

LINEARE ALGEBRA I

BEGLEITSKRIPT ZUR ÜBUNGSSTUNDE HS 2025

BASIEREND AUF DER VORLESUNG VON PROF. DR. PAUL BIRAN

RUOCHENG WANG

Version: 13. Oktober 2025

Einleitung

Herzlich willkommen an der ETH! Ihr seid jetzt auf einer spannenden Reise, die Welt der Linearen Algebra zu entdecken — eines der grundlegenden und zentralen Gebiete der Mathematik. Ihr werdet lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Vektorräume, und lineare Abbildungen kennenlernen, die euch während eures gesamten Studiums begleiten werden. Abstrakter wird es bei Dualräumen und Isomorphiesätzen, wobei ihr einen Einblick in ein paar der wichtigsten und schönsten Strukturen in der Mathematik erhalten werdet. Viele Konzepte aus Linearer Algebra werdet ihr künftig noch brauchen in z.B. Analysis II und Numerischer Mathematik.

Diese Notizen sind für die Übungsstunden geschrieben und sollen dazu dienen, durch zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben euer Verständnis zu den Themen aus der Vorlesung zu verbessern und vertiefen. Es wird auch hier die Lösung zu den Quizen präsentiert, und am Ende der Notizen für jede Woche gibt es noch Hinweise zu den Serien. Wenn ihr Fragen habt oder Fehler in den Notizen findet, schreibt mir gerne eine E-Mail an ruocwang@student.ethz.ch. Die aktuelle Version der Notizen findet ihr unter <https://ruocheng-w.github.io>.

Ich wünsche euch viel Spass und Erfolg in eurem Studium!

Ruocheng Wang

September 2025, Zürich

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	i
1 Einführung in die mathematische Arbeit und Lineare Algebra	1
1.1 Quiz 1	1
1.2 Tipps zum Mathematikstudium	1
1.3 Beweisstrategien	2
1.4 Die Fibonacci-Folge	3
1.5 Hinweise zur Serie 1	4
2 Naive Mengenlehre und Abbildungen	6
2.1 Besprechung Serie 1	6
2.2 Unendlicher Kettenbruch (Fortsetzung, Weiterführendes Material)	7
2.3 Naive Mengenlehre und Abbildungen	8
2.4 Hinweise zur Serie 2	10
3 Cantor'sches Paradoxon und lineare Gleichungssysteme I	11
3.1 Quiz 2	11
3.2 Besprechung Serie 2	12
3.3 Noch ein Paradoxon	13
3.4 Lineare Gleichungssysteme	13
4 Lineare Gleichungssysteme II	15
4.1 Besprechung Serie 3	15
4.2 Mehr zu linearen Gleichungssystemen	16
4.3 Weitere Übungsaufgaben	17
5 Vektorräume	21
5.1 Besprechung Serie 3 und 4	21
5.2 Vektorräume und Unterräume	21
Literaturverzeichnis	22

Übungsstunde 1

Einführung in die mathematische Arbeit und Lineare Algebra

22.09.2025

Organisatorisches:

1. Bitte ladet eure Serien mit dem Namen `Nachname_Vorname_Serie01.pdf` als ein PDF hoch (mit sam-up).
2. Ihr könnt die Serien auf Deutsch oder Englisch lösen. Ihr werdet ermutigt, so viele Serienaufgaben zu lösen wie möglich.
3. Ihr könnt jeder Zeit Fragen auch auf Englisch stellen, insbesondere wenn es sich um Fachbegriffe handelt.

1.1 Quiz 1

Formulieren Sie die Negation so weit wie möglich nach innen in die folgende logische Aussage über eine Menge X und ein Element $z \in X$:

$$\neg((\forall x \in X, \exists y \in X : x + y = 0) \wedge (\exists x \in X, \exists y \in X : x + y > z)).$$

Lösung.

$$(\exists x \in X, \forall y \in X : x + y \neq 0) \vee (\forall x \in X, \forall y \in X : x + y \leq z).$$

□

1.2 Tipps zum Mathematikstudium

1. Es ist immer hilfreich, Mathematik zu lesen. Dadurch lernt man nicht nur das Wissen, sondern auch wie man selbst Mathematik schreibt. Am besten liest man Mathematik mit einem Stift und einem Blatt Papier, da das Mitdenken eine grosse Rolle spielt. Des Weiteren finde ich es wichtiger, die Ideen von Beweisen zu verstehen als die Details.
2. Wenn man Mathematik schreibt, soll man auf Folgendes achten:

- (a) Verwende nicht überall Symbole wie z.B. \implies , \forall , \exists usw., da sie spezielle Bedeutungen haben.
- (b) Schreibe vollständige Sätze. Ihr erklärt euren Lösungsweg.
- (c) Präzision ist sehr wichtig, besonders wenn es sich um Definitionen oder Annahmen handelt.

Mehr zu den Notationen und wie man Mathematik richtig schreibt, findet man im Buch Beu09.

1.3 Beweisstrategien

Direkter Beweis

Beispiel 1.1. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ ungerade, dann ist $a \cdot b$ ungerade.

Beweis. Per Definition ungerader Zahlen gibt es $k, m \in \mathbb{Z}$, sodass $a = 2k + 1$, $b = 2m + 1$. Multiplizieren gibt uns

$$a \cdot b = (2k + 1) \cdot (2m + 1) = 4km + 2k + 2m + 1 = 2(2km + k + m) + 1,$$

d.h. $a \cdot b$ ist ungerade. □

Induktionsbeweis

Beispiel 1.2. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ist die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen gleich n^2 .

Beweis. Induktionsverankerung: für $n = 1$ ist $1 = 1^2$.

Induktionsschritt: angenommen gilt die Aussage für n . Für $n + 1$ folgt

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) \stackrel{\text{I.A.}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

Daher ist die Aussage wahr für alle $n \geq 1$. □

Beweis mit Kontraposition

Beispiel 1.3. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Falls n^2 gerade ist, dann ist auch n gerade.

Beweis. Wir zeigen n ungerade $\implies n^2$ ungerade. Sei n ungerade, d.h. $n = 2k + 1$ für $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

also n^2 ist ungerade. Alternativ verwendet man Beispiel 1.1 □

Beweis mit Fallunterscheidung**Beispiel 1.4.** Zeigen Sie: Es gibt $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sodass $a^b \in \mathbb{Q}$.*Beweis.* Es genügt, ein Beispiel zu finden, bei dem dies gilt. Wir betrachten $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und machen eine Fallunterscheidung

- (i) Falls $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$, dann sind wir fertig: Wir können $a = b = \sqrt{2}$ setzen.
- (ii) Falls $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$, seien $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$. Dann ist

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2} \right)^2 = 2 \in \mathbb{Q}.$$

□

Die Stärke der Fallunterscheidung besteht darin, dass man nicht wissen muss, welcher genau der Fall ist. Wir brauchen nicht zu wissen, ob $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rational ist oder nicht, trotzdem können wir damit nützliche Sachen beweisen. (Eigentlich ist $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ transzendent, daher irrational.)

Widerspruchsbeweis**Beispiel 1.5.** $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis. Angenommen ist es nicht der Fall, dann können wir $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ für $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, mit $\text{ggT}(p, q) = 1$. Dann ist $p^2 = 2q^2$, also p^2 ist gerade. Nach Beispiel 1.3 ist p gerade, also $p = 2k$. Dies impliziert wiederum, dass $q^2 = 2k^2$ und daher ist q gerade. Das ist ein Widerspruch zur Annahme $\text{ggT}(p, q) = 1$. □

1.4 Die Fibonacci-Folge**Übung 1.6** (0.2.12). Zeigen Sie, dass

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Was bedeutet überhaupt dieser Ausdruck?

Lösung. Wir definieren zuerst Ausdrücke von dieser Form (wie in Hal24).

Definition 1.7. Ein **unendlicher** Kettenbruch ist ein nicht abbrechender Bruch von der Form

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots}}},$$

wobei $b_0, b_1, b_2 \dots$ ganze Zahlen und höchstens mit Ausnahme von b_0 alle b_i positiv sind.

Ist $\xi \in \mathbb{R}$ eine beliebige, positive, irrationale Zahl, so können wir ξ immer als unendlichen Kettenbruch schreiben. Dazu definieren wir für positive reelle Zahlen α ,

$$\lfloor \alpha \rfloor := \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq \alpha\}.$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{ll} \xi = b_0 + r_1 & \text{mit } b_0 := \lfloor \xi \rfloor \text{ und } r_1 = \xi - b_0, \text{ wobei } 0 < r_1 < 1 \text{ bzw. } \frac{1}{r_1} > 1 \\ \frac{1}{r_1} = b_1 + r_2 & \text{mit } b_1 := \left\lfloor \frac{1}{r_1} \right\rfloor \text{ und } r_2 = \frac{1}{r_1} - b_1, \text{ wobei } 0 < r_2 < 1 \text{ bzw. } \frac{1}{r_2} > 1 \\ \frac{1}{r_2} = b_2 + r_3 & \text{mit } b_2 := \left\lfloor \frac{1}{r_2} \right\rfloor \text{ und } r_3 = \frac{1}{r_2} - b_2, \text{ wobei } 0 < r_3 < 1 \text{ bzw. } \frac{1}{r_3} > 1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

und wir erhalten den Kettenbruch.

Jetzt zeigen wir die folgende Behauptung mit Induktion.

Behauptung. $r_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Beweis. $n = 1$: $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left\lfloor \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rfloor = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Angenommen, die Gleichung gilt für n . Für $n+1$ haben wir

$$\frac{1}{r_n} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

also folgt ähnlich wie im Basisfall $r_{n+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. □

Wenn wir r_n kennen, ist es einfach $b_n = 1$ abzulesen, da $1 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$. □

1.5 Hinweise zur Serie 1

1. (a) Welches lineare Gleichungssystem kann uns helfen?

- (b) Verwendet (a).
- 2. (a) Verwendet Wahrheitstabellen.
(b) Können wir etwas ähnliches wie eine Wahrheitstabelle aufstellen?
- 3. Verwendet die Definition einer Fibonacci-Folge. Wie können wir ein Folgenglied F_n umschreiben? Alternativ versucht man, den Grenzwert mittels expliziter Berechnung zu bestimmen.
- 4. Verwendet De Morgan (Afg. 2).
- 5. Relativ direkt.
- 6. Wie lässt sich $\mathcal{F}_{a,b}$ ausdrücken mithilfe von $\mathcal{F}_{0,1}$ und $\mathcal{F}_{1,0}$?

Übungsstunde 2

Naive Mengenlehre und Abbildungen

29.09.2025

2.1 Besprechung Serie 1

1. Manchmal wurde der Grenzwert von F_n/F_{n-1} falsch berechnet. Man darf nicht zuerst den Grenzwert für einen Teil des Ausdrucks berechnen und danach den Grenzwert für den Rest bestimmen. Z.B.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^n}{\phi^{n-1}} = \phi$$

ist FALSCH, obwohl das Resultat richtig ist. Man kann aber wie folgendes vorgehen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi^n(1 - (\psi/\phi)^n)}{\phi^{n-1}(1 - (\psi/\phi)^{n-1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi \frac{(1 - (\psi/\phi)^n)}{(1 - (\psi/\phi)^{n-1})} = \phi$$

Alternativ sieht man, dass

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}.$$

Setzen wir $X = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$, so gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \\ \implies X &= 1 + \frac{1}{X}. \end{aligned}$$

Die Lösungen zu dieser Gleichung sind ϕ und ψ . Da $F_n/F_{n-1} > 0$ für alle n , kann es nur ϕ sein.

2. Viele von euch haben Aufgabe 2. (b) mit Bildern gelöst, das ist leider nicht ausreichend für eine Mathematik-Aufgabe — Bilder sind ja kein Beweis. Um die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen, gibt es hauptsächlich zwei Strategien:
 - (a) Für Aufgaben in der Serie, genügt es, Gleichheit durch eine Tabelle zu zeigen. Um $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ zu zeigen, stellen wir folgende Tabellen auf:

A	B	$A \cup B$	$(A \cup B)^c$	A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
\notin	\notin	\notin	\in	\in	\in	\in
\notin	\in	\in	\notin	\in	\notin	\notin
\in	\notin	\in	\notin	\notin	\in	\notin
\in	\in	\in	\notin	\notin	\notin	\notin

- (b) Allerdings sind Tabellen nicht besonders hilfreich für kompliziertere Beweise. Wir verwenden häufig diese Strategie: Um $A = B$ zu zeigen, genügt es $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ zu beweisen. Genauer, man zeigt

$$\forall x \in A : x \in B \quad \text{und} \quad \forall y \in B : y \in A.$$

3. Es gab auch ein Paar Probleme mit Kontraposition — es kann ja verwirrend sein. In Aufgabe 5. wollen wir die Kontraposition von $x = y \implies (\exists \varepsilon > 0 : |x - y| \geq \varepsilon)$. Achtung: wenn wir $\exists \varepsilon > 0 : |x - y| \geq \varepsilon$ negieren, schreiben wir nicht $\forall \varepsilon \leq 0 \dots$, sonder negieren wir nur den Existenzquantor, also $\forall \varepsilon > 0 \dots$

2.2 Unendlicher Kettenbruch (Fortsetzung, Weiterführendes Material)

Letzte Woche haben wir unendliche Kettenbrüche eingeführt und es gab ein paar Fragen dazu, ob wir einen unendlichen Kettenbruch als Grenzwert verstehen kann. Dies ist tatsächlich möglich, selbst mit unserer Definition. Der allgemeine Fall ist leider zu kompliziert und braucht weitere Kenntnisse aus der Analysis, daher betrachten wir nur den Spezialfall von ϕ . (Dieser Teil ist komplett nicht prüfungsrelevant.)

Zu einem unendlichen Kettenbruch definieren wir den n -ten endlichen Näherungsbruch als

$$\frac{P_n}{Q_n} := b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_{n-1} + \frac{1}{b_n}}}}.$$

Zudem gibt es folgendes Schema, wodurch wir schnell P_n/Q_n bestimmen können:

$$\begin{array}{lll} P_{-2} = 0, & P_{-1} = 1, & P_n = b_n P_{n-1} + P_{n-2} \\ Q_{-2} = 1, & Q_{-1} = 0, & Q_n = b_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \end{array}$$

Hier beweisen wir die rekursive Relation nicht. In unserem Fall gilt

$$\begin{array}{llllllll} P_{-2} = 0, & P_{-1} = 1, & P_0 = 1, & P_1 = 2, & P_2 = 3, & P_3 = 5, & \dots \\ Q_{-2} = 1, & Q_{-1} = 0, & Q_0 = 1, & Q_1 = 1, & Q_2 = 2, & Q_3 = 3, & \dots \end{array}$$

Wie sehen, dass wir auf der ersten Reihe genau $\mathcal{F}_{0,1}$ haben, und auf der zweiten Reihe die verschobene $\mathcal{F}_{0,1}$. So lässt sich den Grenzwert bestimmen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{Q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \phi.$$

2.3 Naive Mengenlehre und Abbildungen

Übung 2.1. Sei X eine endliche Menge. Zeige, dass $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$

Lösung. LÖSUNG 1. Sei $|X| = n$ und wir schreiben $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Jede Teilmenge von X kann als ein Vektor der Länge n dargestellt werden: Für $A \subseteq X$ definiere wir v_A durch $v_A^i = 0$ falls $x_i \notin A$ und $v_A^i = 1$ falls $x_i \in A$. Jede Teilmenge entspricht eindeutig einem Vektor mit Einträgen in $\{0, 1\}$ und umgekehrt definiert jeder solche Vektor eine Teilmenge. Somit genügt es, die Anzahl von solchen Vektoren zu bestimmen. Für jeden Eintrag v^i gibt es zwei Möglichkeiten, entweder $v^i = 1$ oder $v^i = 0$. Daher gibt es insgesamt 2^n solche Vektoren.

LÖSUNG 2. Um eine Teilmenge von X zu konstruieren, wählen wir Elemente aus X . So ist $|\mathcal{P}(X)|$ genau die Anzahl von Möglichkeiten, Elemente aus X zu wählen. Wenn wir kein Element auswählen, haben wir nur eine Möglichkeit. Wenn wir nur ein Element auswählen, gibt es klarerweise n Möglichkeiten. Wenn wir zwei auswählen, gibt es $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten, usw. Jedes Mal dürfen wir beliebig viele Elemente auswählen, daraus ergibt sich

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

Möglichkeiten. Wir haben hier Satz [2.2](#) verwendet. □

Satz 2.2 (Binomischer Lehrsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Beweis. Wir zeigen die Formel mittels Induktion. Für $n = 0$ ist $(a + b)^0 = 1 = \binom{n}{0}$ (wobei wir die Konvention $0^0 = 1$ verwenden). Nimm an, dass die Formel für n gilt. Für $n + 1$ haben wir

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1} + a^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n! \cdot k - n! \cdot (n-k+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}. \end{aligned}$$

□

Als Nächstes schauen wir uns zwei Paradoxa der naiven Mengenlehre an, um genauer zu verstehen, woher die Probleme kommen. Dafür brauchen wir aber einen Begriff, der uns erlaubt, die Kardinalitäten von (potenziell unendlichen) Mengen zu vergleichen.

Definition 2.3. Es seien A, B Mengen. Wir sagen $|A| = |B|$ falls es eine Bijektion zwischen A und B gibt; $|A| \leq |B|$ falls es eine Injektion $f : A \rightarrow B$ gibt. Wir schreiben auch $|A| < |B|$ für $|A| \leq |B| \wedge |A| \neq |B|$.

Wir werden nächste Woche noch zu dieser Definition kommen wenn wir das zweite Paradoxon diskutieren. Wir fangen zuerst mit dem klassischen Russell'schen Paradoxon.

Beispiel 2.4 (Russell). Angenommen existiert eine Menge aller Mengen, U_0 . Definiere

$$R := \{P \in U : P \notin P\}.$$

Ist $R \in R$?

Diese Frage hat keine zufriedenstellende Antwort. Wenn $R \in R$, dann ist R per Definition eine Menge, die $R \notin R$ erfüllt. Aber wenn $R \notin R$, muss $R \in R$ gelten. Wir erhalten also

$$R \in R \iff R \notin R.$$

Ausdrücke der Form $\phi \wedge \neg\phi$ nennen wir einen Widerspruch. Hier muss sowohl $R \in R$ als auch $R \notin R$ gelten, also $(R \in R) \wedge (R \notin R)$. So führt die Annahme, dass U_0 existiert, zu einem Widerspruch.

2.4 Hinweise zur Serie 2

1. Wie negieren wir eine Aussage ?
2. Kann x positiv sein? Negativ?
3. Verwendet die Strategie mit zwei Inklusionen, die wir in der Übungsstunde diskutiert haben.
4. Relativ direkt.
5. Die Definitionen können hilfreich sein. [Wichtig]
6. Schaut euch nochmals die Definitionen an. [Wichtig]

Übungsstunde 3

Cantor'sches Paradoxon und lineare Gleichungssysteme I

3.1 Quiz 2

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g_1, g_2 : Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

1. Stimmt es, dass wenn $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ gilt, dass ist $g_1 = g_2$?
2. Trifft es zu, dass $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ für jede Teilmenge $B \subseteq Y$ gilt?
3. Nehmen wir an, dass $g_1 \circ f$ injektiv ist. Bedeutet dies, dass g_1 injektiv ist?

Lösung.

1. Dies ist im Allgemeinen nicht wahr. Es gilt, wenn f ein Rechtsinverses besitzt, d. h. wenn f surjektiv ist.

Als Gegenbeispiel sei $f : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ die konstant 1-Funktion, und betrachte $g_1, g_2 : \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$ definiert durch

$$g_1(x) = x \quad \text{und} \quad g_2(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in \{0, 1\}.$$

Dann gilt $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, aber $g_1 \neq g_2$.

2. Per Definition gilt

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Daher gilt für alle $x \in f^{-1}(B)$: $f(x) \in B$, was die Inklusion zeigt.

3. Dies ist nicht wahr. Sei $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt{x}$ und $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g_1(y) = y^2$.

Dann ist $g_1 \circ f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ injektiv. Tatsächlich gilt: Angenommen $g_1 \circ f(x_1) = g_1 \circ f(x_2)$. Das bedeutet $(\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2 \implies x_1 = x_2$.

Jedoch ist g_1 offensichtlich nicht injektiv.

□

3.2 Besprechung Serie 2

1. In Aufgabe 2 wurde erwartet, dass man das Archimedische Prinzip verwendet, um zu zeigen, dass

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \right\} = \{0\}.$$

Also sei $x > 0$, dann gibt es nach dem Archimedischen Prinzip [Fig25](#) ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass

$$k \leq \frac{1}{x} < k+1 \quad \implies \quad \frac{1}{k+1} < x$$

Daher ist $x \notin A$ für alle $x > 0$. Analog gilt das gleiche für $x < 0$, so mit ist $A = \{0\}$.

2. Viele haben die Aufgabe 5 gelöst mit der Begründung, dass g_1 und g_2 wegen der zwei Eigenschaften nach der Definition genau f^{-1} sind. Man muss vorsichtig sein: nicht jede Funktion hat ein Inverses, man muss die Bijektivität der Funktion beweisen und dann kann man von dem Inversen sprechen. Insbesondere kann man hier nicht direkt die Eindeutigkeit des Inversen verwenden. In dieser Aufgabe geht man wie folgt vor: Es gilt

$$g_1 = g_1 \circ \text{id}_Y = g_1 \circ (f \circ g_2) = (g_1 \circ f) \circ g_2 = \text{id}_X \circ g_2 = g_2.$$

So ist $g_1 = g_2$ und sie sind sowohl das linke als auch das rechte Inverse von f , also $g_1 = g_2 = f^{-1}$. Aus den zwei Gleichungen folgt auch, dass f injektiv und surjektiv sind.

3. Es gab ein paar Missverständnisse bei Aufgabe 6. Wenn wir $f^{-1}(B)$ schreiben, wird nicht die Umkehrabbildung (engl. inverse) von f gemeint, sondern das Urbild (engl. preimage / inverse image) der Menge A unter f . Genauer, für $f : X \rightarrow Y$ und $B \subseteq Y$ ist

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Hier kann man f^{-1} nicht als Funktion verstehen, aus demselben Grund wie oben: Es existiert nicht immer. Allerdings ist es bemerkenswert, wenn f^{-1} existiert, ist $f^{-1}(B)$ genau das Bild (engl. image) von B unter f^{-1} — die zwei Interpretationen stimmen miteinander überein. Somit muss man hier die Mengen genau analysieren, z.B. Teilaufgabe 1: Sei $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$ für $x \in f^{-1}$, dann ist per Definition $f(x) \in B$ und daher $y \in B$, also $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Wenn f surjektiv ist, gibt es für jedes $y \in B$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. x muss in $f^{-1}(B)$ und daher $B \subseteq f(f^{-1}(B))$, womit die andere Inklusion gezeigt wird. Bei den restlichen Aufgaben kann man ähnlich vorgehen.

Noch eine Erinnerung: $A \setminus B = A \cap B^c$ — kann manchmal nützlich sein.

3.3 Noch ein Paradoxon

Beispiel 3.1 (Cantor'sches Paradoxon). Es gibt keine Menge, die alle Mengen als Element enthält.

Um dies zu zeigen, benötigen wir folgendes Theorem.

Theorem 3.2 (Cantor). *Sei $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ eine Abbildung, dann ist f nicht surjektiv. Als eine Folgerung ist $|A| < |\mathcal{P}(A)|$ für alle Mengen A .*

Beweis. Angenommen ist f surjektiv. Sei $B := \{x \in A : x \notin f(x)\}$, dann ist $B \in \mathcal{P}(A)$. Da f surjektiv ist, gibt es $x \in A$ mit $f(x) = B$. Aber per Definition von B gilt

$$y \in B \iff y \notin f(x) \quad \forall y \in A,$$

es folgt

$$x \in B \iff x \notin B.$$

Das ist ein Widerspruch.

Die Abbildung $g : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ mit $g(x) = \{x\}$ ist injektiv, daher $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Wir schliessen, dass $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. \square

Beweis von Beispiel 3.1. Sei X die Menge, die alle Mengen als Element enthält. Sei

$$Y = \bigcup_{A \in X} A.$$

Da $\mathcal{P}(Y)$ auch eine Menge ist, ist $\mathcal{P}(Y) \in X$ und $\mathcal{P}(Y) \subseteq Y$, insbesondere $|\mathcal{P}(Y)| \leq Y$. Nach Theorem 3.2 ist aber $|\mathcal{P}(Y)| > Y$, Widerspruch. \square

Die Paradoxa zeigen, dass der naive Begriff von Mengen zu viel enthält — manche davon, wie die Menge aller Mengen, haben Eigenschaften, die nicht wohldefiniert sind und zu Widerspruch führen. Daher brauchen wir mehr Einschränkungen dafür, welche Objekte überhaupt Mengen sein können, um den Begriff von Mengen präzise zu machen. Dies ist genau das Thema in der *axiomatischen Mengenlehre*, wo man den Begriff von Mengen durch Axiome festlegen. Die Mathematiker werden noch mehr dazu sehen in der Vorlesung *Grundstrukturen*.

3.4 Lineare Gleichungssysteme

Wir werden ein paar Beispiele von linearen Gleichungssystemen (LGS) sehen und lösen.

Übung 3.3. Man löse das folgende LGS mittels elementaren Zeilenoperationen:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Lösung.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-2R_1, R_3+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-\frac{3}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{2}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{R_2-6R_3, R_1+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{4}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array} \right).$$

$$\implies \quad x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{1}{3}.$$

□

Übungsstunde 4

Lineare Gleichungssysteme II

4.1 Besprechung Serie 3

Wir wollen jetzt die Lösung von Aufgabe 5 genauer anschauen, und zwar hauptsächlich den Teil, wo man die Existenz eines Inverselements zeigt. Sei $x = a + b\tau \in k[\tau] \setminus \{0 + 0\tau\}$. Wir dürfen annehmen, dass $b \neq 0$, weil sonst $x = a \in k$ gilt und wir können das Inverse von $a \in k$ leicht finden. Wie definieren noch $x' = a - b\tau$, es gilt

$$xx' = a^2 - b^2\alpha.$$

Beachte, dass $xx' \neq 0 + 0\tau$, weil sonst $a^2 = b^2\alpha$ gelten muss, woraus $\tau = \pm a/b \in k$ folgt, dies kann aber nicht sein. So hat xx' ein Inverses $(a^2 - b^2\alpha)^{-1} \in k$. Nun nehmen wir an, dass x ein Inverses hat — wir wollen unter dieser Annahme einen Kandidat für x^{-1} (falls existiert) finden, und dann beweisen, dass das gefundene Element tatsächlich das Inverse von x ist. Es gilt

$$x^{-1}(xx') = x' \quad \implies \quad x^{-1} = x'(xx')^{-1}.$$

Wir setzen x' und xx' ein:

$$x^{-1} = (a - b\tau)(a^2 - b^2\alpha)^{-1}.$$

Dieses Element ist jetzt unser Kandidat für x^{-1} . Es bleibt zu zeigen, dass $xx^{-1} = 1$:

$$\begin{aligned} xx^{-1} &= (a + b\tau)(a - b\tau)(a^2 - b^2\alpha)^{-1} \\ &= (a^2 - b^2\alpha)(a^2 - b^2\alpha)^{-1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

So haben wir verifiziert, dass $x^{-1} = (a - b\tau)(a^2 - b^2\alpha)^{-1}$ das Inverse von x ist. [Hier haben wir x^{-1} nicht als einen Bruch $1/x$ geschrieben, um zu betonen, dass die Existenz von einem Inversen nicht trivial ist und man kann nicht mit beliebigen Elementen einen solchen Bruch bauen.]

Nächste Woche werden wir noch ein paar Aufgaben aus Serie 3 besprechen.

4.2 Mehr zu linearen Gleichungssystemen

Das LGS von letzter Woche hat eine eindeutige Lösung und wir erhalten am Ende eine Matrix mit Einsen auf dem Diagonal. Allgemein können wir das nicht machen, trotzdem versuchen wir, die Matrix in eine ähnliche Form zu bringen, nämlich die reduzierte Zeilenstufenform (engl. row-reduced echelon form):

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Übung 4.1. Löse das folgende LGS

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 15 \end{cases}$$

Lösung. Die entsprechende Matrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & 1 & 15 \end{array} \right)$$

Nach elementaren Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Wenn (x_1, x_2, x_3) eine Lösung des Systems ist, gibt es keine Einschränkungen für x_3 , wir können also x_3 frei wählen. Aber es muss

$$x_1 = \frac{11}{3} - \frac{2}{3}x_3 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_3$$

gelten. So können wir die Lösung als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} - \frac{2}{3}x_3 \\ \frac{1}{3} + \frac{5}{3}x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

schreiben. x_3 kann einen beliebigen Wert $t \in \mathbb{R}$ annehmen, daher ist die Lösungsmenge gegeben durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

4.3 Weitere Übungsaufgaben

Übung 4.2. Löse das LGS

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = -2 \end{cases}.$$

Versuche, die Geraden $x - y = 1$ und $x - 2y = -2$ in der Ebene zu zeichnen.

Lösung.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{-R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Somit ist die eindeutige Lösung gegeben durch $x = 4, y = 3$. Geometrisch ist $(4, 3) \in \mathbb{R}^2$ der Schnittpunkt der Geraden $x - y = 1$ und $x - 2y = -2$, es sieht wie folgt aus.

□

Übung 4.3. Löse das LGS

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}.$$

Versuche, die Geraden $x + 2y = 4$ und $2x + 4y = 6$ in der Ebene zu zeichnen.

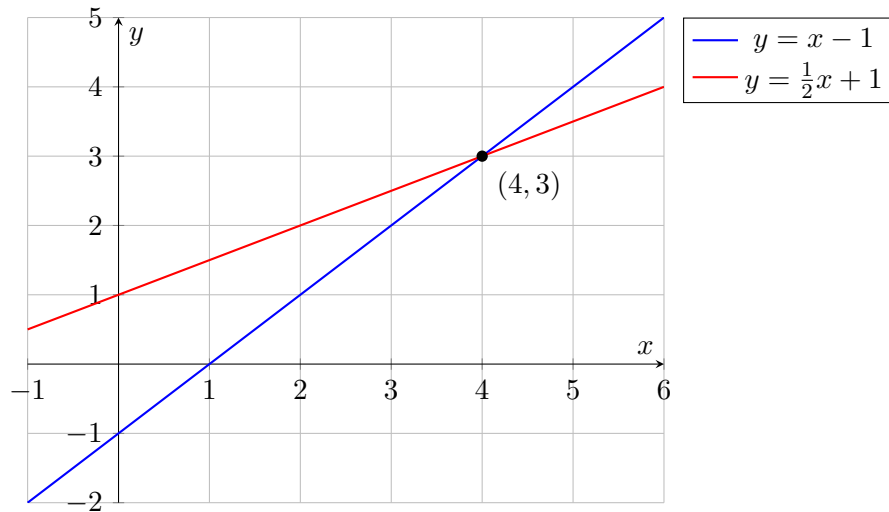


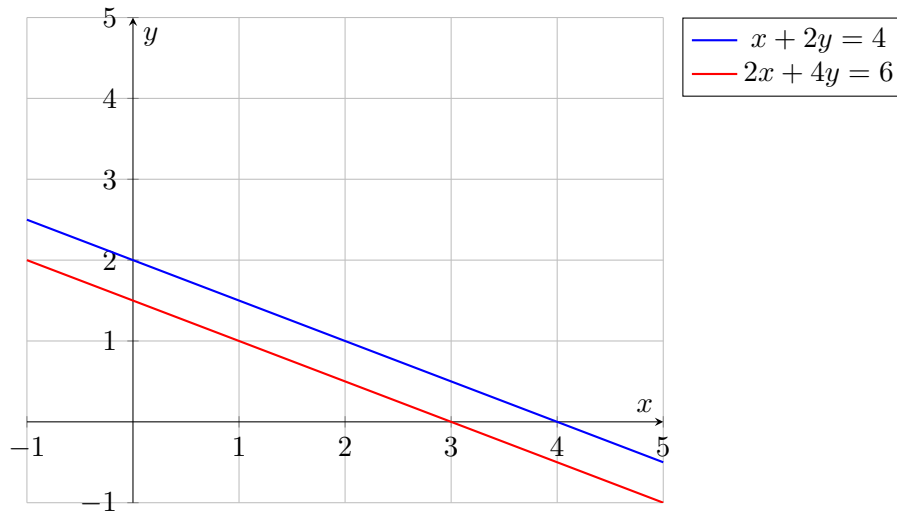
Abbildung 4.1: Lösung zum LGS $x - y = 1$ und $x_1 - 2y = -2$

Lösung. Man bemerkt, dass dieses LGS keine Lösung hat: Nach Umformungen erhalten wir $0 = 2$. Geometrisch haben wir zwei parallele Geraden in der Ebene, die keinen Schnittpunkt haben. Aber wenn wir eine Gerade verschieben, z.B. wenn wir die erste Gleichung durch $x + 2y = 3$, dann bekommen wir zwei identische Geraden und sie haben unendlich viele Schnittpunkte, dementsprechend hat das neue LGS unendlich viele Lösungen. Die geometrische Bedeutung eines LGS werden wir noch besser verstehen mit Hilfe von Konzepten wie Vektorräume und lineare Abhängigkeit. \square

Nun lösen wir eine Aufgabe wo das LGS von einem Parameter abhängt. Dann kommt eine natürliche Frage, ist die Anzahl von Lösungen auch von dem Parameter abhängig?

Übung 4.4. Für welche $a \in \mathbb{R}$ hat das folgende LGS eine Lösung? Bestimme die Lösungen wenn sie existieren.

$$\begin{cases} x + ay + 3z = a \\ x + (a - 2)y + (2a + 3)z = -a^2 \\ y - az = 1 \end{cases}$$

Abbildung 4.2: Das LGS $x + 2y = 4$ und $2x + 4y = 6$ hat keine Lösung

Lösung. Wir lösen das LGS wie normal:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & a \\ 1 & a-2 & 2a+3 & -a^2 \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & a \\ 0 & -2 & 2a & -a^2-a \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{R_2+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & -a^2-a+2 \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Wir sehen schon jetzt die Abhängigkeit von a . Wenn $-a^2 - a + 2 \neq 0$, hat das LGS keine Lösung. Die zwei Nullstellen von diesem Polynom sind 1 und -2 , also es genügt, die Lösungen in diesen zwei Fällen zu bestimmen

Fall 1: Die Zielmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die Lösungsmenge ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Fall 2: Die Zielmatrix ist

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1+2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Die Lösungsmenge ist

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

Literaturverzeichnis

- [Beu09] Albrecht Beutelspacher. „*Das ist o. B. d. A. trivial!*“. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009. ISBN: 978-3-8348-0771-7.
- [Fig25] Alessio Figalli. „Analysis I: One Variable“. Vorlesungsskript. 2025.
- [Hal24] Lorenz Halbeisen. „Grundstrukturen“. Vorlesungsskript. 2024.
- [Hal25] Lorenz Halbeisen. *Combinatorial Set Theory*. Cham: Springer, 2025. ISBN: 978-3-031-91751-6.
- [ML22] Thomas C. T. Michaels und Marcel Liechti. *Prüfungstraining Lineare Algebra*. Cham: Birkhäuser, 2022. ISBN: 978-3-030-65885-4.