Title	神経回路網の数理(講義ノート)
Author(s)	甘利, 俊一
Citation	物性研究 (1987), 47(6): 571-587
Issue Date	1987-03-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/92421
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

物性研究 47－6（1987－3）

講義ノート

神経回路網の数理

東大・工計数工学　甘　利　俊　一

（1987年2月9日受理）

§0　はじめに

脳の情報処理の機構，とりわけ学習や自己組織能力，記憶などについて，近年物理学を含むさまざまな学問分野で関心が高まってきている。この講義では特に脳の並列処理機構に注目した数理モデルを中心に解説し，その問題点や可能性を考えてゆくことにする。

脳の研究とよばれるものには様々な方法論が考えられるのでここでまず大まかな分類をしておくことにする。大きくわけて三つの方法論があげられる。

(1)　生理学的方法：現実の脳の生理学的機能を調べて実証的データを集め，その機構についての知見を得る。

(2)　構成的方法：上記生理学的情報の詳細にあまりとらわれずにモデルを提案し，その動作を調べる。そこで脳の機能に似たものが見出されればあらためて脳との対応をさぐる。

(3)　脳の計算理論（computational neuro science）：脳の行なっているであろう処理の入出力関係を知ったうえでその内容に必要な計算機能を論ずる。ここで処理の基本は並列的であ

AMARI Shunichi
記録：京大・理　篠本　滋

ると仮定している。

上記の研究方法のうち，特に(2)は物理学者にはなじみ深いところがあろう。系を相互作用する多体系としてとらえ，その中に生じる協力現象を議論するという立場で考えることができるからである。この講義は(2)を中心に構成されている。

§1　ニューロン

人間の情報処理の，まさに中枢的なはたらきをしている脳には，その処理をつかさどる基本的な素子と考えられる神経細胞，即ちニューロンが集約的に配置されている。大脳，脳幹，小脳が主たる部位である。脳内のニューロンの集約の強烈さは典型的には大脳皮質に於てみられよう。大脳皮質はその厚さ数mm，表面積 2×10^3 cm² のなかに 10^{10} 個をこえるニューロンを有しているといわれる。密度でいって１立方ミリ中に数万から十万個ということになり，ヒトの構造の精密さにあらためて感心させられる。さて素子であるニューロンの基本的動作を学ぶにあたり前もって以下のことを念頭においておきたい。それはひとくちにニューロンといってもその形態，機能には様々なものがあることである。ここではそれらの分類には立入らず普遍性（universality）に着眼することにする。

ニューロンは構造に於てその基本要素として，入力信号を受けとる樹状突起（dendrite），受け取った信号を総合して出力信号を作りあげる細胞体（cell body），そして出力信号を他の細胞に伝える軸索（axon）をもっている。軸索の先にシナプス（synapse）があり，他のニューロンの樹状突起あるいは細胞体に間隙（シナプス間隙）をへだてて接している（図１）。

信号の伝達はシナプスの先からアセチルコリン，アドレナリン等の化学伝達物質(transmitter）をシナプス間隙に放出することによって行なわれる。化学物質が放出されるとシナプス間隙をへだてた相手の受容器（receptor）の電位に変化がおこる。その電位変化は細胞体にむけて時間的空間的に減衰を伴いながらも伝わる。そのニューロンに入力している信号が互いに重ねあわされて膜電位が決定されるが，それがそのニューロン固有のしきい値（threshold）を超えると細胞体は脱分極（depolarization）を示しパルスが形成される。そしてそのパルスは軸索を伝わり，シナプスに達し，化学物質を放出して他のニューロンに信号が伝わる。これらの反応に要する時間は通常のニューロンで O（1ms）であり，一度信号を出したニューロンは少しの間パルスを形成できない。この期間を不応期（retractory period）とよび通常 O（1ms）である。受容器に生ずる電位変化はシナプスから放出される化学物質によって符号が決まっているとされており，それが正の場合に興奮性（excitatory），負の場合抑制性（inhibitory）とよばれる。一つのパルスの到着によって生ずる電位変化は短期的にみると一

定であると思われている。

ひとつのニューロンに付随しているシナプスの数はニューロンの形態によってかなりちがうが，それは通常 $10^3 \sim 10^4$ 個にもおよぶことを注意しておこう。 よってニューロンは非常に多くの興奮性，抑制性信号の多数決によって発火を決定していると表現してさしつかえないだろう。但し各入力による「一票」の重みは結合強度によって互いに異なる。

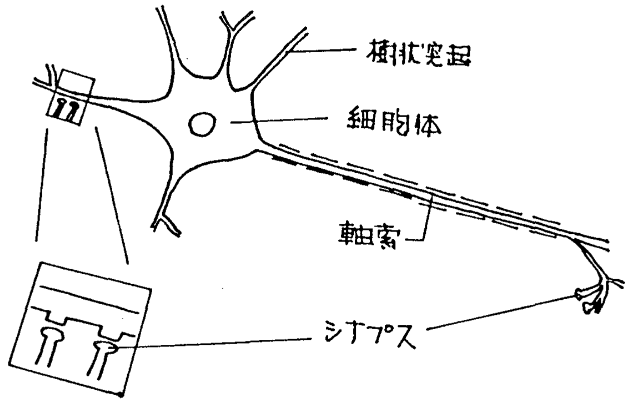

図1　ニューロンの模式図

ニューロンの数学モデル

上に述べたようなニューロンの動作を数学的にモデル化する試みには様々なものがある。実時間のニューロンのふるまいを詳しくモデル化したものもあるがここでは集団の協力現象を明解に議論するためにおもいきって単純化したモデルを導入しておこう。入力信号を $\boldsymbol{x} = (x_1 \cdots x_n)$，出力信号を z であらわすことにする。 これらは短時間的にはパルスの値を表現するものとみなすこともできる。信号に用いられるパルスは，一定のソリトンのようなものであり，ひとつひとつは互いにほとんど同じ形をしている。ひとつのニューロンの信号強度は，いわば FM的にパルス頻度の形で表現される。よって時間を粗視化したレベルで考えてパルス頻度をアナログ量で表現する場合が多い。そうした場合，ニューロンの膜電位の時間変化を以下のように表すことができよう。

$$\tau \dot{u} = -u - u_0 + \sum_i w_i x_i \qquad (1\cdot1)$$

ここで w_i は i 番目入力のシナプス結合であるが，これは前述のように正(興奮性)，負(抑制性)のどちらかをとり得る。定数 τ は緩和の時間スケール，$-u_0$ は静止膜電位，則ちすべての入力がないときにとる値である。この平均的膜電位 $u(t)$ の値に応じてニューロンの出すパルスの頻度 z が定まる。この関係を

$$z = f(u) \tag{1・2}$$

とあらわすことにする。この変換効率をあらわす関数 $f(u)$ は単調増加関数である(図2a)。

これをさらに単純化したモデルとして二値モデルあるいは McCulloch-Pitts モデルがある。それは $f(u)$ を Heaviside の階段関数

$$1(u) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad u > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

で近似し，さらに時間も離散化してしまった

$$z(t+1) = 1\left(\textstyle\sum_j w_j x_j(t) - h\right) \tag{1・3}$$

という発展則である。上式(1・3)にあらわれた h という量は静止膜電位から測った相対的なしきい値とみなすことができる。

§2　ランダムネットワーク

この講義では後に様々な目的に応じてデザインされた神経ネットワークの動的性質を議論するが，そのまえにここではランダムに結合したネットワークを考え，その基本的性質を調べておくことにする。

ニューロンが相互に結合した系を考えるとき1節で述べたひとつのニューロンの出力 z はやがて他のニューロンにとっての入力のひとつ x_j となる。よって個々のニューロンの発火頻度 $x_i(t)$ の時間発展を(1・3)式に従う二値モデルであらわすと

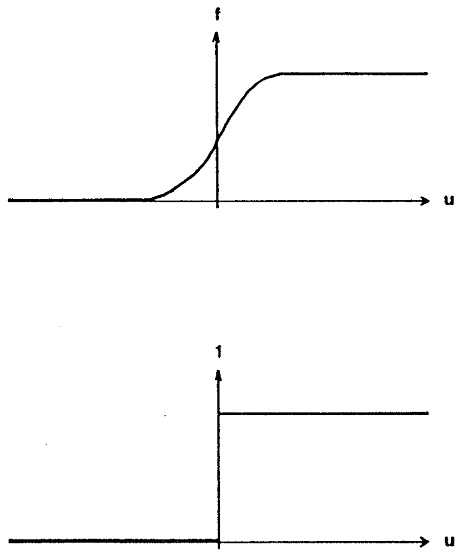

図2　出力パルス頻度への変換関数

$$x_i(t+1) = 1\left(\textstyle\sum_i w_{ij} x_j(t) - h_i\right) \tag{2・1}$$

となる。ここで $i = 1, 2, \cdots, n$；n はニューロンの総数である。シナプス結合 $\{w_{ij}\}$ は平均 $\overline{w}$，分散 σ_w^2 をもつひと山分布に従って分布しているランダムなものとしよう。しきい値 $\{h_i\}$ の分布も様々なものが考えられるが，ここでは平均 $\overline{h}$ 分散 σ_h^2 に従う正規分布を仮定する。

さて系の状態をあらわす巨視的な量として活性レベル (activity level)

$$a(t)=\sum_j x_j(t)/n \tag{2・2}$$

に注目し，そのダイナミックスを考えることにする。もちろん系の状態はこの活性レベル a を与えるだけではきまらない。系の状態 $\{x_j\}$ がある活性レベル a を与えるという条件のもとでランダムに与えられたとしよう。そうすると入力シグナル

$$u=\sum_j w_{ij}x_j-h_i$$

はその平均と分散が

$$\bar{u}=na\bar{w}-\bar{h} \tag{2・3}$$

$$\sigma_u^2=na\sigma_w^2+\sigma_h^2 \tag{2・4}$$

となり $n\to\infty$ の極限で正規分布に従って分散する。 よって次の時刻にひとつのニューロンが発火する確率は

$$F(a)=\int_0^\infty \mathrm{d}u\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_u}\ \mathrm{e}^{-(u-\bar{u})^2/2\sigma_u^2} \tag{2・5}$$

となる。よって次の時刻の活性レベルはこの $F(a)$ で近似され，統計的誤差は $1/\sqrt{n}$ のオーダーである。ある初期パターンから出発し，系を時間発展させてゆくときに $\{x_i\}$ のパターンの詳細は $\{w_{ij}\}$，$\{h_i\}$ によって決定されてゆくので， $\{x_i(t)\}$ はシナプス結合としきい値に独立ではない。但し「熱力学極限」$n\to\infty$ で (2・3)，(2・4) そして正規分布に変更をきたさないということが期待されるので (Amari. et. al. (1977) を参照) その意味での統計的独立性を仮定し，活性レベル $a(t)$ の時間発展を上記変換で書くことができる。かくして活性レベルのダイナミックス

$$a(t+1)=F(a(t)) \tag{2・6}$$

が得られる。この関数 $F(a)$ はパラメーター (n，$\bar{w}$，σ_w，$\bar{h}$，σ_h) によって単調増加あるいは単調減少となりうる。

傾きがゆるやかな場合は唯一つの固定点

$$a^*=F(a^*) \tag{2・7}$$

が安定であることは容易に理解されよう。単調増加の場合，パラメーターの変化で傾きを増してゆくとあるところから３つの固定点が出現するようになる。そのうち，中間にある固定点は不安定であるので系は２安定である。また単調減少の場合に傾きを急にしてゆくと単一の固定点は不安定化し，安定な振動状態が生じる。これらは図３をみるとわかりやすい。以上のことをまとめるとこのようなランダムな神経ネットワークは，その統計パラメーターの選択により３相に分類される。それらはマクロな活性レベルでみた単安定状態，２安定状態，振動状態に対応する。

ここで議論してきたランダムネットワークについては活性レベルのような巨視的な量だけではなくもう少しミクロな情報，例えば静止パターンの数，状態空間でみた遷移図の収束の程度，ミクロな軌道の安定性等についての議論がなされているがそれらは参考文献にゆずることにする。また異なるニューロン集団が相互作用する場合は個々の集団の活性レベルに長周期振動が生じうることが知られている。このことは Amari (1971, 1982), Wilson and Cowan (1972) を参照されたい。

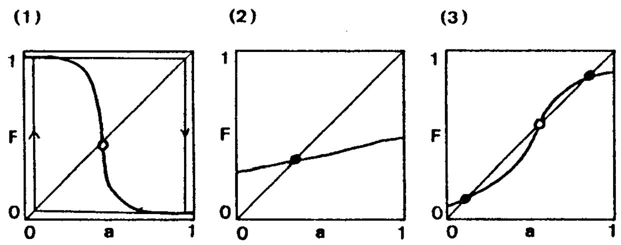

図３　活性レベルのマップ $F(a)$
(1) 振動状態，(2) 単安定状態，(3) ２安定状態
図で●は安定固定点，○は不安定固定点

§３　並列処理の特性

いわゆる von Neumann 型コンピューターは論理演算を目的にしたアーキテクチャーをもっており，原理的にはすべての解ける問題を解くことができる。それはしかしチューリングマシンを考えてみればわかるようにはてしなくまどろっこしい手順を正確に，かつ高速で処理してゆくことで働いているわけである。最近のコンピューターの数値計算などの早さはとうてい人間の追いつけるものではないことは，だれもが知っているが，情報処理というものをそれから少し広く解釈し，パターン認識等を想定するだけでコンピューターの弱みが明らかになる。ちなみに最近の超ＬＳＩの論理ゲートの処理時間は $O(10^{-9}\ \mathrm{sec})$， 人間のニューロンのそれは $O(10^{-3}\ \mathrm{sec})$ であり， この６ケタにもわたる劣性を補うのはアーキテクチャーであろう。

脳の情報処理機構の特質としてまず並列処理があげられる。神経組織の各部でダイナミックスが同時進行し，それらが相互作用してゆくことで処理が進むと考えられる。あるいはそのような描像が成りたたぬくらいに複雑に相互作用しているのかもしれない。この節では神経ということを少しわすれて並列処理の特質をみることにする。

上記 von Neumann 型コンピューターにとってやっかいな問題の例として巡回セールスマンの問題（travelling salesman problem）というものを考えてみる。この問題は以下のように表現される。

n 個の都市を巡回するセールスマンに各都市の間の距離 $\{d_{ij}\}$ が知らされている。このセールスマンがすべての都市を巡回して帰ってくるときの最短経路とそのときの距離の総和 L を求めよ。

ここで距離はお金におきかえてもよかろう。与えられた $\{d_{ij}\}$ に対してすべての都市を一巡する最短経路を求めるために，仮にすべての可能性の経路をしらみつぶしに調べるとすると $O(n!) \sim O((n/e)^n)$ の場合があるわけで，計算の手間は n の多項式 n^{α} にはおさまらない。今のところこの問題を多項式時間で解く解法は知られていない。このように多項式時間では解けないだろうと思われる問題に，くわしい議論は省くがNP問題と云う族がある。このうちもしそれが多項式時間で解ければ他のNP問題に対しても多項式時間の解法の移しかえができるものがあり，NP-complete という。上記セールスマン問題は NP-complete とされている。

上記巡回セールスマン問題は現在の超大型計算機を用いても $n \sim 50$ 程度までしか解くことができない。仮に人間がこれをやるとして２次元的な地図が与えられたとする。そうすると短時間のうちに，正解とはいかずとも比較的短い経路を描いてみせることができるだろう。この場合２次元上に描けるとして視覚的な認識能力も利用していると思われるが，このように「まずまず良しとすることのできる」解をみつける能力にも並列情報処理がひと役かっているようである。

Kirkpatrick らはSKスピングラスの基底状態を求める問題を NP-complete であるとしてその問題を解くことを考え，以下のような方法を提案した。スピングラスのモンテカルロ緩和を考えるのだが，はじめ高温にしておき徐々に冷却する（anneal）のである。そうすると高温の間にいろんな状態を経ながらグローバルな検索をしておき，徐々に低温になるにつれ局所的な検索をし，最後に温度０度でひとつの局所平衡点を見出すことになる。アニーリングを非常にゆっくりやれば正解にたどりつけるだろう。仮に有限の早さで冷却した場合でも十分基底状態に近い解が求まる。この方法を simulated annealing とよぶ。

この方法をセールスマン問題に適用することもできる。スピン系のエネルギー関数としてセ

ールスマン問題に対応したものを作りあげるのである。Hopfield and Tank はそのような目的の評価関数（エネルギー）をもつスピンあるいは神経系を作り，実際にシミュレーションを行なった。その際にやはり上記の simulated annealing とは違って，確率法則は用いずモンテカルロ法のかわりに (1•1)，(1•2) のような微分方程式を用いることで，計算時間の短縮化を行なった。また最近 Fu and Anderson らはLSIの上のゲート配置の合理化の問題をスピン系の自由エネルギーの極小を求める問題に移しかえる方法を示すなど，実用的にも注目される段階に近づきつつある。

§4　連想記憶

前節で述べた並列処理機構の高速性は相関マトリックス記憶に於てもみることができる。この節では連想記憶のモデルの典型的な例として相関マトリックスモデルをとりあげる。いまここにひとつの言葉があって連想をするといったときは，その言葉の意味をおもいうかべ，次にその意味のアドレスで検索を始めるという手順が考えられる。しかしコンピューターとちがってニューロンの処理速度はおそい。それでも瞬時のうちにおこなわれる連想には別の方法がとられているにちがいない。ひとまず上のような高度な連想をわすれて以下のような事を連想と名づけることにしよう。それは即ち，情報空間に k 個のベクトル ($\boldsymbol{x}^1$, …, $\boldsymbol{x}^k$) を考え，各ベクトルについてひとつづつ連想内容を対応させた ($\boldsymbol{y}^1$, …, $\boldsymbol{y}^k$) があるとする。単一の神経ネットワークの中に $\boldsymbol{x}^m$ を入力したら $\boldsymbol{y}^m$ を出力として出す ($m=1,\cdots,k$)，そのような構造を考えそれを連想記憶（associative memory）と名づけることにしよう。簡単化のため，上記のベクトル $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 等が発火頻度のような正定値の要素ばかりでなく負の値をもとり得て（例えばある定数分ひいておけばよい）ベクトル間は大ざっぱにいって直交条件をみたしていると考えよう。則ち

$$\boldsymbol{x}^m \cdot \boldsymbol{x}^{m'} = \sum_i x_i^m x_i^{m'} \sim \delta_{mm'} \tag{4•1}$$

この入力から出力への変換を一回で行なうためには線形変換

$$\boldsymbol{y} = \overleftrightarrow{W} \boldsymbol{x} \tag{4•2}$$

を考え変換行列 $\overleftrightarrow{W}$ として

$$W_{ij} = \sum_m y_i^m x_j^m \tag{4•3}$$

を導入すればよいことがわかる。なぜならば $\boldsymbol{x}^\ell$ ($\ell = 1, 2, \cdots, k$) の入力に対して出力は

$$y_i = \sum_m y_i^m \sum_j x_j^m x_j^l \sim \sum_m y_i^m \delta_{ml} \sim y_i^l \tag{4•4}$$

が期待できるからである。ここで(4•1)～(4•4)では全体にかかる定数を略した。上記直交性(4•1)は必ずしも自然に成立するわけではないが，($\boldsymbol{x}^1$, …, $\boldsymbol{x}^k$)が互いに線形独立ならば一般化された逆行列(pseudo inverse)を作ることで完全な想起ができる。このような変換行列の方法は Kohonen, Anderson, Nakano, Cooper らによって研究されており，相関マトリックスの方法とよばれることがある。入力{$\boldsymbol{x}^m$}に対して出力{$\boldsymbol{y}^m$}が異なるときそれを相互想起型とよび出力{$\boldsymbol{y}^m$}が入力{$\boldsymbol{x}^m$}に等しい場合を自己想起型とよぶ。自己想起は何ら新しい情報を与えないため無駄に思われる。しかし変換に非線形性がはいった場合にこの系は新しい特質をもってくる。非線形力学系のこの特質と安定性は甘利(1972)に論じられているが，Hopfield はこれを統計物理学，とくにスピングラスとの関係で明確に論じた。ここで非線形変換として(1•3), (2•1)のような階段関数を考え，しきい値 h_i として $h_i = \sum_j' w_{ij}/2$ を導入する，則ち

$$x_i \rightarrow 1\left(\sum_j' w_{ij}(x_j - 1/2)\right) \tag{4•5}$$

ここで対称的な表現

$$s_i \equiv 2x_i - 1 \tag{4•6}$$

(すなわち $x_i = 1, 0$ は $s_i = +1, -1$ に対応する)を導入すると(4•5)式は

$$s_i \rightarrow \mathrm{sgn}\left(\sum_j' w_{ij} s_j\right) \tag{4•7}$$

のような簡明なものとなる。後の議論の整合性のために(4•5), (4•7)の $\sum_j'$ は i を除いた和としておく。

この発展則(4•7)は $w_{ij} = w_{ji}$ という対称性を有する場合絶対0度スピン系の緩和過程に類似している。ひとつひとつの要素をこの規則によって順に修正してゆく過程はモンテカルロ過程と同じで，系の「エネルギー」

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i \neq j} w_{ij} s_i s_j \tag{4•8}$$

を単調に減少させてゆくことがわかる。これはその離散的「変分」

$$\Delta E = -\Delta s_i \sum' w_{ij} s_i \tag{4•9}$$

を考えれば明らかである。よってこのEは，系の Lyapunov 関数であり発展はEの「極小」を見出すまで続く。Hopfield はw_{ij}として上述自己相関マトリックス

$$w_{ij} = \sum_m s_i^m s_j^m$$

をとった体系について考察した。その結果，記憶（$\boldsymbol{s}^1, \cdots, \boldsymbol{s}^k$） の間に特殊な相関がなく，記憶の数$k$がニューロンの数$n$に比べて充分小さい限り（$k/n \lesssim 0.15$）各記憶パターン$\{\boldsymbol{s}^m\}_{m=1,\cdots,k}$が系のグローバルな極小点となっていることがわかった。故に入力パターンに少々のあやまりがあってもこの系は自発的にそれを修正してほとんど正しい記憶をとりもどす能力をもっているのである。

この Hopfield モデルは上記のようにひとつひとつの要素の状態修正を遂次行なう過程に対してのみ上記リアプノフ関数がみつかるが，全状態の修正を同時におこなう (synchronous processing) としても実際上充分に働く。そうした場合に記憶のよびだしに要する時間（ステップ数）は極めて短く，通常数ステップで処理が完了する。これも前節と同様に並列処理の利点であろう。このような特質に注目してこのモデルのダイナミックスの検討や改良，生理学との接点を求める研究などがなされている (Hopfield et. al. （1983）及び§6の参考文献)。

§5　学習と自己組織

これまでは組織が形成された後の回路網のモデルについて考察を行なってきた。脳のすぐれた特性には並列情報処理機構の見事さに加えてその自己組織能力があげられる。人間を例にとってもその遺伝情報だけでは$O(10^{14})$個のシナプス結合をもつ脳の回路を決定することができない。我々が子供をみていてわかるように，学習によって徐々に必要な情報がきざみこまれてゆくのである。脳のなかにはコンピューターに用いられているような記憶専用の装置，磁気テープやディスクに相当するものはないと考えられている。RNA の塩基配列を利用しているという説があったが，実証が不完全であり，また問題点も多い為にあまり信じられていない。記憶はシナプス強度の形で備えられているとした説が有力であり，前節のモデルがその一例といえよう。

記憶がシナプス強度の形で備えられるとすると，前節まで単なる定数として扱ってきたシナプス強度$\{w_{ij}\}$は実は時間的に変化してゆく力学変数としてとらえることができる。シナプスが変化しうるということを可塑性 (plasticity) と表現する。現実の脳のシナプス強度の変化の規則は，しかしながらほとんどわかっていない。構成的方法の立場としては仮説をたててその結果のダイナミックスを調べるという立場をとる。この節では二つの典型的な例をみてゆ

くことにする。

パーセプトロン

1961年 Rosenblatt はパターンを分類する為のモデルを提案し，それをパーセプトロン（perceptron）と名づけた。 信号空間のベクトルの集団をaグループ及びbグループという2集団に分類することを考えよう。そのために用いるモデルとして単純パーセプトロンとよばれるものを考える。それは三つのユニットから構成されており，その各々はS（sensory）ユニット，A（association）ユニット，R（response）ユニットと名づけられる（図4）。

その構成をいうとSユニットからランダムにAユニットにむけた結合があり，Aユニットからは，単一のニューロンより成るRユニットに向けた結合がある。A→R の間のシナプス結合のみが変化し得て，このパーセプトロンはやがてaグループの入力のときのみRから出力信号をだすように変化してゆく。上記3ユニットに加えて教師信号というものがある。入力信号がa，bどちらのグループに属するかを教える信号である。

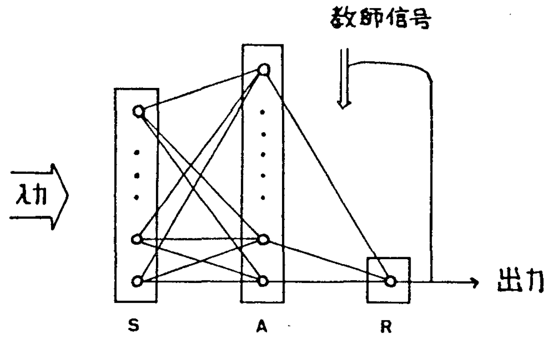

図4　パーセプトロン

S→A の変換をまずわすれて入力によりAユニットに表現された信号空間を考え，そのベクトルを $\boldsymbol{x}$ としよう。Rユニットのニューロンの判断は

$$z = 1(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x} - h) \tag{5・1}$$

に従う。はじめに適当なシナプス結合 $\boldsymbol{w}$ を準備しておくとR はでたらめな結果をだしているであろう。そこで $\boldsymbol{w}$ を徐々に修正してゆくわけだが，その規則として以下のようなものを考えてみよう。

$$\boldsymbol{w}(t+1) = \boldsymbol{w}(t) + \varepsilon(y-z)\boldsymbol{x} \tag{5・2}$$

ここで y は教師信号であり

$$y = \begin{cases} 1 & (\text{a グループの入力 } \boldsymbol{x} \text{ に対し}) \\ 0 & (\text{b グループの入力 } \boldsymbol{x} \text{ に対し}) \end{cases}$$

をとるとする。こうすると出力zが教師信号yに一致していたときには$\boldsymbol{w}$はそのままで出力zが誤まりをおかした場合にのみ修正を加えることになっており，これを誤り訂正法と云う。この方法によると，もしAユニットでの表現$\boldsymbol{x}$のグループが線形分離可能，すなわち

$$\left.\begin{array}{l}\text{a グループの } \boldsymbol{x} \text{ に対し } \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}-h>0 \\ \text{b グループの } \boldsymbol{x} \text{ に対し } \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}-h<0\end{array}\right\} \qquad (5\cdot3)$$

をみたすような$\boldsymbol{w}$が存在するとき，有限個の信号については有限回で正しくはたらくようになることが示される。これをパーセプトロンの収束定理という。上記線形分離可能性とはとりもなおさず2グループのベクトル集団（$\boldsymbol{x}^1$，…，$\boldsymbol{x}^k$）を超平面

$$\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}-h=0 \qquad (5\cdot4)$$

でしきることが可能であることに対応する。

上記線形分離可能性がS層の情報空間で成立しているならS, A の2層を設ける必要性はない。しかしながら，わざわざ分離したいというような信号の集団というのは本来，複雑にまざりあっていると思われる。よって生の入力信号について上記のような線形分離可能性が保障されているとは限らない。そこでSユニットの要素の個数に比べて充分多い要素数のAユニットを準備し，S→A間に非線形変換を行なわせたとしてみよう。S→Aの変換をかなり意図的に作りあげれば線形分離可能になるであろう。もし仮にランダムな変換を行なわせたとしてもSユニットに比べてAユニットの状態空間の次元が高いため，同一個数の信号集団に対して線形分離性が高まることが期待される。このことについての詳細な研究があるが参考文献にゆずることにする。

パーセプトロンは独自の判断でパターン分離を行なうことができないことは教師信号の必要性から明らかである。故にこれは大脳の中心的機能のモデルとはなり得ない。一方小脳は運動制御に深くかかわる器官であり，高速処理の能力を持っている。小脳皮質は大脳に比べてはるかに規則的，周期的であり，構造の詳細も比較的よく認識されている。この小脳の基本的機能がパーセプトロンによく似ているのではないかということを Marr が提案した。Marr の提案によると，小脳にある苔状線維がSのシナプス，グラニュール細胞がA層，プルキンエ細胞がRだと考える。教師信号に対応するものは大脳から連絡されている登上線維だと考える。この仮説を確かめるために Ito などの生理学者はA→R間の結合の可塑性を調べている。

以上教師信号を必要とする組織化のモデルとしてパーセプトロンを例示したが，教師なしで，パターン分離をおこなう方向に自己組織化するモデルも考えられている。特に Fukushimaのコグニトロン（cognitron）等は興味深い性質を備えている。

神経場の自己組織化

ニューロンが配列された場を考え，外界からの入力結合に可塑性を導入した場合に一種の機能分化がおこる場合がある。場の中のニューロン同志は一様等方的な相互抑制型の結合をしていると仮定する。

空間の座標を ξ とし，膜電位の場 $u(\xi, t)$ を考えよう。その時間発展を

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} u(\xi, t) = -u(\xi, t) + \boldsymbol{s}(\xi, t) \cdot \boldsymbol{x} - s_0(\xi, t)\, x_0 + w \circ f[u] \tag{5・5}$$

としてみよう (Takeuchi and Amari 1979)。ここで

$$w \circ f[u] = \int \mathrm{d}\xi'\, w(|\xi - \xi'|)\, f(u(\xi', t)) \tag{5・6}$$

そして $\boldsymbol{x}$ は外部興奮性入力 (n 次元)， x_0 は外部抑制性入力 (1 次元) とする。総合効率 $\boldsymbol{s}$, s_0 は座標に依存しており，ここに可塑性，則ち時間依存性を入れる。 層内相互作用は一様等方性を仮定して距離のみの関数となっている。この層内相互作用は短距離で興奮性，中距離で抑制性，遠距離では相互作用なしとする図５のようなものを仮定する。この種の相互作用は末しょう系でみられやすく，ある点で発火をしたときに近傍の発火をおさえるいわゆる相互抑制型である。これを巨視化した場合は反応拡散系 (Kuramoto 1984 を参照) に類似しており，入力信号がなくとも様々なパターンを形成する能力をもっている。そのため入力信号に対して $u(\xi, t)$ は一義的に決まらない場合があるが，仮に単安定として入力信号 $\boldsymbol{x}$，x_0 に対する場の反応を

$$U(\xi) = \boldsymbol{s}(\xi) \cdot \boldsymbol{x} - s_0(\xi)\, x_0 + w \circ f[U] \tag{5・7}$$

と書くことができるとしよう。ここに多数の信号 $\{\boldsymbol{x}^m\}_{m=1,\cdots,k}$ が入ってくる。 信号を受けとるたびにシナプス効率 $\boldsymbol{s}$，s_0 を変えるという可塑性を導入するわけだが，それを

$$\tau' \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{s}(\xi, t) = -\boldsymbol{s}(\xi, t) + c\boldsymbol{x} f[U] \tag{5・8}$$

$$\tau' \frac{\partial}{\partial t} s_0(\xi, t) = -s_0(\xi, t) + c' x_0 f[U] \tag{5・9}$$

と仮定しよう。式 (5・8) はそのむかし Hebb がとなえた学習方式に類似しており，興奮させようとして，相手が興奮した場合にのみシナプス効率が強化されるということになっている。シナプス効率の変化の時間スケール τ' は場の状態変化の時間スケール τ に比べて充分長いも

のとする。さらに τ' の間に入力されるべき情報がなんどもくりかえし入力されていると仮定すると情報の集合 $\{\boldsymbol{x}^m\}_{m=1,\cdots,k}$ について平均化の手続きがとれる。 その方程式の性質をしらべると以下のようなことがわかる。入力として有限個の入力信号を考え，上述のように入力刺激をくりかえしたとするとシナプス効率の変化が生じ，やがて神経場の中には特定の信号にのみ興奮するような部位が出来てコラムを形成してゆく。

大脳の視覚野には，特定の方向をむいた線に対してのみ反応する細胞や，さらには特定の形に対してのみ反応する細胞があり，複雑細胞，超複雑細胞などとよばれている。生後すぐにはそのような明確な反応はみられないが，子供の成長に伴ってこのような機能分化がおきると考えられている。たて縞のみをみせて育ったネコにはよこ縞に対して反応する細胞がほとんどないということが，ヒューベルとウィーゼルの実験で明らかにされている。

§6　記録者　注

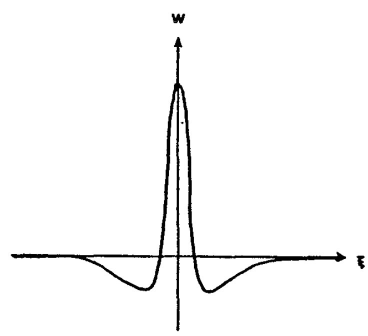

図5　層内相互作用関数

この講義ノートは甘利俊一先生が京大・理　物理教室で行なわれた集中講義（1986年10月23－25日）をもとにして作成したものである。講義は豊富な題材を明解に解説されたものであったが，すべてを文章化するだけのゆとりがなかったので，記録者の独断で修正補足をおこなってこのようなものにした。数式は極力省略し，物理の用語，手法を多めに導入した。興味をお持ちになった方には参考文献を読まれることをおすすめする。また，このノートと少し趣を異にするが甘利先生御自身のお書きになったもの（甘利俊一：電子通信学会誌 1986 / 8 Vol. J 69－D №. 8）があるのでそれも参考になろう。

ノートを作成する際に，ひとつにまとめるための一貫性のようなものが気になって，講義の順序とは独立に構成してみたが，未だに満足がゆかない。これはこの分野の現状でもあろう。対象が壮大すぎるのでひとつの分野としてまとまりきらぬのかもしれないし，また学問分野として若いせいかもしれない。それだけに，様々な機能に着眼してチャレンジもできるし，モデルの理論づけに美しい整合性を求めることもできると思われる。

この分野にも物理学者あるいは元物理学者は大きく貢献してきたようである。記録者の偏見では，情報工学者は脳の情報変換器としての機能に着眼しており，物理学者は脳のミクロコスモス的な構成にあこがれている，といった傾向があるように思える。はたして有効な break through がみつかるかどうかは今後の研究をまたなければならない。 ごく最近の研究にも興

味深いものが多いが，その紹介となると紙数を要し，またさらに博物学的になってしまうと思うのでこの節の参考文献として列挙するに止める。

しのもと　しげる

参　考　文　献

§ 1

伊藤正男，酒田英夫編（1986）「脳科学の新しい展開」岩波書店

岩間吉也，塚原仲晃編（1985）「脳研究最前線」大阪書籍

塚原仲晃編（1984）「脳の情報処理」朝倉書店

福島邦彦（1979）「神経回路と自己組織」共立出版

Eccles JC (1977) *'The understanding of the brain'* (McGraw-Hill, NY)

Kuffler SW, Nicholls JG, Martin AR (1984) *'From neuron to brain'* (Sinauer, Massachusetts)

§ 2

甘利俊一（1978）「神経回路網の数理」産業図書

Amari S (1971) Proc. IEEE **59**: 35–47

Amari S (1974) Kybernetik **14**: 201–215

Amari S, Yoshida K, Kanatoni K. (1977) SIAM J. Appl. Math. **33**: 95–126

Amari S, Arbib MA eds. (1982) *'Competition and cooperation in neural nets'* (Springer, Berlin)

Rozonoer LI (1969) Avtomat Telemekh, **5**: 137–147, **6**: 99–109, **7**: 127–136

Shinomoto S (1986) Prog. Theor. Phys. **75**: 1313–1318

Wilson HR, Cowan JD (1972) Biophysical J. **12**: 1–24

§ 3

Kirkpatrick S, Gelatt CD, Vecchi MP (1983) Science **220**: 671–680

Kirkpatrick S, Toulouse G (1985) J. Physique **46**: 1277–1292

Hopfield JJ, Tank DW (1985) Biol. Cybern. **52**: 141–152

Fu Y, Anderson PW (1986) J. Physics **A19**: 1605–1620

§ 4

Amari S (1972) IEEE Trans. Computers, **C-21**: 1197–1206

Amari S (1977) Biol. Cybern., **26**: 175–185

Cooper LN(1973) in *'Proceeding of the Nobel symposium on collective properties of physical systems'*, eds. B. Lundquist and S. Lundquist (Academic Press, NY)

B. Lundquist and S. Landquist (Academic Press, NY)

Hopfield JJ (1982) Proc. Natl. Acad. Sci. USA **79**: 2550–2558

Hopfield JJ, Feinstein DI, Palmer RG (1983) Nature **304**: 158–159

Kohonen T (1972) IEEE Trans. Comput **C-21**: 353–359

Kohonen T (1984) *'Self organization and associative memory'* (Springer, Berlin)

Little WA (1974) Math. Biosci **19**: 101–120

Nakano K (1972) IEEE Trans. Systems, Man & Cybern. **SMC-2**: 380–388

§ 5

甘利俊一（1978）「神経回路網の数理」産業図書

伊藤正男（1983）「脳をデザインする」医学界新聞編，青土社

福島邦彦（1979）「神経回路と自己組織」共立出版

Amari S (1983), IEEE Trans. Systems, Man & Cybern., **SMC-13**: 741–748

Amari S, Arbib MA eds. (1982) *'Competition and cooperation in neural nets'* (Springer, Berlin)

Fujita M (1982) Biol. Cybern. **45**: 195–206

Fukushima K (1975) Biol. Cybern. **20**: 121–136

Kohonen T (1984) *'Self-organization and associative memory'* (Springer, Berlin)

Kuramoto Y (1984) *'Chemical oscillations, waves, and turbulence'* (Springer, Berlin)

Marr D (1969) J. Physiol. **202**: 437–470

Rosenblatt F (1962) *'Principles of neurodynamics'* (Spartan Books, Washington)

Takeuchi A, Amari S (1979) Biol. Cybern. **35**: 63–72

Widrow B (1964) IEEE Trans. Appl. Industry **83**: 219–277

§ 6

Ackley DH, Hinton GE, Sejnowski TJ (1985) Cognitive. Sci. **9**: 147–169

Amit DJ, Gulfreund H, Sompolinsky H (1985) Phys. Rev. Lett. **55**: 1530–1533

Amit DJ, in *'The physics of structure formation'* (to be published. 1987)

Dotsenko VS (1985) J. Phys. **C18**: L1017–L1022

Fukushima K (1986) Biol. Cybern. **55**: 5–15

Kinzel W (1985) Z. Physics. **B60**: 205–213

Parga N, Virasoro MA (1986) J. Physique **47**: 1857–1864

Parisi G (1986) J. Phys. **A19**: L675–L680

Personnaz L, Guyon I, Dreyfus G, Toulouse G (1986) J. Stat. Phys. **43**: 411–422

Sejnowski TJ, Kienber PK, Hinton GE (1986) Physica **22D**: 260–275

Shinomoto S (1987) Biol. Cybern. to be published

Sompolinsky H, Kanter I (1986) Phys. Rev. Lett. **57**: 2861–2864

Toulouse G, Dehaene S, Changeux JP (1986) Proc. Natl. Acad. Sci. USA **83**: 1695–1698

Tsuda I, Koerner E, Shimizu H (1987) Prog. Theor. Phys. to be published