参考 姿勢の表現：オイラー角、単位クォータニオン、および回転ベクトル（2006

物体の回転

1.1. オイラー角

欠点

1. 特異点がある．
2. 姿勢の時間的変化を積分する際に単位四元数よりも精度が低いこと

1.2. 四元数

欠点

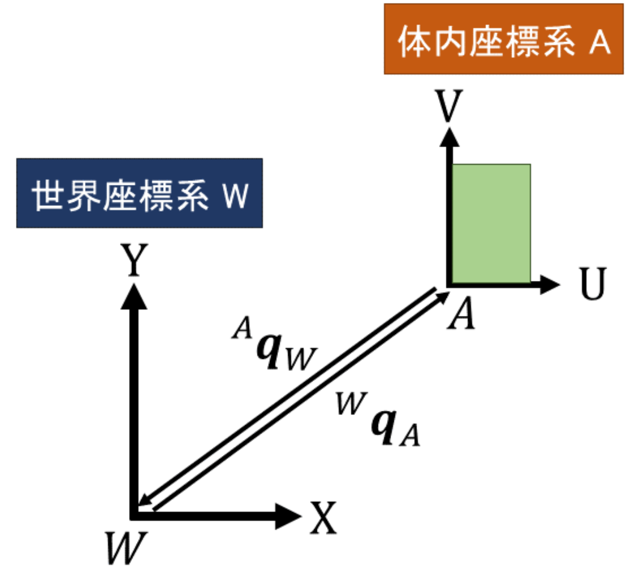
1. 四元数が直感的な物理的意味を持たないこと
2. 四元数が純粋な回転であるためにはユニティノルムを持たなければならないこと

1.3. 座標系

2 つの異なる座標系で表現されたデータの関係を考えます。

- ワールド座標系は、慣性空間に固定されています。
- この座標系の原点を W とする。体固定座標系は、姿勢を表現したい物体に固く固定されており，この座標系の原点を A とする。
- 世界座標系においてその原点 W から体内固定座標系の原点 A の位置ベクトルを ${}^{W}\boldsymbol{q}_{A}$ とする．反対に，体内固定座標系の原点 A から世界座標系の原点 W の位置ベクトルを ${}^{A}\boldsymbol{q}_{W}$ とする.

体内座標系の原点を世界座標系を並進移動のみで表せる場合

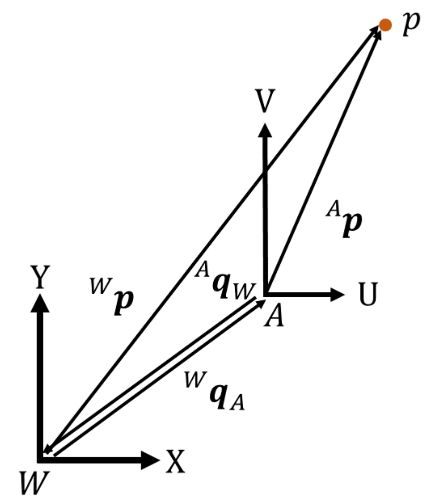


世界座標系上のある点 p が世界座標系上の位置 ${}^{W}\boldsymbol{p}$ に存在するとき，体内固定座標系上では ${}^{A}\boldsymbol{p}$ で与えられるとする．このとき， ${}^{W}\boldsymbol{p}$ は世界座標系において以下のように表される.

$$^{W}\boldsymbol{p} =^{A} \boldsymbol{p} +^{W} \boldsymbol{q}_A$$

一方，A 座標系では以下のように表される.

$$^{A}\boldsymbol{p} =^{A} \boldsymbol{q}_W +^{W} \boldsymbol{p}$$



2. 回転行列

2.1. 2D 平面における回転

簡単のために，${}^{W}\boldsymbol{q}_A = {}^{A}\boldsymbol{q}_W = \boldsymbol{0}$ かつ，体内固定座標系が世界座標系に対して θ だけ回転しているとする．

このとき，体内固定座標系のそれぞれの軸の法線ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ は世界座標系のそれぞれの軸の法線ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を用いて以下のように与えられる．

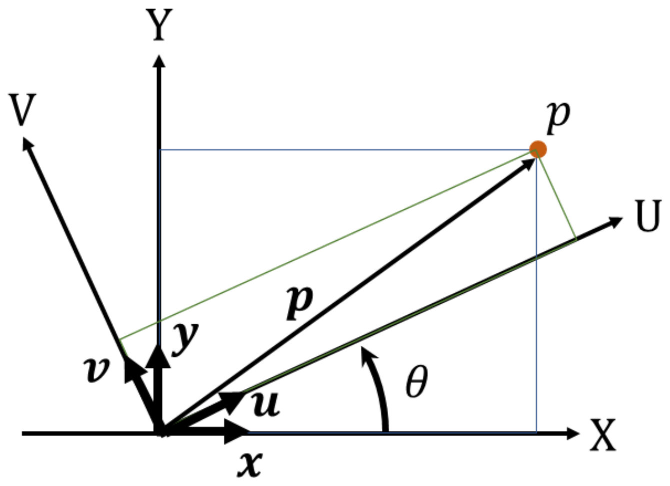
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x}\cos(\theta) + \boldsymbol{y}\sin(\theta)$$

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{x}\sin(\theta) + \boldsymbol{y}\cos(\theta)$$

2 つの座標系において点 p の位置ベクトル $\boldsymbol{p}$は

$$\boldsymbol{p} = p_x\boldsymbol{x} + p_y\boldsymbol{y} = p_u\boldsymbol{u} + p_v\boldsymbol{v}$$

とそれぞれの座標軸のベクトル成分に分解できる．



この式に，先ほどの 2 つの式を代入して

$$\begin{aligned} p_x \boldsymbol{x} + p_y \boldsymbol{y} &= p_u(\boldsymbol{x}\cos(\theta) + \boldsymbol{y}\sin(\theta)) + p_v(-\boldsymbol{x}\sin(\theta) + \boldsymbol{y}\cos(\theta)) \\ &= (p_u\cos(\theta) - p_v\sin(\theta))\boldsymbol{x} + (p_u\sin(\theta) + p_v\cos(\theta))\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$ では

$$p_x = p_u\cos(\theta) - p_v\sin(\theta)$$

$$p_y = p_u\sin(\theta) + p_v\cos(\theta)$$

が成り立つ．これをまとめると，

$$\left[\begin{array}{c} p_x \\ p_y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} p_u \\ p_v \end{array}\right]$$

となり，

$${}^{W}\boldsymbol{p} = {}^{W}\boldsymbol{R}_A \, {}^{A}\boldsymbol{p}$$

$${}^{W}\boldsymbol{R}_A = \left[\begin{array}{cc} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{array}\right]$$

一方，世界座標系から見た $\hat{A}bmp$ は以下のように与えられる．

$$
{}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{W}\ {}^{W}\boldsymbol{p}
$$

$$
{}^{A}\boldsymbol{R}_{W} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}
$$

さらに，

$$
{}^{W}\boldsymbol{R}_{A}\ {}^{A}\boldsymbol{R}_{W} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) - sin(\theta)cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta)\ + cos^2(\theta) \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}
$$

すなわち

$$
{}^{W}\boldsymbol{R}_{A} = ({}^{A}\boldsymbol{R}_{W})^{-1}
$$

が成り立つ．つまり，回転行列の逆行列が逆回転を表すことになる．

2.2. 2D 平面における並進移動と回転

以上のことから，2 つの座標系間の座標変換は次式で与えられる．

$$
{}^{W}\boldsymbol{p} = {}^{W}\boldsymbol{q}_{A} + {}^{W}\boldsymbol{R}_{A}\ {}^{A}\boldsymbol{p}
$$

3. 同次変換行列

2D 平面における 2 つの座標系の座標変換の式を再度成分ごとで書き表すと，

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \end{bmatrix}$$

この右辺の計算を 1 つにまとめると

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & q_x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & q_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ 1 \end{bmatrix}$$

と書き換えることができる．さらにこの式に

$$1 = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ 1 \end{bmatrix}$$

を加えて

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & q_x \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & q_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ 1 \end{bmatrix}$$

と表記する．

よって，

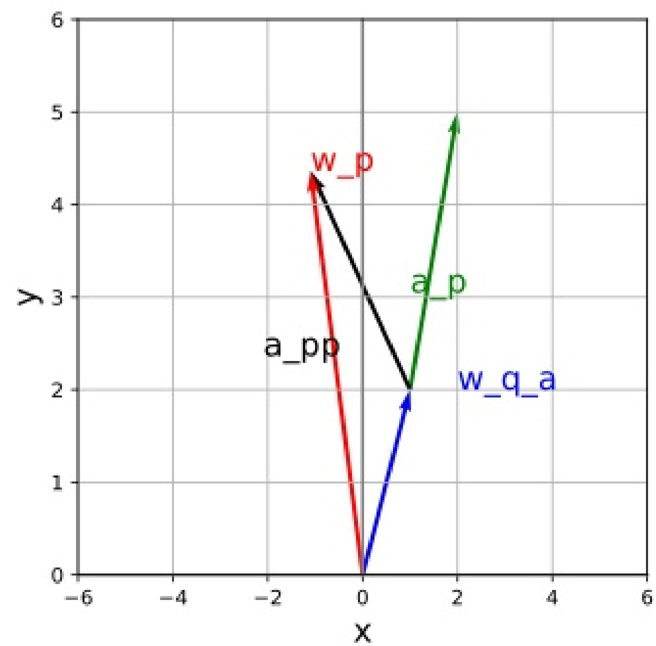
$$\left[\frac{{}^{W}\boldsymbol{p}}{1}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \frac{{}^{W}\boldsymbol{R}_A}{\boldsymbol{0}} & \frac{{}^{W}\boldsymbol{q}_A}{\boldsymbol{1}} \end{array}\right] \left[\frac{{}^{A}\boldsymbol{p}}{1}\right]$$

となり，これによって並進移動 + 回転という座標変換が

$${}^{W}\boldsymbol{p} = {}^{W}\boldsymbol{T}_A\ {}^{A}\boldsymbol{p}$$

という形で表現できるようになった.

例えば，世界座標系において ${}^{W}\boldsymbol{q}_A = (1,2)$ の位置に原点を持ち，角度が 60° だけ回転している座標系を A とする. この座標系 A 上の位置 ${}^{A}\boldsymbol{p} = (1,3)$ に存在する点を p とすると，世界座標系における点 p の位置 ${}^{W}\boldsymbol{p}$ は,



$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(60) & -\sin(60) & 1 \\ \sin(60) & \cos(60) & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{7+\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.866 \\ 4.366 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.2. 連続変換

これまでの座標系に 1 つ増やして，W, A, B の 3 つを考える．ここで，W と A，A と B の関係がわかっている場合，すなわち

$$^{W}\boldsymbol{p} =^{W} \boldsymbol{T}_A \ ^{A}\boldsymbol{p}$$

$$^{A}\boldsymbol{p} =^{A} \boldsymbol{T}_B \ ^{B}\boldsymbol{p}$$

の場合，W と B の関係は単純に $^{A}\boldsymbol{p}$ を代入して

$$^{W}\boldsymbol{p} =^{W} \boldsymbol{T}_B \ ^{B}\boldsymbol{p}$$

$$=^{W} \boldsymbol{T}_A \ ^{A}\boldsymbol{T}_B \ ^{B}\boldsymbol{p}$$

と表される．すなわち，連続変換は同時変換行列を重ねることによって表現できる．

4. 3D 空間における並進移動と回転

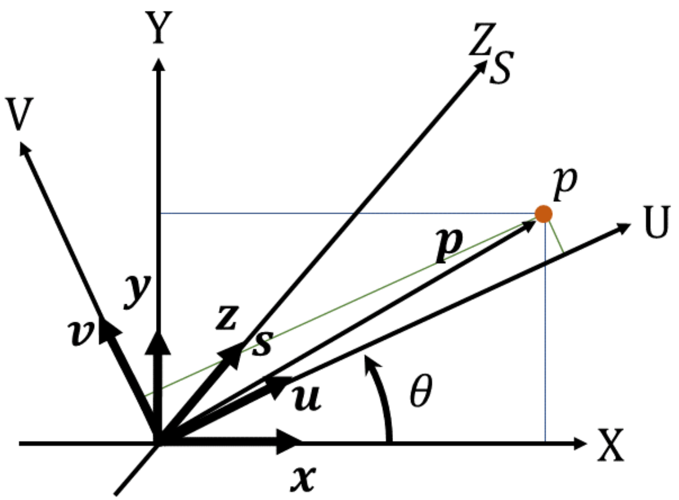
4.1. 並進移動

4.2. 回転

これまで扱ってきた 2D での回転は，原点を中心とした回転であった．これをそのまま 3D に拡大すると，「原点を通る軸を中心とした回転」となる．そこでまず，特に扱いの容易な座標軸を中心とした回転を考える．2D 平面における回転の式

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \end{bmatrix}$$

に対して，新たに座標系 W に Z 軸，座標系 A に S 軸を加える．ここで左手座標系の定義に従って $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{z}$ となるように Z 軸をとり，その Z 軸まわりの回転を考える．



すると，回転の式は拡張されて，

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_s \end{bmatrix}$$

となり，2D 平面のときと同様に

$${}^{W}\boldsymbol{p} = {}^{W}\boldsymbol{R}_A\ {}^{A}\boldsymbol{p}$$

$${}^{W}\boldsymbol{R}_A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

と書くことができる．同様に$X(U)$ 軸回りの回転として

$${}^{W}\boldsymbol{R}_A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$Y(V)$ 軸回りの回転として

$${}^{W}\boldsymbol{R}_A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

が定義できる．

5. オイラー角

5.1. オイラー角とは

参考

3 つの座標回転を連続して行うことで，任意の回転を記述することができる．例えば，1 回目に k 軸周りに角度 ψ だけ，2 回目に j 軸周りに角度 θ だけ，3 回目に i 軸周りに角度 ϕ だけ回転する場合，回転行列 $\boldsymbol{R}_{ijk}$ は

$$\boldsymbol{R}_{ijk}(\phi, \theta, \psi) = \boldsymbol{R}_i(\phi) R_j(\theta) R_k(\psi)$$

と表される．ここで i, j, k は，異なる 3 つの座標軸 $\{1, 2, 3\}$ からなる 27 個の可能な配列のうち，「連続する 2 つの数字が等しくなることはない」という制約を満たす以下の 12 個の内から 1 つを選択する．

$$(i, j, k) \in \begin{array}{c} \{(1,2,1),(1,2,3),(1,3,1),(1,3,2), \\ (2,1,2),(2,1,3),(2,3,1),(2,3,2), \\ (3,1,2),(3,1,3),(3,2,1),(3,2,3)\} \end{array}$$

この中でも，$(1, 2, 3)$、$(3, 1, 3)$、$(3, 2, 3)$ の 3 つが最も一般的に選択される．このように 3 回連続して回転させたときの各軸周りの回転角の組 (ϕ, θ, ψ) を**オイラー角**と呼び，以下のようなベクトルとして定義する．

$$\boldsymbol{u} := \begin{bmatrix} \phi, & \theta, & \psi \end{bmatrix}^T$$

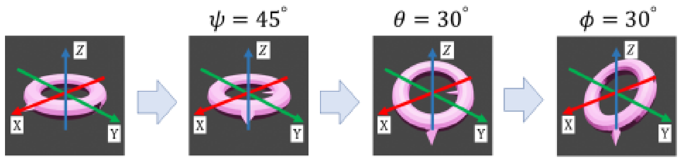
そして，この 3 次元のベクトル $\boldsymbol{u}$ をオイラー角ベクトルと呼ぶ．

連続変換において，$(i, j, k) = (1, 2, 3) = (X, Y, Z)$ とすると，$\boldsymbol{R}_{123}(\phi, \theta, \psi)$ は

$$\boldsymbol{R}_{123}(\phi, \theta, \psi) = \boldsymbol{R}_X(\phi)\boldsymbol{R}_Y(\theta)\boldsymbol{R}_Z(\psi)$$

という 3 つの回転行列の積であらわされ，1 回目に Z 軸回りに角度 ψ だけ，2 回目に Y 軸回りに角度 θ だけ，3 回目に X 軸回りに角度 ϕ だけ回転する変換を意味する．

例えば，$\psi = 45^\circ, \theta = 30^\circ, \phi = 30^\circ$ と連続変換された物体は図のように姿勢変換される．



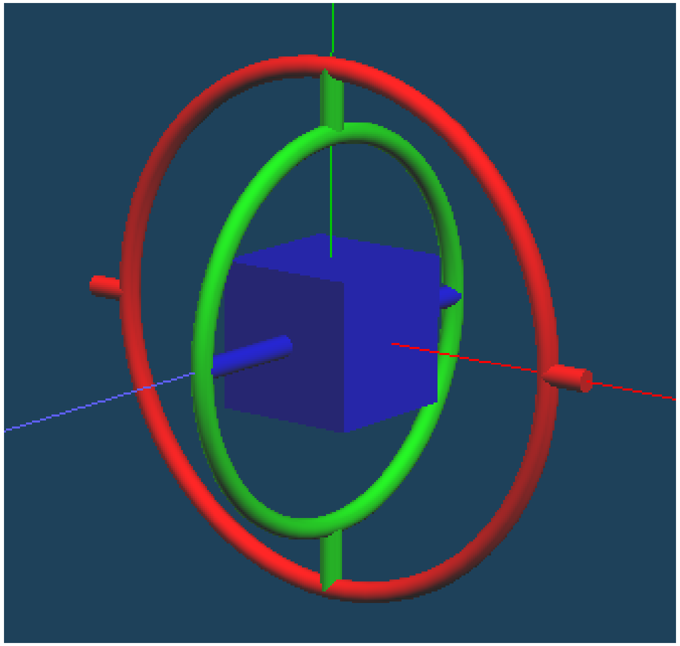
5.2. ジンバル

オイラー角に対応するものとして，よくジンバルが挙げられる.

真ん中の箱の回転行列を $\boldsymbol{R}$，赤色の軸を X，緑色の軸を $\boldsymbol{R}_Y$，青色の部分を $\boldsymbol{R}_Z$ とすると，赤色の部分が $\boldsymbol{R}_X$, 緑色の部分が $\boldsymbol{R}_Y$, 青色の部分が $\boldsymbol{R}_Z$ に対応する.

5.3. ジンバルロック

ジンバルに対して特定の操作を行うと，X 軸と Z 軸が重なり物体のとれる姿勢の自由度が $3- > 2$ に低下する. このような状態を **ジンバルロック** と呼び，オイラー角の持つ悪い特性の一つとされている.



6. 回転行列からオイラー角を求める

まず，オイラー角ベクトル

$$\boldsymbol{u} := \left[\begin{array}{ccc} \phi, & \theta, & \psi \end{array}\right]^T$$

から回転行列を求める．1 軸周りの回転行列 $\boldsymbol{R}_1$ は

$$\boldsymbol{R}_1 = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{array}\right]$$

同様に，2 軸，3 軸周りの回転行列は

$$\boldsymbol{R}_2 = \left[\begin{array}{ccc} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{array}\right]$$

$$\boldsymbol{R}_3 = \left[\begin{array}{ccc} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

これを合成した回転行列 $\boldsymbol{R}_{123}$ は

$$\boldsymbol{R}_{123}=\boldsymbol{R}_{12}\boldsymbol{R}_{3}=\left[\begin{array}{ccc} C_\theta & 0 & S_\theta \\ S_\phi S_\theta & C_\phi & -S_\phi C_\theta \\ -C_\phi S_\theta & S_\phi & C_\phi C_\theta \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc} c_\phi & -S_\psi & 0 \\ S_\psi & C_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{ccc} C_\theta C_\psi & -C_\theta S_\psi & S_\theta \\ S_\phi S_\theta C_\psi + C_\phi S_\psi & -S\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & -S_\phi C_\theta \\ -C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta S_\psi + S_\phi C_\psi & C_\phi C_\theta \end{array}\right]$$

この行列 $\boldsymbol{R}$ の 1 行 3 列成分に注目する.

$$\boldsymbol{R}_{1,3}=\sin(\theta)$$

この式に注目すると，$\boldsymbol{R}$ がジンバルロックを起こしているかどうかがわかる．ジンバルロックが発生するのは $\theta=\pm 90^\circ$ のときであり，そのとき $\cos(\theta)=0$ となるため，$\boldsymbol{R}$ は次のように単純化される.

$$R_{123}=\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0i & \pm 1 \\ S_\phi C_\psi \pm C_\phi S_\psi & C_\phi C_\psi \mp -S\phi S_\psi & 0 \\ S_\phi S_\psi \mp C_\phi C_\psi & S_\phi C_\psi \pm C_\phi S_\psi & 0 \end{array}\right]$$

ここで三角関数の加法定理を用いると

$$\boldsymbol{R}=\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \pm 1 \\ \sin(\phi \pm \psi) & \cos(\phi \pm \psi) & 0 \\ \cos(\phi \pm \psi) & \sin(\phi \pm \psi) & 0 \end{array}\right]$$

となるので，$\sin(\phi \pm \psi)$，$\cos(\phi \pm \psi)$ がわかり，これにより $\phi \pm \psi$ が一意に定まる．この $\phi \pm \psi = C$ を満たすような ϕ と ψ は無限に存在するため，$\boldsymbol{R}_{123}$ に対応するオイラー角は無限に存在する．

一方，$\sin\theta \neq \pm 1$ の場合，このとき $\boldsymbol{R}$ はジンバルロックを起こしていないので，$|\theta| < 90^circ$ に限定すると，オイラー角は一意に定まる．すると，

$$\theta = \sin^{-1} \boldsymbol{R}_{1,3}$$

とする．すると $cos(\theta) \neq 0$ なので

$$\boldsymbol{R} / \cos(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & * \\ * & * & -\sin(\phi) \\ * & * & \cos(\phi) \end{bmatrix}$$

となり，$*$ の部分を無視して $\sin(\phi)$, $\cos(\phi)$, $\sin(\psi)$, $\cos(psi)$ のみに注目すると ϕ, ψ が一意に定まる．なお，$|\theta| > 90^\theta$ に対応するもう一つのオイラー角は $(\phi + 180^\circ, 180^\circ - \theta, \psi + 180^\circ)$ となる．

定義

> ベクトルとの掛け算で，その長さを保ったままベクトルを回転させる行列のこと．

すべての 3x3 回転行列の特別な直交群を $SO(3)$ と呼び，$R \in SO(3)$ の場合は

$$\det R = \pm 1$$

$$R^{-1} = R^T$$

2.1. 座標変換

剛体の姿勢を符号化する回転行列 R を

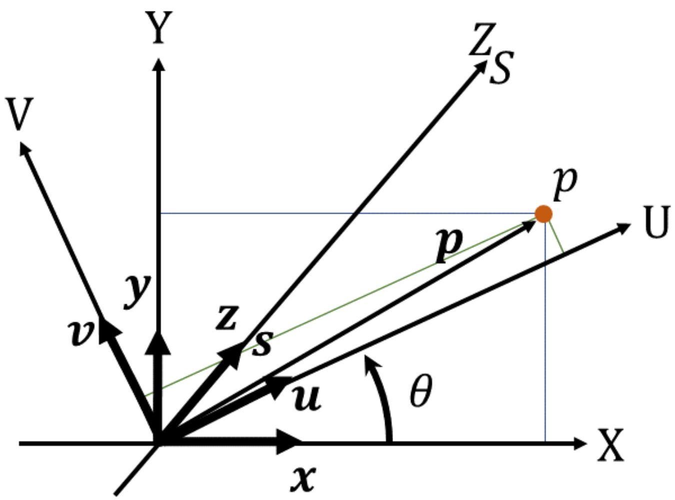
> 世界座標で表されたベクトルに前置乗算すると、体内固定座標で表された同じベクトルが得られる行列

と定義する。すなわち，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ を世界座標で表されたベクトルとし，$\boldsymbol{z}\prime \in \mathbb{R}^3$ を身体固定座標で表された同じベクトルとすると，次のような関係が成り立つ。

$$\boldsymbol{z}' = R\boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{z} = R^T \boldsymbol{z}'$$

位置ベクトル $\boldsymbol{x}_b$ に定義されていた体内座標系に回転行列 R をかけることにより移動されたとする．このとき，この座標系の原点は，世界座標系上において $r\boldsymbol{x}_b$ で表され，反対に移動した体内座標系の原点から世界座標系の原点の位置は $R\boldsymbol{x}'_w$ で表される．



移動した体内座標系における点 p' の位置 $\boldsymbol{x}'$ は,

$$\boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x} - R\boldsymbol{x}_b = R(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_b)$$

一方，体内座標系から世界座標系原点への位置ベクトルを $R\boldsymbol{x}'_w$ とすると,

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{R}(\boldsymbol{x}' - R\boldsymbol{x}'_w)$$