Übungsstunde 3

Cantor'sches Paradoxon und lineare Gleichungssysteme I

3.1 Quiz 2

Seien $f : X \to Y$ und $g_1, g_2 : Y \to Z$ Abbildungen.

1. Stimmt es, dass wenn $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ gilt, dass ist $g_1 = g_2$?
2. Trifft es zu, dass $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ für jede Teilmenge $B \subseteq Y$ gilt?
3. Nehmen wir an, dass $g_1 \circ f$ injektiv ist. Bedeutet dies, dass g_1 injektiv ist?

Lösung.

1. Dies ist im Allgemeinen nicht wahr. Es gilt, wenn f ein Rechtsinverses besitzt, d. h. wenn f surjektiv ist.
   Als Gegenbeispiel sei $f : \{0,1\} \to \{0,1\}$ die konstant 1-Funktion, und betrachte $g_1, g_2 : \{0,1\} \to \{0,1\}$ definiert durch
   $$g_1(x) = x \quad \text{und} \quad g_2(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \{0,1\}.$$
   Dann gilt $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, aber $g_1 \neq g_2$.
2. Per Definition gilt
   $$f^{-1}(B) = \{\, x \in X \mid f(x) \in B \,\}.$$
   Daher gilt für alle $x \in f^{-1}(B)$: $f(x) \in B$, was die Inklusion zeigt.
3. Dies ist nicht wahr. Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt{x}$ und $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g_1(y) = y^2$.
   Dann ist $g_1 \circ f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ injektiv. Tatsächlich gilt: Angenommen $g_1 \circ f(x_1) = g_1 \circ f(x_2)$. Das bedeutet $(\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2 \implies x_1 = x_2$.
   Jedoch ist g_1 offensichtlich nicht injektiv.

$\square$

3.2 Besprechung Serie 2

1. In Aufgabe 2 wurde erwartet, dass man das Archimedische Prinzip verwendet, um zu zeigen, dass
$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \right\} = \{0\}.$$
Also sei $x > 0$, dann gibt es nach dem Archimedischen Prinzip [Fig25] ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass
$$k \leq \frac{1}{x} < k+1 \quad \implies \quad \frac{1}{k+1} < x$$
Daher ist $x \notin A$ für alle $x > 0$. Analog gilt das gleiche für $x < 0$, so mit ist $A = \{0\}$.
2. Viele haben die Aufgabe 5 gelöst mit der Begründung, dass g_1 und g_2 wegen der zwei Eigenschaften nach der Definition genau f^{-1} sind. Man muss vorsichtig sein: nicht jede Funktion hat ein Inverses, man muss die Bijektivität der Funktion beweisen und dann kann man von dem Inversen sprechen. Insbesondere kann man hier nicht direkt die Eindeutigkeit des Inversen verwenden. In dieser Aufgabe geht man wie folgt vor: Es gilt
$$g_1 = g_1 \circ \mathrm{id}_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \mathrm{id}_X \circ g_2 = g_2.$$
So ist $g_1 = g_2$ und sie sind sowohl das linke als auch das rechte Inverse von f, also $g_1 = g_2 = f^{-1}$. Aus den zwei Gleichungen folgt auch, dass f injektiv und surjektiv sind.
3. Es gab ein paar Missverständnisse bei Aufgabe 6. Wenn wir $f^{-1}(B)$ schreiben, wird nicht die Umkehrabbildung (engl. inverse) von f gemeint, sonder das Urbild (engl. preimage / inverse image) der Menge A unter f. Genauer, für $f : X \to Y$ und $B \subseteq Y$ ist
$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$
Hier kann man f^{-1} nicht als Funktion verstehen, aus demselben Grund wie oben: Es existiert nicht immer. Allerdings ist es bemerkenswert, wenn f^{-1} existiert, ist $f^{-1}(B)$ genau das Bild (engl. image) von B unter f^{-1} — die zwei Interpretationen stimmen miteinander überein. Somit muss man hier die Mengen genau analysieren, z.B. Teilaufgabe 1: Sei $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ für $x \in f^{-1}$, dann ist per Definition $f(x) \in B$ und daher $y \in B$, also $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Wenn f surjektiv ist, gibt es für jedes $y \in B$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. x muss in $f^{-1}(B)$ und daher $B \subseteq f(f^{-1}(B))$, womit die andere Inklusion gezeigt wird. Bei den restlichen Aufgaben kann man ähnlich vorgehen.
Noch eine Erinnerung: $A \setminus B = A \cap B^c$ — kann manchmal nützlich sein.

3.3 Noch ein Paradoxon

Beispiel 3.1 (Cantor'sches Paradoxon)**.** Es gibt keine Menge, die alle Mengen als Element enthält.

Um dies zu zeigen, benötigen wir folgendes Theorem.

Theorem 3.2 (Cantor)**.** *Sei $f : A \to \mathcal{P}(A)$ eine Abbildung, dann ist f nicht surjektiv. Als eine Folgerung ist $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ für alle Mengen A.*

Beweis. Angenommen ist f surjektiv. Sei $B := \{x \in A : x \notin f(x)\}$, dann ist $B \in \mathcal{P}(A)$. Da f surjektiv ist, gibt es $x \in A$ mit $f(x) = B$. Aber per Definition von B gilt

$$y \in B \iff y \notin f(x) \quad \forall y \in A,$$

es folgt

$$x \in B \iff x \notin B.$$

Das ist ein Widerspruch.

Die Abbildung $g : A \to \mathcal{P}(A)$ mit $g(x) = \{x\}$ ist injektiv, daher $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Wir schliessen, dass $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. $\square$

Beweis von Beispiel 3.1. Sei X die Menge, die alle Mengen als Element enthält. Sei

$$Y = \bigcup_{A \in X} A.$$

Da $\mathcal{P}(Y)$ auch eine Menge ist, ist $\mathcal{P}(Y) \in X$ und $\mathcal{P}(Y) \subseteq Y$, insbesondere $|\mathcal{P}(Y)| \leq Y$. Nach Theorem 3.2 ist aber $|\mathcal{P}(Y)| > Y$, Widerspruch. $\square$

Die Paradoxa zeigen, das der naive Begriff von Mengen zu viel enthält — manche davon, wie die Menge aller Mengen, haben Eigenschaften, die nicht wohldefiniert sind und zu Widerspruch führen. Daher brauchen wir mehr Einschränkungen dafür, welche Objekte überhaupt Mengen sein können, um den Begriff von Mengen präzise zu machen. Dies ist genau das Thema in der *axiomatischen Mengenlehre*, wo man den Begriff von Mengen durch Axiome festlegen. Die Mathematiker werden noch mehr dazu sehen in der Vorlesung *Grundstrukturen*.

3.4 Lineare Gleichungssysteme

Wir werden ein paar Beispiele von linearen Gleichungssystemen (LGS) sehen und lösen.

Übung 3.3. Man löse das folgende LGS mittels elementaren Zeilenoperationen:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Lösung.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1,\ R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-\frac{3}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-6R_3,\ R_1+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

$$\Longrightarrow \qquad x_1 = \frac{4}{3}, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = \frac{1}{3}.$$

□