Übungsstunde 1

Einführung in die mathematische Arbeit und Lineare Algebra

22.09.2025

Organisatorisches:

1. Bitte ladet eure Serien mit dem Namen `Nachname_Vorname_Serie01.pdf` als ein PDF hoch (mit sam-up).
2. Ihr könnt die Serien auf Deutsch oder Englisch lösen. Ihr werdet ermutigt, so viele Serienaufgaben zu lösen wie möglich.
3. Ihr könnt jeder Zeit Fragen auch auf Englisch stellen, insbesondere wenn es sich um Fachbegriffe handelt.

1.1 Quiz 1

Formulieren Sie die Negation so weit wie möglich nach innen in die folgende logische Aussage über eine Menge X und ein Element $z \in X$:

$$\neg\big((\forall x \in X, \exists y \in X : x + y = 0) \wedge (\exists x \in X, \exists y \in X : x + y > z)\big).$$

Lösung.

$$(\exists x \in X, \forall y \in X : x + y \neq 0) \vee (\forall x \in X, \forall y \in X : x + y \leq z).$$

$\square$

1.2 Tipps zum Mathematikstudium

1. Es ist immer hilfreich, Mathematik zu lesen. Dadurch lernt man nicht nur das Wissen, sondern auch wie man selbst Mathematik schreibt. Am besten liest man Mathematik mit einem Stift und einem Blatt Papier, da das Mitdenken eine grosse Rolle spielt. Des Weiteren finde ich es wichtiger, die Ideen von Beweisen zu verstehen als die Details.
2. Wenn man Mathematik schreibt, soll man auf Folgendes achten:

(a) Verwende nicht überall Symbole wie z.B. $\Longrightarrow$, $\forall$, $\exists$ usw., da sie spezielle Bedeutungen haben.
(b) Schreibe vollständige Sätze. Ihr erklärt euren Lösungsweg.
(c) Präzision ist sehr wichtig, besonders wenn es sich um Definitionen oder Annahmen handelt.

Mehr zu den Notationen und wie man Mathematik richtig schreibt, findet man im Buch [Beu09].

1.3 Beweisstrategien

Direkter Beweis

Beispiel 1.1. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ ungerade, dann ist $a \cdot b$ ungerade.

Beweis. Per Definition ungerader Zahlen gibt es $k, m \in \mathbb{Z}$, sodass $a = 2k + 1$, $b = 2m + 1$. Multiplizieren gibt uns

$$a \cdot b = (2k + 1) \cdot (2m + 1) = 4km + 2k + 2m + 1 = 2(2km + k + m) + 1,$$

d.h. $a \cdot b$ ist ungerade. □

Induktionsbeweis

Beispiel 1.2. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ist die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen gleich n^2.

Beweis. Induktionsverankerung: für $n = 1$ ist $1 = 1^2$.

Induktionsschritt: angenommen gilt die Aussage für n. Für $n + 1$ folgt

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) \overset{\text{I.A.}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Daher ist die Aussage wahr für alle $n \geq 1$. □

Beweis mit Kontraposition

Beispiel 1.3. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Falls n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.

Beweis. Wir zeigen n ungerade $\Longrightarrow$ n^2 ungerade. Sei n ungerade, d.h. $n = 2k + 1$ für $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

also n^2 ist ungerade. Alternativ verwendet man Beispiel 1.1. □

Beweis mit Fallunterscheidung

Beispiel 1.4. Zeigen Sie: Es gibt $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sodass $a^b \in \mathbb{Q}$.

Beweis. Es genügt, ein Beispiel zu finden, bei dem dies gilt. Wir betrachten $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und machen eine Fallunterscheidung

(i) Falls $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, dann sind wir fertig: Wir können $a = b = \sqrt{2}$ setzen.
(ii) Falls $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$, seien $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$. Dann ist

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \in \mathbb{Q}.$$

$\square$

Die Stärke der Fallunterscheidung besteht darin, dass man nicht wissen muss, welcher genau der Fall ist. Wir brauchen nicht zu wissen, ob $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational ist oder nicht, trotzdem können wir damit nützliche Sachen beweisen. (Eigentlich ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ transzendent, daher irrational.)

Widerspruchsbeweis

Beispiel 1.5. $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis. Angenommen ist es nicht der Fall, dann können wir $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ für $p, q \in N$, $q \neq 0$, mit $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$. Dann ist $p^2 = 2q^2$, also p^2 ist gerade. Nach Beispiel 1.3 ist p gerade, also $p = 2k$. Dies impliziert wiederum, dass $q^2 = 2k^2$ und daher ist q gerade. Das ist ein Widerspruch zur Annahme $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$. $\square$

1.4 Die Fibonacci-Folge

Übung 1.6 (0.2.12)**.** Zeigen Sie, dass

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$

Was bedeutet überhaupt dieser Ausdruck?

Lösung. Wir definieren zuerst Ausdrücke von dieser Form (wie in [Hal24]).

Definition 1.7. Ein **unendlicher** Kettenbruch ist ein nicht abbrechender Bruch von der Form

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\cdots}}},$$

wobei $b_0, b_1, b_2 \ldots$ ganze Zahlen und höchstens mit Ausnahme von b_0 alle b_i positiv sind.

Ist $\xi \in \mathbb{R}$ eine beliebige, positive, irrationale Zahl, so können wir ξ immer als unendlichen Kettenbruch schreiben. Dazu definieren wir für positive reelle Zahlen α,

$$\lfloor \alpha \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq \alpha\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\xi &= b_0 + r_1 && \text{mit } b_0 := \lfloor \xi \rfloor \text{ und } r_1 = \xi - b_0, \text{ wobei } 0 < r_1 < 1 \text{ bzw. } \tfrac{1}{r_1} > 1 \\
\tfrac{1}{r_1} &= b_1 + r_2 && \text{mit } b_1 := \left\lfloor \tfrac{1}{r_1} \right\rfloor \text{ und } r_2 = \tfrac{1}{r_1} - b_1, \text{ wobei } 0 < r_2 < 1 \text{ bzw. } \tfrac{1}{r_2} > 1 \\
\tfrac{1}{r_2} &= b_2 + r_3 && \text{mit } b_2 := \left\lfloor \tfrac{1}{r_2} \right\rfloor \text{ und } r_3 = \tfrac{1}{r_2} - b_2, \text{ wobei } 0 < r_3 < 1 \text{ bzw. } \tfrac{1}{r_3} > 1 \\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

und wir erhalten den Kettenbruch.

Jetzt zeigen wir die folgende Behauptung mit Induktion.

Behauptung. $r_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Beweis. $n = 1$: $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Angenommen, die Gleichung gilt für n. Für $n + 1$ haben wir

$$\frac{1}{r_n} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

also folgt ähnlich wie im Basisfall $r_{n+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. □

Wenn wir r_n kennen, ist es einfach $b_n = 1$ abzulesen, da $1 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$. □

1.5 Hinweise zur Serie 1

1. (a) Welches lineare Gleichungssystem kann uns helfen?

   (b) Verwendet (a).
2. (a) Verwendet Wahrheitstabellen.
   (b) Können wir etwas ähnliches wie eine Wahrheitstabelle aufstellen?
3. Verwendet die Definition einer Fibonacci-Folge. Wie können wir ein Folgenglied F_n umschreiben? Alternativ versucht man, den Grenzwert mittels expliziter Berechnung zu bestimmen.
4. Verwendet De Morgan (Afg. 2).
5. Relativ direkt.
6. Wie lässt sich $\mathcal{F}_{a,b}$ ausdrücken mithilfe von $\mathcal{F}_{0,1}$ und $\mathcal{F}_{1,0}$?