Übungsstunde 12

Basiswechsel

08.12.2025

12.1 Quiz 8

Sei $\mathbb{R}[x]_3$ die Menge von Polynomen mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens 3. Die Mengen

$$\mathcal{A} = \{1 + x^2, x, x + x^2, x^2 + x^3\} \quad \text{und} \quad \mathcal{B} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3\}$$

sind geordnete Basen von $\mathbb{R}[x]_3$. Betrachte die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}[x]_3 &\longrightarrow \mathbb{R}[x]_3 \\ p &\longmapsto p + 2p', \end{aligned}$$

wobei p' die Ableitung von p ist. Bestimme die Darstellungsmatrix von T bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

Lösung. Um die Matrixdarstellung von T bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zu berechnen, müssen wir die Koordinaten von T angewendet auf jeden Basisvektor in $\mathcal{A}$ bezüglich $\mathcal{B}$ bestimmen. Wir berechnen T auf jedem Basisvektor in $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} T(1 + x^2) &= 1 + 4x + x^2, \\ T(x) &= 2 + x, \\ T(x + x^2) &= 2 + 5x + x^2, \\ T(x^2 + x^3) &= 4x + 7x^2 + x^3. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} T(1 + x^2) &= -3 \cdot 1 + 3 \cdot (1 + x) + 1 \cdot (1 + x + x^2) + 0 \cdot (1 + x + x^2 + x^3), \\ T(x) &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (1 + x) + 0 \cdot (1 + x + x^2) + 0 \cdot (1 + x + x^2 + x^3), \\ T(x + x^2) &= -3 \cdot 1 + 4 \cdot (1 + x) + 1 \cdot (1 + x + x^2) + 0 \cdot (1 + x + x^2 + x^3), \\ T(x^2 + x^3) &= -4 \cdot 1 - 3 \cdot (1 + x) + 6 \cdot (1 + x + x^2) + 1 \cdot (1 + x + x^2 + x^3). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Matrixdarstellung von T bezüglich $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$:

$$[T]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

12.2 Besprechung Serie 11

Keine.

12.3 Invertierbare Matrizen

Definition 12.1. $A \in M_{n\times n}(K)$ ist **invertierbar**, wenn es $B \in M_{n\times n}(K)$ gibt, mit $AB = BA = I_n$.

Wir werden sehen, dass invertierbare Matrizen genau den Isomorphismen entsprechen.

Proposition 12.2. $\mathrm{GL}_n(K)$ *bildet eine Gruppe mit der Matrizenmultiplikation als Gruppenoperation.*

Korollar 12.3. *Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Dann hat das LGS $Ax = b$ eine eindeutige Lösung für alle $b \in K^n$, nämlich $x = A^{-1}b$.*

Proposition 12.4. *Sei $A \in M_{m\times n}(K)$. Dann $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ genau dann wenn $T_A : K^n \to K^n$ ein Isomorphismus ist, und es gilt $(T_A)^{-1} = T_{A^{-1}}$.*

Erinnerung: Eine normierte Möbius-Transformation ist eine Abbildung $M : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$,

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

wobei $ad - bc = 1$. Möbius-Transformationen kann man mit (2×2)-Matrizen wie folgt darstellen:

$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d} \longleftrightarrow [M] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Übung 12.5. Es sei M eine Möbius-Transformation mit Matrixdarstellung $[M]$. Wie lautet die Matrixdarstellung von M^{-1}?

Lösung. Es gilt

$$y = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow z = \frac{dy-b}{-cy+a} \Rightarrow M^{-1}(y) = \frac{dy-b}{-cy+a} \Rightarrow [M^{-1}] = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Wegen $ad - bc = 1$ ist $[M^{-1}]$ (Matrixdarstellung von M^{-1}) genau die inverse Matrix von $[M]$ (Matrixdarstellung von M):

$$[M^{-1}][M] = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & bd-bd \\ -ac+ac & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten: $[M^{-1}] = [M]^{-1}$. $\square$

Es stellt sich heraus, dass im Allgemeinen die inverse Matrix einer invertierbaren 2×2 Matrix A durch

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gegeben ist. $ad - bc$ wird die **Determinante** genannt, und wir schreiben $\det A = ad - bc$. Wie ihr in der Übungsserien gesehen habt, hat das LGS $Ax = b$ für $b \neq 0$ genau dann eine Lösung, wenn $\det A \neq 0$ ist. Dies zeigt, dass die Determinante etwas über die Invertierbarkeit aussagt. Die versteckten Eigenschaften werdet ihr nächstes Semester noch studieren.

12.4 Basiswechselmatrix

Korollar 12.6. *Sei V und W endlich dimensionale Vektorräume über K, mit Dimension n bzw. m. Seien $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ zwei Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ zwei Basen von W. Dann gilt*

1. $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathrm{GL}_n(K)$, $[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} \in \mathrm{GL}_m(K)$.
2. $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = ([\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1}$, $[\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'} = ([\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}})^{-1}$.
3. *Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$[T]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{B}'} = [\mathrm{id}_W]_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} [T]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} [\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

Definition 12.7. Sei V ein n-dimensionaler Vektorräume über K mit Basen$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$. Die Matrix $[\mathrm{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist die **Basiswechselmatrix** zwischen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$.

Übung 12.8. Betrachte die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$, $f(p) = xp'$.

1. Bestimme die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Standard Basis $\mathcal{B}$.

2. Bestimme die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis $\mathcal{C} = \{x^2+x, 2x^2+x, 3x^2+2x+x\}$.
3. Definiert f einen Isomorphismus?

Lösung.

1. Um die Darstellungsmatrix von F in der Standardbasis zu bestimmen, müssen wir die Bilder der Basiselemente ermitteln:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, \\ f(x) &= x, \\ f(x^2) &= 2x^2. \end{aligned}$$

Die Bilder haben die folgenden Koordinaten in der Standardbasis

$$[f(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [f(x^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Darstellungsmatrix ist somit

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Es gilt

$$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hier kommt aber die Frage: Wie finden wir die inverse Matrix von $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$? Natürlich können wir versuchen, die Standardbasis mit den Basisvektoren in $\mathcal{C}$ auszudrucken — dies können wir systematisch durch das LGS $[\mathrm{id}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} x = e_i$ finden. So müssen wir drei LGS lösen, was nicht so praktisch ist. Wir erinnern uns an Korollar 12.3: Nachdem wir das LGS gelöst haben, bekommen wir immer eine Gleichung der Form (hier schreiben wir I_n um zu betonen, dass diese Methode nicht von der Dimension abhängig ist)

$$I_n x = x = v_i.$$

Gleichzeitig gilt nach Korollar 12.3 (hier ist A eine beliebige Matrix in $\mathrm{GL}_n(K)$, in dieser Aufgabe entspricht A genau $[\mathrm{id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$)

$$x = A^{-1}e_i.$$

D.h. $v_i = A^{-1}e_i$. Wir bemerken auch, dass die Schritte in der Gauss-Elimination, durch die wir von Ax zu $I_n x$ kommen, immer die gleichen sind. D.h. wir können die Gauss-Elimination für alle $Ax = e_i$ gleichzeitig durchführen, nämlich

$$A(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n) \to I_n(x_1, \dots, x_n) = (v_1, \dots, v_n).$$

Da $(v_1, \dots, v_n) = A^{-1}(e_1, \dots, e_n) = A^{-1}$, erhalten wir

$$I_n(x_1, \dots, x_n) = A^{-1}.$$

Also wenn wir die „erweiterte“ LGS $A(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)$ lösen durch Gauss-Elimination, bekommen wir am Ende automatisch die inverse Matrix. Einfacher geschrieben haben wir

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array} \right) \xrightarrow{\text{G.E.}} \left(\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array} \right).$$

Auf diese Weise können wir $[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ bestimmen:

$$[\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = ([\mathrm{id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir schliessen, dass

$$\begin{aligned} [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} &= [\mathrm{id}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}[\mathrm{id}]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

12.5 Ähnliche Matrizen

In der Vorlesung habt ihr äquivalente Matrizen kennengelernt und bewiesen, dass äquivalente Matrizen denselben Rang haben. Es gibt ein sehr ähnliches Konzept, nämlich ähnliche Matrizen.

Definition 12.9. Zwei Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(K)$ sind **ähnlich**, wenn es $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert, mit $B = PAP^{-1}$.

Übung 12.10. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sind A und B ähnlich?

Es ja schwer zu sagen, ob zwei Matrizen ähnlich sind. Es ist oft fast unmöglich, nach einer invertierbaren Matrix P zu suchen, und Argumente über den Rang funktioniert nicht, wenn die zwei Matrizen denselben Rang haben, wie in dieser Übung. Daher versuchen wir, neue Werkzeuge zu entwickeln, um gewissermassen ein Kriterium zu finden. Dafür führen wir den Begriff von Spur ein.

Definition 12.11. Sei $A \in M_{n\times n}(K)$. Die **Spur** (engl. trace) von A ist definiert als

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Wenn A und B ähnlich sind, gibt es $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit $B = PAP^{-1}$, also $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}\big(PAP^{-1}\big)$. Nun vermuten wir, dass ähnliche Matrizen dieselbe Spur haben:

Proposition 12.12. *Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$ und A, B ähnlich. Dann gilt*

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B).$$

Diese Vermutung macht Sinn, wenn wir heuristisch annehmen, dass die Spur vom Produkt zweier Matrizen kommutativ ist, d.h. $\mathrm{tr}(CD) = \mathrm{tr}(DC)$. Dann gilt $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}\big(PAP^{-1}\big) = \mathrm{tr}\big(AP^{-1}P\big) = \mathrm{tr}(A)$. Dies ist auch tatsächlich der Fall.

Lemma 12.13. *Seien $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Dann gilt*

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} \\
&= \operatorname{tr}(BA).
\end{aligned}$$

□

Beweis von Proposition 12.12. Wir haben $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}\big(PAP^{-1}\big) = \operatorname{tr}\big(AP^{-1}P\big) = \operatorname{tr}(A)$. □

Lösung von Übung 12.10. Nein, A und B sind nicht ähnlich, da

$$\operatorname{tr}(A) = 3 \neq -3 = \operatorname{tr}(B).$$

□