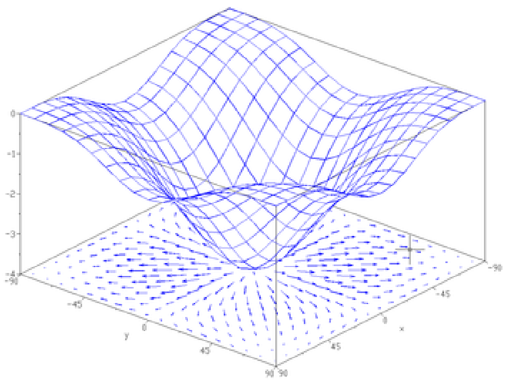
勾配 (Gradient) とは



- スカラー場の各点で**変化が最大の方向**と**変化率**を大きさにもつ
- ベクトル場

勾配作用素：

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

勾配ベクトルの表記：

$$\nabla I = \nabla I(x, y) = \left(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial I(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right) = (I_x, I_y)$$

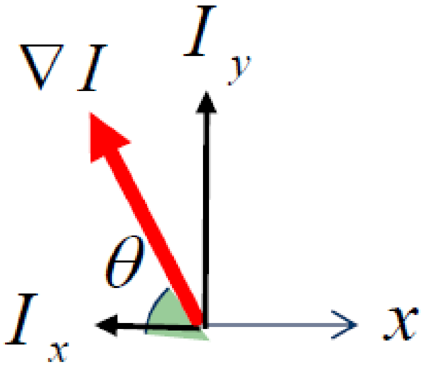
画像の勾配とエッジ強度画像

- 画像を高さ関数と考えた時の勾配ベクトル場
- 画像の edge 部分で大きい勾配を持つ画像

勾配ベクトルの方向：

$$\theta = \arctan\left(I_y / I_x\right)$$

すなわち、**画像の edge と垂直な方向**

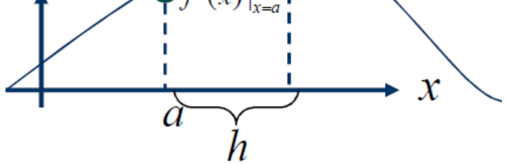


ラプラス作用素 (Laplacean): 滑らかさを記述

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}$$

- Laplace方程式：自然科学の多くのぶんやで重要。 $\Delta I = 0$
- Poisson方程式：Laplace方程式の右辺が関数。 $\Delta I = g$



微分の定義

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

テイラー展開

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(b-a)^2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(b-a)^{(n-1)} + \frac{1}{n!} f^n(c)(a-b)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, a < c < b$$

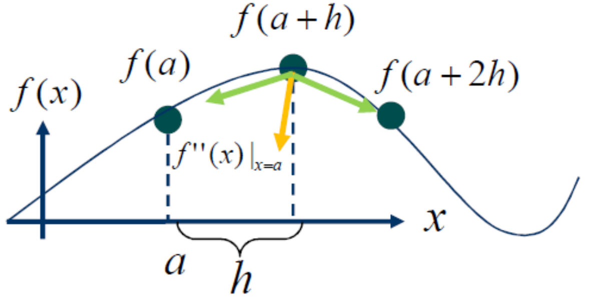
$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2!} f''(x)h^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)h^{n-1}$$

二次以下の項を全て無視すると、先ほどの式は次のように書き直すことができる。

高階微分の近似はより多くの評価点が必要：

例えば、2階微分の前進1次差分近似の場合:

2階微分はラプラシアン



$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) \approx \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h^2) \right)$$

$$\approx \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h^2} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h^2} + O(h^2)$$

すなわち

$$f''(x) \approx \frac{(x+2h) - 2(x+h) + f(x)}{h^2} + O(h^2)$$

まとめ

$$\Rightarrow f'(x) \approx \frac{\cdots}{h} - \frac{1}{2!}f''(x)h + O(h^2)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) \approx \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + O(h^2)\right)$$

$$\approx \frac{f(x+2h)-f(x+h)}{h^2} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h^2} + O(h^2)$$

すなわち、

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{1}{2!}\left(\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}\right) + \frac{1}{2!}O(h^2)h + O(h^3)$$

ここで、上式の第2項において、hの2乗の誤差がhの3乗の誤差になっていることに注意。

よって、1階微分の2次差分近似は以下のようになる。

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h)+4f(x+h)-3f(x)}{2h} + O(h^3)$$

まとめ

中心差分

中心差分を使う斗、評価点の数は同じでより高精度になる。
例えば、2階微分の中心2次差分近似の場合:

まず、前進微分を考える。

$$f(x+a) \approx f(x) + f'(x)a + \frac{1}{2!}f''(x)a^2 + O(a^3)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+a)}{a} \approx \frac{f(x)}{a} + \frac{f'(x)a}{a} + \frac{1}{2a}f''(x)a^2 + \frac{O(a^3)}{a}$$

次に、後進微分を考える。

$$f(x-b) \approx f(x) - f'(x)b + \frac{1}{2!}f''(x)b^2 + O(b^3)$$

$$\Rightarrow \frac{f(x-b)}{b} \approx \frac{f(x)}{b} + \frac{f'(x)b}{b} + \frac{1}{2b}f''(x)b^2 + \frac{O(b^3)}{b}$$

上記の2式を足し合わせる。

$$\frac{f(x+a)}{a}+\frac{f(x-b)}{b}=\frac{bf(x+a)+af(x-b)}{ab}$$

この式を近似式を用いて書き直すと

$$\frac{bf(x+a)+af(x-b)}{ab}\approx\frac{(a+b)f(x)}{ab}+\frac{(a+b)f''(x)}{2}$$

よって式変形すると、

$$f''(x)\approx\frac{2bf(x+a)-2(a+b)f(x)+2af(x-b)}{ab(a+b)}+O(a^3,b^3)$$

ここで、$a=b=h$として整理すると、

$$f''(x)\approx\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}+O(h^3)$$

$$\nabla I = \left(\frac{\partial I}{\partial x}, \frac{\partial I}{\partial y}\right) \qquad \Delta I = \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\right)$$

1次精度前進s差分近似

数学的には $h << 1$ だが、画像などでは $h = 1$ をよく使う。

$$\nabla I \approx \{I(x+1, y) - I(x, y), I(x, y+1) - I(x, y)\}$$

$$\Delta I \approx I(x+2, y) - 2I(x+1, y) + 2I(x, y) + I(x, y+2), -2I(x, y+1)$$

2次精度中心差分近似

$$\nabla I = \left(\frac{I(x+1, y) - I(x-1, y)}{2}, \frac{I(x, y+1) - I(x, y-1)}{2}\right)$$

$$\Delta I \approx I(x+1, y) + I(x-1, y) + I(x, y+1), I(x, y-1), -4I(x, y)$$

また、ベクトル $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$を Laplacian に代入すると、

$$\Delta f(\boldsymbol{x}) \approx \sum^{n} f(x_i + h_i) - 2f(x_i) + f(x_i - h_i)$$

差分法 → 画像では3x3の作用素(フィルタ)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
前進1次

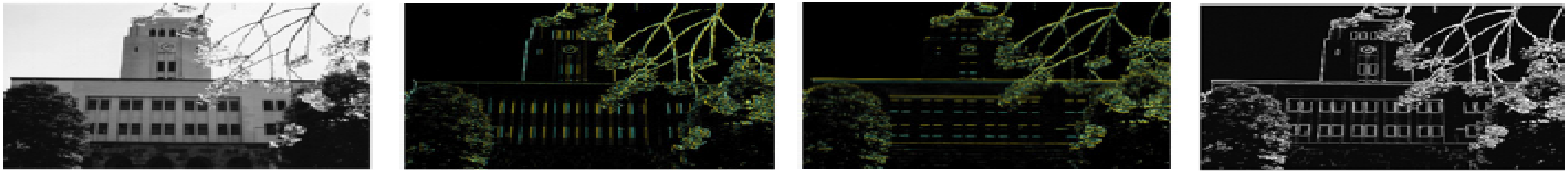
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
後退1次

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
中心2次

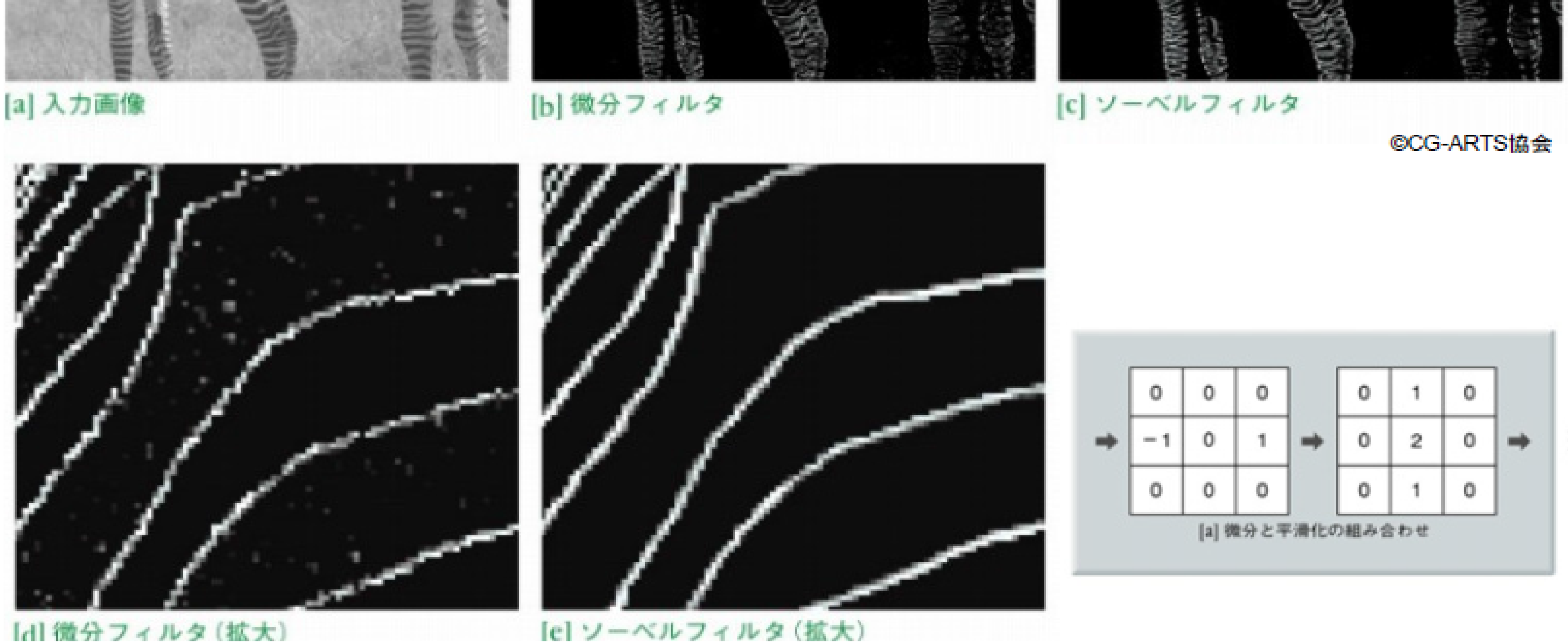
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
前進1次

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
後退1次

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$
中心2次



(前進1次 + 後退2次) / 2 = 中心2次



0	0	0
−1	−2	−1

≡

−1	0	1
−2	0	2
−1	0	1

Laplacian フィルタ

✓ ２次の中心差分でLaplaceオペレータの４連結での近似:

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$