Übungsstunde 11

Darstellungsmatrix II

11.1 Quiz 7

Betrachete die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ v &\longmapsto Av \end{aligned}$$

für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & -7 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme eine Basis vom $\ker(T)$.

Lösung. Man findet eine Basis durch Gauss-Elimination. Eine mögliche Wahl ist $\{(2, -3, 1)\}$. $\square$

11.2 Besprechung Serie 10

Die Serie wurde sehr gut gelöst. Wir werden uns heute mehr auf die Theorie und Beispiele konzentrieren.

11.3 Weitere Anwendungen von Rank-Nullity Theorem

Übung 11.1. Es seien $A \in M_{m\times n}(K)$ und $B \in M_{n\times r}(K)$. Man beweise die folgende Formel:

$$\mathrm{rk}(AB) \geq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) - n.$$

[**Hinweis.** Verwende Übung 10.10.]

Lösung. Wir starten mit der Formel $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(B) - \dim\ker(F)$. Für den Kern von F gilt: $v \in \ker(F) \implies Av = 0 \implies v \in \ker(A)$. Somit ist $\ker(F) \subseteq \ker(A)$ und daher

$\dim \ker(F) \leq \dim \ker(A)$. Mit der Dimensionsformel für die Matrix $A \in M_{m\times n}(K)$ finden wir

$$n = \dim \ker(A) + \mathrm{rk}(A) \implies \dim \ker(A) = n - \mathrm{rk}(A),$$

also

$$\dim \ker(F) \leq \dim \ker(A) = n - \mathrm{rk}(A).$$

Mit der Formel $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(B) - \dim \ker(F)$ finden wir somit: $\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(B) - \dim \ker(F) \geq \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B) - n$. □

[Die folgende Aufgabe wurde nicht in der Übungsstunde gelöst, weil es einen Begriff betrifft, den nicht in der Vorlesung behandelt wurde. Diese Aufgabe gibt einen alternativen Beweis von Proposition 9.2.]

Übung 11.2. In dieser Aufgabe zeigen wir die Dimensionsformel für Summe von Vektorräumen mithilfe von linearen Abbildungen. Es seien U und W zwei Unterräume eines endlich dimensionalen Vektorraums V. Man betrachte die Abbildung $F : U \times W \to U + W$ definiert durch $F(u, w) = u + w$.

1. Zeige, dass F linear ist.
2. Zeige, $\dim \ker(F) = \dim(U \cap W)$.
3. Folgere aus 2. die Formel

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

Lösung.

1. Klar.
2. Der Kern von F besteht aus den Elementen der Form $(v, -v)$, weil $F(v, -v) = v - v = 0$. Weil v sowohl im ersten wie auch im zweiten Eintrag vorkommt, muss $v \in U$ und $v \in W$, d. h. $v \in U \cap W$. Folglich $\ker(F) = \{(v, -v) : v \in U \cap W\}$. Die Dimension von $\ker(F)$ ist somit $\dim \ker(F) = \dim(U \cap W)$.
3. Aus Theorem 7.3 folgt,

$$\dim U \times W = \dim \ker F + \mathrm{rk}\, F,$$

da $\dim U \times W = \dim U + \dim W$, erhalten wir

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W).$$

□

11.4 Darstellungsmatrix

Definition 11.3. Seien V, W endlich dimensionale (mit Dimensionen n, m respektive) Vektorräume und $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V und W. Die Darstellungsmatrix $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in M_{m\times n}(K)$ ist die eindeutige Matrix sodass $\Phi_{\mathcal{C}} \circ T \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} = T_A$, wobei $A = [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

Bemerkung 11.4. Mit anderen Worten, die i-te Spalte ϕ_i von $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ ist gegeben durch $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, wobei $T(v_i) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_m w_m$.

Proposition 11.5. *Es gilt* $[T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [Tv]_{\mathcal{C}}$.

Beispiel 11.6. Es sei V der Vektorraum aller Fibonacci-Folgen und $S : V \to V$ die Verschiebungsabbildung. Es sei $\mathcal{B}$ die Basis $(\mathcal{F}_{1,0}, F_{0,1})$. Dann ist

$$[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es sei nun $\mathcal{C}$ die Basis $(\mathcal{F}_{1,\phi}, \mathcal{F}_{1,\psi})$. In dieser Basis hat S eine besonders schöne Form: sie ist diagonal:

$$[S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}.$$

Wie hängen die beiden Matrizen zusammen? Was ist speziell an dieser Basis? Diese Fragen werden wir später noch untersuchen.

11.5 Matrizenmultiplikation

Satz 11.7. *Seien V, W, U endlich dimensionale Vektorräume und $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V, W, U. Für lineare Abbildungen $T : V \to W$ und $S : W \to U$ es gilt*

$$[S \circ T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}} = [S]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$$

Obiger Satz gibt uns auf eine natürliche Weise die Möglichkeit, Matrizenmultiplikation als die „Verknüpfung " von zwei Matrizen definieren, im Sinne der entsprechenden Abbildungen. Wir machen also die folgende Definition.

Definition 11.8. Seien $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K), B = (b_{ij}) \in M_{n\times p}(K)$. Das **Produkt** von

A und B ist die Matrix $C = (c_{ij}) = AB \in M_{m\times p}(K)$ gegeben durch

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Bemerkung 11.9. Dieses Produkt macht nur Sinn, wenn die Dimensionen der zwei Matrizen kompatibel sind.

Beispiel 11.10.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 + 4\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0 + 4\cdot 1 \\ 5\cdot 1 + 6\cdot 0 + 7\cdot 1 + 8\cdot 0 & 5\cdot 0 + 6\cdot 1 + 7\cdot 0 + 8\cdot 1 \\ 9\cdot 1 + 10\cdot 0 + 11\cdot 1 + 12\cdot 0 & 9\cdot 0 + 10\cdot 1 + 11\cdot 0 + 12\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 14 \\ 20 & 22 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 11.11. Matrizenmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ.

Übung 11.12. Es sein $\mathbb{H}^2$ die obere Hälfte der komplexen Ebene, $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$. Eine normierte Möbius-Transformation ist eine Abbildung $M : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$,

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

wobei $ad - bc = 1$. Möbius-Transformationen kann man mit (2×2)-Matrizen wie folgt darstellen:

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \longleftrightarrow [M] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

1. Zeige, dass M wohldefiniert ist.
2. Es seien M_1 und M_2 Möbius-Transformationen mit Matrixdarstellungen $[M_1]$ bzw. $[M_2]$. Wie kann man $[M_2 \circ M_1]$ mithilfe von $[M_1]$ und $[M_2]$ darstellen?

Lösung.

1. Wir müssen zwei Eigenschaften überprüfen.
   Claim 1. $cz + d \neq 0$.

Wir bemerken, dass $cz + d = 0$ nur wenn c und d beide null sind, dies widerspricht aber der Annahme $ad - bc = 1$.

Claim 2. Für alle $z \in \mathbb{H}^2$ ist $M(z) \in \mathbb{H}^2$.

Sei $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$. Per Definition gilt

$$\begin{aligned} M(z) &= \frac{(ax+b) + iay}{(cx+d) + icy} \\ &= \frac{\big((ax+b)+iay\big)\big((cx+d)-icy\big)}{(cx+d)^2 + c^2y^2}. \end{aligned}$$

Des Weitere haben wir,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\Big(\big((ax+b)+iay\big)\big((cx+d)-icy\big)\Big) &= ay(cx+d) - (ax+b)cy \\ &= acxy + ady - acxy - bcy \\ &= (ad-bc)y \\ &= y. \end{aligned}$$

Da $(cx+d)^2 + c^2y^2 > 0$, schliessen wie $\operatorname{Im}(M(z)) > 0$, also $M(z) \in \mathbb{H}^2$.

2. Es seien M_1 und M_2 Möbius-Transformationen mit Matrizen $[M_1]$ bzw. $[M_2]$:

$$[M_1] = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \implies M_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1},$$

$$[M_2] = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \implies M_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} (M_2 \circ M_1)(z) &= M_2(M_1(z)) \\ &= M_2\left(\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}\right) \\ &= \frac{a_2\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} + b_2}{c_2\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1} + d_2} \\ &= \frac{a_2(a_1z+b_1) + b_2(c_1z+d_1)}{c_2(a_1z+b_1) + d_2(c_1z+d_1)} \\ &= \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)z + (a_2b_1 + b_2d_1)}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + (c_2b_1 + d_2d_1)}. \end{aligned}$$

Beachte, dass

$$[M_2][M_1] = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung der Komposition $M_2 \circ M_1$ ist somit gleich dem Produkt der Darstellungsmatrizen von M_2 und M_1, d. h.

$$[M_2 \circ M_1] = [M_2][M_1].$$

□

Mehr zu Möbius-Transformationen, siehe [Ols10]; mehr zu Möbius-Transformationen in der Funktionentheorie, z.B. Automorphismen der Kreisscheibe, siehe [Wan24].