Übungsstunde 8

Teichmüller Prinzip und Existenz von Basis

8.1 Besprechung Serie 7

Es gibt eine sehr intuitive Erklärung, wieso die Dimension von U in Aufgabe 4 gleich 4 ist. Es ist klar, dass die Dimension des gesamten Vektorraums von allen Abbildungen $f : \mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_5$ 5 ist. Wenn wir verlangen

$$\sum_{i=0}^{4} f(\bar{i}) = 0,$$

können wir $f(\overline{0})$ bis $f(\overline{3})$ immer noch frei wählen, $f(\overline{4})$ kann aber nur einen bestimmten Wert haben, nachdem wir $f(\overline{0})$ bis $f(\overline{3})$ festgelegt haben. Der „Freiheitsgrad“ ist jetzt 4, daher ist $\dim U = 4$.

8.2 Teichmüller Prinzip und Existenz von Basis

Teichmüller Prinzip. Ist $\mathcal{F}$ eine nicht-leere Familie von Mengen mit endlichem Charakter, so hat $\mathcal{F}$ ein bezüglich $\subseteq$ maximales Element.

Satz 8.1. *Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraums V enthält eine Basis von V.*

Beweis. Sei V ein Vektorraum über K und E ein Erzeugendensystem von V. Definiere

$$\mathcal{F} : \{X \in E : X \text{ ist linear unabhängig}\}.$$

Dann hat F endlichen Charakter: Sei $X \in \mathcal{F}$ und $A \subseteq X$ eine endliche Teilmenge. Dann ist A klarerweise linear unabhängig. Sei umgekehrt alle endliche Teilmenge von X linear unabhängig. Angenommen gibt es $x_1, \ldots, x_n \in X$ und $\alpha_1, \alpha_n \in K$ mit

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0.$$

Dann ist $\{x_1, \ldots x_n\} \subseteq X$ eine endliche Teilmenge (Hier sieht man, wie wichtig es ist, dass wir nur *endliche* Linearkombinationen erlauben! Sonst hätten wir möglicherweise eine unendliche Menge hier.), welche per Annahme linear unabhängig ist. Daraus folgt $\alpha_1, \ldots, \alpha_n =$

0 und X ist linear unabhängig. Somit ist $X \in \mathcal{F}$.

Nach dem Teichmüller Prinzip enthält F also eine maximale Menge M bezüglich Inklusion. Nach Definition von F ist M linear unabhängig und wegen der Maximalität ist M erzeugend (Wäre M nicht erzeugend, liesse es sich zu einer grösseren linear unabhängigen Menge erweitern.). Somit ist M eine Basis von V . □

Korollar 8.2. *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.*

Beweis. Klar, da jeder Vektorraum insbesondere ein Erzeugendensystem ist. □

8.3 Zeilen- und Spaltenräume

Definition 8.3. Der **Spark** einer Matrix $A \in M_{m\times n}(K)$ ist die minimale Anzahl von Spalten die eine linear abhängige Menge bilden.

Bemerkung 8.4. Wir schreiben $\mathrm{rk}(A)$ für den Zeilen- und Spaltenrang (row and column rank) der Matrix A. Ihr werdet später beweisen, dass Zeilenrang gleich Spaltenrang ist.

Übung 8.5. Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ Zeigen Sie:

1. Der Spark ist durch die folgende Formel gegeben:

$$\mathrm{spark}(A) = \begin{cases} \min\{\|v\|_0 : v \neq 0,\ Av = 0\}, & \text{falls die Menge nicht leer ist,} \\ n+1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ gilt $\mathrm{spark}(A) \leq \mathrm{rk}(A) + 1$, und es gibt $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ mit $\mathrm{spark}(A) < \mathrm{rk}(A)+1$. (Dies zeigt, dass der Spark und der Rang wesentlich verschiedene Begriffe sind.)

[**Hinweis.** $\|v\|_0 = |\{v_i : v_i \neq 0\}|$.]

Lösung. 1. Angenommen, es gibt k linear abhängige Spalten von A, d.h. es existiert $S \subseteq [n]$ mit $|S| = k$, sodass

$$\sum_{i\in S} c_i\phi_i = 0.$$

Setzt man $v \in \mathbb{C}^n$ so, dass $v_i = c_i$ für $i \in S$ und $v_i = 0$ sonst, erhält man $Av = 0$, also $\mathrm{spark}(A) \leq k$.
Analog kann man, ausgehend von $v \in \mathbb{C}^n$ mit $Av = 0$, ein (c_i) konstruieren, das die obige Gleichung erfüllt, wodurch gezeigt wird, dass es $\mathrm{spark}(A)$ viele Spalten gibt, die linear abhängig sind.

Falls es kein solches v gibt, kann es keine linear abhängigen Vektoren geben, und umgekehrt.

2. Wenn $\mathrm{rk}(A) = n$, folgt dies per Definition. Daher nehmen wir an, dass $\mathrm{rk}(A) < n$ gilt. Sei C die grösste Menge von Spaltenvektoren, die linear unabhängig sind. Dann hat C die Kardinalität $\mathrm{rk}(A)$, sodass das Hinzufügen einer weiteren Spalte eine Menge linear abhängiger Vektoren erzeugen würde. Daher gilt

$$\mathrm{spark}(A) \leq \mathrm{rk}(A) + 1.$$

Für $n > 1$ ist $A = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ mit $\phi_1 = e_1$ und $\phi_2, \ldots, \phi_n = 0_{\mathbb{C}^m}$ ein Beispiel mit $\mathrm{spark}(A) < \mathrm{rk}(A) + 1$, da $\mathrm{spark}(A) = 1$ und $\mathrm{rk}(A) = 1$.

□

8.4 Weitere Übungsaufgaben

Übung 8.6. Betrachten Sie die folgenden Unterräume von K^n:

$$U := \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0 \right\}, \qquad D := \{(\alpha, \ldots, \alpha) \in K^n \mid \alpha \in K\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Unterräume U, D, $U \cap D$ und $U + D$. [**Hinweis.** Es kommt darauf an, welcher Körper K ist. Versuche Argumente über die Dimension zu verwenden, manchmal geht es schneller so.]

Lösung. Für $n = 0$ ist $U = D = U \cap D = U + D = 0$. Jeder dieser Unterräume hat also die Basis $\varnothing$ und folglich die Dimension 0.

Sei nun $n \geq 1$. Jedes Element $(\alpha, \ldots, \alpha) \in D$ ist ein Vielfaches des Vektors $v := (1, \ldots, 1)$. Wegen $v \neq 0$ ist $\{v\}$ ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis von D. Insbesondere ist $\dim(D) = 1$.

Sodann liegen die $n - 1$ Vektoren

$$v_1 = (1, -1, 0, \ldots, 0), \quad v_2 = (0, 1, -1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad v_{n-1} = (0, \ldots, 0, 1, -1)$$

in U und sind linear unabhängig. Insbesondere ist also $\dim(U) \geq n-1$. Wegen $(1, 0, \ldots, 0) \notin U$ ist aber $\dim(U) < \dim(K^n) = n$ und wir schliessen $\dim(U) = n - 1$. Da die Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind und ihre Anzahl gleich der Dimension von U ist, bilden sie eine Basis von U.

Wenn $n \cdot 1 \neq 0$ ist in K, gilt $v = (1, \dots, 1) \notin U$. In diesem Fall gilt $U \cap D = 0$, also ist $\emptyset$ eine Basis von $U \cap D$ und $\dim(U \cap D) = 0$. Wegen $U = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ folgt ausserdem, dass die Vektoren $v, v_1, \dots, v_{n-1}$ linear unabhängig sind. Das zeigt $\dim(U + D) \geq n$. Da aber $\dim(U + D) \leq \dim(K^n) = n$ ist, schliessen wir, dass $U + D$ Dimension n hat und die Vektoren $\{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ eine Basis von $U + D$ bilden.

Wenn $n \cdot 1 = 0$ ist in K, gilt $v = (1, \dots, 1) \in U$, also auch $D \subset U$. In diesem Fall ist also $U \cap D = D$ und $U + D = U$. Für beide Unterräume wurde oben eine Basis und die Dimension bestimmt. $\square$