Übungsstunde 10

Lineare Abbildung, Darstellungsmatrix

10.1 Quiz 6

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Welche der folgenden Aussagen sind wahr im Allgemeinen?

1. Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum mit einem eindeutigen Komplement. Dann gilt $U = V$ oder $U = \{0\}$.
2. Sei $K = \mathbb{R}$. Seien $U, W \subseteq V$ zwei Unterräume sodass $\dim(U) + \dim(W) \geq \dim(V)$. Dann ist $U + W = V$.
3. Seien U_1, U_2 und W Unterräume von V sodass $U_1 \subseteq U_2$ und W ein Komplement von U_1 und U_2. Dann ist $U_1 = U_2$.

Lösung.

1. **Wahr.** Angenommen ist $\dim V = 2$ und $U \neq V$, $U \neq \{0\}$. Dann ist $U = \operatorname{span}\{u\}$ für $u \neq 0$. Sei W ein Komplement von U, dann ist $W = \operatorname{span}\{w\}$ für $w \neq 0$. Nun ist aber $\operatorname{span}\{u + w\}$ auch ein Komplement von U: ist $\alpha(u + w) = \beta u$, so muss $\alpha, \beta \neq 0$ gelten und daher
$$w = \frac{1}{\alpha}(\beta u - \alpha u) \in U,$$
Widerspruch.
2. **Falsch.** Betrachte $V = \mathbb{R}^2$ mir $U = W = \operatorname{span}\{(1, 0)\}$. Dann ist $\dim U + \dim W = 2$ aber $U + W = U \neq V$.
3. **Wahr.** Es gilt $\dim U_1 + \dim W = \dim V = \dim U_2 + \dim W$. Also $\dim U_1 = \dim U_2$, es folgt $U_1 = U_2$.

□

10.2 Besprechung Serie 9

Es ist mir aufgefallen, dass Aufgabe 6 relativ schwer ist. Insbesondere wegen der unendlich vielen Vektorräume kann es einem schwer fallen, Argumente gut zu formulieren. Die Aufgabe verlangt auch eine Kombination von Analysis und Lineare Algebra.

In 6 (a) verwendet man einen bekannten Satz aus der Analysis: Eine von unten beschränkte, monoton fallende Folge hat immer einen Grenzwert. Die Folge $a_n = \dim U_n$ hat genau diese Eigenschaft. Nun sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$, dann gibt es $N \in \mathbb{N}$ sodass für alle $n, m \geq N$, $|a_n - a_m| < 1/2$ — eine konvergente Folge ist immer eine Cauchy-Folge. Da $a_n, a_m \in \mathbb{N}$, gilt $a_n = a_m$ für alle $n, m \neq N$. Dies impliziert, dass $U_n = U_m$ für alle $n, m \geq N$.

Wir erwarten aber andere Phänomene wenn V unendlich dimensional ist. Bemerke, dass es trotzdem sein kann, dass die Folge am Ende konstant wird, aber nicht im Allgemeinen. Beispiel: Sei $C^k(\mathbb{R})$ der Raum der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$, dann haben wir

$$C^0 \supseteq C^1 \supseteq C^2 \supseteq \cdots \supseteq C^k \supseteq \cdots \supseteq \cdots .$$

Jede Inklusion ist strikt, also die Folge stabilisiert nicht.

Wir können eigentlich nicht viel darüber Aussagen, wie sich die Folge verhält. Für die Folge $U_n = \operatorname{span}\{X^p : p \geq n\}$ gilt

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n = \{0\}.$$

Aber im Beispiel oben erhalten wir

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R}) \neq \{0\},$$

da z.B. $\exp \in C^\infty(\mathbb{R})$. Es kann wirklich vieles passieren.

10.3 Wiederholung

Definition 10.1. Eine lineare Abbildung $T : V \to W$ ist ein **Isomorphismus**, falls es eine lineare Abbildung $S : W \to V$ gibt, mit $S \circ T = \mathrm{id}_V$, $T \circ S = \mathrm{id}_W$. V ist **isomorph** zu W wenn es einen Isomorphismus $T : V \to W$ gibt, wir schreiben $V \cong W$.

Lemma 10.2. *Die Umkehrabbildung einer linearen Abbildung ist auch linear. Eine lineare Abbildung ist genau dann ein Isomorphismus, wenn sie bijektiv ist.*

Lemma 10.3. *Verknüpfungen von linearen Abbildungen sind wieder linear.*

Korollar 10.4. *Zwei endlich dimensionale Vektorräume V, W sind genau dann isomorph wenn* $\dim V = \dim W$.

Definition 10.5. Sei V ein K-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V. Für $v \in V$ definieren wir

$$[v]_{\mathcal{B}} = (a_1, \ldots, a_n) \in K^n,$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ die (eindeutigen) Koeffizienten in der linearen Kombination $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ sind. Wir schreiben $\Phi_{\mathcal{B}} : V \to K^n$ für $\Phi_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}$.

Proposition 10.6. *$\Phi_{\mathcal{B}}$ ist ein Isomorphismus.*

Bemerkung 10.7. Die Umkehrabbildung ist gegeben durch $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(a_1, \ldots, a_n) = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$.

Bemerkung 10.8. Obwohl jeder n-dimensionale Vektorraum isomorph zu K^n ist, gibt es im Allgemeinen keinen *kanonischen* Isomorphismus. Wir haben eine Basis gebraucht, um $\Phi_{\mathcal{B}}$ zu definieren. Es gibt jedoch Vektorräume, die zu einander kanonisch isomorph sind. Ein solches Beispiel werdet ihr später sehen.

Definition 10.9. Seien V, W endlich dimensionale (mit Dimensionen n, m respektive) Vektorräume und $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V und W. Die Darstellungsmatrix $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \in M_{m\times n}(K)$ ist die eindeutige Matrix sodass $\Phi_{\mathcal{C}} \circ T \circ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} = T_A$, wobei $A = [T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$.

Bemerkung 10.10. Mit anderen Worten, die i-te Spalte ϕ_i von $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ ist gegeben durch $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, wobei $T(v_i) = \alpha_1w_1 + \cdots + \alpha_mw_m$.

Proposition 10.11. *Es gilt $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = [Tv]_{\mathcal{C}}$.*

Satz 10.12. *Seien V, W, U endlich dimensionale Vektorräume und $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V, W, U. Für lineare Abbildungen $T : V \to W$ und $S : W \to U$ es gilt*

$$[S \circ T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}} = [S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}[T]^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$$

10.4 Linearität und der Grundkörper

Mit der folgenden Übung wollen wir klarmachen, das die Linearität im Allgemeinen von dem Grundkörper abhängt. Für ein weiteres Beispiel und mehr zu dem Zusammenhang zwischen $\mathbb{R}$- und $\mathbb{C}$-Linearität findet ihr in [Wan24].

Übung 10.13. Es sei $V = \mathbb{C}$ und $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $F(z) = \overline{z}$.

1. Betrachte V als einen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ist F linear? Beweisen Sie die Ihre Behauptung.
2. Betrachte V als einen $\mathbb{C}$-Vektorraum. Ist F linear?Beweisen Sie die Ihre Behauptung.

Lösung.

1. Seien $z_1, z_2 \in V$, dass gilt $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. Weiter seien $z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (Wichtig! λ muss *reell* sein!), wir haben $\overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}$.
2. Es gilt $\overline{iz} = -i\overline{z} \neq i\overline{z}$ für $z \neq 0$.

$\square$

10.5 Anwendungen von Rank-Nullity Theorem

Übung 10.14. Es seien $A \in M_{m \times n}(K)$ und $B \in M_{n \times r}(K)$. Man beweise die folgende Formel:

$$\mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(B) - \dim(\ker(A) \cap \mathrm{im}(B))$$

[**Hinweis.** Betrachte die Abbildung $F : \mathrm{im}(B) \to K^m$, $F(v) = Av$.]

Lösung. Sei F wie im Hinweis. Dann ist $\mathrm{im}(F) = \mathrm{im}(AB)$ und $\ker(F) = \mathrm{im}(B) \cap \ker(A)$. Somit ist $\mathrm{rk}(F) = \dim \mathrm{im}(F) = \dim \mathrm{im}(AB) = \mathrm{rk}(AB)$. Nach dem Theorem 7.3 gilt

$$\dim \mathrm{im}(B) = \mathrm{rk}(F) + \dim \ker(F) \implies \mathrm{rk}(AB) = \mathrm{rk}(B) - \dim(\ker(A) \cap \mathrm{im}(B)).$$

$\square$