

## 微分解析機

和田 英一

((株) IJ イノベーションインスティテュート)

平成 21 年度の情報処理技術遺産に、東京理科大学の近代科学資料館が保存する微分解析機が認定された。機械式微分解析機は、旧記にしか登場せぬから、その原理、その使用法など知る人は、今や少ないに違いない。認定を機に、機械式微分解析機について、あらあら説明しよう。文献 1) によると、1920 年代の終わり頃、MIT の Vannevar Bush は、停電の現象に関連した方程式のような「微分」方程式を扱う、汎用性のある最初のアナログ自動計算機、つまり微分解析機を研究し、1930 年に完成した。

当時 Manchester 大学にいた Douglas Hartree は、Bush の計算機を知るなり、組み立て玩具の Meccano を使って、微分解析機を作った<sup>1)</sup>。その後、この種の微分解析機は、Cambridge 大学を始め<sup>2)</sup>、多くの組織で作られた。

我が国には、微分解析機は 3 台存在したと考えられる。

- 東京大学航空研究所（後に理工学研究所と改称）：昭和航空計器 製造，積分機 4 台，入力卓 2 台，出力卓 1 台，1944 年頃
- 大阪大学理学部（後に東京理科大学へ移設）：昭和航空計器 製造，積分機 3 台，入力卓 2 台，出力卓 1 台
- 東京大学生産技術研究所：東京計測機械製作所 製造，積分機 8 台（始めは 4 台），入力卓 3 台（うち 2 台は自動追従装置付），出力卓 1 台，1954 年頃<sup>3)</sup>

このうち、阪大のものについては、文献 4) に「微分

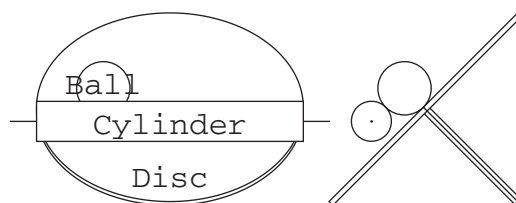


図-1 Thomson の積分機

方程式を解く機械は著者のもとにも 1 台あって、非線型微分方程式の研究に使っている。一般にも公開しているから御利用を乞う。」とあり、使用されていた年代が分かる。

私は西千葉にあった、東大生産技術研究所で、微分解析機を見たことはあるが、そのときは止まっていて、動作中の機械を眺めたことはない。この計算機は、生研の移転で六本木へ移されたが、渡辺勝先生のご退官の頃、破棄された。一部の部品は、東大生研歴史資料アーカイブに保管されていると聞く。

## Thomson の積分機

微分解析機の原理みたいなものは、19 世紀に James Thomson が発明した ball and disk integrator といわれる<sup>1), 5)</sup>。Bush は、微分解析機を作ったとき、Thomson の論文は知らなかったらしい。図-1 に示すように、円盤 (Disk) につけた軸を 45 度傾け、円盤の水平な直径と平行に円筒 (Cylinder) を置き、円盤と円筒に接するように球 (Ball) を載せたものである。

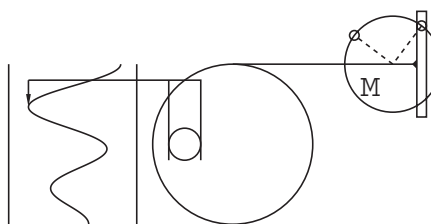


図-2 調和解析機

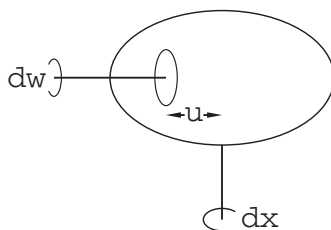


図-3 微分解析機の原理

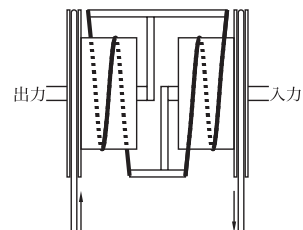


図-4 トルク増幅器

球は円盤と円筒から落ちない範囲で、円盤と円筒上を左右に移動する。球の円盤に接している点と、円盤の中心の距離を  $w$  とする。軸の回転に従って、円盤が中心の回りに  $d\theta$  だけ回転すると、球の下の円盤は  $w d\theta$  だけ動く。球が滑らなければ、円盤の動きで球が回転し、球が回転すれば円筒も回転する。

球は水平な直径を中心に、周囲が円盤の動いた分だけ動き、それを支えている円筒の周囲も同じだけ動くはずである。円筒の半径を  $r$  とすると、円筒の回転角  $d\phi$  は、 $w d\theta/r$  となるわけだ。

この積分機の出力は、円筒の回転角だけで、これは人間が目で読み取るから、受動的に回転しているだけでよい。この機械を応用したのが、調和解析機(図-2)だ。これは潮汐を、太陽や月の運動に分解し、将来の潮汐を予想する工夫である。図の左の波形のカーブが、検潮儀からとった海面の上下動で、これで円盤上の球を左右に振る。一方、月などの運動の周期で回転している円盤  $M$  で、正弦波と余弦波を作り、それで円盤を回転する。この Fourier 解析で、月などの周期の成分を取り出すのである。

### 微分解析機

潮汐運動を調べるには、この程度の積分機でもよかったが、精度を上げるための工夫が重ねられた(図-3)。Bush が開発した微分解析機は、円盤(Disk)を水平に置き、その上にシャープな縁を持つ鋼鉄製の小型の回転子(Wheel)が円盤の半径方向と直角に接して回転する。円盤の中心から接点までの距離を  $u$ 、回転子の半径を  $r$  とすると、円盤が  $dx$  回ると、出力軸の回転角  $dw$  は、 $u dx/r$  である。非積分数

$u$  に従って、回転子を横車を押すように移動しつつ、円盤を独立変数  $x$  で回転する。そうすると、出力軸  $w$  から、ある係数をかけた積分値  $\int u dx$  が得られる。

### トルク増幅器

積分機の出力で、さらに他の積分機を駆動するのは、このままの機構では不可能である。円盤と回転子は、摩擦で動いているので、出力軸から力をとろうとすると、当然滑る。そこで考えられたのが、一種のサーボ機構のトルク増幅器である(図-4)。

右の入力軸の回転を、左の出力軸から力を増幅して取り出すのである。その間にロープを巻きつけたドラムが2組あり、ロープの端は、入力軸と出力軸に取りつけた、T字状のレバーの先に固定されている。ドラムは両端のプーリーにかけたベルトで、矢印の方向に、逆方向に回転している。入力軸が回転しないときは、ロープはドラムの面を滑っている。

今、入力軸が、右に回転したとする。そうすると、下のT字状のレバーが持ち上がり、左のロープがドラムの上で締まり、ドラムとの間に摩擦が生じ、上のT字状のレバーが押し下げられ、出力軸が入力軸と同じ方向に回転する。回転角が同じになれば、ロープは弛み、再び滑り出す。

入力軸が反対に回る場合は、右のドラムの摩擦が生じ、出力軸はやはり入力軸と同回転する。つまり、回転するドラムが動力になり、入力力の微小な力を増幅するのである。こういう仕掛けは船の碇を巻き上げる装置にもあるらしい。

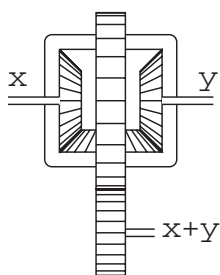


図-5 差分歯車

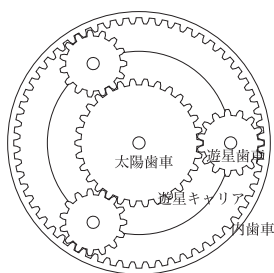


図-6 遊星歯車

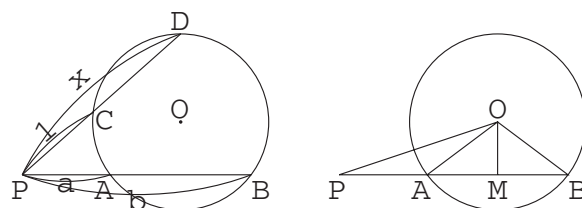


図-7 乗算法

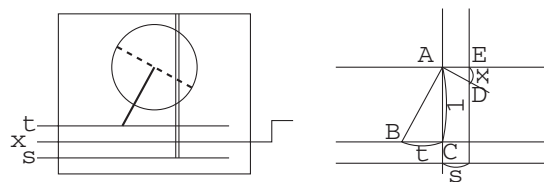


図-8 乗算器

## 加算器

微分解析機の数値情報は、シャフトの回転角で表される。2本のシャフトの回転角の加減算には、差分歯車(図-5)や遊星歯車(図-6)を使う。

遊星歯車では、中心の太陽歯車と、外側の内歯車の間に複数の遊星歯車がキャリアに乗っている。太陽歯車、内歯車とキャリアの回転角の間の関係を加減算に利用する。

## 乗算卓

シャフトの回転の定数倍は、通常の歯車で実現するが、変数のシャフト同士の乗算も必要になる。

城・牧之内の「計算機械」<sup>6)</sup>には、乗算は $P \cdot Q = \int PdQ + \int QdP$ により、積分機2台と加算器を使うと書いてあったので、そう信じていたが、さなきだに高価な積分機を乗算に使うのももったいないということで、乗算装置が工夫されていた。

幾何学での乗算法はよく知られている。

点Pから半直線を引き、 $PA=a$ 、 $PB=b$ となる点A、Bをその上取る。またPから別の半直線を引き、 $PC=1$ の点Cを取る。A、B、Cを通る円Oを描き、PCの延長上で円との交点をDとするとPDの長さxが $a \times b$ である(図-7左)。

これは方冪の定理(円外のPからの割線で、

$PA \times PB = \text{一定}$ )による。図-7の右の図で証明できる。しかし微分解析機でこれを行っているか疑問であった。ところである文献に微分解析機の使い方の説明があり、乗算卓の記号が図-8の左のようになっていた。

微分解析機からs, t, xの3本の軸で接続されていて、 $s \times t = x$ と出力が出るらしい。

x軸の右にはハンドルのような絵がある。そこでこう推測した。t軸が回転すると、軸に接続されているT型の足が円の中心を軸に回転する。一方s軸の回転で2重線の棒が左右に移動する。操作員はハンドルを回し、2重線上の指標を上下に動かしながら、Tの横棒の破線の上に保つのである。そのハンドルの回転がx軸で出力される。その説明が図-8の右だ。

円の中心がAの点である。tもsもAから左右に計測する。tが増えるとB点は左へ移動し、ABと直角についている腕、ADも一緒に回転する。EDの長さをxとすると、三角形ABCと三角形ADEは相似であり、ACの長さを1とすると、 $1/t = s/x$ だから $x = s \times t$ である。

なるほどと感心する装置だが、文献7)には、「(乗算機は)余り実用されていない。積分機を転用することが多い。」とある。

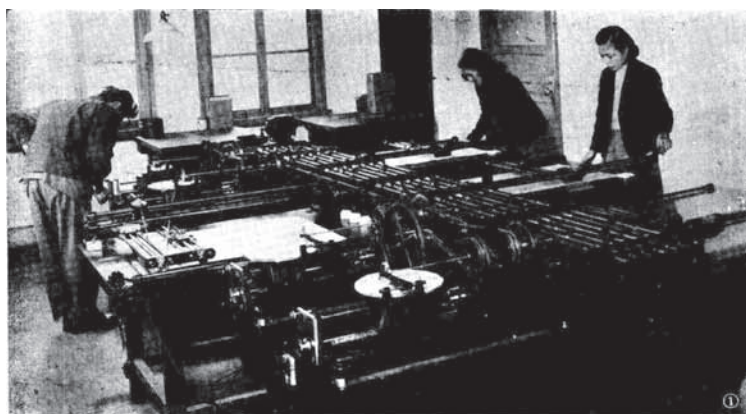


図-9 理工研の微分解析機

出典)生産研究 1950 年

### 理工研の微分解析機

以上の装置を組み合わせたものが微分解析機で、理工研にあったものの写真が残っている。図-9は理工研にあった微分解析機を使っているところ、右にいる2人の操作員が、入力卓で係数を入力している。

佐々木達治郎らの「計算機械」<sup>8)</sup>に、理工研のものと思われる微分解析機の構成図が掲載されている(図-10)。

この図の中央を縦に通っているのが、変数の値を示すバスシャフトである。それに対し、横向きなのがクロスシャフトといって、バスシャフトとギアで結合され、両端にある積分機、出力卓、入力卓などに接続されている。

積分機では円盤の上に回転子があり、回転子と円盤の接点と円盤の中心との距離が積分されるので、この制御が重要である。一見、小さい回転子を動かすのが簡単のように思えるが、回転子の軸はトルク増幅器に接続されており、摩擦をできるだけ減らしたいから、普通は円盤の方が動く。円盤を移動させながら、回転もさせるので、高度な工作が要求される場所である。

入力卓は、製図版のようなもので、その上に独立変数に対する関数の形を書いた紙を載せる。独立変数の値に従い、カーソルが徐々に移動するので、操

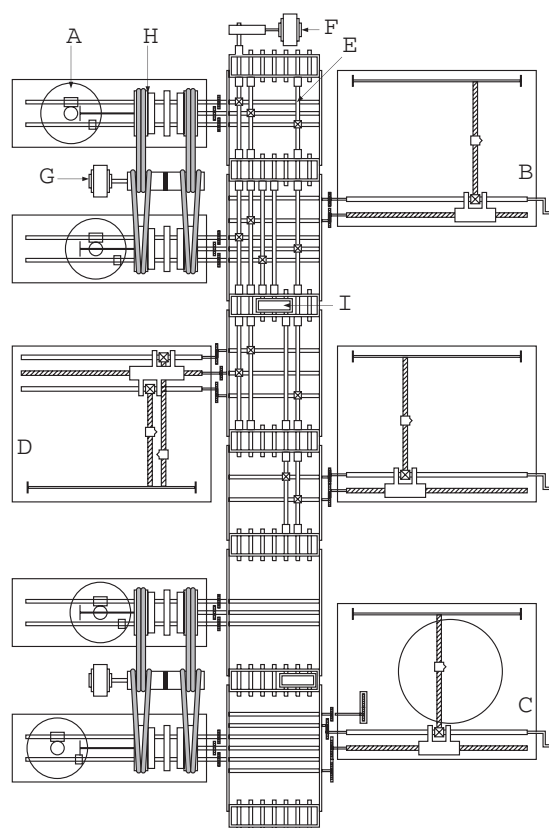


図-10 理工研にあった微分解析機の構成<sup>8)</sup>

A 積分機 B 入力卓 C 乗算卓 D 出力卓 E バスシャフトおよびクロスシャフト F x 軸モーター G 増幅用モーター H トルク増幅器 I 加算器

作員はカーソル上の指標が関数の曲線の上を離れないように、手前のハンドルを回す。その回転角がクロスシャフト経由でバスシャフトに伝達される。

これはかなり神経を使う作業であったろう。後に生研に設置された微分解析機では、光電管を利用した曲線追尾装置が設置された。

出力卓は入力卓に似ているが、指標の代わりに筆記具が付き、関数の出力形を記録する。

### 理科大の微分解析機

神楽坂にある、東京理科大学の近代科学資料館にいくと、微分解析機に出会える。前述のように、大阪大学で清水先生が使われていたものが、先生の理科大への転出で、理科大へ移されたと思われる(図-11、図-12)。



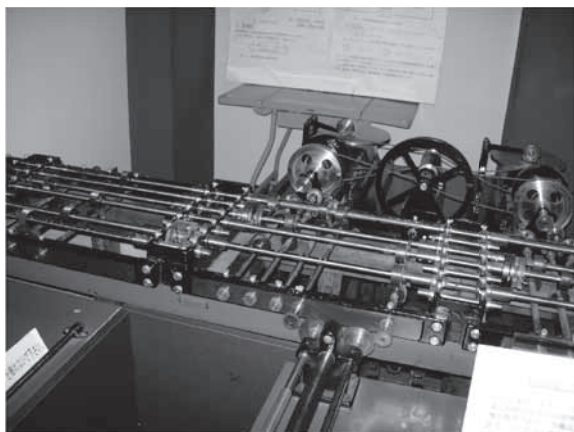


図-11 バスシャフトとトルク増幅器

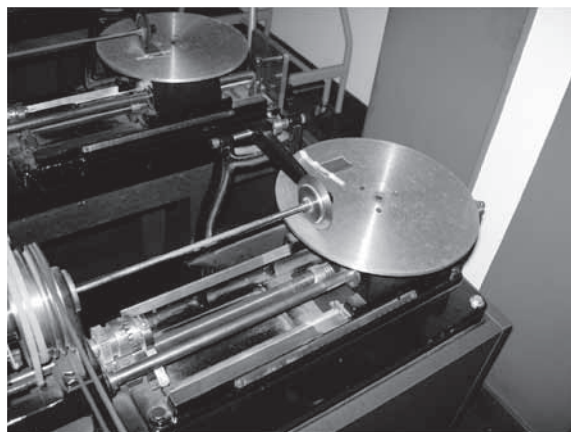


図-12 積分機

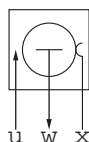


図-13 積分機

積分機の心臓というべき円盤に、無造作に紙が張られていたりして、メンテナンスはいまいちであり、動かないのが残念だが、微分解析機が詳しく見られるのは、現在ではここだけなので、詳しく観察して欲しい。

## 使い方

微分解析機の説明は、積分機を中心にして入出力の関係を示した回路図が中心である。そのようにして使い方を考えてみよう。

まず積分機は図-13のように表す。中央の丸が円盤のつもり。中央のT字のものが積分出力  $w$  をとる回転子で、円盤を回転させるように見える右側が独立変数  $x$ 、回転子を押し上げるように見える左側が被積分数  $u$  であり、積分  $w = \int u dx$  が得られる。

図-14は直列RLC回路で、コンデンサにかかる電圧  $v=10$  ボルトとコイルに流れる電流  $i=0$  アンペアの初期値から、 $R=1$  オーム、 $C=0.2$  ファラッド、 $L=1$  ヘンリーの場合に  $dv/dt = -i/C$  (右の積分機)、 $di/dt = v/L - Ri/L$  (左の積分機) による  $v$  と  $i$  の変化の様子を見るものである。独立変数軸が  $t$  で、積分機の円盤を駆動するほか、出力卓の横軸も制御

する。定数による乗算が、 $\times_1, \times_2, \times_3$  の3カ所あり、適当なギア比で伝達すればよい。左の積分機の下に  $+$ 、 $-$  は、上側の  $v/L$  から下側の  $iR/L$  を引いて中の軸に入れることを示す。右の円盤を回転子から10だけ離れた位置において計算を開始する。

図-15は、清水先生の文献<sup>9)</sup>にある、 $x=3$ 、 $dx/dt=0$ の初期値で、 $d^2x/dt^2 - \mu(1-x^2)dx/dt + x = 0$ を微分解析機で解いた話を、 $\mu=0.1$ 、 $x=1$ として、やってみたものである。2階の微分方程式は、 $dx/dt=y$  (左の積分機)、 $dy/dt=\mu(1-x^2)y-x$  (右の積分機)として解く。 $x^2$ の計算には、 $x^2=2\int x dx$ だから、積分機1台を利用することも考えられるが、清水先生たちは、 $\mu(1-x^2)y$ を図-16のようにあらかじめ計算しておき、これを入力卓の1つに貼り、カーソルの示す  $x, y$  の位置の値を1人の操作員が声を出して読み、隣りの入力卓からもう1人の操作員がその値を入れたと書いてあった。

図-16を、私はPostScriptを使って描いたが、計算機もない時代はこれも人手で描かなければならず、大変であったろうと想像される。

## シミュレーション

微分解析機ができて、問題が解けるようになったのは、当時の研究者にとっては福音かもしれないが、使い方も難しかったのではないと思われる。

まず、シャフトの使い方を決めなければならない。またアナログ計算機(と固定小数点しかなかった初

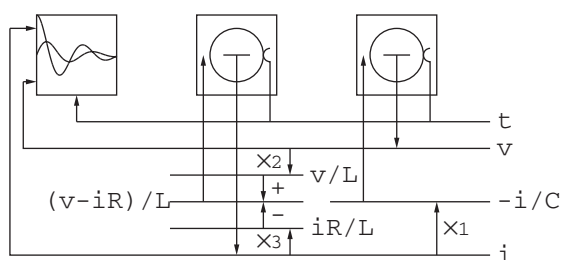


図-14 RLC 回路

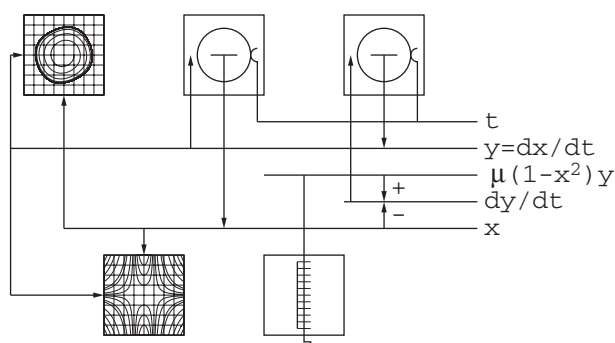


図-15 リミットサイクル

期のデジタル計算機)の宿命だが、スケーリング問題も解かなければならぬ。機素をなんども組み替え、試行錯誤を繰り返した末、やっと問題が解けるという状態であったろう。

また微分解析機は相当うるさかったと想像される。また油も飛び散ったかもしれない。その環境で、入力卓から正確にデータを送り込むのも大変であったろう。

MITの微分解析機の3Dのモデルのシミュレータが存在する<sup>10)</sup>。そのようにはとてもできないが、自分でも安直なシミュレータを何度か書いてみた。デジタル計算機で計算しながら、絵だけアナログ的に描く。

最近 Processing でプログラムしたシミュレータが、文献11)と12)に置いてある。それぞれ上の図-14と図-15に対応している。バスシャフトの回転は、シャフトの一端にある断面図のマークの移動で実感できよう。

どちらも、画面のなかでクリックすると、最初から再開される。

微分解析機は過去のものであるが、愛好者もいるとみえ、米国ではTim RobinsonがMeccanoで構成した<sup>13)</sup>。英国ではCharles Lindseyを中心に、1965年まで使われたManchester大学の機械を再稼働するように努力しているらしい<sup>14)</sup>。

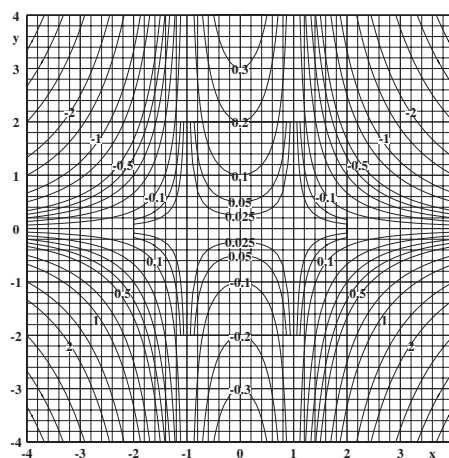


図-16 関数図

- 4) 清水辰次郎：現代数学の諸問題，正田建次郎編，現代数学の諸問題，増進堂 (1949)。
- 5) Thomson, J. : On an Integrating Machine Having a New Kinematic Principle, Proc. Roy. Soc. (1875). <http://www.jstor.org/pss/113220/>
- 6) 城 憲三，牧之内三郎：計算機械の第7章 微分解析機共立全書 57 (1953)。
- 7) 乗松立木：微分解析機，電気雑誌 OHM, pp.40-55 (Nov. 1955)。
- 8) 渡辺義勝，佐々木達治郎，志賀 亮：計算図表学・計算機械，河出書房 応用数学 10 (1947)。
- 9) 清水辰次郎，片桐護夫，Differential Analyzer による  $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$  型方程式の解法と誤差に就て，日本物理学会誌，Vol.3, No.3-4, pp.70-72 (1949)。
- 10) <http://www.mit.edu/~klund/analyzer/>
- 11) <http://playground.ijlab.net/~ew/diffana6/diffana6.html>
- 12) <http://playground.ijlab.net/~ew/diffana8/diffana8.html>
- 13) [http://www.meccano.us/differential\\_analyzers/robinson\\_da](http://www.meccano.us/differential_analyzers/robinson_da)
- 14) <http://www.cs.man.ac.uk/CCS/res/res51.htm#>

(平成 23 年 1 月 26 日受付)

#### 参考文献

- 1) The Office of Charles and Ray Eames, A Computer Perspective, Harvard University Press (1990), 和訳はアスキー出版 (1994)。
- 2) [http://en.wikipedia.org/wiki/File:DA\\_Cambridge\\_c1937.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:DA_Cambridge_c1937.jpg)  
この写真の右端が，昨年他界された Wilkes 先生。
- 3) 渡辺 勝：微分解析機に関する研究，東京大学生産技術研究所報告，Vol.9, No.1 (1960)。

#### 和田 英一 (名誉会員)

eiiti.wada@nifty.com

1955 年東京大学理学部物理学卒業，東京大学工学部，富士通研究所を経て IJ 技術研究所所長，Happy Hacking Keyboard，和田研フォントの開発に関与，IFIP WG2.1，WIDE プロジェクトメンバ，プログラミング・シンポジウム委員長。