{im}(T) = 2.$$

Insbesondere ist $\dim V = \dim\ker(T) + \dim\mathrm{im}(T)$. In Übung 7.1 (a), können wir auch eine lineare Abbildung definiere, nämlich $T' : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit $T'(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 - 2x_3 + x_4$. So ist $\ker(T') = U$, $\mathrm{im}(T') = \mathbb{R}$ und

$$\dim \mathbb{R}^4 = 4, \quad \dim\ker(T') = 3, \dim\mathrm{im}(T') = 1.$$

Es gilt ebenfalls $\dim \mathbb{R}^4 = \dim\ker(T') + \dim\mathrm{im}(T')$. Man könnte vermuten, dass diese Formel allgemein gelten könnte, was intuitiv auch Sinn macht: Die Vektoren im Kern gehen durch die Abbildung verloren, also wir können sie nicht mehr im Bild finden, entsprechend muss das Bild klein sein wenn der Kern gross ist. Dies ist tatsächlich der Fall und es gilt folgendes Theorem.

Theorem 7.3 (Rank-Nullity Theorem)**.** *Es seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K, und es sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\dim_K V = \dim_K \ker(T) + \dim_K \mathrm{im}(T).$$

Dieses Theorem kann man mit einer Basis von V Beweis, ihr werdet den Beweis später in der Vorlesung sehen. Ich wollte es hier erwähnen, weil es genau unsere Beobachtung und Intuition über lineare Abbildungen erklärt.

7.4 Das Auswahlaxiom

Die Existenz einer Basis von einem endlich-dimensionalen Vektorraum ist leicht zu zeigen. Im Allgemeinen ist es aber gar nicht trivial, dass jeder Vektorraum eine Basis hat. Man könnte versuchen, dasselbe Argument wie im endlich-dimensionalen Fall anzuwenden, was man aber bekommt ist, dass man potenziell unendlich oft Elemente auswählen muss und der Prozess hört einfach nie auf. Man erhält also nie eine vollständige Basis, wenn der Vektorraum unendliche dimensional ist. So muss einige Annahmen treffen, um so etwas zu ermöglichen. Genau deswegen brauchen wir das Auswahlaxiom. Das Auswahlaxiom ist beweisbar aus anderen Sätzen, sonder muss angenommen werden.

Auswahlaxiom. Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von nicht leeren Mengen. Dann existiert eine Funktion

$$f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{F}}$$

mit $f(A) \in A$ für alle $A \in \mathcal{F}$.

Bemerkung 7.4. f wird eine Auswahlfunktion genannt, es wählt für jedes $A \in \mathcal{F}$ ein Element $f(A) \in A$ aus.

In der Praxis werden oft äquivalente Formen des Auswahlaxioms verwendet. Wir werden uns hauptsächlich mit dem folgenden Teichmüller Prinzip beschäftigen. Hier müssen wir zuerst einige Sachen definiere. Obwohl ich hier allgemeinere Definitionen gebe als was wir in der Übung gemacht haben, genügt es eigentlich zu wissen, das die Inklusion auch eine Partialordnung ist, insbesondere können wir ein maximales Element einer Familie von Mengen bezüglich der Inklusion definieren.

Definition 7.5. Eine Menge P zusammen mit einer binäre Relation $\leq$ ist eine **Partialordnung**, falls die Relation $\leq$ reflexiv ($x \leq x$), anti-symmetrisch (aus $x \leq y$ und $y \leq x$ folgt $x = y$), und transitiv (aus $x \leq y$ und $y \leq z$ folgt $x \leq z$) ist.

Definition 7.6. Sei $(P, \leq)$ eine Partialordnung. $x \in P$ heisst ein **maximales Element**, falls aus $x \leq y$ immer $x = y$ folgt.

Definition 7.7. Eine Familie $\mathcal{F}$ von Mengen hat **endlichen Charakter**, falls für jede Menge $x \in \mathcal{F}$ gilt, x ist in $\mathcal{F}$ genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von x in $\mathcal{F}$ ist.