सम्बन्ध एवं फलन (Relations and Functions) – सम्पूर्ण सार

---

1. सम्बन्ध (Relations)

सम्बन्ध क्या है?

मान लीजिए दो समुच्चय हैं—

A = {1, 2, 3}

B = {a, b, c}

यदि हम समुच्चय A के कुछ तत्वों को समुच्चय B के कुछ तत्वों से जोड़ते हैं, तो इस प्रकार प्राप्त युग्मों के समूह को **सम्बन्ध (Relation)** कहते हैं।

उदाहरण

R = {(1,a), (2,b), (3,c)}

यह दर्शाता है कि 1 का सम्बन्ध a से, 2 का b से तथा 3 का c से है।

कार्तीय गुणन (Cartesian Product)

कोई भी सम्बन्ध सदैव कार्तीय गुणन का उपसमुच्चय होता है।

A × B =

{(1,a), (1,b), (1,c), (2,a), (2,b), (2,c), (3,a), (3,b), (3,c)}

इन क्रमित युग्मों में से कुछ को चुन लेने पर सम्बन्ध प्राप्त होता है।

सम्बन्धों के प्रकार

(क) स्वतुल्य सम्बन्ध (Reflexive Relation)

नियम

समुच्चय के प्रत्येक तत्व का सम्बन्ध स्वयं से होना चाहिए।

$(a,a) \in R$

उदाहरण

$A = \{1,2,3\}$

$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)\}$

यह स्वतुल्य सम्बन्ध है क्योंकि

(1,1), (2,2), (3,3)

सभी उपस्थित हैं।

स्मरण सूत्र

"प्रत्येक व्यक्ति की अपनी पहचान होती है।"

(ख) सममित सम्बन्ध (Symmetric Relation)

नियम

यदि

$(a,b) \in R$

तो

$(b,a) \in R$

भी होना चाहिए।

उदाहरण

$R = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2)\}$

यह सममित सम्बन्ध है।

स्मरण सूत्र

"जैसा सम्बन्ध मेरी ओर से, वैसा ही तुम्हारी ओर से।"

मित्रता इसी प्रकार का सम्बन्ध है।

(ग) संक्रामक सम्बन्ध (Transitive Relation)

नियम

यदि

$(a,b) \in R$

तथा

$(b,c) \in R$

तो

$(a,c) \in R$

भी होना चाहिए।

उदाहरण

यदि

राम > श्याम

और

श्याम > मोहन

तो

राम > मोहन

भी होगा।

स्मरण सूत्र

"एक कड़ी दूसरी कड़ी से जुड़कर तीसरी कड़ी बनाती है।"

तुल्यता सम्बन्ध (Equivalence Relation)

जब कोई सम्बन्ध निम्नलिखित तीनों गुणों को संतुष्ट करता है—

✓ स्वतुल्य (Reflexive)

✓ सममित (Symmetric)

✓ संक्रामक (Transitive)

तब उसे **तुल्यता सम्बन्ध** कहते हैं।

उदाहरण

"एक ही कक्षा में अध्ययन करना"

यदि A और B एक ही कक्षा में हैं तथा B और C भी एक ही कक्षा में हैं, तो A और C भी उसी कक्षा में होंगे।

तुल्यता वर्ग (Equivalence Class)

मान लीजिए पूर्णांकों का समुच्चय Z है तथा सम्बन्ध परिभाषित है—

aRb ⇔ (a − b), 3 से विभाज्य हो।

तब

[0] = {..., -6, -3, 0, 3, 6, ...}

[1] = {..., -5, -2, 1, 4, 7, ...}

[2] = {..., -4, -1, 2, 5, 8, ...}

ये सभी तुल्यता वर्ग कहलाते हैं।

स्मरण सूत्र

तुल्यता वर्ग = समान गुणधर्म वाले तत्वों का परिवार

---

2. फलन (Functions)

फलन क्या है?

फलन एक विशेष प्रकार का सम्बन्ध है, जिसमें प्रांत (Domain) का प्रत्येक तत्व सहप्रांत (Codomain) के केवल एक तत्व से सम्बन्धित होता है।

उदाहरण

$f(x) = x^2$

$1 \to 1$

$2 \to 4$

$3 \to 9$

यह एक फलन है।

फलन के मुख्य भाग

1. प्रांत (Domain)

जहाँ से निवेश (Input) लिया जाता है।

2. सहप्रांत (Codomain)

जहाँ परिणाम (Output) पहुँचता है।

3. परास (Range)

जो परिणाम वास्तव में प्राप्त होते हैं।

उदाहरण

$f(x) = x^2$

Domain = {1,2,3}

Codomain = {1,4,9,16}

Range = {1,4,9}

एकैकी फलन (One-One / Injective Function)

नियम

भिन्न-भिन्न निवेशों के परिणाम भी भिन्न होने चाहिए।

यदि

$f(a) = f(b)$

तो

$a = b$

उदाहरण

$f(x) = 2x$

$1 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 4$

$3 \rightarrow 6$

यह एकैकी फलन है।

एकैकी नहीं

$f(x) = x^2$

Domain = {-1,1}

दोनों का परिणाम 1 है।

अतः यह एकैकी नहीं है।

आच्छादक फलन (Onto / Surjective Function)

नियम

सहप्रांत का कोई भी तत्व अप्राप्त नहीं रहना चाहिए।

उदाहरण

$f(x) = x + 1$

A = {1,2,3}

B = {2,3,4}

सहप्रांत के सभी तत्व प्राप्त हो रहे हैं।

अतः यह आच्छादक फलन है।

एकैकी-आच्छादक फलन (Bijective Function)

जब कोई फलन—

✓ एकैकी हो

तथा

✓ आच्छादक हो

तब वह **एकैकी-आच्छादक (Bijective)** कहलाता है।

यह फलनों का सर्वाधिक महत्वपूर्ण प्रकार है।

---

3. प्रतिलोम फलन (Inverse Function)

प्रतिलोम का अर्थ है—

"वापसी का मार्ग"

यदि

$f(2) = 5$

तो

$f^{-1}(5) = 2$

आवश्यक शर्त

प्रतिलोम फलन तभी अस्तित्व में होगा जब दिया गया फलन **एकैकी-आच्छादक (Bijective)** हो।

प्रतिलोम ज्ञात करने की विधि

यदि

$f(x) = 2x + 3$

मान लें

$y = 2x + 3$

अब x के लिए हल करें—

$x = (y - 3)/2$

अब y के स्थान पर x रखने पर

$f^{-1}(x) = (x - 3)/2$

---

4. फलनों का संयोजन (Composition of Functions)

मान लें

$f(x) = 2x$

$g(x) = x + 1$

तब

$(g \circ f)(x)$

$= g(f(x))$

$= g(2x)$

$= 2x + 1$

स्मरण सूत्र

पहले आन्तरिक फलन कार्य करता है, उसके बाद बाह्य फलन।

---

5. द्विआधारी संक्रिया (Binary Operation)

यह ऐसा नियम है जो किसी समुच्चय के दो तत्वों पर कार्य करके उसी समुच्चय का एक नया तत्व प्रदान करता है।

उदाहरण

पूर्णांकों पर जोड़ (+)

2 + 3 = 5

दो निवेश

एक परिणाम

और परिणाम भी पूर्णांक

अतः यह द्विआधारी संक्रिया है।

द्विआधारी संक्रिया के गुण

1. बंदता गुण (Closure Property)

परिणाम उसी समुच्चय में होना चाहिए।

उदाहरण

2 + 3 = 5

और 5 भी Z में है।

---

2. क्रमविनिमेय गुण (Commutative Property)

a * b = b * a

उदाहरण

2 + 3 = 3 + 2

---

3. साहचर्य गुण (Associative Property)

(a * b) * c = a * (b * c)

उदाहरण

(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)

---

4. तत्समक अवयव (Identity Element)

ऐसा तत्व जो किसी संख्या को परिवर्तित नहीं करता।

जोड़ के लिए:

0

क्योंकि

a + 0 = a

---

5. प्रतिलोम अवयव (Inverse Element)

ऐसा तत्व जो तत्समक अवयव प्रदान करे।

उदाहरण

5 का योगात्मक प्रतिलोम

= -5

क्योंकि

5 + (-5) = 0

बोर्ड परीक्षा हेतु अत्यन्त महत्वपूर्ण बिन्दु

• स्वतुल्य, सममित तथा संक्रामक सम्बन्धों की पहचान करना सीखें।

• तुल्यता सम्बन्ध सिद्ध करने वाले प्रश्न अत्यधिक पूछे जाते हैं।

• एकैकी तथा आच्छादक फलनों की जाँच का अभ्यास करें।

• प्रतिलोम फलन निकालने के प्रश्न प्रायः पूछे जाते हैं।

• फलनों के संयोजन से सम्बन्धित प्रश्न लगभग प्रत्येक वर्ष आते हैं।

• द्विआधारी संक्रियाओं में बंदता, साहचर्य, क्रमविनिमेयता तथा तत्समक अवयव अत्यधिक महत्वपूर्ण हैं।

---

30 सेकण्ड में सम्पूर्ण अध्याय

• सम्बन्ध = तत्वों के मध्य सम्बन्ध स्थापित करने का नियम।

• स्वतुल्य = स्वयं से सम्बन्ध।

• सममित = दोनों दिशाओं में समान सम्बन्ध।

• संक्रामक = सम्बन्धों की श्रृंखला।

• तुल्यता सम्बन्ध = स्वतुल्य + सममित + संक्रामक।

• फलन = प्रत्येक निवेश का केवल एक परिणाम।

• एकैकी = भिन्न निवेशों के भिन्न परिणाम।

• आच्छादक = सहप्रांत का कोई भी तत्व रिक्त न रहे।

• एकैकी-आच्छादक = एकैकी + आच्छादक।

• प्रतिलोम = वापसी का मार्ग।

• संयोजन = दो फलनों का क्रमिक प्रयोग।

• द्विआधारी संक्रिया = दो तत्वों पर कोई नियम लागू करना।