

マセマティカルモルフォロジーの思想

Philosophy of Mathematical Morphology

浅野 晃 Akira ASANO

アブストラクト マセマティカルモルフォロジー（以下モルフォロジー）は、画像中の図形の持つ構造を抽出するために図形を操作する演算の体系である。モルフォロジーは、完備束上での演算に拡張することにより、有界な非線形信号処理の基盤となる体系ととらえることができる。有界とは「上限や下限が存在する」という意味であり、有界な演算は、上限も下限もない線形な演算に比べ、現実の世界をより精密に表すことができる。このような有界性・非線形性は、ニューラルネットワークやファジー演算などとも共通するものである。本記事では、モルフォロジーの思想と原理を、これらとの関連にも触れながら解説する。更に、モルフォロジーに関連した、図形を「測る」研究も紹介する。

キーワード マセマティカルモルフォロジー、完備束、非線形フィルタ

1. はじめに

1.1 有界で非線形な世界

フーリエ解析やウェーブレット解析をはじめとして、信号処理の理論は、線形な世界で構築されたものが主流を占めてきた。線形な世界とは、足し算が自由にできる世界、すなわち、1 足す 1 が必ず 2 になる世界である。足し算が自由にできるならば、扱う数には上限も下限もないはずである。100 までの数しか扱わないから、 $99+99$ は計算できない、などということは、線形な世界ではあり得ないことである。

しかし、このような線形な世界は、我々の持つ自然界の描像として正しいものであろうか。我々が自然界から情報を得るには、センサが必要である。例えば、画像情報を得るにはカメラが必要である。どんなカメラを使っても、ある強さよりも弱い光は真黒に、ある強さよりも強い光は真白にしか写らない。つまり、得られた画像情報は、上限や下限を持つ有界なものである。これに限らず、我々が現実に対象は、常に、線形な世界とは異なる「非線形で有界な世界」にある。

このような「有界な世界」を表す数学的構造が、順序集合の一種である「完備束」¹⁾である。完備束とは、「どの部分集合に対しても、必ず上限・下限が存在する集合」である。そして、本記事で解説する“マセマティカルモルフォロジー (mathematical

morphology)”（以下モルフォロジー^(注1)）は、完備束での上限・下限演算を基盤として構成された、非線形演算の体系である。

モルフォロジーは、元々画像処理の体系の一つとして考案されたものである。その中心的思想は、「画像は構造を持っている。その構造を知ることによって、画像の持つ意味を理解できる。」というものである。

ここでいう「構造」とは、対象の画像が生成されている仕組み・理由、といった意味である。すなわち、分析の対象の画像は、ただ漠然とピクセルが並んでいるのではなく、何らかの仕組みに基づいて生成されたもののはずだと考え、その仕組みを見いだすことによって画像の意味を理解することを、モルフォロジーは目指しているのである。画像の例ではないが、図 1 のプログラムを考えてみよう。(a)、(b)とも、実行して得られる結果は同じである。しかし、(b)の書き方は、このプログラムが「関数 func() の繰返し」という構造を持つことを明示している。画像においても、このように成り立ちの仕組みを見いだそうというのが、モルフォロジーの背景にある考え方である。

モルフォロジーの創始者である G. Matheron と J. Serra は、フランスのパリ国立高等鉱山学校 (École des Mines de Paris)

```
func(0);                                for(i = 0; i < 10; i++) {
func(1);                                func(i);
...                                     }
func(9);
```

(a) (b)

図 1 プログラムと構造

浅野 晃 正員 広島大学大学院工学研究院情報部門

E-mail asano@mis.hiroshima-u.ac.jp

Akira ASANO, Member (Dept. of Information Engineering, Graduate School of Engineering, Hiroshima University, Higashihiroshima-shi, 739-8521 Japan).

電子情報通信学会 基礎・境界サイエティ

Fundamentals Review Vol.4 No.2 pp.113-122 2010 年 10 月

©電子情報通信学会 2010

(注1): “morphology” という言葉は、形態への作用を研究する分野の名称として、物質科学や言語学など様々な学問で用いられている。“mathematical morphology” は、それらに対して、数学を基盤とする morphology として名付けられたものであり、単にモルフォロジーと略してしまうのは、本来は正しくない。

の研究者で、当初は鉱石に分布する鉱物の幾何学的特性を評価する方法として、モルフォロジーを着想した^{(2)(4)(注2)}。鉱石に含まれる鉱物は、その種類に応じて特徴的な形状の粒子になっている。したがって、鉱石の断面の画像が「特徴的な粒子の集まりである」という構造を持つと考え、粒子の形・大きさを分析する方法として考えられたのが、モルフォロジーの始まりである。

粒子の形・大きさを分析する最も基本的な方法は、画像中の粒子が形作る図形に、典型的な粒子状図形を「はめ込む」ことである。はめ込むことができれば、そこにはその典型的図形で表される粒子が存在する可能性がある。はめ込むことができないければ、そこにはその粒子はない。すなわち、その場所には粒子状図形という構造はないことが分かる。粒子が形作る図形に限らずどんな図形でも、典型的図形をはめ込むことで、その典型的図形が表す構造がないかどうか分かる。この「はめ込む」操作が、2.1で説明するオープニング (opening) である。また、ここでいう「典型的図形」は、調べたい構造を表すものだから構造要素 (SE:Structuring Element)^(注3)という。更に、構造要素の形やサイズをいろいろに変えることによって、もとの図形を構成する構造要素のサイズの分布を求めたり (3.3の「サイズ分布」)、図形からその構造要素の構造を持たない部分を除いて再構成する (3.4の「スケルトン」) といったことが可能になる。

さて、オープニングは、各画素における近傍の画素との論理積・論理和に基づく集合演算の組合せで表すことができる。これらは、それぞれエロージョン (erosion)、ダイレーション (dilation) と呼ばれるもので、2.2で説明する。erosion は「侵食」、dilation は「膨張」という意味であり、実際に対象の図形をそれぞれしぼませる、膨らませる効果を持つ。モルフォロジーに対して画像処理の世界で一般的に持たれている「しぼませたり膨らませたりするやつ」という印象は、ここからでている。エロージョンとダイレーションを基盤とすることで、モルフォロジーは「はめ込みを定量的に取り扱う集合演算を基盤として作られた、数学の体系」ととらえることができる。そして、3.2で紹介する「フィルタ定理」が示すように、極めて広い範囲の画像処理がこの体系によって表現される。

更に、グレースケール画像においては、2.2で説明するように、論理積・論理和はそれぞれ下限 (inf) 演算・上限 (sup) 演算と考えることができる。そこで、下限・上限演算を改めてモルフォロジーの基本演算と考えると、モルフォロジーは下限・上限が定義されている順序集合、すなわち完備束における演算の体系として扱うことができる。例えば、2.7で説明するように、カラー画素を表すベクトルで完備束を構成することにより、カラー画像におけるモルフォロジーを定義することができる。

完備束は、上で述べたように、線形な世界よりも現実に近い世界を表す数学的構造である。「はめ込み」から始まった、ここまでのモルフォロジーの展開は、モルフォロジーが「非線形で有界な世界」の基本となる演算の体系であることを示している。

(注2): Matheron は、鉱石中の鉱物のようなランダムな図形を扱うランダム閉集合理論と、鉱床のような空間分布を記述・予測する統計的手法であるクリギング (kriging) の創始者でもある。

(注3): “structuring” だから、本当は「構造化要素」というべきで、またその方が「構造を見つける」意味をよく表しているが、「構造要素」と訳されている場合が多い。

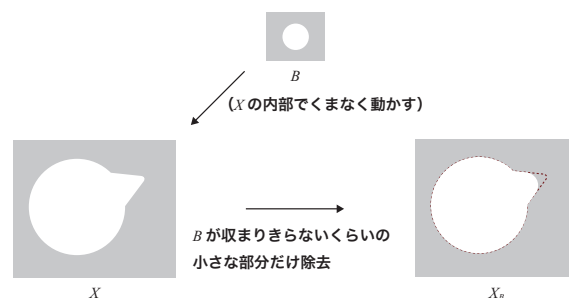


図2 オープニングの効果

本記事では、このようなモルフォロジーの展開を順に説明してゆく⁽⁵⁾⁽⁹⁾。

2. 基本的な演算

2.1 オープニング

モルフォロジーの基本となるはめ込みを表す演算はオープニングと呼ばれるものである。いま、画像中の図形に対応する集合 X と、構造要素に対応する集合 B を考える。2値画像の場合、 X や B の要素は、それを構成するピクセルの位置を表すベクトルと考えればよい。つまり、2値画像が「白画素の座標」の集合で表されているとする。

X の B によるオープニング X_B は、次の性質を持つ。

$$X_B = \{B_z \mid B_z \subseteq X, z \in \mathbb{Z}^2\} \quad (1)$$

ここで、 B_z は B を z だけ移動したものの (translation) で、 $B_z = \{b + z \mid b \in B\}$ である。

“ X の B によるオープニング” は「 X からはみ出さないように、 B を X の内部でくまなく動かしたときの B 全体の軌跡」であり、図2のように、「 X から、 B が収まり切らないくらい小さな部分だけを除去して、その他はそのまま保存する」という作用を表している。つまり、“オープニング” は「画像中の物体から、構造要素よりも小さな部分を取り除く作用」であり、はめ込みを具体的実現する演算である。モルフォロジーはこの演算を基本として、様々な構造要素による演算を組合せることで、画像中の物体の形・大きさを操作する種々の演算を構成する。

2.2 エロージョンとダイレーション

式 (1) に示すオープニングは、更に単純なピクセルごとの演算に分解して定義することができる。そのために、以下のとおり、ミンコフスキー差 $X \ominus B$ と和 $X \oplus B$ を定義する。

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_b \quad (2)$$

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b \quad (3)$$

式 (2) のミンコフスキー差については、次の性質がある。まず、

$x \in X_b$ ならば $x - b \in X$ であるから,

$$X \ominus B = \{x \mid x - b \in X, b \in B\} \quad (4)$$

とも表せる. 更に, 集合 B の反転 (reflection) \check{B} を $\check{B} = \{-b \mid b \in B\}$ と定義すると, 次のように表現される.

$$X \ominus B = \{x \mid \check{B}_x \subseteq X\} \quad (5)$$

反転の定義から $\check{B}_x = \{-b + x \mid b \in B\}$ であり, よって $\check{B}_x = \{x - b \mid b \in B\}$ となるからである. このことを式 (4) に当てはめると, 式 (5) の関係が成り立つことが分かる. これは, $X \ominus B$ は「 X からはみ出さないように, \check{B} を X の内部でくまなく動かしたときの, \check{B} の原点の軌跡」であることを示している.

また, 右辺のミンコフスキー和については,

$$\bigcup_{b \in B} X_b = \{x + b \mid x \in X, b \in B\} \quad (6)$$

であるから,

$$X \oplus B = \{b + x \mid b \in B, x \in X\} = \bigcup_{x \in X} B_x \quad (7)$$

とも表せることが分かる. これは $X \oplus B$ は「 X の内部の各点に, それぞれ B のコピーをはり付けたもの」であることを示している.

以上の演算を使って, X の B によるエロージョンとダイレーションという演算を, それぞれ $X \ominus \check{B}$, $X \oplus \check{B}$ のように定義する. 式 (2), 式 (5) から, エロージョンは

$$X \ominus \check{B} = \bigcap_{b \in B} X_{-b} = \{x \mid B_x \subseteq X\} \quad (8)$$

であることが分かる. エロージョン $X \ominus \check{B}$ は, B を X からはみ出さないように X の内部でくまなく動かしたときの, B の原点の軌跡であり, B によって X の周囲を削り取ったものであることを意味している.

逆にオープニング X_B は, 上の演算を用いて $X_B = (X \ominus \check{B}) \oplus B$ と定義される. この定義によるオープニングを図示したものが図 3 である. は図形を構成する画素を表している. “ X の B によるエロージョン” とは「 B を X の内部に収まる範囲でくまなく動かしたときの, B の原点の軌跡」だから, 第 1 段階のエロージョンでは, X の内部で B をはみ出さずに配置できる場所が求められる. 更に, 第 2 段階のミンコフスキー和は $X \ominus \check{B}$ の内部の各点に, それぞれ B のコピーをはり付けたも

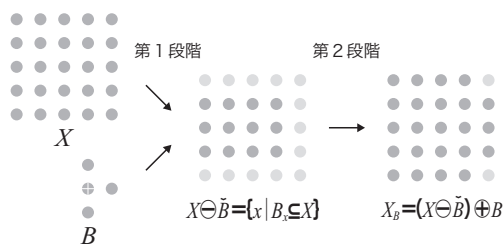


図 3 オープニングの成り立ち

のである. したがって, X の B によるオープニングは, 先に述べたとおり X からはみ出さないように, B を X の内部でくまなく動かしたときの B そのものの軌跡となる.

2.3 クロージング

クロージングは, 前節の基本演算を用いて,

$$X^B = (X \oplus \check{B}) \ominus B \quad (9)$$

と定義される. クロージングは, 画像中で “対象の図形でない部分”, つまり背景に対してオープニングを行う演算であり, 画像中の図形にある, 構造要素よりも小さな穴や欠けを埋める作用を表す.

クロージング (closing) X^B は, オープニング X_B に対して,

$$[X^B]^c = (X^c)_B \quad (10)$$

という性質を持つ. ここで X^c は $X^c = \{x \mid x \notin X\}$ と定義され, 画像中の図形と背景を交換する演算を意味する. 式 (10) の関係を, オープニングとクロージングの双対性 (duality) といい, 以下のように証明される.

証明 式 (2) から, $(X \ominus B)^c = \bigcup_{b \in B} X_b^c$ である. よって式 (3) から, $(X \ominus B)^c = X^c \oplus B$ となる. このことから, $X \ominus B = (X^c \oplus B)^c$ や $(X^c \ominus B)^c = X \oplus B$ が成り立つことが分かる. これらを用いると,

$$\begin{aligned} X^B &= (X \oplus \check{B}) \ominus B \\ &= ((X \oplus \check{B})^c \oplus B)^c \\ &= ((X^c \ominus \check{B}) \oplus B)^c \\ &= ((X^c)_B)^c \end{aligned}$$

となる (終)

2.4 モルフォロジー演算のもう一つの定義と, 記号の問題

ここまでで説明した, モルフォロジーの四つの基本演算の定義では, エロージョン・ダイレーションをミンコフスキー差・和を介して定義した. ミンコフスキー差は

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_b \quad (11)$$

であった. 一方, エロージョンは

$$X \ominus \check{B} = \{x \mid B_x \subseteq X\} \quad (12)$$

であった.

先に述べたように, エロージョン $X \ominus \check{B}$ は, B を X からはみ出さないように X の内部でくまなく動かしたときの, B の原点の軌跡である. 一方, 式 (11) から, ミンコフスキー差 $X \ominus B$ は, B の形に沿って X 全体を動かしたときに, どう X を動かしても X からはみ出さない点の集まりである. つまり, エロー

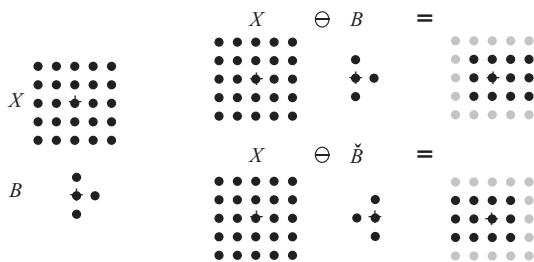


図4 エロージョンとミンコフスキー差

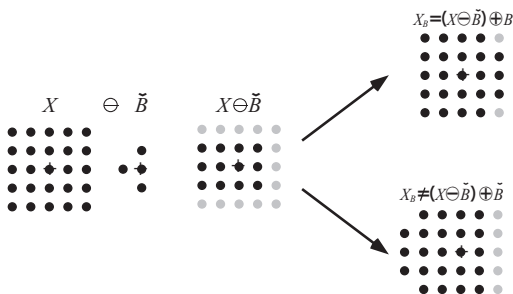


図5 オープニングの正しい定義(上)と誤った定義(下)

ジョンとミンコフスキー差の違いは、構造要素 B を動かすか、図形 X 自身を動かすか、という違いである。

これらの違いを、図4に示す。非対称の構造要素を用いた場合、エロージョンとミンコフスキー差では、結果が反転してしまう。また、図5で分かるように、オープニングはエロージョン+ダイレーションではなく、先に述べたように定義しなければやはり結果が反転してしまう。

このような煩雑さをなくすために、上の定義によるエロージョンを改めて $X \ominus B$ で表してそのままエロージョンと呼び、一方上の定義によるミンコフスキー和をそのまま $X \oplus B$ で表して、名前をダイレーションとするやり方がある。この定義では、式の上ではエロージョンとダイレーションが非対称になるが、一方で、オープニングは $(X \ominus B) \oplus B$ すなわち「(エロージョン)+(ダイレーション)」、クロージングは $(X \oplus B) \ominus B$ すなわち「(ダイレーション)+(エロージョン)」と単純に表されるという利点がある。

このように、記号 \ominus, \oplus の定義には注意が必要である。このような問題を避けるためにもあって、文献によっては記号 \ominus, \oplus を用いず、エロージョンを $\varepsilon_B(X)$ 、ダイレーションを $\delta_B(X)$ と表し、その意味を冒頭で定義する、というスタイルをとっているものもある。

また、オープニングやクロージングを X_B, X^B のように下付き・上付きで表すと、他の意味と混同しやすいため、オープニングを $X \circ B$ 、クロージングを $X \bullet B$ という記号で表している文献もある。

2.5 オープニングの性質と、拡張されたオープニング

オープニングの代表的な性質に、非拡張性 (anti-extensivity) ,

増加性 (increasingness) , べき等性 (idempotence) の三つがある。 X, Y を図形、 B を構造要素とすると、次のように表される。

$$\begin{cases} \text{非拡張性: } X_B \subseteq X \\ \text{増加性: } X \subset Y \Rightarrow X_B \subseteq Y_B \\ \text{べき等性: } (X_B)_B = X_B \end{cases} \quad (13)$$

すなわち、非拡張性はオープニングによって図形は拡大しない、増加性は図形の包含関係はオープニングによって保たれる^(注4)、べき等性は一度オープニングを行うと、同じ構造要素でそれ以上オープニングを行っても変化はないことを表している。

これらの性質は、以下のように証明される。

a) 非拡張性

u, v をベクトルとすると、 $X_B = (X \ominus \tilde{B}) \oplus B = \{u+v | u \in X \ominus \tilde{B}, v \in B\}$ と表せる。ここで、

$$\begin{aligned} u \in X \ominus \tilde{B} &\Leftrightarrow \text{すべての } (-v) \in \tilde{B} \text{ について } (u - (-v)) \in X \\ &\Leftrightarrow \text{すべての } v \in \tilde{B} \text{ について } u + v \in X \end{aligned}$$

であるから、 $u+v \in X_B \Rightarrow u+v \in X$ である。よって $X_B \subseteq X$ となる。

b) 増加性

$X \subset Y$ より、 $B_x \subseteq X \Rightarrow B_x \subset Y$ である。よって、 $X_B = \bigcup \{B_x | B_x \subseteq X\} \subset \bigcup \{B_x | B_x \subseteq Y\} = Y_B$ である。

c) べき等性

式(1)より、 $(X_B)_B = \{B_z | B_z \subseteq X_B\}$ であり、よって $(X_B)_B = \{B_z | B_z \subseteq \{B_{z'} | B_{z'} \subseteq X_B\}\}$ となる。ここで、内側の $\{$ を満たす $B_{z'}$ に対して、 B_z を $B_z = B_{z'}$ と置けば、 $(X_B)_B = \{B_{z'} | B_{z'} \subseteq X\}$ が成り立つ。よって、 $(X_B)_B = X_B$ である。

ここまでで説明したオープニングに限らず、上の三つの性質を満たす演算を一般に代数的オープニング (algebraic opening) という⁽⁶⁾。例えば、構造要素の代わりにしきい値 t を考えたとき、「2値画像から、面積が t 未満の連結した図形を取り除く」という演算は、代数的オープニングの一つである。この演算はエリアオープニング (area opening) と呼ばれている。

2.6 グレースケール画像の場合

ここまでの説明では、2値画像や構造要素を、画素位置を表すベクトルの集合として表していた。これに対してグレースケール画像は、各画素に画素値が対応していることから、画素位置を表すベクトルの関数と考え、画素値を関数の値で表すことで定義される。同様に、グレースケールの構造要素を考えることも可能である。

以下、グレースケール画像と2値構造要素を用いる “function-set 演算”、構造要素もグレースケールとした “function-function

(注4): 3.1 で、もう少し詳しく説明する。

演算”に分けて説明する．

2.6.1 function-set 演算

グレースケール画像を画素位置ベクトル x の関数 $f(x)$ で表し，構造要素はこれまでと同じく構造要素 B で表す．2 値画像 X に対するエロージョンとダイレーション，すなわち

$$X \ominus \tilde{B} = \bigcap_{b \in B} X_{-b} \quad (14)$$

$$X \oplus \tilde{B} = \bigcup_{b \in B} X_{-b} \quad (15)$$

に対応して，関数 $f(x)$ の構造要素 B によるエロージョンとダイレーションを， \bigcap, \bigcup をそれぞれ \inf, \sup に置き換えて

$$f \ominus \tilde{B} = \inf_{b \in B} f(x+b) \quad (16)$$

$$f \oplus \tilde{B} = \sup_{b \in B} f(x+b) \quad (17)$$

と定義する．

2 値画像の場合とグレースケール画像の場合との関係は，次のようなクロスセクション (cross-section) の考え方を用いると理解しやすい．グレースケール画像を表す関数 $f(x)$ に対して，「しきい値 t におけるクロスセクション」 $CS_t[f](x)$ を次のように定義する^(注5)．

$$CS_t[f](x) = \{x | f(x) \geq t\}. \quad (18)$$

図 6 は，クロスセクションの考え方を視覚的に表したものである．ここで，関数 $f(x)$ に対して，下記のように陰影 (umbra) $U[f(x)]$ を定義する．

$$U[f(x)] = \{(x, t) | -\infty < t \leq f(x)\}. \quad (19)$$

すなわち陰影とは，関数 $f(x)$ のグラフに対して，そのグラフより下の部分すべて ($-\infty$ まで) を含む集合である．画素位置 x が二次元である通常のグレースケール画像では，画素値を縦軸で表すと，陰影は画素値を上面とし， $-\infty$ まで続く立体ということになる．このような陰影を考えると，しきい値 t におけるクロスセクション $CS_t[f](x)$ は，陰影 $U[f(x)]$ を縦軸の位置 t で切断した断面ということになる．

図 6 でも分かるように，クロスセクションには「縦軸の高い位置での断面は，低い位置での断面に含まれる」という性質がある．すなわち，

$$t < t' \Rightarrow CS_t[f] \supseteq CS_{t'}[f] \quad (20)$$

である．

さて，あるグレースケール画像 f について式 (16) のエロージョンを行うとする．エロージョンの結果，ある画素位置 x での画素値が t になるということは，原画像 f において，構造要素 B を位置 x に移動させた B_x の内部には，画素値 t の画素が必ず含まれ，かつ画素値 t 未満の画素は含まれない．したがっ

(注5): これは「スタックフィルタ」などの非線形フィルタについていわれる「しきい値分解」と同じものである．

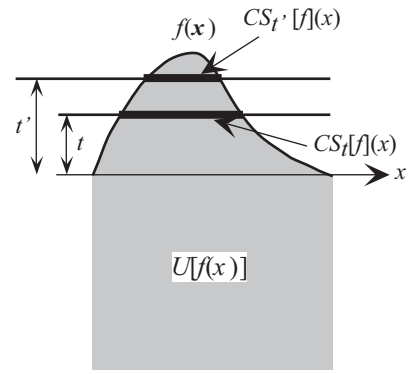


図 6 陰影とクロスセクション

て，この画像のクロスセクションについて同じように B_x の内部を考えると，しきい値 t でのクロスセクション $CS_t[f]$ は B_x の内部すべてを含むが， t より大きなしきい値 t' については，どのクロスセクション $CS_{t'}[f]$ においても， B_x の内部にはクロスセクションに含まれない部分があることになる．

よって，各クロスセクションを各々 2 値画像と考えると式 (14) のエロージョンを行うと，しきい値 t でのクロスセクション $CS_t[f]$ のエロージョン $CS_t[f] \ominus \tilde{B}$ は位置 x を含むが， t より大きなしきい値 t' のクロスセクション $CS_{t'}[f]$ についても，エロージョン $CS_{t'}[f] \ominus \tilde{B}$ を行うとそれらは位置 x を含まない．

このことは，グレースケール画像を可能なすべてのしきい値によってクロスセクションに分解し，各クロスセクションについて式 (14) の 2 値のエロージョンを行って，それらをクロスセクションとする陰影を再構成すると，それはグレースケール画像に対して定義した式 (16) のエロージョンと同じであることを意味している．このような式 (14) と式 (16) の関係を「式 (16) がしきい値分解可能である (commute with thresholding)」という．この関係は，ダイレーションについても同様である．

2.6.2 function-function 演算

グレースケールの構造要素は，グレースケール画像と同様に関数で表す．このとき，画像 $f(x)$ と構造要素を $g(b)$ とのエロージョン・ダイレーションを，次のように定義する．

$$\{f \ominus \check{g}\}(x) = \inf_{b \in w(g)} \{f(x+b) - g(b)\} \quad (21)$$

$$\{f \oplus \check{g}\}(x) = \sup_{b \in w(g)} \{f(x+b) + g(b)\} \quad (22)$$

ここで， $w(g)$ は g のサポートと呼ばれ，関数 g の画素値 0 でのクロスセクションに相当する．また， $\check{g}(b) = g(-b)$ である．

上の定義は，先に述べた陰影を考えると，2 値のエロージョン・ダイレーションとの関係が理解できる．陰影 $U[f]$ から関数 f を復元するには，関数 f が陰影 $U[f]$ の上面对応することから，

$$f(x) = \sup\{t | (x, t) \in U[f]\} \quad (23)$$

とすることになる．一方，画像と構造要素の陰影をそれぞれ同士のミンコフスキー和 $U[f] \oplus U[g]$ を考え，それに対して式 (23) のように関数を復元することを考えると，

$$h(x) = \sup\{t \mid (x, t) \in U[f] \oplus U[g]\} \quad (24)$$

となる．ミンコフスキー和の式 (7) の形の定義を用いると，上の式は

$$h(x) = \sup\{u + v \mid (x - b, u) \in U[f] \text{ and } (b, v) \in U[g]\} \quad (25)$$

と表せる．ここで， $(x - b, u) \in U[f]$ の形にしているのは，画素値の和 $u + v$ を式 (7) におけるベクトルの和 $b + x$ に対応付けるため， $U[f]$ を b の位置に平行移動しているからである．したがって，

$$\begin{aligned} h(x) &= \sup_{b \in w(g)} [\sup\{u \mid (x - b, u) \in U[f]\} \\ &\quad + \sup\{v \mid (b, v) \in U[g]\}] \\ &= \sup_{b \in w(g)} \{f(x - b) + g(b)\} \end{aligned} \quad (26)$$

となるから， $h(x)$ を f と g のミンコフスキー和と考えると， g を画素位置について反転させたものが式 (22) のダイレーションとなる．すなわち，式 (22) のダイレーションの定義は，陰影に対するミンコフスキー和を考えると，2 値画像・構造要素のダイレーションの拡張になっていることが分かる．

一方，ダイレーションを陰影を用いて定義する場合は，「 $U[f]$ を $U[g]$ の内部に沿って動かし，共通部分をとる」というミンコフスキー差を用いた定義はできない．なぜならば， $U[g]$ は画素値を表す座標の方向に $-\infty$ まで広がっているため， $U[f]$ をそれに沿って $-\infty$ まで動かしてゆくと，共通部分は常に空集合になるからである．

そこで，2 値の場合のミンコフスキー差の，式 (4) の形の定義を用い，2 値のエロージョンを

$$X \ominus \tilde{B} = \{x \mid x + b \in X, b \in B\} \quad (27)$$

と表す．これにならって，陰影のエロージョン $U[f] \ominus U[g]$ を考え，それに対して同様に関数を復元することを考えると，式 (25) の場合と同様に

$$\begin{aligned} k(x) &= \sup\{t \mid (x, t) \in U[f] \ominus U[g]\} \\ &= \sup\{u \mid (x + b, u + v) \in U[f] \\ &\quad \text{and } (b, v) \in U[g]\} \end{aligned} \quad (28)$$

となる．上の式は，「 $u + v$ が $U[f](x + b)$ の上限に定められているとき， v が $U[g](b)$ の上限をとるならば， u の上限はどうか」と述べているわけだから，それは u の上限のうちの下限をとることになる．すなわち，式 (23) のように復元すると

$$k(x) = \inf_{b \in w(g)} \{f(x + b) - g(b)\} \quad (29)$$

となり，これは式 (21) で定義されたエロージョンである．

2.7 カラー画像への拡張と完備束への一般化

前節の考え方を更に拡張すると，モルフォロジーの演算を順

序集合 (ordered set) 上の演算として定義することができる．

(半) 順序集合とは，その要素の少なくとも一部の組に“順序”が定義されており，その順序に反射律 (reflexivity)，反対称律 (anti-symmetry)，推移律 (transitivity) が成り立つものである．これらは， X を集合， x, y, z を要素とし，順序を \leq で表すとき，次のように定義される．

$$\begin{cases} \text{反射律} &: \forall x \in X, \quad x \leq x \\ \text{反対称律} &: \forall x, y \in X, \quad (x \leq y \text{ and } y \leq x) \Rightarrow x = y \\ \text{推移律} &: \forall x, y, z \in X, \quad (x \leq y \text{ and } y \leq z) \Rightarrow x \leq z \end{cases} \quad (30)$$

要素のすべての組に順序が定義されている集合を，全順序集合と呼ぶ．部分集合 A のすべての要素よりも上位にある要素全体の集合を， A の上界という．更に，上界に最下位の要素が存在するとき，それを A の上限という（同じく，下位については下界といい，この最上位の要素が存在するとき下限という）．また，ある順序集合の任意の部分集合に上限と下限が定義されているとき，この順序集合を完備束 (complete lattice) と呼ぶ．モルフォロジーの演算は上限・下限演算で表され，より一般的には画像処理を離れ，完備束の上での演算として定義される⁽⁵⁾．

このようにして，2 値画像に対して論理積と論理和を使って定義されたモルフォロジー演算は，完備束における下限と上限を用いた定義にまで一般化された．論理積と論理和を下限と上限に置き換えるのは，多値の真理値を扱うファジー論理における論理和と論理積の定義と同じ仕組みである．特に，2.6.1 で説明した function-set 演算は，論理演算のファジー演算による自然な拡張になっている．また，下限・上限という表現を2 値画像の場合に用いるとすると，下限・上限演算はいずれも「2 値の入力値を合計してしきい値処理する」という「しきい論理」で表すことができる．しきい論理は人工ニューラルネットワークを構成するニューロンの基本的な演算であり，この点にモルフォロジー演算とニューラルネットワークの関連を見ることができる．

なお，カラー画像についてモルフォロジーの演算を定義するには，完備束における下限・上限による定義を用いる⁽¹⁰⁾．カラー画像の場合は画素値がベクトルで表現されるため，上限と下限は直感的には定義できない．そこで，何らかの意味でベクトル間の順序を定義することで，カラー画像に対する演算が定義される．例えば，文献 (11) においては，画像の色空間を HSV（色相，彩度，明度）空間とし，二つの画素値ベクトルの大きさをまず明度で比較して決め，明度が同じなら彩度を比較，彩度が同じなら色相を比較するという手順で定義している．更に，このように定義した大小関係を用いて上限・下限を定義することで，画素値ベクトル間に全順序関係を定義している．このような順序の決め方を辞書式順序 (lexicographical order) という．

3. よく用いられるモルフォロジー演算

3.1 モルフォロジーカルフィルタ

画像処理におけるフィルタとは、一般に、画像の各画素について、その画素及び近傍の画素とで何らかの演算を行って、その結果で各画素を置き換えることで、画像全体の雑音除去などを行なう操作を指している。一方、モルフォロジーにおいては、フィルタとは、広義には画像に対する「移動不変 (translation-invariant)」で「増加的 (increasing)」な操作全体を意味している。ここで、「集合 (画像) X に対する作用 Ψ が移動不変である」とは、

$$\Psi(X_b) = [\Psi(X)]_b \quad (31)$$

であることをいう。簡単にいえば、「画像中のどこで作用を及ぼしても、その作用の効果は変わらない」という意味である。また「作用 Ψ が増加的である」とは、オープニングについて 2.5 で述べたのと同じく、

$$X \subset Y \Rightarrow \Psi(X) \subset \Psi(Y) \quad (32)$$

であることをいう。すなわち、物体の包含関係が作用の前後で保たれることを意味している。

例えば、雑音除去を行う画像フィルタを考えてみよう。画像中のある場所で雑音とみなされる物体は、画像中のどこにあって同様に取り除かれなければならないはずだから、フィルタが移動不変であることは自然なことである。また、増加的なフィルタでは「小さな物体を取り除き、大きな物体を保存する」作用のみを記述し、「大きな物体を取り除き、小さな物体を保存する」という作用は記述できない。しかし、雑音というのは通常「雑音でない、意味のある」物体よりも小さいのが普通である。したがって、増加的なフィルタのみを考えるのは、自然であることが分かる^(注6)。

また、狭義のモルフォロジーカルフィルタとは、広義のフィルタの中で「べき等 (idempotent)」なものを指している。「作用 Ψ がべき等である」とは、

$$\Psi[\Psi(X)] = \Psi(X) \quad (33)$$

であることをいう。すなわち、「あるフィルタを適用した結果に、そのフィルタを何度繰り返して適用しても、結果は変わらない」という意味である。オープニングやクロージングは、最も基本的な (狭義の) モルフォロジーカルフィルタである。

3.2 フィルタ定理

フィルタ定理 (filter theorem) とは、モルフォロジーの演算

と論理演算で大抵のフィルタは表現できること、すなわちモルフォロジーが真に図形操作の基礎演算であることを保証するものである。フィルタ定理は、以下のように表される。

いかなる移動不変・増加的な (広義の) フィルタも、適当な構造要素を適当な数だけ用いれば、それらによるエロージョンの論理和、及びダイレーションの論理積によって表現される。すなわち、 $\Psi(X)$ を画像 X に対するフィルタとすると、いかなる $\Psi(X)$ についても

$$\Psi(X) = \bigcup_{B \in \text{Ker}[\Psi]} X \ominus \check{B} \quad (34)$$

$$\Psi(X) = \bigcap_{B \in \text{Ker}[\Psi]} X \oplus \check{B} \quad (35)$$

を満たす構造要素の集合 (集合族) $\text{Ker}[\Psi]$ が存在する。 $\text{Ker}[\Psi]$ はフィルタ Ψ の核 (kernel) と呼ばれ、次のようなものである。

$$\text{Ker}[\Psi] = \{X \mid 0 \in \Psi(X)\}. \quad (36)$$

0 は X が定義されている座標系の原点を意味する。すなわち、 $\text{Ker}[\Psi]$ は「考えられるすべての入力図形のうち、それに対するフィルタの出力が原点を含むものすべて」である。

フィルタ定理は、以下のように証明される。ここでは、式 (34) の方を証明する。より一般的な証明は、文献 (5) の chapter 4 を参照されたい^(注7)。

$\text{Ker}[\Psi]$ の要素である任意の構造要素 B について、 $X \ominus \check{B}$ に含まれるベクトル (画素) h を考える。式 (8) の $X \ominus \check{B}$ の定義より、 $B_h \subseteq X$ である。したがって、 $B \subseteq X_{-h}$ である。ここで、フィルタ Ψ は増加的であるから、包含関係 $B \subseteq X_{-h}$ はフィルタ Ψ によって変化しない。すなわち、 $0 \in \Psi(B)$ ならば $0 \in \Psi(X_{-h})$ となる。更に、フィルタ Ψ は移動不変であるから、 $0 \in \Psi(X_{-h})$ ならば、この関係を全体に h だけ移動することによって $h \in \Psi(X)$ が得られる。

B は $\text{Ker}[\Psi]$ の要素であるから、確かに $0 \in \Psi(B)$ である。以上から、 $\text{Ker}[\Psi]$ の要素である任意の構造要素 B について、 $h \in X \ominus \check{B} \Rightarrow h \in \Psi(X)$ である。つまり、 $\text{Ker}[\Psi]$ に含まれるどの構造要素 B についても、 $X \ominus \check{B}$ に含まれる画素はすべて $\Psi(X)$ に含まれることが分かった。したがって、 $\Psi(X) \supseteq \bigcup_{B \in \text{Ker}[\Psi]} X \ominus \check{B}$ が示された (図 7)。

逆に、 $\Psi(X)$ に含まれる任意の画素 h を考える。 Ψ は移動不変であるから、 $h \in \Psi(X)$ ならば $0 \in \Psi(X_{-h})$ である。したがって、 $X_{-h} \in \text{Ker}[\Psi]$ である。ところで、 $X \ominus \check{X}_{-h} = \{h' \mid (X_{-h})_{h'} \subseteq X\}$ であり、 $h' = h$ のとき $\{(X_{-h})_{h'} \subseteq X\}$ は満たされるので、 $h \in X \ominus \check{X}_{-h}$ である。ここで X_{-h} を B と置くと、 $h \in X \ominus \check{B}$ である。

したがって、 $\text{Ker}[\Psi]$ に含まれるある構造要素 B について、 $h \in \Psi(X) \Rightarrow h \in X \ominus \check{B}$ である。つまり、 $\Psi(X)$ に含まれるどの画素についても、 $\text{Ker}[\Psi]$ の中のある構造要素 B を用いて、

(注6): 差分フィルタは、大きな物体も小さな物体もエッジ以外は取り除いてしまうので、増加的フィルタではない。

(注7): フィルタ定理は、より一般的には「Matheron の表現定理」と呼ばれている。

その画素が $X \ominus \tilde{B}$ にも含まれるようにできることが分かった。したがって、 $\Psi(X) \subseteq \bigcup_{B \in \text{Ker}[\Psi]} X \ominus \tilde{B}$ が示された (図 8)。

よって以上のことから、 $\Psi(X) = \bigcup_{B \in \text{Ker}[\Psi]} X \ominus \tilde{B}$ が示された。

3.3 サイズ分布

サイズ分布とは、画像中の図形を構造要素の相似形に分解したとき、どのサイズの相似形がどれだけの面積を占めているかを表したものである。すなわち、各相似形のサイズの分布である。前述のとおり、「図形 X の構造要素 B によるオープニング」とは「 X のうち、 B を内部に配置できないくらい小さな部分だけを取り除いたもの」、すなわち「 X から、 B よりも小さな成分を取り除いたもの」である。そこで、 B をある基本的な構造要素とし、 B を順に大きくして、サイズ $2, 3, \dots$ の構造要素 $2B, 3B, \dots$ を準備する。

ところで、サイズは漠然と「大きさ」を指しているが、これをどのように定義すればよいだろうか。以下の議論のようにサイズ分布を定義するためには、各サイズの構造要素 $2B, 3B, \dots$ は、分析の対象となる画像 X について $X_B \subset X_{2B} \subset X_{3B} \dots$ という包含関係を満たすように定義されていなければならない。任意の X についてこの包含関係を満たすには、 $(n+1)B_{nB} = (n+1)B$ であればよい⁽³⁾。この関係を、「 $(n+1)B$ が nB に対して open である」あるいは「 $(n+1)B$ は nB -open である」という。

サイズの最もよく知られた定義は、 $2B, 3B, \dots$ を凸図形 B の相似拡大によって定義するものである。ここで通常の離散的な画像を考え、サイズも離散的であるとすると、これらの相似

Ker[Ψ]に含まれるどのようなBについても、

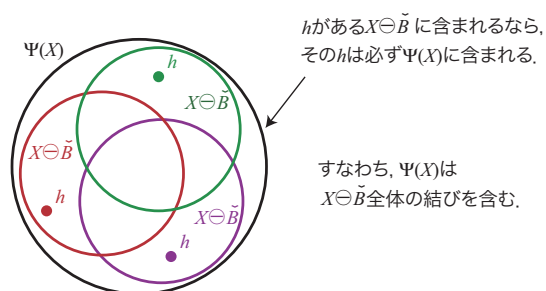


図 7 フィルタ定理の証明 (前半)

$\Psi(X)$ に含まれるどのようなhについても、

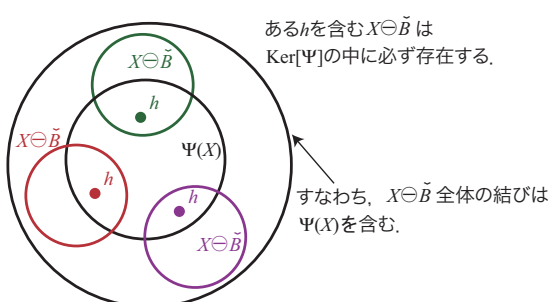


図 8 フィルタ定理の証明 (後半)

な構造要素はミンコフスキー集合和を使って

$$nB = B \oplus B \oplus \dots \oplus B \quad ((n-1) \text{ 回の } \oplus) \quad (37)$$

と定義できる。

さて、各々のサイズの構造要素で各々オープニングを行い、 $X_B, X_{2B}, X_{3B}, \dots$ という図形の系列を作る (図 9)。すると、この図形系列では、 X_B は X から B よりも小さな成分が、 X_{2B} は $2B$ より小さな成分が、 X_{3B} は $3B$ より小さな成分が、 \dots 、各々除かれていることになり、 X から除かれる部分が段々大きくなっていく図形系列になっていることが分かる。このような図形の系列を作るオープニングの系列を granulometry という。Granulometry によって生成される図形の系列 $X_B, X_{2B}, X_{3B}, \dots$ について、各図形の面積と元の図形 X の面積との比を求める。サイズに面積比を対応させた関数は、サイズ 0 のとき面積比 1 で、単調減少な関数になる。これをサイズ分布関数 (size distribution function) という。サイズ分布関数のサイズ n に対応する値は、「画像中の物体のうち、サイズ n 以上の部分の面積の割合」を表す。

更に、離散的なサイズを考える場合、サイズ分布関数の差分は、 $X_B, X_{2B}, X_{3B}, \dots$ の中の、隣接するサイズに対応する画像間の面積の差に相当する。例えば、 X_{2B} と X_{3B} の面積の差は、「 X_{2B} によるオープニングでは除かれなかったが、 X_{3B} によるオープニングでは除かれた部分」、すなわち「サイズがちょうど 2 である部分」の面積となる。このようにして、各サイズに対応する部分の面積を求めたものをパターンスペクトル (pattern spectrum) という。更に、それを元の図形の面積の比で表したものをサイズ密度関数 (size density function) という。サイズ分布関数やサイズ密度関数は、それぞれ確率分布関数、確率密度関数と同じような性質を持ち、それゆえこのような名前が付けられている。したがって、確率分布の場合と同様に、画像中の図形の平均サイズや、サイズの分散を考えることもできる。

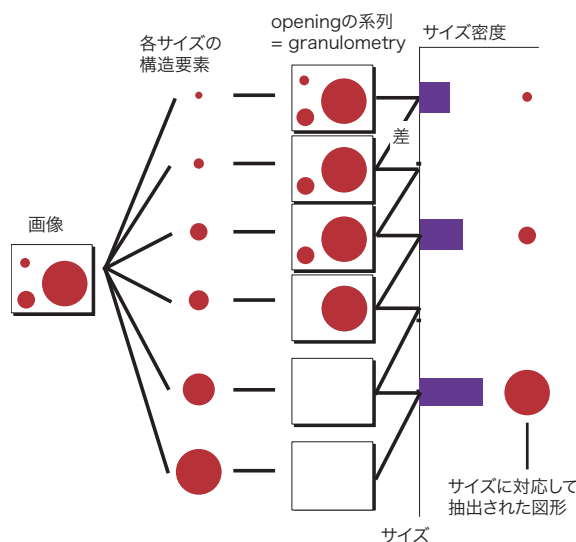


図 9 Granulometry とサイズ密度関数

3.4 スケルトン

スケルトン (skeleton) とは「骨格」の意味で、モルフォロジーでは、画像中の物体を削り取って骨組を求めることをいう。このような骨組を求める方法には、モルフォロジーとは関係なく様々なものがある。その中でモルフォロジーにおけるスケルトン化は、スケルトンから逆に物体が再現できる、という特徴がある。

対象図形 X に対して、構造要素 B によるスケルトン $SK(X, B)$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} S_n(X, B) &= (X \ominus n\tilde{B}) - (X \ominus n\tilde{B})_B, \\ SK(X, B) &= \bigcup_n S_n(X, B). \end{aligned} \quad (38)$$

スケルトン $SK(X, B)$ からは図形 X は再現できないが、 $S_n(X, B)$ からは X が再現できる。また、 X 中の各画素に、それを含む $S_n(X, B)$ の n の値を対応させたものを、medial axis transform という。 $S_n(X, B)$ からの X の再現は、次の計算で行われる。

$$X = \bigcup_n \left[\sum_n (X, B) \oplus nB \right]. \quad (39)$$

この計算は、次のように証明される。

$$\begin{aligned} & [S_n(X, B) \oplus nB] \\ &= [(X \ominus n\tilde{B}) - (X \ominus n\tilde{B})_B] \oplus nB \\ &= (X \ominus n\tilde{B}) \oplus nB - (X \ominus n\tilde{B})_B \oplus nB \\ &= (X \ominus n\tilde{B}) \oplus nB - (X \ominus n\tilde{B} \ominus \tilde{B} \oplus B) \oplus nB \\ &= X \ominus n\tilde{B} \oplus nB - X \ominus (n+1)\tilde{B} \oplus (n+1)B \\ &= X_{nB} - X_{(n+1)B} \end{aligned} \quad (40)$$

となるので、

$$\begin{aligned} & \bigcup_n [S_n(X, B) \oplus nB] \\ &= \bigcup_n [X_{nB} - X_{(n+1)B}] \\ &= (X - X_B) \cup (X_B - X_{2B}) \cup (X_{2B} - X_{3B}) \cup \dots \end{aligned} \quad (41)$$

となる。 $(A - B) \cup (B - C) = A - C$ であり、 n が十分大きいとき $X_{nB} = \emptyset$ だから、式 (41) の右辺は X となる。

式 (38) は、直観的には次のような意味を表している。 $X \ominus n\tilde{B}$ は「構造要素の相似形 nB を X の内部に敷き詰めたときの、 nB の中心の軌跡」である。このとき、 $(X \ominus n\tilde{B})_B$ は「 nB の中心の軌跡」をサイズ 1 の構造要素 $1B$ でオープニングしたものである。ということは、 $(X \ominus n\tilde{B})_B$ のサイズは 1 以上なので、 $(X \ominus n\tilde{B})$ の内部にその中心が位置するような nB のうち、 $(X \ominus n\tilde{B})_B$ の内部にその中心が位置するようなものは、それよりもサイズが 1 以上大きい相似形を X の内部に配置することで、 nB 全体を覆うだけの余裕がある。

したがって、 $(X \ominus n\tilde{B})$ から $(X \ominus n\tilde{B})_B$ を取り除いた $(X \ominus n\tilde{B}) - (X \ominus n\tilde{B})_B$ は、「 nB のうち、物体 X の隅に

配置されているために、 X の内部で n より大きなサイズの相似形で覆うことができないもの」、すなわち X を構成するのに必須の相似形の中心の位置で、これがスケルトンとなる。

なお、従来からある、スケルトンに類似した考えに距離変換 (distance transformation) というものがある。距離変換とは、図形の内部の各点に対して、図形の周縁上でその点から最も近い点までの距離を対応させる演算のことである。距離変換には、距離値を対応付けられた各点のうち、周囲よりも距離値の大きな点、すなわち距離値が極大となる点だけから、元の図形を復元できるという特徴がある。これは、スケルトン演算における $S_n(X, B)$ の算出とそれからの図形の復元にほかならない。ただし、スケルトン演算においては、距離変換における「中心点から距離が 1 である点」を構造要素によって定めていることになっている。したがって、通常の距離の定義を超えた、例えば非等方的な距離も定義することができる。

4. 図形を「測る」

モルフォロジーに関連する研究として、ここでは図形を「測る」、すなわち図形に対して何らかの評価を行う量を対応させる方法を紹介する。

4.1 granulometric moment

3.3 で述べたように、サイズ密度関数は確率密度関数と同じ性質を持つ。それゆえ、確率密度関数と同様に、サイズの平均・分散といった量を考えることで、対象図形の大きさの分布を測ることができる。例えば、 $p_{X,B}(r)$ を構造要素 B を基準とする図形 X のサイズ密度関数のサイズ r の値とし、 N は画像 X に含まれる最大のサイズを表すとすると、 X のサイズの平均は

$$E(X, B) = \sum_{r=0}^N r p_{X,B}(r) \quad (42)$$

で表される。更に、平均すなわち一次モーメントだけでなく、二次モーメントである分散、更には三次以上の高次モーメントも確率密度関数と同様に定義することができ、これらを使ってサイズ密度関数の特徴を表すことができる。これらのモーメントを granulometric moment という。これを使って、テクスチャの各部分の分類⁽¹²⁾や、眼科における角膜内皮細胞像の診断⁽¹³⁾を行った研究が知られている。

また、 X に含まれるサイズのエントロピーは

$$H(X, B) = - \sum_{r=0}^N p_{X,B}(r) \log p_{X,B}(r) \quad (43)$$

で表される。この値は、構造要素 B を基準とする、図形 X の平均の粗さ (roughness) を表す。 $H(X, B) = 0$ となるのは、ある一つのサイズ r においてのみ $p_{X,B}(r) = 1$ で、他のサイズについては $p_{X,B}(r) = 0$ となるときだから、 X は一つのサイズの B しか含まないことになり、粗さは最小である。一方、 $H(X, B)$ がその最大値 $\log(N+1)/(N+1)$ をとるのは、 $p_{X,B}(r)$ がどのサイズにおいても等しく $1/(N+1)$ になるときである。すなわ

ち、 X は B の各サイズの相似形を満遍なく含んでおり、粗さが最大ということになる。

4.2 類似度測度

文献 (14) では、ミンコフスキー演算を用いた、図形の類似度測度 (similarity measure) が提案されている。これは、二つの図形の類似度を、一方をアフィン変換によって変形しても不変になるように定義するものである。

図形 A の面積 (一般的には volume) を $V(A)$ とするとき、 A をアフィン変換 g で変換した $g(A)$ の面積は

$$V(g(A)) = |\det g| V(A) \quad (44)$$

で表される。また、二つの図形 A, B については、次の「Brunn-Minkowski の不等式」が成り立つ。

$$V(A \oplus B)^{\frac{1}{2}} \geq V(A)^{\frac{1}{2}} + V(B)^{\frac{1}{2}}. \quad (45)$$

ただし、等号は A, B が凸図形で相似の関係にあるときのみ成り立つ。式 (45) から

$$V(A \oplus B) \geq V(A) + V(B) + 2V(A)^{\frac{1}{2}}V(B)^{\frac{1}{2}} \quad (46)$$

が成り立ち、更に相加平均・相乗平均の関係を用いると

$$V(A \oplus B) \geq 4V(A)^{\frac{1}{2}}V(B)^{\frac{1}{2}} \quad (47)$$

が成り立つ。ただし等号は A, B が凸図形で合同のとき成り立つ。

これらを用いて、部分群 H に属するアフィン変換 h について、凸図形 A, B の類似度 $\sigma(A, B)$ を

$$\sigma(A, B) = \sup_{h \in H} \frac{4|\det h|^{\frac{1}{2}} V(A)^{\frac{1}{2}} V(B)^{\frac{1}{2}}}{V(A \oplus h(B))} \quad (48)$$

と定義すると、この $\sigma(A, B)$ が H について不変な類似度を $[0, 1]$ で与えることが示される。

このような図形の形状を「測る」アプローチは現在も盛んに研究されており、最近の論文 (15) では、形状の平均や分散を求めたり、更に形状の内挿や外挿を行う手法が示されている。

5. おわりに

本稿では、モルフォロジーの考え方を、有界な世界を表現する基本的な枠組みとして紹介した。モルフォロジーに対して、ただ「図形をしばませたり膨らませたりする演算」としてではなく、このような観点から何かしらの関心を寄せて頂ければ、紹介者として大変ありがたいことである。

なお、筆者を含む、数学から生物学に至る様々な分野でモルフォロジーに関心を持つ研究者により、「モルフォロジストの会」⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾ という緩やかな交流組織を作っている。会のメンバによるモルフォロジーの解説書を、近々出版予定である。非線形信号処理の基礎知識や、画像信号処理並びに知識工学への応用、数学的背景などを取り扱っているので、御高覧を賜れば幸いである。

本稿の執筆にあたっては、日本学術振興会科学研究費・基盤研究 (C)20560357 の支援を受けた。

文 献

- (1) 小倉久和, 情報の基礎離散数学, 近代科学社, 東京, 1999.
- (2) G. Matheron and J. Serra, "The birth of mathematical morphology," Proc. 6th International Symposium on Mathematical Morphology, pp. 1-16, Sydney, Australia, April 2002.
- (3) J. Serra, Image analysis and mathematical morphology, Academic Press, London, 1982.
- (4) Image analysis and mathematical morphology Volume 2: Technical advances, J. Serra, ed., Academic Press, London, 1988.
- (5) H. J. A. M. Heijmans, Morphological Image Operators, Academic Press, London, 1994.
- (6) P. Soille, Morphological Image Analysis: Principles and Applications, 2nd Ed., Springer-Verlag, New York, 2003.
- (7) 小畑秀文, モルフォロジー, コロナ社, 東京, 1996.
- (8) P. Maragos, "Tutorial on advances in morphological image processing and analysis," Opt. Eng., vol. 26, no. 7, pp. 623-632, July 1987.
- (9) R. M. Haralick, S. R. Sternberg, and X. Zhuang, "Image analysis using mathematical morphology," IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. PAMI-9, no. 4, pp. 532-550, April 1987.
- (10) M. L. Corner and E. J. Delp, "Morphological operations for color image processing," J. Electron. Imaging, vol. 8, no. 3, pp. 279-289, March 1999.
- (11) G. Louverdis, M. I. Vardavoulia, I. Andreadis, and P. Tsalides, "A new approach to morphological color image processing," Pattern Recognit., vol. 35, no. 8, pp. 1733-1741, Aug. 2002.
- (12) E. R. Dougherty, J. T. Newell, and J. B. Pelz, "Morphological texture-based maximum-likelihood pixel classification based on local granulometric moments," Pattern Recognit., vol. 25, no. 10, pp. 1181-1198, Oct. 1992.
- (13) G. Ayala, M. E. Diaz, and L. Martinez-Costa, "Granulometric moments and corneal endothelium status," Pattern Recognit., vol. 34, no. 6, pp. 1219-1227, June 2001.
- (14) H. J. A. M. Heijmans and A. V. Tuzikov, "Similarity and symmetry measures for convex shapes using Minkowski addition," IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol. 20, no. 9, pp. 980-993, Sept. 1998.
- (15) J. Angulo and F. Meyer, "Morphological exploration of shape spaces," Proc. International Symposium of Mathematical Morphology 2009, pp. 226-237, Groningen, The Netherlands, Aug. 2009.
- (16) モルフォロジストの会, laskin.mis.hiroshima-u.ac.jp/morpho
- (17) 浅野 晃, 延原 肇, "マセマティカルモルフォロジーの基礎と新展開," 信学誌, vol. 92, no. 10, pp. 876-880, Oct. 2009.

(SIS 研究会提案, 平成 22 年 6 月 30 日受付)

7 月 21 日最終受付)



浅野 晃 (正員)

1987 阪大・工・応用物理卒。1992 同大学院博士課程了。同年九工大・情報・助手, 広島大・総合科学・助教授, 同教授を経て, 現在, 同大学院工学研究院情報部門教授。博士 (工学)。画像科学・医用画像工学・視覚感性科学・統計学の研究と教育に従事。
<http://laskin.mis.hiroshima-u.ac.jp/>