[計測自動制御学会論文集
Vol. 27, No. 1, 115/121 (1991)]

逐次問題更新型最適化アルゴリズムとその安定性

桐 谷 浩太郎*・相 吉 英太郎**

An Optimization Algorithm for Sequentially Constructed Problems and Its Stability

Kotaro KIRITANI* and Eitaro AIYOSHI**

This paper is concerned with a new type of optimization problems, which are called "sequentially constructed problems". This type of problem is not completely well-defined at a point of time when a optimization algorithm starts, and is sequentially defined with the progress of the iterative algorithm. Such problems arise in an optimization approach integrated parameter identification by observation of system input/output signals.

Currently used algorithm of mathematical programing, such a descent method, is unsuitable to solution to these sequentially constructed problems, because permanence of the problem is prerequisite when the algorithm is performed. In a case when the usual method is applied unconditionally, the convergence and stability of a sequence of trial points obtained by the algorithm cannot be assured.

In this paper, an algorithm for this new type of optimization problems is proposed, and the sufficient conditions for stability and convergence of this algorithm are also given.

Key Words: sequentially constructed problem, optimization algorithm, identification

1. はじめに

最適化問題を各種の数理計画法のアルゴリズムを用いて解く場合，その問題の構造やパラメータの値については，アルゴリズムの実行中変化しないことを前提とするのが一般的である．また，たとえこのような構造的変化やパラメータの数値的変動が生じて解くべき最適化問題自体の更新が必要となる場合でも，これらの変動の速さはアルゴリズムの収束時間に比して十分遅いことを前提として，アルゴリズムが収束した時点で，問題の更新を行い，改めて解き直すのが一般的なアプローチである．

これに対し本論文では，以上のような前提が成り立たない環境，つまり数理計画法のアルゴリズムの反復ごとに解くべき最適化問題の構造，ないしはこれに含まれるパラメータの値が変動するような環境を考え，このような環境下でアルゴリズムが安定的に収束するために，問題の更新に関して課すべき十分条件について考察する．このように解くべき最適化問題の構造やパラメータに関する更新がある条件のもとで行われてさえいれば，特定の最適化アルゴリズムの安定的な収束性が保証できる場合，この種のアルゴリズムを総称して，逐次問題更新型最適化手法のアルゴリズムと呼ぶことにする．

このような逐次問題更新型最適化手法のアルゴリズムの安定性は，たとえば，意志決定問題において試行点に対する決定者の判断を逐次利用しながら実行するマン・マシン対話型のアルゴリズム，あるいは制御問題において，試行的な制御入力を実プラントに与えて得られる出力量から逐次的にパラメータを推定しつつ最適制御入力を探索するアルゴリズム[2)]などを考察するときには不可欠な概念である．それにもかかわらず，この種の議論はこれまでは，パラメータに関しての線形性を前提としたもの[3)~5)]に限られており，一般的なパラメータに関して非線形な問題に関してはほとんどなされていないのが現状である．一方，最適化問題の構造が逐次的に変動する例を分類すれば，目的関数の形状が逐次的に変動する場合と，たとえば制約式が追加されたり削除されたりして制約条件の構造が変動する場合に分けることができる．本論文では，考察の対象を前者の場合に絞り，特に目的関数に新しい関数項が逐次付加されるような問題更新の環境下で最適化手

* 東京大学工学部　東京都文京区本郷 7-3-1
** 慶応義塾大学理工学部　横浜市港北区日吉 3-14-1
* Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo
** Faculty of Science and Engineering, Keio University, Yokohama
(Received May 7, 1990)
(Revised August 14, 1990)

法のアルゴリズムが安定的に収束するための十分条件をあたえる．そのために，逐次更新される目的関数を Lyapunov 関数とみなして，文献 6)の解析手法と同様の手法で，アルゴリズムの安定性を保証している．

2. 問題の定式化と環境設定

本論文では，目的関数として特に一様収束する無限級数で表現される関数

$$\Phi_\infty(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_\infty)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\phi_k(\boldsymbol{x})\left(=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\phi_k(x)\right)\quad \forall\,\boldsymbol{x}\in X \tag{2.1}$$

を考える．ここで変数 $\boldsymbol{x}$ は，n 次元ベクトル，X は，あらかじめわかっている $\boldsymbol{x}$ の存在範囲でコンパクトな集合，関数 $\phi_k(\boldsymbol{x})$，$k=1,2,\cdots$ は非負の値をとる連続微分可能な関数で，ある正数 M について

$$\phi_k(\boldsymbol{x})<M\qquad \forall\,\boldsymbol{x}\in X \tag{2.2}$$

を満たす．また，λ_k，$k=1,2,\cdots$ は任意の正の数とし，

$$\boldsymbol{\lambda}_k=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k) \tag{2.3}$$

とする．

このとき，最適化問題

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\ \Phi_\infty(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_\infty) \tag{2.4}$$

を考える．ただし，つぎの仮定が成立するものとする．

［仮定 1］ 最適化問題(2.4)の解 $\boldsymbol{x}^0$ が存在し，かつその最小値はゼロ，すなわち

$$\Phi_\infty(\boldsymbol{x}^0\,;\,\boldsymbol{\lambda}_\infty)=0$$

が成り立つ．

$\lambda_k\phi_k(\boldsymbol{x})\geq 0$，$k=1,2,\cdots$ により，この仮定は $\boldsymbol{x}^0$ が無限個の最適化問題

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\ \phi_k(\boldsymbol{x}),\quad k=1,2,\cdots \tag{2.5}$$

の共通の解であって，かつ $\phi_k(\boldsymbol{x}^0)=0$，$k=1,2,\cdots$ であることを仮定していることと等価である．したがって，方程式 $\phi_k(\boldsymbol{x})=0$ の解集合を

$$X_k^0=\{\boldsymbol{x}\,|\,\phi_k(\boldsymbol{x})=0,\ \boldsymbol{x}\in X\} \tag{2.6}$$

とするとき仮定 1 のもとで問題(2.4)は，解集合 X_k^0，$k=1,2,\cdots$ に共通の要素を見つける問題と等価になることがわかる．

さて，問題(2.4)を解く環境を以下のように設定する．まず，問題(2.4)を構成する関数項 $\phi_1(\boldsymbol{x}),\phi_2(\boldsymbol{x}),\cdots$ のうち，適当な最適化手法のアルゴリズムを適用してこれを解こうとするとき，陽にその関数形が与えられているものは $\phi_1(\boldsymbol{x})$ のみであるとする．すなわち，アルゴリズムの実行開始時点において，想定できる問題は，

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\ \lambda_1\phi_1(\boldsymbol{x})=\min_{\boldsymbol{x}\in X}\ \Phi_1(\boldsymbol{x}\,;\,\lambda_1) \tag{2.7}$$

であり，任意に選んだ初期試行点 $\boldsymbol{x}^1$ から最小化のアルゴリズム，たとえば，最急降下法を開始するには，この問題の目的関数 $\Phi_1(\boldsymbol{x}^1\,;\,\lambda_1)$ を減少させる方向に更新点 $\boldsymbol{x}^2$ をとらざるをえない．ここではじめて，関数 $\phi_2(\boldsymbol{x})$ に関する情報が入手でき，目的関数

$$\Phi_2(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_2)=\lambda_1\phi_1(\boldsymbol{x})+\lambda_2\phi_2(\boldsymbol{x}) \tag{2.8}$$

が構成されるものとする．以下，同様にしてアルゴリズム実行中更新点 $\boldsymbol{x}^k$ が生成された時点において，ある種の学習効果により $\phi_k(\boldsymbol{x})$ に関する情報が入手でき，目的関数 $\Phi_k(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_k)$ が構成されるものとする．すなわち，初期試行点 $\boldsymbol{x}^1$ から，現在の試行点 $\boldsymbol{x}^k$ まで $k-1$ 回のアルゴリズムの反復を経た時点では，$\phi_1(\boldsymbol{x}),\phi_2(\boldsymbol{x}),\cdots,\phi_k(\boldsymbol{x})$ が既知で，$\phi_{k+1}(\boldsymbol{x}),\phi_{k+2}(\boldsymbol{x}),\cdots$ が未知である．ここで，(2.1)式の $\boldsymbol{k}$ とはアルゴリズムの反復回数を表わす．このような問題の応用としては，逐次データ追加型非線形最小自乗法[1]を挙げることができる．

具体的には，静的システムのパラメータ同定問題を考えることができる．まず，任意に与えられた入力 $\boldsymbol{u}$ に対して出力 $\boldsymbol{y}$ が観測できる実システムに対して，

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}\,;\,\boldsymbol{\theta}) \tag{2.9}$$

を満たす未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を含むモデルを想定する．

ここで $\boldsymbol{u}\in R^r$，$\boldsymbol{y}\in R^m$，$\boldsymbol{\theta}\in R^p$ とし，$\boldsymbol{f}$ は $R^r\times R^p\to R^m$ なる非線形関数で，その関数形は陽に与えられているものとする．また，実システムから得られる入出力データ $(\boldsymbol{u}^k,\boldsymbol{y}^k)$，$k=1,2,\cdots$ に対して

$$\boldsymbol{y}^k=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^k\,;\,\theta^0),\quad k=1,2,\cdots \tag{2.10}$$

を満たす θ^0 が存在するものとする．すなわち，

$$\phi_k(\boldsymbol{\theta})=\|\boldsymbol{y}^k-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^k\,;\,\boldsymbol{\theta})\|^2 \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_\infty(\boldsymbol{\theta}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_\infty)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\phi_k(\boldsymbol{\theta})=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\|\boldsymbol{y}^k-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^k\,;\,\boldsymbol{\theta})\|^2 \tag{2.12}$$

とおき，未知パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ をあらためて x とみなすと $\boldsymbol{\theta}^0$ は問題(2.4)の解となる．

ただし，真のパラメータ θ^0 を決めようとするとき，問題(2.4)を解くための計算手法開始時点で使用できる入出力データは $(\boldsymbol{u}^1,\boldsymbol{y}^1)$ のみであるとし，この時点で設定できる問題は，

$$\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}\ \lambda_1\|\boldsymbol{y}^1-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^1\,;\,\boldsymbol{\theta})\|^2 \tag{2.13}$$

であるとする．ただし，ここで Θ は，あらかじめわかっているパラメータの存在範囲とする．さらに，アルゴリズムを反復的に実行した結果未知パラメータの試行点 $\boldsymbol{\theta}^i$ が決まった時点で初めて入出力データ $(\boldsymbol{u}^i,\boldsymbol{y}^i)$ が得られ問題

$$\min_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}\ \Phi_i(\boldsymbol{\theta}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i)=\sum_{k=1}^{i}\lambda_k\|\boldsymbol{y}^k-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^k\,;\,\boldsymbol{\theta})\|^2 \tag{2.14}$$

を設定することができるものとする．以上のように考えればパラメータ同定問題は本論文で述べる逐次問題更新型最適化アルゴリズムの具体的な応用問題となる．

3. アルゴリズムの構成

問題(2.4)に対する逐次問題更新型最適化アルゴリズムとしてつぎのような手順を考える．

Step 1　初期値 $\boldsymbol{x}^1$, $\lambda_1>0$ を与え，$i=1$ とおく．

Step 2　i 番目の関数 $\phi_i(\boldsymbol{x})$ を得る．

Step 3　$i\neq 1$ のときは，$\Phi_{i-1}(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_{i-1})$, $\phi_i(\boldsymbol{x})$ から，$\lambda_i>0$ をきめる．$i=1$ のときにかぎり $\Phi_0(\boldsymbol{x}\,;\,\lambda_0)=0$ として Step 4 へ行く．

Step 4　$\phi_i(\boldsymbol{x})$, λ_i を利用して，関数

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i)=\Phi_{i-1}(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_{i-1})+\lambda_i\phi_i(\boldsymbol{x}) \tag{3.1}$$

を構成する．

Step 5

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}^{i+1}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i)<\Phi_i(\boldsymbol{x}^i\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i)-\gamma(\|\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^0\|) \tag{3.2}$$

を満たす $\boldsymbol{x}^{i+1}$ をみつける．ただし，γ は，

$$\gamma(\sigma)\begin{cases}=0, & \sigma=0\,;\\ >0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{3.3}$$

を満たす連続関数とする．

Step 6　$i=i+1$ として Step 2 へもどる．

ただし，アルゴリズムの収束性と関連する Step 2 における λ_i と Step 5 における連続関数 γ の決定法については，それぞれ 4.3 節，および 4.4 節で述べることにする．

なお，静的システムのパラメータ同定問題に，このアルゴリズムを適用すると Step 2 の部分は，

Step 2-1　$\boldsymbol{u}^i$ をランダムに発生させそれを実システムに入力し，それに対応する出力 $\boldsymbol{y}^i$ を観測する．

Step 2-2　$(\boldsymbol{u}^i, \boldsymbol{y}^i)$ をモデル $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^i\,;\,\boldsymbol{\theta})$ に代入し評価関数

$$\phi_i(\boldsymbol{\theta})=\|\boldsymbol{y}^i-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^i\,;\,\boldsymbol{\theta})\|^2 \tag{3.4}$$

を構成する．

となる．

4. アルゴリズムの安定性と収束性

4.1 アルゴリズムの性質

提案したアルゴリズムの安定性に関する性質を表わす二つの概念を Lyapunov の安定論[6]に準じた形で定義する．

【定義 1】(安定性)　3 章のアルゴリズムは，以下のような場合に $\boldsymbol{x}^0$ のまわりで安定であると定義する．任意の ε に対し，ある δ が存在し，$\|\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^0\|<\delta$ なる初期点 $\boldsymbol{x}^1$ から始めたアルゴリズムで生成される点列 $\{\boldsymbol{x}^i\}$ が

$$\|\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^0\|<\varepsilon \qquad i=N, N+1, \cdots$$

を満たす自然数 N が ε と独立に存在する．

これは，適当な初期点から出発すればイテレーションがある数 N 以上のところでは，どんなに小さな ε に対しても試行点と $\boldsymbol{x}^0$ との距離を ε 以下にできることを意味する．

【定義 2】(収束性)　3 章のアルゴリズムは，以下のような場合に $\boldsymbol{x}^0$ に収束すると定義する．

（i）　アルゴリズムが $\boldsymbol{x}^0$ のまわりで安定．

（ii）　任意の初期点 $\boldsymbol{x}^1(\|\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^0\|\leq r)$ より出発した点列 $\{\boldsymbol{x}^i\}$ が，$i\geq\tilde{N}(\mu,r)$ なる任意の自然数 i について

$$\|\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^0\|\leq\mu$$

となるようなある r が存在するとともにそのような自然数 $\tilde{N}(\mu,r)$ を任意の $\mu>0$ と r に対して指定できる．

これは，直観的にはどんなに小さな μ に対しても，それに応じたある数 $\tilde{N}$ が存在し，それから先のイテレーションでは試行点と $\boldsymbol{x}^0$ との距離を μ 以下にできることを表わしている．

以下では，提案したアルゴリズムが以上のような性質をもつための十分条件を求める．

4.2 必要な仮定と補題

提案したアルゴリズムの安定性，および収束性を証明するためにいくつかの仮定と補題を示す．

（仮定 2）　ある自然数 N が存在し，

$$\phi_i(\boldsymbol{x})=0 \qquad i=1, 2, \cdots, N \tag{4.1}$$

を満たす $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}^0$ のみである．

この仮定は，安定性を保証するために仮定 1 を強化したものである．また，$\Phi_i(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i)$ の上限についてもつぎの仮定をおく．

（仮定 3）　任意の自然数 i について，

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i)\leq\beta(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\|) \qquad \forall\,\boldsymbol{x}\in X \tag{4.2}$$

が成り立つ連続で非減少な関数 β ($\beta(0)=0$) が存在する．

この仮定 3 は，つぎの補題 1，2 により数列 $\{\lambda_i\}$ がある条件を満たすときは存在することが保証される．

［**補題 1**］　数列 $\{\lambda_i\}$ を適当に選べば (2.1)式の $\Phi_i(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i)$ は $i\to\infty$ で連続関数に収束する．

（証明）　(2.2)式より任意の i について，

$$M>\phi_i(\boldsymbol{x}) \qquad \forall\,\boldsymbol{x}\in X \tag{4.3}$$

が成り立つ．ここで，任意の定数K, rを用いて

$$\lambda_i\leq r^iK \qquad (0<r<1) \tag{4.4}$$

とすると，

$$0<\lambda_i\phi_i(\boldsymbol{x})\leq r^iKM \qquad \forall\,\boldsymbol{x}\in X \tag{4.5}$$

となる．したがって，

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i \phi_i(\boldsymbol{x})| \leq \sum_{i=1}^{n} r^i KM \quad (4.6)$$

が成り立つ．これは，(4.6)式の左辺が

$$\Phi_n(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi_i(\boldsymbol{x}) \quad (4.7)$$

の優級数になっていることを表わしている．一方，(4.6)式の右辺は $n\to\infty$ で有限値 $KM\cdot\dfrac{r}{1-r}$ に収束するので，(4.7)の級数で定義される関数列 $\{\Phi_n(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_n)\}$ は一様収束する．したがって，各 $\Phi_n(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_n)$ が連続であるのでそれが収束する関数 $\Phi_\infty(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_\infty)$ もまた連続となる．

［補題2］ 数列 $\{\lambda_i\}$ を適当に選べば，仮定3の関数βが存在する．

（証明） (4.4)式のように $\{\lambda_i\}$ を選ぶと，補題1より Φ_∞ が存在し，これに対して

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i) \leq \Phi_\infty(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_\infty) \qquad i=1,2,\cdots,\ \forall \boldsymbol{x}\in X \quad (4.8)$$

が成り立つ．ここで，

$$\beta(r) \equiv \max_{\|\boldsymbol{\xi}\|\leq r} \Phi_\infty(\boldsymbol{\xi}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_\infty) \quad (4.9)$$

とおくと，βは連続かつ非減少な関数であり，

$$\Phi_\infty(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_\infty) \leq \beta(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\|) \qquad \forall \boldsymbol{x}\in X \quad (4.10)$$

が成り立つ．ゆえに，(4.8)，(4.10)式より

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i) \leq \beta(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\|) \qquad \forall \boldsymbol{x}\in X,\ i=1,2,\cdots \quad (4.11)$$

が成り立つ．

Kを十分大きく，rを1に十分近くとれば，この条件は $\{\lambda_i\}$ のほとんどの選び方において成り立つ．

さらに，$\Phi_n(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_n)$ の下限についてつぎの補題3が成り立つ．

［補題3］ 仮定2の N について，

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i) \geq \alpha(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\|) \qquad \forall \boldsymbol{x}\in X \qquad i=N,N+1,\cdots \quad (4.12)$$

なる連続で非減少な α ($\alpha(0)=0$) が存在する．

（証明） αを，

$$\alpha(r) = \inf_{i\geq N}\ \min_{\|\xi\|\geq r,\,\xi\in X} \Phi_i(\boldsymbol{\xi}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i) \quad (4.13)$$

とおくと，$\phi_i(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i)$ の連続性などからαは連続で非減少な関数となる．このとき，(4.13)式の定義より，任意の自然数 $i\geq N$ について，

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i) \geq \alpha(\|\boldsymbol{x}\|) \qquad \forall \boldsymbol{x}\in X \quad (4.14)$$

が成り立つことは明らか．

以下では，これらの仮定および補題を用いて，提案したアルゴリズムの安定性と収束性を文献6)の解析法に準ずる形式で保証する．

4.3 安定のための十分条件

提案したアルゴリズムの安定性の十分条件に関して，つぎの定理が成り立つ．

《定理1》（安定性のための十分条件） 提案したアルゴリズムにおいて，仮定2，3が成り立つとする．このとき，数列 $\{\lambda_i\}$ を，

$$0 < \lambda_i \leq \frac{\Phi_{i-1}(\boldsymbol{x}^{i-1}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_{i-1}) - \Phi_{i-1}(\boldsymbol{x}^i\,;\,\boldsymbol{\lambda}_{i-1})}{\phi_i(\boldsymbol{x}^i)} \qquad i\neq 1 \quad (4.15)$$

$$\lambda_1 = \text{任意の正数} \qquad i=1 \quad (4.16)$$

のように取るならば，このアルゴリズムは定義1の意味で $\boldsymbol{x}^0$ のまわりで安定となる．

（証明） 仮定3，補題3より，

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i) \leq \beta(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\|) \qquad \forall \boldsymbol{x}\in X,\ i=1,2,\cdots \quad (4.17)$$

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i) \geq \alpha(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0\|) \qquad \forall \boldsymbol{x}\in X,\ i=N,N+1,\cdots \quad (4.18)$$

なる連続な非減少関数 $\alpha, \beta(\alpha(0)=0,\ \beta(0)=0)$ が存在する．βの連続性から任意のεに対して

$$\alpha(\varepsilon) > \beta(\delta) \quad (4.19)$$

を満たすδが存在する．もしここで $\|\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^0\| < \delta(\varepsilon)$ ならば，(4.17)式より

$$\beta(\delta) \geq \beta(\|\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^0\|) \geq \Phi_1(\boldsymbol{x}^1\,;\,\boldsymbol{\lambda}_1) \quad (4.20)$$

が成り立つ．ここで，(4.15)式より

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}^i\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i) \leq \Phi_{i-1}(\boldsymbol{x}^{i-1}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_{i-1}) \qquad i=1,2,\cdots \quad (4.21)$$

が成り立つので，(4.20)式より，

$$\beta(\delta) \geq \Phi_1(\boldsymbol{x}^1\,;\,\lambda_1) \geq \Phi_i(\boldsymbol{x}^i\,;\,\boldsymbol{\lambda}_i) \qquad i=1,2,\cdots \quad (4.22)$$

また，(4.18)式より，

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}^i\,;\,\lambda_i) \geq \alpha(\|\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^0\|) \qquad i=N,N+1,\cdots \quad (4.23)$$

ゆえに，(4.19)，(4.22)，(4.23)式より

$$\alpha(\varepsilon) > \alpha(\|\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^0\|) \qquad i=N,N+1,\cdots \quad (4.24)$$

αは非減少関数であるから，

$$\varepsilon > \|\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^0\| \qquad i=N,N+1,\cdots \quad (4.25)$$

よって，このときアルゴリズムは定義1の意味で安定となる．

この安定性の証明ではγについて言及していないことに注意する．γを適当に選ぶことによって収束性を保証することもできることをつぎに示す．

4.4 収束のための十分条件

提案したアルゴリズムの収束性についてつぎの定理が成り立つ．

《定理2》（収束のための十分条件） 提案したアルゴリズムについて，仮定2，3が成り立つとする．この

とき，(3.3)式の γ が存在するならば，このアルゴリズムは定義2の意味で収束する．

(証明)　定理1より，任意の ε に対して，$\alpha(\varepsilon)>\beta(\delta)$ なる δ が存在し，$\|\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^0\|\leq\delta$ を満たす初期点 $\boldsymbol{x}^1$ から始めたアルゴリズムにおいて

$$\|\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^0\|\leq\varepsilon \qquad i=N, N+1, \cdots \tag{4.26}$$

が成り立つ．

この δ について，$0<\mu<\|\boldsymbol{x}^1-\boldsymbol{x}^0\|<\delta$ を満たすある μ を任意にとる．このとき，この μ に対して β の連続性より

$$\beta(\nu)<\alpha(\mu) \tag{4.27}$$

なる ν が存在する．このとき，α，β の定義より，$\beta(\xi)\geq\alpha(\xi)\ \forall\xi$ であること，および $\alpha(\mu)>\beta(\nu)$，$\alpha(\varepsilon)>\beta(\delta)$ の関係と α，β の単調性，さらに $\delta>\mu$ を用いると $\nu<\varepsilon$ であることが容易にわかる．これから，ν と ε の関係と(3.3)式より

$$0<c<\min_{\nu\leq\xi\leq\varepsilon}\gamma(\xi) \tag{4.28}$$

なる c を選び出せる．さらに，この c を用いて

$$\tilde{N}\equiv\left[\frac{\beta(\varepsilon)}{c}+N\right]+1 \tag{4.29}$$

を定義する．ただし，c の選び方は，μ，δ に依存するのでこの式の $\tilde{N}$ も μ，δ に依存する．また，[　] はガウス記号である．

ここで，$N\leq m\leq\tilde{N}$ の範囲に $\|\boldsymbol{x}^m-\boldsymbol{x}^0\|\leq\nu$ なる m が存在することを背理法によって示す．

$N\leq m\leq\tilde{N}$ なるすべての m について $\|\boldsymbol{x}^m-\boldsymbol{x}^0\|>\nu$ とする．α の単調性と補題3から，$m=\tilde{N}$ の場合を考えると

$$\alpha(\nu)\leq\alpha(\|\boldsymbol{x}^{\tilde{N}}-\boldsymbol{x}^0\|)\leq\Phi_{\tilde{N}}(\boldsymbol{x}^{\tilde{N}};\ \boldsymbol{\lambda}_{\tilde{N}}) \tag{4.30}$$

が成り立つ．一方，(3.2)，(3.3)，(4.28)式より，

$$\begin{aligned}&\Phi_N(\boldsymbol{x}^N;\ \lambda_N)-\Phi_{\tilde{N}}(\boldsymbol{x}^{\tilde{N}};\ \lambda_{\tilde{N}})\\&\quad=\sum_{i=N}^{\tilde{N}-1}\{\Phi_i(\boldsymbol{x}^i;\ \lambda_i)-\Phi_{i+1}(\boldsymbol{x}^{i+1};\ \lambda_{i+1})\}\\&\quad\geq\sum_{i=N}^{\tilde{N}-1}\gamma(\|\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^0\|)\geq(\tilde{N}-N)c\end{aligned} \tag{4.31}$$

となる．この式と，仮定3から，

$$\begin{aligned}\Phi_{\tilde{N}}(\boldsymbol{x}^{\tilde{N}};\ \boldsymbol{\lambda}_{\tilde{N}})&\leq\Phi_N(\boldsymbol{x}^N;\ \boldsymbol{\lambda}_N)-(\tilde{N}-N)c\\&\leq\beta(\|\boldsymbol{x}^N-\boldsymbol{x}^0\|)-(\tilde{N}-N)c\end{aligned} \tag{4.32}$$

さらに，$\|\boldsymbol{x}^N-\boldsymbol{x}^0\|<\varepsilon$ であるから，

$$\Phi_{\tilde{N}}(\boldsymbol{x}^{\tilde{N}};\ \boldsymbol{\lambda}_{\tilde{N}})\leq\beta(\varepsilon)-(\tilde{N}-N)c \tag{4.33}$$

ここで，(4.29)式から，

$$\frac{\beta(\varepsilon)}{c}+N<\tilde{N} \tag{4.34}$$

$$\beta(\varepsilon)-(\tilde{N}-N)c<0 \tag{4.35}$$

であるので，

$$\Phi_{\tilde{N}}(\boldsymbol{x}^{\tilde{N}};\ \boldsymbol{\lambda}_{\tilde{N}})<0 \tag{4.36}$$

これと，(4.30)式より，

$$\alpha(\nu)\leq\Phi_{\tilde{N}}(\boldsymbol{x}^{\tilde{N}};\ \boldsymbol{\lambda}_{\tilde{N}})<0 \tag{4.37}$$

となる．これは，$\alpha(\nu)$ の性質に反する．以上から，$\|\boldsymbol{x}^m-\boldsymbol{x}^0\|\leq\nu$ を満たす $N\leq m\leq\tilde{N}$ なる m が存在する．

この m に対して，$j\geq m$ なる任意の自然数 j を考えると，補題3，(4.15)，仮定3より

$$\begin{aligned}&\alpha(\|\boldsymbol{x}^j-\boldsymbol{x}^0\|)\\&\quad\leq\Phi_j(\boldsymbol{x}^j;\ \boldsymbol{\lambda}_j)\leq\Phi_m(\boldsymbol{x}^m;\ \boldsymbol{\lambda}_m)\leq\beta(\|\boldsymbol{x}^m-\boldsymbol{x}^0\|)\end{aligned} \tag{4.38}$$

ここで，$\|\boldsymbol{x}^m-\boldsymbol{x}^0\|<\nu$ であるから，β の単調性より

$$\alpha(\|\boldsymbol{x}^j-\boldsymbol{x}^0\|)\leq\beta(\|\boldsymbol{x}^m-\boldsymbol{x}^0\|)\leq\beta(\nu) \tag{4.39}$$

がいえる．さらに $\beta(\nu)<\alpha(\mu)$ より，

$$\alpha(\|\boldsymbol{x}^j-\boldsymbol{x}^0\|)<\alpha(\mu) \tag{4.40}$$

が成り立つ．α は非減少関数であるから，$j\geq m$ なる任意の自然数 j について，

$$\|\boldsymbol{x}^j-\boldsymbol{x}^0\|<\mu \tag{4.41}$$

が成り立つ．$\tilde{N}\geq m$ であるから，(4.41)は $j\geq\tilde{N}$ なる自然数 j についても成り立つ．よって，アルゴリズムは定義2の意味で $\boldsymbol{x}^0$ に収束する．

以上の証明においては，γ は与えられるものとした．実際には，つぎのように考える．

(仮定2)の N を用いて，γ を

$$\gamma(\sigma)\equiv\inf_{i\geq N}\min_{\sigma=\|\xi-\boldsymbol{x}^0\|}\varepsilon\Phi_i(\xi;\ \lambda_i) \tag{4.42}$$

と定義する．ここで，ε は，あらかじめ定めた適当に小さい正の数とする．このように，γ を定義すると，$i\geq N$ なる i に対して

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}^{i+1};\ \lambda_i)<\Phi_i(\boldsymbol{x}^i;\ \lambda_i)-\varepsilon\Phi_i(\boldsymbol{x}^i;\ \lambda_i) \tag{4.43}$$

を満たすように $\boldsymbol{x}^{i+1}$ をとれば，この $\boldsymbol{x}^{i+1}$ は

$$\Phi_i(\boldsymbol{x}^{i+1};\ \lambda_i)<\Phi_i(\boldsymbol{x}^i;\ \lambda_i)-\gamma(\|\boldsymbol{x}^i-\boldsymbol{x}^0\|) \tag{4.44}$$

を満たす．したがって，3章で示したアルゴリズムの Step 5 の $\boldsymbol{x}^{i+1}$ の更新は，実際には，(4.43)式を用いて行えばよい．

5.　数値計算例

数値例として，静的システムのパラメータ同定問題をとりあげる．まず，つぎのようなモデルを考える．

$$y=\theta_1u_1+\theta_1\theta_2^3u_2 \tag{5.1}$$

ここで，$(u_1, u_2)^T$ が入力ベクトル，y が出力，$(\theta_1, \theta_2)^T$ がパラメータベクトルである．

このモデルは，出力がパラメータに関して非線形なので，パラメータに関して線形なモデルに対する従来の最小自乗法をそのまま適用することはできない．そこで，入力データ $\boldsymbol{u}^i$ の発生と出力データ $\boldsymbol{y}^i$ の観測は，パラメータの試行点 $\boldsymbol{\theta}^i$ が計算された後に行われるものとして，3章のアルゴリズムを適用する．ただし，出力データ $\boldsymbol{y}^i$ の観測はパラメータ真値を

$$\theta_1^0=1.0,\quad \theta_2^0=0.5 \tag{5.2}$$

とし，モデル

$$\boldsymbol{y}^i=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}^i\,;\,\boldsymbol{\theta}^0) \tag{5.3}$$

によって計算で求めることで代行した．パラメータ θ の初期試行点を

$$\theta_1^1=2.0,\quad \theta_2^1=0.8 \tag{5.4}$$

とし，$\lambda_1=1$ としてシミュレーションを行った．このとき，(3.2)式を満たす $\boldsymbol{\theta}^2$ として $\Phi_1(\boldsymbol{x}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_1)$ の最急降下方向を探索し $\boldsymbol{\theta}^2$ を発見した．このとき，$\{\lambda_i\}$ の決定に関して以下のような二つの方法を用いてその結果を比較した．

まず，case 1 として，

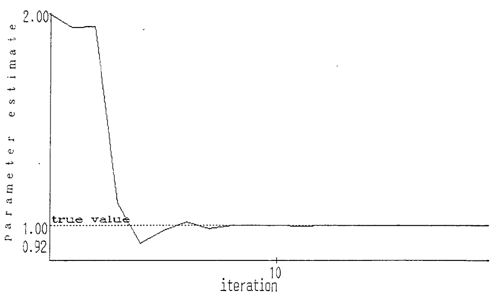
$$\lambda_i=0.9\times\frac{\Phi_{i-1}(\boldsymbol{\theta}^{i-1}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_{i-1})-\Phi_{i-1}(\boldsymbol{\theta}^{i}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_{i-1})}{\phi_i(\boldsymbol{\theta}^i)+0.000001} \tag{5.5}$$

として，安定となる条件下でアルゴリズムを動かした（**Fig. 1**）結果である．ただし，(5.5)式の分母の 0.000001 は，分母が 0 にならないために入れた数である．

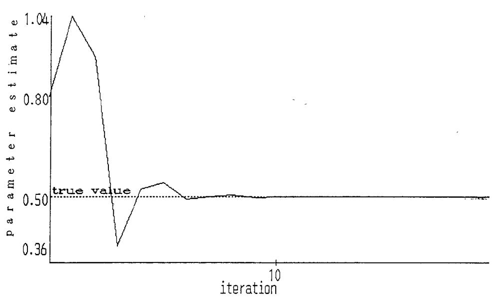
これに対して，case 2 では，

$$\lambda_i=1.1\times\frac{\Phi_{i-1}(\boldsymbol{\theta}^{i-1}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_{i-1})-\Phi_{i-1}(\boldsymbol{\theta}^{i}\,;\,\boldsymbol{\lambda}_{i-1})}{\phi_i(\boldsymbol{\theta}^i)+0.000001} \tag{5.6}$$

とした例である（**Fig. 2**）．

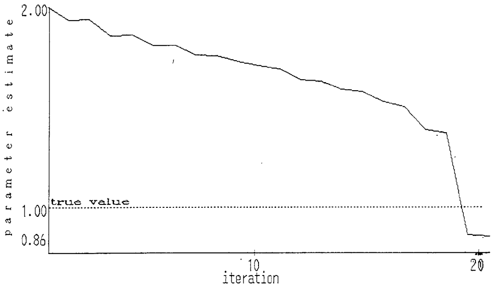


(a) The transition of θ_1

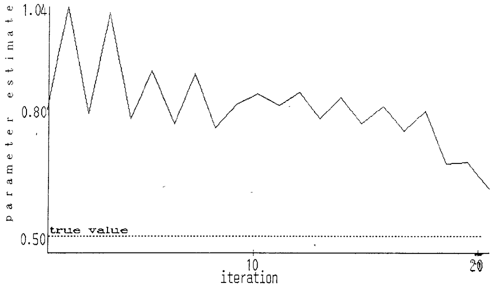


(b) The transition of θ_2

Fig. 1 The transition of parameter estimate



(a) The transition of θ_1



(b) The transition of θ_2

Fig. 2 The transition of parameter estimate

明らかに，安定の条件を満たした Fig. 1 のほうが，満たしていない Fig. 2 よりもスムーズに収束していることがわかる．ただし，上で述べた安定，および収束の条件は，あくまでも十分条件であるから，この条件を満たさないからといって安定性がないとか，収束性がないとかいうことはできないことに注意すべきである．つまり，Fig. 2 (a)，(b) の例は，パラメータが収束しにくい例としての一般性は希薄だが，$\{\lambda_i\}$ の決定の仕方がパラメータの同定の過程に大きく影響を与えることを明示しているという点で有意な例である．

6. おわりに

本論文では，目的関数が最初から与えられるのでなく，逐次的に構成されていくという新しい問題設定に基づく最適化問題を考え，これを解く一手法を提案した．本手法についての問題点は，アルゴリズムの Step 5 における $\boldsymbol{x}^{i+1}$ の発見法が確立していない点である，このため，この $\boldsymbol{x}^{i+1}$ が発見できなくなった場合には，このアルゴリズムはパラメータ真値に至らずにその時点で停止してしまう．とくに，試行点が，その時点における評価関数の極小点に入ってしまった場合には，Step 5 の条件を満たす $\boldsymbol{x}^{i+1}$ をみつけるのは，難しくなると思われる．この場合には，いわゆる多峰

性問題の解決法が必要となる．最後に，本論文を書くにあたり数々の有益な助言を与えてくださった慶応義塾大学理工学部志水清孝教授に深く感謝いたします．

参考文献

1) 桐谷浩太郎：逐次データ追加型非線形最小自乗アルゴリズムとその収束性，第32回自動制御連合講演会前刷，125/126 (1989)

2) P. D. Roberts: An Algorithm for Steady-State System Optimization and Parameter Estimation, Int. J. Systems Sci., **10**-7, 719/734 (1979)

3) P. Eykhoff: System Identification-Parameter and State Estimation, John Wiley and Sons (1974)

4) 相良，秋月，中溝，片山：システム同定，計測自動制御学会 (1980)

5) 市川，金井，鈴木，田村：適応制御，昭晃堂 (1984)

6) R. E. Kalman and J. E. Bertran: Control System Analysis and Design via the "Second Method" of Lyapunov, 1. Continuous-Time Systems and 2. Discrete-Time Systems, Trans. ASME, J. of Basic Engineering, **82**, 371/400 (1969)