Übungsstunde 13

Wiederholung

15.12.2025

13.1 Quiz 9

Seien m, n positive ganze Zahlen und $A \in M_{m\times n}(K)$. Wahr oder falsch:

1. Angenommen gibt es $B \in A \in M_{n\times m}(K)$ sodass $BA = I_n$. Dann hat A Spaltenrang n.
2. Angenommen gibt es $C \in M_{n\times m}(K)$ sodass $AC = I_m$. Dann gilt $n < m$.
3. Angenommen gibt es $D \in M_{n\times m}(K)$ sodass $AD = I_m$. Dann hat A Zeilenrang m.

Lösung.

1. **Wahr.** A hat ein Linksinverses, so mit definiert A eine injektive Abbildung $K^n \to K^m$. Somit ist $\ker(A)$ trivial und $\dim \operatorname{im}(A) = n$, die Dimension vom Spaltenraum ist n.
2. **Falsch.** A hat ein Rechtsinverses, also definiert eine surjektive Abbildung $K^n \to K^m$. Somit muss $m \leq n$ gelten.
3. **Wahr.** $AD = I_m$ impliziert $D^T A^T = I_m$. Analog zu 1. hat A^T Spaltenrang m, also der Zeilenrang von A ist m.

□

13.2 Prüfungsaufgaben

Übung 13.1. Die folgende Menge ist linear unabhängig über $\mathbb{R}$

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

(A) Wahr

(B) Falsch

Lösung. **(B)** Es gilt $v_2 - v_3 + v_1 = v_4$. $\square$

Übung 13.2. Sei V ein Vektorraum über K und betrachte $S_1, S_2 \subseteq V$ sodass $S_1 \subseteq S_2$ aber $S_2 \neq S_2$. Wenn S_2 linear unabhängig ist, dann ist S_1 linear unabhängig.

(A) Wahr

(B) Falsch

Lösung. **(A)**. $\square$

Übung 13.3. Seien V, S_1, S_2 wie oben. Wenn S_1 eine Basis von V ist, dann ist S_2 eine Basis von V.

(A) Wahr

(B) Falsch

Lösung. **(B)**. $\square$

Übung 13.4. Eine quadratische Matrix A ist invertierbar genau dann wenn A^T invertierbar ist.

(A) Wahr

(B) Falsch

Lösung. **(A)** Es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. $\square$

Übung 13.5. Der Kern von $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ v \mapsto T(v) := Av$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -9 \\ 1 & -3 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & -3 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

hat Dimension

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

Lösung. **(B)** Die ersten drei Spalten sind linear unabhängig, und es gilt $3v_1+(-7)v_2+5v_3 = v_4$. Die Dimension vom Kern folgt aus der Dimensionsformel. □

Übung 13.6. Betrachte das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{F}_3$

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + (1-a)z = a \\ 2x + ay = 1 \end{cases}.$$

Für welchen Wert von a besitzt das lineare Gleichungssystem Lösungen?

(A) Das lineare Gleichungssystem hat für keinen Wert von a Lösungen.

(B) $a \in \{1, 2\}$

(C) $a \in \{0, 1\}$

Lösung. **(B)** Wir nummerieren die Zeilen mit R_1, R_2, R_3. $R_3 - R_1$ gibt uns $x = 0$, und aus R_1 folgt $ay = 1$, d.h. $a = 1, 2$. Wir müssen nur überprüfen, ob das LGS tatsächlich Lösungen haben in diesen Fällen. Da in beiden Fällen $y = a$ gilt, können wir $z = 0$ setzen, und wir bekommen dir Lösung $(0, a, 0)$. □

Übung 13.7. Sei

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung, welche bezüglich der Standardbasis die Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

hat. Dann ist $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ gleich

(A) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(C) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 37 & 20 & -9 \\ -15 & 0 & 15 \end{pmatrix}$

(D) $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

Lösung. **(C)** Sei $\mathcal{E}$ die Standardbasis. Es gilt

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{E}}^{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen $[\mathrm{id}]_{B}^{\mathcal{E}} = ([\mathrm{id}]_{\mathcal{E}}^{B})^{-1}$ bestimmen. Wir wenden die Gauss-Elimination an

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1-4R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-1/4R_2, R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & -7/4 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & -3/4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & -7/4 \\ 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & -3/4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/4 & -3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 3/4 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & -7/4 \end{array}\right).$$

Jetzt können wir den Darstellungsmatrix berechnen:

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} &= [\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}[\mathrm{id}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -3/2 \\ -1 & 3/2 & 5/2 \\ 1 & -1/2 & -7/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & 0 & 7 \\ 37 & 20 & -9 \\ -15 & 0 & 15 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□