Übungsstunde 6

Matrizen als lineare Abbildungen, Lineare Unabhängigkeit

6.1 Quiz 4

Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit den folgenden Operationen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x_1 \\ y + y_1 \end{pmatrix}, \quad x, x_1, y, y_1 \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ y \end{pmatrix}, \quad \alpha, x, y \in \mathbb{R}.$$

Ist $\mathbb{R}^2$ mit diesen Operationen ein Vektorraum über $\mathbb{R}$?

Lösung. Nein. Für $\alpha = 0$ haben wir

$$0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } y \neq 0.$$

□

6.2 Besprechung Serie 5

1. Aufgabe 1: Es ist immer gut, eine Fallunterscheidung zu machen, wenn man eine Zahl durch eine Unbekannte teilt. Hier darf man nur teilen, wenn $m \neq \pm 2$ ist, und man muss die Fälle $m = \pm 2$ separat analysieren.
2. Aufgabe 4: Die Addition ist nicht assoziativ! Es gilt

$$((-\infty) + \infty) + \infty = \infty \neq 0 = -\infty + \infty = -\infty + (\infty + \infty).$$

6.3 Matrizen als lineare Abbildungen

Wir werden jetzt lineare Abbildungen — die wichtigsten Objekte der Lineare Algebra kennenlernen, durch Matrizen eine Intuition dafür bekommen, und diese mit LGS in Zusammenhang bringen. Als Referenz verwende ich [Zer24].

Es sei K ein Körper.

Definition 6.1. Es seien V, W Vektorräume über K. Eine Funktion $T : V \to W$ ist eine **lineare Abbildung**, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

1. es gilt $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$;
2. es gilt $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ für alle $v \in V$, $\alpha \in K$.

Mit anderen Worten, T respektiert die Vektoraddition und Skalarmultiplikation.

Proposition 6.2. *Sei $A \in M_{m\times n}(K)$. Dann ist $T_A : K^n \to K^m$ definiert durch $T_A(x) = Ax$ eine lineare Abbildung.*

Beweis. Folgt direkt aus der Definition von Matrix-Vektor Multiplikation. □

Wir wollen lineare Abbildungen studieren durch zwei Vektorräume, einer davon ist:

Definition 6.3. Es seien V, W Vektorräume über K, und es sei $T : V \to V$ eine lineare Abbildung. Der **Kern** von T ist

$$\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\} \subseteq V$$

Lemma 6.4. $\ker(T)$ *ist ein Unterraum von* V*.*

Beweis. Zunächst gilt $O_V \in \ker(T)$ wegen der zweiten Eigenschaft einer lineare Abbildung. Seien $v_1, v_2 \in \ker(T)$, dann ist wegen der Linearität

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0_W + 0_W = 0_W.$$

Für $v \in V$, $\lambda \in K$ gilt

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda \cdot 0_W = 0.$$

Somit ist $\ker(T)$ ein Unterraum von V. □

Korollar 6.5. *Sei $A \in M_{m\times n}(K)$, dann ist $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0_{K^m}\}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Es gilt $T(0_V) = T(0 \cdot 0V) = 0 \cdot T(0_V) = 0$, also ist $0_V \in \ker(T)$ Nach Proposition 6.2 ist die Abbildung $T : K^n \to K^m$, $x \mapsto Ax$ eine lineare Abbildung. Weiter ist $\ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0_{K^m}\}$, und nach Lemma 6.4 ist $\ker(T)$ ein Unterraum von K^n. □

Bemerkung 6.6. Korollar 6.5 zeigt, dass Lösungsmengen eines *homogenen* LGS Unterräume sind. Wenn ein homogenes LGS eine nicht triviale Lösung hat (d.h. $x \neq 0_{K^n}$ mit $Ax = 0_{K^m}$), dann hat es automatisch unendliche viele Lösungen wenn K unendlich ist.

Der Kern gibt uns eine vollständigen Beschreibung der Struktur der Lösungsmenge eines homogenen LGS. Aber was passiert wenn wir ein *inhomogenes* LGS haben? Welche Eigenschaften des LGS bestimmen, ob es eine Lösung hat oder nicht? Diese Fragen werden wir mit Hilfe eines anderen Begriffs beantworten. Ihr habt schon seit ein paar Wochen das Bild einer Funktion kennengelernt. Die Bilder von linearen Abbildungen haben, ohne Überraschung, auch interessante Eigenschaften.

Bemerkung 6.7. Wir schreiben $\operatorname{im}(T)$ fürs Bild von T.

Proposition 6.8. $\operatorname{im}(T)$ *ist ein Unterraum von* W*.*

Beweis. Zuerst ist $T(0_V) = 0_W$ und somit $0_W \in \operatorname{im}(T)$. Für $w_1, w_2 \in \operatorname{im}(T)$, gibt es $v_1, v_2 \in V$ mit $T(v_1) = w_1$, $T(v_2) = w_2$. So ist

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) \in \operatorname{im}(T).$$

Analog zeigt man, dass $\lambda w \in \operatorname{im}(T)$ für $w \in \operatorname{im}(T)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. □

Zusammenfassend: Ob ein LGS eine Lösung hat, hängt davon ab, ob $b \in \operatorname{im}(T)$ gilt. Als nächster Schritt wollen die Struktur des Bilds studieren.

Proposition 6.9. *Es seien* V, W *Vektorräume über* K*, und es sei* $T : V \to V$ *eine lineare Abbildung. Angenommen, dass es* $v \in V$ *existiert, mit* $T(v_0) = b$ *für* $b \in W$*. Dann hat die Gleichung* $T(v) = b$ *genau eine eindeutige Lösungen, wenn* $\ker(T) = \{0_V\}$*. Zudem ist* $\{v \in V : T(v) = b\}$ *ein affiner Unterraum von* V*.*

Beweis. Angenommen gibt es noch eine Lösung $v_0 \neq v \in V$, dass ist $T(v_0 - v) = T(v_0) - T(v) = b - b = 0$, d.h. $0_V \neq v_0 - v \in \ker(T)$. Umgekehrt wenn es $v \in \ker(T) \setminus \{0\}$ gibt, erfüllt $v_0 + v$ ebenfalls die Gleichung, da $T(v_0 + v) = T(v_0) + T(v) = b + 0_W = b$. Die Lösungsmenge ist somit gegeben durch $\{v_0 + v \in V : v \in \ker(T)\} = v_0 + \ker(T)$, also ein affiner Unterraum. □

Jetzt haben wir eine vollständige Beschreibung der Lösungsmengen von LGS. Insbesondere sehen wir, dass ein homogenes LGS lediglich nur ein Spezialfall eines inhomogenen LGS ist, wobei wir v_0 durch 0_V ersetzen können und die Lösungsmenge durch $\ker(T_A)$ gegeben ist.

Eine sehr natürliche Frage ist: Wie wissen wir, ob ein homogenes LGS nichttriviale Lösungen hat? Also wie wissen wir, ob $\ker(T_A) = \{0_V\}$? Diese Frage hängt auch damit zusammen, ob ein LGS eine eindeutige oder mehrere Lösungen hat. Diese Frage können wir mit *linearen Unabhängigkeit* beantworten.

Lemma 6.10. *Sei $A \in M_{m\times n}(K)$, dann ist $\ker(A) = \{0_{K^n}\}$ genau dann, wenn die Spalten von A linear unabhängig sind.*

Beweis. Folgt direkt aus der Definition von Matrix-Vektor Multiplikation und vom Kern. $\square$

Aus Proposition 6.9 folgt, dass ein LGS genau dann eine eindeutige Lösung hat, wenn die Spalten von A linear unabhängig sind. Bis jetzt haben wie die Grundeigenschaften von LGS und den Zusammenhang mit linearen Abbildungen vollständig verstanden.

6.4 Mehr zu linearer Unabhängigkeit

Definition 6.11. Es sei K ein Körper $A \in M_{n\times n}(K)$. A heisst **nilpotent** mit **Nilpotenzgrad** $m \in \mathbb{N}$ falls $A^m = 0$ und $A^{m-1} \neq 0_{n\times n}$.

Übung 6.12. Es seien $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ nilpotent mit Nilpotenzgrad m. Zeigen Sie, dass es $v \in \mathbb{R}^n$ existiert, sodass $v, Av, \ldots, A^{m-1}v$ linear unabhängig sind.

[**Hinweis.** Wähle den Vektor v durch $A^{m-1} \neq 0$.]

Lösung. Da $A^{m-1} \neq 0_{n\times n}$, ist $\ker(T_A) \neq \mathbb{R}^n$ und es gibt $v \in \mathbb{R}^n \backslash \ker(T_A)$, also $A^{m-1}v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Wir wollen zeigen, dass $v, Av, \cdots, A^{m-1}v$ linear unabhängig sind, d. h. dass die Gleichung

$$\lambda_0 v + \lambda_1 Av + \cdots + \lambda_{m-1}A^{m-1}v = 0$$

nur die triviale Lösung $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$ hat. Nach mehrmaliger Anwendung von

A bekommen wir:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 v + \lambda_1 A v + \cdots + \lambda_{m-3} A^{m-3} v + \lambda_{m-2} A^{m-2} v + \lambda_{m-1} A^{m-1} v &= 0 \\
\lambda_0 A v + \lambda_1 A^2 v + \cdots + \lambda_{m-3} A^{m-2} v + \lambda_{m-2} A^{m-1} v &= 0 \\
\lambda_0 A^2 v + \lambda_1 A^3 v + \cdots + \lambda_{m-3} A^{m-1} v + \lambda_{m-2} A^{m} v &= 0 \\
&\vdots \\
\lambda_0 A^{m-2} v + \lambda_1 A^{m-1} v &= 0 \\
\lambda_0 A^{m-1} v &= 0
\end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt, dass $\lambda_0 = 0$, und aus der zweiten letzten, $\lambda_1 = 0$. Wir gehen durch alle Gleichungen und erhalten am Ende $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1} = 0$, was zu beweisen war. $\square$