LINEARE ALGEBRA I

Begleitskript zur Übungsstunde HS 2025

Basierend auf der Vorlesung von Prof. Dr. Paul Biran

Ruocheng Wang

Version: 29. September 2025

Einleitung

Herzlich willkommen an der ETH! Ihr seid jetzt auf einer spannenden Reise, die Welt der Linearen Algebra zu entdecken — eines der grundlegenden und zentralen Gebiete der Mathematik. Ihr werdet lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Vektorräume, und lineare Abbildungen kennenlernen, die euch während eures gesamten Studiums begleiten werden. Abstrakter wird es bei Dualräumen und Isomorphiesätzen, wobei ihr einen Einblick in ein paar der wichtigsten und schönsten Strukturen in der Mathematik erhalten werdet. Viele Konzepte aus Linearer Algebra werdet ihr künftig noch brauchen in z.B. Analysis II und Numerischer Mathematik.

Diese Notizen sind für die Übungsstunden geschrieben und sollen dazu dienen, durch zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben euer Verständnis zu den Themen aus der Vorlesung zu verbessern und vertiefen. Es wird auch hier die Lösung zu den Quizzen präsentiert, und am Ende der Notizen für jede Woche gibt es noch Hinweise zu den Serien. Wenn ihr Fragen habt oder Fehler in den Notizen findet, schreibt mir gerne eine E-Mail an `ruocwang@student.ethz.ch`. Die aktuelle Version der Notizen findet ihr unter `https://ruocheng-w.github.io`.

Ich wünsche euch viel Spass und Erfolg in eurem Studium!

Ruocheng Wang

September 2025, Zürich

Inhaltsverzeichnis

Übungsstunde 1

Einführung in die mathematische Arbeit und Lineare Algebra

22.09.2025

Organisatorisches:

1. Bitte ladet eure Serien mit dem Namen `Nachname_Vorname_Serie01.pdf` als ein PDF hoch (mit sam-up).
2. Ihr könnt die Serien auf Deutsch oder Englisch lösen. Ihr werdet ermutigt, so viele Serienaufgaben zu lösen wie möglich.
3. Ihr könnt jeder Zeit Fragen auch auf Englisch stellen, insbesondere wenn es sich um Fachbegriffe handelt.

1.1 Quiz 1

Formulieren Sie die Negation so weit wie möglich nach innen in die folgende logische Aussage über eine Menge X und ein Element $z \in X$:

$$\neg\big((\forall x \in X, \exists y \in X : x + y = 0) \wedge (\exists x \in X, \exists y \in X : x + y > z)\big).$$

Lösung.

$$(\exists x \in X, \forall y \in X : x + y \neq 0) \vee (\forall x \in X, \forall y \in X : x + y \leq z).$$

□

1.2 Tipps zum Mathematikstudium

1. Es ist immer hilfreich, Mathematik zu lesen. Dadurch lernt man nicht nur das Wissen, sondern auch wie man selbst Mathematik schreibt. Am besten liest man Mathematik mit einem Stift und einem Blatt Papier, da das Mitdenken eine grosse Rolle spielt. Des Weiteren finde ich es wichtiger, die Ideen von Beweisen zu verstehen als die Details.
2. Wenn man Mathematik schreibt, soll man auf Folgendes achten:

(a) Verwende nicht überall Symbole wie z.B. $\implies$, $\forall$, $\exists$ usw., da sie spezielle Bedeutungen haben.
(b) Schreibe vollständige Sätze. Ihr erklärt euren Lösungsweg.
(c) Präzision ist sehr wichtig, besonders wenn es sich um Definitionen oder Annahmen handelt.

Mehr zu den Notationen und wie man Mathematik richtig schreibt, findet man im Buch [Beu09].

1.3 Beweisstrategien

Direkter Beweis

Beispiel 1.1. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ ungerade, dann ist $a \cdot b$ ungerade.

Beweis. Per Definition ungerader Zahlen gibt es $k, m \in \mathbb{Z}$, sodass $a = 2k + 1$, $b = 2m + 1$. Multiplizieren gibt uns

$$a \cdot b = (2k + 1) \cdot (2m + 1) = 4km + 2k + 2m + 1 = 2(2km + k + m) + 1,$$

d.h. $a \cdot b$ ist ungerade. $\square$

Induktionsbeweis

Beispiel 1.2. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ist die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen gleich n^2.

Beweis. Induktionsverankerung: für $n = 1$ ist $1 = 1^2$.

Induktionsschritt: angenommen gilt die Aussage für n. Für $n + 1$ folgt

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) \overset{\text{I.A.}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Daher ist die Aussage wahr für alle $n \geq 1$. $\square$

Beweis mit Kontraposition

Beispiel 1.3. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Falls n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.

Beweis. Wir zeigen n ungerade $\implies$ n^2 ungerade. Sei n ungerade, d.h. $n = 2k + 1$ für $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

also n^2 ist ungerade. Alternativ verwendet man Beispiel 1.1. $\square$

Beweis mit Fallunterscheidung

Beispiel 1.4. Zeigen Sie: Es gibt $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sodass $a^b \in \mathbb{Q}$.

Beweis. Es genügt, ein Beispiel zu finden, bei dem dies gilt. Wir betrachten $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und machen eine Fallunterscheidung

(i) Falls $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, dann sind wir fertig: Wir können $a = b = \sqrt{2}$ setzen.

(ii) Falls $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$, seien $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$. Dann ist

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2 \in \mathbb{Q}.$$

□

Die Stärke der Fallunterscheidung besteht darin, dass man nicht wissen muss, welcher genau der Fall ist. Wir brauchen nicht zu wissen, ob $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational ist oder nicht, trotzdem können wir damit nützliche Sachen beweisen. (Eigentlich ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ transzendent, daher irrational.)

Widerspruchsbeweis

Beispiel 1.5. $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis. Angenommen ist es nicht der Fall, dann können wir $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ für $p, q \in N$, $q \neq 0$, mit $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$. Dann ist $p^2 = 2q^2$, also p^2 ist gerade. Nach Beispiel 1.3 ist p gerade, also $p = 2k$. Dies impliziert wiederum, dass $q^2 = 2k^2$ und daher ist q gerade. Das ist ein Widerspruch zur Annahme $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$. □

1.4 Die Fibonacci-Folge

Übung 1.6 (0.2.12)**.** Zeigen Sie, dass

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$

Was bedeutet überhaupt dieser Ausdruck?

Lösung. Wir definieren zuerst Ausdrücke von dieser Form (wie in [Hal24]).

Definition 1.7. Ein **unendlicher** Kettenbruch ist ein nicht abbrechender Bruch von der Form

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\cdots}}},$$

wobei $b_0, b_1, b_2 \ldots$ ganze Zahlen und höchstens mit Ausnahme von b_0 alle b_i positiv sind.

Ist $\xi \in \mathbb{R}$ eine beliebige, positive, irrationale Zahl, so können wir ξ immer als unendlichen Kettenbruch schreiben. Dazu definieren wir für positive reelle Zahlen α,

$$\lfloor \alpha \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq \alpha\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\xi &= b_0 + r_1 && \text{mit } b_0 := \lfloor \xi \rfloor \text{ und } r_1 = \xi - b_0, \text{ wobei } 0 < r_1 < 1 \text{ bzw. } \tfrac{1}{r_1} > 1 \\
\tfrac{1}{r_1} &= b_1 + r_2 && \text{mit } b_1 := \left\lfloor \tfrac{1}{r_1} \right\rfloor \text{ und } r_2 = \tfrac{1}{r_1} - b_1, \text{ wobei } 0 < r_2 < 1 \text{ bzw. } \tfrac{1}{r_2} > 1 \\
\tfrac{1}{r_2} &= b_2 + r_3 && \text{mit } b_2 := \left\lfloor \tfrac{1}{r_2} \right\rfloor \text{ und } r_3 = \tfrac{1}{r_2} - b_2, \text{ wobei } 0 < r_3 < 1 \text{ bzw. } \tfrac{1}{r_3} > 1 \\
&\vdots && \vdots
\end{aligned}$$

und wir erhalten den Kettenbruch.

Jetzt zeigen wir die folgende Behauptung mit Induktion.

Behauptung. $r_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Beweis. $n = 1$: $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Angenommen, die Gleichung gilt für n. Für $n+1$ haben wir

$$\frac{1}{r_n} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

also folgt ähnlich wie im Basisfall $r_{n+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. □

Wenn wir r_n kennen, ist es einfach $b_n = 1$ abzulesen, da $1 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$. □

1.5 Hinweise zur Serie 1

1. (a) Welches lineare Gleichungssystem kann uns helfen?

   (b) Verwendet (a).
2. (a) Verwendet Wahrheitstabellen.
   (b) Können wir etwas ähnliches wie eine Wahrheitstabelle aufstellen?
3. Verwendet die Definition einer Fibonacci-Folge. Wie können wir ein Folgenglied F_n umschreiben? Alternativ versucht man, den Grenzwert mittels expliziter Berechnung zu bestimmen.
4. Verwendet De Morgan (Afg. 2).
5. Relativ direkt.
6. Wie lässt sich $\mathcal{F}_{a,b}$ ausdrücken mithilfe von $\mathcal{F}_{0,1}$ und $\mathcal{F}_{1,0}$?

Übungsstunde 2

Naive Mengenlehre und Abbildungen

29.09.2025

2.1 Besprechung Serie 1

1. Manchmal wurde der Grenzwert von F_n/F_{n-1} falsch berechnet. Man darf nicht zuerst den Grenzwert für einen Teil des Ausdrucks berechnen und danach den Grenzwert für den Rest bestimmen. Z.B.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^n}{\phi^{n-1}} = \phi$$

ist FALSCH, obwohl das Resultat richtig ist. Man kann aber wie folgendes vorgehen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^n(1-(\psi/\phi)^n)}{\phi^{n-1}(1-(\psi/\phi)^{n-1})} = \lim_{n\to\infty} \phi \frac{(1-(\psi/\phi)^n)}{(1-(\psi/\phi)^{n-1})} = \phi$$

Alternativ sieht man, dass

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1}+F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}.$$

Setzen wir $X = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$, so gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} &= \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \\ \implies \quad X &= 1 + \frac{1}{X}. \end{aligned}$$

Die Lösungen zu dieser Gleichung sind ϕ und ψ. Da $F_n/F_{n-1} > 0$ für alle n, kann es nur ϕ sein.

2. Viele von euch haben Aufgabe 2. (b) mit Bildern gelöst, das ist leider nicht ausreichend für eine Mathematik-Aufgabe — Bilder sind ja kein Beweis. Um die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen, gibt es hauptsächlich zwei Strategien:
   (a) Für Aufgaben in der Serie, genügt es, Gleichheit durch eine Tabelle zu zeigen. Um $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ zu zeigen, stellen wir folgende Tabellen auf:

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$	A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

(b) Allerdings sind Tabellen nicht besonders hilfreich für kompliziertere Beweise. Wir verwenden häufig diese Strategie: Um $A = B$ zu zeigen, genügt es $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ zu beweisen. Genauer, man zeigt

$$\forall x \in A : x \in B \quad \text{und} \quad \forall y \in B : y \in A.$$

3. Es gab auch ein Paar Probleme mit Kontraposition — es kann ja verwirrend sein. In Aufgabe 5. wollen wir die Kontraposition von $x = y \implies (\exists \varepsilon > 0 : |x - y| \geq \varepsilon)$. Achtung: wenn wir $\exists \varepsilon > 0 : |x - y| \geq \varepsilon$ negieren, schreiben wir nicht $\forall \varepsilon \leq 0 \ldots$, sonder negieren wir nur den Existenzquantor, also $\forall \varepsilon > 0 \ldots$.

2.2 Unendlicher Kettenbruch (Fortsetzung, Weiterführendes Material)

Letzte Woche haben wir unendliche Kettenbrüche eingeführt und es gab ein paar Fragen dazu, ob wir einen unendlichen Kettenbruch als Grenzwert verstehen kann. Dies ist tatsächlich möglich, selbst mit unserer Definition. Der allgemeine Fall ist leider zu kompliziert und braucht weitere Kenntnisse aus der Analysis, daher betrachten wir nur den Spezialfall von ϕ. (Dieser Teil ist komplett nicht prüfungsrelevant.)

Zu einem unendlichen Kettenbruch definieren wir den n-ten endlichen Näherungsbruch als

$$\frac{P_n}{Q_n} := b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_n}}}}.$$

Zudem gibt es folgendes Schema, wodurch wir schnell P_n/Q_n bestimmen können:

$$\begin{aligned} P_{-2} &= 0, & P_{-1} &= 1, & P_n &= b_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_{-2} &= 1, & Q_{-1} &= 0, & Q_n &= b_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{aligned}$$

Hier beweisen wir die rekursive Relation nicht. In unserem Fall gilt

$$\begin{aligned} P_{-2} &= 0, & P_{-1} &= 1, & P_0 &= 1, & P_1 &= 2, & P_2 &= 3, & P_3 &= 5, & \cdots \\ Q_{-2} &= 1, & Q_{-1} &= 0, & Q_0 &= 1, & Q_1 &= 1, & Q_2 &= 2, & Q_3 &= 3, & \cdots \end{aligned}$$

Wie sehen, dass wir auf der ersten Reihe genau $\mathcal{F}_{0,1}$ haben, und auf der zweiten Reihe die verschobene $\mathcal{F}_{0,1}$. So lässt sich den Grenzwert bestimmen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \phi.$$

2.3 Naive Mengenlehre und Abbildungen

Übung 2.1. Sei X eine endliche Menge. Zeige, dass $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

Lösung. LÖSUNG 1. Sei $|X| = n$ und wir schreiben $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Jede Teilmenge von X kann als ein Vektor der Länge n dargestellt werden: Für $A \subseteq X$ definiere wir v_A durch $v_A^i = 0$ falls $x_i \notin A$ und $v_A^i = 1$ falls $x_i \in A$. Jede Teilmenge entspricht eindeutig einem Vektor mit Einträgen in $\{0, 1\}$ und umgekehrt definiert jeder solche Vektor eine Teilmenge. Somit genügt es, die Anzahl von solchen Vektoren zu bestimmen. Für jeden Eintrag v^i gibt es zwei Möglichkeiten, entweder $v^i = 1$ oder $v^i = 0$. Daher gibt es insgesamt 2^n solche Vektoren.

LÖSUNG 2. Um eine Teilmenge von X zu konstruieren, wählen wir Elemente aus X. So ist $|\mathcal{P}(X)|$ genau die Anzahl von Möglichkeiten, Elemente aus X zu wählen. Wenn wir kein Element auswählen, haben wir nur eine Möglichkeit. Wenn wir nur ein Element auswählen, gibt es klarerweise n Möglichkeiten. Wenn wir zwei auswählen, gibt es $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, usw. Jedes Mal dürfen wir beliebig viele Elemente auswählen, daraus ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

Möglichkeiten. Wir haben hier Satz 2.2verwendet. $\square$

Satz 2.2 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Wir zeigen die Formel mittels Induktion. Für $n = 0$ ist $(a+b)^0 = 1 = \binom{n}{0}$ (wobei wir die Konvention $0^0 = 1$ verwenden). Nimm an, dass die Formel für n gilt. Für $n+1$ haben wir

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} + a^{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n! \cdot k - n! \cdot (n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}.
\end{aligned}$$

□

Als Nächstes schauen wir uns zwei Paradoxa der naiven Mengenlehre an, um genauer zu verstehen, woher die Probleme kommen. Dafür brauchen wir aber einen Begriff, der uns erlaubt, die Kardinalitäten von (potenziell unendlichen) Mengen zu vergleichen.

Definition 2.3. Es seien A, B Mengen. Wir sagen $|A| = |B|$ falls es eine Bijektion zwischen A und B gibt; $|A| \leq |B|$ falls es eine Injektion $f : A \to B$ gibt. Wir schreiben auch $|A| < |B|$ für $|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$.

Wir werden nächste Woche noch zu dieser Definition kommen wenn wir das zweite Paradoxon diskutieren. Wir fangen zuerst mit dem klassischen Russell'schen Paradoxon.

Beispiel 2.4 (Russell)**.** Angenommen existiert eine Menge aller Mengen, U_0. Definiere

$$R := \{P \in U : P \notin P\}.$$

Ist $R \in R$?

Diese Frage hat keine zufriedenstellende Antwort. Wenn $R \in R$, dass ist R per Definition eine Menge, die $R \notin R$ erfüllt. Aber wenn $R \notin R$, muss $R \in R$ gelten. Wir erhalten also

$$R \in R \iff R \notin R.$$

Ausdrücke der Form $\phi \wedge \neg\phi$ nennen wir einen Widerspruch. Hier muss sowohl $R \in R$ als auch $R \notin R$ gelten, also $(R \in R) \wedge (R \notin R)$. So führt die Annahme, dass U_0 existiert, zu einem Widerspruch.

2.4 Hinweise zur Serie 2

1. Wie negieren wir eine Aussage ?
2. Kann x positiv sein? Negativ?
3. Verwendet die Strategie mit zwei Inklusionen, die wir in der Übungsstunde diskutiert haben.
4. Relativ direkt.
5. Die Definitionen können hilfreich sein. [Wichtig]
6. Schaut euch nochmals die Definitionen an. [Wichtig]

Literaturverzeichnis

[Beu09] Albrecht Beutelspacher. *„Das ist o. B. d. A. trivial!“*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009. ISBN: 978-3-8348-0771-7.

[Hal24] Lorenz Halbeisen. „Grundstrukturen“. Vorlesungsskript. 2024.

[Hal25] Lorenz Halbeisen. *Combinatorial Set Theory*. Cham: Springer, 2025. ISBN: 978-3-031-91751-6.