Übungsstunde 5

Vektorräume, Unterräume, Lineare Hüllen

5.1 Quiz 3

Sei K ein Körper und $a \in K^*$. Finde die reduzierte Zeilenstufenform der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 + a & a^4 + a^2 - a \end{pmatrix}.$$

Lösung.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 + a & a^4 + a^2 - a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & a & a^2 - a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 1 & a - 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a - 1 \end{pmatrix}.$$

□

5.2 Besprechung Serie 3 und 4

Serie 3

1. In Aufgabe 2 werden die Elemente eines endlichen Körpers durch $\overline{a}$ ausgedruckt. Diese Notation ist anders wie in der Vorlesung und hat auch eine andere Bedeutung. Wir nehmen $\mathbb{F}_p = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}\}$ für p prim als ein Beispiel. Wir betrachten die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ definiert durch

$$x \sim y \iff x - y = pk, k \in \mathbb{Z} \iff x \equiv y \bmod p.$$

   Erinnerung aus Analysis I: eine Relation heisst eine Äquivalenzrelation wenn sie reflexiv, transitiv, und symmetrisch ist. Basierend auf diese Äquivalenzrelation definieren wir

$$\overline{a} := \{a + pk : k \in \mathbb{Z}\} = a + p\mathbb{Z} = [a]_\sim,$$

also $\overline{a}$ ist die Äquivalenzklasse von a bezüglich diese Relation. Beachte: hier ist $\overline{a}$ eine Menge, nicht nur eine ganze Zahl. $\mathbb{F}_p$ ist die Menge aller Äquivalenzklassen, also

$$\mathbb{F}_p = \{[a]_\sim : a \in \mathbb{Z}\}.$$

Weiter definieren wir auf $\mathbb{F}_p$ $+$ und $\cdot$ durch Repräsentanten:

$$[x]_\sim + [y]_\sim = [x + y]_\sim,$$

$$[x]_\sim \cdot [y]_\sim = [x \cdot y]_\sim.$$

Man prüft, dass die Operationen wohldefiniert sind, d.h. unabhängig von den Repräsentanten. Durch diese Definition ergibt sich derselbe Körper wie ihr in der Vorlesung durch die Additions- und Multiplikationstabellen definiert habt, es ist aber wichtig im Kopf zu halten, dass es hier um Äquivalenzklassen handelt, nicht nur Zahlen. Konstruktionen durch Äquivalenzrelationen sind tauchen überall auf, nicht nur bei der Definition von gewissen Körpern, sonder auch später im Rahmen von Vektorräumen.

2. Aufgabe 6 ist etwa schwer, deshalb wollen wir uns den Beweis genauer anschauen.
   (a) Die Abbildung $m_b(x) = b \cdot x$ ist bijektiv, weil Links- und Rechtsinversabbildungen existieren, beide sind nämlich gegeben durch $m_{b^{-1}}$. Insbesondere ist $m_b(k) = k$. Somit gilt

   $$b \cdot S = b \cdot \sum_{x \in k} x = \sum_{x \in k} b \cdot x = \sum_{\substack{y = b\cdot x \\ x \in k}} y = \sum_{y \in k} y = S,$$

   daraus folgt

   $$(1 - b)S = 0 \quad \forall b \neq 0.$$

   Da k mehr als zwei Elemente hat, gibt es ein $b \in k \setminus \{0, 1\}$ und es muss $S = 0$ gelten.
   (b) Wenn das Inverselement von $x \in k$ ungleich x ist, können wir immer x und x^{-1} als ein Paar betrachten und wir kommen nur eine 1 im Produkt. Daher genügte es, “problematische Elementeßu brachten, also die Elemente mit $x = x^{-1}$, bei denen wir ein solches Paar nicht bilden können. Der wichtigste Punkt ist, dass nur 1 und -1 diese Gleichung erfüllen kann, weil das Polynom

   $$(x + 1)(x - 1) \in k[x]$$

schon 1 und -1 als Nullstellen hat und ein Polynom in $k[x]$ vom Grad 2 höchstens 2 Nullstellen in k besitzen kann. Somit erhalten wir am Ende nur einen Faktor von -1 wegen $-1 \in k$.

Serie 4 Aufgabe 5 ist ein bisschen kompliziert. Es sieht sehr intuitiv aus, braucht aber sorgfältige Begründung. Die Idee ist Kontraposition zu verwenden: wir nehmen an, dass keine Zeile von A kein Vielfaches von der anderen ist, und wollen schliessen, dass $Ax = b$ eine Lösung hat. Also sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Jetzt machen wir eine Fallunterscheidung.

Fall 1: $a \neq 0$. Dann dürfen wir durch a teilen. (Wichtig! Sonst dürfen wir das nicht.) Nach elementaren Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{b}{a} & \frac{\alpha}{a} \\ 0 & 1 & (\beta - \frac{c}{a}\alpha)/(d - \frac{c}{a}b) \end{array}\right)$$

Das Teilen durch $d - \frac{c}{a}b$ ist zulässig wegen der Annahme. Nun hat das LGS eine Lösung, wie gewünscht.

Fall 2: $a = 0$. Falls jetzt $c \neq 0$, haben wir eine ähnliche Situation wie im Fall 1, nach Vertauschen von Zeilen können wir wie vorher vorgehen, so hat das LGS auch eine Lösung. Falls $c = 0$, dass muss mindestens eines von b und d ungleich 0. So haben wir

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & b & \alpha \\ 0 & d & \beta \end{array}\right),$$

aber dann ist eine Zeile immer ein Vielfaches von der anderen, egal welche Werte b und d annehmen.

So schliessen wir, dass das LGS in allen Fällen für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Lösung hat.

5.3 Vektorräume und Unterräume

Hier sind ein paar Nicht-Beispiele.

Beispiel 5.1.

1. Die 1-Sphäre $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

2. Der *affine* Unterraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

3. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen unter Addition, aber nicht unter Skalarmultiplikation.
4. $\{p(x) = ax^2 + bx + c : a \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}[x]$ ist nicht abgeschlossen unter Addition und enthält nicht das Nullelement.
5. $\{f \in C^0(\mathbb{R}) : f(0) = 1\} \subseteq C^0(\mathbb{R})$ enthält die Nullfunktion $f \equiv 0$ nicht.

Übung 5.2. Sei V ein Vektorraum über K. Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(a) Sei $v \in V$, dann ist die Menge

$$W := \{ w \in V \mid \exists \lambda \in K : w = \lambda \cdot v \}$$

ein Unterraum von V.

(b) Eine Teilmenge $W \subseteq V$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $\langle W \rangle = W$.

(c) Seien $S_1, S_2 \subseteq V$ Teilmengen. Dann gilt

$$\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle.$$

(d) Seien $S_1, S_2 \subseteq V$ Teilmengen. Dann gilt

$$\langle S_1 \cap S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle.$$

Lösung. (a) Ja. Sei $v \in V$ und

$$W := \{w \in V \mid \exists \lambda \in K : \ w = \lambda v\}.$$

Dann ist $W = \langle v \rangle$, also die von v erzeugte lineare Hülle, und damit ein Unterraum von V.

(b) „$\Longleftarrow$“: Sei $W \subseteq V$ mit $\langle W \rangle = W$. Da die lineare Hülle $\langle W \rangle$ definitionsgemäss ein Unterraum ist, folgt W ist ein Unterraum.

„$\Longrightarrow$“: Sei W ein Unterraum von V. Dann ist jede endliche Linearkombination von Elementen aus W wieder in W, also $\langle W \rangle \subseteq W$. Die andere Inklusion $W \subseteq \langle W \rangle$ gilt stets, also folgt $\langle W \rangle = W$.

(c) Seien $S_1, S_2 \subseteq V$ Teilmengen. Es gilt

$$\langle S_1 \cup S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle.$$

„$\supseteq$“: Wegen $S_i \subseteq S_1 \cup S_2$ für $i = 1, 2$ folgt $\langle S_i \rangle \subseteq \langle S_1 \cup S_2 \rangle$ für $i = 1, 2$. Da $\langle S_1 \cup S_2 \rangle$ ein Unterraum ist, ist auch die Summe $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$ in $\langle S_1 \cup S_2 \rangle$.
„$\subseteq$“: Wegen $S_i \subseteq \langle S_i \rangle \subseteq \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$ für $i = 1, 2$ gilt $S_1 \cup S_2 \subseteq \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$. Da $\langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$ ein Unterraum ist, enthält er auch alle endlichen Linearkombinationen aus $S_1 \cup S_2$, also $\langle S_1 \cup S_2 \rangle \subseteq \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle$.
Damit folgt die Gleichheit.

(d) Falsch. Betrachte ein Gegenbeispiel in $V = \mathbb{R}^2$. Sei

$$S_1 = \{(1, 0)\}, \qquad S_2 = \{(3, 0)\}.$$

Dann ist $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ und somit $\langle S_1 \cap S_2 \rangle = \langle \varnothing \rangle = \{0\}$. Dagegen sind

$$\langle S_1 \rangle = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \langle S_2 \rangle,$$

also $\langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle = \{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$. Somit ist im Allgemeinen $\langle S_1 \cap S_2 \rangle \neq \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle$.

$\square$

Beispiel 5.3. Sei $A \in M_{m \times n}(K)$ eine Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Man überprüft, dass

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : \alpha_i \in K \ \forall 1 \leq i \leq n \right\}$$

ein Vektorraum ist. Dies wird den **Spaltenraum** von A genannt. Der Spaltenraum spielt eine grosse Rolle, wenn wir später Matrizen als lineare Abbildungen betrachten.

Definition 5.4. Sei $A \in M_{m \times n}(K)$ und $x \in K^n$. Wir definieren die Multiplikation von A mit x als

$$Ax = v \in \mathbb{R}^m,$$

wobei v durch

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

gegeben ist.

Bemerkung 5.5. Alternativ kann man Ax als

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$$

betrachten, wobei v_j für $1 \leq j \leq n$ die Spalten von A sind.

Dadurch sehen wir, ob das LGS $Ax = b$ eine Lösung hat hängt lediglich davon ab, ob b im Spaltenraum von A liegt. Nächste Woche werden wir Matrizen als lineare Abbildungen betrachten und anhand von Eigenschaften der linearen Abbildungen die Lösungsmengen von LGS eingehend studieren.