Übungsstunde 2

Naive Mengenlehre und Abbildungen

29.09.2025

2.1 Besprechung Serie 1

1. Manchmal wurde der Grenzwert von F_n/F_{n-1} falsch berechnet. Man darf nicht zuerst den Grenzwert für einen Teil des Ausdrucks berechnen und danach den Grenzwert für den Rest bestimmen. Z.B.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^n}{\phi^{n-1}} = \phi$$

ist FALSCH, obwohl das Resultat richtig ist. Man kann aber wie folgendes vorgehen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^n(1-(\psi/\phi)^n)}{\phi^{n-1}(1-(\psi/\phi)^{n-1})} = \lim_{n\to\infty} \phi\frac{(1-(\psi/\phi)^n)}{(1-(\psi/\phi)^{n-1})} = \phi$$

Alternativ sieht man, dass

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1}+F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}.$$

Setzen wir $X = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$, so gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \\ \implies \quad X &= 1 + \frac{1}{X}. \end{aligned}$$

Die Lösungen zu dieser Gleichung sind ϕ und ψ. Da $F_n/F_{n-1} > 0$ für alle n, kann es nur ϕ sein.

2. Viele von euch haben Aufgabe 2. (b) mit Bildern gelöst, das ist leider nicht ausreichend für eine Mathematik-Aufgabe — Bilder sind ja kein Beweis. Um die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen, gibt es hauptsächlich zwei Strategien:
   (a) Für Aufgaben in der Serie, genügt es, Gleichheit durch eine Tabelle zu zeigen. Um $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ zu zeigen, stellen wir folgende Tabellen auf:

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$	A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

(b) Allerdings sind Tabellen nicht besonders hilfreich für kompliziertere Beweise. Wir verwenden häufig diese Strategie: Um $A = B$ zu zeigen, genügt es $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ zu beweisen. Genauer, man zeigt

$$\forall x \in A : x \in B \quad \text{und} \quad \forall y \in B : y \in A.$$

3. Es gab auch ein Paar Probleme mit Kontraposition — es kann ja verwirrend sein. In Aufgabe 5. wollen wir die Kontraposition von $x = y \implies (\exists \varepsilon > 0 : |x - y| \geq \varepsilon)$. Achtung: wenn wir $\exists \varepsilon > 0 : |x - y| \geq \varepsilon$ negieren, schreiben wir nicht $\forall \varepsilon \leq 0 \ldots$, sonder negieren wir nur den Existenzquantor, also $\forall \varepsilon > 0 \ldots$.

2.2 Unendlicher Kettenbruch (Fortsetzung, Weiterführendes Material)

Letzte Woche haben wir unendliche Kettenbrüche eingeführt und es gab ein paar Fragen dazu, ob wir einen unendlichen Kettenbruch als Grenzwert verstehen kann. Dies ist tatsächlich möglich, selbst mit unserer Definition. Der allgemeine Fall ist leider zu kompliziert und braucht weitere Kenntnisse aus der Analysis, daher betrachten wir nur den Spezialfall von ϕ. (Dieser Teil ist komplett nicht prüfungsrelevant.)

Zu einem unendlichen Kettenbruch definieren wir den n-ten endlichen Näherungsbruch als

$$\frac{P_n}{Q_n} := b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_n}}}}.$$

Zudem gibt es folgendes Schema, wodurch wir schnell P_n/Q_n bestimmen können:

$$\begin{aligned} P_{-2} &= 0, & P_{-1} &= 1, & P_n &= b_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_{-2} &= 1, & Q_{-1} &= 0, & Q_n &= b_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{aligned}$$

Hier beweisen wir die rekursive Relation nicht. In unserem Fall gilt

$$\begin{aligned} P_{-2} &= 0, & P_{-1} &= 1, & P_0 &= 1, & P_1 &= 2, & P_2 &= 3, & P_3 &= 5, & \cdots \\ Q_{-2} &= 1, & Q_{-1} &= 0, & Q_0 &= 1, & Q_1 &= 1, & Q_2 &= 2, & Q_3 &= 3, & \cdots \end{aligned}$$

Wie sehen, dass wir auf der ersten Reihe genau $\mathcal{F}_{0,1}$ haben, und auf der zweiten Reihe die verschobene $\mathcal{F}_{0,1}$. So lässt sich den Grenzwert bestimmen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \phi.$$

2.3 Naive Mengenlehre und Abbildungen

Übung 2.1. Sei X eine endliche Menge. Zeige, dass $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

Lösung. LÖSUNG 1. Sei $|X| = n$ und wir schreiben $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Jede Teilmenge von X kann als ein Vektor der Länge n dargestellt werden: Für $A \subseteq X$ definiere wir v_A durch $v_A^i = 0$ falls $x_i \notin A$ und $v_A^i = 1$ falls $x_i \in A$. Jede Teilmenge entspricht eindeutig einem Vektor mit Einträgen in $\{0, 1\}$ und umgekehrt definiert jeder solche Vektor eine Teilmenge. Somit genügt es, die Anzahl von solchen Vektoren zu bestimmen. Für jeden Eintrag v^i gibt es zwei Möglichkeiten, entweder $v^i = 1$ oder $v^i = 0$. Daher gibt es insgesamt 2^n solche Vektoren.

LÖSUNG 2. Um eine Teilmenge von X zu konstruieren, wählen wir Elemente aus X. So ist $|\mathcal{P}(X)|$ genau die Anzahl von Möglichkeiten, Elemente aus X zu wählen. Wenn wir kein Element auswählen, haben wir nur eine Möglichkeit. Wenn wir nur ein Element auswählen, gibt es klarerweise n Möglichkeiten. Wenn wir zwei auswählen, gibt es $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, usw. Jedes Mal dürfen wir beliebig viele Elemente auswählen, daraus ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

Möglichkeiten. Wir haben hier Satz 2.2verwendet. $\square$

Satz 2.2 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Wir zeigen die Formel mittels Induktion. Für $n = 0$ ist $(a+b)^0 = 1 = \binom{n}{0}$ (wobei wir die Konvention $0^0 = 1$ verwenden). Nimm an, dass die Formel für n gilt. Für $n+1$ haben wir

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} + a^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n! \cdot k - n! \cdot (n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}.
\end{aligned}$$

□

Als Nächstes schauen wir uns zwei Paradoxa der naiven Mengenlehre an, um genauer zu verstehen, woher die Probleme kommen. Dafür brauchen wir aber einen Begriff, der uns erlaubt, die Kardinalitäten von (potenziell unendlichen) Mengen zu vergleichen.

Definition 2.3. Es seien A, B Mengen. Wir sagen $|A| = |B|$ falls es eine Bijektion zwischen A und B gibt; $|A| \leq |B|$ falls es eine Injektion $f : A \to B$ gibt. Wir schreiben auch $|A| < |B|$ für $|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$.

Wir werden nächste Woche noch zu dieser Definition kommen wenn wir das zweite Paradoxon diskutieren. Wir fangen zuerst mit dem klassischen Russell'schen Paradoxon.

Beispiel 2.4 (Russell)**.** Angenommen existiert eine Menge aller Mengen, U_0. Definiere

$$R := \{P \in U : P \notin P\}.$$

Ist $R \in R$?

Diese Frage hat keine zufriedenstellende Antwort. Wenn $R \in R$, dass ist R per Definition eine Menge, die $R \notin R$ erfüllt. Aber wenn $R \notin R$, muss $R \in R$ gelten. Wir erhalten also

$$R \in R \iff R \notin R.$$

Ausdrücke der Form $\phi \wedge \neg\phi$ nennen wir einen Widerspruch. Hier muss sowohl $R \in R$ als auch $R \notin R$ gelten, also $(R \in R) \wedge (R \notin R)$. So führt die Annahme, dass U_0 existiert, zu einem Widerspruch.

2.4 Hinweise zur Serie 2

1. Wie negieren wir eine Aussage ?
2. Kann x positiv sein? Negativ?
3. Verwendet die Strategie mit zwei Inklusionen, die wir in der Übungsstunde diskutiert haben.
4. Relativ direkt.
5. Die Definitionen können hilfreich sein. [Wichtig]
6. Schaut euch nochmals die Definitionen an. [Wichtig]