Übungsstunde 4

Lineare Gleichungssysteme II

4.1 Besprechung Serie 3

Wir wollen jetzt die Lösung von Aufgabe 5 genauer anschauen, und zwar hauptsächlich den Teil, wo man die Existenz eines Inverselements zeigt. Sei $x = a + b\tau \in k[\tau] \setminus \{0 + 0\tau\}$. Wir dürfen annehmen, dass $b \neq 0$, weil sonst $x = a \in k$ gilt und wir können das Inverse von $a \in k$ leicht finden. Wie definieren noch $x' = a - b\tau$, es gilt

$$xx' = a^2 - b^2\alpha.$$

Beachte, dass $xx' \neq 0 + 0\tau$, weil sonst $a^2 = b^2\alpha$ gelten muss, woraus $\tau = \pm a/b \in k$ folgt, dies kann aber nicht sein. So hat xx' ein Inverses $(a^2 - b^2\alpha)^{-1} \in k$. Nun nehmen wir an, dass x ein Inverses hat — wir wollen unter dieser Annahme einen Kandidat für x^{-1} (falls existiert) finden, und dann beweisen, dass das gefundene Element tatsächlich das Inverse von x ist. Es gilt

$$x^{-1}(xx') = x' \quad \Longrightarrow \quad x^{-1} = x'(xx')^{-1}.$$

Wir setzen x' und xx' ein:

$$x^{-1} = (a - b\tau)(a^2 - b^2\alpha)^{-1}.$$

Dieses Element ist jetzt unser Kandidat für x^{-1}. Es bleibt zu zeigen, dass $xx^{-1} = 1$:

$$\begin{aligned} xx^{-1} &= (a + b\tau)(a - b\tau)(a^2 - b^2\alpha)^{-1} \\ &= (a^2 - b^2\alpha)(a^2 - b^2\alpha)^{-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

So haben wir verifiziert, dass $x^{-1} = (a - b\tau)(a^2 - b^2\alpha)^{-1}$ das Inverse von x ist. [Hier haben wir x^{-1} nicht als einen Bruch $1/x$ geschrieben, um zu betonen, dass die Existenz von einem Inversen nicht trivial ist und man kann nicht mit beliebigen Elementen einen solchen Bruch bauen.]

Nächste Woche werden wir noch ein paar Aufgaben aus Serie 3 besprechen.

4.2 Mehr zu linearen Gleichungssystemen

Das LGS von letzter Woche hat eine eindeutige Lösung und wir erhalten am Ende eine Matrix mit Eisen auf dem Diagonal. Allgemein können wir das nicht machen, trotzdem versuchen wir, die Matrix in eine ähnliche Form zu bringen, nämlich die reduzierte Zeilenstufenform (engl. row-reduced echelon form):

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Übung 4.1. Löse das folgende LGS

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$$

Lösung. Die entsprechende Matrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 15 \end{array}\right)$$

Nach elementaren Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wenn (x_1, x_2, x_3) eine Lösung des Systems ist, gibt es keine Einschränkungen für x_3, wir können also x_3 frei wählen. Aber es muss

$$x_1 = \frac{11}{3} - \frac{2}{3}x_3 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_3$$

gelten. So können wir die Lösung als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} - \frac{2}{3}x_3 \\ \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

schreiben. x_3 kann einen beliebigen Wert $t \in \mathbb{R}$ annehmen, daher ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

4.3 Weitere Übungsaufgaben

Übung 4.2. Löse das LGS

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}.$$

Versuche, die Geraden $x - y = 1$ und $x - 2y = -2$ in der Ebene zu zeichnen.

Lösung.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Somit ist die eindeutige Lösung gegeben durch $x = 4, y = 3$. Geometrisch ist $(4, 3) \in \mathbb{R}^2$ der Schnittpunkt der Geraden $x - y = 1$ und $x - 2y = -2$, es sieht wie folgt aus.

□

Übung 4.3. Löse das LGS

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}.$$

Versuche, die Geraden $x + 2y = 4$ und $2x + 4y = 6$ in der Ebene zu zeichnen.

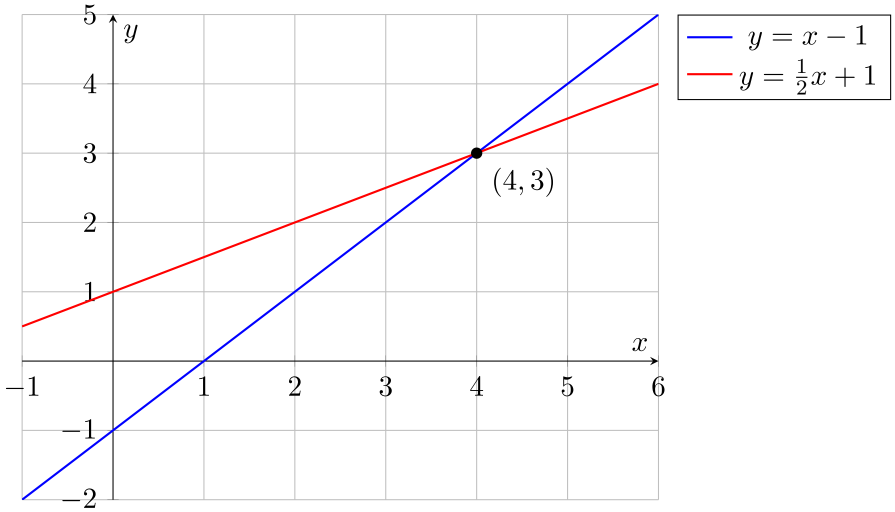

Abbildung 4.1: Lösung zum LGS $x - y = 1$ und $x_1 - 2y = -2$

Lösung. Man bemerkt, dass dieses LGS keine Lösung hat: Nach Umformungen erhalten wir $0 = 2$. Geometrisch haben wir zwei parallele Geraden in der Ebene, die keinen Schnittpunkt haben. Aber wenn wir eine Gerade verschieben, z.B. wenn wir die erste Gleichung durch $x + 2y = 3$, dann bekommen wir zwei identische Geraden und sie haben unendlich viele Schnittpunkte, dementsprechend hat das neue LGS unendlich viele Lösungen. Die geometrische Bedeutung eines LGS werden wir noch besser verstehen mit Hilfe von Konzepten wie Vektorräume und lineare Abhängigkeit. □

Nun lösen wir eine Aufgabe wo das LGS von einem Parameter abhängt. Dann kommt eine natürliche Frage, ist die Anzahl von Lösungen auch von dem Parameter abhängig?

Übung 4.4. Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das folgende LGS eine Lösung? Bestimme die Lösungen wenn sie existieren.

$$\begin{cases} x + ay + 3z = a \\ x + (a-2)y + (2a+3)z = -a^2 \\ y - az = 1 \end{cases}$$

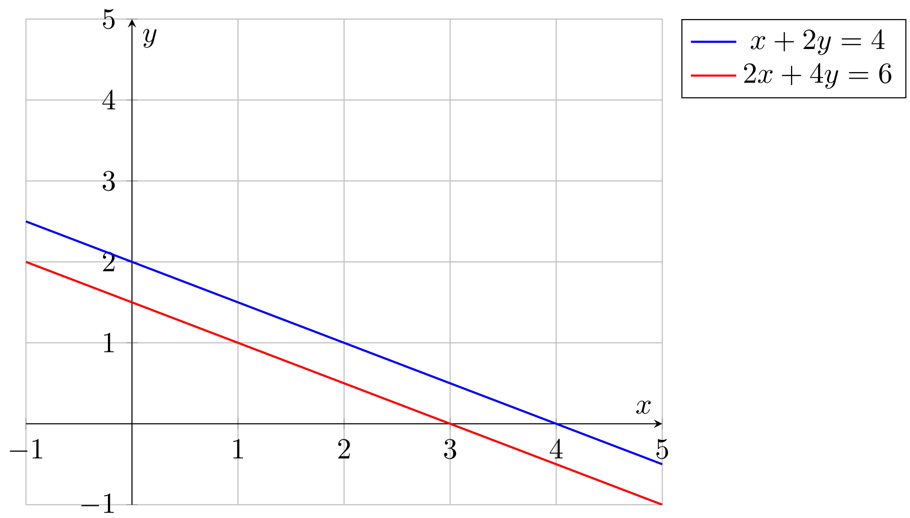

Abbildung 4.2: Das LGS $x + 2y = 4$ und $2x + 4y = 6$ hat keine Lösung

Lösung. Wir lösen das LGS wie normal:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & a \\ 1 & a-2 & 2a+3 & -a^2 \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & a \\ 0 & -2 & 2a & -a^2 - a \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 + 2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 - a + 2 \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{array}\right)$$

Wir sehen schon jetzt die Abhängigkeit von a. Wenn $-a^2 - a + 2 \neq 0$, hat das LGS keine Lösung. Die zwei Nullstellen von diesem Polynom sind 1 und -2, also es genügt, die Lösungen in diesen zwei fällen zu bestimmen

Fall 1: Die Zielmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösungsmenge ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Fall 2: Die Zielmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Lösungsmenge ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$\square$