Übungsstunde 9

Summe von Vektorräumen, Komplement

9.1 Besprechung Serie 8

1. Aufgabe 3 (d): In 3 (c) haben wir eine Basis von $U = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : z + iw = 0\}$ gefunden, nämlich $\{(1,i)\}$. Wir bemerken, dass die Menge leider keine Basis von U als einem $\mathbb{R}$-Vektorraum ist. Z.B. ist liegt $(i,-1)$ nicht in $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{(1,i)\}$, daher müssen wir uns eine neue Basis aussuchen. Jeder Vektor in U hat die Form

$$v = (a+bi)(1,i) = a(1,i) + b(i,-1).$$

Somit spannen $(1,i)$ und $(i,-1)$ genau U auf (als $\mathbb{R}$-Vektorraum), die sind tatsächlich $\mathbb{R}$-linear unabhängig, und somit eine Basis von U.

2. Aufgabe 5 ist sehr interessant. Man bemerkt, dass es im Allgemeinen sehr schwer ist, die Dimension eines Vektorraums zu finden, besonders wenn man sich mit unendlich dimensionalen Vektorräumen beschäftigt. Hier gehen wir einmal durch den gesamten Prozess.
Wir verwenden den Ansatz $f(x) = e^{\lambda x}$. Durch das einsetzen von $f(x) = e^{\lambda x}$ finden wir das charakteristische Polynom von dieser Gleichung

$$1 + \lambda^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \pm i.$$

Die Vermutung ist, f muss die Form $Ae^{ix} + Be^{-ix}$ haben. Zuerst schreiben wir das um als $f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$, da wir lediglich reelle Lösungen brauchen. Jetzt verwenden wir den Hinweis, der aus dem Satz von Picard-Lindelöf folgt. Wir betrachten die Funktion

$$g(x) = f(x) - f(0)\cos(x) - f'(0)\sin(x),$$

dann gilt

$$g(0) = f(0) - f(0) = 0$$

und

$$g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0.$$

So ist $g \equiv 0$ und jede Lösung f muss eine Linearkombination von $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sein.

9.2 Wiederholung

Definition 9.1. Sei V ein K-Vektorraum und $U, W \subseteq V$ Unterräume. Die **Summe** $U + W$ von U und W ist definiert als

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}.$$

Proposition 9.2. *Sei V ein K-Vektorraum und $U, W \subseteq V$ Unterräume. Dann ist* $U+W = \operatorname{span}(U \cup W)$ *und es gilt*

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W.$$

Definition 9.3. Sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Ein Unterraum $W \subseteq V$ ist ein **Komplement** von U falls $U + W = V$ und $U \cap W = \{0_V\}$.

Bemerkung 9.4. Es gibt keine kanonische Wahl von Komplement! Aber wenn es auf dem Vektorraum ein inneres Produkt definiert ist, kann man von dem *orthogonalen Komplement* sprechen — es gibt nur eine Wahl für dies.

Theorem 9.5. *Seien V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Basis von V. Seien $w_1, \ldots, w_n \in W$ beliebige Vektoren. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $T : V \to W$ sodass $T(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Lemma 9.6. *Für alle linearen Abbildungen $T : K^n \to K^m$ gibt es eine Matrix $A \in M_{m \times n}(K)$ mit $T = T_A$.*

9.3 Summe von Vektorräumen, Komplement

Ihr habt die Formel für $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$ in der Vorlesung gesehen. Kann man diese Formel noch verallgemeinern?

Übung 9.7. Gilt für drei Unterräume U, W, X von V die folgende Formel (9.1)?

$$\begin{aligned} &\dim(U + W + X) = \\ &\quad \dim U + \dim W + \dim X - \dim(U \cap W) - \dim(U \cap X) - \dim(V \cap X) + \dim(U \cap W \cap X) \end{aligned} \tag{9.1}$$

Beweisen Sie oder widerlegen Sie.

Lösung. Nein, diese Formel ist im Allgemeinen falsch. Hier ist ein Gegenbeispiel für $V = \mathbb{R}^2$. Wir betrachten die drei ein-dimensionalen Unterräume

$$U = \langle e_1 \rangle, \quad W = \langle e_2, \rangle, \quad X = \langle e_1 + e_2 \rangle.$$

Dann ist $U + W + X = \mathbb{R}^2$, und

$$U \cap W = W \cap X = X \cap U = X \cap W \cap X = \{0\},$$

d.h. in (9.1) erhalten wir $2 = 3$! $\square$

Übung 9.8. Sei V ein Vektorraum. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

(a) Für jedes Erzeugendensystem S von V gilt $\dim_K(V) \leq |S|$.
(b) Für jede linear unabhängige Teilmenge S von V gilt $|S| \leq \dim_K(V)$.
(c) Es gilt $\dim_K(V) = |V|$.
(d) Für jede Teilmenge $S \subset V$ gilt $\dim_K(\langle S \rangle) \leq \dim_K(V)$.

Lösung. **(c).** Für jeden Körper K ist $\dim_K(K) = 1$, aber $|K| > 2$; darum ist (c) falsch. Die übrigen Aussagen folgen aus den grundlegenden Sätzen der Vorlesung. $\square$

Übung 9.9. Welche Aussage gilt für alle Unterräume U und V der Dimension 2 von $\mathbb{R}^3$?

(a) $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 1$
(b) $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 2$
(c) $1 \leq \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) \leq 2$
(d) $\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 3$

Lösung. **(c).** Aus dem Dimensionssatz ergibt sich

$$\dim_{\mathbb{R}}(U + V) + \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 + 2 = 4.$$

Zudem ist $U + V$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ und hat damit Dimension ≤ 3. Zusätzlich ist $U \cap V$ ein Unterraum von U und hat daher Dimension ≤ 2. Daraus folgen die Möglichkeiten

$$\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 2 \text{ und } \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 2 \quad \text{oder} \quad \dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 3 \text{ und } \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 1.$$

Beide Möglichkeiten können vorkommen, nämlich der erste Fall, wenn $U = V$ ist, und der zweite Fall, wenn U ein Komplement von V enthält. $\square$

Übung 9.10. Sei V ein Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

(a) U besitzt ein Komplement in V.
(b) Sei W ein Komplement von U. Dann ist U ein Komplement von W.
(c) Für jedes Komplement W von U und jedes Komplement U' von W gilt $U' = U$.
(d) Jedes Komplement W von U hat Dimension $\dim_K(W)$, für die $\dim_K(W)+\dim_K(U) = \dim_K(V)$ gilt.

Lösung. **(c).** Im Allgemeinen ist ein Komplement eines Unterraumes alles andere als eindeutig. Ein Beispiel ist $V := \mathbb{R}^2$ und $U := \langle(1,0)\rangle$ und $W := \langle(0,1)\rangle$. Dann ist $U' := \langle(1,0)\rangle$ ein Komplement von W, aber $U \neq U'$. Tatsächlich ist sogar U' ein Komplement von U. □

Übung 9.11. Sei der Unterraum $U := \langle(1,0,1)\rangle$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben. Welcher der folgenden Unterräume ist ein Komplement von U in $\mathbb{R}^3$?

(a) $\langle(0,0,1),(1,0,0)\rangle$
(b) $\langle(0,1,0)\rangle$
(c) $\langle(0,1,1),(1,1,2)\rangle$
(d) $\langle(0,0,1),(0,1,0)\rangle$

Lösung. **(d).** Ein Komplement von U muss Dimension

$$\dim(\mathbb{R}^3) - \dim(U) = 3 - 1 = 2$$

haben; damit fällt (b) schon weg. Sowohl (a) wie auch (c) haben einen nichttrivialen Durchschnitt mit U und können daher kein Komplement sein. Dagegen überprüft man direkt, dass die Vektoren in (d) zusammen mit dem Erzeuger von U eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden; daher ist (d) richtig. □