リーマン計量を考慮した冗長系の微分逆運動学

○大西祐輝（東京工業大学）　梶田秀司（中部大学・産総研）　三平満司（東京工業大学）

1. 緒言

微分逆運動学は，ある目標の効果器速度を実現するための，ロボットの一般化速度を求める問題である．この問題は，不良設定となり得る逆問題としての難しさをはらむ一方で，分解速度制御 [1] や逆運動学の数値解法 [2] といったマニピュレータ制御の基礎を支えている．

一般化速度と効果器速度を結びつける微分運動学自体は，線形な代数方程式をなす一方で，その本質は微分関係を表すものであり，数学的に特殊な構造を有している．一般化速度と効果器の速度は，配位空間と作業空間を共に滑らかな多様体として考えたとき，それぞれの接ベクトルである．つまり，速度のノルムを定義することは，それぞれの多様体に対して計量を与えることにほかならない．特に計量が正定値対称性を有する場合，与えられた計量はリーマン計量となる．しかしながら，擬似逆行列や重み付き擬似逆行列による微分逆運動学の解法 [3] は，今日まで頻用されているにも関わらず，その物理的意味を明示的に示すことなく，リーマン計量に相当する重みを導入している．山根と中村 [4] は，重み付き擬似逆行列を利用することを「関節の固さ」の調整と表現しているが，定性的な言及に留まっている．

ここで古典力学に立ち戻ると，配位空間には質量や慣性モーメントの次元を有する計量が予め備わっており，これを適用した速度ノルムの二乗は，運動エネルギーという物理的意味を持つ [5]．言い換えると，一般化速度のノルムを定義することは，目標運動を実現しつつ最小化するべき仮想的な運動エネルギーを規定することに等しい．

本稿は，重み付き擬似逆行列による冗長系の微分逆運動学の解が，動力学的性質と密接に関連している事実を明らかにするものである．まず第 2 章にて，冗長マニピュレータを例として，微分運動学を微分幾何学の視点から再考し，その数理的な構造を読み解く．その上で，第 3 章にて，冗長系の微分逆運動学がリーマン多様体上でのエネルギー最小化解を導くことを確認する．このとき，エネルギーを実際のマニピュレータの運動エネルギーとすれば，微分逆運動学に動力学的性質を付与することができる．さらに第 4 章にて，配位空間と作業空間の間でエネルギーが保存するという新たな考え方を付与することにより，配位空間上で定義されるマニピュレータの慣性が作業空間上で表現できることを示す．そして得られた作業空間上での慣性が仮想仕事の原理からも導けることを紹介し，第 5 章で総括する．

2. マニピュレータの微分運動学

マニピュレータの姿勢を表す一般化座標を n 次元ベクトル $\boldsymbol{q}$，マニピュレータの効果器位置（例えば，手先効果器の位置や重心位置）を m 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ とする．このとき，運動学と呼ばれる代数方程式による関係

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{q}) \tag{1}$$

が存在する．特に，一般化座標 $\boldsymbol{q}$ が与えられたときに効果器位置 $\boldsymbol{x}$ を求める操作を順運動学，その逆を逆運動学と呼ぶ．多軸のマニピュレータはよく回転対偶を複数含むため，運動学の写像 $\boldsymbol{\phi}$ は三角関数を含む非線形なものとなることが多い．逆運動学における解の存在性や一意性は必ずしも保証されない．

運動学 (1) の両辺を時間 t で微分することにより，次の微分運動学を得る．

$$\dot{\boldsymbol{x}} = J\dot{\boldsymbol{q}}. \tag{2}$$

ここで $J = \frac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \boldsymbol{q}}$ はヤコビ行列である．微分運動学自体は，ヤコビ行列を基礎ヤコビ行列 [6] へと拡張することによって，効果器の角速度についても考慮できるようになるが，本稿では位置のみを考える．

それでは，微分運動学 (2) を微分幾何学の文脈で再考する．マニピュレータの配位空間，すなわち一般化座標の集合を $\mathcal{Q}$ とし，効果器の作業空間を $\mathcal{X}$ とする．$\mathcal{Q}, \mathcal{X}$ をそれぞれ可微分多様体とみなせば $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ であり，速度の次元を持つ時間微分は，それぞれの多様体の接空間の元となる．すなわち，$\dot{\boldsymbol{q}} \in T_{\boldsymbol{q}}\mathcal{Q}$, $\dot{\boldsymbol{x}} \in T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{X}$ である．したがって，ヤコビ行列 $J : T_{\boldsymbol{q}}\mathcal{Q} \to T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{X}$ は，配位空間の点 $\boldsymbol{q}$ における接ベクトルを作業空間の点 $\boldsymbol{x}$ における接ベクトルへと押し出す線形写像となっている．

以降では，$n = \dim \mathcal{Q} > \dim \mathcal{X} = m$ の場合，つまりマニピュレータがタスクに対して冗長である場合を考える．本稿では紙面の都合上，J は行フルランクであることを仮定する．ただし実際には，J が行フルランクでなかったとしても，作業空間の次元を退化させることにより，同様の議論が可能である．

3. 微分逆運動学の数理構造

3.1 一般化逆行列と擬似逆行列

微分運動学の式 (2) を考える．ある目標効果器速度 $\dot{\boldsymbol{x}}$ が与えられたとき，それを実現する一般化速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ を求める問題が，微分逆運動学である．任意の $\boldsymbol{q} \in \mathcal{Q}$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ における接空間 $T_{\boldsymbol{q}}\mathcal{Q}$, $T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{X}$ がそれぞれ $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ に微分同相であるという性質から，$\dot{\boldsymbol{q}} \in \mathbb{R}^n$, $\dot{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^m$, $J \in \mathbb{R}^{m \times n}$ と考えて良い．したがって，微分逆運動学は線形代数方程式として (2) を解く問題に帰着する．微分逆運動学は，ヤコビ行列 J の階数，あるいは解となり得る $\dot{\boldsymbol{q}}$ の個数により，一般に次のように分類することができる．

1. $\mathrm{rank}\, J < n$ のとき：劣決定系と呼ばれ，解は無数に存在する．
2. $\mathrm{rank}\, J = n$ のとき：唯一解を持つ．特に $m = n$ であれば，$\dot{\boldsymbol{q}} = J^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}$ が唯一解である．
3. $\mathrm{rank}\, J > n$ のとき：方程式は過剰決定系と呼ばれ，解は存在しない．

行列の次元と階数がしばしば異なることに，注意が必要である．本稿において考えるのは，1 番目の劣決定系である．これは明らかに不良設定な逆問題である．

解の非一意性は，線形作用素としてのヤコビ行列 J に零空間が存在し，空間 $\mathbb{R}^n$ においてある特定の方向に $\dot{\boldsymbol{q}}$ を動かしても，その像 $J\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^m$ が不変であることに起因する．いま，無数の解の一つが $J^-\dot{\boldsymbol{x}}$ の形で与えられたとき，J^- は J の一般化逆行列 [7] と呼ばれる．解が無数に存在することと同様に，J^- も無数に存在する．ここで，J^- が J の一般化逆行列であるとは，J^- が次の方程式を満たすことと同値である．

$$JJ^-J = J. \tag{3}$$

J の擬似逆行列（Moore-Penrose の擬似逆行列）[8, 9] は，一般化逆行列の一つである．擬似逆行列 $J^\dagger$ は，式 (3) に加え，次の 3 つの等式を全て満たす唯一の行列である．

$$J^\dagger J J^\dagger = J^\dagger, \tag{4}$$

$$\left(JJ^\dagger\right)^\mathsf{T} = JJ^\dagger, \tag{5}$$

$$\left(J^\dagger J\right)^\mathsf{T} = J^\dagger J. \tag{6}$$

J が行フルランク，すなわち $\operatorname{rank} J = m$ であれば，擬似逆行列 $J^\dagger$ は

$$J^\dagger = J^\mathsf{T}\left(JJ^\mathsf{T}\right)^{-1} \tag{7}$$

と解析的に導くことができる．

この擬似逆行列によって導かれる微分逆運動学の解 $\dot{\boldsymbol{q}}^* = J^\dagger\dot{\boldsymbol{x}}$ は，次の最小化問題の解と等しい．

$$\dot{\boldsymbol{q}}^* = \min_{\dot{\boldsymbol{q}}} \|\dot{\boldsymbol{q}}\| \quad \text{s.t. } J\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}. \tag{8}$$

この最小化問題は，空間 $\mathbb{R}^n$ 内の等式 $\dot{\boldsymbol{x}} = J\dot{\boldsymbol{q}}$ を満たす拘束超平面上で，ノルムが最小，すなわち最も原点に近い $\dot{\boldsymbol{q}}$ を求めるものである．この性質から，擬似逆行列による解 $\dot{\boldsymbol{q}}^*$ は，最小二乗解とも呼ばれる．

3.2 重み付き擬似逆行列

擬似逆行列がノルム，厳密にはユークリッドノルムに関する最小化問題として記述できることから，ノルムの定義に合わせて擬似逆行列が変容することは自然である．重み付き擬似逆行列 [10] が，非ユークリッドノルムを含めた形での擬似逆行列の一般化となる．個々の重み付き擬似逆行列もまた，一般化逆行列の一つである．

n 次元実正定値対称行列 $W \in \mathrm{Sym}_{++}(n, \mathbb{R})$ が重み行列として与えられたとき，一般化速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ のノルムは

$$\|\dot{\boldsymbol{q}}\|_W = \sqrt{\dot{\boldsymbol{q}}^\mathsf{T} W \dot{\boldsymbol{q}}} \tag{9}$$

と定義できる．このとき，W に対して，

$$W = W_0^\mathsf{T} W_0 = (W_0)^2 \tag{10}$$

を満たす $W_0 \in \mathrm{Sym}_{++}(n, \mathbb{R})$ が唯一存在する．W_0 は W の平方根と呼ばれる．重み付きノルムは，ユークリッドノルムの演算を用いて，次のように変形できる．

$$\|\dot{\boldsymbol{q}}\|_W = \|W_0\dot{\boldsymbol{q}}\|. \tag{11}$$

劣決定系の擬似逆行列を定める最小化問題 (8) は，ノルムの一般化を受けて次のように書き直すことができる．

$$\dot{\boldsymbol{q}}^\star = \min_{\dot{\boldsymbol{q}}} \|\dot{\boldsymbol{q}}\|_W \quad \text{s.t. } J\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}. \tag{12}$$

この最適解 $\dot{\boldsymbol{q}}^\star$ は，J の重み付き擬似逆行列 J^+ を用いて，

$$\dot{\boldsymbol{q}}^\star = J^+\dot{\boldsymbol{x}} \tag{13}$$

と記述できる．重み付き擬似逆行列 J^+ は，擬似逆行列を求める演算を通じて，次のように記述できる．

$$J^+ = W_0^{-1}(JW_0^{-1})^\dagger. \tag{14}$$

J が行フルランクであれば，式 (7) を用いて，重み付き擬似逆行列 J^+ を行列の積の形で表現できる．

$$\begin{aligned} J^+ &= W_0^{-1}(JW_0^{-1})^\mathsf{T}\left[(JW_0^{-1})(JW_0^{-1})^\mathsf{T}\right]^{-1} \\ &= W^{-1}J^\mathsf{T}\left(JW^{-1}J^\mathsf{T}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

重み行列が単位行列のとき，すなわち $W = I$ のときに，$J^+ = J^\dagger$ と重み付き擬似逆行列が通常の擬似逆行列に一致する．

重み付き擬似逆行列は，等式制約付き最適化問題としても導くことができる．付録 A を参照されたい．

3.3 仮想運動エネルギー最小化解

ここで再び微分幾何学の見地に立ち戻ると，一般化速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ は，配位空間 $\mathcal{Q}$ 上のある点 $\boldsymbol{q}$ における接空間 $T_{\boldsymbol{q}}\mathcal{Q}$ の元であった．この事実より，一般化速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ のノルムを定義する操作は，配位空間 $\mathcal{Q}$ に計量を与えることにほかならない．重み付け行列 W が配位空間上の滑らかな写像として表現できる，すなわち $W : \mathcal{Q} \to \mathrm{Sym}_{++}(n, \mathbb{R})$ でかつ C^∞ 級であれば，計量はリーマン計量となる．可微分多様体に付すリーマン計量は任意性があるから，基本的にはどのような W であっても構わない．一方で，古典力学を振り返ると，機械系の配位空間に対するリーマン計量とは，慣性を表す．慣性を計量とするリーマン多様体上の速度ノルムは，二乗すると運動エネルギーという性質を有する．つまり，重みを考慮した最小化問題 (12) は，W をマニピュレータの仮想的な慣性行列としたときの，仮想的な運動エネルギーの最小化問題となっている．

重み付き擬似逆行列によって導かれる微分逆運動学の解は，J の行フルランク性の仮定のもとで，

$$\dot{\boldsymbol{q}}^\star = J^+\dot{\boldsymbol{x}} = W^{-1}J^\mathsf{T}\left(JW^{-1}J^\mathsf{T}\right)^{-1}\dot{\boldsymbol{x}} \tag{16}$$

と書き下せる．この解は，上述した解釈に基づけば,「目標効果器速度 $\dot{\boldsymbol{x}}$ を実現する解のうち，最小の仮想的な運動エネルギー $\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^\mathsf{T}W\dot{\boldsymbol{q}}$ で実現できるもの」となる．

したがって，通常の擬似逆行列（$W = I$）を用いることは，マニピュレータの各関節における慣性が全て等しく（対角成分が全て 1 であることに対応），各関節の動きは独立したものである（非対角成分が全て 0 であることに対応），と考えることに相当する．

当然ながら，実際のマニピュレータの慣性行列を M として $W = M$ とすれば，仮想的な運動エネルギーは実際のマニピュレータの運動エネルギーと一致する．つまりノルムの変更という極めて簡単な操作により，微分逆運動学の解に，省エネルギー化というある種の動力学的最適性を組み込むことができるのである．

4. 効果器の慣性

4.1 多様体間のエネルギー保存則による慣性の射影

作業空間 $\mathcal{X}$ に，あるリーマン計量 $G \in \mathrm{Sym}_{++}(m, \mathbb{R})$ が与えられたとする．G は m 次元実正定値対称行列として表現され，効果器がもつ仮想的な慣性と解釈できる．$n = m$ のときに限れば，リーマン計量 G は微分運動学 (2) を用いて，配位空間 Q へと引き戻すことができる．

$$\dot{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} G \dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{q}}^\mathsf{T} \left(J^\mathsf{T} G J \right) \dot{\boldsymbol{q}} \tag{17}$$

$$\Rightarrow W = J^\mathsf{T} G J. \tag{18}$$

しかし本稿で考えているのは $n > m$ の場合である．また，これまでの議論を踏まえると，微分逆運動学を解くために配位空間のリーマン計量 W が先に定められている．そこで，逆に配位空間の計量 W を元にして，作業空間の計量が逆算できないかと考える．そのために，配位空間と作業空間で，ある運動に関する仮想的な運動エネルギーが保存されると仮定する．この仮定は，運動エネルギーは配位空間で考えても作業空間でも考えても同じである，という現象として自然なものであり，式として次のように記述できる．

$$\frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} G \dot{\boldsymbol{x}} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^\mathsf{T} W \dot{\boldsymbol{q}}. \tag{19}$$

より数学的には，運動学写像 $\boldsymbol{\phi}$ が等長写像であることを要求するものである．あくまでも，本来 $n = m$ の場合に成立する事実を，$n > m$ の場合でも扱えるよう一般化したに過ぎない．

ここで，微分逆運動学の解 (16) を用いると，エネルギー保存則 (19) より，

$$\begin{aligned} G &= \left(J^+ \right)^\mathsf{T} W J^+ \\ &= \left[\left(J W^{-1} J^\mathsf{T} \right)^{-T} J W^{-1} \right] \\ &\quad\; W \left[W^{-1} J^\mathsf{T} \left(J W^{-1} J^\mathsf{T} \right)^{-1} \right] \\ &= \left(J W^{-1} J^\mathsf{T} \right)^{-1} J W^{-1} J^\mathsf{T} \left(J W^{-1} J^\mathsf{T} \right)^{-1} \\ &= \left(J W^{-1} J^\mathsf{T} \right)^{-1} \end{aligned} \tag{20}$$

と作業空間のリーマン計量 G が誘導できた．G は W の射影（押し出し）であり，微分逆運動学の解 (16) を適用した際に作業空間に現れる仮想的な慣性を表す．この射影の操作も本質的には不良設定であるが，重み付き擬似逆行列 $J^+ : T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{X} \to T_{\boldsymbol{q}}\mathcal{Q}$ が単射性を持つはめ込み写像であるため，行えるようになっている．

冗長マニピュレータにおいては，ある効果器の運動 $\dot{\boldsymbol{x}}$ を実現する際に必要な運動エネルギーは，下限のみが定められており，上限は存在しない．零空間での運動を発散させれば，無限大の運動エネルギーを用いることができるためである．一方で作業空間において効果器の（目標）速度は決まっているため，エネルギー保存則 (19) を満たすためには，リーマン計量 G が微分逆運動学の解 $\dot{\boldsymbol{q}}$ に応じて変化することになる．

配位空間の計量が実際の慣性と等しいとき，すなわち $W = M$ のとき，$G = \left(J M^{-1} J^\mathsf{T} \right)^{-1}$ は効果器に現れる物理的意味を持った慣性のうち，$\dot{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} G \dot{\boldsymbol{x}}$ を最小化するものとなる．

なお，ヤコビ行列 $J : T_{\boldsymbol{q}}\mathcal{Q} \to T_{\boldsymbol{x}}\mathcal{X}$ は冗長マニピュレータにおいて単射性を有するとは限らないため，式 (18) のように引き戻した計量 $J^\mathsf{T} G J$ が退化する可能性があることに注意されたい．逆運動学の数値解法においても，引き戻しが退化問題を伴うことが生じることが知られているが，数値計算上は正則化が有効に機能している [11].

4.2 静止状態での効果器の運動方程式

本節では一度運動学から離れ，運動方程式を考えたい．いま，ロボットが静止状態（$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$）にあるとする．マニピュレータの関節トルクを $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$，効果器に加わる外力を $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^m$ とする．このとき，次の仮想仕事の原理が成り立つ．

$$\boldsymbol{\tau}^\mathsf{T} d\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}^\mathsf{T} d\boldsymbol{x}. \tag{21}$$

$d\boldsymbol{q}$, $d\boldsymbol{x}$ はそれぞれ一般化座標，効果器位置の微小変位を表している．両辺を $\boldsymbol{q}$ によって偏微分することにより，力-トルク関係を表す等式

$$\boldsymbol{\tau} = J^\mathsf{T} \boldsymbol{f} \tag{22}$$

が得られる．またマニピュレータの運動方程式は，静止状態にあるという仮定から，遠心・コリオリ力や粘性摩擦力が無視できるので，

$$M \ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\tau} \tag{23}$$

となる．したがって，外力によって発現する一般化加速度は

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = M^{-1} J^\mathsf{T} \boldsymbol{f} \tag{24}$$

である．

ここで運動学 (1) を参照し，時間で 2 階微分すると，

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \dot{J} \dot{\boldsymbol{q}} + J \ddot{\boldsymbol{q}} \tag{25}$$

と 2 階の微分運動学が導ける．静止状態，すなわち $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}$ を仮定しているため，右辺第一項目は $\boldsymbol{0}$ となる．式 (24) における一般化加速度を代入すると，

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = J M^{-1} J^\mathsf{T} \boldsymbol{f} \tag{26}$$

$$\Leftrightarrow \left(J M^{-1} J^\mathsf{T} \right)^{-1} \ddot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f} \tag{27}$$

と，静止状態から始まる効果器の瞬間的な運動方程式が導出できた．

今一度，本節ではここまで近似や最適化等を一切用いていないことを確認されたい．得られた効果器の運動方程式 (27) の左辺における $\left(J M^{-1} J^\mathsf{T} \right)^{-1}$ が効果器の慣性に相当し，外力 $\boldsymbol{f}$ に対する効果器の動かしづらさを定める．驚くべきことに，これは前節において $W = M$ とした場合の作業空間の計量 G に一致する（式 (20) を参照されたい）．

以上の結果から，マニピュレータの実際の運動エネルギー最小化を実現する微分逆運動学の解 (16) が導く効果器の慣性が，静止状態から始まる運動方程式に由来する慣性と，瞬間的にではあるが一致することが明らかとなった．

5. 結言

本稿では，以下の三点を行った．

1. 微分運動学を微分幾何学の文脈で再考した．
2. 速度ノルムを，その二乗が運動エネルギーと一致するように取ることによって，微分逆運動学の解法に動力学的最適性が組み込めることを指摘した．
3. 運動エネルギーを最小化する微分逆運動学の特性が，本質的に力学法則と整合することを示した．

冗長マニピュレータをはじめとする冗長系の数理構造はいまだ明らかでない点が多い．有本らが関連分野において「仮想バネ・ダンパー仮説」をはじめとする示唆に富んだ成果を挙げているが，逆運動学や微分逆運動学の不良設定性に起因する未解決の問題は多く残されている [12]．本稿で提案した，微分逆運動学の運動エネルギーを最小化する解としての性質や，多様体間のエネルギー保存という制約が，新たな切り口となることを期待する．

謝 辞 本研究は，日本学術振興会 科学研究費助成事業 基盤研究 (B) 20H02124，および科学技術振興機構 戦略的創造研究推進事業 (ACT-X) JPMJAX2008 の助成を受けた．感謝申し上げる．

参 考 文 献

[1] D. E. Whitney: ”Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses,” *IEEE Transactions on Man-Machine Systems*, **10**-2, 47-53 (1969)
[2] T. Sugihara: ”Solvability-Unconcerned Inverse Kinematics by the Levenberg-Marquardt Method,” *IEEE Transactions on Robotics*, **27**-5, 984-991 (2011)
[3] D. E. Whitney: ”The Mathematics of Coordinated Control of Prosthetic Arms and Manipulators,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **94**-4, 303-309 (1972)
[4] 山根, 中村: ”ヒューマンフィギュアの全身運動生成のための協応構造化インタフェース”, 日本ロボット学会誌, **20**-3, 335-343 (2002)
[5] F. Bullo and A. D. Lewis: *Geometric Control of Mechanical Systems: Modeling, Analysis, and Design for Simple Mechanical Control Systems*, Springer (2004)
[6] O. Khatib: ”A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation,” *IEEE Journal on Robotics and Automation*, **3**-1, 43-53 (1987)
[7] C. R. Rao and S. K. Mitra: *Generalized Inverse of Matrices and Its Applications*, John Wiley & Sons Inc (1971)
[8] E. H. Moore: ”On the reciprocal of the general algebraic matrix,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, **26**-9, 394-395 (1920)
[9] R. Penrose: ”A generalized inverse for matrices,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **51**-3, 406-413 (1955)
[10] Y. Nakamura: *Advanced Robotics: Redundancy and Optimization*, Addison-Wesley (1991)
[11] 杉原知道: ”逆運動学の数値解法”, 日本ロボット学会誌, **34**-3, 167-173 (2016)
[12] 有本, 田原: ロボットと解析力学, コロナ社 (2018)

A 等式制約条件付き最適化による重み付き擬似逆行列の導出

最適化問題 (12) に対する系のラグランジアンを

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathsf{T}}W\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}\left(J\dot{\boldsymbol{q}}-\dot{\boldsymbol{x}}\right) \tag{28}$$

とする．ここで $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^m$ は，制約条件に対する随伴ベクトルである．このとき，最適性の一次条件は以下の 2 式である．

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}=W\dot{\boldsymbol{q}}+J^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\dot{\boldsymbol{q}}=-W^{-1}J^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{\lambda}}=J\dot{\boldsymbol{q}}-\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow J\dot{\boldsymbol{q}}=\dot{\boldsymbol{x}}\end{cases}. \tag{29}$$

これらを連立すると，J が行フルランクである仮定のもとで，

$$\begin{cases}\boldsymbol{\lambda}=-\left(JW^{-1}J^{\mathsf{T}}\right)^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{q}}=W^{-1}J^{\mathsf{T}}\left(JW^{-1}J^{\mathsf{T}}\right)^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}\end{cases} \tag{30}$$

を得る．$\dot{\boldsymbol{q}}$ は (16) で示された重み付き擬似逆行列による解と一致する．

この導出方法は文献 [3] によって言及されており，本稿ではそれを書き下した．