

# **LINEARE ALGEBRA I**

BEGLEITSKRIPT ZUR ÜBUNGSSTUNDE HS 2025

BASIEREND AUF DER VORLESUNG VON PROF. DR. PAUL BIRAN

RUOCHENG WANG

# Einleitung

Herzlich willkommen an der ETH! Ihr seid jetzt auf einer spannenden Reise, die Welt der Linearen Algebra zu entdecken — eines der grundlegenden und zentralen Gebiete der Mathematik. Ihr werdet lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Vektorräume, und lineare Abbildungen kennenlernen, die euch während eures gesamten Studiums begleiten werden. Abstrakter wird es bei Dualräumen und Isomorphiesätzen, wobei ihr einen Einblick in ein paar der wichtigsten und schönsten Strukturen in der Mathematik erhalten werdet. Viele Konzepte aus Linearer Algebra werdet ihr künftig noch brauchen in z.B. Analysis II und Numerischer Mathematik.

Diese Notizen sind für die Übungsstunden geschrieben und sollen dazu dienen, durch zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben euer Verständnis zu den Themen aus der Vorlesung zu verbessern und vertiefen. Es wird auch hier die Lösung zu den Quizzen präsentiert, und am Ende der Notizen für jede Woche gibt es noch Hinweise zu den Serien. Wenn ihr Fragen habt oder Fehler in den Notizen findet, schreibt mir gerne eine E-Mail an [ruocwang@student.ethz.ch](mailto:ruocwang@student.ethz.ch). Die aktuelle Version der Notizen findet ihr unter <https://ruocheng-w.github.io>.

Ich wünsche euch viel Spass und Erfolg in eurem Studium!

Ruocheng Wang

September 2025, Zürich

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>i</b>
<b>1 Einführung in die mathematische Arbeit und Lineare Algebra</b>	<b>1</b>
1.1 Quiz 1 . . . . .	1
1.2 Tipps zum Mathematikstudium . . . . .	1
1.3 Beweisstrategien . . . . .	2
1.4 Die Fibonacci-Folge . . . . .	3
1.5 Hinweise zur Serie 1 . . . . .	5
<b>2 Naive Mengenlehre und Abbildungen</b>	<b>6</b>
2.1 Besprechung Serie 1 . . . . .	6
2.2 Unendlicher Kettenbruch (Fortsetzung, Weiterführendes Material) . . . . .	7
2.3 Naive Mengenlehre und Abbildungen . . . . .	8
2.4 Hinweise zur Serie 2 . . . . .	10
<b>3 Cantor'sches Paradoxon und lineare Gleichungssysteme I</b>	<b>11</b>
3.1 Quiz 2 . . . . .	11
3.2 Besprechung Serie 2 . . . . .	12
3.3 Noch ein Paradoxon . . . . .	13
3.4 Lineare Gleichungssysteme . . . . .	14
<b>4 Lineare Gleichungssysteme II</b>	<b>15</b>
4.1 Besprechung Serie 3 . . . . .	15
4.2 Mehr zu linearen Gleichungssystemen . . . . .	16
4.3 Weitere Übungsaufgaben . . . . .	17
<b>5 Vektorräume, Unterräume, Lineare Hüllen</b>	<b>21</b>
5.1 Quiz 3 . . . . .	21
5.2 Besprechung Serie 3 und 4 . . . . .	21
5.3 Vektorräume und Unterräume . . . . .	23
<b>6 Matrizen als lineare Abbildungen, Lineare Unabhängigkeit</b>	<b>27</b>

6.1 Quiz 4 . . . . .	27
6.2 Besprechung Serie 5 . . . . .	27
6.3 Matrizen als lineare Abbildungen . . . . .	28
6.4 Mehr zu linearer Unabhängigkeit . . . . .	30
<b>7 Basis von Vektorräumen</b>	<b>32</b>
7.1 Quiz 5 . . . . .	32
7.2 Besprechung Serie 6 . . . . .	32
7.3 Basis . . . . .	33
7.4 Das Auswahlaxiom . . . . .	37
<b>8 Teichmüller Prinzip und Existenz von Basis</b>	<b>38</b>
8.1 Besprechung Serie 7 . . . . .	38
8.2 Teichmüller Prinzip und Existenz von Basis . . . . .	38
8.3 Zeilen- und Spaltenräume . . . . .	39
8.4 Weitere Übungsaufgaben . . . . .	40
<b>9 Summe von Vektorräumen, Komplement</b>	<b>42</b>
9.1 Besprechung Serie 8 . . . . .	42
9.2 Wiederholung . . . . .	43
9.3 Summe von Vektorräumen, Komplement . . . . .	43
<b>10 Lineare Abbildung, Darstellungsmatrix I</b>	<b>46</b>
10.1 Quiz 6 . . . . .	46
10.2 Besprechung Serie 9 . . . . .	46
10.3 Wiederholung . . . . .	47
10.4 Linearität und der Grundkörper . . . . .	48
10.5 Anwendungen von Rank-Nullity Theorem . . . . .	48
<b>11 Darstellungsmatrix II</b>	<b>50</b>
11.1 Quiz 7 . . . . .	50
11.2 Besprechung Serie 10 . . . . .	50
11.3 Weitere Anwendungen von Rank-Nullity Theorem . . . . .	50
11.4 Darstellungsmatrix . . . . .	52
11.5 Matrizenmultiplikation . . . . .	52
<b>12 Basiswechsel</b>	<b>56</b>
12.1 Quiz 8 . . . . .	56
12.2 Besprechung Serie 11 . . . . .	57

12.3 Invertierbare Matrizen . . . . .	57
12.4 Basiswechselmatrix . . . . .	58
12.5 Ähnliche Matrizen . . . . .	61
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>63</b>

# Übungsstunde 1

---

## Einführung in die mathematische Arbeit und Lineare Algebra

---

22.09.2025

### Organisatorisches:

1. Bitte ladet eure Serien mit dem Namen `Nachname_Vorname_Serie01.pdf` als ein PDF hoch (mit sam-up).
2. Ihr könnt die Serien auf Deutsch oder Englisch lösen. Ihr werdet ermutigt, so viele Serienaufgaben zu lösen wie möglich.
3. Ihr könnt jeder Zeit Fragen auch auf Englisch stellen, insbesondere wenn es sich um Fachbegriffe handelt.

### 1.1 Quiz 1

Formulieren Sie die Negation so weit wie möglich nach innen in die folgende logische Aussage über eine Menge  $X$  und ein Element  $z \in X$ :

$$\neg((\forall x \in X, \exists y \in X : x + y = 0) \wedge (\exists x \in X, \exists y \in X : x + y > z)).$$

*Lösung.*

$$(\exists x \in X, \forall y \in X : x + y \neq 0) \vee (\forall x \in X, \forall y \in X : x + y \leq z).$$

□

### 1.2 Tipps zum Mathematikstudium

1. Es ist immer hilfreich, Mathematik zu lesen. Dadurch lernt man nicht nur das Wissen, sondern auch wie man selbst Mathematik schreibt. Am besten liest man Mathematik mit einem Stift und einem Blatt Papier, da das Mitdenken eine grosse Rolle spielt. Des Weiteren finde ich es wichtiger, die Ideen von Beweisen zu verstehen als die Details.
2. Wenn man Mathematik schreibt, soll man auf Folgendes achten:

- (a) Verwende nicht überall Symbole wie z.B.  $\implies$ ,  $\forall$ ,  $\exists$  usw., da sie spezielle Bedeutungen haben.
- (b) Schreibe vollständige Sätze. Ihr erklärt euren Lösungsweg.
- (c) Präzision ist sehr wichtig, besonders wenn es sich um Definitionen oder Annahmen handelt.

Mehr zu den Notationen und wie man Mathematik richtig schreibt, findet man im Buch [Beu09].

### 1.3 Beweisstrategien

#### Direkter Beweis

**Beispiel 1.1.** Seien  $a, b \in \mathbb{Z}$  ungerade, dann ist  $a \cdot b$  ungerade.

*Beweis.* Per Definition ungerader Zahlen gibt es  $k, m \in \mathbb{Z}$ , sodass  $a = 2k + 1$ ,  $b = 2m + 1$ . Multiplizieren gibt uns

$$a \cdot b = (2k + 1) \cdot (2m + 1) = 4km + 2k + 2m + 1 = 2(2km + k + m) + 1,$$

d.h.  $a \cdot b$  ist ungerade. □

#### Induktionsbeweis

**Beispiel 1.2.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  ist die Summe der ersten  $n$  ungeraden natürlichen Zahlen gleich  $n^2$ .

*Beweis.* Induktionsverankerung: für  $n = 1$  ist  $1 = 1^2$ .

Induktionsschritt: angenommen gilt die Aussage für  $n$ . Für  $n + 1$  folgt

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1) \stackrel{\text{I.A.}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Daher ist die Aussage wahr für alle  $n \geq 1$ . □

#### Beweis mit Kontraposition

**Beispiel 1.3.** Sei  $n \in \mathbb{Z}$ . Falls  $n^2$  gerade ist, dann ist auch  $n$  gerade.

*Beweis.* Wir zeigen  $n$  ungerade  $\implies n^2$  ungerade. Sei  $n$  ungerade, d.h.  $n = 2k + 1$  für  $k \in \mathbb{Z}$ . Dann ist

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

also  $n^2$  ist ungerade. Alternativ verwendet man Beispiel 1.1.  $\square$

### Beweis mit Fallunterscheidung

**Beispiel 1.4.** Zeigen Sie: Es gibt  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , sodass  $a^b \in \mathbb{Q}$ .

*Beweis.* Es genügt, ein Beispiel zu finden, bei dem dies gilt. Wir betrachten  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  und machen eine Fallunterscheidung

- (i) Falls  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ , dann sind wir fertig; Wir können  $a = b = \sqrt{2}$  setzen.
- (ii) Falls  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$ , seien  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ,  $b = \sqrt{2}$ . Dann ist

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbb{Q}.$$

$\square$

Die Stärke der Fallunterscheidung besteht darin, dass man nicht wissen muss, welcher genau der Fall ist. Wir brauchen nicht zu wissen, ob  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  rational ist oder nicht, trotzdem können wir damit nützliche Sachen beweisen. (Eigentlich ist  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  transzendent, daher irrational.)

### Widerspruchsbeweis

**Beispiel 1.5.**  $\sqrt{2}$  ist irrational.

*Beweis.* Angenommen ist es nicht der Fall, dann können wir  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  für  $p, q \in N$ ,  $q \neq 0$ , mit  $\text{ggT}(p, q) = 1$ . Dann ist  $p^2 = 2q^2$ , also  $p^2$  ist gerade. Nach Beispiel 1.3 ist  $p$  gerade, also  $p = 2k$ . Dies impliziert wiederum, dass  $q^2 = 2k^2$  und daher ist  $q$  gerade. Das ist ein Widerspruch zur Annahme  $\text{ggT}(p, q) = 1$ .  $\square$

## 1.4 Die Fibonacci-Folge

**Übung 1.6** (0.2.12). Zeigen Sie, dass

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}.$$

Was bedeutet überhaupt dieser Ausdruck?

*Lösung.* Wir definieren zuerst Ausdrücke von dieser Form (wie in [Hal24]).

**Definition 1.7.** Ein **unendlicher** Kettenbruch ist ein nicht abbrechender Bruch von der Form

$$b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \dots}},$$

wobei  $b_0, b_1, b_2 \dots$  ganze Zahlen und höchstens mit Ausnahme von  $b_0$  alle  $b_i$  positiv sind.

Ist  $\xi \in \mathbb{R}$  eine beliebige, positive, irrationale Zahl, so können wir  $\xi$  immer als unendlichen Kettenbruch schreiben. Dazu definieren wir für positive reelle Zahlen  $\alpha$ ,

$$\lfloor \alpha \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq \alpha\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \xi = b_0 + r_1 &\quad \text{mit } b_0 := \lfloor \xi \rfloor \text{ und } r_1 = \xi - b_0, \text{ wobei } 0 < r_1 < 1 \text{ bzw. } \frac{1}{r_1} > 1 \\ \frac{1}{r_1} = b_1 + r_2 &\quad \text{mit } b_1 := \left\lfloor \frac{1}{r_1} \right\rfloor \text{ und } r_2 = \frac{1}{r_1} - b_1, \text{ wobei } 0 < r_2 < 1 \text{ bzw. } \frac{1}{r_2} > 1 \\ \frac{1}{r_2} = b_2 + r_3 &\quad \text{mit } b_2 := \left\lfloor \frac{1}{r_2} \right\rfloor \text{ und } r_3 = \frac{1}{r_2} - b_2, \text{ wobei } 0 < r_3 < 1 \text{ bzw. } \frac{1}{r_3} > 1 \\ \vdots &\quad \vdots \end{aligned}$$

und wir erhalten den Kettenbruch.

Jetzt zeigen wir die folgende Behauptung mit Induktion.

**Behauptung.**  $r_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

*Beweis.*  $n = 1$ :  $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

Angenommen, die Gleichung gilt für  $n$ . Für  $n+1$  haben wir

$$\frac{1}{r_n} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

also folgt ähnlich wie im Basisfall  $r_{n+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . □

Wenn wir  $r_n$  kennen, ist es einfach  $b_n = 1$  abzulesen, da  $1 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$ . □

## 1.5 Hinweise zur Serie 1

1. (a) Welches lineare Gleichungssystem kann uns helfen?  
(b) Verwendet (a).
2. (a) Verwendet Wahrheitstabellen.  
(b) Können wir etwas ähnliches wie eine Wahrheitstabelle aufstellen?
3. Verwendet die Definition einer Fibonacci-Folge. Wie können wir ein Folgenglied  $F_n$  umschreiben? Alternativ versucht man, den Grenzwert mittels expliziter Berechnung zu bestimmen.
4. Verwendet De Morgan (Afg. 2).
5. Relativ direkt.
6. Wie lässt sich  $\mathcal{F}_{a,b}$  ausdrücken mithilfe von  $\mathcal{F}_{0,1}$  und  $\mathcal{F}_{1,0}$ ?

# Übungsstunde 2

---

## Naive Mengenlehre und Abbildungen

---

29.09.2025

### 2.1 Besprechung Serie 1

1. Manchmal wurde der Grenzwert von  $F_n/F_{n-1}$  falsch berechnet. Man darf nicht zuerst den Grenzwert für einen Teil des Ausdrucks berechnen und danach den Grenzwert für den Rest bestimmen. Z.B.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^n}{\phi^{n-1}} = \phi$$

ist FALSCH, obwohl das Resultat richtig ist. Man kann aber wie folgendes vorgehen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^n(1 - (\psi/\phi)^n)}{\phi^{n-1}(1 - (\psi/\phi)^{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi \frac{(1 - (\psi/\phi)^n)}{(1 - (\psi/\phi)^{n-1})} = \phi$$

Alternativ sieht man, dass

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}.$$

Setzen wir  $X = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$ , so gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \\ \implies X &= 1 + \frac{1}{X}. \end{aligned}$$

Die Lösungen zu dieser Gleichung sind  $\phi$  und  $\psi$ . Da  $F_n/F_{n-1} > 0$  für alle  $n$ , kann es nur  $\phi$  sein.

2. Viele von euch haben Aufgabe 2. (b) mit Bildern gelöst, das ist leider nicht ausreichend für eine Mathematik-Aufgabe — Bilder sind ja kein Beweis. Um die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen, gibt es hauptsächlich zwei Strategien:

- (a) Für Aufgaben in der Serie, genügt es, Gleichheit durch eine Tabelle zu zeigen.

Um  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$  zu zeigen, stellen wir folgende Tabellen auf:

$A$	$B$	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$	$A^c$	$B^c$	$A^c \cap B^c$
$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$
$\notin$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$
$\in$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\notin$
$\in$	$\in$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\notin$

- (b) Allerdings sind Tabellen nicht besonders hilfreich für kompliziertere Beweise. Wir verwenden häufig diese Strategie: Um  $A = B$  zu zeigen, genügt es  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$  zu beweisen. Genauer, man zeigt

$$\forall x \in A : x \in B \quad \text{und} \quad \forall y \in B : y \in A.$$

3. Es gab auch ein Paar Probleme mit Kontraposition — es kann ja verwirrend sein. In Aufgabe 5. wollen wir die Kontraposition von  $x = y \implies (\exists \varepsilon > 0 : |x - y| \geq \varepsilon)$ . Achtung: wenn wir  $\exists \varepsilon > 0 : |x - y| \geq \varepsilon$  negieren, schreiben wir nicht  $\forall \varepsilon \leq 0 \dots$ , sondern negieren wir nur den Existenzquantor, also  $\forall \varepsilon > 0 \dots$ .

## 2.2 Unendlicher Kettenbruch (Fortsetzung, Weiterführendes Material)

Letzte Woche haben wir unendliche Kettenbrüche eingeführt und es gab ein paar Fragen dazu, ob wir einen unendlichen Kettenbruch als Grenzwert verstehen kann. Dies ist tatsächlich möglich, selbst mit unserer Definition. Der allgemeine Fall ist leider zu kompliziert und braucht weitere Kenntnisse aus der Analysis, daher betrachten wir nur den Spezialfall von  $\phi$ . (Dieser Teil ist komplett nicht prüfungsrelevant.)

Zu einem unendlichen Kettenbruch definieren wir den  $n$ -ten endlichen Näherungsbruch als

$$\frac{P_n}{Q_n} := b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{b_{n-1} + \cfrac{1}{b_n}}}}$$

Zudem gibt es folgendes Schema, wodurch wir schnell  $P_n/Q_n$  bestimmen können:

$$\begin{aligned} P_{-2} &= 0, & P_{-1} &= 1, & P_n &= b_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_{-2} &= 1, & Q_{-1} &= 0, & Q_n &= b_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{aligned}$$

Hier beweisen wir die rekursive Relation nicht. In unserem Fall gilt

$$\begin{aligned} P_{-2} &= 0, & P_{-1} &= 1, & P_0 &= 1, & P_1 &= 2, & P_2 &= 3, & P_3 &= 5, & \dots \\ Q_{-2} &= 1, & Q_{-1} &= 0, & Q_0 &= 1, & Q_1 &= 1, & Q_2 &= 2, & Q_3 &= 3, & \dots \end{aligned}$$

Wie sehen, dass wir auf der ersten Reihe genau  $\mathcal{F}_{0,1}$  haben, und auf der zweiten Reihe die verschobene  $\mathcal{F}_{0,1}$ . So lässt sich den Grenzwert bestimmen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \phi.$$

## 2.3 Naive Mengenlehre und Abbildungen

**Übung 2.1.** Sei  $X$  eine endliche Menge. Zeige, dass  $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

*Lösung.* LÖSUNG 1. Sei  $|X| = n$  und wir schreiben  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Jede Teilmenge von  $X$  kann als ein Vektor der Länge  $n$  dargestellt werden: Für  $A \subseteq X$  definiere wir  $v_A$  durch  $v_A^i = 0$  falls  $x_i \notin A$  und  $v_A^i = 1$  falls  $x_i \in A$ . Jede Teilmenge entspricht eindeutig einem Vektor mit Einträgen in  $\{0, 1\}$  und umgekehrt definiert jeder solche Vektor eine Teilmenge. Somit genügt es, die Anzahl von solchen Vektoren zu bestimmen. Für jeden Eintrag  $v^i$  gibt es zwei Möglichkeiten, entweder  $v^i = 1$  oder  $v^i = 0$ . Daher gibt es insgesamt  $2^n$  solche Vektoren.

LÖSUNG 2. Um eine Teilmenge von  $X$  zu konstruieren, wählen wir Elemente aus  $X$ . So ist  $|\mathcal{P}(X)|$  genau die Anzahl von Möglichkeiten, Elemente aus  $X$  zu wählen. Wenn wir kein Element auswählen, haben wir nur eine Möglichkeit. Wenn wir nur ein Element auswählen, gibt es klarerweise  $n$  Möglichkeiten. Wenn wir zwei auswählen, gibt es  $\binom{n}{2}$  Möglichkeiten, usw. Jedes Mal dürfen wir beliebig viele Elemente auswählen, daraus ergibt sich

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

Möglichkeiten. Wir haben hier Satz 2.2 verwendet. □

**Satz 2.2** (Binomischer Lehrsatz). *Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

*Beweis.* Wir zeigen die Formel mittels Induktion. Für  $n = 0$  ist  $(a + b)^0 = 1 = \binom{n}{0}$  (wobei wir die Konvention  $0^0 = 1$  verwenden). Nimm an, dass die Formel für  $n$  gilt. Für  $n + 1$  haben wir

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} + a^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n! \cdot k - n! \cdot (n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}. \end{aligned}$$

□

Als Nächstes schauen wir uns zwei Paradoxa der naiven Mengenlehre an, um genauer zu verstehen, woher die Probleme kommen. Dafür brauchen wir aber einen Begriff, der uns erlaubt, die Kardinalitäten von (potenziell unendlichen) Mengen zu vergleichen.

**Definition 2.3.** Es seien  $A, B$  Mengen. Wir sagen  $|A| = |B|$  falls es eine Bijektion zwischen  $A$  und  $B$  gibt;  $|A| \leq |B|$  falls es eine Injektion  $f : A \rightarrow B$  gibt. Wir schreiben auch  $|A| < |B|$  für  $|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$ .

Wir werden nächste Woche noch zu dieser Definition kommen wenn wir das zweite Paradoxon diskutieren. Wir fangen zuerst mit dem klassischen Russell'schen Paradoxon.

**Beispiel 2.4** (Russell). Angenommen existiert eine Menge aller Mengen,  $U_0$ . Definiere

$$R := \{P \in U : P \notin P\}.$$

Ist  $R \in R$ ?

Diese Frage hat keine zufriedenstellende Antwort. Wenn  $R \in R$ , dann ist  $R$  per Definition eine Menge, die  $R \notin R$  erfüllt. Aber wenn  $R \notin R$ , muss  $R \in R$  gelten. Wir erhalten also

$$R \in R \iff R \notin R.$$

Ausdrücke der Form  $\phi \wedge \neg\phi$  nennen wir einen Widerspruch. Hier muss sowohl  $R \in R$  als auch  $R \notin R$  gelten, also  $(R \in R) \wedge (R \notin R)$ . So führt die Annahme, dass  $U_0$  existiert, zu einem Widerspruch.

## 2.4 Hinweise zur Serie 2

1. Wie negieren wir eine Aussage ?
2. Kann  $x$  positiv sein? Negativ?
3. Verwendet die Strategie mit zwei Inklusionen, die wir in der Übungsstunde diskutiert haben.
4. Relativ direkt.
5. Die Definitionen können hilfreich sein. [Wichtig]
6. Schaut euch nochmals die Definitionen an. [Wichtig]

## Übungsstunde 3

---

# Cantor'sches Paradoxon und lineare Gleichungssysteme I

---

06.10.2025

### 3.1 Quiz 2

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$  Abbildungen.

1. Stimmt es, dass wenn  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$  gilt, dass ist  $g_1 = g_2$ ?
2. Trifft es zu, dass  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$  für jede Teilmenge  $B \subseteq Y$  gilt?
3. Nehmen wir an, dass  $g_1 \circ f$  injektiv ist. Bedeutet dies, dass  $g_1$  injektiv ist?

*Lösung.*

1. Dies ist im Allgemeinen nicht wahr. Es gilt, wenn  $f$  ein Rechtsinverses besitzt, d. h. wenn  $f$  surjektiv ist.

Als Gegenbeispiel sei  $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  die konstant 1-Funktion, und betrachte  $g_1, g_2 : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$  definiert durch

$$g_1(x) = x \quad \text{und} \quad g_2(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \{0, 1\}.$$

Dann gilt  $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ , aber  $g_1 \neq g_2$ .

2. Per Definition gilt

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Daher gilt für alle  $x \in f^{-1}(B)$ :  $f(x) \in B$ , was die Inklusion zeigt.

3. Dies ist nicht wahr. Sei  $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $f(x) = \sqrt{x}$  und  $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $g_1(y) = y^2$ .

Dann ist  $g_1 \circ f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  injektiv. Tatsächlich gilt: Angenommen  $g_1 \circ f(x_1) = g_1 \circ f(x_2)$ . Das bedeutet  $(\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2 \implies x_1 = x_2$ .

Jedoch ist  $g_1$  offensichtlich nicht injektiv.

□

### 3.2 Besprechung Serie 2

1. In Aufgabe 2 wurde erwartet, dass man das Archimedische Prinzip verwendet, um zu zeigen, dass

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \right\} = \{0\}.$$

Also sei  $x > 0$ , dann gibt es nach dem Archimedischen Prinzip [Fig25] ein  $k \in \mathbb{Z}$ , sodass

$$k \leq \frac{1}{x} < k + 1 \implies \frac{1}{k+1} < x$$

Daher ist  $x \notin A$  für alle  $x > 0$ . Analog gilt das gleiche für  $x < 0$ , so mit ist  $A = \{0\}$ .

2. Viele haben die Aufgabe 5 gelöst mit der Begründung, dass  $g_1$  und  $g_2$  wegen der zwei Eigenschaften nach der Definition genau  $f^{-1}$  sind. Man muss vorsichtig sein: nicht jede Funktion hat ein Inverses, man muss die Bijektivität der Funktion beweisen und dann kann man von dem Inversen sprechen. Insbesondere kann man hier nicht direkt die Eindeutigkeit des Inversen verwenden. In dieser Aufgabe geht man wie folgt vor: Es gilt

$$g_1 = g_1 \circ \text{id}_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \text{id}_X \circ g_2 = g_2.$$

So ist  $g_1 = g_2$  und sie sind sowohl das linke als auch das rechte Inverse von  $f$ , also  $g_1 = g_2 = f^{-1}$ . Aus den zwei Gleichungen folgt auch, dass  $f$  injektiv und surjektiv sind.

3. Es gab ein paar Missverständnisse bei Aufgabe 6. Wenn wir  $f^{-1}(B)$  schreiben, wird nicht die Umkehrabbildung (engl. inverse) von  $f$  gemeint, sonder das Urbild (engl. preimage / inverse image) der Menge  $B$  unter  $f$ . Genauer, für  $f : X \rightarrow Y$  und  $B \subseteq Y$  ist

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Hier kann man  $f^{-1}$  nicht als Funktion verstehen, aus demselben Grund wie oben: Es existiert nicht immer. Allerdings ist es bemerkenswert, wenn  $f^{-1}$  existiert, ist  $f^{-1}(B)$  genau das Bild (engl. image) von  $B$  unter  $f^{-1}$  — die zwei Interpretationen stimmen miteinander überein. Somit muss man hier die Mengen genau analysieren, z.B. Teilaufgabe 1: Sei  $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$  für  $x \in f^{-1}(B)$ , dann ist per Definition  $f(x) \in B$  und daher  $y \in B$ , also  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ . Wenn  $f$  surjektiv ist, gibt es für jedes  $y \in B$  ein  $x \in X$  mit  $f(x) = y$ .  $x$  muss in  $f^{-1}(B)$  und daher  $B \subseteq f(f^{-1}(B))$ , womit die andere Inklusion gezeigt wird. Bei den restlichen Aufgaben kann man ähnlich vorgehen.

Noch eine Erinnerung:  $A \setminus B = A \cap B^c$  — kann manchmal nützlich sein.

### 3.3 Noch ein Paradoxon

**Beispiel 3.1** (Cantor'sches Paradoxon). Es gibt keine Menge, die alle Mengen als Element enthält.

Um dies zu zeigen, benötigen wir folgendes Theorem.

**Theorem 3.2** (Cantor). *Sei  $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  eine Abbildung, dann ist  $f$  nicht surjektiv. Als eine Folgerung ist  $|A| < |\mathcal{P}(A)|$  für alle Mengen  $A$ .*

*Beweis.* Angenommen ist  $f$  surjektiv. Sei  $B := \{x \in A : x \notin f(x)\}$ , dann ist  $B \in \mathcal{P}(A)$ . Da  $f$  surjektiv ist, gibt es  $x \in A$  mit  $f(x) = B$ . Aber per Definition von  $B$  gilt

$$y \in B \iff y \notin f(x) \quad \forall y \in A,$$

es folgt

$$x \in B \iff x \notin B.$$

Das ist ein Widerspruch.

Die Abbildung  $g : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  mit  $g(x) = \{x\}$  ist injektiv, daher  $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$ . Wir schliessen, dass  $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ .  $\square$

*Beweis von Beispiel 3.1.* Sei  $X$  die Menge, die alle Mengen als Element enthält. Sei

$$Y = \bigcup_{A \in X} A.$$

Da  $\mathcal{P}(Y)$  auch eine Menge ist, ist  $\mathcal{P}(Y) \in X$  und  $\mathcal{P}(Y) \subseteq Y$ , insbesondere  $|\mathcal{P}(Y)| \leq |Y|$ . Nach Theorem 3.2 ist aber  $|\mathcal{P}(Y)| > |Y|$ , Widerspruch.  $\square$

Die Paradoxa zeigen, dass der naive Begriff von Mengen zu viel enthält — manche davon, wie die Menge aller Mengen, haben Eigenschaften, die nicht wohldefiniert sind und zu Widersprüchen führen. Daher brauchen wir mehr Einschränkungen dafür, welche Objekte überhaupt Mengen sein können, um den Begriff von Mengen präzise zu machen. Dies ist genau das Thema in der *axiomatischen Mengenlehre*, wo man den Begriff von Mengen durch Axiome festlegen. Die Mathematiker werden noch mehr dazu sehen in der Vorlesung *Grundstrukturen*.

### 3.4 Lineare Gleichungssysteme

Wir werden ein paar Beispiele von linearen Gleichungssystemen (LGS) sehen und lösen.

**Übung 3.3.** Man löse das folgende LGS mittels elementaren Zeilenoperationen:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

*Lösung.*

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1, R_3 + R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3 - \frac{3}{4}R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{3}R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 6R_3, R_1 + R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{4}R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right).$$

$$\implies x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{3}.$$

□

# Übungsstunde 4

---

## Lineare Gleichungssysteme II

---

13.10.2025

### 4.1 Besprechung Serie 3

Wir wollen jetzt die Lösung von Aufgabe 5 genauer anschauen, und zwar hauptsächlich den Teil, wo man die Existenz eines Inverselements zeigt. Sei  $x = a + b\tau \in k[\tau] \setminus \{0 + 0\tau\}$ . Wir dürfen annehmen, dass  $b \neq 0$ , weil sonst  $x = a \in k$  gilt und wir können das Inverse von  $a \in k$  leicht finden. Wie definieren noch  $x' = a - b\tau$ , es gilt

$$xx' = a^2 - b^2\alpha.$$

Beachte, dass  $xx' \neq 0 + 0\tau$ , weil sonst  $a^2 = b^2\alpha$  gelten muss, woraus  $\tau = \pm a/b \in k$  folgt, dies kann aber nicht sein. So hat  $xx'$  ein Inverses  $(a^2 - b^2\alpha)^{-1} \in k$ . Nun nehmen wir an, dass  $x$  ein Inverses hat — wir wollen unter dieser Annahme einen Kandidat für  $x^{-1}$  (falls existiert) finden, und dann beweisen, dass das gefundene Element tatsächlich das Inverse von  $x$  ist. Es gilt

$$x^{-1}(xx') = x' \implies x^{-1} = x'(xx')^{-1}.$$

Wir setzen  $x'$  und  $xx'$  ein:

$$x^{-1} = (a - b\tau)(a^2 - b^2\alpha)^{-1}.$$

Dieses Element ist jetzt unser Kandidat für  $x^{-1}$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $xx^{-1} = 1$ :

$$\begin{aligned} xx^{-1} &= (a + b\tau)(a - b\tau)(a^2 - b^2\alpha)^{-1} \\ &= (a^2 - b^2\alpha)(a^2 - b^2\alpha)^{-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

So haben wir verifiziert, dass  $x^{-1} = (a - b\tau)(a^2 - b^2\alpha)^{-1}$  das Inverse von  $x$  ist. [Hier haben wir  $x^{-1}$  nicht als einen Bruch  $1/x$  geschrieben, um zu betonen, dass die Existenz von einem Inversen nicht trivial ist und man kann nicht mit beliebigen Elementen einen solchen Bruch bauen.]

Nächste Woche werden wir noch ein paar Aufgaben aus Serie 3 besprechen.

## 4.2 Mehr zu linearen Gleichungssystemen

Das LGS von letzter Woche hat eine eindeutige Lösung und wir erhalten am Ende eine Matrix mit Eisen auf dem Diagonal. Allgemein können wir das nicht machen, trotzdem versuchen wir, die Matrix in eine ähnliche Form zu bringen, nämlich die reduzierte Zeilenstufenform (engl. row-reduced echelon form):

$$\left( \begin{array}{cccccc|cccccc|c} 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

**Übung 4.1.** Löse das folgende LGS

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$$

*Lösung.* Die entsprechende Matrix ist

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 15 \end{array} \right)$$

Nach elementaren Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Wenn  $(x_1, x_2, x_3)$  eine Lösung des Systems ist, gibt es keine Einschränkungen für  $x_3$ , wir können also  $x_3$  frei wählen. Aber es muss

$$x_1 = \frac{11}{3} - \frac{2}{3}x_3 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_3$$

gelten. So können wir die Lösung als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} - \frac{2}{3}x_3 \\ \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

schreiben.  $x_3$  kann einen beliebigen Wert  $t \in \mathbb{R}$  annehmen, daher ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

### 4.3 Weitere Übungsaufgaben

**Übung 4.2.** Löse das LGS

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}.$$

Versuche, die Geraden  $x - y = 1$  und  $x - 2y = -2$  in der Ebene zu zeichnen.

*Lösung.*

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{-R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + R_2} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Somit ist die eindeutige Lösung gegeben durch  $x = 4, y = 3$ . Geometrisch ist  $(4, 3) \in \mathbb{R}^2$  der Schnittpunkt der Geraden  $x - y = 1$  und  $x - 2y = -2$ , es sieht wie folgt aus.

□

**Übung 4.3.** Löse das LGS

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}.$$

Versuche, die Geraden  $x + 2y = 4$  und  $2x + 4y = 6$  in der Ebene zu zeichnen.

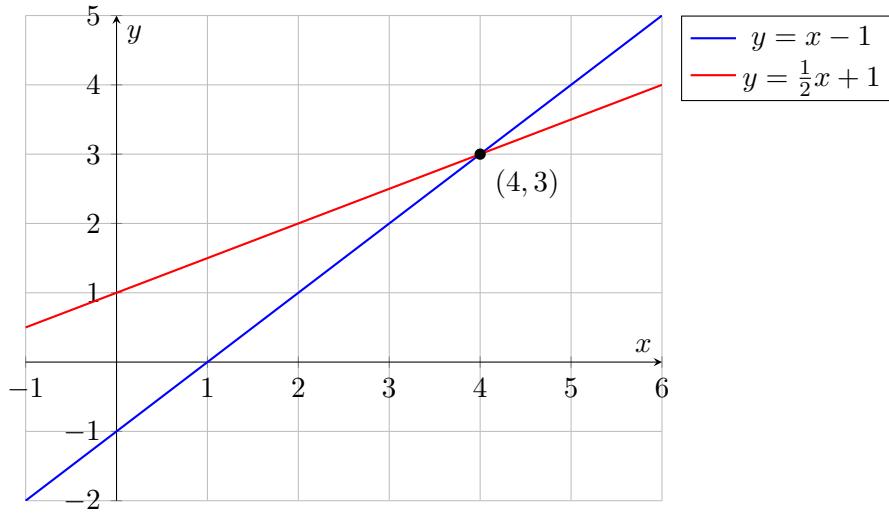


Abbildung 4.1: Lösung zum LGS  $x - y = 1$  und  $x_1 - 2y = -2$

*Lösung.* Man bemerkt, dass dieses LGS keine Lösung hat: Nach Umformungen erhalten wir  $0 = 2$ . Geometrisch haben wir zwei parallele Geraden in der Ebene, die keinen Schnittpunkt haben. Aber wenn wir eine Gerade verschieben, z.B. wenn wir die erste Gleichung durch  $x + 2y = 3$ , dann bekommen wir zwei identische Geraden und sie haben unendlich viele Schnittpunkte, dementsprechend hat das neue LGS unendlich viele Lösungen. Die geometrische Bedeutung eines LGS werden wir noch besser verstehen mit Hilfe von Konzepten wie Vektorräume und lineare Abhängigkeit.  $\square$

Nun lösen wir eine Aufgabe wo das LGS von einem Parameter abhängt. Dann kommt eine natürliche Frage, ist die Anzahl von Lösungen auch von dem Parameter abhängig?

**Übung 4.4.** Für welche  $a \in \mathbb{R}$  hat das folgende LGS eine Lösung? Bestimme die Lösungen wenn sie existieren.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + ay + 3z = a \\ x + (a - 2)y + (2a + 3)z = -a^2 \\ y - az = 1 \end{array} \right.$$



Abbildung 4.2: Das LGS  $x + 2y = 4$  und  $2x + 4y = 6$  hat keine Lösung

*Lösung.* Wir lösen das LGS wie normal:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & a \\ 1 & a-2 & 2a+3 & -a^2 \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & a \\ 0 & -2 & 2a & -a^2-a \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+2R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & -a^2-a+2 \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{array} \right)$$

Wir sehen schon jetzt die Abhängigkeit von  $a$ . Wenn  $-a^2 - a + 2 \neq 0$ , hat das LGS keine Lösung. Die zwei Nullstellen von diesem Polynom sind 1 und  $-2$ , also es genügt, die Lösungen in diesen zwei Fällen zu bestimmen

**Fall 1:** Die Zielmatrix ist

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1-R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die Lösungsmenge ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

**Fall 2:** Die Zielmatrix ist

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1+2R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die Lösungsmenge ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

# Übungsstunde 5

---

## Vektorräume, Unterräume, Lineare Hüllen

---

20.10.2025

### 5.1 Quiz 3

Sei  $K$  ein Körper und  $a \in K^*$ . Finde die reduzierte Zeilenstufenform der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 + a & a^4 + a^2 - a \end{pmatrix}.$$

*Lösung.*

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 + a & a^4 + a^2 - a \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & a & a^2 - a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 1 & a - 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

### 5.2 Besprechung Serie 3 und 4

#### Serie 3

1. In Aufgabe 2 werden die Elemente eines endlichen Körpers durch  $\bar{a}$  ausgedruckt. Diese Notation ist anders wie in der Vorlesung und hat auch eine andere Bedeutung. Wir nehmen  $\mathbb{F}_p = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{p-1}\}$  für  $p$  prim als ein Beispiel. Wir betrachten die Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\mathbb{Z}$  definiert durch

$$x \sim y \iff x - y = pk, k \in \mathbb{Z} \iff x \equiv y \pmod{p}.$$

Erinnerung aus Analysis I: eine Relation heisst eine Äquivalenzrelation wenn sie reflexiv, transitiv, und symmetrisch ist. Basierend auf diese Äquivalenzrelation definieren

wir

$$\bar{a} := \{a + pk : k \in \mathbb{Z}\} = a + p\mathbb{Z} = [a]_{\sim},$$

also  $\bar{a}$  ist die Äquivalenzklasse von  $a$  bezüglich dieser Relation. Beachte: hier ist  $\bar{a}$  eine Menge, nicht nur eine ganze Zahl.  $\mathbb{F}_p$  ist die Menge aller Äquivalenzklassen, also

$$\mathbb{F}_p = \{[a]_{\sim} : a \in \mathbb{Z}\}.$$

Weiter definieren wir auf  $\mathbb{F}_p$   $+$  und  $\cdot$  durch Repräsentanten:

$$[x]_{\sim} + [y]_{\sim} = [x + y]_{\sim},$$

$$[x]_{\sim} \cdot [y]_{\sim} = [x \cdot y]_{\sim}.$$

Man prüft, dass die Operationen wohldefiniert sind, d.h. unabhängig von den Repräsentanten. Durch diese Definition ergibt sich derselbe Körper wie ihr in der Vorlesung durch die Additions- und Multiplikationstabellen definiert habt, es ist aber wichtig im Kopf zu halten, dass es hier um Äquivalenzklassen handelt, nicht nur Zahlen. Konstruktionen durch Äquivalenzrelationen sind tauchen überall auf, nicht nur bei der Definition von gewissen Körpern, sondern auch später im Rahmen von Vektorräumen.

2. Aufgabe 6 ist etwa schwer, deshalb wollen wir uns den Beweis genauer anschauen.
- (a) Die Abbildung  $m_b(x) = b \cdot x$  ist bijektiv, weil Links- und Rechtsinversabbildungen existieren, beide sind nämlich gegeben durch  $m_{b^{-1}}$ . Insbesondere ist  $m_b(k) = k$ . Somit gilt

$$b \cdot S = b \cdot \sum_{x \in k} x = \sum_{x \in k} b \cdot x = \sum_{\substack{y=b \cdot x \\ x \in k}} y = \sum_{y \in k} y = S,$$

daraus folgt

$$(1 - b)S = 0 \quad \forall b \neq 0.$$

Da  $k$  mehr als zwei Elemente hat, gibt es ein  $b \in k \setminus \{0, 1\}$  und es muss  $S = 0$  gelten.

- (b) Wenn das Inverselement von  $x \in k$  ungleich  $x$  ist, können wir immer  $x$  und  $x^{-1}$  als ein Paar betrachten und wir kommen nur eine 1 im Produkt. Daher genügte es, „problematische Elemente“ zu brachten, also die Elemente mit  $x = x^{-1}$ , bei denen wir ein solches Paar nicht bilden können. Der wichtigste Punkt ist, dass nur 1 und  $-1$  diese Gleichung erfüllen kann, weil das Polynom

$$(x + 1)(x - 1) \in k[x]$$

schon 1 und  $-1$  als Nullstellen hat und ein Polynom in  $k[x]$  vom Grad 2 höchstens 2 Nullstellen in  $k$  besitzen kann. Somit erhalten wir am Ende nur einen Faktor von  $-1$  wegen  $-1 \in k$ .

**Serie 4** Aufgabe 5 ist ein bisschen kompliziert. Es sieht sehr intuitiv aus, braucht aber sorgfältige Begründung. Die Idee ist Kontraposition zu verwenden: wir nehmen an, dass keine Zeile von  $A$  kein Vielfaches von der anderen ist, und wollen schliessen, dass  $Ax = b$  eine Lösung hat. Also sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Jetzt machen wir eine Fallunterscheidung.

**Fall 1:**  $a \neq 0$ . Dann dürfen wir durch  $a$  teilen. (Wichtig! Sonst dürfen wir das nicht.) Nach elementaren Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{\alpha}{a} \\ 0 & 1 & (\beta - \frac{c}{a}\alpha)/(d - \frac{c}{a}b) \end{array} \right)$$

Das Teilen durch  $d - \frac{c}{a}b$  ist zulässig wegen der Annahme. Nun hat das LGS eine Lösung, wie gewünscht.

**Fall 2:**  $a = 0$ . Falls jetzt  $c \neq 0$ , haben wir eine ähnliche Situation wie im Fall 1, nach Vertauschen von Zeilen können wir wie vorher vorgehen, so hat das LGS auch eine Lösung. Falls  $c = 0$ , dass muss mindestens eines von  $b$  und  $d$  ungleich 0. So haben wir

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0 & b & \alpha \\ 0 & d & \beta \end{array} \right),$$

aber dann ist eine Zeile immer ein Vielfaches von der anderen, egal welche Werte  $b$  und  $d$  annehmen.

So schliessen wir, dass das LGS in allen Fällen für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  eine Lösung hat.

## 5.3 Vektorräume und Unterräume

Hier sind ein paar Nicht-Beispiele.

### Beispiel 5.1.

1. Die 1-Sphäre  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ .

2. Der *affine* Unterraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

3.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^2$  ist abgeschlossen unter Addition, aber nicht unter Skalarmultiplikation.
4.  $\{p(x) = ax^2 + bx + c : a \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}[x]$  ist nicht abgeschlossen unter Addition und enthält nicht das Nullelement.
5.  $\{f \in C^0(\mathbb{R}) : f(0) = 1\} \subseteq C^0(\mathbb{R})$  enthält die Nullfunktion  $f \equiv 0$  nicht.

**Übung 5.2.** Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

- (a) Sei  $v \in V$ , dann ist die Menge

$$W := \{w \in V \mid \exists \lambda \in K : w = \lambda \cdot v\}$$

ein Unterraum von  $V$ .

- (b) Eine Teilmenge  $W \subseteq V$  ist genau dann ein Unterraum, wenn  $\langle W \rangle = W$ .  
(c) Seien  $S_1, S_2 \subseteq V$  Teilmengen. Dann gilt

$$\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle.$$

- (d) Seien  $S_1, S_2 \subseteq V$  Teilmengen. Dann gilt

$$\langle S_1 \cap S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle.$$

*Lösung.* (a) Ja. Sei  $v \in V$  und

$$W := \{w \in V \mid \exists \lambda \in K : w = \lambda v\}.$$

Dann ist  $W = \langle v \rangle$ , also die von  $v$  erzeugte lineare Hülle, und damit ein Unterraum von  $V$ .

- (b) „ $\Leftarrow$ “: Sei  $W \subseteq V$  mit  $\langle W \rangle = W$ . Da die lineare Hülle  $\langle W \rangle$  definitionsgemäß ein Unterraum ist, folgt  $W$  ist ein Unterraum.

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $W$  ein Unterraum von  $V$ . Dann ist jede endliche Linearkombination von Elementen aus  $W$  wieder in  $W$ , also  $\langle W \rangle \subseteq W$ . Die andere Inklusion  $W \subseteq \langle W \rangle$  gilt

stets, also folgt  $\langle W \rangle = W$ .

(c) Seien  $S_1, S_2 \subseteq V$  Teilmengen. Es gilt

$$\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle.$$

„ $\supseteq$ “: Wegen  $S_i \subseteq S_1 \cup S_2$  für  $i = 1, 2$  folgt  $\langle S_i \rangle \subseteq \langle S_1 \cup S_2 \rangle$  für  $i = 1, 2$ . Da  $\langle S_1 \cup S_2 \rangle$  ein Unterraum ist, ist auch die Summe  $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$  in  $\langle S_1 \cup S_2 \rangle$ .

„ $\subseteq$ “: Wegen  $S_i \subseteq \langle S_i \rangle \subseteq \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$  für  $i = 1, 2$  gilt  $S_1 \cup S_2 \subseteq \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$ . Da  $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$  ein Unterraum ist, enthält er auch alle endlichen Linearkombinationen aus  $S_1 \cup S_2$ , also  $\langle S_1 \cup S_2 \rangle \subseteq \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$ .

Damit folgt die Gleichheit.

(d) Falsch. Betrachte ein Gegenbeispiel in  $V = \mathbb{R}^2$ . Sei

$$S_1 = \{(1, 0)\}, \quad S_2 = \{(3, 0)\}.$$

Dann ist  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  und somit  $\langle S_1 \cap S_2 \rangle = \langle \emptyset \rangle = \{0\}$ . Dagegen sind

$$\langle S_1 \rangle = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \langle S_2 \rangle,$$

also  $\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$ . Somit ist im Allgemeinen  $\langle S_1 \cap S_2 \rangle \neq \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$ .

□

**Beispiel 5.3.** Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$  eine Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Man überprüft, dass

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i : \alpha_i \in K \ \forall 1 \leq i \leq n \right\}$$

ein Vektorraum ist. Dies wird den **Spaltenraum** von  $A$  genannt. Der Spaltenraum spielt eine grosse Rolle, wenn wir später Matrizen als lineare Abbildungen betrachten.

**Definition 5.4.** Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$  und  $x \in K^n$ . Wir definieren die Multiplikation von  $A$  mit  $x$  als

$$Ax = v \in \mathbb{R}^m,$$

wobei  $v$  durch

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$$

gegeben ist.

**Bemerkung 5.5.** Alternativ kann man  $Ax$  als

$$Ax = \sum_{j=1}^n x_j v_j$$

betrachten, wobei  $v_j$  für  $1 \leq j \leq n$  die Spalten von  $A$  sind.

Dadurch sehen wir, ob das LGS  $Ax = b$  eine Lösung hat hängt lediglich davon ab, ob  $b$  im Spaltenraum von  $A$  liegt. Nächste Woche werden wir Matrizen als lineare Abbildungen betrachten und anhand von Eigenschaften der linearen Abbildungen die Lösungsmengen von LGS eingehend studieren.

## Übungsstunde 6

---

# Matrizen als lineare Abbildungen, Lineare Unabhängigkeit

---

27.10.2025

### 6.1 Quiz 4

Betrachte  $\mathbb{R}^2$  mit den folgenden Operationen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x_1 \\ y + y_1 \end{pmatrix}, \quad x, x_1, y, y_1 \in \mathbb{R}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ y \end{pmatrix}, \quad \alpha, x, y \in \mathbb{R}.$$

Ist  $\mathbb{R}^2$  mit diesen Operationen ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ?

*Lösung.* Nein. Für  $\alpha = 0$  haben wir

$$0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{für } y \neq 0.$$

□

### 6.2 Besprechung Serie 5

1. Aufgabe 1: Es ist immer gut, eine Fallunterscheidung zu machen, wenn man eine Zahl durch eine Unbekannte teilt. Hier darf man nur teilen, wenn  $m \neq \pm 2$  ist, und man muss die Fälle  $m = \pm 2$  separat analysieren.
2. Aufgabe 4: Die Addition ist nicht assoziativ! Es gilt

$$((-\infty) + \infty) + \infty = \infty \neq 0 = -\infty + \infty = -\infty + (\infty + \infty).$$

### 6.3 Matrizen als lineare Abbildungen

Wir werden jetzt lineare Abbildungen — die wichtigsten Objekte der Linearen Algebra kennenlernen, durch Matrizen eine Intuition dafür bekommen, und diese mit LGS in Zusammenhang bringen. Als Referenz verwende ich [Zer24].

Es sei  $K$  ein Körper.

**Definition 6.1.** Es seien  $V, W$  Vektorräume über  $K$ . Eine Funktion  $T : V \rightarrow W$  ist eine **lineare Abbildung**, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt:

1. es gilt  $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$  für alle  $v_1, v_2 \in V$ ;
2. es gilt  $T(\alpha v) = \alpha T(v)$  für alle  $v \in V, \alpha \in K$ .

Mit anderen Worten,  $T$  respektiert die Vektoraddition und Skalarmultiplikation.

**Proposition 6.2.** Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$ . Dann ist  $T_A : K^n \rightarrow K^m$  definiert durch  $T_A(x) = Ax$  eine lineare Abbildung.

*Beweis.* Folgt direkt aus der Definition von Matrix-Vektor Multiplikation. □

Wir wollen lineare Abbildungen studieren durch zwei Vektorräume, einer davon ist:

**Definition 6.3.** Es seien  $V, W$  Vektorräume über  $K$ , und es sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Der **Kern** von  $T$  ist

$$\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\} \subseteq V$$

**Lemma 6.4.**  $\ker(T)$  ist ein Unterraum von  $V$ .

*Beweis.* Zunächst gilt  $0_V \in \ker(T)$  wegen der zweiten Eigenschaft einer linearen Abbildung. Seien  $v_1, v_2 \in \ker(T)$ , dann ist wegen der Linearität

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0_W + 0_W = 0_W.$$

Für  $v \in V, \lambda \in K$  gilt

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda \cdot 0_W = 0.$$

Somit ist  $\ker(T)$  ein Unterraum von  $V$ . □

**Korollar 6.5.** Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$ , dann ist  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0_{K^m}\}$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ .

*Beweis.* Es gilt  $T(0_V) = T(0 \cdot 0_V) = 0 \cdot T(0_V) = 0$ , also ist  $0_V \in \ker(T)$ . Nach Proposition 6.2 ist die Abbildung  $T : K^n \rightarrow K^m$ ,  $x \mapsto Ax$  eine lineare Abbildung. Weiter ist  $\ker(T) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0_{K^m}\}$ , und nach Lemma 6.4 ist  $\ker(T)$  ein Unterraum von  $K^n$ .  $\square$

**Bemerkung 6.6.** Korollar 6.5 zeigt, dass Lösungsmengen eines *homogenen* LGS Unterräume sind. Wenn ein homogenes LGS eine nicht triviale Lösung hat (d.h.  $x \neq 0_{K^n}$  mit  $Ax = 0_{K^m}$ ), dann hat es automatisch unendliche viele Lösungen wenn  $K$  unendlich ist.

Der Kern gibt uns eine vollständigen Beschreibung der Struktur der Lösungsmenge eines homogenen LGS. Aber was passiert wenn wir ein *inhomogenes* LGS haben? Welche Eigenschaften des LGS bestimmen, ob es eine Lösung hat oder nicht? Diese Fragen werden wir mit Hilfe eines anderen Begriffs beantworten. Ihr habt schon seit ein paar Wochen das Bild einer Funktion kennengelernt. Die Bilder von linearen Abbildungen haben, ohne Überraschung, auch interessante Eigenschaften.

**Bemerkung 6.7.** Wir schreiben  $\text{im}(T)$  fürs Bild von  $T$ .

**Proposition 6.8.**  $\text{im}(T)$  ist ein Unterraum von  $W$ .

*Beweis.* Zuerst ist  $T(0_V) = 0_W$  und somit  $0_W \in \text{im}(T)$ . Für  $w_1, w_2 \in \text{im}(T)$ , gibt es  $v_1, v_2 \in V$  mit  $T(v_1) = w_1$ ,  $T(v_2) = w_2$ . So ist

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) \in \text{im}(T).$$

Analog zeigt man, dass  $\lambda w \in \text{im}(T)$  für  $w \in \text{im}(T)$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt.  $\square$

Zusammenfassend: Ob ein LGS eine Lösung hat, hängt davon ab, ob  $b \in \text{im}(T)$  gilt. Als nächster Schritt wollen die Struktur des Bilds studieren.

**Proposition 6.9.** Es seien  $V, W$  Vektorräume über  $K$ , und es sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Angenommen, dass es  $v \in V$  existiert, mit  $T(v_0) = b$  für  $b \in W$ . Dann hat die Gleichung  $T(v) = b$  genau eine eindeutige Lösungen, wenn  $\ker(T) = \{0_V\}$ . Zudem ist  $\{v \in V : T(v) = b\}$  ein affiner Unterraum von  $V$ .

*Beweis.* Angenommen gibt es noch eine Lösung  $v_0 \neq v \in V$ , dass ist  $T(v_0 - v) = T(v_0) - T(v) = b - b = 0$ , d.h.  $0_V \neq v_0 - v \in \ker(T)$ . Umgekehrt wenn es  $v \in \ker(T) \setminus \{0\}$  gibt, erfüllt  $v_0 + v$  ebenfalls die Gleichung, da  $T(v_0 + v) = T(v_0) + T(v) = b + 0_W = b$ . Die Lösungsmenge ist somit gegeben durch  $\{v_0 + v \in V : v \in \ker(T)\} = v_0 + \ker(T)$ , also ein affiner Unterraum.  $\square$

Jetzt haben wir eine vollständige Beschreibung der Lösungsmengen von LGS. Insbesondere sehen wir, dass ein homogenes LGS lediglich nur ein Spezialfall eines inhomogenen LGS ist, wobei wir  $v_0$  durch  $0_V$  ersetzen können und die Lösungsmenge durch  $\ker(T_A)$  gegeben ist.

Eine sehr natürliche Frage ist: Wie wissen wir, ob ein homogenes LGS nichttriviale Lösungen hat? Also wie wissen wir, ob  $\ker(T_A) = \{0_V\}$ ? Diese Frage hängt auch damit zusammen, ob ein LGS eine eindeutige oder mehrere Lösungen hat. Diese Frage können wir mit *linearen Unabhängigkeit* beantworten.

**Lemma 6.10.** *Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$ , dann ist  $\ker(A) = \{0_{K^n}\}$  genau dann, wenn die Spalten von  $A$  linear unabhängig sind.*

*Beweis.* Folgt direkt aus der Definition von Matrix-Vektor Multiplikation und vom Kern.

□

Aus Proposition 6.9 folgt, dass ein LGS genau dann eine eindeutige Lösung hat, wenn die Spalten von  $A$  linear unabhängig sind. Bis jetzt haben wir die Grundeigenschaften von LGS und den Zusammenhang mit linearen Abbildungen vollständig verstanden.

## 6.4 Mehr zu linearer Unabhängigkeit

**Definition 6.11.** Es sei  $K$  ein Körper  $A \in M_{n \times n}(K)$ .  $A$  heisst **nilpotent** mit **Nilpotenzgrad**  $m \in \mathbb{N}$  falls  $A^m = 0$  und  $A^{m-1} \neq 0_{n \times n}$ .

**Übung 6.12.** Es seien  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  nilpotent mit Nilpotenzgrad  $m$ . Zeigen Sie, dass es  $v \in \mathbb{R}^n$  existiert, sodass  $v, Av, \dots, A^{m-1}v$  linear unabhängig sind.

[**Hinweis.** Wähle den Vektor  $v$  durch  $A^{m-1} \neq 0$ .]

*Lösung.* Da  $A^{m-1} \neq 0_{n \times n}$ , ist  $\ker(T_A) \neq \mathbb{R}^n$  und es gibt  $v \in \mathbb{R}^n \setminus \ker(T_A)$ , also  $A^{m-1}v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ . Wir wollen zeigen, dass  $v, Av, \dots, A^{m-1}v$  linear unabhängig sind, d. h. dass die Gleichung

$$\lambda_0 v + \lambda_1 Av + \dots + \lambda_{m-1} A^{m-1}v = 0$$

nur die triviale Lösung  $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{m-1} = 0$  hat. Nach mehrmaliger Anwendung von

$A$  bekommen wir:

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 v + \lambda_1 A v + \cdots + \lambda_{m-3} A^{m-3} v + \lambda_{m-2} A^{m-2} v + \lambda_{m-1} A^{m-1} v &= 0 \\
 \lambda_0 A v + \lambda_1 A^2 v + \cdots + \lambda_{m-3} A^{m-2} v + \lambda_{m-2} A^{m-1} v &= 0 \\
 \lambda_0 A^2 v + \lambda_1 A^3 v + \cdots + \lambda_{m-3} A^{m-1} v + \lambda_{m-2} A^m v &= 0 \\
 &\vdots \\
 \lambda_0 A^{m-2} v + \lambda_1 A^{m-1} v &= 0 \\
 \lambda_0 A^{m-1} v &= 0
 \end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgt, dass  $\lambda_0 = 0$ , und aus der zweiten letzten,  $\lambda_1 = 0$ . Wir gehen durch alle Gleichungen und erhalten am Ende  $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1} = 0$ , was zu beweisen war.  $\square$

# Übungsstunde 7

---

## Basis von Vektorräumen

---

03.11.2025

### 7.1 Quiz 5

Sei  $V$  ein Vektorraum über einem Körper  $K$ . Welche der folgenden Aussagen gelten im Allgemeinen?

1. Für alle linear **abhängig** (über  $K$ ) Menge  $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  gibt es  $j \in \{1, \dots, n\}$  sodass  $S \setminus \{v_j\}$  linear **unabhängig** über  $K$  ist.
2. Für alle linear **abhängig** (über  $K$ ) Menge  $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  gibt es  $j \in \{1, \dots, n\}$  sodass  $\text{span}(S \setminus \{v_j\}) = \text{span}(S)$ .
3. Für alle  $d \geq 0$ , die folgenden Polynome vom Grad  $d$  sind linear **unabhängig** über  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^d \\ & x + x^2 + x^3 + \cdots + x^d \\ & x^2 + x^3 + \cdots + x^d \\ & \vdots \\ & x^d. \end{aligned}$$

*Lösung.*

1. Falsch. Gegenbeispiel:  $\{(1, 0), (2, 0), 3, 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ .
2. Wahr. Siehe Vorlesung.
3. Wahr.

□

### 7.2 Besprechung Serie 6

1. Aufgabe 4 ist sehr ähnlich zu was wir letzte Woche gemacht haben. Der Unterschied ist, dass der Vektor  $x$  fix ist und wir eine Matrix  $A$  auf  $Ax$  abbilden. Diese Abbildung ist ebenfalls linear, wir sind also in einer guten Situation. Obwohl diese Aufgabe nicht

besonders schwer ist, wollte ich einiges dazu sagen. Wir wissen dass Matrizen linearen Abbildungen entsprechen, somit können wir die Abbildung als  $T_A \mapsto T_A(x)$  auffassen für fixes  $x$ . Allgemeiner können wir die lineare Abbildung  $T \mapsto T(x)$  für beliebige lineare Abbildungen betrachten, die im gewissen Sinne „dual“ zu  $x \mapsto T(x)$  ist. Diese Idee ist zentral in der linearen Algebra, wie ihr später noch sehen werdet.

2. Für Aufgabe 6 habt manche von euch nur eine endliche Menge als Basis geschrieben. Leider sind beide Vektorräume unendlich dimensional. Wichtig: das  $N$  in der Definition der Vektorräume ist keine fixe Zahl für alle Vektoren/Folgen, sondern hängt von der Folge ab und kann beliebig gross sein. Daher ist eine endliche Basis nicht genug.

### 7.3 Basis

**Übung 7.1.** Betrachten Sie die folgenden Unterräume von  $\mathbb{R}^4$ :

$$\begin{aligned} U &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}, \\ V &:= \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4, x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0\}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von

- a)  $U$ ,
- b)  $V$ ,
- c)  $U \cap V$ .

*Lösung.* a)  $U$  ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems mit einer Gleichung

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 0.$$

Zur Parametrisierung wählen wir  $x_1, x_3, x_4$  als freie Parameter. Aus der Gleichung folgt

$$x_2 = 2x_3 - x_4.$$

Damit lässt sich ein Vektor  $x \in U$  schreiben als

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher bilden die Vektoren

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von  $U$ . So ist  $\dim U = 3$ .

- b)  $V$  ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Aus  $x_1 = x_4$  folgt durch Einsetzen in die zweite Gleichung

$$x_4 + x_2 - 2x_3 - x_4 = x_2 - 2x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3.$$

Wir wählen  $x_3$  und  $x_4$  als freie Parameter. Dann gilt

$$x = \begin{pmatrix} x_4 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher bilden die Vektoren

$$b^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von  $V$ . Folglich ist  $\dim V = 2$ .

- c) Ein Vektor  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  liegt in  $U \cap V$ , genau dann, wenn er alle drei Gleichungen erfüllt:

$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Aus  $x_1 - x_4 = 0$  folgt  $x_1 = x_4$ . Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, erhält man

$$x_4 + x_2 - 2x_3 - x_4 = x_2 - 2x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_3.$$

Nun überprüft man die erste Gleichung:

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 2x_3 - 2x_3 + x_4 = x_4 = 0.$$

Also muss  $x_4 = 0$  und damit  $x_1 = 0$ . Damit bleibt  $x_3$  als freier Parameter und

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$c^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von  $U \cap V$  und wir erhalten  $\dim U \cap V = 1$ .

□

**Übung 7.2.** Es sei  $V = \mathbb{R}[x]_3$  der Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 3$ . Man betrachte  $W = \{p \in \mathbb{R}[x]_3 : p(0) = p(1) = 0\} \subseteq V$ .

1. Man zeige, dass  $W$  ein Unterraum von  $V$  ist.
2. Man bestimme eine Basis von  $W$ . Was ist die Dimension von  $W$ ?

*Lösung.*

1. Man kann natürlich die Unterraumaxiome überprüfen, aber mit was wir letzte Woche gesehen haben, haben wir bessere Werkzeuge, mit denen wir die Struktur eines Unterraums bestimmen können. Definiere  $T : \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch

$$p \mapsto (p(0), p(1)).$$

Man prüft, dass diese Abbildung linear ist. Somit ist  $W = \ker T$  ein Unterraum.

2. Ein Polynom aus  $\mathbb{R}[x]_3$  sieht wie folgt aus  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ . Damit  $p \in W$  muss gelten

$$p(0) = a_0 = 0 \implies a_0 = 0,$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \implies a_3 = -(a_0 + a_1 + a_2) = -(a_1 + a_2).$$

Es wir erhalten

$$p(x) = a_1x + a_2x^2 - (a_1 + a_2)x^3 = a_1(x - x^3) + a_2(x^2 - x^3).$$

Eine Basis von  $W$  ist somit  $\{x - x^3, x^2 - x^3\}$  und die Dimension von  $W$  ist  $\dim(W) = 2$ .

□

In Übung 7.2 haben wir eine lineare Abbildung definiert, wobei  $\text{im}(T) = \mathbb{R}^2$ , weil  $T(1) = (1, 1)$  und  $T(x) = (0, 1)$  eine Basis von  $\mathbb{R}^2$  bilden. Also gilt

$$\dim V = 4, \quad \dim \ker(T) = 2, \dim \text{im}(T) = 2.$$

Insbesondere ist  $\dim V = \dim \ker(T) + \dim \text{im}(T)$ . In Übung 7.1 (a), können wir auch eine lineare Abbildung definieren, nämlich  $T' : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $T'(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 - 2x_3 + x_4$ . So ist  $\ker(T') = U$ ,  $\text{im}(T') = \mathbb{R}$  und

$$\dim \mathbb{R}^4 = 4, \quad \dim \ker(T') = 3, \dim \text{im}(T') = 1.$$

Es gilt ebenfalls  $\dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker(T') + \dim \text{im}(T')$ . Man könnte vermuten, dass diese Formel allgemein gelten könnte, was intuitiv auch Sinn macht: Die Vektoren im Kern gehen durch die Abbildung verloren, also wir können sie nicht mehr im Bild finden, entsprechend muss das Bild klein sein wenn der Kern gross ist. Dies ist tatsächlich der Fall und es gilt folgendes Theorem.

**Theorem 7.3** (Rank-Nullity Theorem). *Es seien  $V, W$  endlich-dimensionale Vektorräume über  $K$ , und es sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\dim_K V = \dim_K \ker(T) + \dim_K \text{im}(T).$$

Dieses Theorem kann man mit einer Basis von  $V$  Beweis, ihr werdet den Beweis später in der Vorlesung sehen. Ich wollte es hier erwähnen, weil es genau unsere Beobachtung und Intuition über lineare Abbildungen erklärt.

## 7.4 Das Auswahlaxiom

Die Existenz einer Basis von einem endlich-dimensionalen Vektorraum ist leicht zu zeigen. Im Allgemeinen ist es aber gar nicht trivial, dass jeder Vektorraum eine Basis hat. Man könnte versuchen, dasselbe Argument wie im endlich-dimensionalen Fall anzuwenden, was man aber bekommt ist, dass man potenziell unendlich oft Elemente auswählen muss und der Prozess hört einfach nie auf. Man erhält also nie eine vollständige Basis, wenn der Vektorraum unendliche dimensionale ist. So muss einige Annahmen treffen, um so etwas zu ermöglichen. Genau deswegen brauchen wir das Auswahlaxiom. Das Auswahlaxiom ist beweisbar aus anderen Sätzen, sonder muss angenommen werden.

**Auswahlaxiom.** Sei  $\mathcal{F}$  eine Familie von nicht leeren Mengen. Dann existiert eine Funktion

$$f : \mathcal{F} \longrightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{F}}$$

mit  $f(A) \in A$  für alle  $A \in \mathcal{F}$ .

**Bemerkung 7.4.**  $f$  wird eine Auswahlfunktion genannt, es wählt für jedes  $A \in \mathcal{F}$  ein Element  $f(A) \in A$  aus.

In der Praxis werden oft äquivalente Formen des Auswahlaxioms verwendet. Wir werden uns hauptsächlich mit dem folgenden Teichmüller Prinzip beschäftigen. Hier müssen wir zuerst einige Sachen definieren. Obwohl ich hier allgemeinere Definitionen gebe als was wir in der Übung gemacht haben, genügt es eigentlich zu wissen, das die Inklusion auch eine Partialordnung ist, insbesondere können wir ein maximales Element einer Familie von Mengen bezüglich der Inklusion definieren.

**Definition 7.5.** Eine Menge  $P$  zusammen mit einer binären Relation  $\leq$  ist eine **Partialordnung**, falls die Relation  $\leq$  reflexiv ( $x \leq x$ ), anti-symmetrisch (aus  $x \leq y$  und  $y \leq x$  folgt  $x = y$ ), und transitiv (aus  $x \leq y$  und  $y \leq z$  folgt  $x \leq z$ ) ist.

**Definition 7.6.** Sei  $(P, \leq)$  eine Partialordnung.  $x \in P$  heisst ein **maximales Element**, falls aus  $x \leq y$  immer  $x = y$  folgt.

**Definition 7.7.** Eine Familie  $\mathcal{F}$  von Mengen hat **endlichen Charakter**, falls für jede Menge  $x \in \mathcal{F}$  gilt,  $x$  ist in  $\mathcal{F}$  genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von  $x$  in  $\mathcal{F}$  ist.

# Übungsstunde 8

---

## Teichmüller Prinzip und Existenz von Basis

---

10.11.2025

### 8.1 Besprechung Serie 7

Es gibt eine sehr intuitive Erklärung, wieso die Dimension von  $U$  in Aufgabe 4 gleich 4 ist. Es ist klar, dass die Dimension des gesamten Vektorraums von allen Abbildungen  $f : \mathbb{F}_5 \rightarrow \mathbb{F}_5$  5 ist. Wenn wir verlangen

$$\sum_{i=0}^4 f(i) = 0,$$

können wir  $f(\bar{0})$  bis  $f(\bar{3})$  immer noch frei wählen,  $f(\bar{4})$  kann aber nur einen bestimmten Wert haben, nachdem wir  $f(\bar{0})$  bis  $f(\bar{3})$  festgelegt haben. Der „Freiheitsgrad“ ist jetzt 4, daher ist  $\dim U = 4$ .

### 8.2 Teichmüller Prinzip und Existenz von Basis

**Teichmüller Prinzip.** Ist  $\mathcal{F}$  eine nicht-leere Familie von Mengen mit endlichem Charakter, so hat  $\mathcal{F}$  ein bezüglich  $\subseteq$  maximales Element.

**Satz 8.1.** *Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraums  $V$  enthält eine Basis von  $V$ .*

*Beweis.* Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$  und  $E$  ein Erzeugendensystem von  $V$ . Definiere

$$\mathcal{F} : \{X \in E : X \text{ ist linear unabhängig}\}.$$

Dann hat  $\mathcal{F}$  endlichen Charakter: Sei  $X \in \mathcal{F}$  und  $A \subseteq X$  eine endliche Teilmenge. Dann ist  $A$  klarerweise linear unabhängig. Sei umgekehrt alle endliche Teilmenge von  $X$  linear unabhängig. Angenommen gibt es  $x_1, \dots, x_n \in X$  und  $\alpha_1, \alpha_n \in K$  mit

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0.$$

Dann ist  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$  eine endliche Teilmenge (Hier sieht man, wie wichtig es ist, dass wir nur *endliche* Linearkombinationen erlauben! Sonst hätten wir möglicherweise eine un-

endliche Menge hier.), welche per Annahme linear unabhängig ist. Daraus folgt  $\alpha_1, \dots, \alpha_n = 0$  und  $X$  ist linear unabhängig. Somit ist  $X \in \mathcal{F}$ .

Nach dem Teichmüller Prinzip enthält  $F$  also eine maximale Menge  $M$  bezüglich Inklusion. Nach Definition von  $F$  ist  $M$  linear unabhängig und wegen der Maximalität ist  $M$  erzeugend (Wäre  $M$  nicht erzeugend, liesse es sich zu einer grösseren linear unabhängigen Menge erweitern.). Somit ist  $M$  eine Basis von  $V$ .  $\square$

**Korollar 8.2.** *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.*

*Beweis.* Klar, da jeder Vektorraum insbesondere ein Erzeugendensystem ist.  $\square$

### 8.3 Zeilen- und Spaltenräume

**Definition 8.3.** Der **Spark** einer Matrix  $A \in M_{m \times n}(K)$  ist die minimale Anzahl von Spalten die eine linear abhängige Menge bilden.

**Bemerkung 8.4.** Wir schreiben  $\text{rk}(A)$  für den Zeilen- und Spaltenrang (row and column rank) der Matrix  $A$ . Ihr werdet später beweisen, dass Zeilenrang gleich Spaltenrang ist.

**Übung 8.5.** Sei  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  Zeigen Sie:

- Der Spark ist durch die folgende Formel gegeben:

$$\text{spark}(A) = \begin{cases} \min\{\|v\|_0 : v \neq 0, Av = 0\}, & \text{falls die Menge nicht leer ist,} \\ n + 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für alle  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  gilt  $\text{spark}(A) \leq \text{rk}(A) + 1$ , und es gibt  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$  mit  $\text{spark}(A) < \text{rk}(A) + 1$ . (Dies zeigt, dass der Spark und der Rang wesentlich verschiedene Begriffe sind.)

[**Hinweis.**  $\|v\|_0 = |\{v_i : v_i \neq 0\}|$ .]

*Lösung.* 1. Angenommen, es gibt  $k$  linear abhängige Spalten von  $A$ , d.h. es existiert  $S \subseteq [n]$  mit  $|S| = k$ , sodass

$$\sum_{i \in S} c_i \phi_i = 0.$$

Setzt man  $v \in \mathbb{C}^n$  so, dass  $v_i = c_i$  für  $i \in S$  und  $v_i = 0$  sonst, erhält man  $Av = 0$ , also  $\text{spark}(A) \leq k$ .

Analog kann man, ausgehend von  $v \in \mathbb{C}^n$  mit  $Av = 0$ , ein  $(c_i)$  konstruieren, das die obige Gleichung erfüllt, wodurch gezeigt wird, dass es  $\text{spark}(A)$  viele Spalten gibt, die linear abhängig sind.

Falls es kein solches  $v$  gibt, kann es keine linear abhängigen Vektoren geben, und umgekehrt.

2. Wenn  $\text{rk}(A) = n$ , folgt dies per Definition. Daher nehmen wir an, dass  $\text{rk}(A) < n$  gilt. Sei  $C$  die grösste Menge von Spaltenvektoren, die linear unabhängig sind. Dann hat  $C$  die Kardinalität  $\text{rk}(A)$ , sodass das Hinzufügen einer weiteren Spalte eine Menge linear abhängiger Vektoren erzeugen würde. Daher gilt

$$\text{spark}(A) \leq \text{rk}(A) + 1.$$

Für  $n > 1$  ist  $A = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  mit  $\phi_1 = e_1$  und  $\phi_2, \dots, \phi_n = 0_{\mathbb{C}^m}$  ein Beispiel mit  $\text{spark}(A) < \text{rk}(A) + 1$ , da  $\text{spark}(A) = 1$  und  $\text{rk}(A) = 1$ .

□

## 8.4 Weitere Übungsaufgaben

**Übung 8.6.** Betrachten Sie die folgenden Unterräume von  $K^n$ :

$$U := \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0 \right\}, \quad D := \{(\alpha, \dots, \alpha) \in K^n \mid \alpha \in K\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Unterräume  $U$ ,  $D$ ,  $U \cap D$  und  $U + D$ . [**Hinweis.** Es kommt darauf an, welcher Körper  $K$  ist. Versuche Argumente über die Dimension zu verwenden, manchmal geht es schneller so.]

*Lösung.* Für  $n = 0$  ist  $U = D = U \cap D = U + D = 0$ . Jeder dieser Unterräume hat also die Basis  $\emptyset$  und folglich die Dimension 0.

Sei nun  $n \geq 1$ . Jedes Element  $(\alpha, \dots, \alpha) \in D$  ist ein Vielfaches des Vektors  $v := (1, \dots, 1)$ . Wegen  $v \neq 0$  ist  $\{v\}$  ein minimales Erzeugendensystem, also eine Basis von  $D$ . Insbesondere ist  $\dim(D) = 1$ .

Sodann liegen die  $n - 1$  Vektoren

$$v_1 = (1, -1, 0, \dots, 0), \quad v_2 = (0, 1, -1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad v_{n-1} = (0, \dots, 0, 1, -1)$$

in  $U$  und sind linear unabhängig. Insbesondere ist also  $\dim(U) \geq n - 1$ . Wegen  $(1, 0, \dots, 0) \notin U$  ist aber  $\dim(U) < \dim(K^n) = n$  und wir schliessen  $\dim(U) = n - 1$ . Da die Vektoren

$v_1, \dots, v_{n-1}$  linear unabhängig sind und ihre Anzahl gleich der Dimension von  $U$  ist, bilden sie eine Basis von  $U$ .

Wenn  $n \cdot 1 \neq 0$  ist in  $K$ , gilt  $v = (1, \dots, 1) \notin U$ . In diesem Fall gilt  $U \cap D = 0$ , also ist  $\emptyset$  eine Basis von  $U \cap D$  und  $\dim(U \cap D) = 0$ . Wegen  $U = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$  folgt ausserdem, dass die Vektoren  $v, v_1, \dots, v_{n-1}$  linear unabhängig sind. Das zeigt  $\dim(U + D) \geq n$ . Da aber  $\dim(U + D) \leq \dim(K^n) = n$  ist, schliessen wir, dass  $U + D$  Dimension  $n$  hat und die Vektoren  $\{v, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  eine Basis von  $U + D$  bilden.

Wenn  $n \cdot 1 = 0$  ist in  $K$ , gilt  $v = (1, \dots, 1) \in U$ , also auch  $D \subset U$ . In diesem Fall ist also  $U \cap D = D$  und  $U + D = U$ . Für beide Unterräume wurde oben eine Basis und die Dimension bestimmt.  $\square$

# Übungsstunde 9

## Summe von Vektorräumen, Komplement

17.11.2025

### 9.1 Besprechung Serie 8

1. Aufgabe 3 (d): In 3 (c) haben wir eine Basis von  $U = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z + iw = 0\}$  gefunden, nämlich  $\{(1, i)\}$ . Wir bemerken, dass die Menge leider keine Basis von  $U$  als einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum ist. Z.B. ist  $(i, -1)$  nicht in  $\text{span}_{\mathbb{R}}\{(1, i)\}$ , daher müssen wir uns eine neue Basis aussuchen. Jeder Vektor in  $U$  hat die Form

$$v = (a + bi)(1, i) = a(1, i) + b(i, -1).$$

Somit spannen  $(1, i)$  und  $(i, -1)$  genau  $U$  auf (als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum), die sind tatsächlich  $\mathbb{R}$ -linear unabhängig, und somit eine Basis von  $U$ .

2. Aufgabe 5 ist sehr interessant. Man bemerkt, dass es im Allgemeinen sehr schwer ist, die Dimension eines Vektorraums zu finden, besonders wenn man sich mit unendlich dimensionalen Vektorräumen beschäftigt. Hier gehen wir einmal durch den gesamten Prozess.

Wir verwenden den Ansatz  $f(x) = e^{\lambda x}$ . Durch das einsetzen von  $f(x) = e^{\lambda x}$  finden wir das charakteristische Polynom von dieser Gleichung

$$1 + \lambda^2 = 0 \iff \lambda = \pm i.$$

Die Vermutung ist,  $f$  muss die Form  $Ae^{ix} + Be^{-ix}$  haben. Zuerst schreiben wir das um als  $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$ , da wir lediglich reelle Lösungen brauchen. Jetzt verwenden wir den Hinweis, der aus dem Satz von Picard-Lindelöf folgt. Wir betrachten die Funktion

$$g(x) = f(x) - f(0) \cos(x) - f'(0) \sin(x),$$

dann gilt

$$g(0) = f(0) - f(0) = 0$$

und

$$g'(0) = f'(0) - f'(0) = 0.$$

So ist  $g \equiv 0$  und jede Lösung  $f$  muss eine Linearkombination von  $\cos(x)$  und  $\sin(x)$  sein.

## 9.2 Wiederholung

**Definition 9.1.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U, W \subseteq V$  Unterräume. Die **Summe**  $U + W$  von  $U$  und  $W$  ist definiert als

$$U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}.$$

**Proposition 9.2.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U, W \subseteq V$  Unterräume. Dann ist  $U + W = \text{span}(U \cup W)$  und es gilt

$$\dim U + W = \dim U + \dim W - \dim U \cap W.$$

**Definition 9.3.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein Unterraum. Ein Unterraum  $W \subseteq V$  ist ein **Komplement** von  $U$  falls  $U + W = V$  und  $U \cap W = \{0_V\}$ .

**Bemerkung 9.4.** Es gibt keine kanonische Wahl von Komplement! Aber wenn es auf dem Vektorraum ein inneres Produkt definiert ist, kann man von dem *orthogonalen Komplement* sprechen — es gibt nur eine Wahl für dies.

**Theorem 9.5.** Seien  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum und  $v_1, \dots, v_n \in V$  eine Basis von  $V$ . Seien  $w_1, \dots, w_n \in W$  beliebige Vektoren. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung  $T : V \rightarrow W$  sodass  $T(v_i) = w_i$  für alle  $1 \leq i \leq n$ .

**Lemma 9.6.** Für alle linearen Abbildungen  $T : K^n \rightarrow K^m$  gibt es eine Matrix  $A \in M_{m \times n}(K)$  mit  $T = T_A$ .

## 9.3 Summe von Vektorräumen, Komplement

Ihr habt die Formel für  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$  in der Vorlesung gesehen. Kann man diese Formel noch verallgemeinern?

**Übung 9.7.** Gilt für drei Unterräume  $U, W, X$  von  $V$  die folgende Formel (9.1)?

$$\begin{aligned} \dim(U + W + X) &= & (9.1) \\ \dim U + \dim W + \dim X - \dim(U \cap W) - \dim(U \cap X) - \dim(V \cap X) + \dim(U \cap W \cap X) \end{aligned}$$

Beweisen Sie oder widerlegen Sie.

*Lösung.* Nein, diese Formel ist im Allgemeinen falsch. Hier ist ein Gegenbeispiel für  $V = \mathbb{R}^2$ .

Wir betrachten die drei ein-dimensionalen Unterräume

$$U = \langle e_1 \rangle, \quad W = \langle e_2 \rangle, \quad X = \langle e_1 + e_2 \rangle.$$

Dann ist  $U + W + X = \mathbb{R}^2$ , und

$$U \cap W = W \cap X = X \cap U = X \cap W \cap X = \{0\},$$

d.h. in (9.1) erhalten wir  $2 = 3!$

□

**Übung 9.8.** Sei  $V$  ein Vektorraum. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

- (a) Für jedes Erzeugendensystem  $S$  von  $V$  gilt  $\dim_K(V) \leq |S|$ .
- (b) Für jede linear unabhängige Teilmenge  $S$  von  $V$  gilt  $|S| \leq \dim_K(V)$ .
- (c) Es gilt  $\dim_K(V) = |V|$ .
- (d) Für jede Teilmenge  $S \subset V$  gilt  $\dim_K(\langle S \rangle) \leq \dim_K(V)$ .

*Lösung.* (c). Für jeden Körper  $K$  ist  $\dim_K(K) = 1$ , aber  $|K| > 2$ ; darum ist (c) falsch. Die übrigen Aussagen folgen aus den grundlegenden Sätzen der Vorlesung.

□

**Übung 9.9.** Welche Aussage gilt für alle Unterräume  $U$  und  $V$  der Dimension 2 von  $\mathbb{R}^3$ ?

- (a)  $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 1$
- (b)  $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 2$
- (c)  $1 \leq \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) \leq 2$
- (d)  $\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 3$

*Lösung.* (c). Aus dem Dimensionssatz ergibt sich

$$\dim_{\mathbb{R}}(U + V) + \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = \dim_{\mathbb{R}}(U) + \dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 + 2 = 4.$$

Zudem ist  $U + V$  ein Unterraum von  $\mathbb{R}^3$  und hat damit Dimension  $\leq 3$ . Zusätzlich ist  $U \cap V$  ein Unterraum von  $U$  und hat daher Dimension  $\leq 2$ . Daraus folgen die Möglichkeiten

$$\dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 2 \text{ und } \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 2 \quad \text{oder} \quad \dim_{\mathbb{R}}(U + V) = 3 \text{ und } \dim_{\mathbb{R}}(U \cap V) = 1.$$

Beide Möglichkeiten können vorkommen, nämlich der erste Fall, wenn  $U = V$  ist, und der zweite Fall, wenn  $U$  ein Komplement von  $V$  enthält.  $\square$

**Übung 9.10.** Sei  $V$  ein Vektorraum und  $U \subset V$  ein Unterraum. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

- (a)  $U$  besitzt ein Komplement in  $V$ .
- (b) Sei  $W$  ein Komplement von  $U$ . Dann ist  $U$  ein Komplement von  $W$ .
- (c) Für jedes Komplement  $W$  von  $U$  und jedes Komplement  $U'$  von  $W$  gilt  $U' = U$ .
- (d) Jedes Komplement  $W$  von  $U$  hat Dimension  $\dim_K(W)$ , für die  $\dim_K(W) + \dim_K(U) = \dim_K(V)$  gilt.

*Lösung.* (c). Im Allgemeinen ist ein Komplement eines Unterraumes alles andere als eindeutig. Ein Beispiel ist  $V := \mathbb{R}^2$  und  $U := \langle (1, 0) \rangle$  und  $W := \langle (0, 1) \rangle$ . Dann ist  $U' := \langle (1, 0) \rangle$  ein Komplement von  $W$ , aber  $U \neq U'$ . Tatsächlich ist sogar  $U'$  ein Komplement von  $U$ .  $\square$

**Übung 9.11.** Sei der Unterraum  $U := \langle (1, 0, 1) \rangle$  von  $\mathbb{R}^3$  gegeben. Welcher der folgenden Unterräume ist ein Komplement von  $U$  in  $\mathbb{R}^3$ ?

- (a)  $\langle (0, 0, 1), (1, 0, 0) \rangle$
- (b)  $\langle (0, 1, 0) \rangle$
- (c)  $\langle (0, 1, 1), (1, 1, 2) \rangle$
- (d)  $\langle (0, 0, 1), (0, 1, 0) \rangle$

*Lösung.* (d). Ein Komplement von  $U$  muss Dimension

$$\dim(\mathbb{R}^3) - \dim(U) = 3 - 1 = 2$$

haben; damit fällt (b) schon weg. Sowohl (a) wie auch (c) haben einen nichttrivialen Durchschnitt mit  $U$  und können daher kein Komplement sein. Dagegen überprüft man direkt, dass die Vektoren in (d) zusammen mit dem Erzeuger von  $U$  eine Basis von  $\mathbb{R}^3$  bilden; daher ist (d) richtig.  $\square$

# Übungsstunde 10

---

## Lineare Abbildung, Darstellungsmatrix I

---

24.11.2025

### 10.1 Quiz 6

Sei  $V$  ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper  $K$ . Welche der folgenden Aussagen sind wahr im Allgemeinen?

1. Sei  $U \subseteq V$  ein Unterraum mit einem eindeutigen Komplement. Dann gilt  $U = V$  oder  $U = \{0\}$ .
2. Sei  $K = \mathbb{R}$ . Seien  $U, W \subseteq V$  zwei Unterräume sodass  $\dim(U) + \dim(W) \geq \dim(V)$ . Dann ist  $U + W = V$ .
3. Seien  $U_1, U_2$  und  $W$  Unterräume von  $V$  sodass  $U_1 \subseteq U_2$  und  $W$  ein Komplement von  $U_1$  und  $U_2$ . Dann ist  $U_1 = U_2$ .

*Lösung.*

1. **Wahr.** Angenommen ist  $\dim V = 2$  und  $U \neq V$ ,  $U \neq \{0\}$ . Dann ist  $U = \text{span}\{u\}$  für  $u \neq 0$ . Sei  $W$  ein Komplement von  $U$ , dann ist  $W = \text{span}\{w\}$  für  $w \neq 0$ . Nun ist aber  $\text{span}\{u+w\}$  auch ein Komplement von  $U$ : ist  $\alpha(u+w) = \beta u$ , so muss  $\alpha, \beta \neq 0$  gelten und daher

$$w = \frac{1}{\alpha}(\beta u - \alpha u) \in U,$$

Widerspruch.

2. **Falsch.** Betrachte  $V = \mathbb{R}^2$  mir  $U = W = \text{span}\{(1, 0)\}$ . Dann ist  $\dim U + \dim W = 2$  aber  $U + W = U \neq V$ .
3. **Wahr.** Es gilt  $\dim U_1 + \dim W = \dim V = \dim U_2 + \dim W$ . Also  $\dim U_1 = \dim U_2$ , es folgt  $U_1 = U_2$ .

□

### 10.2 Besprechung Serie 9

Es ist mir aufgefallen, dass Aufgabe 6 relativ schwer ist. Insbesondere wegen der unendlich vielen Vektorräume kann es einem schwer fallen, Argumente gut zu formulieren. Die Aufgabe

verlangt auch eine Kombination von Analysis und Lineare Algebra.

In 6 (a) verwendet man einen bekannten Satz aus der Analysis: Eine von unten beschränkte, monoton fallende Folge hat immer einen Grenzwert. Die Folge  $a_n = \dim U_n$  hat genau diese Eigenschaft. Nun sei  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$ , dann gibt es  $N \in \mathbb{N}$  sodass für alle  $n, m \geq N$ ,  $|a_n - a_m| < 1/2$  — eine konvergente Folge ist immer eine Cauchy-Folge. Da  $a_n, a_m \in \mathbb{N}$ , gilt  $a_n = a_m$  für alle  $n, m \neq N$ . Dies impliziert, dass  $U_n = U_m$  für alle  $n, m \geq N$ .

Wir erwarten aber andere Phänomene wenn  $V$  unendlich dimensional ist. Bemerke, dass es trotzdem sein kann, dass die Folge am Ende konstant wird, aber nicht im Allgemeinen. Beispiel: Sei  $C^k(\mathbb{R})$  der Raum der  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}$ , dann haben wir

$$C^0 \supseteq C^1 \supseteq C^2 \supseteq \cdots \supseteq C^k \supseteq \cdots \supseteq \cdots.$$

Jede Inklusion ist strikt, also die Folge stabilisiert nicht.

Wir können eigentlich nicht viel darüber Aussagen, wie sich die Folge verhält. Für die Folge  $U_n = \text{span}\{X^p : p \geq n\}$  gilt

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n = \{0\}.$$

Aber im Beispiel oben erhalten wir

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\mathbb{R}) = C^{\infty}(\mathbb{R}) \neq \{0\},$$

da z.B.  $\exp \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ . Es kann wirklich vieles passieren.

## 10.3 Wiederholung

**Definition 10.1.** Eine lineare Abbildung  $T : V \rightarrow W$  ist ein **Isomorphismus**, falls es eine lineare Abbildung  $S : W \rightarrow V$  gibt, mit  $S \circ T = \text{id}_V$ ,  $T \circ S = \text{id}_W$ .  $V$  ist **isomorph** zu  $W$  wenn es einen Isomorphismus  $T : V \rightarrow W$  gibt, wir schreiben  $V \cong W$ .

**Lemma 10.2.** *Die Umkehrabbildung einer linearen Abbildung ist auch linear. Eine lineare Abbildung ist genau dann ein Isomorphismus, wenn sie bijektiv ist.*

**Lemma 10.3.** *Verknüpfungen von linearen Abbildungen sind wieder linear.*

**Korollar 10.4.** *Zwei endlich dimensionale Vektorräume  $V, W$  sind genau dann isomorph wenn  $\dim V = \dim W$ .*

**Definition 10.5.** Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ . Für  $v \in V$  definieren wir

$$[v]_{\mathcal{B}} = (a_1, \dots, a_n) \in K^n,$$

wobei  $a_1, \dots, a_n$  die (eindeutigen) Koeffizienten in der linearen Kombination  $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$  sind. Wir schreiben  $\Phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow K^n$  für  $\Phi_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}$ .

**Proposition 10.6.**  $\Phi_{\mathcal{B}}$  ist ein Isomorphismus.

**Bemerkung 10.7.** Die Umkehrabbildung ist gegeben durch  $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(a_1, \dots, a_n) = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$ .

**Bemerkung 10.8.** Obwohl jeder  $n$ -dimensionale Vektorraum isomorph zu  $K^n$  ist, gibt es im Allgemeinen keinen *kanonischen* Isomorphismus. Wir haben eine Basis gebraucht, um  $\Phi_{\mathcal{B}}$  zu definieren. Es gibt jedoch Vektorräume, die zu einander kanonisch isomorph sind. Ein solches Beispiel werdet ihr später sehen.

## 10.4 Linearität und der Grundkörper

Mit der folgenden Übung wollen wir klarmachen, dass die Linearität im Allgemeinen von dem Grundkörper abhängt. Für ein weiteres Beispiel und mehr zu dem Zusammenhang zwischen  $\mathbb{R}$ - und  $\mathbb{C}$ -Linearität findet ihr in [Wan24].

**Übung 10.9.** Es sei  $V = \mathbb{C}$  und  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $F(z) = \bar{z}$ .

1. Betrachte  $V$  als einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Ist  $F$  linear? Beweisen Sie die Ihre Behauptung.
2. Betrachte  $V$  als einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Ist  $F$  linear? Beweisen Sie die Ihre Behauptung.

*Lösung.*

1. Seien  $z_1, z_2 \in V$ , dass gilt  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ . Weiter seien  $z \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  (Wichtig!  $\lambda$  muss *reell* sein!), wir haben  $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$ .
2. Es gilt  $\overline{iz} = -i\overline{z} \neq i\overline{z}$  für  $z \neq 0$ .

□

## 10.5 Anwendungen von Rank-Nullity Theorem

**Übung 10.10.** Es seien  $A \in M_{m \times n}(K)$  und  $B \in M_{n \times r}(K)$ . Man beweise die folgende Formel:

$$\text{rk}(AB) = \text{rk}(B) - \dim(\ker(A) \cap \text{im}(B))$$

[**Hinweis.** Betrachte die Abbildung  $F : \text{im}(B) \rightarrow K^m$ ,  $F(v) = Av$ .]

*Lösung.* Sei  $F$  wie im Hinweis. Dann ist  $\text{im}(F) = \text{im}(AB)$  und  $\ker(F) = \text{im}(B) \cap \ker(A)$ . Somit ist  $\text{rk}(F) = \dim \text{im}(F) = \dim \text{im}(AB) = \text{rk}(AB)$ . Nach dem Theorem 7.3 gilt

$$\dim \text{im}(B) = \text{rk}(F) + \dim \ker(F) \implies \text{rk}(AB) = \text{rk}(B) - \dim(\ker(A) \cap \text{im}(B)).$$

□

# Übungsstunde 11

---

## Darstellungsmatrix II

---

01.12.2025

### 11.1 Quiz 7

Betrachte die lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$v \longmapsto Av$$

für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -7 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme eine Basis vom  $\ker(T)$ .

*Lösung.* Man findet eine Basis durch Gauss-Elimination. Eine mögliche Wahl ist  $\{(2, -3, 1)\}$ .

□

### 11.2 Besprechung Serie 10

Die Serie wurde sehr gut gelöst. Wir werden uns heute mehr auf die Theorie und Beispiele konzentrieren.

### 11.3 Weitere Anwendungen von Rank-Nullity Theorem

**Übung 11.1.** Es seien  $A \in M_{m \times n}(K)$  und  $B \in M_{n \times r}(K)$ . Man beweise die folgende Formel:

$$\text{rk}(AB) \geq \text{rk}(A) + \text{rk}(B) - n.$$

[**Hinweis.** Verwende Übung 10.10.]

*Lösung.* Wir starten mit der Formel  $\text{rk}(AB) = \text{rk}(B) - \dim \ker(F)$ . Für den Kern von  $F$  gilt:  $v \in \ker(F) \implies Av = 0 \implies v \in \ker(A)$ . Somit ist  $\ker(F) \subseteq \ker(A)$  und daher

$\dim \ker(F) \leq \dim \ker(A)$ . Mit der Dimensionsformel für die Matrix  $A \in M_{m \times n}(K)$  finden wir

$$n = \dim \ker(A) + \text{rk}(A) \implies \dim \ker(A) = n - \text{rk}(A),$$

also

$$\dim \ker(F) \leq \dim \ker(A) = n - \text{rk}(A).$$

Mit der Formel  $\text{rk}(AB) = \text{rk}(B) - \dim \ker(F)$  finden wir somit:  $\text{rk}(AB) = \text{rk}(B) - \dim \ker(F) \geq \text{rk}(A) + \text{rk}(B) - n$ .  $\square$

[Die folgende Aufgabe wurde nicht in der Übungsstunde gelöst, weil es einen Begriff betrifft, den nicht in der Vorlesung behandelt wurde. Diese Aufgabe gibt einen alternativen Beweis von Proposition 9.2.]

**Übung 11.2.** In dieser Aufgabe zeigen wir die Dimensionsformel für Summe von Vektorräumen mithilfe von linearen Abbildungen. Es seien  $U$  und  $W$  zwei Unterräume eines endlich dimensionalen Vektorraums  $V$ . Man betrachte die Abbildung  $F : U \times W \rightarrow U + W$  definiert durch  $F(u, w) = u + w$ .

1. Zeige, dass  $F$  linear ist.
2. Zeige,  $\dim \ker(F) = \dim(U \cap W)$ .
3. Folgere aus 2. die Formel

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

*Lösung.*

1. Klar.
2. Der Kern von  $F$  besteht aus den Elementen der Form  $(v, -v)$ , weil  $F(v, -v) = v - v = 0$ . Weil  $v$  sowohl im ersten wie auch im zweiten Eintrag vorkommt, muss  $v \in U$  und  $v \in W$ , d. h.  $v \in U \cap W$ . Folglich  $\ker(F) = \{(v, -v) : v \in U \cap W\}$ . Die Dimension von  $\ker(F)$  ist somit  $\dim \ker(F) = \dim(U \cap W)$ .
3. Aus Theorem 7.3 folgt,

$$\dim U \times W = \dim \ker F + \text{rk } F,$$

da  $\dim U \times W = \dim U + \dim W$ , erhalten wir

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

$\square$

## 11.4 Darstellungsmatrix

**Definition 11.3.** Seien  $V, W$  endlich dimensionale (mit Dimensionen  $n, m$  respektive) Vektorräume und  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  Basen von  $V$  und  $W$ . Die Darstellungsmatrix  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in M_{m \times n}(K)$  ist die eindeutige Matrix sodass  $\Phi_{\mathcal{C}} \circ T \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} = T_A$ , wobei  $A = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ .

**Bemerkung 11.4.** Mit anderen Worten, die  $i$ -te Spalte  $\phi_i$  von  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  ist gegeben durch  $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , wobei  $T(v_i) = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_m w_m$ .

**Proposition 11.5.** Es gilt  $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [Tv]_{\mathcal{C}}$ .

**Beispiel 11.6.** Es sei  $V$  der Vektorraum aller Fibonacci-Folgen und  $S : V \rightarrow V$  die Verschiebungsabbildung. Es sei  $\mathcal{B}$  die Basis  $(F_{1,0}, F_{0,1})$ . Dann ist

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei nun  $\mathcal{C}$  die Basis  $(F_{1,\phi}, F_{1,\psi})$ . In dieser Basis hat  $S$  eine besonders schöne Form: sie ist diagonal:

$$[S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}.$$

Wie hängen die beiden Matrizen zusammen? Was ist speziell an dieser Basis? Diese Fragen werden wir später noch untersuchen.

## 11.5 Matrizenmultiplikation

**Satz 11.7.** Seien  $V, W, U$  endlich dimensionale Vektorräume und  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  Basen von  $V, W, U$ . Für lineare Abbildungen  $T : V \rightarrow W$  und  $S : W \rightarrow U$  es gilt

$$[S \circ T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = [S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$$

Obiger Satz gibt uns auf eine natürliche Weise die Möglichkeit, Matrizenmultiplikation als die „Verknüpfung“ von zwei Matrizen definieren, im Sinne der entsprechenden Abbildungen. Wir machen also die folgende Definition.

**Definition 11.8.** Seien  $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K), B = (b_{ij}) \in M_{n \times p}(K)$ . Das **Produkt** von

$A$  und  $B$  ist die Matrix  $C = (c_{ij}) = AB \in M_{m \times p}(K)$  gegeben durch

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

**Bemerkung 11.9.** Dieses Produkt macht nur Sinn, wenn die Dimensionen der zwei Matrizen kompatibel sind.

**Beispiel 11.10.**

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0 & 5 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \\ 9 \cdot 1 + 10 \cdot 0 + 11 \cdot 1 + 12 \cdot 0 & 9 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 11 \cdot 0 + 12 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 14 \\ 20 & 22 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Bemerkung 11.11.** Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ.

**Übung 11.12.** Es sei  $\mathbb{H}^2$  die obere Hälfte der komplexen Ebene,  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ . Eine normierte Möbius-Transformation ist eine Abbildung  $M : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ ,

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

wobei  $ad - bc = 1$ . Möbius-Transformationen kann man mit  $(2 \times 2)$ -Matrizen wie folgt darstellen:

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \longleftrightarrow [M] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. Zeige, dass  $M$  wohldefiniert ist.
2. Es seien  $M_1$  und  $M_2$  Möbius-Transformationen mit Matrixdarstellungen  $[M_1]$  bzw.  $[M_2]$ . Wie kann man  $[M_2 \circ M_1]$  mithilfe von  $[M_1]$  und  $[M_2]$  darstellen?

*Lösung.*

1. Wir müssen zwei Eigenschaften überprüfen.

**Claim 1.**  $cz + d \neq 0$ .

Wir bemerken, dass  $cz + d = 0$  nur wenn  $c$  und  $d$  beide null sind, dies widerspricht aber der Annahme  $ad - bc = 1$ .

**Claim 2.** Für alle  $z \in \mathbb{H}^2$  ist  $M(z) \in \mathbb{H}^2$ .

Sei  $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$ . Per Definition gilt

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{(ax + b) + iay}{(cx + d) + icy} \\ &= \frac{((ax + b) + iay)((cx + d) - icy)}{(cx + d)^2 + c^2y^2}. \end{aligned}$$

Des Weiteren haben wir,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(((ax + b) + iay)((cx + d) - icy)\right) &= ay(cx + d) - (ax + b)cy \\ &= acxy + ady - acxy - bcy \\ &= (ad - bc)y \\ &= y. \end{aligned}$$

Da  $(cx + d)^2 + c^2y^2 > 0$ , schliessen wir  $\operatorname{Im}(M(z)) > 0$ , also  $M(z) \in \mathbb{H}^2$ .

2. Es seien  $M_1$  und  $M_2$  Möbius-Transformationen mit Matrizen  $[M_1]$  bzw.  $[M_2]$ :

$$[M_1] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \implies M_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1},$$

$$[M_2] = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \implies M_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (M_2 \circ M_1)(z) &= M_2(M_1(z)) \\ &= M_2\left(\frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}\right) \\ &= \frac{a_2 \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} + d_2} \\ &= \frac{a_2(a_1z + b_1) + b_2(c_1z + d_1)}{c_2(a_1z + b_1) + d_2(c_1z + d_1)} \\ &= \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)z + (a_2b_1 + b_2d_1)}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + (c_2b_1 + d_2d_1)}. \end{aligned}$$

Beachte, dass

$$[M_2][M_1] = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung der Komposition  $M_2 \circ M_1$  ist somit gleich dem Produkt der Darstellungsmatrizen von  $M_2$  und  $M_1$ , d. h.

$$[M_2 \circ M_1] = [M_2][M_1].$$

□

Mehr zu Möbius-Transformationen, siehe [Ols10]; mehr zu Möbius-Transformationen in der Funktionentheorie, z.B. Automorphismen der Kreisscheibe, siehe [Wan24].

# Übungsstunde 12

## Basiswechsel

08.12.2025

### 12.1 Quiz 8

Sei  $\mathbb{R}[x]_3$  die Menge von Polynomen mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens 3. Die Mengen

$$\mathcal{A} = \{1 + x^2, x, x + x^2, x^2 + x^3\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$$

sind geordnete Basen von  $\mathbb{R}[x]_3$ . Betrachte die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}[x]_3 &\longrightarrow \mathbb{R}[x]_3 \\ p &\longmapsto p + 2p', \end{aligned}$$

wobei  $p'$  die Ableitung von  $p$  ist. Bestimme die Darstellungsmatrix von  $T$  bezüglich der Basen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ .

*Lösung.* Um die Matrixdarstellung von  $T$  bezüglich der Basen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zu berechnen, müssen wir die Koordinaten von  $T$  angewendet auf jeden Basisvektor in  $\mathcal{A}$  bezüglich  $\mathcal{B}$  bestimmen. Wir berechnen  $T$  auf jedem Basisvektor in  $\mathcal{A}$ :

$$\begin{aligned} T(1 + x^2) &= 1 + 4x + x^2, \\ T(x) &= 2 + x, \\ T(x + x^2) &= 2 + 5x + x^2, \\ T(x^2 + x^3) &= 4x + 7x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} T(1 + x^2) &= -3 \cdot 1 + 3 \cdot (1 + x) + 1 \cdot (1 + x + x^2) + 0 \cdot (1 + x + x^2 + x^3), \\ T(x) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (1 + x + x^2) + 0 \cdot (1 + x + x^2 + x^3), \\ T(x + x^2) &= -3 \cdot 1 + 4 \cdot (1 + x) + 1 \cdot (1 + x + x^2) + 0 \cdot (1 + x + x^2 + x^3), \\ T(x^2 + x^3) &= -4 \cdot 1 - 3 \cdot (1 + x) + 6 \cdot (1 + x + x^2) + 1 \cdot (1 + x + x^2 + x^3). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Matrixdarstellung von  $T$  bezüglich  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$ :

$$[T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

## 12.2 Besprechung Serie 11

Keine.

## 12.3 Invertierbare Matrizen

**Definition 12.1.**  $A \in M_{n \times n}(K)$  ist **invertierbar**, wenn es  $B \in M_{n \times n}(K)$  gibt, mit  $AB = BA = I_n$ .

Wir werden sehen, dass invertierbare Matrizen genau den Isomorphismen entsprechen.

**Proposition 12.2.**  $\mathrm{GL}_n(K)$  bildet eine Gruppe mit der Matrizenmultiplikation als Gruppenoperation.

**Korollar 12.3.** Sei  $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ . Dann hat das LGS  $Ax = b$  eine eindeutige Lösung für alle  $b \in K^n$ , nämlich  $x = A^{-1}b$ .

**Proposition 12.4.** Sei  $A \in M_{m \times n}(K)$ . Dann  $A \in \mathrm{GL}_n(K)$  genau dann wenn  $T_A : K^n \rightarrow K^n$  ein Isomorphismus ist, und es gilt  $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$ .

Erinnerung: Eine normierte Möbius-Transformation ist eine Abbildung  $M : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ ,

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

wobei  $ad - bc = 1$ . Möbius-Transformationen kann man mit  $(2 \times 2)$ -Matrizen wie folgt darstellen:

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \longleftrightarrow [M] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

**Übung 12.5.** Es sei  $M$  eine Möbius-Transformation mit Matrixdarstellung  $[M]$ . Wie lautet die Matrixdarstellung von  $M^{-1}$ ?

*Lösung.* Es gilt

$$y = \frac{az + b}{cz + d} \Rightarrow z = \frac{dy - b}{-cy + a} \Rightarrow M^{-1}(y) = \frac{dy - b}{-cy + a} \Rightarrow [M^{-1}] = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Wegen  $ad - bc = 1$  ist  $[M^{-1}]$  (Matrixdarstellung von  $M^{-1}$ ) genau die inverse Matrix von  $[M]$  (Matrixdarstellung von  $M$ ):

$$[M^{-1}][M] = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & bd - bd \\ -ac + ac & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten:  $[M^{-1}] = [M]^{-1}$ . □

Es stellt sich heraus, dass im Allgemeinen die inverse Matrix einer invertierbaren  $2 \times 2$  Matrix  $A$  durch

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gegeben ist.  $ad - bc$  wird die **Determinante** genannt, und wir schreiben  $\det A = ad - bc$ . Wie ihr in der Übungsserien gesehen habt, hat das LGS  $Ax = b$  für  $b \neq 0$  genau dann eine Lösung, wenn  $\det A \neq 0$  ist. Dies zeigt, dass die Determinante etwas über die Invertierbarkeit aussagt. Die versteckten Eigenschaften werdet ihr nächstes Semester noch studieren.

## 12.4 Basiswechselmatrix

**Korollar 12.6.** Sei  $V$  und  $W$  endlich dimensionale Vektorräume über  $K$ , mit Dimension  $n$  bzw.  $m$ . Seien  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  zwei Basen von  $V$  und  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  zwei Basen von  $W$ . Dann gilt

1.  $[\text{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \text{GL}_n(K)$ ,  $[\text{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} \in \text{GL}_m(K)$ .
2.  $[\text{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = ([\text{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1}$ ,  $[\text{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = ([\text{id}_W]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}})^{-1}$ .
3. Sei  $T : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$[T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} = [\text{id}_W]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [\text{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

**Definition 12.7.** Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über  $K$  mit Basen  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ . Die Matrix  $[\text{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \in \text{GL}_n(K)$  ist die **Basiswechselmatrix** zwischen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}'$ .

**Übung 12.8.** Betrachte die lineare Abbildung  $f : \mathbb{R}[x]_2 \rightarrow \mathbb{R}[x]_2$ ,  $f(p) = xp'$ .

1. Bestimme die Darstellungsmatrix von  $f$  bezüglich der Standard Basis  $\mathcal{B}$ .

2. Bestimme die Darstellungsmatrix von  $f$  bezüglich der Basis  $\mathcal{C} = \{x^2+x, 2x^2+x, 3x^2+2x+x\}$ .
3. Definiert  $f$  einen Isomorphismus?

*Lösung.*

1. Um die Darstellungsmatrix von  $F$  in der Standardbasis zu bestimmen, müssen wir die Bilder der Basiselemente ermitteln:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, \\ f(x) &= x, \\ f(x^2) &= 2x^2. \end{aligned}$$

Die Bilder haben die folgenden Koordinaten in der Standardbasis

$$[f(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f(x^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Darstellungsmatrix ist somit

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Es gilt

$$[\text{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hier kommt aber die Frage: Wie finden wir die inverse Matrix von  $[\text{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ ? Natürlich können wir versuchen, die Standardbasis mit den Basisvektoren in  $\mathcal{C}$  auszudrucken — dies können wir systematisch durch das LGS  $[\text{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}x = e_i$  finden. So müssen wir drei LGS lösen, was nicht so praktisch ist. Wir erinnern uns an Korollar 12.3: Nachdem wir das LGS gelöst haben, bekommen wir immer eine Gleichung der Form (hier schreiben wir  $I_n$  um zu betonen, dass diese Methode nicht von der Dimension abhängig ist)

$$I_n x = x = v_i.$$

Gleichzeitig gilt nach Korollar 12.3 (hier ist  $A$  eine beliebige Matrix in  $\text{GL}_n(K)$ , in

dieser Aufgabe entspricht  $A$  genau  $[\text{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ )

$$x = A^{-1}e_i.$$

D.h.  $v_i = A^{-1}e_i$ . Wir bemerken auch, dass die Schritte in der Gauss-Elimination, durch die wir von  $Ax$  zu  $I_n x$  kommen, immer die gleichen sind. D.h. wir können die Gauss-Elimination für alle  $Ax = e_i$  gleichzeitig durchführen, nämlich

$$A(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n) \rightarrow I_n(x_1, \dots, x_n) = (v_1, \dots, v_n).$$

Da  $(v_1, \dots, v_n) = A^{-1}(e_1, \dots, e_n) = A^{-1}$ , erhalten wir

$$I_n(x_1, \dots, x_n) = A^{-1}.$$

Also wenn wir die „erweiterte“ LGS  $A(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)$  lösen durch Gauss-Elimination, bekommen wir am Ende automatisch die inverse Matrix. Einfacher geschrieben haben wir

$$\left( \begin{array}{c|c} A & I_n \end{array} \right) \xrightarrow{\text{G.E.}} \left( \begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array} \right).$$

Auf diese Weise können wir  $[\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$  bestimmen:

$$[\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = ([\text{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir schliessen, dass

$$\begin{aligned} [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\text{id}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [\text{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

## 12.5 Ähnliche Matrizen

In der Vorlesung habt ihr äquivalente Matrizen kennengelernt und bewiesen, dass äquivalente Matrizen denselben Rang haben. Es gibt ein sehr ähnliches Konzept, nämlich ähnliche Matrizen.

**Definition 12.9.** Zwei Matrizen  $A, B \in M_{n \times n}(K)$  sind **ähnlich**, wenn es  $P \in \mathrm{GL}_n(K)$  existiert, mit  $B = PAP^{-1}$ .

**Übung 12.10.** Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sind  $A$  und  $B$  ähnlich?

Es ja schwer zu sagen, ob zwei Matrizen ähnlich sind. Es ist oft fast unmöglich, nach einer invertierbaren Matrix  $P$  zu suchen, und Argumente über den Rang funktioniert nicht, wenn die zwei Matrizen denselben Rang haben, wie in dieser Übung. Daher versuchen wir, neue Werkzeuge zu entwickeln, um gewissermassen ein Kriterium zu finden. Dafür führen wir den Begriff von Spur ein.

**Definition 12.11.** Sei  $A \in M_{n \times n}(K)$ . Die **Spur** (engl. trace) von  $A$  ist definiert als

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Wenn  $A$  und  $B$  ähnlich sind, gibt es  $P \in \mathrm{GL}_n(K)$  mit  $B = PAP^{-1}$ , also  $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(PAP^{-1})$ . Nun vermuten wir, dass ähnliche Matrizen dieselbe Spur haben:

**Proposition 12.12.** Seien  $A, B \in M_{n \times n}(K)$  und  $A, B$  ähnlich. Dann gilt

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B).$$

Diese Vermutung macht Sinn, wenn wir heuristisch annehmen, dass die Spur vom Produkt zweier Matrizen kommutativ ist, d.h.  $\mathrm{tr}(CD) = \mathrm{tr}(DC)$ . Dann gilt  $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(AP^{-1}P) = \mathrm{tr}(A)$ . Dies ist auch tatsächlich der Fall.

**Lemma 12.13.** Seien  $A, B \in M_{n \times n}(K)$ . Dann gilt

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} \\ &= \text{tr}(BA). \end{aligned}$$

□

*Beweis von Proposition 12.12.* Wir haben  $\text{tr}(B) = \text{tr}(PAP^{-1}) = \text{tr}(AP^{-1}P) = \text{tr}(A)$ . □

*Lösung von Übung 12.10.* Nein,  $A$  und  $B$  sind nicht ähnlich, da

$$\text{tr}(A) = 3 \neq -3 = \text{tr}(B).$$

□

# Literaturverzeichnis

- [Ban25] Afonso S. Bandeira. „Mathematics of Signals, Networks, and Learning“. Vorlesungsskript. 2025.
- [Beu09] Albrecht Beutelspacher. „*Das ist o. B. d. A. trivial!*“. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009. ISBN: 978-3-8348-0771-7.
- [Fig25] Alessio Figalli. „Analysis I: One Variable“. Vorlesungsskript. 2025.
- [Hal24] Lorenz Halbeisen. „Grundstrukturen“. Vorlesungsskript. 2024.
- [Hal25] Lorenz Halbeisen. *Combinatorial Set Theory*. Cham: Springer, 2025. ISBN: 978-3-031-91751-6.
- [ML22] Thomas C. T. Michaels und Marcel Liechti. *Prüfungstraining Lineare Algebra*. Cham: Birkhäuser, 2022. ISBN: 978-3-030-65885-4.
- [Ols10] John Olsen. „The Geometry of Möbius Transformations“. Vorlesungsskript. 2010.
- [Wan24] Ruocheng Wang. „Complex Analysis“. Notizen basiert auf Vorlesungen von Özlem Imamoglu. 2024.
- [Zer24] Sarah Zerbes. „Lineare Algebra“. Vorlesungsskript. 2024.