TOPOLOGIE ZUSAMMENFASSUNG

Februar 2025

Version: 22. Juli 2025

Contents

1 Topologische Räume

Definition 1.1. Eine **Topologie** auf einer Menge X ist eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen (genannte **offene Menge**) von X, die folgende Axiome erfüllt:

A1. Für eine beliebige Indexmenge I gilt $(\forall i \in I : U_i \in \mathcal{O}) \implies \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{O}$.
A2. $U, V \in \mathcal{O} \implies U \cap V \in \mathcal{O}$.
A3. $\varnothing, X \in \mathcal{O}$.

Das Paar $(X, \mathcal{O})$ heisst topologischer Raum.

Beispiel 1.2. Für beliebiges X heisst $\mathcal{O} = \{\varnothing, X\}$ die **indiskrete** oder **triviale** Topologie und $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$ die **diskrete** Topologie.

Definition 1.3. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. $A \subseteq X$ heisst **offen** falls $A \in \mathcal{O}$ und **abgeschlossen** falls $A^c = X \setminus A \in \mathcal{O}$. Sei $x \in X, A \subseteq X$. Dann heisst...

1. ... A **Umgebung** von x, falls es ein offenes $U \subseteq X$ gibt mit $x \in U \subseteq A$.
2. ... x **innerer Punkt** von A, falls A eine Umgebung von x ist.
3. ... x **äusserer Punkt** von A, falls A^c eine Umgebung von x ist.
4. ... x **Randpunkt** von A, falls x weder innerer noch äusserer Punkt von A ist. (Äquivalente Formulierung: jede offene Menge, die x enthält, schneidet sowohl A als auch A^c.)

Das **Innere** von A, geschrieben A°, ist die Menge der inneren Punkte von A. Der **Rand** von A, geschrieben ∂A, ist die Menge der Randpunkte Punkte von A. Der **Abschluss** von A, geschrieben $\overline{A}$, ist $\partial A \cup A$.

Proposition 1.4. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist die Menge aller $U \subseteq X$ offen, d.h. $\forall\, x \in U\ \exists\, r > 0 : B(x, r) \subseteq U$, eine Topologie auf X (die von d* induzierte Topologie*).*

Definition 1.5. Eine Topologie heisst **metrisierbar**, falls sie von einer Metrik induziert ist.

Beispiel 1.6. Die diskrete Topologie auf X ist metrisierbar durch die diskrete Metrik d

$$\mathrm{d}(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Beispiel 1.7. Die indiskrete Topologie auf X ist nichtmetrisierbar, falls $|X| = \#X \geq 2$. Denn sei d eine Metrik auf X, und $x, y \in X$ mit $x \neq y$. $B(x, d(x, y))$ enthält x aber nicht y, diese Menge ist somit nicht offen in X, d.h. d induziert nicht die indiskrete Topologie.

Bemerkung 1.8. Offene Bälle sind offen. Betrachte $B(x, r)$ und $y \in B(x, r)$. So ist $B(y, r - \mathrm{d}(x, y)) \subseteq B(x, r)$, wenn wir die Dreiecksungleichung anwenden. Abgeschlossene Bälle sind abgeschlossen, aber nicht unbedingt gleich dem Abschluss des offenen Balls (Bsp.: diskrete Topologie, $B_1(x)$). Dieses Beispiel ist auch ein Beispiel dafür, dass der Rand leer sein kann.

Definition 1.9. Sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ heisst **Basis** von $(X, \mathcal{O})$, falls jedes $U \in \mathcal{O}$ Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist und **Subbasis** falls die Menge aller endlichen Schnitte aus $\mathcal{B}$ eine Basis ist.

Äquivalente Definition von Basis: für alle $U \subseteq X$ offen

$$U = \bigcup \{V \subseteq X : V \subseteq U \in \mathcal{B}\} \iff \forall x \in U \exists V \subseteq U \in \mathcal{B} : x \in V.$$

Konvention: die Vereinigung mit leerer Indexmenge ist die leere Menge. Schnitt mit leerer Indexmenge ist der ganze Raum.

Proposition 1.10. *Offene Bälle bilden eine Basis für die von der Metrik induzierte Topologie.*

Beispiel 1.11. $\mathcal{B} = \mathcal{O}$ ist eine Basis. $\{B(x, r) : x \in \mathbb{Q}, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}$.

Bemerkung 1.12. Sei X eine Menge, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es genau eine Topologie auf X, die $\mathcal{B}$ als Subbasis hat. $\mathcal{B}$ ist genau dann eine Basis dieser Topologie falls: $\bigcup \mathcal{B} = X$, und alle endliche Schnitte von Mengen in $\mathcal{B}$ sind Vereinigung von Mengen in $\mathcal{B}$.

Definition 1.13. Sind $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ Topologien auf einer Menge X, $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}'$, so heisst $\mathcal{O}$ **gröber** als $\mathcal{O}'$ (bzw. $\mathcal{O}'$ **feiner** als $\mathcal{O}$).

Serie 1, Übung 4(c): $(\partial A)^\circ = \varnothing$ ist i.A. falsch. Gegenbeispiel: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Da sowohl $\mathbb{Q}$ als auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ sind, ist $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, aber $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R} \neq \varnothing$.

2 Unterräume, Summe, Produkte

Definition 2.1. Sei $X, \mathcal{O}$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Die **Unterraumtopologie** auf A ist $\mathcal{O}|_A = \{U \cap A : U \in \mathcal{O}\}$.

Beispiel 2.2.

1. $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit der Unterraumtopologie stimmt mit der Standardtopotogie auf $\mathbb{R}$ überein.
2. In $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist $A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ offen, aber auch abgeschlossen, weil $A^c = ((-\infty, -\sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}) \cup ((\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q})$.

Bemerkung 2.3. Sei $U \subseteq A \subseteq X$. U offen in $X \implies U$ offen in A, die umgekehrte Implikation gilt falls $A \subseteq X$ offen. Die Äquivalenz gilt genau dann wenn A offen ist (man zeigt, dass die Äquivalenz nicht gilt wenn A nicht offen ist).

Definition 2.4. Sei I eine Indexmenge, $(X_i, \mathcal{O}_i)$ topologischer Räume für jedes $i \in I$. Die **Summe** der X_i, geschrieben $\coprod_{i \in I} X_i$, oder $X_1 + \cdots + X_n$ falls $I = \{1, \ldots, n\}$, ist der Raum

$$\left(\{(x,i) : i \in I, x \in X_i\}, \left\{\bigcup_{i \in I} U_i \times \{i\}, U_i \in \mathcal{O}_i\right\}\right).$$

Beispiel 2.5. Sei $I = \{1,2\}$. Als Elemente von $\mathbb{R} + \mathbb{R}$ haben wir (x,i), $x \in \mathbb{R}$, $i \in I$. Das sind zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$. Wenn wir $\mathbb{R} + [0,1]$ betrachten, dann besteht der Raum aus eine Gerade und ein Intervall.

Bemerkung 2.6.
1. Der topologische Raum X_i stimmt mit $X_i \times \{i\} \subseteq \coprod_{i \in I} X_i$ mit der Unterraumtopologie überein.
2. Menge der Form $U_i \times \{i\}$ mit $i \in I$, $U_i \in \mathcal{O}_i$ bilden eine Basis von $\coprod_{i \in I} U_i$.

Definition 2.7. Sei I eine Indexmenge, X_i eine Menge für jedes $i \in I$. Das **Produkt** $X = \prod_{i \in I} X_i$ ist die Menge der *Funktionen*

$$\kappa : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$$

mit $i \mapsto \kappa(i)$, sodass $\kappa(i) \in X_i$. Für $I = \{1, \ldots, n\}$ schreibt man das Produkt als $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$. Also

$$\prod_{i \in I} X_i := \left\{\kappa : I \to \bigcup_{i \in I} X_i : \kappa(i) \in X_i, \forall\, i \in I\right\}.$$

Definition 2.8. Sei I eine Indexmenge, $(X_i, \mathcal{O}_i)$ topologische Räume für jedes $i \in I$. Das Produkt dieser Räume ist $\prod_{i \in I} X_i$ mit der sogenannten **Produkttopologie**, die von der folgenden Subbasis erzeugt wird:

$$\left\{\prod_{i \in I} U_i : U_j \in \mathcal{O}_j \text{ für ein } j \in I,\ U_i = X_i \text{ für alle } i \in I \setminus \{j\}\right\}.$$

Bemerkung 2.9. Wir nennen diese Menge Zylinder, und endliche Schnitte von denen Kästchen. So sind die Kästchen eine Basis.

Beispiel 2.10. $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ hat zwei Topologien: die Produkttopologie und die von der euklidischen Metrik induzierte. Wir wollen zeigen, dass diese zwei Topologien identisch sind. Die Strategie ist, für eine Basis von einer Topologie zu zeigen, dass alle Menge in der Basis offen sind in der anderen Topologie, und dann nochmals umgekehrt.

Beispiel 2.11. Betrachte $\mathbb{R}^{[0,1]} = f : [0,1] \to \mathbb{R} = \prod_{[0,1]} \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie. Die Kästchen sind von der Form $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f(i_1) \in U_1, \ldots, f(i_n) = U_n\}$, mit $i_1, \ldots, i_n \in [0,1]$ und

$U_1, \ldots, U_n \subseteq \mathbb{R}$ offen. $C([0,1], \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{[0,1]}$ hat die Unterraumtopologie. Eine andere Topologie kommt von der Metrik d mit $\mathrm{d}(f,g) = \max_{i \in [0,1]} |f(i) - g(i)|$. Die Bälle in der Metrik sind nicht offen in der Produkttopologie, aber jedes Kästchen enthält für jede Funktion einen Ball um diese Funktion. D.h. die Metriktopologie ist feiner als die Produkttopologie. Man sieht auch, dass die durch komplett beschränkte Boxen (was sind diese?) induziert Boxtopologie noch feiner ist als die von der Metrik induzierte.

3 Stetige Funktionen

Definition 3.1. Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heisst **stetig** falls $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen für alle $U \subseteq Y$ offen.

Bemerkung 3.2.

1. $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist stetig.
2. Für $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Funktionen ist $g \circ f$ stetig.

Bemerkung 3.3. X diskret oder Y indiskret $\implies f : X \to Y$ stetig.

Bemerkung 3.4. Äquivalente Formulierungen von Stetigkeit:

1. f stetig $\iff \forall A \subseteq Y$ abgeschlossen ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.
2. f stetig $\iff \forall x \in X$ und alle Umgebungen $R \subseteq Y$ von $f(x)$ ist $f^{-1}(R)$ eine Umgebung von x.
3. Falls die Topologie von X, Y von Metriken $\mathrm{d}_X, \mathrm{d}_Y$ induziert ist, so gilt: $f : X \to Y$ stetig $\iff$ ε-δ.

Proposition 3.5.

(a) *Die Produkttopologie ist die gröbster Topologie, für welche die Projektionen $p_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$, $p_j(x) = x_j$ für alle $j \in I$ stetig sind.*

(b) $f : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ *stetig* $\iff$ $p_j \circ f$ *stetig für alle* $j \in I$.

Ähnlich gilt: Die Unterraumtopologie $A \subseteq X$ ist die gröbste, für welche die Inklusion $\iota : A \to X$ stetig ist. Des Weiteren: $f : Y \to A$ stetig $\iff$ $\iota \circ f$ stetig.

Proposition 3.6. *Die Summentopologie ist die feinste Topologie, für welche $\alpha_j : X_j \to \coprod_{i \in I} X_i$ für alle $j \in I$ stetig sind, und $f : \coprod_{i \in I} X_i \to Y$ stetig $\iff$ $f \circ \alpha_j$ stetig für alle $j \in I$.*

Definition 3.7. Sei $f : X \to Y$ stetig. Falls es ein stetiges $g : Y \to X$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{id}_X$, dann heisst f **Homöomorphismus**, und X und Y heissen **homöomorph** ($X \cong Y$).

Bemerkung 3.8. f Homöomorphismus $\iff$ f stetig, bijektiv, offen. D.h. alle Eigenschaften welche sich durch Offenheit bestimmen lassen, müssen für beide Räume gelten.

Beispiel 3.9. $f : [0, 2\pi) \to \mathbf{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$, $f(t) = e^{it}$ ist stetig und bijektiv. Aber die Umkehrabbildung ist nicht stetig, bzw. f ist nicht offen: $f([0, \pi))$ ist nicht offen.

Beispiel 3.10. $\underset{\text{diskret}}{\{0,1\}} \xrightarrow{f} \underset{\text{indiskret}}{\{0,1\}}$ mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. f ist bijektiv, stetig, aber kein Homöomorphismus.

Beispiel 3.11. $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist ein Homöomorphismus, $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$, ist ein Homöomorphismus.

4 Zusammenhang

Definition 4.1. Ein topologisher Raum X heisst **zusammenhängend** falls $X \neq \varnothing$ und es *keine* offene (Unterraumtopologie) disjunkte, nicht-leere Teilmenge $U, V \subseteq X$ mit $U \cup V = X$. X heisst **wegzusammenhängend**, falls $X \neq \varnothing$ und für alle $x, y \in X$ es einen Weg von x nach y gibt, d.h. $\phi : [0, 1] \to X$ stetig, mit $\phi(0) = x$, $\phi(1) = y$.

Bemerkung 4.2. $X \neq \varnothing$ unzusammenhängend $\iff$ es gibt $U \subseteq X$ offen und abgeschlossen, $U \neq \varnothing$, $U \neq X$ $\iff$ $X \cong Y + Z$ für zwei topologischer Räume $Y, Z \neq \varnothing$ $\iff$ es gibt eine stetige *surjektive* Funktion $X \to \{0, 1\}$ diskret.

Satz 4.3. *$f : X \to Y$ stetig, X zusammenhängend, dann ist $f(X)$ zusammenhängend.*

Satz 4.4. *$A \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend $\iff$ A ist ein Intervall.*

Lemma 4.5. *Sei $A \subseteq B \subseteq \overline{A} \subseteq X$, dann ist B zusammenhängend wenn A zusammenhängend.*

Satz 4.6. *Zwischenwertsatz.*

Korollar 4.7. *Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend $\iff$ A wegzusammenhängend.*

Beispiel 4.8. Die Menge $S := \{(x, \sin 1/x) : x \in (0, \infty)\} \cup \{(0, 0)\}$ heisst topologische Sinuskurve. Sie ist zusammenhängend, jedoch nicht wegzusammenhängend.

Definition 4.9. Eine **Zusammenhangskomponente** Z_x eines topologischen Raums X ist die die Vereinigung aller $A \subseteq X$ mit $x \in A$ und A zusammenhängend.

Proposition 4.10.

(1) *Zusammenhangskomponente sind zusammenhängend.*
(2) *Zusammenhangskomponente sind abgeschlossen.*
(3) *Z_x und Z_y sind entweder gleich oder disjunkt. Folglich ist X die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponente.*

Beispiel 4.11. $\mathbb{Q}$ hat Einpunktmengen als Zusammenhangskomponente.

Bemerkung 4.12 (Aus Jänich)**.** Man kann Zusammenhang gut für folgende Arten von Beweisen verwenden: Sei X ein zusammenhängender Raum und $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, die die Punkte von X haben oder nicht haben können, und wir wollen nachweisen, dass alle Punkte diese Eigenschaft haben. Dann genügt es folgende drei Teilaussagen zu beweisen: 1) Es gibt wenigstens einen Punkt mit der Eigenschaft $\mathcal{E}$, 2) Hat x die Eigenschaft $\mathcal{E}$, so auch alle Punkte in einer kleinen Umgebung, 3) Hat x die Eigenschaft $\mathcal{E}$ nicht, so auch alle Punkte in einer kleinen Umgebung nicht.

5 Das Hausdorff'sche Trennungsaxiom

Definition 5.1. Eine Folge $a_1, a_2, \ldots \in X$ **konvergiert** gegen $b \in X$ falls für alle U offen mit $b \in U$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $a_n \in U$ für alle $n \geq N$.

Beispiel 5.2. Sei X diskret. Dann konvergiert $a_1, a_2, \ldots$ gegen b wenn es $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq N$, $a_n = b$. Sei X indiskret. Dann konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt. In $\mathbb{Z}$ mit der kofiniten Topologie konvergiert die Folge $1, 2, 3, \ldots$ gegen jeden Punkt in $\mathbb{Z}$.

Definition 5.3. X heisst **Hausdorff** bzw. T_2, falls es für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene disjunkte $U, V \subseteq X$ gibt mit $x \in U$, $y \in V$.

Beispiel 5.4. X metrisierbar beudeutet, dass X T_2 ist. Wenn X indiskret ist, für $|X| \geq 2$ ist X nicht T_2.

Bemerkung 5.5.

1. Wenn X T_2 ist, dann sind Grenzwerte von konvergenten Folgen eindeutig. Notation: $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Des Weiteren sind Einpunktmengen abgeschlossen.
2. Für endlich X gilt : $\mathrm{T}_2 \iff$ metrisierbar $\iff$ diskret.
3. Wenn $(X, \mathcal{O}')$ feiner ist als $(X, \mathcal{O})$, $(X, \mathcal{O})$ $\mathrm{T}_2 \implies (X, \mathcal{O}')$ T_2.
4. T_2 bleibt erhalten unter Summe, Unterräumen, und Produkten.
5. T_2 bleibt im Allgemeinen weder unter Bildern noch Urbildern stetiger Funktionen erhalten.

6 Kompaktheit

Definition 6.1. Ein topologischer Raum X heisst **kompakt**, falls jede offene Überdeckung eine endliche Überdeckung hat.

Satz 6.2 (Heine-Borel)**.** *$A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt (bezüglich der Unterraumtopologie) genau dann wenn A abgeschlossen und beschränkt ist.*

Bemerkung 6.3. $A \subseteq X$ kompakt (bezüglich der Unterraumtopologie) $\iff$ $A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ mit $U_i \subseteq X$ offen $\implies \exists J \subseteq I$ endlich: $A \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$.

Proposition 6.4. *Sei X T_2 und $A \subseteq X$ kompakt, dann ist A abgeschlossen.*

Beispiel 6.5. Sei X ein endlicher indiskreter topologischer Raum, dann ist jede Teilraum von X immer kompakt, aber nur X und $\varnothing$ sind abgeschlossen.

Proposition 6.6. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum. Wenn* X *kompakt ist, dann ist* X *beschränkt.*

Proposition 6.7. *Sei* X *kompakt und* $A \subseteq X$ *abgeschlossen, dann ist* A *kompakt.*

Satz 6.8. *Sei* X *kompakt und* $f : X \to Y$ *stetig, dann ist* $f(X)$ *kompakt.*

Korollar 6.9. *Sei* $f : X \to \mathbb{R}, X$ *kompakt* $\Rightarrow f$ *hat ein Minimum und ein Maximum.*

Satz 6.10. *Sei* $f : X \to Y$ *stetig und bijektiv. Wenn* X *kompakt und* Y T_2*, dann ist* f *ein Homöomorphismus.*

Bemerkung 6.11 (Aus Jänich)**.** Falls X ein kompakter Raum ist und $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft, welche offene Mengen entweder erfüllen und nicht erfüllen, so dass falls U, V $\mathcal{E}$ erfüllen $\implies U \cup V$ erfüllt diese Eigenschaft, dann gilt: Hat X die Eigenschaft lokal, dann hat auch X die Eigenschaft.

7 Quotiententopologie

Definition 7.1. Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann ist die **Quotiententopologie** auf $X/{\sim}$ definiert durch: $U \subseteq X/{\sim}$ offen $\iff \pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen für

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/{\sim} \\ x &\longmapsto [x]. \end{aligned}$$

Bemerkung 7.2. Dies definiert tatsächlich eine Topologie auf $X/{\sim}$, die genannte Finaltopologie bezüglich π (vgl. Serie 2, Übung 1). Es ist die feinste Topologie, sodass π stetig ist. [Seien $U, V \subseteq X/{\sim}$ offen, dann ist $\pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$ offen in X, somit ist $U \cap V$ offen. Ähnlich zeigt man, dass beliebige Vereinigung von offenen Mengen offen ist. Sei $\mathcal{O}'$ eine weitere Topologie, sodass π stetig ist. Dann ist $\pi^{-1}(U)$ offen für $U \in \mathcal{O}'$, daher ist U auch offen in der Quotiententopologie, diese ist feiner als $\mathcal{O}'$.]

Lemma 7.3. $f : X/{\sim} \to Y$ *stetig* $\iff f \circ \pi : X \to Y$ *stetig.*

Beispiel 7.4. Sei $X = [0,1], x \sim y :\iff \{x, y\} = \{0, 1\}$ oder $x = y$. Dann gilt $X/{\sim} \cong S^1$.

Beispiel 7.5. Sei $X = [0,1], x \sim y :\iff x = y$ oder $x, y \in [0,1)$. Dann besteht $X/{\sim}$ aus zwei Äquivalenzklassen: $[0,1)$ und $\{1\}$. Dann ist $f : X/{\sim} \to \{a, b\}, f([0,1)) = a, f(\{1\}) = b$ ein Homöomorphismus, wenn $\{a, b\}$ die Topologie $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ trägt. $X/\sim$ ist somit nicht T_2, d.h. T_2 bleibt *nicht* erhalten.

Bemerkung 7.6. Selbst wenn X Hausdorff und $[x]$ für alle $x \in X$ kompakt ist, ist $X/{\sim}$ im Allgemeinen nicht Hausdorff. Beipsiel: $\mathbb{R} \times \{1, 2\}/{\sim}$ mit $(x, y) \sim (x', y') \iff (x, y) = (x', y')$ oder $x = x' \neq 0$ ist nicht Hausdorff.

Bemerkung 7.7. Ist X wegzusammenhängend, zusammenhängend, kompakt, dann hat $X/\sim$ auch diese Eigenschaften.

Bemerkung 7.8. Die Projektionsabbildung $\pi; X \to X/\sim$ ist im allgemeinen nicht offen.

Bemerkung 7.9. $X/\sim T_2 \implies$ Jede Äquivalenzklasse $[x]$ ist abgeschlossen in X. Denn $X/\sim$ $T_2 \implies$ Alle Einpunktmengen in $X/\sim$ sind abgeschlossen $\iff$ $\{[x]\} \subseteq X/\sim$ abgeschlossen $\iff \forall x \in X : \pi^{-1}(\{[x]\}) \subseteq X$ abgeschlossen.

Beispiel 7.10. Betrachte die drei Äquivalenzrelationen $\sim_1, \sim_2, \sim_3$ auf $\mathbb{R}^2$, wobei

1. $(x, y) \sim_1 (x', y') :\iff x = x'$,
2. $(x, y) \sim_2 (x', y') :\iff x = x'$ und $x \notin (-\pi/2, \pi/2)$ oder $\exists\, \alpha \in \mathbb{R} : y = \tan x + \alpha, y' = \tan x' + \alpha$,
3. $(x, y) \sim_3 (x', y') :\iff x = x'$ und $x \notin (-\pi/2, \pi/2)$ oder $\exists\, \alpha \in \mathbb{R} : y = \tan^2 x + \alpha, y' = \tan^2 x' + \alpha$.

Es gilt

$$\mathbb{R}^2/\sim \xrightarrow[\cong]{\tilde{f}} \mathbb{R}$$

induziert von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x$, weil f stetig und konstant auf Äquivalenzklassen. Umkehrfunktion

tikz picture ertellen.

ist als Verknüpfung stetiger Abbildungen selbst stetig. Zudem gilt $\mathbb{R}^2/\sim_2 \cong \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2/\sim_3$ ist nicht T_2.

8 Spezielle Qutientenräume

Definition 8.1. Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$. Definiere $x \sim y :\iff x = y$ oder $x, y \in A$. Wir sagen $X/A := X/\sim$ entsteht aus X durch **Zusammenschlagen** von A zu einem Punkt.

Beispiel 8.2. Der **Kegel** über dem Raum X ist $CX := (X \times [0, 1])/(X \times \{1\})$.

Bemerkung 8.3. CX ist für $X \neq \varnothing$ stets wegzusammenhängend (sogar zusammenziehbar).

Bemerkung 8.4. $X \to CX, x \mapsto (x, 0)$ ist ein Homöomorphismus aufs Bild.

Beispiel 8.5. $CS^0 \cong D^1, CS^1 \cong D^2, \ldots$

Definition 8.6. Sie X ein topologischer Raum, $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ paarweise disjunkt. Dann $X/_{A_1,\ldots,A_n} := X/\sim$ für $x \sim y :\iff x = y$ oder $\exists\, i : x, y \in A_i$.

Definition 8.7. Der **Doppelkegel** über einem Raum X ist $SX := X \times [-1, 1]/(X \times \{1\}, X \times \{-1\})$.

Definition 8.8. Sei $(X_i, b_i)_{i\in I}$ eine Familie von Räumen mit Basispunkt (d.h. $b_i \in X_i$ fixiert). Dann ist die **Einpunktvereinigung** (oder Bonquet, engl. wedge sum)

$$\bigvee_{i\in I}(X_i, b_i) := \coprod_{i\in I} X_i \Big/ \coprod_{i\in I}\{b_i\}.$$

Beispiel 8.9. Sei $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Dann heisst $[0,1]/A$ **Hawaiianische Ohrringe**.

Bemerkung 8.10. Es gilt $[0,1]/A \not\cong \bigvee_{n=1}^{\infty} S^1$, denn $[0,1]/A$ ist kompakt. Jedoch gilt

$$\tilde{f} : [0,1]/A \xrightarrow{\cong} \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial B\left(\left(\frac{1}{n}, 0\right), \frac{1}{n}\right).$$

Definition 8.11. Seien X, Y topologische Räume, $A \subseteq X$ und $\varphi : A \to Y$ stetig. Auf $X + Y$ sei $\sim$ erzeugt von $x \sim \varphi(x)$ für $x \in A$. $Y \cup_\varphi X := (X+Y)/\sim$ heisst **Verklebung** oder **Anheftung** von X an Y entlang von f.

Bemerkung 8.12. **CW-Komplexe** sind Räume, die aus $\varnothing$ durch schrittweises Anheften von Punkten (D^0), Intervalle (D^1), Scheibe (D^2), ... entstehen.

Definition 8.13. $f : X \to Y$ heisst **Einbettung** oder Homöomorphismus aufs Bild falls die Einschränkung $X \to f(X), x \mapsto f(x)$ ein Homöomorphismus ist.

Bemerkung 8.14. f Einbettung $\iff$ f stetig, injektiv, und für $U \subseteq X$ offen $\exists V \subseteq Y$ offen sodass $f(U) = V \cap f(X)$.

Beispiel 8.15. Die folgenden Abbildungen sind Einbettungen:

- $\iota : A \to X, x \mapsto x$ für $A \subseteq X$.
- $\alpha_j : X_j \to \coprod_{i\in I} X_i$ (ähnlich $X_j \to \bigvee_{i\in I} X_i$).

Proposition 8.16. *$\pi|_Y : Y \to Y \cup_\varphi X$ ist eine Einbettung.*

Definition 8.17. Sei $\theta : X \to X$ ein Homöomorphismus. Dann heisst $X \times [0,1]/\sim$ für $\sim$ erzeugt von $(x, 0) \sim (\theta(x), 1)$ das **Abbildungstorus** M_θ von θ.

Beispiel 8.18.
- $\theta : [-1,1] \to [-1,1], \theta(x) = -x$, dann heisst M_θ **Möbiusband**.
- $\eta : S^1 \to S^1, \eta(z) = \overline{z}$, dann heisst M_η **kleinsche Flasche**.

Definition 8.19. Eine **Aktion** einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X ist eine Funktion $G \times X \to X, (g, x) \mapsto g \cdot x$ sodass

- $e \cdot x = x$ für ein Neutralelement $e \in G$ und $\forall x \in X$
- $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x \quad \forall g, h \in G, x \in X$

und die Abbildungen $X \to X, x \mapsto g \cdot x$ für alle $g \in G$ stetig sind. Die **Bahn** von $x \in X$ ist die Äquivalenzklasse von x bzgl. der Relation $x \sim y :\iff \exists\, g \in G : g \cdot x = y$ und $X/G := X/\sim$ heisst der **Bahnenraum**.

Beispiel 8.20. $SO(n)$ agiert auf $\mathbb{R}^n$ und $[x] \mapsto \|x\|$ ist ein Homöomorphismus $\mathbb{R}^n/SO(n) \to [0,\infty)$.

Beispiel 8.21. $\mathbb{Z}$ agiert auf $\mathbb{R}$ durch $n \cdot x := n + x$. Dann ist $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ (Achtung, nicht zusammenschlagen von $\mathbb{Z}$ zu einem Punkt). Denn $\pi_1 \circ \iota : [0,1] \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ist stetig, surjektiv und konstant auf $\{0,1\}$, induziert also $f : [0,1]/\{0,1\} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\pi_2"'] \arrow[dr, "\pi_1 \circ \iota"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi_1"] \\
{[0,1]/\{0,1\}} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}/\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

Achtung, es gilt $[0,1) \ncong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ auch wenn es intuitiv so scheint als wäre es richtig.

9 Homotopie

Definition 9.1. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heissen **homotop**, geschrieben $f \simeq g$, falls es eine **Homotopie** H von f nach g gibt: Das ist eine stetige Abbildung $H : X \times [0,1] \to Y$, sodass $H_0 = f, H_1 = g$ (wobei $H_t : X \to Y, H_t(x) = H(x,t)$).

Proposition 9.2. *Die Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf* $\{f : X \to Y \text{ stetig}\}$.

Definition 9.3. Die Äquivalenzklasse $[f]$ von f heisst **Homotopieklasse** von $f, [X,Y] := \{f : X \to Y \text{ stetig}\}/\simeq$.

Beispiel 9.4. $[\{p\}, X] \overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ Wegzusammenhangskomponenten von $X \overset{1:1}{\longleftrightarrow} [[0,1], X]$, da $f : [0,1] \to X$ stetig $\implies f \simeq \mathrm{const}_{f(0)}$ via $H_t(x) = f((1-t)x)$.

Beispiel 9.5. $[X, \mathbb{R}^n] = \{*\}$, da $f : X \to \mathbb{R}^n$ stetig $\implies f \simeq \mathrm{const}_0$ via $H_t(x) = (1-t)f(x)$.

Bemerkung 9.6. $X \underset{f'}{\overset{f}{\longrightarrow}} Y \underset{g'}{\overset{g}{\longrightarrow}} Z, f \simeq f'$ via H, $g \simeq g'$ via $I \implies g \circ f \simeq g' \circ f'$ via $(x,t) \mapsto I(H(x,t),t)$.

Bemerkung 9.7. $X \underset{g_i}{\overset{f_i}{\longrightarrow}} Y_i, f_i \simeq g_i$ via H^i für alle $i \implies (f_i)_i \simeq (g_i) : X \to \prod_{i \in I} Y_i$ via $(H^i)_i$.

Definition 9.8. X, Y heissen **homotopieäquivalent**, geschrieben $X \simeq Y$, falls es stetige $f : X \to Y, g : Y \to X$ gibt mit $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y, g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. f, g heissen dann **Homotopieäquivalenzen**.

Bemerkung 9.9.
- Dies ist eine Äquivalenzrelation auf topologischen Räumen.
- $X \cong Y \implies X \simeq Y$, denn sind $X \xrightarrow{f} Y, Y \xrightarrow{g}$ zueinander inverse stetige Abbildungen, so ist $f \circ g = \mathrm{id}_Y \implies f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, und analog für $g \circ f$.

Definition 9.10. Ein Raum, der homotopieäquivalent zum Einpunktraum $\{*\}$ ist, heisst **zusammenziehbar**.

Beispiel 9.11.
- $\mathbb{R}^n \simeq \{*\}$.
- Für alle nicht-leeren Räume X ist CX zusammenziehbar.
- Alle sternförmigen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind zusammenziehbar.

Beispiel 9.12. $\forall n \geq 0 : S^n \simeq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, denn für $S^n \underset{f}{\overset{\iota}{\leftrightarrows}} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, f(x) = \frac{x}{||x||}$ ist $f \circ \iota = \mathrm{id}_{S^n}$ und $\iota \circ f =\simeq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}}$ via $H_t(x) = x\left(1 + \left(\frac{1}{||x||} - 1\right) t\right)$.

Definition 9.13. Sei $A \subseteq X$ ein Unterraum und $f : X \to A$ stetig. Falls $f|_A = \mathrm{id}_A$, heisst A **Retrakt** von X und f **Retraktion**.

Beispiel 9.14.
- $X \to \{x_0\}, f(x) = x_0$ für ein $x_0 \in X$ ist eine Retraktion.
- S^n ist kein Retrakt von D^{n+1}.

Definition 9.15. Sei $A \hookrightarrow X$ ein Unterraum. Eine Retraktion $f : X \to A$ heisst **Deformationsretrakt** falls $\iota \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Dann heisst A **Deformationsretrakt**.

Bemerkung 9.16.
- $A \subseteq X$ Deformationsretrakt $\implies A \simeq X$.
- Sei $x_0 \in X$. $X \to \{x_0\}, x \mapsto x_0$ ist eine Deformationsretraktion $\Leftrightarrow \mathrm{id}_X \simeq \mathrm{const}_{x_0} \Leftrightarrow X$ zusammenziehbar.

Beispiel 9.17. S^n ist ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \quad \forall n \geq 0$.

10 Kategorientheorie

Definition 10.1. Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus:

- Einer Klasse $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von **Objekten**,
- Für je zwei Objekte X, Y eine Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ von Morphismen,
- Verknüpfungsabbildungen $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z), (f, g) \mapsto g \circ f$ und Identitätsmorphismen $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$, welche die folgenden Axiome erfüllen:
  - $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$,
  - $1_Y \circ f = f, f \circ 1_X = f$.

Beispiel 10.2. Beispiele von Kategorien:

- Die Kategorie $\mathscr{M}$ der Mengen, mit Objekten: Mengen und Morphismen: Abbildungen.

- Die topologische Kategorie $\mathscr{T}op$, mit Objekten: Topologische Räume und Morphismen: Stetige Abbildungen.
- $\mathrm{Top}_\bullet$ = Topologische Räume mit Basispunkt (X, x_0), stetige Abb. $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ mit $f(x_0) = y_0$.
- $\mathscr{H}\mathrm{Top}$: Die Objekte sind wie bei $\mathscr{T}op$ die topologischen Räume, die Morphismen sind aber die Homotopieklassen stetiger Abbildungen: $\mathrm{Mor}(X, Y) := [X, Y]$, also stetige Abb. $/ \simeq$. Die Verknüpfung ist definiert durch Verknüpfung der Repräsentanten: $[g] \circ [f] = [g \circ f]$.

Definition 10.3. Falls $f \circ g = \mathrm{id}_Y, g \circ f = \mathrm{id}_X$, so heissen f, g **Isomorphismen**.

Definition 10.4. Sein $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorieren. Unter einem **covarianten Funktor** $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ versteht man eine Zuordnung, durch die zu jedem Objekt X von $\mathcal{C}$ ein Objekt $\mathcal{F}(X)$ von $\mathcal{D}$ und jedem Morphismus $X \overset{\varphi}{\to} Y$ von $\mathcal{C}$ ein Morphismus $\mathcal{F}(X) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(Y)$ von $\mathcal{D}$ gegeben ist, derart dass jeweils

- $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$, (Identitätsaxiom)
- $\mathcal{F}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{F}(\varphi) \circ \mathcal{F}(\psi)$. (Kettenregel)

Definition 10.5. Ein **kontravarianter Funktor** ist analog definiert wie ein covarianter Funktor, nur mit dem Unterschied, dass $\mathcal{F}$ jetzt die Richtung der Morphismen umkehrt: Jedem $X \xrightarrow{\varphi} Y$ wird ein Morphismus $\mathcal{F}(X) \xleftarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(Y)$. Das Identitätsaxiom ist $\mathcal{F}(1_X) = 1_{\mathcal{F}(X)}$ und die Kettenregel $\mathcal{F}(\varphi \circ \psi) = \mathcal{F}(\psi) \circ \mathcal{F}(\varphi)$.

Bemerkung 10.6.
- $\mathcal{F} : \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}} \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{F}}, \mathcal{F}(V) = V^*, \mathcal{F}(f : V \to W) = f^* : W^* \to V^*$ ist ein kontravarianter Funktor.
- **Vergissfunktoren:** $\mathrm{Top} \to \mathrm{Set}, \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}, \mathrm{Top}_\bullet \to \mathrm{Top}, \ldots$

In der algebraischen Topologie konstruiert man Funktoren

$$\mathcal{F} : \underset{\text{oder } \mathscr{H}\mathrm{Top}_\bullet}{\mathscr{H}\mathrm{Top}} \longrightarrow \text{eine "algebraische" Kategorie wie Grp, Ab, ...}$$

Dann kann man $X \not\simeq Y$ beweisen, indem man prüft, dass $\mathcal{F}X$ und $\mathcal{F}Y$ nicht isomorph sind. Auch für stetige Abbildungen kann man $f \not\simeq g$ zeigen, indem man $\mathcal{F}f \neq \mathcal{F}g$ prüft.

Proposition 10.7. *$f \in \mathcal{C}(X, Y)$ Isomorphismus $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}f \in \mathcal{D}(\mathcal{F}X, \mathcal{F}Y)$ Isomorphismus.*

11 Die Fundamentalgruppe

Definition 11.1. Die **Verkettung** zweier Wege $\sigma, \tau : [0,1] \to X$ mit $\sigma(1) = \tau(0)$ ist der Weg $\sigma\tau$ mit

$$\sigma\tau(s) := \begin{cases} \sigma(2s) & 0 \leq s \leq 1/2 \\ \tau(2s-1) & 1/2 < s \leq 1. \end{cases}$$

Definition 11.2. Stetige Funktionen $f, g : X \to Y$ heissen **homotop relativ** $A \subseteq X$, geschrieben $f \simeq_A g$, falls eine Homotopie $H : X \times [0,1] \to Y$ existiert mit $H_0 = f, H_1 = g$ und $H|_{\{a\}\times[0,1]}$ konstant für jedes $a \in A$.

Lemma 11.3. *Sind $\sigma, \tau : [0,1] \to X$ Wege mit $\sigma(1) = \tau(0)$ und $\sigma \simeq_{\{0,1\}} \sigma'$ via $H, \tau \simeq_{\{0,1\}} \tau'$ via J, dann ist $\sigma\tau \simeq_{\{0,1\}} \sigma'\tau'$.*

Definition 11.4. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$. Dann ist die **Fundamentalgruppe** $\pi_1(X, x_0)$ die Menge der Wege $\sigma : [0,1] \to X$ mit $\sigma(0) = \sigma(1) = x_0$ modulo Homotopie rel $\{0,1\}$ mit der Gruppenoperation $[\sigma][\tau] := [\sigma\tau]$.

Beispiel 11.5. σ, τ Wege in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, mit $\sigma(0) = \tau(0), \sigma(1) = \tau(1) \implies \sigma \simeq_{\{0,1\}} \tau$ via $H_t(s) := t\tau(s) + (1-t)\sigma(s)$. Insbesondere ist $\pi_1(A, x_0)$ trivial für alle x_0.

Bemerkung 11.6.

- X wegzusammenhängend, $x_0, x_1 \in X \implies \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$.
- X zusammenziehbar $\implies$ X einf. zusammenhängend $\implies$ X wegzusammenhängend.
- $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Definition 11.7. X ist **einfach zusammenhängend**, falls X wegzusammenhängend ist und $\pi_1(X, x_0)$ trivial für alle $x_0 \in X$ ist.

Proposition 11.8. *$\pi_1(X, x_0)$ ist eine wohldefinierte Gruppe. Genauer gesagt:*

1. *$[\sigma] = [\sigma'], [\tau] = [\tau'] \implies [\sigma\tau] = [\sigma'\tau']$.*
2. *$[\sigma(\rho\tau)] = [(\sigma\rho)\tau]$.*
3. *Für ϵ der konstante Weg const_{x_0} ist $[\epsilon\sigma] = [\sigma\epsilon] = [\sigma]$.*
4. *Für $\sigma^{-1}(s) := \sigma(1-s)$ ist $[\sigma^{-1}\sigma] = [\sigma\sigma^{-1}] = [\epsilon]$.*

Satz 11.9. *Sei $f : X \to Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0$. Dann ist $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), f_*([\sigma]) = [f \circ \sigma]$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus, und π_1 definiert einen Funktor $\mathrm{Top}_\bullet \to \mathrm{Grp}$ mit $\pi_1(f) = f_*$.*

Korollar 11.10. *π_1 definiert einen Funktor $\mathrm{Top}_\bullet \to \mathrm{Grp}$.*

Korollar 11.11. *Sind $X \xrightarrow{f} Y$ und $X \xleftarrow{g} Y$ inverse Homöomorphismen, dann sind $\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0))$ und $\pi_1(X, x_0) \xleftarrow{g_*} \pi_1(Y, f(x_0))$ sind zueinander inverse Gruppenisomorphismen.*

Satz 11.12 (Brouwer'scher Fixpunktsatz)**.** *Jede stetige Funktion* $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2$ *hat einen Fixpunkt.*

Satz 11.13. S^n *ist einfach zusammenhängend für* $n \geq 2$.

12 π_1: Basispunktwechsel und Homotopie

Bemerkung 12.1. Falls x_0 und x_1 nicht in den gleichen Wegzusammenhangskomponenten liegen, dann gibt es keinen Zusammenhang zwischen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$.

Proposition 12.2. *Sei* γ *ein Weg von* $x_0 \in X$ *nach* $x_1 \in X$*, dann ist* $\psi_\gamma : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \psi_\gamma([\sigma]) = [(\gamma^{-1}\sigma)\gamma]$ *ein Gruppenisomorphismus.*

Bemerkung 12.3. Das heisst die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist in der Wegzusammenhangskomponente von x_0 eindeutig bis auf Isomorphismus.

Proposition 12.4. *Sein* $f, g : X \to Y$ *stetig und homotop via* H*. Sei* $x_0 \in X$ *und* γ *der Weg in* Y *mit* $\gamma(t) = H_t(x_0)$*. Dann kommutiert das folgende Diagramm:*

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[d, "\cong"', "\psi_\gamma"] \\ & \pi_1(Y, g(x_0)) \end{tikzcd} .$$

Bemerkung 12.5. Auch wenn $f(x_0) = g(x_0)$ gilt a priori $f_* \neq g_*$. Im Allgemeinen haben wir auch dann nur $\psi_\gamma \circ f_* = g_*$.

Korollar 12.6. $f : X \to Y$ *Homotopieäquivalenz* $\implies$ $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ *Isomorphismus.*

Bemerkung 12.7. Die Invserse von f_* ist nicht zwingendermassen durch die Homotopieinverse g_* gegeben, sondern im Allgemeinen durch $\psi_\gamma \circ g_*$ (siehe Beweis).

Satz 12.8 (Invariance of Domain)**.** $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \implies n = m$.

13 Freie Produkte von Gruppen und der Satz von Seifert-van Kampen

Definition 13.1. Ein **Wort** in einer Menge A ist eine endliche Folge $a_1 \cdots a_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in A, n \geq 0$. Die Verkettung zweier Wörter $a_1 \cdots a_n,\ b_1 \cdots b_m$ ist das Wort $a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_n$.

Bemerkung 13.2. Die Verkettung ist assoziativ und im Allgemeinen nicht kommutativ. Zudem hat sie das leere Wort als neutral Element.

Definition 13.3. Seien G, H Gruppen und $a_1 \dots a_n$ ein Wort in $G \sqcup H$. Ein **Reduktionsschritt** produziert ein neues Wort:

1. $a_1 \dots \cancel{a_i} \dots a_n : a_i = e_G$ oder e_H.
2. $a_1 \dots a_{n-1} b a_{i+2} \dots a_n : a_i a_{i+1}$ durch $b = a_{i+1} \cdot a_{i+2}$ ersetzen, falls $a_i, a_{i+1} \in G$ oder $a_i, a_{i+1} \in H$.

Lemma 13.4. *Jedes Wort in $G \sqcup H$ hat eine eindeutige Reduktion (d.h. ein reduziertes Wort, welches durch endlich viele Reduktionsschritte erreicht wird).*

Definition 13.5. Das **freie Produkt** $G*H$ der Gruppen G und H ist folgende Gruppe: die Menge aller reduzierten Wörter in $G \sqcup H$ mit Gruppenoperation Verkettung gefolgt von Reduktion.

Proposition 13.6. *$G * H$ erfüllt die Gruppenaxiome:*

(i) *Die Operation ist assoziativ.*

(ii) *Das leere Wort ist neutral.*

(iii) $(a_1 \cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$.

Beispiel 13.7. $\langle a_1 \rangle * \cdots * \langle a_n \rangle$ heisst **freie Gruppe** mit Erzeugern $a_1, \dots, a_n$, wird auch $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ geschrieben.

Bemerkung 13.8. $G * H$ ist das Koprodukt von G und H. D.h. gegeben Gruppenhomomorphismen $g : G \to K$, $h : H \to K$, gibt es genau einen Gruppenhomomorphismen $g * h : G * h \to K$, sodass folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
& G \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, hook, "\iota_G"] & \\
K & & G * H \arrow[ll, dashed, "\exists!\ g*h"'] \\
& H \arrow[ul, "h"] \arrow[ur, hook', "\iota_H"'] &
\end{tikzcd}$$

Satz 13.9 (Seifert-van Kampen)**.** *Sei X ein topologischer Raum und $X = U \cup V$ mit U, V, $U \cap V$ offene, wegzusammenhängenden Mengen, die $x_0 \in X$ enthalten.*

$$\begin{tikzcd}
U \cap V \arrow[r, hook, "\kappa^V"] \arrow[d, hook, "\kappa^U"] & V \arrow[d, hook, "\iota^V"] \\
U \arrow[r, hook, "\iota^U"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[r, "\kappa^V_*"] \arrow[d, "\kappa^U"] & \pi_1(V, x_0) \arrow[d, "\iota^V_*"] \\
\pi_1(U, x_0) \arrow[r, "\iota^U_*"] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

(1) $\iota^U_* * \iota^V_* : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ *ist surjektiv.*

(2) $N = \ker(\iota_*^U * \iota_*^V)$ *ist erzeugt von allen Konjugierten von Elementen mit der Form* $\kappa_*^U([\sigma])\kappa_*^V([\sigma^{-1}])$ *mit* $[\sigma] \in \pi_1(U \cap V, x_0)$.

Insbesondere ist $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)/N$.

Beispiel 13.10. 1. Falls U, V einfach zusammenhängend sind, dass ist X einfach zusammenhängend.

2. Falls $U \cap V$ einfach zusammenhängend ist, dann ist $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$.

Beispiel 13.11. Sei $X = \text{Torus}\backslash\text{Offene Scheibe}$ und $Y = X_1 \cup_\varphi X_2, \varphi : X_2 \supseteq \{\text{Rand der Scheibe}\} \to X_1, \varphi(x) = x$. Wir wollen die Fundamentalgrupp $\pi_1(Y, x_0) \cong ?$ bestimmen.
Wir schreiben $Y = U \cup V$ für $U = X_1 \cup$ kleine offene Umgebung der Naht in $X_2, V = X_2 \cup$ kleine offene Umgebung der Naht in X_1. Dann ist $U \cap V =$ offener Zylidner um Naht. Wir haben also folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "1\mapsto\alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}"] \arrow[d, "1\mapsto\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}"] & \langle\alpha_2, \beta_2\rangle \arrow[d, "\iota_*^V"] \\
\langle\alpha_1, \beta_1\rangle \arrow[r, "\iota_*^U"] & \pi_1(Y, x_0)
\end{tikzcd}$$

Also folgt

$$\pi_1(Y, x_0) \cong \langle\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 | \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1}\alpha_2\beta_2\rangle.$$

14 Die Abzählbarkeitaxiome

Definition 14.1. Ein topologischer Raum X heisst **zweitabzählbar**, falls X eine abzählbare Basis hat.

Definition 14.2. Eine **Umgebungsbasis** eines $x \in X$ ist eine Menge N von Umgebungen von x, sodass für jede Umgebung U von x ein $V \in N$ existiert mit $V \subseteq U$. Der Raum X heisst **erstabzählbar** falls $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis zulässt.

Beispiel 14.3.

- Zweitabzählbar impliziert erstabzählbar.
- X metrisierbar $\implies$ X erstabzählbar, da $\{B(x, 1/k) : k \in \mathbb{N}\}$ eine Umgebungsbasis von x ist.
- $\mathbb{R}^n$ ist zweitabzählbar mit Basis $\{B(v, 1/k) : v \in \mathbb{Q}^n, n \in \mathbb{N}\}$.
- Ein überabzählbarer Raum mit diskreter Topologie ist erstabzählbar, aber nicht zweitabzählbar.
- $\mathbb{R}^\mathbb{R} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ mit der Produkttopologie ist nicht erstabzählbar.

Satz 14.4.

1. *Falls $A \subseteq X$ abgeschlossen ist und eine Folge hat, welche einen Grenzwert in X hat, so liegt dieser Grenwzert* immer *in A. Wir sagen A ist* **folgenabgeschlossen**. *Folgenabgeschlossenheit impliziert abgeschlossen, falls X* erstabählbar *ist.*
2. *Falls $f : X \to Y$ stetig ist, dann ist X* immer **folgenstetig** *(d.h. konvergiert $x_1, x_2, \dots \in X$ gegen x, so konvergiert $f(x_1), \dots \in Y$ gegen $f(x)$). Folgenstetigkeit impliziert stetigkeit nur falls X* erstabzählbar *ist.*
3. *Falls X kompakt ist, dann hat jede Folge in X eine konvergente Teilfolge, falls X* erstabzählbar ist*, wir sagen X ist* **folgenkompakt**. *Folgenkompaktheit impliziert Kompaktheit falls X zweitabzählbar oder metrisierbar ist.*

Korollar 14.5. *Ist X metrisierbar oder zweitabzählbar, gelten alle folgende Äquivalenzen:*

$$\begin{aligned} \textit{Abgeschlossen} &\Longleftrightarrow \textit{Folgenabgeschlossen,} \\ \textit{Stetig} &\Longleftrightarrow \textit{Folgenstetig,} \\ \textit{Kompakt} &\Longleftrightarrow \textit{Folgenkompakt.} \end{aligned}$$

Beispiel 14.6. Sei $C([0,1],[-1,1])$ die Menge der stetigen Funktionen $[0,1] \to [-1,1]$. Sei $X = C([0,1],[-1,1])$ mit Unterraumtopologie des Produktraumes $[-1,1]^{[0,1]}$ und $Y = C([0,1],[-1,1])$ mit der Topologie die von der L^1-Metrik $d(f,g) = \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f(x) - g(x)|$ induziert wird. Sei $\varphi : X \to Y, \varphi(f) = f$, dann ist φ:

- *folgenstetig,* denn: $\lim_{n\to\infty} f_n = g$ in $X \Leftrightarrow \forall\, x \in [0,1] : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$. Es folgt $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathrm{d}x\, |f_n(x) - g(x)| = \int_0^1 \mathrm{d}x \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - g(x)| = 0$ nach dem Satz der majorisierten Konvergenz.

- *nicht stetig,* denn: angenommen, $\varphi^{-1}(B(0,1/2))$ sei offen, so enthält es ein Kästchen um 0, das heisst es gibt $s_1 < s_1 < \dots < s - k, \epsilon > 0$, sodass $K = \{f \in X : |f(s_i)| < \epsilon\} \subseteq \varphi^{-1}(B(0,1/2))$. Wähle ein stetiges $g : [0,1] \to [-1,1]$ mit $g(s_i) = 0 \forall i$ und $g(1) = 1$ für alle x mit $|x - s_i| > 1/4k\, \forall i$. Dann $g \in K$, aber $d(0,g) = \int_0^1 \mathrm{d}x\, |g(x)| \geq 1 - k \cdot 2 \cdot \frac{1}{4k} = \frac{1}{2}$, ein Widerspruch. Insbesondere ist X nicht erstabzählbar.

15 Mannigfaltigkeiten

Definition 15.1 (Erinnerung Analysis II)**.** Sei $0 < d < n$. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst d-dimensionale **glatte Untermannigfaltigkeit** falls für alle $x \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x, eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von 0, und ein Diffeomorphismus $\Psi : U \to V$ existiert, mit $\Psi(M \cap U) = \{y \in V : y_{d+1} = \dots = y_n = 0\}$.

Definition 15.2. Eine **topologische Untermannigfaltigkeit** ist analog definiert, man verlangt nur, dass φ ein Homöomorphismus ist.

Beispiel 15.3. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ glatt, $v \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert $\implies$ $f^{-1}(v)$ ist eine glatte $(n-m)-$dimensionale Untermannigfaltigkeit. $S^{n-1} = f^{-1}(\{1\})$ für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = \|x\|^2$.

Definition 15.4. Ein topologischer Raum M heisst **d-dimensionale Mannigfaltigkeit** (für $d \in \mathbb{N}_0$) falls er die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1. Jedes $x \in M$ hat eine offene Umgebung $U \cong \mathbb{R}^d$.
2. M ist Hausdorff.
3. M ist zweitabzählbar.

Bemerkung 15.5. Bedingung (1) heisst **lokal euklidisch**. Es genügt. dass $U \underset{\cong}{\xrightarrow{\varphi}} V$ für $V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Denn dann $\exists\, \varepsilon > 0$ mit $B(\varphi(x), \varepsilon) \subseteq V$, und also ist $U' = \varphi^{-1}(B(\varphi(x), \varepsilon))$ eine offene Umgebung von x mit $U' \cong B(\varphi(x), \varepsilon) \cong \mathbb{R}^d$.

Bemerkung 15.6. Ist $M \neq \varnothing$ eine d-dimensionale und e-dimensionale Mannigfaltigkeit, so gilt $d = e$. Dies folgt daraus, dass: sind $U \subseteq \mathbb{R}^d, V \subseteq \mathbb{R}^e$ offen, nicht leer, und $U \cong V$, so gilt $d = e$.

Proposition 15.7. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale topologische Untermannigfaltigkeit $\implies$ M d-dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Satz 15.8 (Einbettungssatz)**.** *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann existieren $n \in \mathbb{N}$ und eine topologische Untermannigfaltigkeit $M' \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $M \cong M'$.*

Beispiel 15.9 (Anti-Beispiel)**.** Die Zahlengerade mit zwei Ursprüngen ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}$, zweitabzählbar, aber nicht T_2.

Satz 15.10 (Klassifikation von Mannigfaltigkeiten bis auf Homöomorphie)**.**

- *Dim 0: $M \cong$ diskreter Raum (endlich oder abzählbar)*
- *Dim 1: M zusammenhängend $\Rightarrow M \cong S^1$ oder $\mathbb{R}$.*

16 Konstruktion stetiger Abbildungen (Lemma von Urysohn)

Definition 16.1. Ein topologischer Raum X heisst **normal**, falls für alle abgeschlossenen disjunkten $A, B \subseteq X$ offene disjunkte $U, V \subseteq X$ existieren mit $A \subseteq U, B \subseteq V$.

Beispiel 16.2.

- Diskrete und indiskrete Räume sind normal.
- Metrisierbar $\implies$ Normal.
- Für normale Räume X gilt: X ist Hausdorff $\iff \forall\, x \in X$ ist $\{x\}$ abgeschlossen.

Satz 16.3 (Lemma von Urysohn)**.** *Ist X normal, und $A, B \subseteq X$ abgeschlossen, disjunkt, so gibt es eine stetige Funktion $g : X \to [0,1]$ mit $g(a) = 0, g(b) = 1$ für alle $a \in A, b \in B$.*

Notation. Für dieses Kapitel verwenden wir: Für $C, D \subseteq X : C < D \iff \overline{C} \subseteq D^\circ$. $<$ ist transitiv.

Lemma 16.4. *Sei X normal, $C, D \subseteq X$ mit $C < D \implies \exists E \subseteq X$ mit $C < E < D$.*

Satz 16.5 (Fortsetzungssatz von Tietze)**.** *Sei X ein normaler topologischer Raum. $D \subseteq X$ abgeschlossen und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein stetiges $g : X \to \mathbb{R}$ mit $g|_D = f$.*

Satz 16.6. *Ist X Hausdorff, kompakt und zweitabzählbar, so ist X metrisierbar.*

Lemma 16.7. *Sei X normal, $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt $\implies \exists U, V \subseteq X$ offen mit $A \subseteq U, B \subseteq V, \overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.*

17 Überlagerungen

Definition 17.1. Sei X ein topologischer Raum. Eine **Überlagerung** von X ist eine stetige Abbildung $p : Y \to X$, sodass es einen diskreten Raum $D \neq \varnothing$ und für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung U gibt mit einem Homömorphismus $\psi : p^{-1}(U) \to U \times D$ mit $\psi_U(y) = p(y)$ für alle $y \in p^{-1}(U)$ (ψ_U ist die U-Komponente von ψ). Das folgende Diagramm kommutiert also:

$$\begin{tikzcd} Y \supseteq p^{-1}(U) \arrow[r, "\psi", "\cong"'] \arrow[d, "p"'] & U \times D \arrow[dl, "\pi_U"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Eine solche Umgebung $U \subseteq X$ heisst **gleichmässig überlagert**, und die $\psi^{-1}(U \times \{d\}) \subseteq Y$ heissen **Blätter**. Die Kardinalität von D heisst **Grad** oder **Blättrigkeit** von p. Ist D endlich, heisst p **endliche Überlagerung**. Y heisst **Überlagerungsraum** oder auch Überlagerung.

Beispiel 17.2. $\pi_X : X \times D \to X$ für X beliebig, $D \neq \varnothing$ diskret ist eine Überlagerung.

Beispiel 17.3. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $p(t) = e^{it}$ ist eine Überlagerung mit $D = \mathbb{Z}$. Für $x = 1$, sei $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$, dann ist $p^{-1}(U) = \mathbb{R} \setminus \{\pm\pi, \pm 3\pi, \ldots\}$. Wir können $\psi : p^{-1}(U) \to U \times D$ durch $\psi(t) = (e^{it}, \lfloor \frac{t+\pi}{2\pi} \rfloor)$ definieren.

Beispiel 17.4. $p : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, $p(z) = z^n$ für ein fixes $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist eine Überlagerung.

Definition 17.5 (Alternative Definition)**.** Ein stetiges $p : Y \to X$ heisst **Überlagerung** falls es eine Menge $D \neq \emptyset$ gibt, sodass für alle $x \in X$ es eine offene Umgebung U sodass $p^{-1}(U) \subseteq Y$ eine disjunkte Vereinigung von offenen Mengen $V_d, d \in D$ ist mit $p|_{V_d} : V_D \to U$ Homöomorphismus.

Bemerkung 17.6. p ist surjektiv, und jede **Faser** $p^{-1}(x)$ hat die gleiche Kardinalität wie D.

Beispiel 17.7. $T = S^1 \times S^1, p : T \to T, p(z, w) = (z^3, w^3)$ ist eine sechsfache Überlagerung.

Proposition 17.8. *Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung, $\sigma : [0, 1] \to X$ stetig, und $y_0 \in p^{-1}(\sigma(a))$. Dann gibt es genau eine* **Hochhebung** *$\tilde{\sigma}$ von σ mit Startpunkt y_0, d.h. $\tilde{\sigma} : [a, b] \to Y$ stetig mit*

$p \circ \tilde{\sigma} = \sigma$ und $\tilde{\sigma(a)} = y_0$.

$$\begin{tikzcd} \{a\} \arrow[r, "a \longmapsto y_0"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, "p"] \\ {[a,b]} \arrow[r, "\sigma"'] \arrow[ur, dashed, "\exists!\, \tilde{\sigma}"] & X \end{tikzcd}$$

Satz 17.9. *Sei G eine Gruppe, die* frei und eigentlich diskontinuierlich *auf Y operiert, d.h. $\forall y \in Y \exists V \subseteq Y$ offen, $y \in V$ sodass $V \cap gV = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$. Sei $X = Y/G$.*

1. *$p : Y \to X, y \mapsto [y]$ ist eine Überlagerung vom Grad $|G|$.*
2. *Ist Y einfach zusammenhängend, so ist $\pi_1(X, x_0) \cong G$.*

Beispiel 17.10.

1. $Y = \mathbb{R}^m, G = \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \ni n \cdot y = y + n\vec{v}$, für fixes $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$.
2. $Y = S^1, G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, (n + k\mathbb{Z}) \cdot y = e^{\frac{2\pi i n}{k}} \cdot y$.

Korollar 17.11. *$\mathbb{Z} \to \pi(S^1, 1), n \mapsto [s \mapsto e^{2\pi i n s}]$ ist ein Gruppenisomorphismus.*

Proposition 17.12. *Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung, A ein topologischer Raum. $H : A \times [0,1] \to X$ stetig, $f : A \to Y$ Hochhebung von H_0, d.h. f stetig und $p(f(a)) = H(a, 0)$ für alle $a \in A$. Dann gibt es genau eine Hochhebung $\tilde{H} : A \times [0,1] \to Y$ von H mit $\tilde{H}_0 = f$.*

$$\begin{tikzcd} A \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, "p"] \\ A \times [0,1] \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists! \widetilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$

Korollar 17.13. *Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung, $\sigma, \tau : [0,1] \to X$ Wege, $y_0 \in p^{-1}(\sigma(0))$. Dann gilt*

$$\sigma \simeq_{\{0,1\}} \tau \implies \tilde{\sigma} \simeq_{\{0,1\}} \tilde{\tau}.$$

Beispiel 17.14. Sei B der unendliche Baum, dessen jede Ecke Endpunkte von genau 4 Kanten ist. Genauer gesagt: Sei $V = \langle a, b \rangle$ mit der diskreten Topologie und $B = (V + V \times \{a, b\} \times [0,1])/\sim$ mit $(w, g, 0) \sim w, (w, g, 1) \sim wg$ für alle $w \in V, g \in \{a, b\}$. B ist einfach zusamenhängend. Auf B operiert $\langle a, b \rangle$ frei und eigentlich diskontinuierlich durch

$$v \cdot w := vw \in V$$
$$v \cdot (w, g, t) := (vw, g, t).$$

Es folgt aus Satz 17.9, dass $\pi_1(B/\langle a,b\rangle, e) \cong \langle a,b\rangle$. Es gilt $B/\langle a,b\rangle \cong S_a \vee S_b$ mit $S_a = S_b = (S_1, 1)$.

$$\begin{aligned}
[v] &\mapsto 1 \\
[(w,g,t)] &\mapsto e^{i1} \in S_g.
\end{aligned}$$

Insbesondere haben wir eine Überlagerung

$$\begin{aligned}
B &\to S_a \vee S_b \\
V \ni w &\mapsto 1
\end{aligned}$$

$V \times \{a,b\} \times [0,1] \ni (w,g,t) \mapsto e^{it} \in S_g$.

18 Klassifikation von Überlagerungen

Proposition 18.1. *Sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung (d.h. $p : X \to Y$ Überlagerung und $p(y_0) = x_0$), dann folgt, dass $p_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$ injektiv ist.*

Satz 18.2 (Existenzsatz)**.** *Sei X wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Dann gibt es für jede Untergruppe $G \subseteq \pi_1(X, x_0)$ eine Überlagerung $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ mit $G = \mathrm{im}(p_*)$.* [Ohne Beweis]

Korollar 18.3 (Satz von Nielsen-Schreier)**.** *Untergruppen freier Gruppen sind frei.*

Definition 18.4. Zwei Überlagerungen $p^i : Y^i \to X, i = 1,2$ heissen **isomorph**, falls es einen Homöomorphismus $f : Y^1 \to Y^2$ gibt mit $p^1 = p^2 \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
Y^1 \arrow[rr, "f", "\cong"'] \arrow[dr, "p^1"'] & & Y^2 \arrow[dl, "p^2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Satz 18.5 (Eindeutigkeitssatz)**.** *Sei X wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Dann sind zwei wegzusammenhängende Überlagerungen $p_i : Y_i \to X, i = 1,2$ genau dann isomorph, falls $\mathrm{im}(p^1_*) = \mathrm{im}(p^2_*)$.* [Ohne Beweis]

Proposition 18.6 (Hochhebbarkeitskriterium)**.** *Sei $p : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung, Z wegzusammenhängend und lokal einfach zusammenhängend. Dann hat $f : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ genau dann eine Hochhebung $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(z_0) = y_0$ falls $\mathrm{im}(f_*) \subseteq \mathrm{im}(p_*)$. Falls $\tilde{f}$ existiert, ist es eindeutig.*

Satz 18.7 (Galoiskorrespondenz)**.** *Sei X gegeben. Schreibe $p^G : (Y^G, y_0^G) \to (X, x_0)$ für die eindeutige Überlagerung mit $\mathrm{im}(p^G_*) = G$. Dann gibt es für jede Inklusion $\iota^{HG} : H \hookrightarrow G$ von*

Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$ eine Überlagerung $p^{HG} : Y^H \to Y^G$ sodass die folgenden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
Y^I \arrow[d, "p^{IH}"] \arrow[dd, bend right=60, "p^{IG}"'] \\
Y^H \arrow[d, "p^{HG}"] \\
Y^G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi_1(Y^H, y_0^H) \arrow[r, "p_*^H"] \arrow[d, "p_*^{HG}"'] & H \arrow[d, hook, "\iota^{HG}"] \\
\pi_1(Y^G, y_0^G) \arrow[r, "p_*^G"'] & G
\end{tikzcd}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
\pi_1(Y^H, y_0^H) \arrow[dd, "p_*^{HG}"'] \arrow[dr, "p_*^H"] & \\
& \pi_1(X, x_0) \\
\pi_1(Y^G, y_0^G) \arrow[ur, "p_*^G"'] &
\end{tikzcd}$$

19 Aussagen und Beispiele aus den Serien

19.1 Serie 1

1. Für jede Menge X bildet die Menge der endlichen Komplimente mit der leeren Menge eine Topologie.
2. In jedem metrischen Raum kann man die Metrik so ändern, dass zwei beliebige Punkte den Abstand ≤ 1 haben, ohne die Topologie zu ändern.

19.2 Serie 2

Definition 19.1. Sei X eine Menge und sei Y ein topologischer Raum. Sei $f : X \to Y$ eine beliebige Funktion. Die Menge $\mathcal{O}$ der Teilmengen von X der Form $U = f^{-1}(V)$ für offene Mengen $V \subseteq Y$ heisst **Initialtopologie** bezüglich f.

19.3 Serie 3

Proposition 19.2 (Übung 1)**.** *Eine konvergente Folge in einem Hausdorffraum hat nur einen Häufungspunkt (Häufungspunkt: jede Umgebung des Punktes hat unendlich viele Folgenglieder). Der Grenzwert einer Folger, sofern existiert, ist eindeutig.*

Proposition 19.3 (Übung 6)**.** *Es gilt die Folgenden:*

(1) *Das Produkt zweier nicht-leerer topologischer Räume X, Y ist kompakt, genau dann wenn X und Y kompakt sind.*

(2) *$\prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann zusammenhängend, wenn X_i zusammenhängend für alle $i \in I$ ist.*

(3) *$\prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann wegzusammenhängend, wenn X_i wegzusammenhängend für alle $i \in I$ ist.*

Lemma 19.4 (Übung 6)**.** *Sei X ein topologischer Raum. Dann X ist nicht zusammenhängend genau dann, wenn es eine stetige, surjektive Abbildung von X nach $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie gibt.*

Satz 19.5 (Übung 7, Satz von Brouwer). *Jeder nicht-leere, total unzusammenhängende, metrisierbare, kompakte topologische Raum X ohne isolierte Punkte ist homöomorph zu C.*

19.4 Serie 4

Beispiel 19.6 (Übung 2). Für $n \in \mathbb{N}$, sei $\mathbb{D}^n = \{v \in \mathbb{R}^n : |v| \leq 1\}$ mit der Euklidischen Topologie ausgestattet. Sei $\sim$ gegeben durch

$$v \sim w \iff v = w \quad \text{oder} \quad |v| = |w| = 1.$$

Dann ist $\mathbb{D}^n/\sim \,\cong \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Betrachte die stetige Funktion gegeben durch

$$\begin{aligned} f : \mathbb{D}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ (v_1, \dots, v_n) &\longmapsto (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n, 1 - 2|v|), \end{aligned}$$

mit $\lambda = \sqrt{(4 - 4|v|)/|v|}$ wenn $|v| \neq 0$ und $\lambda = 0$ wenn $|v| = 0$. Für alle $|v| = 1$ ist $f(v) = (0, \dots, 0, -1)$, also f induziert eine stetige Abbildung $g : \mathbb{D}^n/\sim \,\to \mathbb{S}^n$. $\mathbb{D}^n/\sim$ ist kompakt als Quotient eines kompakten Raums und $\mathbb{S}^n$ ist Hausdorff, somit ist g ein Homöomorphismus.

Beispiel 19.7. Sei $\sim$ auf $\mathbb{R}^n$ definiert durch $v \sim w \iff v = w \vee |v|, |w| \geq 1$. Dann gilt $\mathbb{R}^n/\sim \,\cong \mathbb{D}^n/\sim \,\cong \mathbb{S}^n$. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{D}^n/\sim$ mit

$$f(x) = \begin{cases} [x] & |x| \leq 1 \\ [x/|x|] & |x| > 1. \end{cases}$$

Dann definiert f eine stetig Abbildung welche konstant auf Äquivalenzklassen ist, also f induziert eine stetig Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^n/\sim \,\to \mathbb{D}^n/\sim$. Analog induziert $g : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n/\sim$ mit $g(x) = [x]$ eine stetige Funktion $\tilde{g} : \mathbb{D}^n/\sim \,\to \mathbb{R}^n/\sim$. $\tilde{g}$ ist genau die Umkehrabbildung von $\tilde{f}$. Somit folgt die Aussage.

Beispiel 19.8. Der Torus ist definiert als $\mathbb{T} = [0,1] \times [0,1]/\sim$ mit $(s, 0) \sim (s, 1)$ für alle $s \in [0,1]$ und $(0, t) \sim (1, t)$ für alle $t \in [0,1]$. Es gilt $\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Beispiel 19.9 (Übung 4). Es gibt drei äquivalente Definitionen des projektiven Raums $\mathbb{PR}^2$:

1. $\mathbb{S}^2/\sim$ mit $u \sim v \iff u = v \vee u = -v$.
2. $\mathbb{D}^2/\sim$ mit $u \sim v \iff u = v$ oder $u = -v$ für $u, v \in \partial\mathbb{D}^2$.
3. $\mathcal{L}$ die Menge aller Geraden in $\mathbb{R}^3$ mit der Metrik $\mathrm{d}(L_1, L_2) = \alpha$, wobei $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ der Winkel zwischen L_1 und L_2 ist.

$\boxed{\mathbb{D}^2/\sim \,\cong \mathbb{S}^2/\sim}$ Sei $\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) \in S^2 : z \geq 0\}$. Definiere $f : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{H}^2 \subseteq \mathbb{S}^2$ durch $f((x, y)) = \left(x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}\right)$. Dann ist f stetig und konstant auf Äquivalenzklassen und es induziert eine stetige Funktion $\pi_2 \circ f \circ \pi_1$, wobei $\pi_1 : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{D}^2/\sim$ und $\pi_2 : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2/\sim$. $\mathbb{S}^2/\sim$ ist Hausdorff, denn wir können für $u, v \in \mathbb{S}^2$ mit $\pi_2(u) \neq \pi_2(v)$ offene Mengen $U, V \subseteq \mathbb{S}^2$ finden, die symmetrisch bezüglich des Ursprungs sind mit $U \cap V = \varnothing$. Dann sind $\pi_2(U), \pi_2(V)$ disjunkte offene Menge um $[u], [v]$.

$\boxed{\mathbb{S}^2/\sim \cong \mathcal{L}}$ Definiere $h : \mathbb{S}^2 \to \mathcal{L}$, wobei $h(u)$ die Gerade ist, die durch u und den Ursprung verläuft. Die Abbildung ist stetig und induziert $\tilde{h} : \mathbb{S}^2/\sim \to \mathcal{L}$. $\mathcal{L}$ ist Hausdorff, weil es ein metrischer Raum ist.

Beispiel 19.10 (Übung 5)**.** Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einem topologischen Raum X mit der Eigenschaft, dass $\pi : X \to X/\sim$ offen ist. Sei $R = \{(x, y) \subseteq X \times X : x \sim y\}$. Dann gilt $X/\sim$ ist Hausdorff $\iff$ $R \subseteq X \times X$ ist abgeschlossen.

Definition 19.11. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum und ∞ ein abstraktes Symbol. Wir definieren die **Einpunktkompaktifizierung** $\hat{X}$ von X als die Menge $X \cup \{\infty\}$ mit der Topologie

$$\mathcal{O}_{\hat{X}} := \mathcal{O}_X \cup \{\{\infty\} \cup (X \setminus K) : K \subseteq X \text{ kompakt und abgeschlossen}\}.$$

Proposition 19.12 (Übung 6)**.** *$\hat{X}$ ist ein kompakter topologischer Raum.*

Lemma 19.13 (Übung 6, aus der Lösung)**.** *Sei Y ein topologischer Raum, der Hausdorff und kompakt ist. Sei $y \in Y$ und $X = Y \setminus \{y\}$. Dann ist $\hat{X} \cong Y$.*

19.5 Serie 5

Proposition 19.14 (Übung 1)**.** *CX ist wegzusammenhängend.*

Proposition 19.15 (Übung 2)**.** *$C\mathbb{S}^n \cong \mathbb{D}^{n+1}$ via $\varphi : C\mathbb{S}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{D}^{n+1}, \varphi([x, t]) = (1 - t)x$, $\Sigma\mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^{n+1}$.*

Beispiel 19.16 (Übung 3)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi : \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n, x \mapsto x$. Dann ist $\mathbb{D}^n \cup_\varphi \mathbb{D}^n \cong \mathbb{S}^n$. Analog gilt dies für einen beliebigen topologischen Raum, also $CX \cup_\varphi CX \cong \Sigma X$, mit $\varphi : X \times \{0\} \to CX, (x, 0) \mapsto (x, 0)$.

Definition 19.17. Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G, versehen mit einer Topologie, sodass $G \times G \to G, (g, g') \mapsto gg'$ und $G \to G, g \mapsto g^{-1}$ stetig sind.

Proposition 19.18 (Übung 4, facts über topologische Gruppen)**.**

1. *Stetigkeit der Abbildungen in der Definition ist äquivalent dazu, dass $G \times G \to G, (g, g') \mapsto g^{-1}g'$ stetig ist.*
2. *$\forall g_0 \in G$ sind $G \to G, g \mapsto gg_0$ und $G \to G, g \mapsto g_0g$ Homöomorphismen.*
3. *Die Topologie auf G ist eindeutig bestimmt durch eine Umgebungsbasis von e.*
4. *Homomorphismus f ist stetig auf $G \Leftrightarrow f$ ist stetig bei e.*
5. *$H \leq G$ offen $\Rightarrow H$ abgeschlossen.*
6. *$H \trianglelefteq G \Rightarrow G/H$ ist mit Quotiententopologie wieder eine topologische Gruppe.*

Proposition 19.19 (Übung 5). *Sei X ein Hausdorffraum und K eine kompakte Teilmenge von X. Dann ist X/K Hausdorff. Wenn X kompakt ist, ist $\widehat{X \setminus K} = X/K$.*

Satz 19.20 (Übung 6). *Für alle Familien kompakter topologischer Räume $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ ist das Produkt*

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$$

wiederum kompakt.

19.6 Serie 6

Lemma 19.21 (Verklebungslemma, Übung 1). *Seien X und Y topologische Räume und sei $X = A \cup B$ eine Überdeckung von X mit abgeschlossenen Mengen $A, B \subseteq X$. Weiter seien $f : A \to Y$ und $g : B \to Y$ stetige Abbildungen mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A \cap B$ und sei $h : X \to Y$ definiert durch*

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A \\ g(x) & \text{falls } x \in B. \end{cases}$$

Dann h ist eine wohldefinierte stetige Abbildung.

Bemerkung 19.22. Das Verklebungslemma lässt sich verallgemeinern für eine Überdeckung von X mit endlich vielen abgeschlossenen Mengen, aber auch für eine beliebige Überdeckung von X mit offenen Mengen.

Proposition 19.23 (Übung 1). *Sei X ein topologischer Raum und seien $x, y, z \in X$. Seien γ_0 und γ_0' zwei Wege in X von x nach y und γ_1 und γ_1' zwei Wege in X von y nach z. Zeigen Sie, dass falls $\gamma_0 \simeq \gamma_0'$ und $\gamma_1 \simeq \gamma_1'$ rel Endpunkte gilt, so gilt auch $\gamma_0\gamma_1 \simeq \gamma_0'\gamma_1'$ rel Endpunkte.*

Proposition 19.24 (Übung 3). *Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}, p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ die stetigen Abbildungen gegeben durch $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}(v) = v$ und $p(v) = -v$. Wenn n ungerade ist, ist p homotop zu $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^n}$.*

Proposition 19.25 (Übung 4). *Das Möbiusband ist homotopieäquivalent zum Zylinder $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$ (beide sind homotopäquivalent zu $\mathbb{S}^1 \cong [0,1]/\sim$, mit $0 \sim 1$).*

Proposition 19.26 (Übung 5). *Seien X und Y homotopieäquivalente Räume. Dann ist X (weg-)zusammenhängend genau dann wenn Y (weg-)zusammenhängend ist. Weiter definiert eine Homotopieäquivalenz $f : X \to Y$ eine Bijektion zwischen den (Weg-)Zusammenhangskomponenten von X und Y durch $[x] \mapsto [f(x)]$.*

Proposition 19.27 (Übung 6). *$O(n) \subseteq \mathrm{GL}(n)$ ist ein Deformationsretrakt.*

Definition 19.28. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Seien A und B zwei Objekte von $\mathcal{C}$. Ein **Koprodukt** C von A und B ist ein Objekt von $\mathcal{C}$ mit zwei Morphismen $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, C)$ und $\beta \in \mathrm{Hom}(B, C)$, sodass folgendes gilt: Für alle Objekte D von $\mathcal{C}$ und Morphismen $\alpha' \in \mathrm{Hom}(A, D)$ und $\beta' \in \mathrm{Hom}(B, D)$

gibt es einen **eindeutigen** Morphismus $\gamma \in \mathrm{Hom}(C, D)$ mit $\alpha' = \gamma \circ \alpha$ und $\beta' = \gamma \circ \beta$.

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\
C \arrow[rr, dashed, "\exists!\gamma"'] & & D \\
& B \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "\beta'"'] &
\end{tikzcd}$$

Satz 19.29 (Koprodukt, Übung 7)**.** *Das Koprodukt, sofern es existiert, ist eindeutig bis auf Isomorphie.*

19.7 Serie 7

Proposition 19.30 (Übung 1)**.** *Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0$. Dann gilt*

1. $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), [\sigma] \mapsto [f \circ \sigma]$ *ist ein Gruppenhomomorphismus.*
2. $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.
3. *Sei Z ein topologischer Raum, $g : Y \to Z$ stetig, s.d. $z_0 = g(f(x_0))$. Dann gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Proposition 19.31 (Übung 1)**.** *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, und $\alpha : X \to Y$, $\beta : Y \to X$ Morphismen, sodass $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_Y$ und $\beta \circ \alpha$ ein Isomorphismus ist. Dann ist $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_X$.*

Proof. Nach Annahme gibt es $g \in \mathrm{Hom}(X, X)$, sodass $g \circ (\beta \circ \alpha) = \mathrm{id}_X$. Somit ist $g \circ \beta \circ \alpha \circ \beta = \beta$ und da $\alpha \circ \beta = \mathrm{id}_Y$, gilt $g \circ \beta = \beta$. Daraus folgt $\mathrm{id}_X = (g \circ \beta) \circ \alpha = \beta \circ \alpha$. □

Proposition 19.32 (Übung 2)**.** *Sei $A \subseteq X$ ein Retrakt bezüglich $\rho : X \to A$ und bezeichne $i : A \hookrightarrow X$ die Inklusion. Sei $a \in A$. Dann ist $i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$ injektiv und $\rho_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a)$ surjektiv (denn $\rho \circ i = \mathrm{id}_A \Rightarrow \rho_* \circ i_* = \mathrm{id}_{\pi_1(A,a)}$).*
Weiter sind i_* und ρ_* zueinander inverse Gruppenisomorphismen, falls A ein Deformationsretrakt ist bezüglich ρ, also $i \circ \rho \simeq \mathrm{id}_X$.

Proposition 19.33 (Übung 3)**.** *Sei $\{X_n\}_{n=1}^N$ eine Familie von topologischen Räumen und $x_n \in X_n$ für alle $1 \leq n \leq N$. Dann gilt*

$$\pi_1\left(\prod_{1 \leq n \leq N} X_n, (x_1, \ldots, x_N)\right) \cong \pi_1(x_1, x_1) \times \cdots \times \pi_1(X_N, x_N).$$

durch einen kanonischen Isomorphismus.

Proposition 19.34 (Übung 6)**.** *Es gibt eine stetige Surjektion von $\mathbb{S}^m$ zu $\mathbb{S}^n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.*

19.8 Serie 8

Proposition 19.35 (Übung 3)**.** *Sei $r > 0$ eine Konstante. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, sodass $|f(v) - v| \leq r$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$. Dann ist f surjektiv.*

Proposition 19.36 (Übung 4)**.** *Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum. X ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn es für alle Paare von Punkten x, y in X eine eindeutige Homotopieklasse (rel Endpunkte) von Pfaden gibt, die diese beiden Punkte verbindet.*

Proposition 19.37 (Übung 5)**.** *Sei $(G, \cdot)$ eine topologische Gruppe mit neutralem Element e. Dann ist $\pi_1(G, e)$ kommutativ.*

Proposition 19.38 (Übung 6)**.** *Sei X ein kontrahierbarer topologischer Raum, dann folgt dass X einfach zusammenhängend ist (d.h. wegzusammenhängend und triviale Fundamentalgruppe) .*

19.9 Serie 9

Proposition 19.39 (Übung 4)**.** $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Proposition 19.40 (Übung 5)**.** *Sei $G = (V, E)$ ein endlicher Graph. Das heisst, dass V eine endliche Menge ist (die Menge der sogenannten Ecken) und $E \subseteq V \times V$ (die Menge der sogenannten Kanten). Wir ordnen G folgenden topologischen Raum X zu: versehe V und E mit der diskreten Topologie, und setze $X = (V + (E \times [0, 1]))/\sim$, wobei $\sim$ erzeugt ist durch $v_i \sim ((v_0, v_1), i)$ für alle $(v_0, v_1) \in E$ und $i \in \{0, 1\}$. Wenn G wegzusammnehüngend ist, gilt $\pi_1(G, x_0) \cong *_{i=1}^{|E|-|V|+1} \mathbb{Z}$.*

Proposition 19.41. *Sei X ein topologischer Raum, $\varphi : \mathbb{S}^{-1} \subset \mathbb{D}^k \to X$ und $X \cup_\varphi \mathbb{D}^k$ das Anheften einer k-Zelle. Dann gilt*

1. $\pi_1(X \cup_\varphi \mathbb{D}^2, x_0) = \pi_1(X, x_0)/N$, *wobei N durch Konjugierte von $[\phi] = [t \to \phi(e^{2\pi it})]$ erzeugt ist.*
2. $\pi_1(X \cup_\varphi \mathbb{D}^k, x_0) = \pi_1(X, x_0)$ *für $k \geq 3$.*

19.10 Serie 10

Proposition 19.42 (Übung 1)**.** *Es gilt die Folgenden:*

1. $\pi_1(T^2, x_0) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
2. $\pi_1(K, x_0) = \langle a, b \mid aba^{-1}b \rangle = \mathbb{Z} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, *wobei $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\times$, $\alpha(n) = (-1)^n$.*

Proposition 19.43 (Übung 3)**.** *Seien (X_1, x_1) und (X_2, x_2) zwei punktierte topologische Räume, die kontrahierbare offene Umgebungen $U_i \subseteq X_i$ von x_i besitzen für $i = 1, 2$. Dann gilt $\pi_1(X_1, x_1) * \pi_1(X_2, x_2) \cong \pi_1(X_1 \vee X_2, x_1 = x_2)$.*

19.11 Serie 11

Definition 19.44. Ein topologischer Raum X heisst **seperabel**, falls X eine abzählbare dichte Teilmenge enthält (d.h. eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq X$ mit $\bar{A} = X$).

Proposition 19.45 (Übung 2)**.** *Jeder topologische Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist separabel. Ist ein topologischer Raum X metrisierbar und separabel, so ist X zweitabzählbar.*

Proposition 19.46 (Übung 3)**.** $\mathbb{R}$ *mit der kofiniten Topologie ist nicht erstabzählbar.*

Proposition 19.47 (Übung 4)**.** *Sei X eine zusammenhängende kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit, dann ist X homöomorph zu $\mathbb{S}^1$.*

Proposition 19.48 (Übung 5)**.** *Ein Unterraum eines erst- oder zweitabzählbaren Raums ist auch erst- bzw. zweitabzählbar. Seien $(X_n)_{n \in N}$ topologischen Räume, die erst- bzw. zweitabzählbar sind. Dann ist das Produkt $\prod_n X_n$ bzw. zweitabzählbar. Im Allgemeinen gilt dies nicht für überabzählbare Produkte.*

19.12 Serie 12

Proposition 19.49 (Übung 3)**.** *Ein kompakter Hausdorffraum ist normal.*

Proposition 19.50 (Übung 4)**.** *Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit, dann kann M in $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ eingebettet werden.*

Proposition 19.51 (Übung 5)**.** *Eine Überlagerung (mit höchstens abzählbaren Fasern) einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist wieder eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit.*

19.13 Serie 13

Proposition 19.52 (Übung 1)**.** *Sei $p : Y \to X$ eine Überlagerung. Dann ist die Abbildung p ist ein lokaler Homöomorphismus (d.h. jeder Punkt in Y hat eine offene Umgebung V sodass $p(V) \subseteq X$ offen und $p|V$ ein Homöomorphismus aufs Bild ist).*

Proposition 19.53. *Ein Überlagerungsraum eines Graphen ist wieder ein Graph.*