

INAOE

Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica

Análisis de sistemas clásicos y cuánticos dependientes del tiempo

Presenta

Alejandro Ricardo Urzúa Pineda

Una tesis sometida como requisito para obtener el grado de Doctor en
ciencias con la Especialidad en Óptica

Bajo la dirección de

Dr. Héctor Manuel Moya Cessa

INAOE

Santa María Tonantzintla,

Puebla

Agosto, 2020



Análisis de sistemas clásicos y cuánticos dependientes del tiempo

presenta

ALEJANDRO RICARDO URZÚA PINEDA

a



Coordinación de Óptica
INSTITUTO NACIONAL DE ASTROFÍSICA, ÓPTICA Y ELECTRÓNICA

Una disertación sometida al Instituto Nacional de Astrofísica,
Óptica y Electrónica de acuerdo con los requerimientos para
el grado de DOCTOR EN FILOSOFÍA CON ESPECIALIDAD EN
ÓPTICA

AGOSTO 2020

14305 palabras
52 encabezados
237 ecuaciones

RESUMEN

Artículos publicados durante el transcurso del doctorado

- [1] Alejandro R. Urzúa, Irán Ramos-Prieto, Francisco Soto-Eguibar, and Héctor Moya-Cessa.
Dynamical analysis of mass–spring models using lie algebraic methods.
Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 540:123193, February 2020.
- [2] Irán Ramos-Prieto, Alejandro R. Urzúa-Pineda, Francisco Soto-Eguibar, and Héctor M. Moya-Cessa.
KvN mechanics approach to the time-dependent frequency harmonic oscillator.
Scientific Reports, 8(1), May 2018.
- [3] Alejandro R. Urzúa, Irán Ramos-Prieto, Manuel Fernández-Guasti, and Héctor M. Moya-Cessa.
Solution to the time-dependent coupled harmonic oscillators hamiltonian with arbitrary interactions.
Quantum Reports, 1(1):82–90, July 2019.
- [4] Alejandro R. Urzúa, Irán Ramos-Prieto, Francisco Soto-Eguibar, Víctor Arrizón, and Héctor M. Moya-Cessa.
Light propagation in inhomogeneous media, coupled quantum harmonic oscillators and phase transitions.
Scientific Reports, 9(1), November 2019.
- [5] I Ramos-Prieto, A R Urzúa, M Fernández-Guasti, and H M Moya-Cessa.
Ermakov-lewis invariant for two coupled oscillators.
Journal of Physics: Conference Series, 1540:012009, April 2020.
- [6] Alejandro R. Urzúa and Kurt Bernardo Wolf.
The u(2) fourier group for rectangular pixellated images.
In *Physical and Mathematical Aspects of Symmetries*, pages 367–373. Springer International Publishing, 2017.

La presente tesis está basada en los primeros cinco artículos.

Esta tesis contiene los resultados de la investigación hecha en tres líneas de trabajo, a saber: *invariantes de sistemas dependientes del tiempo, sistemas oscilatorios y su relación con sistemas ópticos no lineales en propagación*. A través de la presentación de los artículos como capítulos se sigue la concepción, desarrollo y relación entre los diferentes tópicos. Se intentó acomodar el contenido tal que se inice desde los conceptos y presunciones más básicas en el tratamiento de sistemas, clásicos y cuánticos, que evolucionan en el tiempo, llevando los métodos y descubrimientos a la propagación de luz, y su relación con sistemas oscilatorios acoplados.

La Primera Parte (§1) contiene un capítulo. Aborda el estudio de sistemas cuyos elementos, unidos restitutivamente, siguen alguna ley de acoplamiento armónica tal que su matriz de coeficientes puede ser diagonalizada en una base adecuada. Mejor conocidos como *modelos de interacción de próximos vecinos*, estos sistemas totalmente mecánicos, por tanto macroscópicos en primera instancia, presentan características deseables cuando se estudian medios en los cuales una perturbación inicial da lugar a una propagación a través del mismo. Dado que es posible modelar arreglos de elementos periódicos o circulares, lineales o libres, el problema en su solución se reduce a obtener matrices de acoplamientos diagonalizables, ligadas directamente a las características extensivas y geométricas del modelo, como las masas de los elementos y las constantes de acoplamiento. La libertad de poder idear e implementar acoplamientos nos lleva al estudio de sistemas que cumplen o que están contenidos en conjuntos de simetrías, como el álgebra de rotaciones $\mathfrak{su}(2)$, para el cual, sea la bien conocida representación de oscilador discreto y finito, u otra creación de elementos que cierren el álgebra, su solución analítica o numérica es posible. De lo anterior, se detalla el procedimiento de cálculo basado en propiedades de operadores discretos, de los cuales la solución explícita es obtenida y representada en un espacio de número de elementos, u etiquetas, contra tiempo de interacción.

La Segunda Parte (§2) consta de dos capítulos. Se toma el conocimiento adquirido en §1 de donde se propone el estudio de sistemas mecánicos acoplados, clásicos y cuánticos, que son dependientes en el tiempo de interacción. Estos sistemas interactuantes pueden ser resueltos, ya sea ocupando un esquema híbrido clásico-cuántico como el *Operational Dynamical Modelling* o, llevando los Hamiltonianos de interacción a formas lineales mediante transformaciones de similaridad dependientes del tiempo, de donde ambos esquemas hacen uso de ecuaciones auxiliares conocidas como *funciones invariantes*. El uso de éstos últimos permite obtener soluciones propias de sistemas cuyo tratamiento con métodos tradicionales, como perturbaciones, no es posible, o es muy limitado. La parte se divide en dos secciones. §2.1, o Capítulo 2, versa sobre la solución de un oscilador harmónico con frecuencia de oscilación dependiente del tiempo. Aquí el esquema utilizado permite que utilizando cantidades promedio de los teoremas de Ehrenfest, el Liouvilliano o Hamiltoniano pueda ser extendido a un álgebra auxiliar, volviendo el problema totalmente en forma operacional propia de los métodos de mecánica cuántica. Dado lo anterior, la obtención del invariante de Ermakov-Lewis permite estipular soluciones analíticas o numéricas para formas lineales o hiperbólicas de la frecuencia de oscilación. En §2.2, o Capítulo 3, se extiende el uso de las funciones invariantes para el tratamiento de sistemas de osciladores con acoplamientos arbitrarios dependientes del tiempo. En este aspecto, los sistemas tratados asemejan a aquellos observados en §1. Debido al acoplamiento arbitrario, transformaciones de similaridad dependientes del tiempo son usadas para diagonalizar el Hamiltoniano de interacción, y ya que las funciones invariantes pertenecen al Hamiltoniano original, su presencia asegura la obtención de soluciones analíticas. Se muestra que si el sistema tiene N osciladores acoplados, entonces existen N funciones invariantes ortogonales, entonces, un ejemplo claro para el caso de $N = 2$ es desarrollado en su totalidad.

La Parte Tres (§3) consta de un capítulo. Se aborda un sistema de propagación de luz en medios de índice de refracción graduados (medios GRIN), ya sea modelado mediante dos osciladores acoplados en la posición o mediante la interacción de dos campos cuantizados. La equivalencia entre osciladores armónicos cuánticos acoplados y dos campos cuantizados inter-actuantes, claramente, emergen de la forma en que es llevada la cuantización canónica de los campos clásicos. Habiendo explorado esta equivalencia, se muestran analogías clásicas de estos sistemas con la propagación de luz en medios con índice de refracción cuadráticos anisotrópicos. Esta analogía referida es realizada solucionando un sistema de osciladores acoplados, con ayuda de los métodos descritos en §2, y encontrando su equivalencia con los términos del tratamiento paraxial de luz. Finalmente, debido a la forma en que los campos, u osciladores, se acoplan, el sistema en propagación presenta transiciones de fase, haciendo que uno de los osciladores posea un coeficiente de acoplamiento crítico, llevándolo desde la harmonidad, por la evolución libre, hasta la repulsividad; es decir, tenemos un oscilador harmónico que se vuelve partícula libre y finalmente encaya en un oscilador repulsivo. Cabe aclarar, finalmente, que el término *transición de fase* es usado, no en forma termodinámica, sino para referirse al cambio súbito en los parámetros que describen el estado de un sistema, haciéndolo cambiar de representación y descripción.

*What we know is a drop, what we don't
know is an ocean.*

- Isaac Newton

TABLA DE CONTENIDOS

	Página
Parte Uno	1
1 Publicación: Dynamical analysis of mass-spring models using Lie algebraic methods	2
1.1 Introducción	2
1.2 Procedimiento general	3
1.3 Análisis de arreglos	5
1.3.1 Arreglo Circular	5
1.3.2 Arreglo linear finito	10
1.3.2.1 $m_j = 1$ y $k_j = k, \forall j$	11
1.3.2.2 Interacción tipo Kravchuk	14
1.3.2.3 Acoplamiento binomial	17
1.4 Conclusiones	20
1.A Apéndices	20
1.A.1 Factorización arreglo circular	20
1.A.2 Factorización arreglo Lineal	21
1.A.3 Factorización arreglo Kravchuk	22
1.2 Bibliografía	23
Parte Dos	26
2 Publicación: KvN Mechanics approach to the time-dependent frequency harmonic oscillator	27
2.1 Introducción	27
2.2 Mécanica KvN	28
2.3 Oscilador con frecuencia dependiente del tiempo	31
2.3.1 Casos analíticos: hiperbólico y cuadrático	35
2.3.2 Caso numérico oscilatorio	36
2.4 Conclusiones	38
2.A Apéndices	38

TABLA DE CONTENIDOS

2.A.1	Paréntesis de Lie del Liouvilliano	38
2.A.2	Construcción del Invariante	39
2.B	Acción del operador	41
2.3	Bibliografía	43
3	Publicación: Solution to the Time-Dependent Coupled Harmonic Oscillators Hamiltonian with Arbitrary Interactions	47
3.1	Introducción	47
3.2	Invariante de Ermakov-Lewis para N osciladores acoplados	50
3.3	Dos osciladores acoplados dependientes del tiempo	52
3.4	Conclusiones	57
3.A	Apéndices	58
3.A.1	Transformación del Hamiltoniano por el operador \hat{R}_θ	58
3.2	Bibliografía	60
Parte Tres		65
4	Publicación: Light propagation in inhomogeneous media, coupled quantum harmonic oscillators and phase transitions	66
4.1	Introducción	66
4.2	Óptica paraxial en medios inhomogéneos	68
4.3	Modos invariantes de propagación	73
4.4	Separación de la ecuación de Helmholtz	77
4.5	Conclusiones	78
4.A	Apéndices	79
4.A.1	Acción del operador \hat{R}_θ sobre las eigenfunciones de oscilador	79
4.2	Bibliografía	82
5	Sobre: Aspectos computacionales de esta tesis	86
5.1	Bibliografía	86

PRIMERA PARTE

PUBLICACIÓN: DYNAMICAL ANALYSIS OF MASS-SPRING MODELS USING
LIE ALGEBRAIC METHODS

Physica A **540**, 123193 (2020)

Alejandro R. Urzúa, Irán Ramos-Prieto, Francisco Soto-Eguibar y Héctor M. Moya-Cessa

Resumen

Se presenta el análisis dinámico de sistemas vibracionales. Estos sistemas constan de masas interconectadas por elementos restitutivos con un grado de libertad, dados en diferentes configuraciones geométricas. Se diferencia entre arreglos periódico circular, y lineal finito. La estipulación del problema se hace usando argumentos clásicos, pero implementando métodos de solución encontrados en el tratamiento de sistemas cuánticos.

1.1 Introducción

En mecánica clásica, la descripción dinámica de sistemas acoplados es un tarea bastante bien conocida y desarrollada [1, 2, 3]. Establecido el sistema de ecuaciones dinámicas que surge del análisis de equilibrio, es directo conocer su solución, dadas condiciones iniciales y de frontera, mediante métodos espectrales o de ecuaciones diferenciales. Dentro de los modelos, simples y solubles, que se encuentran para describir fenómenos reales, el arreglo periódico de elementos (partículas) acoplados armónicamente con interacción a primeros vecinos y sujeto a un potencial local, se ha convertido en un modelo fundamental para describir fenómenos de estado sólido de física no-lineal [4, 5]. Es un hecho que, muchas de las ocasiones, un vínculo entre el modelo clásico no está establecido en muchas de las aplicaciones, es decir, muchos tipos de fenómenos no lineales que envuelven dinámicas de cadenas de elementos discretos, están basados en la formulación

clásica de Ya. Frenkel y T. Kontorova [6, 7, 8], que sugiere el uso de este tipo de sistemas no lineales, en su forma simple, para modelar la dinámica estructural de un arreglo cristalino en la vecindad de un núcleo de dislocación [4, 5].

Aún más, el estudio de estos sistemas en particular, que son intrínsecamente clásicos debidos a su naturaleza mecánica macroscópica, pueden ser ligados al estudio de propagación lumínica en arreglos de guías de onda, que a su vez, puede ser descrito en términos clásicos. Previamente, se ha realizado trabajo en arreglos fotónicos para estudiar la analogía entre sistemas cuánticos y la propagación clásica de luz [9, 10, 11]. Bajo este esquema, el sistema de ecuaciones que describe la evolución temporal de la amplitud de oscilación puede ser escrita en términos de operadores que satisfacen ciertas relaciones de conmutación, o paréntesis de Lie [12, 13]. En este sentido, el sistema de ecuaciones de un modelo de acoplamiento cercano a primeros vecinos y con condiciones de frontera periódicas, puede ser modelado como un sistema discreto de Fourier [14]. Por otro lado, los arreglos lineales finitos en ambos paradigmas, lumínicos o mecánicos, muestran una similitud cuando los mismo métodos de análisis son aplicados. Finalmente, la emulación de propiedades cuánticas mediante propagación de luz clásica es algo bien estudiado [14, 11].

La finalidad de este trabajo es tomar algunos, bastante conocidos, sistemas mecánicos acoplados clásicos y obtener su evolución explícita utilizando métodos y técnicas de operadores discretos y finitos, comúnmente encontrados en el análisis de sistemas cuánticos. En la sección §1.2 se establece, de manera general, los principios y postulados teóricos y operaciones sobre los cuáles se obtendrá el análisis de los sistemas propuestos. En la sección §1.3 se analizan los sistemas. §1.3.1 contiene el análisis de un arreglo circular finito, que cuenta con la propiedad de periodicidad sobre sus elementos, la solución que emerge es oscillatoria sinusoidal. §1.3.2 contiene tres casos particulares del arreglo lineal finito, descritos mediante las características que emergen de sus sistema de ecuaciones y, en especial, de sus matrices de acoplamientos asociadas. Se muestra que mientras la matriz de acoplamientos pueda ser diagonalizada en alguna base discreta y finita adecuada, existe solución explícita.

1.2 Procedimiento general

En primera instancia, se describirá el procedimiento general para resolver el problema de un sistema arbitrario con elementos acoplados mediante potenciales armónicos.

La *Ley de Hooke* es el ingrediente principal para describir las interacciones a primeros vecinos de sistemas con potenciales armónicos, no disipativos. Esta ley, para un sistema clásico de masa-resorte, está descrita por una ecuación de fuerza de la forma

$$\mathbf{F}(t) = -k\mathbf{q}(t),$$

donde k es la constante de resorte o *amplitud de acoplamiento* y $\mathbf{q}(t)$ la amplitud del desplazamiento representada por la coordenada canónica dependiente del tiempo. Si se desea describir la

evolución dinámica de este sistema, se utiliza la *Segunda Ley de Newton* para $\mathbf{F}(t)$, con lo cual se obtiene la ecuación de movimiento

$$m\ddot{\mathbf{q}}(t) = -k\mathbf{q}(t).$$

Para un conjunto de $N + 1$ elementos, se obtiene un sistema de ecuaciones de la forma [1]

$$(1.1) \quad m_j\ddot{q}_j + (k_j + k_{j+1})q_j - k_{j+1}q_{j+1} - k_jq_{j-1} = 0,$$

de la cual se ha retirado la sobre entendida dependencia temporal $\mathbf{q}(t) \equiv \mathbf{q} \Rightarrow q_j : q_j(t)$. El índice en (1.1) está en el conjunto $j \in \{0, \dots, N\}$, por tanto, la dimensión del sistema es $d_N = N + 1$. De (1.1) se obtiene toda la dinámica que el sistema pueda presentar, sólo se necesita, finalmente, especificar el conjunto de condiciones iniciales, y de frontera si un caso particular es requerido. Ya que (1.1) es un sistema de $d_N \times d_N$ ecuaciones, éste puede ser dado en una representación matricial, donde hay dos vectores, \mathbf{Q} y $\ddot{\mathbf{Q}}$, que cargan con las posiciones y aceleraciones, respectivamente. Además, existe una matriz, \mathbb{M} , que porta con toda la información de los acoplamientos, esta matriz de coeficientes es el principal quehacer de este trabajo.

Ahora planteamos el problema y la propuesta de solución general. La ecuación (1.1) puede ser escrita entonces en una representación matricial de la forma

$$(1.2) \quad \ddot{\mathbf{Q}} = \mathbb{M} \mathbf{Q},$$

con $\mathbf{Q} \equiv (q_0 \ q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_N)^T$ y, claramente $\mathbf{Q} : \mathbf{Q}(t)$. En los métodos de solución de ecuaciones diferenciales de mecánica clásica, esta ecuación admite una solución dada en términos de una exponencial compleja [15, 16], sin embargo, en vistas de aplicar métodos algebráicos usados en mecánica cuántica, se realiza la siguiente proposición

Proposición 1.2.1. $\mathbf{Q}(t) = \cosh(t\sqrt{\mathbb{M}}) \mathbf{Q}(0)$ es solución del sistema de ecuaciones (1.2).

Claramente la proposición anterior es cierta, ya que si $\exp(it\sqrt{\mathbb{M}})$ es solución de (1.2), la descomposición polar de la exponencial compleja nos conduce a la validez de tal aseveración. $\mathbf{Q}(0)$ es el vector de condiciones iniciales en las amplitudes.

Contando con la proposición (1.2.1), el trabajo ahora se reduce a encontrar una forma de aplicar operacionalmente la función hiperbólica sobre el vector de condiciones iniciales, lo cual resulta en la evolución del sistema. La necesidad e imposición primordial en este punto es asegurar que la matriz de coeficientes \mathbb{M} tenga una estructura adecuada, es decir, que pueda ser diagonalizada, si ésto se cumple, entonces se puede proponer lo siguiente.

Proposición 1.2.2. Si la matriz de coeficientes \mathbb{M} puede ser diagonalizada de la forma $\mathbb{M} = \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{A}^\dagger$, entonces se puede solucionar el sistema (1.2), ya que para una función de matrices se cumple que $f(\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{A}^\dagger) = \mathbb{A}f(\mathbb{B})\mathbb{A}^\dagger$.

La proposición (1.2.2) es la restricción sobre la cual trabajaremos, si ésta no se cumple, entonces no se puede asegurar solución. La identidad funcional sobre la diagonalización de una matriz es común de los métodos algebráicos de mecánica cuántica, para más información véase [17, 13].

Finalmente, con las proposiciones (1.2.1) y (1.2.2), se puede establecer la solución general del problema (1.2)

Proposición 1.2.3. *La solución del sistema $\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbb{M}\mathbf{Q}$ se obtiene operando sobre el vector de condiciones iniciales de la forma $\mathbf{Q} = \mathbb{A}f(\mathbb{B})\mathbb{A}^\dagger\mathbf{Q}(0)$.*

En este punto nos detenemos, ya que la solución final explícita dependerá explícitamente de la naturaleza los de coeficientes \mathbb{M} , y como se verá en las secciones siguientes, esta forma particular nos llevará a diagonalizaciones que nos permitirán encontrar la solución analítica en cada caso.

1.3 Análisis de arreglos

1.3.1 Arreglo Circular

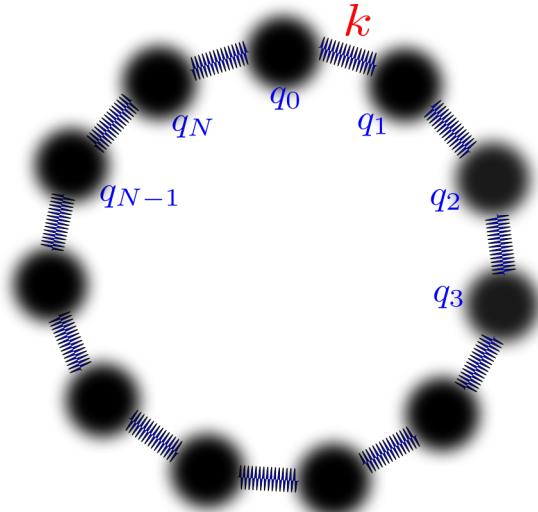


Figura 1.1: Arreglo circular de elementos unidos por acoplamientos de potencial armónico. La interacción a primeros vecinos cumple con la propiedad de periodicidad $q_{N+1+s} = q_s$, $s \in \mathbb{Z}^+$.

Considerando el arreglo finito periódico esquematizado en la figura 1.1, se observa que la disposición circular cumple con la relación modular $q_{N+1+s} = q_s$, $s \in \mathbb{Z}^+$. En esta primera aproximación al análisis dinámico, damos importancia a la amplitud de acoplamiento por sobre la propiedad extensiva individual de los elementos, es decir, la masa. Entonces, haciendo $m_j = 1$ y $k_j \equiv k$, $\forall j$, el sistema de $N + 1$ ecuaciones diferenciales que rigen la dinámica está dado por [1]

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \ddot{q}_0 + k(2q_0 - q_N - q_1) &= 0, \\ \ddot{q}_j + k(2q_j - q_{j+1} - q_{j-1}) &= 0, \\ \ddot{q}_N + k(2q_N - q_0 - q_{N-1}) &= 0. \end{aligned}$$

Es posible, entonces, reescribir el sistema (1.3) en una forma matricial

$$(1.4) \quad \ddot{\mathbf{Q}} = \mathbb{M}_c \mathbf{Q},$$

donde \mathbb{M}_c es la matriz de coeficientes de acoplamiento, descrita en una forma tridiagonal de naturaleza real, además de estar acotada en las esquinas, proveído entonces que el arreglo cierre en un círculo. Esta matriz tiene dimensiones d_N^2 y es representada explícitamente de la forma

$$(1.5) \quad \mathbb{M}_c = k \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ahora, se usa la proposición (1.2.1) para establecer el *ansatz* de solución $\mathbf{Q} = \cosh(t\sqrt{\mathbb{M}_c}) \mathbf{Q}(0)$. En aras de poder resolver este problema de valor inicial, se puede reestructurar la matriz de coeficientes (1.5) tal que sea escrita utilizando los operadores de London $\{\mathbb{V}, \mathbb{V}^\dagger\}$ [14, 18], cuya representación matricial está dada por

$$(1.6) \quad \mathbb{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

así pues, la matriz tridiagonal \mathbb{M} se puede reescribir de la forma $\mathbb{M}_c = k(\mathbb{V} + \mathbb{V}^\dagger - 2\mathbb{I})$. Debido a que \mathbb{M} es la matriz de coeficientes, y nuestra principal tarea es cumplir con la proposición (1.2.2), se puede demostrar que las matrices \mathbb{V} cumplen con la descomposición espectral $\mathbb{V} = \mathbb{F} \Lambda \mathbb{F}^\dagger$ [14, 19], donde \mathbb{F} es la matriz de coeficientes de la transformada discreta de Fourier, la cual es posible representar por la matriz confluente de Vandermonde [19]

$$(1.7) \quad \mathbb{F} = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_N \\ \lambda_0^2 & \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_N^2 \\ \lambda_0^3 & \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \cdots & \lambda_N^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0^N & \lambda_1^N & \lambda_2^N & \cdots & \lambda_N^N \end{pmatrix},$$

de dimensión d_N^2 , donde

$$\lambda_j = \exp\left(i\frac{2\pi}{N+1}j\right), \quad j \in \{0, 1, 2, \dots, N\},$$

es la j -ésima raíz de la unidad, y

$$(1.8) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{pmatrix},$$

es la matriz diagonal de eigenvalores.

Es posible, entonces, operar sobre el *ansatz* de solución con las definiciones (1.6), (1.7) y (1.8) para obtener

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \mathbf{Q}(t) &= \cosh\left(t\sqrt{k(\mathbb{V} + \mathbb{V}^\dagger - 2\mathbb{I})}\right)\mathbf{Q}(0) \\ &= \mathbb{F} \cosh\left(t\sqrt{k(\Lambda + \Lambda^* - 2\mathbb{I})}\right)\mathbb{F}^\dagger\mathbf{Q}(0), \end{aligned}$$

donde se nota que la suma de términos dentro de la raíz cuadrada contiene sólo matrices diagonales.

Ahora usamos la elegante y eficiente notación de Dirac [12] para escribir vectores y matrices en una base finita y discreta. Los vectores en la notación de Dirac, ket $| \rangle$ y bra $\langle |$, forman una base dual, es decir, uno es el transpuesto conjugado del otro. En esta notación los vectores forman una base de Kronecker de dimensión d_N definidos como $|j\rangle := \delta_{n,j}$, $n \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$, significando que, el ket $|j\rangle$ es un vector que tiene ceros en todas las posiciones, excepto en $n = j$. Cuando los kets están en un espacio de Hilbert de dimensión finita, entonces forman una base completa y ortonormal, estos kets son llamados estados de Fock en el ámbito de la mecánica cuántica. Lo anterior, nos habilita a poder escribir el kernel de Fourier (1.7) como un operador \mathbb{F} en términos del producto externo [20]

$$(1.10) \quad \mathbb{F} := \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{n,m=0}^N (\lambda_n)^m |m\rangle \langle n|,$$

para el cuál se verifica la propiedad de inversión $\mathbb{F}^\dagger = \mathbb{F}^{-1}$ [21]. Cumpliendo lo anterior, la parte hiperbólica de (1.9) puede simplificarse, con ayuda de (1.10), debido a que $\Lambda = \sum_{n=0}^N \lambda_j |n\rangle \langle m|$, resulta en (apéndice 1.A.1)

$$(1.11) \quad \cosh\left(t\sqrt{k(\Lambda + \Lambda^*)} - 2\mathbb{I}\right) = \sum_{m=0}^N \cos\left(2t\sqrt{k} \sin\left(\frac{\pi m}{N+1}\right)\right) |m\rangle \langle m|.$$

Hasta este punto, el problema inicial (1.4) está reestructurado y presentado en una notación conveniente en el sentido operacional, sólo queda definir el vector de $N+1$ condiciones iniciales en la posición como una distribución $\mathbf{Q}(0) = \sum_j q_j(0) |j\rangle$, donde $q_j(0)$ es la amplitud inicial en cada posición j entre 0 y N . Utilizando las definiciones (1.10) y (1.11), la ecuación (1.9) se reduce a (apéndice 1.A.1)

$$(1.12) \quad \mathbb{F} \cosh\left(t\sqrt{k(\Lambda + \Lambda^*)} - 2\mathbb{I}\right) \mathbb{F}^\dagger \mathbf{Q}(0) = \frac{1}{N+1} \sum_{m,l=0}^N \cos\left(2t\sqrt{k} \sin\left(\frac{\pi m}{N+1}\right)\right) (\lambda_m)^{n-l} q_l(0) |n\rangle$$

que proyectando sobre el bra $\langle n |$, sumando sobre el mismo índice, y tomando la parte real $\Re\{(\lambda_m)^{n-l}\}$ resulta en

$$(1.13) \quad q_n(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{m,l=0}^N \cos\left(2t\sqrt{k} \sin\left(\frac{\pi m}{N+1}\right)\right) \cos\left(\frac{2\pi m}{N+1}(n-l)\right) q_l(0)$$

Es decir, (1.13) nos muestra la evolución del sistema original (1.3) para cada posición n entre 0 y N . Examinaremos la evolución de un sistema cuando $q_j(0) = A\delta_{j,l}$, de lo cual resulta que $\mathbf{Q}(0) = A|l\rangle$, es decir, existe una perturbación de amplitud A en la posición $j = l$. Para ésto, véase la figura 1.2, donde en un arreglo de $N = 32$ elementos, es decir $d_N = 33$ en total, se evolucionan condiciones iniciales puntuales de amplitud unitaria. De arriba hacia abajo se tienen las condiciones iniciales $\mathbf{Q}(0) = \{|0\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|8\rangle + |24\rangle), |16\rangle\}$. El caso inicial es interesante, porque muestra el efecto periódico del arreglo, ya que perturbando la posición $|0\rangle$ a $t = 0$, lleva a que se propague la perturbación hacia $|1\rangle$, pero también a $|N\rangle$, para un tiempo $t > 0$, entonces se genera un efecto simultáneo de propagación en ambas posiciones, que interfieren para algún tiempo t_{int} , en este caso, alrededor de $t_{int} \sim 20$ s. Los siguientes casos muestran cómo, primero una doble perturbación en posiciones diametralmente opuestas, $|8\rangle$ y $|24\rangle$ generan patrones de interferencias típicos de sistemas ópticos en propagación en medios confinados evanescentes, aunque es un sistema mecánico. Luego, por último, una perturbación diametralmente opuesta a la del caso inicial, se propaga en forma uniforme a través de los elementos vecinos. En general, las perturbaciones puntuales se propagan por todos los elementos vecinos y tienen recombinaciones cuando se topan con el elemento periódico del arreglo, la velocidad de propagación es proporcional a la rigidez del medio, en este caso, a la constante de restitución, $\mathbf{v} \propto k$

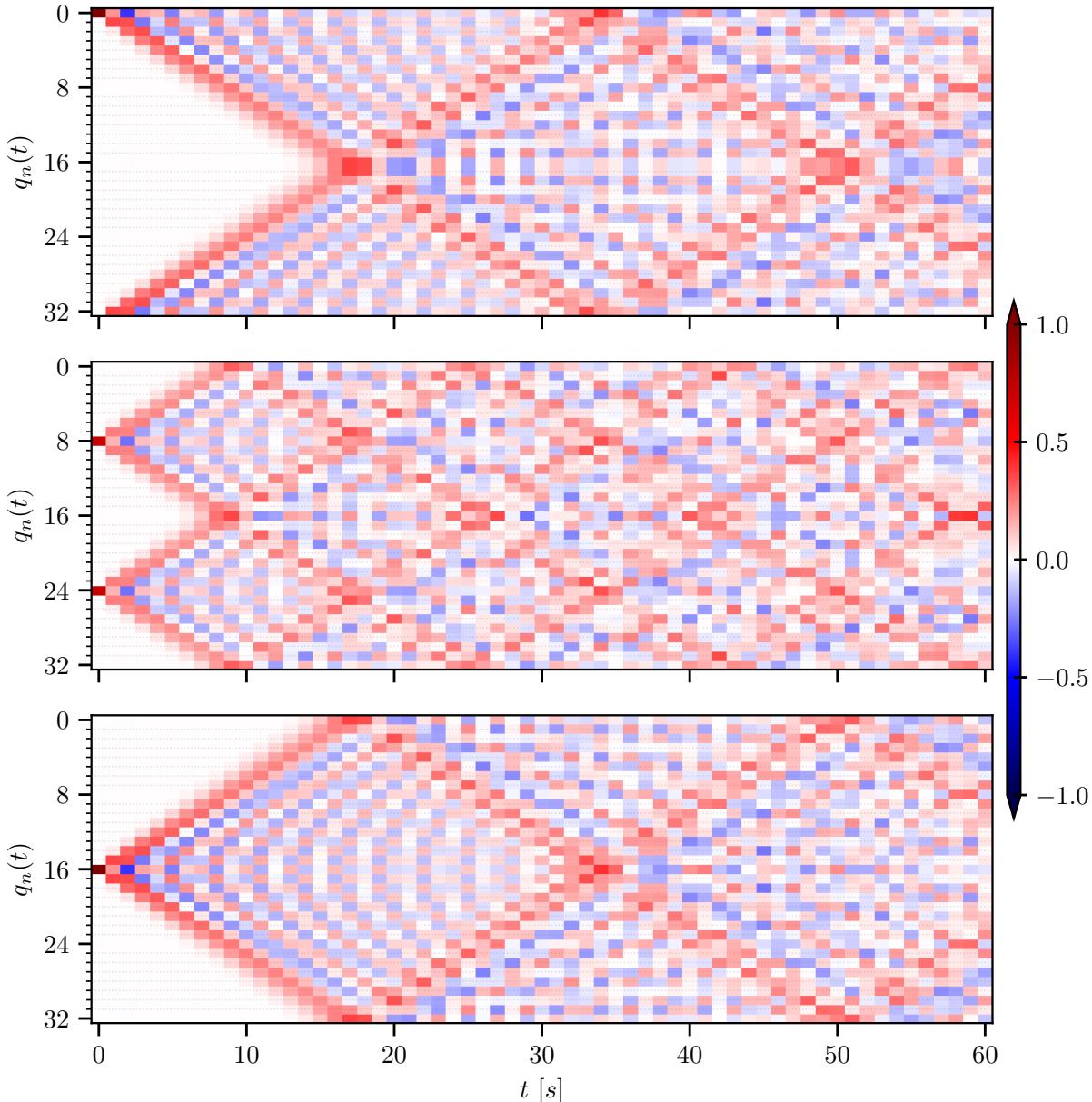


Figura 1.2: Evolución de distintas perturbaciones iniciales en el arreglo circular dictado por la ecuación (1.13). De arriba hacia abajo, las condiciones iniciales son $\mathbf{Q}(0) = \{|0\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|8\rangle + |24\rangle), |16\rangle\}$. Podemos observar una amplitud mínima de alrededor de -0.4 ; además, en la gráfica superior, se nota fácilmente el efecto de la periodicidad del sistema, donde la condición inicial se propaga a su vecina inmediata, pero también a la vecina periódica al final del arreglo.

1.3.2 Arreglo lineal finito

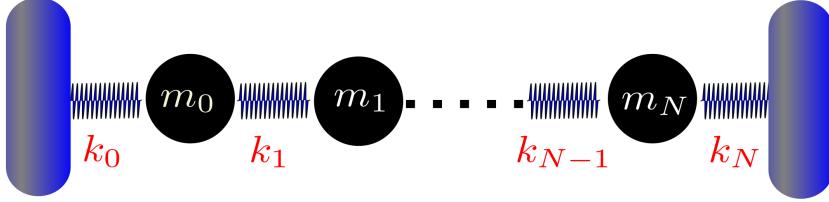


Figura 1.3: Arreglo lineal de elementos unidos por acoplamientos de potencial armónico. La interacción es a primeros vecinos.

Un caso más general al presentado en la sección anterior, responde a remover la propiedad de periodicidad, es decir, se relaja la condición de frontera impuesta en la matriz de interacción \mathbb{M} . Haciendo lo anterior, se tiene un arreglo lineal finito de elementos acoplados a primeros vecinos con un potencial armónico, la dimensión del arreglo es d_N . La figura 1.3 muestra el esquema de este arreglo.

En este caso, donde existen N masas y N coeficientes de restitución, el sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica está dado por [1]

$$(1.14) \quad \begin{aligned} m_0 \ddot{q}_0 + (k_0 + k_1)q_0 - k_1 q_1 &= 0, \\ m_j \ddot{q}_j + (k_j + k_{j+1})q_j - k_{j+1}q_{j+1} - k_j q_{j-1} &= 0, \\ m_N \ddot{q}_N + (k_N + k_{N+1})q_N - k_N q_{N-1} &= 0. \end{aligned}$$

Donde, de nuevo, es posible reescribir (1.14) en forma matricial

$$(1.15) \quad \ddot{\mathbf{Q}} = \mathbb{M}_l \mathbf{Q},$$

con \mathbb{M}_l la matriz de coeficientes, que podemos representar en forma compacta utilizando la notación de Dirac de la forma

$$(1.16) \quad \mathbb{M}_l = - \sum_{j=0}^N \frac{k_j + k_{j+1}}{m_j} |j\rangle\langle j| + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{k_{j+1}}{m_{j+1}} |j+1\rangle\langle j| + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{k_{j+1}}{m_j} |j\rangle\langle j+1|,$$

donde, a su vez, el vector general de amplitudes

$$(1.17) \quad \mathbf{Q}(t) = \sum_{j=0}^N q_j(t) |j\rangle.$$

Utilizando, nuevamente, la proposición 1.2.1, podemos escribir la solución de (1.14) como

$$(1.18) \quad \mathbf{Q}(t) = \cosh t\sqrt{\mathbb{M}_l} \mathbf{Q}(0).$$

La cual es la forma más general de solución, donde, claramente, la dificultad de encontrar la evolución radica en la forma de \mathbb{M}_l , en particular, debido a la proposición 1.2.2, esta matriz debe ser diagonalizable en alguna base adecuada, en este caso en la base de deltas de Kronecker descrita en la §1.1. A continuación se analizan tres casos distintos donde es posible encontrar esta diagonalización en términos de las relaciones funcionales entre m_j y k_j .

1.3.2.1 $m_j = 1$ y $k_j = k$, $\forall j$

En cualquier sistema de interacción, es directo establecer la amplitud de todas las masas y coeficientes de restitución iguales a uno. En este caso $m_j, k_j = 1, \forall j \in \{0, 1, \dots, N\}$. Haciendo ésto, se especifica una dependencia directamente proporcional a través del arreglo. Con las condiciones anteriores, la matriz de interacción \mathbb{M}_l queda especificada de la forma

$$(1.19) \quad \mathbb{M}_l = -2 \sum_{j=0}^N |j\rangle \langle j| + \sum_{j=0}^{N-1} (|j+1\rangle \langle j| + |j\rangle \langle j+1|),$$

donde observamos la forma más general, y sin restricciones de periodicidad que mantengan al arreglo en una configuración circular. Que exista una configuración lineal de extensión finita, implica que el arreglo de masas puede, o no, tener contricciones u anclajes físicos o materiales en los bordes; ésto es, sólo se necesitan condiciones de contorno que mantengan el sistema bien definido. El sistema de ecuaciones (1.14) se reduce entonces a [1]

$$(1.20) \quad \begin{aligned} \ddot{q}_0 + k(2q_0 - q_1) &= 0, \\ \ddot{q}_j + k(2q_j - q_{j+1} - q_{j-1}) &= 0, \\ \ddot{q}_N + k(2q_N - q_{N-1}) &= 0. \end{aligned}$$

Para resolver, procederemos de la forma utilizada en la §1.1 y detallada en [22]. Comenzando por la descomposición espectral de \mathbb{M}_l de la forma

$$\mathbb{M}_l = \mathbb{S} \mathbb{D} \mathbb{S}^{-1},$$

donde la matriz \mathbb{S} está definida como el operador

$$(1.21) \quad \mathbb{S} = \sum_{i,j=0}^N \frac{U_i(y_{j+1})}{\sqrt{\sum_{s=0}^N (U_s(y_{j+1}))}} |i\rangle \langle j|,$$

donde $U_i(x)$ son los N polinomios de Chebyshev del segundo tipo [23]. Además, $y_j = \cos(\phi_j)$, con $\phi_j = \pi j/(N+2)$, son las $N+1$ raíces de los polinomios. La matriz \mathbb{D} es diagonal, con sus elementos dados por [23, 24]

$$\mathbb{D} = 2k \sum_{j=0}^N (\cos(\phi_{j+1}) - 1) |j\rangle \langle j|.$$

Entonces ahora, siguiendo las proposiciones 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3, la solución de (1.18) cuando se cumple (1.19) está dada por la factorización

$$(1.22) \quad \mathbf{Q}(t) = \mathbb{S} \cosh(t\sqrt{\mathbb{D}}) \mathbb{S}^{-1} \mathbf{Q}(0).$$

Utilizando la forma general de la distribución de amplitudes iniciales $\mathbf{Q}(0) = \sum_{l=0}^N q_l(0) |l\rangle$, se obtiene que la evolución del sistema es, apéndice 1.A.2,

$$(1.23) \quad \mathbf{Q}_n(t) = \sum_{n,l,j=0}^N \frac{U_n(y_{j+1}) U_l(y_{j+1})}{\sum_{s=0}^N (U_s(y_{j+1}))^2} \cos\left(2t\sqrt{k} \sin\left(\frac{\phi_{j+1}}{2}\right)\right) q_l(0) |n\rangle,$$

CAPÍTULO 1. PUBLICACIÓN: DYNAMICAL ANALYSIS OF MASS-SPRING MODELS USING
LIE ALGEBRAIC METHODS

y que proyectando sobre el n -ésimo bra $|n\rangle$ se obtiene la evolución individual de cada elemento en el conjunto $\{0, 1, \dots, N\}$

$$(1.24) \quad q_n(t) = \sum_{l,j=0}^N \frac{U_n(y_{j+1})U_l(y_{j+1})}{\sum_{s=0}^N (U_s(y_{j+1}))^2} \cos\left(2t\sqrt{k} \sin\left(\frac{\phi_{j+1}}{2}\right)\right) q_l(0),$$

donde es de notar que el numerador contiene una suma de $N + 1$ polinomios de Chebyshev al cuadrado, que definen un tipo de *normalización* dependiente de la posición de cada elemento en el arreglo. En la gráfica 1.4, se muestran varios casos de perturbaciones iniciales, siguiendo a modo de comparación, se utilizaron las mismas condiciones iniciales que en el caso circular, 1.2, a saber, de arriba hacia abajo: $\mathbf{Q}(0) = \left\{ |0\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|8\rangle + |24\rangle), |16\rangle \right\}$. Se destaca la amplitud negativa, que es de alrededor de -0.7 , a diferencia del arreglo circular que era de alrededor de -0.4 . En la gráfica superior la evolución de la perturbación a primeros vecinos sigue un efecto unilateral, dado que no existe condición de periodicidad.

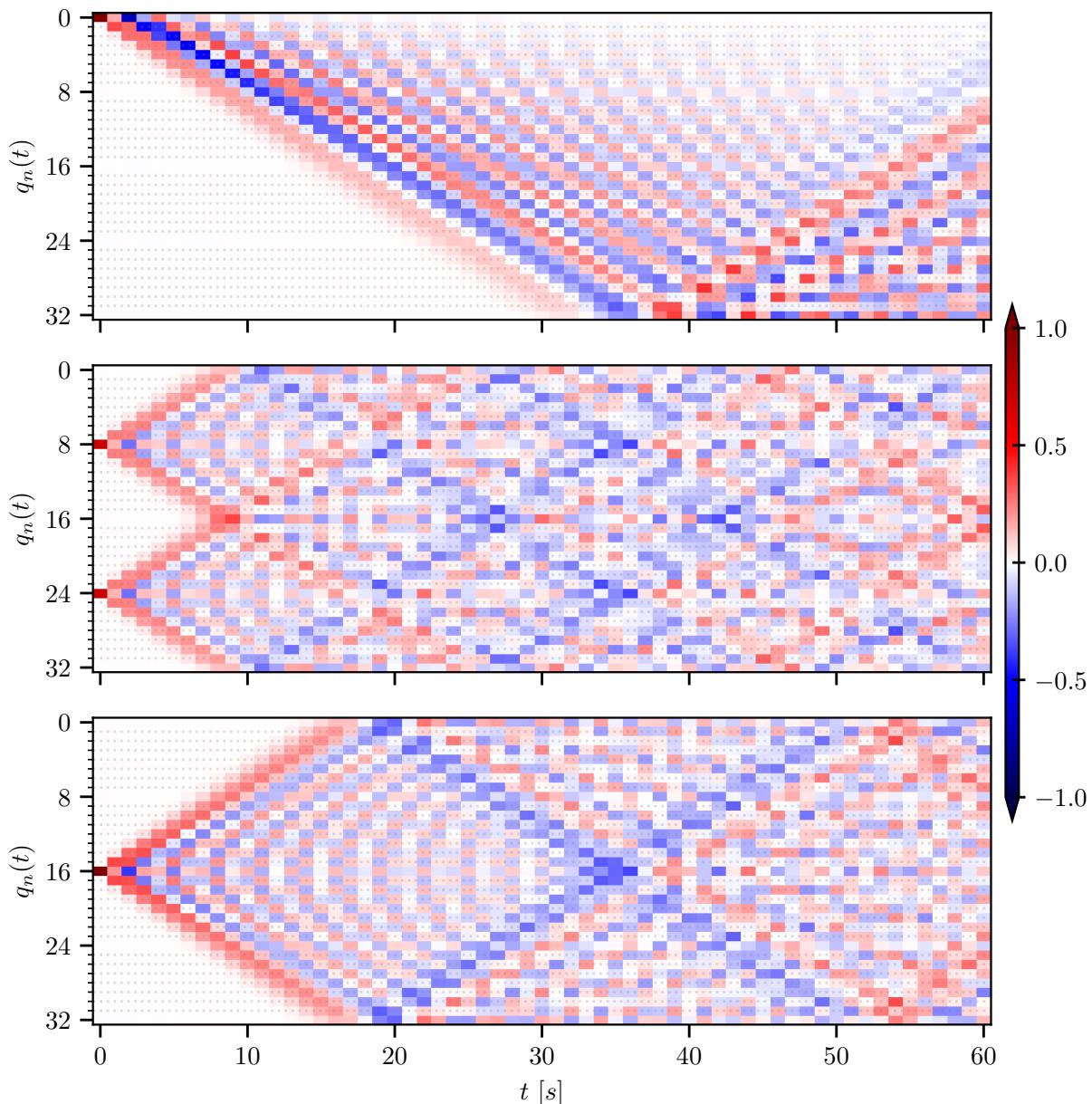


Figura 1.4: Evolución de distintas perturbaciones iniciales en el arreglo lineal dictado por la ecuación (1.24). De arriba hacia abajo, $\mathbf{Q}(0) = \left\{ |0\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|8\rangle + |24\rangle), |16\rangle \right\}$.

1.3.2.2 Interacción tipo Kravchuk

En los casos previamente presentados, arreglo circular §1.3.1 y lineal finito con $m_j = 1$ y $k_j = k$, $\forall j$ §1.3.2.1, destaca que la relación que guardan las masas y las constantes de acoplamiento siguen una ley simple, constante y que resulta en una diagonalización particularmente directa de la matriz de interacción \mathbb{M} .

En esta sección, podemos ir un paso más allá y proponer o idear una matriz de interacción especial, tal que su diagonalización esté dada en término de funciones hipergeométricas, en particular, polinomios ortogonales discretos [25]. Siguiendo a Reigners y su trabajo sobre diagonalización de sistemas acoplados de interacción [26], podemos proponer que \mathbb{M}_l tenga la forma

$$(1.25) \quad \mathbb{M}_l = k \begin{pmatrix} -\alpha_0 & \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_1 & -\alpha_1 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_2 & -\alpha_2 & \beta_3 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \beta_3 & -\alpha_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \beta_N \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_N & -\alpha_N \end{pmatrix},$$

donde los coeficientes siguen las reglas

$$(1.26) \quad \begin{aligned} \alpha_i &:= Np + (1-2p)n, \\ \beta_i &:= \sqrt{p(1-p)} \sqrt{i(N-i+1)}. \end{aligned}$$

Se puede demostrar [] que para el valor $p = 1/2$, los coeficientes (1.26) generan la diagonalización de la matriz (1.25)

$$(1.27) \quad \mathbb{M}_l = \mathbb{U} \mathbb{D} \mathbb{U}^T,$$

donde es la matriz diagonal $\mathbb{D} := -\text{diag}(0, 1, \dots, N)$, y los elementos de matriz de \mathbb{U} están definidos por

$$(1.28) \quad (\mathbb{U})_{i,j} = K_i(j) := \sqrt{\frac{w(j)}{h_i}} k_i(j),$$

con

$$w(j) = \binom{N}{j} p^j (1-p)^{N-j}, \quad h_i = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{\binom{N}{i}}.$$

La función $k_i(j)$ son los polinomios simétricos de Kravchuk, cuyo uso es extensivo en la descripción de una realización particular del oscilador armónico discreto y finito [27, 28]. Estos polinomios están definidos en términos de las funciones Gaussianas hipergeométricas como

$$k_i(j) := {}_2F_1(-j, -i, -N; 1/p),$$

con lo cual, la elección de $p = 1/2$ se justifica ya que, con ésto, se obtienen funciones simétricas que cumplen con la descomposición espectral dada en (1.27).

Utilizando el ansatz dado por las proposiciones 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, la solución de este sistema está dado por

$$(1.29) \quad \mathbf{Q}(t) = \cosh\left(t\sqrt{\mathbb{U}\mathbb{D}\mathbb{U}^T}\right)\mathbf{Q}(0),$$

de donde podemos escribir las matrices \mathbb{U} y \mathbb{D} en la base discreta $|l\rangle$ como

$$(1.30) \quad \mathbb{U} = \sum_{i,j=0}^N K_i(j)|i\rangle\langle j|, \quad \mathbb{D} = -\sum_{i=0}^N i|i\rangle\langle i|.$$

Debido a que \mathbb{D} es diagonal en esta base, es posible, así como en los casos anteriores, establecer la factorización de (1.29) de la forma

$$(1.31) \quad \mathbf{Q}(t) = \mathbb{U} \cosh\left(t\sqrt{\mathbb{D}}\right) \mathbb{U}^T \mathbf{Q}(0),$$

con $\mathbf{Q}(0) = \sum_{l=0}^N q_l(0)|l\rangle$ el vector más general de distribución de amplitudes iniciales. Con ayuda de las matrices (1.30), se puede obtener la solución analítica de (1.31) como (véase apéndice 1.A.3)

$$(1.32) \quad \mathbf{Q}(t) = \sum_{m,n,l=0}^N K_m(n) \cos(t\sqrt{n}) K_l(n) q_l(0) |m\rangle,$$

que proyectando sobre el m -ésimo bra $\langle m|$, se obtiene la solución para cada elemento del conjunto $\{0, 1, \dots, N\}$

$$(1.33) \quad q_m(t) = \sum_{n,l=0}^N K_m(n) \cos(t\sqrt{n}) K_l(n) q_l(0),$$

donde se ve que para cada elemento m , la evolución toma en cuenta todos los demás elementos en su amplitud inicial bajo la suma de $q_l(0)$.

Obtener la solución explícita (1.33) fue un tanto sencilla, ya que es posible obtener la diagonalización de la matriz de coeficientes \mathbb{M}_l en términos de una matriz puramente diagonal \mathbb{D} y las matrices de Kravchuk \mathbb{U} . Es importante remarcar que las funciones (1.28) son soluciones de la discretización del oscilador armónico cuántico realizado en un álgebra $\mathfrak{su}(2)$. Estas funciones son una muy buena aproximación a las funciones de Hermite-Gauss en el espacio discreto y finito del álgebra, véase [29] para más sobre éste tema.

En la figura 1.5, se muestran tres casos de evolución de condiciones iniciales, que son las mismas tratadas en los casos de arreglo circular y arreglo lineal con masas y constantes de acoplamiento iguales, esto es, $\mathbf{Q}(0) = \left\{ |0\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|8\rangle + |24\rangle), |16\rangle \right\}$. A diferencia de los casos anteriores, donde las soluciones resultaban en funciones, ya sea trigonométricas y especiales ortogonales continuas, la solución (1.33) contiene funciones estrictamente discretas en las matrices de Kravchuk, es decir, no hay muestreo implicado, aunque la función trigonométrica si es muestreada para tiempos

discretos. En la figura, el primer caso es revelador ya que dista de los casos anteriores, presenta un perfil de propagación de perturbación unilateral, pero que se mantiene confinado y comienza a dispersarse en el tiempo. Los dos casos siguientes muestran cómo surge la interferencia de perturbaciones, que se vuelve un patrón complejo.

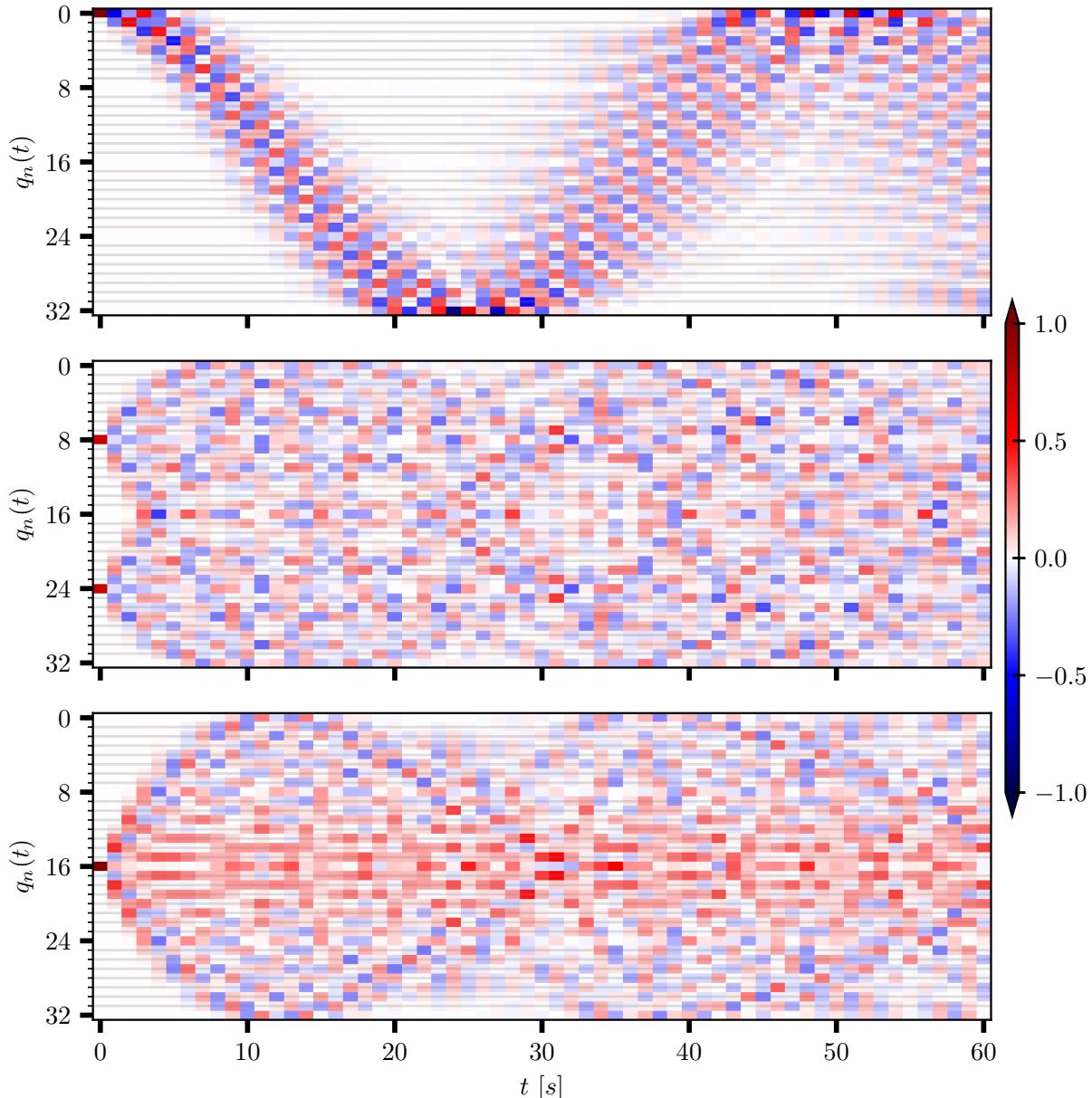


Figura 1.5: Evolución de distintas perturbaciones iniciales en el arreglo lineal dictado por la ecuación (1.33). De arriba hacia abajo, $\mathbf{Q}(0) = \left\{ |0\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|8\rangle + |24\rangle), |16\rangle \right\}$.

1.3.2.3 Acoplamiento binomial

A continuación se idea un acoplamiento que siga una ley binomial, tal que la diagonalización de la matriz de coeficientes \mathbb{M}_l contenga elementos generadores del álgebra $\mathfrak{su}(2)$.

En este caso, se elige que las masas m_j y constantes de restitución k_j sigan leyes, tales que son propuestas siguiendo la idea de que cierren un álgebra que permita encontrar una diagonalización de la matriz de interacción \mathbb{M}_l . Se propone que sean de la forma

$$(1.34) \quad m_j = \binom{N}{N-j}, \quad k_j = jm_j, \quad j \in \{0, 1, \dots, N\},$$

donde es importante notar que m_j está bien definido para todo valor de j , es decir, no existen masas nulas o negativas; sin embargo, existe un elemento k_j nulo cuando $j = 0$. Ésto anterior no es un problema, o un traspié en las declaraciones, simplemente dice que el primer elemento en $j = 0$ está presente con un valor de restitución intrínseco igual a cero, resultando en que la restricción matemática está bien definida. Físicamente, esto significa un arreglo similar al de la figura 1.3, sólo que sin las restricciones materiales de los extremos.

Ahora, podemos establecer la forma explícita de la matriz M_l en la ecuación (1.16) en términos de los coeficientes (1.34), de lo cual resulta que

$$(1.35) \quad \mathbb{M}_l = -N \sum_{j=0}^N |j\rangle\langle j| + \sum_{j=0}^{N-1} (N-j)|j\rangle\langle j+1| + \sum_{j=0}^N (j+1)|j+1\rangle\langle j|,$$

donde la diagonal principal consta de valores constantes $-N$, y las diagonales adyacentes cuentan valores crecientes y decrecientes, de 1 a N y viceversa, respectivamente.

Ahora, debido a que en (1.35) existe una matriz puramente diagonal, es posible encontrar otra matriz central que junto con el par restante cierren un álgebra del tipo $\mathfrak{su}(2)$, y cuyos paréntesis de Lie son

$$[\mathbb{K}_0, \mathbb{K}_-] = -\mathbb{K}_-, \quad [\mathbb{K}_0, \mathbb{K}_+] = \mathbb{K}_+, \quad [\mathbb{K}_+, \mathbb{K}_-] = 2\mathbb{K}_0,$$

donde las matrices generadoras del álgebra son

$$(1.36) \quad \mathbb{K}_0 = \sum_{j=0}^N \left(\frac{N}{2} - j\right) |j\rangle\langle j|, \quad \mathbb{K}_+ = \sum_{j=0}^{N-1} (N-j) |j\rangle\langle j+1|, \quad \mathbb{K}_- = \sum_{j=0}^{N-1} (j+1) |j+1\rangle\langle j|.$$

Entonces, la matriz de coeficientes \mathbb{M}_l resulta en

$$(1.37) \quad \mathbb{M}_l = -N\mathbb{I} + \mathbb{K}_+ + \mathbb{K}_-.$$

Ahora, la tarea es realizar transformaciones unitarias de los generadores (1.36) para poder buscar una diagonalización posible del problema espectral impuesta por la proposición (1.2.3). Utilizando las relaciones de commutación dados por los paréntesis de Lie arriba, descritos, se

obtienen las siguientes transformaciones unitarias

$$(1.38) \quad \begin{aligned} \exp(\alpha\mathbb{K}_+)\mathbb{K}_+\exp(-\alpha\mathbb{K}_-) &= \mathbb{K}_+ - 2\alpha\mathbb{K}_0 - \alpha^2\mathbb{K}_-, \\ \exp(\alpha\mathbb{K}_+)\mathbb{K}_-\exp(-\alpha\mathbb{K}_+) &= \mathbb{K}_- + 2\alpha\mathbb{K}_0 - \alpha^2\mathbb{K}_+, \\ \exp(\alpha\mathbb{K}_+)\mathbb{K}_0\exp(-\alpha\mathbb{K}_+) &= \mathbb{K}_0 - \alpha\mathbb{K}_+, \\ \exp(\alpha\mathbb{K}_-)\mathbb{K}_0\exp(-\alpha\mathbb{K}_-) &= \mathbb{K}_0 + \alpha\mathbb{K}_+, \end{aligned}$$

con lo cual la matriz de coeficientes puede ser transformada, mediante una rotación unitaria, de la forma

$$(1.39) \quad \exp(\beta\mathbb{K}_+)\exp(\alpha\mathbb{K}_-)\mathbb{M}_l\exp(-\alpha\mathbb{K}_-)\exp = -N\mathbb{I} + 2(-\alpha^2\beta - \alpha + \beta)\mathbb{K}_0 + (\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 + 1)\mathbb{K}_+ + (1 - \alpha^2)\mathbb{K}_-,$$

que tal vez pueda parecer engorroso, sin embargo, así como se hizo en el caso de la interacción de Kravchuk, existe una combinación de valores para los cuales resulta en una reducción diagonal, estos valores son $\alpha = -1$ y $\beta = 1/2$, entonces se obtiene

$$(1.40) \quad \exp(\beta\mathbb{K}_+)\exp(\alpha\mathbb{K}_-)\mathbb{M}_l\exp(-\alpha\mathbb{K}_-)\exp = -2\Delta,$$

donde $\Delta = \sum_{j=0}^N j|j\rangle\langle j|$. Si ahora se invierte la ecuación (1.40), la matriz de coeficientes en forma diagonal resulta

$$(1.41) \quad \mathbb{M}_l = -2\exp(\mathbb{K}_-)\exp(-\mathbb{K}_+/2)\Delta\exp(\mathbb{K}_+/2)\exp(-\mathbb{K}_-).$$

La forma diagonal de \mathbb{M}_l ahora nos permite buscar la solución explícita dada por la proposición 1.2.3 como

$$(1.42) \quad \boxed{\mathbf{Q}(t) = \exp(\mathbb{K}_-)\exp(-\mathbb{K}_+/2)\cos\left(t\sqrt{2\Delta}\right)\exp(\mathbb{K}_+/2)\exp(-\mathbb{K}_-)\mathbf{Q}(0).}$$

Claramente, la ecuación (1.42) es una expresión analítica cerrada; sin embargo, su cálculo explícito es un tanto pesado y engorroso. Entonces, podemos realizar una buena aproximación numérica evaluando directamente las exponenciales de las matrices involucradas y aplicando el resultado a la distribución de amplitudes $\mathbf{Q}(0) = \sum_{l=0}^N q_l |l\rangle$.

En la figura 1.6 se muestra la evolución de las tres perturbaciones habituales en esta sección, $\mathbf{Q}(0) = \left\{ |0\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|8\rangle + |24\rangle), |16\rangle \right\}$. Aunque este caso es interesante de resolver desde el punto de vista teórico, ya que se aplican métodos de operadores y grupos habituales en mecánica cuántica, la evolución mostrada dista un poco de ser sencilla de interpretar ya que, en el primer caso, como el coeficiente de restitución se desvanece en $j = 0$, la propagación parece seguir en el mismo elemento durante un tiempo, para luego pasar a los demás vecinos cercanos. Los casos restantes se visualizan un poco dentro de lo esperado, con evolución bilateral e interferencia. Es de notar que, debido a la pérdida de interacción en los bordes, el tiempo de evolución se vio reducido a 10 s para poder mostrar las características de la propagación.

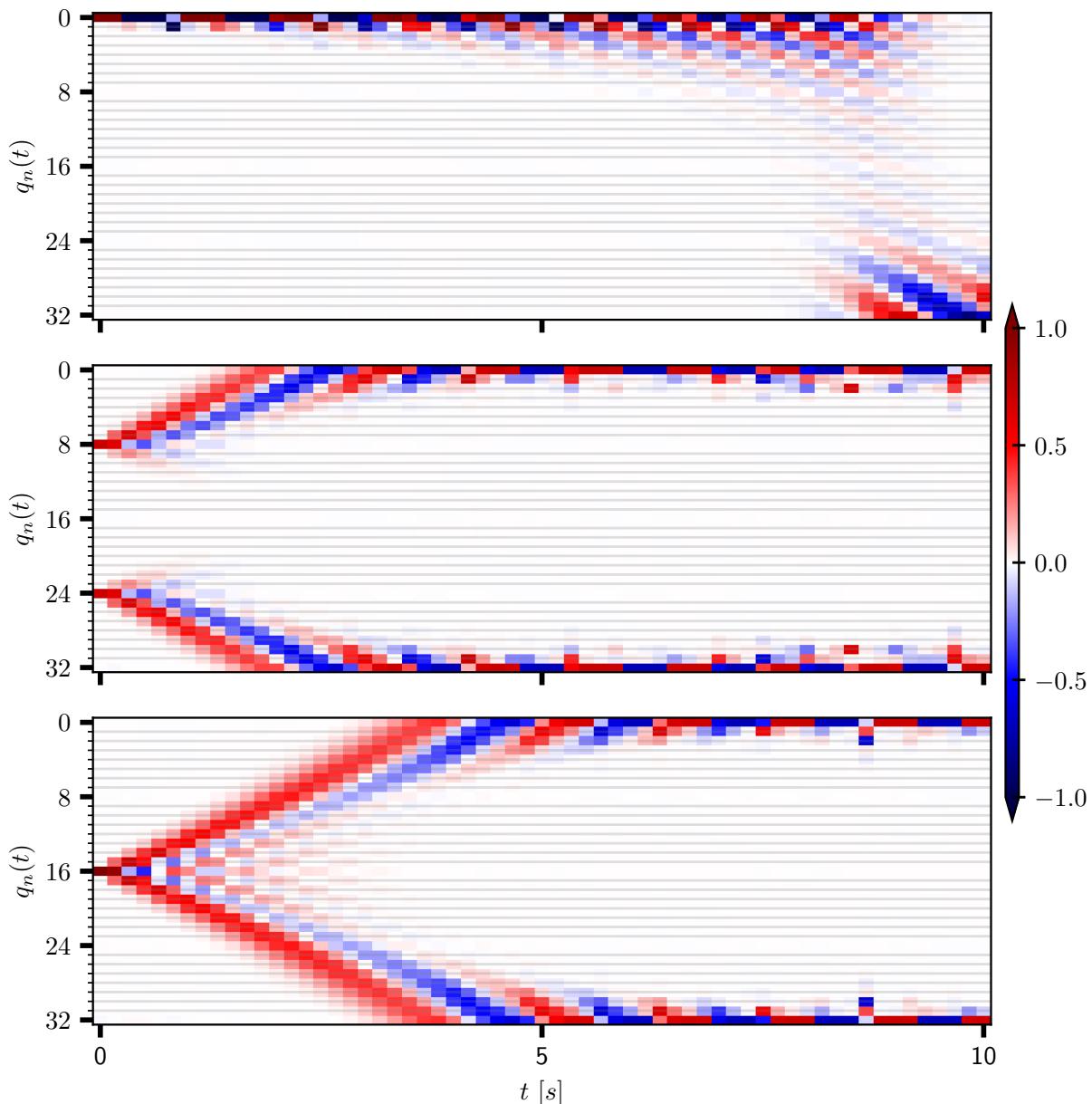


Figura 1.6: Evolución de distintas perturbaciones iniciales en el arreglo lineal dictado por la ecuación (1.42). De arriba hacia abajo, $\mathbf{Q}(0) = \left\{ |0\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|8\rangle + |24\rangle), |16\rangle \right\}$.

1.4 Conclusiones

En este trabajo se presentó un conjunto de sistemas mecánicos de elementos acoplados armónicamente a primero vecinos. La solución de la dinámica de éstos en el tiempo, para diferentes configuraciones geométricas y de acoplamiento, es dada usando métodos matemáticos y argumentos encontrados comúnmente en el análisis y solución de fenómenos cuánticos, en específico, de óptica cuántica, donde el uso de métodos algebráicos basados en grupos y álgebras de Lie es extensivo. Encontramos que la evolución temporal de las amplitudes de elementos en un arreglo de acoplamiento a primeros vecinos, tiene algunos parecidos, cualitativos, con la propagación de luz clásica en arreglos de guías de onda en medios de refractivos. De lo anterior, se puede concluir que en algunos casos en particular, para proporciones específicas entre la masa y la constante de acoplamiento, existe un *isomorfismo*, en el sentido de la equivalencia entre ambos sistemas, mecánico y de radiación. Esta conclusión es relevante ya que motiva la búsqueda de relaciones y analogías entre sistemas de osciladores armónicos acoplados y sistemas que sigan leyes parecidas dadas por las ecuaciones de Schrödinger y Helmholtz [30]. Finalmente, podemos decir con seguridad que el uso de estos métodos algebráicos son totalmente equivalentes a aquellos que siguen los desarrollos y aplicabilidad del análisis de muchos cuerpos en el formalismo Hamiltoniano o Lagrangiano. Sin embargo, creemos que el método propuesto proporciona una simplicidad evidente, ya que es un método matricial que aprovecha el hecho de que la matriz de interacción es totalmente diagonalizable, por lo tanto, admite una descomposición espectral en alguna base discreta y finita adecuada.

1.A Apéndices

1.A.1 Factorización arreglo circular

La factorización del término $\cosh\left(t\sqrt{k(\Delta + \Delta^*) - 2k}\mathbb{I}\right)$, resulta en $\sum_{j=0}^N \cos\left(2t\sqrt{k} \sin\left(\frac{\pi}{N+1}j\right)\right) |j\rangle\langle j|$.

Demostración. Primero utilizamos la definición de las matrices Δ en términos de la base discreta $|j\rangle$, así, tenemos

$$\Delta + \Delta^* \equiv \sum_{j=0}^N (\lambda_j + \lambda_j^*) |j\rangle\langle j|,$$

pero

$$\begin{aligned} \lambda_j + \lambda_j^* &= 2\Re\{\lambda_j\} \\ &= 2\Re\left\{\exp\left(\frac{2i\pi}{N+1}j\right)\right\} \\ &= 2\cos\left(\frac{2i\pi}{N+1}j\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{N+1}j\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{N+1}j\right)^2\right). \end{aligned}$$

Entonces los términos dentro de la raíz resultan en

$$\begin{aligned}
 \sqrt{k(\Lambda + \Lambda^*) - 2k\mathbb{I}} &= \sum_{j=0}^N \sqrt{k(\lambda + \lambda^*) - 2k} |j\rangle\langle j| \\
 &= \sum_{j=0}^N \sqrt{2k \left(\cos\left(\frac{\pi}{N+1}j\right)^2 - \sin\left(\frac{\pi}{N+1}j\right)^2 \right) - 2k} |j\rangle\langle j||j\rangle\langle j| \\
 &= \sum_{j=0}^N \sqrt{2k \underbrace{\left(\cos\left(\frac{\pi}{N+1}j\right)^2 - 1 \right)}_{-\sin\left(\frac{\pi}{N+1}j\right)^2} - 2k \sin\left(\frac{\pi}{N+1}j\right)^2} |j\rangle\langle j| \\
 &= \sum_{j=0}^N \sqrt{-4k \sin\left(\frac{\pi}{N+1}j\right)^2} |j\rangle\langle j| = \sum_{j=0}^N 2i\sqrt{k} \sin\left(\frac{\pi}{N+1}j\right) |j\rangle\langle j|,
 \end{aligned}$$

por lo tanto, se obtiene la factorización

$$\begin{aligned}
 \cosh\left(t\sqrt{k(\Delta + \Delta^*) - 2k\mathbb{I}}\right) &= \sum_{j=0}^N \cosh\left(2ti\sqrt{k} \sin\left(\frac{\pi}{N+1}j\right)\right) |j\rangle\langle j| \\
 &= \sum_{j=0}^N \cos\left(2t\sqrt{k} \sin\left(\frac{\pi}{N+1}j\right)\right) |j\rangle\langle j|
 \end{aligned}$$

■

1.A.2 Factorización arreglo Lineal

El término $\cosh(t\sqrt{\mathbb{D}})$ resulta en $\sum_{j=0}^N \cos\left(2t\sqrt{k} \sin\left(\frac{\phi_{j+1}}{2}\right)\right) |j\rangle\langle j|$

Demostración. La matriz \mathbb{D} está definida en términos de la base discreta $|j\rangle$ como

$$\mathbb{D} = 2k \sum_{j=0}^N (\cos(\phi_{j+1}) - 1) |j\rangle\langle j|,$$

con lo cual se tiene

$$\begin{aligned}
 \cosh\left(t\sqrt{\mathbb{D}}\right) &= \sum_{j=0}^N \cosh\left(t \sqrt{2k \underbrace{(\cos(\phi_{j+1}) - 1)}_{-2\sin\left(\frac{\phi_{j+1}}{2}\right)^2}}\right) |j\rangle\langle j| \\
 &= \sum_{j=0}^N \cosh\left(2ti\sqrt{k} \sin\left(\frac{\phi_{j+1}}{2}\right)\right) |j\rangle\langle j| \\
 &= \sum_{j=0}^N \cos\left(2t\sqrt{k} \sin\left(\frac{\phi_{j+1}}{2}\right)\right) |j\rangle\langle j|
 \end{aligned}$$

■

1.A.3 Factorización arreglo Kravchuk

La factorización del término $\cosh(t\sqrt{\mathbb{D}})$ resulta en $\sum_{j=0}^N \cos(t\sqrt{j})|j\rangle\langle j|$.

Demostración. La matriz \mathbb{D} está definida por

$$\mathbb{D} = -\sum_{j=0}^N j|j\rangle\langle j|,$$

es decir, es una matriz diagonal escalar, lo cual simplifica enormemente el cálculo. Entonces, el término hiperbólico resulta en

$$\begin{aligned}\cosh(t\sqrt{\mathbb{D}}) &= \sum_{j=0}^N \cosh(t\sqrt{-j})|j\rangle\langle j| \\ &= \sum_{j=0}^N \cosh(it\sqrt{j})|j\rangle\langle j| \\ &= \sum_{j=0}^N \cos(t\sqrt{j})|j\rangle\langle j|.\end{aligned}$$

■

1.2 Bibliografía

- [1] Leonard Meirovitch.
Elements of Vibration Analysis.
McGraw-Hill, second edition, 1986.
- [2] Lev Landau and Evgeny Lifshitz.
Course of Theoretical Physics: Mechanics, volume 1.
Butterworth-Heinemann, third edition, 1976.
- [3] G. Kotkin and V. Serbo.
Problemas de mecánica clásica.
Editorial MIR, 1980.
- [4] O. M. Braun and Y. S. Kivshar.
Nonlinear dynamics of the frenkel-kontorova model.
Physics Reports, 306:1–108, 1998.
- [5] P. B. Allen and J. Kelner.
Evolution of a vibrational wave packet on a disordered chain.
Am. J. Phys., 66:497, jun 1998.
- [6] Y. I. Frenkel and T. A. Kontorova.
Phys. Z. Sowietunion, 13, 1938.
- [7] T. A. Kontorova and Y. I. Frenkel.
Zh. Eksp. Teor. Fiz., 8, 1938.
- [8] T. A. Kontorova and Y. I. Frenkel.
Zh. Eksp. Teor. Fiz., 8:89, 1938.
- [9] K. G. Makris and D. N. Christodoulides.
Method of images in optical discrete systems.
Physical Review E, 73:36616, 2006.
- [10] R. Keil, A. Perez-Leija, F. Dreisow, M. Heinrich, H. M. Moya-Cessa, S. Nolte, D. N. Christodoulides, and A. Szameit.
Classical analogue of displaced fock states and quantum correlations in glauber-fock photonic lattices.
Physical Review Letters, 107, aug 2011.
- [11] A. Perez-Leija, H. M. Moya-Cessa, and D. N. Christodoulides.
Optical realization of the atom–field interaction in waveguide lattices.
Physica Scripta, T147:014023, feb 2012.

CAPÍTULO 1. PUBLICACIÓN: DYNAMICAL ANALYSIS OF MASS-SPRING MODELS USING
LIE ALGEBRAIC METHODS

- [12] J. J. Sakurai.
Modern quantum mechanics.
Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [13] Ravinder Puri.
Mathematical Methods of Quantum Optics.
Springer Berlin Heidelberg Imprint Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [14] A. Perez-Leija, L. A. Andrade-Morales, F. Soto-Eguibar, A. Szameit, and H. M. Moya-Cessa.
The pegg–barnett phase operator and the discrete fourier transform.
Physica Scripta, 91:043008, mar 2016.
- [15] William Boyce.
Elementary differential equations and boundary value problems.
Wiley, Hoboken, NJ, 2012.
- [16] Herbert Goldstein.
Classical mechanics.
Addison Wesley, San Francisco, 2002.
- [17] John Neumann.
Mathematical foundations of quantum mechanics.
Princeton University Press Princeton University Press, Princeton, 2018.
- [18] F. London.
Z. Phys., 37:915–925, 1926.
- [19] H. M. Moya-Cessa and F. Soto-Eguibar.
Discrete fractional fourier transform: Vandermonde approach.
IMA Journal of Applied Mathematics, 83(6):908–916, jun 2018.
- [20] A. I. Borisenko.
Vector and tensor analysis with applications.
Dover Publications, New York, 1979.
- [21] M. A. Shubin.
Pseudodifferential operators and spectral theory.
Springer, Berlin New York, 2001.
- [22] F. Soto-Eguibar, O. Aguilar-Loreto, A. Perez-Leija, H. M. Moya-Cessa, and D. N. Christodoulides.
Finite photonic lattices: a solution using characteristic polynomials.
Revista Mexicana de Física, 57:158–161, apr 2011.

- [23] M. Abramowitz and I. A. Stegun.
Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.
Dover, 1964.
- [24] F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark.
The NIST Handbook of Mathematical Functions.
Cambridge Univ. Press, 2010.
- [25] Richard Beals.
Special functions and orthogonal polynomials.
Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom, 2016.
- [26] G. Regniers and J. V. der Jeugt.
Analytically solvable hamiltonians for quantum systems with a nearest-neighbour interaction.
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 42:125301, feb 2009.
- [27] N. Atakishiyev, S. Pogosyan, and K. B. Wolf.
Finite models of the oscillator.
Physics of Particles and Nuclei, 36:247–265, may 2005.
- [28] S. Weimann, A. Perez-Leija, M. Lebugle, R. Keil, M. Tichy, M. Gräfe, R. Heilmann, S. Nolte, H. M. Moya-Cessa, G. Weihs, D. N. Christodoulides, and A. Szameit.
Implementation of quantum and classical discrete fractional fourier transforms.
Nature Communications, 7:11027, mar 2016.
- [29] N. M. Atakishiyev, A. U. Klimyk, and K. B. Wolf.
A discrete quantum model of the harmonic oscillator.
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 41:085201, feb 2008.
- [30] Alejandro R. Urzúa, Irán Ramos-Prieto, Francisco Soto-Eguibar, Víctor Arrizón, and Héctor M. Moya-Cessa.
Light propagation in inhomogeneous media, coupled quantum harmonic oscillators and phase transitions.
Scientific Reports, 9(1), November 2019.

SEGUNDA PARTE

CAPÍTULO



PUBLICACIÓN: KVN MECHANICS APPROACH TO THE TIME-DEPENDENT FREQUENCY HARMONIC OSCILLATOR

Scientific Reports **8.1**, 8401 (2018)

Irán Ramos-Prieto, Alejandro R. Urzúa, Francisco Soto-Eguibar y Héctor M. Moya-Cessa

Resumen

Usando los invariantes de Ermakov-Lewis usados en la Mecánica de Koopman-von Neumann (KvN), se estudia el oscilador armónico abstracto con frecuencia dependiente del tiempo. El análisis se construye bajo la infraestructura del Modelo Operacional Dinámico (ODM), del cuál es posible inferir dinámicas, tanto clásicas como cuántica; por tanto, la estructura matemática governando la evolución del sistema es la misma en ambos casos. El Liouvilliano asociado con este oscilador estudiado puede ser transformado usando los invariantes de Ermakov-Lewis, que es a su vez dependiente del tiempo, pero que commuta consigo mismo para toda su evolución. Finalmente, debido a que la solución de la ecuación de Ermakov está intrínsecamente ligada a la evolución del vector de estado clásico, es posible explorar y presentar algunos casos, analítica y numéricamente.

2.1 Introducción

En 1931, Koopman y von Neumann (KvN) idearon una forma para obtener el campo de la mecánica clásica en términos de operadores y vectores de estado sobre espacios discretos, es decir, espacios de Hilbert [1, 2]. El desarrollo de la mecánica KvN provee un lenguaje operacional íntimamente ligado a la teoría cuántica, tal que, en esta aproximación la dinámica en el espacio-fase es determinada por una función de distribución de probabilidad $\Gamma(x, p; t)$, la cuál es el módulo al cuadrado de las funciones de onda clásicas $\psi(x, p; t)$ [3, 4, 5, 6, 7].

El lenguaje operacional en la mecánica KvN, que subyace en los espacios de Hilbert complejos de funciones cuadráticamente integrables, ha sido usado con anterioridad para obtener nuevas aproximaciones y reformulaciones de las teorías clásicas y cuánticas [5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. También, en este sentido, estructuras mecánicas híbridas han sido propuestas, donde es posible inferir dinámicas de evolución en sistemas clásicos, donde la representación de ensambles estadísticos en una dimensión es usada, ésto anterior es menester básico del modelaje operacional dinámico (ODM) [15]. En este marco teórico, el espacio-fase juega un papel primordial en la descripción, e interpretación, de fenómenos clásicos y cuánticos, abarcando sistemas abiertos y cerrados [16, 17, 18].

Es bastante bien conocido que el oscilador armónico es uno de los sistemas físicos más estudiados, si no es que el más. Su realización con parámetros, de masa y frecuencia, dependientes del tiempo, son de los modelos más usados para explicar fenómenos dinámicos. Previamente, el oscilador armónico, tanto clásico, como cuántico, ha sido estudiado con dependencia temporal en la masa y la frecuencia [19, 20, 21, 22, 23, 24, 25], donde el uso de los métodos de invariantes ha sido de provecho para obtener soluciones analíticas [26, 27, 28, 29]. Existen muchos y variados sistemas físicos donde es posible encontrar fenómenos descritos por osciladores armónicos dependientes del tiempo, como iones en trampas de Paul oscilando en una dimensión con su frecuencia dependiente del tiempo [30, 31, 32, 33], campos de radiación con oscilación dependiente del tiempo propagándose en medios dieléctricos [34], etc.

Lewis y Reisenfeld fueron los pioneros en el uso de métodos de invariantes para resolver la ecuación de Schrödinger de un oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo [20, 21]; además, recientemente, este método ha sido usado, en conjunción con transformaciones de compresión, en la ecuación de Ermakov para obtener soluciones analíticas y cerradas [26, 35]. El uso de la mecánica KvN y el modelaje operacional dinámico aplicado a ensambles estadísticos que se comporten como un oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo, proveen un tratamiento operacional donde los métodos de invariantes pueden ser usados. En la presente exposición se usa este lenguaje operacional para obtener los invariantes de ecuaciones del tipo Schrödinger, donde el Hamiltoniano es reemplazado por el Liouvilliano.

2.2 Mécanica KvN

La mecánica KvN, fue ideada con la finalidad de que el formalismo matemático y las ventajas del tratamiento operacional de la mecánica cuántica, pudieran ser trasladados a un marco clásico. Es por tanto que, conceptos como los espacios de Hilbert, los vectores de estado, las transformaciones unitarias y los operadores Hermitianos [36, 37], fueran trasladados y usados en un lugar donde las funciones cuadrado integrales son el fundamento de la teoría clásica.

Debido a que el marco de análisis y solución que intentamos establecer se basa en la existencia de un conjunto estadístico de múltiples copias de un sistema a determinado tiempo, la función de

distribución de probabilidad $\Gamma(x, p; t)$ es el principal elemento a determinar; por tanto, la existencia de un operador de densidad, \hat{P} , es requerida. Con lo cual, establecemos la siguiente proposición

Proposición 2.2.1. *En un sistema, donde una función de onda $\psi(t)$ determine la evolución con condiciones iniciales bien definidas, existe una función de distribución de probabilidad $\Gamma(\hat{q}, \hat{p}; t) = \|\langle \hat{q}, \hat{p} | \psi(t) \rangle\|^2$, dependiente de la posición, el momento, y el tiempo. Esta función determina todo el espacio fase del sistema.*

Para el correcto establecimiento de la mecánica KvN, los siguientes postulados, presentes en la axiomatización de la mecánica cuántica [2], son requeridos

Postulado 2.2.1. *El sistema, en abstracto, está definido por un vector de estado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, donde \mathcal{H} es el espacio de Hilbert. Además, el vector de estado está normalizado tal que, $\langle \psi | \psi \rangle = 1$.*

Postulado 2.2.2. *El valor de expectación de un operador Hermitiano \hat{O} al tiempo t es, $\langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle$.*

Postulado 2.2.3. *La probabilidad de que a un tiempo t , el operador \hat{O} se encunte en un observable O es, $|\langle \hat{O} | \psi(t) \rangle|^2$.*

En seguida, usamos el teorema de Stone [38], que para un operador autoadjunto \hat{H} en un espacio de Hilbert \mathcal{H} , establece que

Teorema 2.2.1. *En un espacio de Hilbert \mathcal{H} , existe un operador autoajunto \hat{H} , tal que $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces existe una familia de transformaciones $U(t) \equiv \exp(it\hat{H})$.*

De donde se establece, en consecuencia, la evolución de un vector de estado $|\psi(t)\rangle$, tal que si un operador autoadjunto \hat{L} actúa sobre un grupo unitario de transformaciones, esta evolución se define cómo

$$(2.1) \quad i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{L} |\psi(t)\rangle,$$

donde el operador \hat{L} , puede ser el Liouvilliano que sigue el paréntesis de Poisson o, el Hamiltoniano que sigue el paréntesis de Lie [36]. La solución de (2.1), de acuerdo al teorema 2.2.1, es $\exp(it\hat{L})$.

Ahora, según el teorema 2.2.1, la función de distribución de probabilidad es la proyección del vector de estado $|\psi(t)\rangle$ sobre el espacio fase $|x, p\rangle$. Es decir, existe una base conjunta de vectores en el espacio de configuración y momento; esta base es, a su vez, ortogonal y completa [2], con los eigenvectores de estado

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \hat{q} |\hat{q}, \hat{p}\rangle &= q |\hat{q}, \hat{p}\rangle, & \hat{p} |\hat{q}, \hat{p}\rangle &= p |\hat{q}, \hat{p}\rangle, \\ \langle \hat{q}', \hat{p}' | \hat{q}, \hat{p} \rangle &= \delta(x' - x) \delta(p' - p), & \int dq dp |\hat{x}, \hat{p}\rangle \langle \hat{x}, \hat{p}| &= 1, \end{aligned}$$

donde es posible ésto, ya que, clásicamente los operadores de posición y momento comutan $[\hat{x}, \hat{p}] = 0$

Una vez establecido el conjunto de relaciones (2.2), el teorema 2.2.1, los postulados 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 y la proposición 2.2.1, la siguiente tarea es establecer la forma explícita del operador \hat{L} . Para este fin, los teoremas de Ehrenfest [39] establecen claramente la estructura de la evolución promedio de operadores semi-clásicos. Si asumimos que podemos observar múltiples eventos de una partícula dentro de un potencial local $\hat{U}(\hat{x}, t)$, debido a los postulados arriba mencionados, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) | \hat{q} | \psi(t) \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{p} | \psi(t) \rangle, \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) | \hat{p} | \psi(t) \rangle &= \langle \psi(t) | -\hat{U}(\hat{q}; t) | \psi(t) \rangle, \end{aligned}$$

donde, por simplicidad y sin pérdida de generalidad, se ha tomado $m = 1$. Ahora, utilizando las ecuaciones de Ehrenfest (2.3), con la ecuación (2.1), se obtienen los paréntesis de Lie, véase apéndice 2.A.1,

$$(2.4) \quad \begin{aligned} i[\hat{L}, \hat{q}] &= \hat{p} \\ i[\hat{L}, \hat{p}] &= -U'(\hat{q}; t). \end{aligned}$$

Entonces, debido a que en mecánica clásica los operadores de posición y momento conmutan, es decir, pueden ser medidos con precisión arbitraria infinita, $[\hat{q}, \hat{p}] = 0$. Además, el sistema (2.4) nos dice que el operador \hat{L} no puede ser sólo función de \hat{q} y \hat{p} . Ésto implica extender el espacio de coordenadas, y operadores, disociar y categorizar un espacio para posición y momento, con lo cual, se postula lo siguiente

Postulado 2.2.4. *Los operadores de posición y momento, \hat{q} y \hat{p} , tienen asociados operadores auxiliares en sus propios espacios, $\hat{\lambda}_q$ y $\hat{\lambda}_p$, tal que cumplen con los paréntesis de Lie*

$$[\hat{q}, \hat{\lambda}_q] = [\hat{p}, \hat{\lambda}_p] = i.$$

Con lo anterior, se reconoce a cada operador en su propio espacio característico, $|\hat{q}\rangle |\hat{p}\rangle \equiv |\hat{q}, \hat{p}\rangle$, como un operador de momento

$$\hat{\lambda}_q |\hat{q}, \hat{p}\rangle \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial \hat{q}} |\hat{q}, \hat{p}\rangle, \quad \hat{\lambda}_p |\hat{q}, \hat{p}\rangle \rightarrow -i \frac{\partial}{\partial \hat{p}} |\hat{q}, \hat{p}\rangle.$$

Ahora, para obtener explícitamente la forma del operador \hat{L} , se alude al hecho de que los paréntesis de Lie son un tipo de *derivada de operadores*, y como lo marcan en los teoremas dados en [15], las ecuaciones (2.4) pueden ser escritas como un par de ecuaciones diferenciales, cada una con su respectiva dependencia de los operadores auxiliares $\hat{\lambda}_q$ y $\hat{\lambda}_p$. Es decir, se hace el mapeo

$$(2.5) \quad \begin{aligned} i[\hat{L}, \hat{q}] &\mapsto \hat{L}'_{\hat{\lambda}_q} = \hat{p}, \\ i[\hat{L}, \hat{p}] &\mapsto \hat{L}'_{\hat{\lambda}_p} = -U'(\hat{q}; t), \end{aligned}$$

con lo cual, el operador total \hat{L} es la suma de los operadores parciales $\hat{L}_{\hat{\lambda}_q}$ y $\hat{L}'_{\hat{\lambda}_p}$, que a su vez, el subíndice denota la dependencia en la derivada. Del sistema de ecuaciones (2.5), se obtiene entonces que

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \hat{L}_{\hat{\lambda}_q}}{\partial \hat{\lambda}_q} &= \hat{p} \quad \Rightarrow \quad \hat{L}_{\hat{\lambda}_q} = \hat{p} \hat{\lambda}_q \\ \frac{\partial \hat{L}_{\hat{\lambda}_p}}{\partial \hat{\lambda}_p} &= -U'(\hat{q}; t) \quad \Rightarrow \quad \hat{L}_{\hat{\lambda}_p} = -U'(\hat{q}; t) \hat{\lambda}_p. \end{aligned}$$

Entonces, la forma explícita del operador $\hat{L} = \hat{L}_{\hat{\lambda}_q} + \hat{L}_{\hat{\lambda}_p}$ es

$$(2.7) \quad \boxed{\hat{L} = \hat{p} \hat{\lambda}_q - U'(\hat{q}; t) \hat{\lambda}_p.}$$

Finalmente, si acatamos lo dicho en la proposición 2.2.1, que la evolución de un ensamble estadístico se logra analizando la función de distribución de probabilidad $\Gamma(\hat{q}, \hat{p}; t) = \|\langle \hat{q}, \hat{p} | \psi(t) \rangle\|^2$, podemos utilizar la ecuación (2.1) para obtener

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Gamma(\hat{q}, \hat{p}; t)}{\partial t} &= -i(\hat{p} \hat{\lambda}_q - U'(\hat{q}; t) \hat{\lambda}_p) \Gamma(\hat{q}, \hat{p}; t) \\ &= \left(-\hat{p} \frac{\partial}{\partial \hat{q}} + U'(\hat{q}; t) \frac{\partial}{\partial \hat{p}} \right) \Gamma(\hat{q}, \hat{p}; t), \end{aligned}$$

la cual puede ser reconocida como la ecuación de Liouville en mecánica estadística clásica. Esta ecuación dicta la evolución de la función de distribución de probabilidad en el espacio fase.

Es importante, remarcar que la forma de obtener explícitamente \hat{L} resulta en una función arbitraria de los operadores de posición y momento, la cuál hicimos igual a cero, pero que, sin embargo, puede utilizarse para obtener diferentes esquemas de evolución. Ya que esta función no afecta las ecuaciones de movimiento, la mecánica KvN presenta un tipo de invariancia similar a las invarianzas de gauge. Esta libertad de elección en la teoría ha sido usada previamente para modelar híbridos clásico-cuánticos [40].

2.3 Oscilador con frecuencia dependiente del tiempo

Comencemos sentando las bases del análisis de un oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo. Para este efecto, vamos a considerar un ensamble estadístico de múltiples copias idénticas de una partícula. Este sistema está sujeto a un potencial local cuadrático dependiente del tiempo, $U(\hat{q}; t) = k(t)\hat{q}^2/2$. Entonces, la ecuación de movimiento que describe la evolución, en el esquema de Koopman-von Neumann es, según (2.1) y (2.7), de la forma

$$(2.9) \quad i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\hat{q}, \hat{p}; t) = \underbrace{\left(\hat{p} \hat{\lambda}_q - k(t) \hat{q} \hat{\lambda}_p \right)}_{\hat{L}} \psi(\hat{q}, \hat{p}; t),$$

con $\psi(\hat{q}, \hat{p}; t) \equiv \langle \hat{q}, \hat{p} | \psi(t) \rangle$. Se ve, entonces, que el Liouvilliano \hat{L} es dependiente del tiempo a través de la amplitud de la frecuencia de oscilación $k(t)$. Lo anterior es un obstáculo, tanto teórico como computacional, ya que se vuelve una tarea ardua evaluar explícitamente la solución de (2.9). Sin embargo, este sistema tiene una cantidad conservada, que es a su vez dependiente del tiempo. Esta cantidad es conocida como invariante de Ermakov-Lewis, y en específico para este sistema (2.7) se establece cómo

Lema 2.3.1. *El invariante de Ermakov-Lewis para un oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo, en el esquema de Koopman-von Neumann está explícitamente dado por*

$$(2.10) \quad \hat{I} = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{q}^2}{\rho(t)^2} + (\dot{\rho}(t)\hat{q} - \rho(t)\hat{p})^2 + \frac{\hat{\lambda}_p^2}{\rho(t)^2} + (\dot{\rho}(t)\hat{\lambda}_p + \rho(t)\hat{\lambda}_q)^2 \right),$$

donde $\hat{\rho}(t)$ es una función (auxiliar) dependiente del tiempo, que obedece la ecuación diferencial de Ermakov

$$(2.11) \quad \ddot{\rho} + k(t)\rho(t) = \rho(t)^{-3}.$$

Demostración. Para la demostración de (2.10) véase apéndice 2.A.2. ■

Como lo denotó Ermakov [20] en su trabajo fundamental sobre la obtención del invariante y la ecuación que llevan su nombre, existe una relación funcional entre la ecuación (2.11), y aquella de un oscilador armónico homogéneo con frecuencia dependiente del tiempo

$$(2.12) \quad \ddot{u}(t) + k(t)u(t) = 0,$$

para las cuales, la eliminación de $k(t)$ lleva directamente al invariante original. Existe, entonces, una transformación que liga ambos sistemas, una transformación dependiente del tiempo de la forma

$$(2.13) \quad \omega_y(t) = \int \frac{dt}{y^2(t)}, \quad y(t) = \{\rho, u\}(t)$$

con la cuál, la relación de las cantidades dinámicas, $\rho(t)$ y $u(t)$ se establece cómo

$$(2.14) \quad u(t) = \rho(t) \cos \omega_\rho(t), \quad \rho(t) = \sqrt{1 + \omega_u^2(t)}.$$

Nota sobre observables clásicos

Es importante remarcar que los operadores auxiliares, $\hat{\lambda}_q$ y $\hat{\lambda}_p$, no puede ser asociados a ningún observable físico, ya que estos observables comutan para todo tiempo en un sistema clásico macroscópico; además, por tanto, existe una imposibilidad fundamental en medir el invariante (2.10). Y, debido a que el Liouvilliano (2.7) contiene una función arbitraria que depende de las variables canónicas conjugadas \hat{q} y \hat{p} , el invariante mismo porta esta función que se hizo cero, pero que, de una u otra forma, nula o no nula, hace que el invariante sea sensible a la fase de la función de onda en el esquema de Koopman-von Neumann.

Transformación y solución

Para la solución de la ecuación (2.9), conocido que existe el invariante (2.10), se puede proceder mediante una serie de transformaciones unitarias, que mediante rotaciones y compresiones de operadores, la dependencia temporal en $k(t)$ pueda ser factorizada a una fase multiplicativa en términos de $\rho(t)$. Para tal efecto, se procederá definiendo los operadores de transformación, con ayuda de lo mostrado en el Capítulo 3, §(3.3), que llevarán la ecuación (2.9) a un escenario soluble.

Definición 2.3.1. *Existen dos operadores de transformación dependientes del tiempo definidos por*

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \hat{T}_1(t) &:= \exp\left(i\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{q}\hat{\lambda}_p\right) \quad (\text{Traslación}), \\ \hat{T}_2(t) &:= \exp\left(i\frac{\ln\rho(t)}{2}(\hat{q}\hat{\lambda}_q + \hat{\lambda}_q\hat{q})\right)\exp\left(i\frac{\ln\rho(t)}{2}(\hat{p}\hat{\lambda}_p + \hat{\lambda}_p\hat{p})\right) \quad (\text{Compresión}), \end{aligned}$$

tal que forman el operador de transformación $\hat{T}(t) = \hat{T}_1(t)\hat{T}_2(t)$. Las acciones del operador $\hat{T}(t)$ sobre las variables canónicas son, apéndice 2.B

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \hat{T}_1(t)\hat{p}\hat{T}_1(t)^\dagger &= \hat{p} + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{q}, & \hat{T}_1(t)\hat{\lambda}_q\hat{T}_1(t)^\dagger &= \hat{\lambda}_q - \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\lambda}_p, \\ \hat{T}_2(t)\hat{q}\hat{T}_2(t)^\dagger &= \hat{q}\exp(\ln\rho(t)), & \hat{T}_2(t)\hat{p}\hat{T}_2(t)^\dagger &= \hat{p}\exp(-\ln\rho(t)), \\ \hat{T}_2(t)\hat{\lambda}_q\hat{T}_2(t)^\dagger &= \hat{\lambda}_q\exp(-\ln\rho(t)), & \hat{T}_2(t)\hat{\lambda}_p\hat{T}_2(t)^\dagger &= \hat{\lambda}_p\exp(\ln\rho(t)). \end{aligned}$$

Por tanto, con ayuda de las definiciones dadas en 2.3.1, la acción del operador $\hat{T}(t)$ sobre la ecuación (2.9), resulta en

$$(2.17) \quad i\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\hat{q},\hat{p};t) = \frac{1}{\rho(t)^2}(\hat{p}\hat{\lambda}_q - \hat{q}\hat{\lambda}_p)\Psi(\hat{q},\hat{p};t)$$

con $\Psi(\hat{q},\hat{p};t) = \hat{T}(t)\psi(\hat{q},\hat{p};t)$. Es claro que en (2.17) la dependencia temporal se ha factorizado y depende del término $\rho(t)$, a través de la solución de la ecuación auxiliar (2.11). La solución final, en el espacio original, se obtiene mediante el ansatz de solución de la ecuación de Schrödinger, donde, para una función de onda $\psi(\hat{q},\hat{p};t)$ y un operador de evolución \hat{L} , la solución es $\psi(\hat{q},\hat{p};t) = \exp(-it\hat{L})\psi(\hat{q},\hat{p};0)$. En este caso, debido a la transformación dependiente del tiempo, la solución resulta en la transformación de la condición inicial

$$(2.18) \quad \psi(\hat{q},\hat{p};t) = \hat{T}_1^\dagger(t)\hat{T}_2^\dagger(t)\exp(-i\omega_\rho(0,t)(\hat{p}\hat{\lambda}_q - \hat{q}\hat{\lambda}_p))\hat{T}_2(0)\hat{T}_1(0)\psi(\hat{q},\hat{p};0),$$

con ω_ρ dada por la integral (2.13).

La forma explícita de (2.18) se obtiene primero aplicando las transformaciones de condición inicial, con ayuda de los expuesto en (2.16), se tiene que

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \hat{T}_1(0)\hat{T}_1(0)\psi(\hat{q},\hat{p};t) &= \hat{T}_2(0)\psi\left(\hat{q},\hat{p} + \frac{\dot{\rho}_0}{\rho_0}\hat{q};t\right) \\ &= \psi(\hat{q}\rho_0,\hat{p}\rho_0 + \dot{\rho}_0\hat{q};t). \end{aligned}$$

Ahora, con ayuda del apéndice 4.A.1, es posible factorizar el término exponencial dependiente del tiempo de la forma

$$\begin{aligned}
 \exp(-i\omega_\rho(0,t)(\hat{p}\hat{\lambda}_q - \hat{q}\hat{\lambda}_p)) &\equiv \exp(i\omega_\rho(0,t)(\hat{q}\hat{\lambda}_p - \hat{p}\hat{\lambda}_q)) \\
 &= \exp(i\tan\omega_\rho(0,t)\hat{q}\hat{\lambda}_p) \\
 (2.20) \quad &\quad \times \exp(i\ln\omega_\rho(0,t)(\hat{q}\hat{\lambda}_p - \hat{p}\hat{\lambda}_q)) \\
 &\quad \times \exp(-i\tan\omega_\rho(0,t)\hat{p}\hat{\lambda}_q) \\
 &\equiv \hat{T}_p \hat{S}_{q,p} \hat{T}_q,
 \end{aligned}$$

es decir, se trata de la aplicación de una traslación en \hat{q} , una compresión en \hat{p} , una compresión en \hat{q} y, una traslación en \hat{p} . Con ésto, las cantidades dentro de la función de onda ψ resultan en

$$\begin{aligned}
 (2.21) \quad \hat{q}\rho_0 &\stackrel{\hat{S}_q \hat{S}_p \hat{T}_q}{\Rightarrow} \hat{q}\rho_0 \cos\omega_\rho(0,t) - \hat{p}\rho_0 \sin\omega_\rho(0,t) \\
 \hat{p}\rho_0 + \dot{\rho}_0 \hat{q} &\stackrel{\hat{T}_p \hat{S}_q \hat{S}_p}{\Rightarrow} \hat{p}\rho_0 \cos\omega_\rho(0,t) + \hat{q}(\rho_0 \sin\omega_\rho(0,t) + \dot{\rho}_0 \cos\omega_\rho(0,t)),
 \end{aligned}$$

con lo cual la función de onda en este punto de la transformación es

$$(2.22) \quad \exp(-i\omega_\rho(0,t)(\hat{p}\hat{\lambda}_q - \hat{q}\hat{\lambda}_p)) \hat{T}_1(0) \hat{T}_1(0) \psi(\hat{q}, \hat{p}; t) = \psi(\hat{q}\alpha_1(t) - \hat{p}\alpha_2(t), \hat{p}\alpha_3(t) + \hat{q}\alpha_4(t); t),$$

con

$$\begin{aligned}
 (2.23) \quad \alpha_1(t) &= \rho_0 \cos\omega_\rho(0,t), & \alpha_2(t) &= \rho_0 \sin\omega_\rho(0,t), \\
 \alpha_3(t) &= \rho_0 \cos\omega_\rho(0,t), & \alpha_4(t) &= \rho_0 \sin\omega_\rho(0,t) + \dot{\rho}_0 \cos\omega_\rho(0,t).
 \end{aligned}$$

Finalmente, la aplicación de los operadores $\hat{T}_1^\dagger(t)\hat{T}_2^\dagger(t)$, conduce a transformar, de nuevo, las variables canónicas involucrada en la función (2.22), tal que los coeficientes α 's se transforman en

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(t) &\stackrel{\hat{T}_1^\dagger(t)\hat{T}_2^\dagger(t)}{\Rightarrow} \frac{\rho_0}{\rho(t)} \cos\omega_\rho(0,t) - \rho_0 \rho(t) \sin\omega_\rho(0,t) = \beta_1(t) \\
 (2.24) \quad \alpha_2(t) &\stackrel{\hat{T}_1^\dagger(t)\hat{T}_2^\dagger(t)}{\Rightarrow} \rho_0 \rho(t) \sin\omega_\rho(0,t) = \beta_2(t) \\
 \alpha_3(t) &\stackrel{\hat{T}_1^\dagger(t)\hat{T}_2^\dagger(t)}{\Rightarrow} \rho_0 \rho(t) \cos\omega_\rho(0,t) = \beta_3(t) \\
 \alpha_4(t) &\stackrel{\hat{T}_1^\dagger(t)\hat{T}_2^\dagger(t)}{\Rightarrow} \left(\rho_0 \dot{\rho}(t) + \frac{\dot{\rho}_0}{\rho(t)} \right) \cos\omega_\rho(0,t) + \frac{\rho_0}{\rho(t)} \sin\omega_\rho(0,t) = \beta_4(t),
 \end{aligned}$$

con lo cual, la forma explícita de la función de onda ψ está dada por

$$(2.25) \quad \boxed{\psi(\hat{q}, \hat{p}; t) = \psi(\hat{q}\beta_1(t) - \hat{p}\beta_2(t), \hat{p}\beta_3(t) + \hat{q}\beta_4(t); 0).}$$

Entonces, la evolución del oscilador con frecuencia dependiente del tiempo se reduce a calcular la solución de la ecuación de Ermakov (2.11), con condiciones iniciales $\rho(0) \equiv \rho_0$ y $\dot{\rho}(0) = \dot{\rho}_0$. Es de remarcar, que mientras la ecuación de Ermakov posea una solución, analítica o numérica,

para alguna función $k(t)$, se puede asegurar que ψ exista y pueda ser utilizada para calcular los observables del sistema asociado.

A continuación se presentan un par de casos en los cuales la solución de la ecuación de Ermakov puede ser analítica o numérica, y que representa un par de evoluciones características de los sistemas con parámetros dependientes del tiempo.

2.3.1 Casos analíticos: hiperbólico y cuadrático

Consideremos, primero, el caso cuando el parámetro de frecuencia dependiente del tiempo tiene la forma

$$(2.26) \quad k_1(t) = \frac{2\kappa^2}{\cosh^2(\kappa t)},$$

donde κ es la frecuencia de oscilación. Procedemos a resolver la ecuación homogénea para $u(t)$, (2.12), con condiciones iniciales $u(0) = 0$, resulta en

$$(2.27) \quad \ddot{u}(t) + k_1(t)u(t) = 0 \quad \xrightarrow{u(0)=0} \quad u(t) = c_1 \tanh(\kappa t),$$

ya que c_1 es arbitraria, y para $t = 0$ la función u se anula, podemos hacer $c_1 = 1$, $\forall t > 0$. Entonces tenemos que $u(t)$ y su función asociada $\omega_u(t)$ son

$$(2.28) \quad u(t) = \tanh(\kappa t), \quad \omega_u(t) = \frac{\kappa t - \coth(\kappa t)}{\kappa},$$

con lo cual, la función $\rho(t)$ resulta en

$$(2.29) \quad \rho(t) = \tanh(\kappa t) \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa t - \coth(\kappa t)}{\kappa} \right)^2}.$$

Finalmente, la función $\omega_\rho(0, t)$ cumple con las relaciones

$$(2.30) \quad \omega_\rho(0, t) = \int_0^t \frac{d\tau}{\rho^2(\tau)} = \arctan \left(\int \frac{d\tau}{u^2(\tau)} \right) \Big|_0^t.$$

Ahora, si consideramos un parámetro de frecuencia dependiente del tiempo de la forma

$$(2.31) \quad k_2(t) = \frac{1}{(\gamma + 2t)^2},$$

con la cual, la solución de la ecuación homogénea para $u(t)$ resulta en

$$(2.32) \quad \ddot{u}(t) + k_2(t)u(t) = 0 \quad \xrightarrow{u(0)=0} \quad u(t) = c_1 \sqrt{\gamma + 2t},$$

y como en el caso anterior c_1 es arbitraria, y ya que para $t = 0$ la función u se anula sólo en $\gamma = 0$, tomamos $c_1 = 1$, $\forall t \geq 0$. Entonces tenemos las relaciones

$$(2.33) \quad \begin{aligned} u(t) &= \sqrt{\gamma + 2t}, & \omega_u(0, t) &= \frac{1}{2} \ln(\gamma + 2t), \\ \rho(t) &= \frac{1}{2} \sqrt{(\gamma + 2t)(4 + \ln(\gamma + 2t)^2)}, & \omega_\rho(0, t) &= \arctan \left(\frac{1}{2} \ln(\gamma + 2t) \right). \end{aligned}$$

Finalmente, conocidas la cantidades, la evolución en el espacio fase dictada por $\Gamma(\hat{q}, \hat{p}; t)$, se realiza mediante el cálculo de $\psi(\hat{q}, \hat{p}; t)$ en la ecuación (2.25).

En la figura 2.1 se muestra el caso hiperbólico, ecuación (2.26), para las cantidades $\rho(t)$, $\dot{\rho}(t)$, $\omega_\rho(t)$, y el centro de masa $(\hat{q}_c(t) = \hat{q}\beta_1(t) - \hat{p}\beta_2(t), \hat{p}_c(t) = \hat{p}\beta_3(t) + \hat{q}\beta_4(t))$. Las condiciones iniciales del centro de masa son, $(\hat{q}_c(0) = -1, \hat{p}_c(0) = 1)$. En las cantidades de la columna izquierda, se puede observar el crecimiento monotónico en el tiempo de $\rho(t)$; tanto $\dot{\rho}(t)$ como $\omega_\rho(t)$ presentan crecimiento durante los primeros 5 s, para luego tender a valores constantes para tiempos posteriores. Mientras tanto, en la columna derecha, el centro de masa en el espacio describe una trayectoria hiperbólica durante los primeros 5 segundos, para luego tener un crecimiento monotónico para tiempos posteriores.

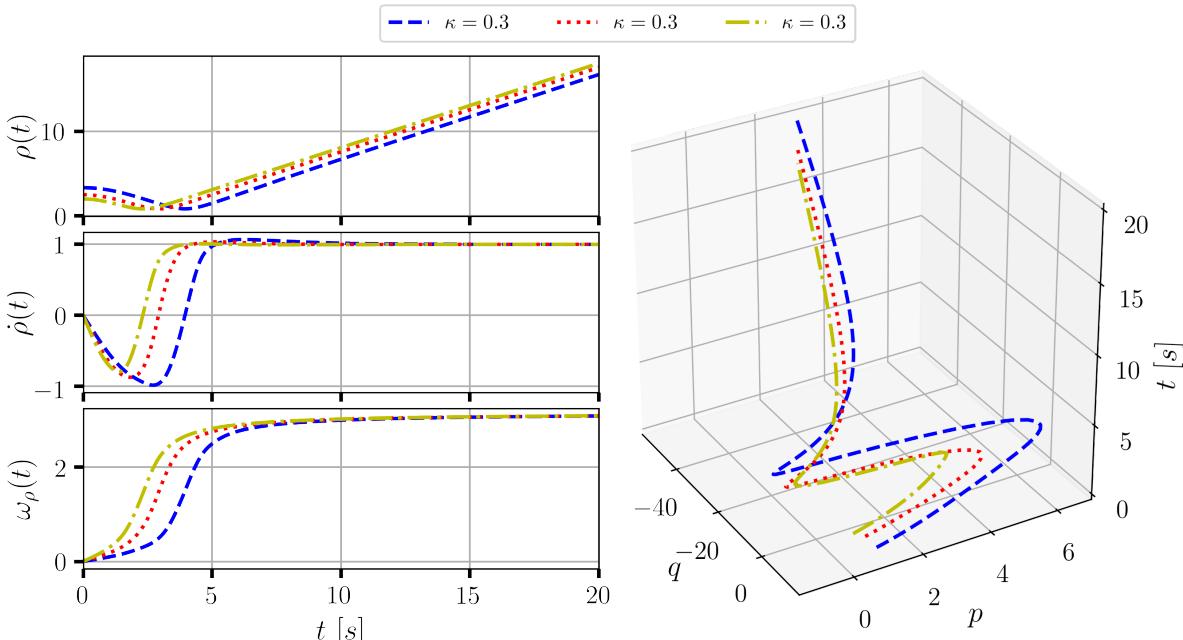


Figura 2.1: Columna izquierda: Solución de la ecuación de Ermakov, $\rho(t)$; su derivada, $\dot{\rho}(t)$, y la cantidad $\omega_\rho(t)$. Columna derecha: Trayectoria del centro de masa en el espacio fase $\{\hat{q}, \hat{p}\}$, para la condición inicial $(\hat{q}_c(0) = -1, \hat{p}_c(0) = 1)$. Se muestran diferentes valores del parámetro $\kappa = \{0.3, 0.4, 0.5\}$.

2.3.2 Caso numérico oscilatorio

Ahora, consideraremos un caso en el cuál la solución $\rho(t)$ de la ecuación de Ermakov no es posible obtenerla de forma analítica. Aunque ésto represente un impedimento, el tipo de frecuencia dependiente del tiempo, del tipo sinusoidal, se aproxima más a lo que uno encontraría en la naturaleza. Nuestra aproximación es realizar un análisis numérico. Primero, consideraremos la función de frecuencia dependiente del tiempo

$$(2.34) \quad k(t) = \Delta + \cos \omega t,$$

donde Δ y ω son el desplazamiento frecuencial y la frecuencia angular, respectivamente. Entonces, para obtener soluciones de las cantidades involucradas, $\rho(t)$, $\dot{\rho}(t)$, y $\omega_\rho(t)$, podemos reescribir, tanto la ecuación de Ermakov (2.11), como la cantidad $\omega_\rho(t)$ (2.13), como un sistema de ecuaciones acoplados. Para tal efecto se hacen las siguientes sustituciones

$$(2.35) \quad \rho(t) \rightarrow x_1(t), \quad \dot{\rho}(t) \rightarrow x_2(t), \quad \omega_\rho(t) \rightarrow x_3(t),$$

con $\omega_\rho(t) = \int dt/\rho^2(t)$. Por tanto, el sistema de ecuaciones en las nuevas variables x 's resulta en

$$(2.36) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{x_1^3(t)} - k(t)x_1(t) \quad (\text{Ecuación de Ermakov}) \\ \dot{x}_3(t) &= \frac{1}{x_1^2(t)}. \end{aligned}$$

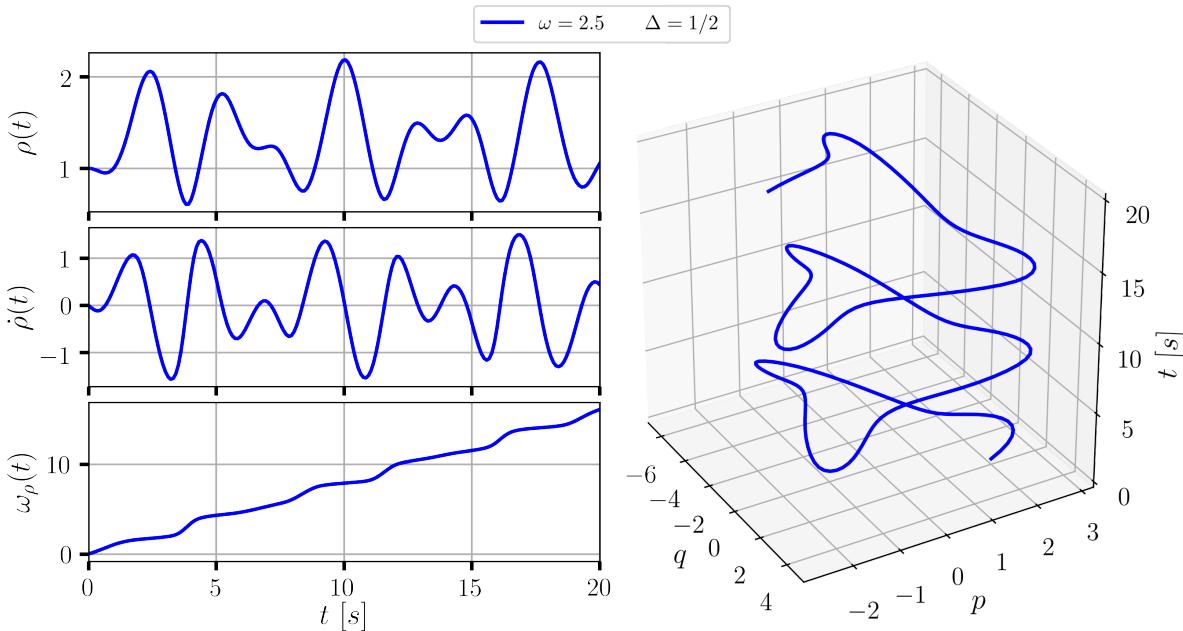


Figura 2.2: Columna izquierda: Solución de la ecuación de Ermakov, $\rho(t)$; su derivada, $\dot{\rho}(t)$, y la cantidad $\omega_\rho(t)$. Columna derecha: Trayectoria del centro de masa en el espacio fase $\{\hat{q}, \hat{p}\}$, para la condición inicial $(\hat{q}_c(0) = -1, \hat{p}_c(0) = 1)$. Los parámetros de frecuencia se ajustaron a $\omega = 2.5$ y $\Delta = 1/2$.

En la figura 2.2 se muestra la evolución de este sistema cuando $\omega = 2.5$ y $\Delta = 1/2$; con las condiciones iniciales $x_1(0) = \rho(0) = 1$ y $x_2(0) = \dot{\rho}(0) = 0$. El cálculo se realizó mediante el método de Runge-Kutta de 4to orden. Se puede ver que el sistema presenta un comportamiento oscilatorio no periódico, el cuál está caracterizado por la función $k(t)$, aunque la envolvente, tanto en $\rho(t)$ como en $\dot{\rho}(t)$ es oscilante, no se puede discernir un comportamiento regular, dada la naturaleza dependiente del tiempo. Se muestra, además, la evolución del centro de masa en el espacio fase

$\{\hat{q}, \hat{p}\}$ cuando parte del punto $(q_c(0) = 2, p_c(0) = 2)$, donde se observa una evolución de trayectoria espiral oscilante.

2.4 Conclusiones

Se mostró que la unificación de argumentos, métodos y consecuencias de mecánica cuántica y clásica, no sólo es posible, sino que adquiere una forma sencilla y explícita con el tratamiento mediante la mecánica de Koopman-von Neumann para sistemas dependientes del tiempo. Además, se demostró que la existencia del invariante de Ermakov-Lewis del sistema, siempre está garantizada mientras la ecuación de Ermakov sea soluble, ya sea de forma analítica, o numéricamente, para algún vector de estado inicial. A su vez, se muestra que, debido a que la construcción del método ODM, (Operational Dynamical Modelling), se hace sobre el teorema de Stone, el cual garantiza la existencia de un Liouvilliano en el espacio fase, la representación de un sistema dependiente del tiempo se vuelve uno de solucionar un sistema de ecuaciones en el espacio de posiciones y momentos a través de una historia temporal.

Y como se mostró en los ejemplos, cuando la selección cuidadosa del parámetro de frecuencia dependiente del tiempo es llevada a cabo, todas las variables dinámicas asociadas al tratamiento se turnan en formas cerrad, analíticas y sencillas. De las evoluciones de $\rho(t)$ y $\dot{\rho}(t)$ aprendimos que crecimientos monótonicos, u oscilaciones no periódicas, son posibles de obtener; además, para ambos casos, hiperbólico y oscilatorio, la cantidad $\omega_\rho(t)$ tiende a crecer.

2.A Apéndices

2.A.1 Paréntesis de Lie del Liouvilliano

Los paréntesis de Lie del Liouvilliano \hat{L} con las variables canónicas, \hat{q} y \hat{p} , resulta en

$$i[\hat{L}, \hat{q}] = \hat{p}, \quad i[\hat{L}, \hat{p}] = -U'(\hat{q}; t).$$

Demostración. Por construcción, el Liouvilliano es Hermitiano, es decir, $\hat{L}^\dagger = \hat{L}$. Por tanto, la ecuación dinámica para éste cumple

$$i\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{L} |\psi(t)\rangle \implies -i\frac{\partial}{\partial t} \langle\psi(t)| = \langle\psi(t)| \hat{L}^\dagger.$$

Tomando la derivada de los valores de expectación de las ecuaciones de Ehrenfest (2.3), se tiene

que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) | \hat{q} | \psi(t) \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{p} | \psi(t) \rangle \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) | (\hat{q} | \psi(t) \rangle) + (\langle \psi(t) | \hat{q}) \frac{\partial}{\partial t} | \psi(t) \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{p} | \psi(t) \rangle \\ (-i\hat{L} |\psi(t)\rangle)^{\dagger} \hat{q} |\psi(t)\rangle + |\psi(t)\rangle \hat{q} (-i\hat{L} |\psi(t)\rangle) &= \langle \psi(t) | \hat{p} | \psi(t) \rangle \\ i \langle \psi(t) | (\hat{L}\hat{q} - \hat{q}\hat{L}) | \psi(t) \rangle &= \langle \psi(t) | \hat{p} | \psi(t) \rangle \\ \therefore i [\hat{L}, \hat{q}] &= \hat{p}, \end{aligned}$$

que análogo para la segunda ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi(t) | \hat{p} | \psi(t) \rangle &= \langle \psi(t) | -U'(\hat{q}; t) | \psi(t) \rangle \\ \Rightarrow i [\hat{L}, \hat{p}] &= -U'(\hat{q}; t). \end{aligned}$$

■

2.A.2 Construcción del Invariante

La construcción del invariante \hat{I} en (2.10), requiere proponer un invariante general que involucre todos los generadores del álgebra, para así buscar sus coeficientes adecuados. Así, tenemos el invariante indefinido

$$\hat{I} = \alpha_0(t)\hat{q}^2 + \alpha_1(t)\hat{\lambda}_q^2 + \alpha_2(t)\hat{p}^2 + \alpha_3(t)\hat{\lambda}_p^2 + \alpha_4(t)\hat{q}\hat{p} + \alpha_5(t)\hat{\lambda}_q\hat{\lambda}_p,$$

el cual debe satisfacer

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{I} - i [\hat{I}, \hat{L}] = 0,$$

con $\hat{L} = \hat{p}\hat{\lambda}_q - k(t)\hat{q}\hat{\lambda}_p$.

Demostración. Comenzando por recordar los paréntesis de Lie de los generadores del álgebra

$$[\hat{q}, \hat{p}] = [\hat{\lambda}_q, \hat{\lambda}_p] = 0, \quad [\hat{q}, \hat{\lambda}_q] = [\hat{p}, \hat{\lambda}_q] = i,$$

El segundo término de la ecuación dinámica para \hat{I} resulta en

$$-i [\hat{I}, \hat{L}] = 2(\alpha_0(t) - \alpha_2(t)k(t))\hat{q}\hat{p} + 2(\alpha_1(t)k(t) - \alpha_3(t))\hat{\lambda}_q\hat{\lambda}_p + \alpha_4(\hat{p}^2 - k(t)\hat{q}^2) + \alpha_5(k(t)\hat{\lambda}_p^2 - \hat{\lambda}_q^2).$$

A su vez, la derivada parcial en t de \hat{I} es

$$\frac{\partial}{\partial t} = \dot{\alpha}_0(t)\hat{q}^2 + \dot{\alpha}_1(t)\hat{\lambda}_q^2 + \dot{\alpha}_2(t)\hat{p}^2 + \dot{\alpha}_3(t)\hat{\lambda}_p^2 + \dot{\alpha}_4(t)\hat{q}\hat{p} + \dot{\alpha}_5(t)\hat{\lambda}_q\hat{\lambda}_p.$$

Igualando ambos resultados, obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned} \hat{q}^2(\dot{\alpha}_0 - k(t)\alpha_4(t)) + \hat{\lambda}_q^2(\dot{\alpha}_1 - \alpha_5(t)) + \hat{p}^2(\dot{\alpha}_2(t) + \alpha_4(t)) + \\ \hat{q}\hat{p}(\dot{\alpha}_4(t) + 2(\alpha_0(t) - k(t)\alpha_2(t))) + \hat{\lambda}_q\hat{\lambda}_p(\dot{\alpha}_5(t) + 2(k(t)\alpha_1(t) - \alpha_3(t))) &= 0, \end{aligned}$$

del cual resulta el sistema de ecuaciones para los coeficientes α 's

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_0 - k(t)\alpha_4(t) &= 0 \\ \dot{\alpha}_1(t) - \alpha_5(t) &= 0 \\ \dot{\alpha}_2(t) + \alpha_4(t) &= 0 \\ \dot{\alpha}_4(t) + 2(\alpha_0(t) - k(t)\alpha_2(t)) &= 0 \\ \dot{\alpha}_5(t) + 2(k(t)\alpha_1(t) - \alpha_3(t)) &= 0.\end{aligned}$$

Inmediatamente se obtiene que $\dot{\alpha}_1(t) = \alpha_5(t)$ y $\dot{\alpha}_2(t) = -\alpha_4(t)$. Luego, con $\dot{\alpha}_0(t) = k(t)\alpha_4(t)$, en la ecuación para $\dot{\alpha}_4$; y $\dot{\alpha}_3 = k(t)\alpha_5(t)$, en la ecuación para $\dot{\alpha}_5(t)$, se obtiene

$$\alpha_0(t) = \frac{1}{4} \frac{\dot{\alpha}_2(t)}{\alpha_2(t)} + \frac{A}{\alpha_2(t)}, \quad \alpha_3(t) = \frac{1}{4} \frac{\dot{\alpha}_1(t)}{\alpha_1(t)} + \frac{B}{\alpha_1(t)},$$

con A y B constantes de integración arbitrarias. Luego, para la ecuación de $\dot{\alpha}_4$ en términos de $\ddot{\alpha}_2$, se obtiene

$$-\ddot{\alpha}_2 + 2(\alpha_0(t) - k(t)\alpha_2(t)) = 0 \Rightarrow \ddot{\alpha}_2(t) + 2k(t)\alpha_2(t) = \frac{1}{2} \frac{\dot{\alpha}_2(t)}{\alpha_2(t)} + \frac{A}{\alpha_2(t)},$$

con la identidad $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$. Si se elige la sustitución $\alpha_2(t) = \rho(t)^2/2$, entonces $\dot{\alpha}_2(t) = \rho(t)\dot{\rho}(t)$, y $\ddot{\alpha}_2(t) = \dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)\ddot{\rho}(t)$. Que sustituyendo de vuelta en la ecuación para $\ddot{\alpha}_2(t)$, se tiene

$$\ddot{\rho}(t) + k(t)\rho(t) = \rho(t)^{-3},$$

es decir, se obtiene la ecuación auxiliar de Ermakov. Ahora, dadas las ecuaciones para $\alpha_0(t)$ y $\alpha_3(t)$, se definen los parámetros restantes como

$$\alpha_4(t) = -\rho(t)\dot{\rho}(t), \quad \alpha_5(t) = \rho(t)\dot{\rho}(t),$$

los cuales se introducen en la ecuación indefinida de \hat{I} , resultando

$$\hat{I} = \frac{A}{\rho(t)^2} \hat{q}^2 + \frac{B}{\rho(t)^2} + \frac{1}{2} (\dot{\rho}(t)\hat{q} - \rho(t)\hat{p})^2 + \frac{1}{2} (\rho(t)\hat{\lambda}_q + \dot{\rho}(t)\hat{\lambda}_p)^2,$$

donde, debido a que A y B son arbitrarias, se puede elegir $A = B = 1/2$, entonces se obtiene finalmente la ecuación

$$\hat{I} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{q}^2}{\rho(t)^2} + (\dot{\rho}(t)\hat{q} - \rho(t)\hat{p})^2 + \frac{\hat{\lambda}_p^2}{\rho(t)^2} + (\rho(t)\hat{\lambda}_q + \dot{\rho}(t)\hat{\lambda}_p)^2 \right).$$

■

2.B Acción del operador

El operador $\hat{T}(t)$ cuenta con la contribución de dos suboperadores, $\hat{T}_1(t)$ y $\hat{T}_2(t)$, definidos por

$$\begin{aligned}\hat{T}_1(t) &:= \exp\left(i\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{q}\hat{\lambda}_p\right), \\ \hat{T}_2(t) &:= \exp\left(i\frac{\ln\rho(t)}{2}(\hat{q}\hat{\lambda}_q + \hat{\lambda}_q\hat{q})\right)\exp\left(i\frac{\ln\rho(t)}{2}(\hat{p}\hat{\lambda}_p + \hat{\lambda}_p\hat{p})\right),\end{aligned}$$

Los cuales actúan sobre las variables canónicas $\hat{A} \in \{\hat{q}, \hat{p}, \hat{\lambda}_q, \hat{\lambda}_p\}$ a través de $\hat{T}(t)\hat{A}\hat{T}(t)^\dagger$. Debido a las relaciones derivadas de los paréntesis de Lie

$$[\hat{q}, \hat{p}] = [\hat{\lambda}_q, \hat{\lambda}_p] = 0, \quad [\hat{q}, \hat{\lambda}_q] = [\hat{p}, \hat{\lambda}_q] = i,$$

la acción de $\hat{T}(t)$ sobre cada variable se reduce a

$$\begin{aligned}\hat{T}_1(t)\hat{p}\hat{T}_1(t)^\dagger &= \hat{p} + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{q}, & \hat{T}_1(t)\hat{\lambda}_q\hat{T}_1(t)^\dagger &= \hat{\lambda}_q - \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\lambda}_p, \\ \hat{T}_2(t)\hat{q}\hat{T}_2(t)^\dagger &= \hat{q}\exp(\ln\rho(t)), & \hat{T}_2(t)\hat{p}\hat{T}_2(t)^\dagger &= \hat{p}\exp(-\ln\rho(t)), \\ \hat{T}_2(t)\hat{\lambda}_q\hat{T}_2(t)^\dagger &= \hat{\lambda}_q\exp(-\ln\rho(t)), & \hat{T}_2(t)\hat{\lambda}_p\hat{T}_2(t)^\dagger &= \hat{\lambda}_p\exp(\ln\rho(t)).\end{aligned}$$

Demostración. Utilizando el desarrollo en series de potencias y paréntesis de Lie anidados, determinado por la fórmula Baker-Campbell-Hausdorff, tenemos lo siguiente.

Para la transformación de \hat{p} por la acción de $\hat{T}_1(t)$, se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{T}_1(t)\hat{p}\hat{T}_1(t)^\dagger &= \hat{p} + \left(i\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\right)\underbrace{[\hat{q}\hat{\lambda}_p, \hat{p}]}_{\hat{C}_1=-i\hat{q}} + \frac{1}{2!}\left(i\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\right)^2\underbrace{[\hat{q}\hat{\lambda}_p, \hat{C}_1]}_0 \\ &= \hat{p} + \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{q}.\end{aligned}$$

Por analogía, para la transformación de $\hat{\lambda}_q$ por la acción de $\hat{T}_1(t)$, se intercambia el paréntesis de Lie, y ahora se obtiene $\hat{C}_1 = i\hat{\lambda}_p$, donde igualmente el segundo paréntesis de Lie se desvance, entonces

$$\hat{T}_1\hat{\lambda}_q\hat{T}_1(t)^\dagger = \hat{\lambda}_q - \frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\hat{\lambda}_p.$$

Para las transformaciones de $\hat{T}_2(t)$, este actúa sobre las cuatro variables canónica, simplemente intercambiando el resultado de los paréntesis de Lie. Para la acción sobre \hat{q} se tiene

$$\begin{aligned}\hat{T}_2(t)\hat{q}\hat{T}_2(t)^\dagger &= \hat{q} + \left(i\frac{\ln\rho(t)}{2}\right)\underbrace{[\hat{q}\hat{\lambda}_q + \hat{\lambda}_q\hat{q}, \hat{q}]}_{\hat{C}_2=-2i\hat{q}} + \frac{1}{2!}\left(i\frac{\ln\rho(t)}{2}\right)^2\underbrace{[\hat{q}\hat{\lambda}_q + \hat{\lambda}_q\hat{q}, \hat{C}_2]}_{\hat{C}_3=(-2i)^2\hat{q}} + \dots + \mathcal{O}(-2i)^n \\ &= \hat{q}\left(1 + \ln\rho(t) + \frac{1}{2!}(\ln\rho(t))^2 + \dots + \frac{1}{n!}(\ln\rho(t))^n\right) \\ &= \hat{q}\exp(\ln\rho(t)).\end{aligned}$$

Para la acción de $\hat{T}_2(t)$ sobre \hat{p} se tiene

$$\begin{aligned}\hat{T}_2(t)\hat{p}\hat{T}_2(t)^\dagger &= \hat{p} + \left(i\frac{\ln\rho(t)}{2}\right) \underbrace{[\hat{p}\hat{\lambda}_p + \hat{\lambda}_p\hat{p}, \hat{p}]}_{\hat{C}_2=2i\hat{p}} + \frac{1}{2!} \left(i\frac{\ln\rho(t)}{2}\right)^2 \underbrace{[\hat{p}\hat{\lambda}_p + \hat{\lambda}_p\hat{p}, \hat{C}_2]}_{\hat{C}_3=(2i)^2\hat{p}} + \dots + \mathcal{O}(2i)^n \\ &= \hat{p} \left(1 - \ln\rho(t) + \frac{1}{2!} (\ln\rho(t))^2 - \dots + \frac{1}{n!} (\ln\rho(t))^n\right) \\ &= \hat{p} \exp(-\ln\rho(t)).\end{aligned}$$

Por analogía con estos dos casos, los paréntesis de Lie poseen cambio de signo respecto de éstos, entonces se obtiene imparidad en la serie que desarrolla al exponencial. Las acciones de $\hat{T}_2(t)$ sobre $\hat{\lambda}_q$ y $\hat{\lambda}_p$ son

$$\begin{aligned}\hat{T}_2(t)\hat{\lambda}_q\hat{T}_2(t)^\dagger &= \hat{\lambda}_q \exp(-\ln\rho(t)), \\ \hat{T}_2(t)\hat{\lambda}_p\hat{T}_2(t)^\dagger &= \hat{\lambda}_p \exp(\ln\rho(t)).\end{aligned}$$

■

2.3 Bibliografía

- [1] B. O. Koopman.
Hamiltonian systems and transformation in hilbert space.
Proceedings of the National Academy of Sciences, 17(5):315–318, 1931.
- [2] J. von Neumann.
Zur operatorenmethode in der klassischen mechanik.
Annals of Mathematics, 33(3):587–642, 1932.
- [3] D. Mauro.
waves, on koopman-von neumann.
International Journal of Modern Physics A, 17(09):1301–1325, 2002.
- [4] E. Gozzi and D. Mauro.
Minimal coupling in koopman–von neumann theory.
Annals of Physics, 296(2):152 – 186, 2002.
- [5] E. Deotto, E. Gozzi, and D. Mauro.
Hilbert space structure in classical mechanics. i.
Journal of Mathematical Physics, 44(12):5902–5936, 2003.
- [6] D. Mauro.
Topics in Koopman-von Neumann Theory.
PhD thesis.
- [7] E. Gozzi and D. Mauro.
On koopman-von neumann waves ii.
International Journal of Modern Physics A, 19(09):1475–1493, 2004.
- [8] E. Gozzi and D. Mauro.
Scale symmetry in classical and quantum mechanics.
Physics Letters A, 345(4):273 – 278, 2005.
- [9] P. Carta, E. Gozzi, and D. Mauro.
Koopman-von neumann formulation of classical yang-mills theories: I.
Annalen der Physik, 15(3):177–215, 2006.
- [10] Ennio Gozzi and Carlo Pagani.
Universal local symmetries and nonsuperposition in classical mechanics.
Phys. Rev. Lett., 105:150604, Oct 2010.
- [11] E. Gozzi and R. Penco.
Three approaches to classical thermal field theory.

- Annals of Physics*, 326(4):876 – 910, 2011.
- [12] Ray J. Rivers.
Path integrals for (complex) classical and quantum mechanics.
Acta Polytechnica (Czech Republic), Acta:Polytechnica51No.4,83–89(2011), February 2012.
- [13] E. Cattaruzza, E. Gozzi, and A. Francisco Neto.
Least-action principle and path-integral for classical mechanics.
Phys. Rev. D, 87:067501, Mar 2013.
- [14] A. K. Rajagopal and Partha Ghose.
Hilbert space theory of classical electrodynamics.
Pramana, 86(6):1161–1172, Jun 2016.
- [15] Denys I. Bondar, Renan Cabrera, Robert R. Lompay, Misha Yu. Ivanov, and Herschel A. Rabitz.
Operational dynamic modeling transcending quantum and classical mechanics.
Phys. Rev. Lett., 109:190403, Nov 2012.
- [16] Renan Cabrera, Denys I. Bondar, Kurt Jacobs, and Herschel A. Rabitz.
Efficient method to generate time evolution of the wigner function for open quantum systems.
Phys. Rev. A, 92:042122, Oct 2015.
- [17] Renan Cabrera, Andre G. Campos, Denys I. Bondar, and Herschel A. Rabitz.
Dirac open-quantum-system dynamics: Formulations and simulations.
Phys. Rev. A, 94:052111, Nov 2016.
- [18] Denys I. Bondar, Renan Cabrera, Dmitry V. Zhdanov, and Herschel A. Rabitz.
Wigner phase-space distribution as a wave function.
Phys. Rev. A, 88:052108, Nov 2013.
- [19] S. Solimeno, P. Di Porto, and B. Crosignani.
Quantum harmonic oscillator with time dependent frequency.
Journal of Mathematical Physics, 10(10):1922–1928, 1969.
- [20] H. R. Lewis.
Classical and quantum systems with time dependent harmonic oscillator type hamiltonians.
Phys. Rev. Lett., 18:510–512, Mar 1967.
- [21] H. R. Lewis Jr. and W. B. Riesenfeld.
An exact quantum theory of the time dependent harmonic oscillator and of a charged particle
in a time dependent electromagnetic field.
Journal of Mathematical Physics, 10(8):1458–1473, 1969.

CAPÍTULO 2. PUBLICACIÓN: KVN MECHANICS APPROACH TO THE TIME-DEPENDENT FREQUENCY HARMONIC OSCILLATOR

- [22] Piero Caldirola.
Forze non conservative nella meccanica quantistica.
Il Nuovo Cimento (1924-1942), 18(9):393–400, Nov 1941.
- [23] E. Kanai.
On the quantization of the dissipative systems.
Progress of Theoretical Physics, 3(4):440–442, 1948.
- [24] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko.
Coherent states and the resonance of a quantum damped oscillator.
Phys. Rev. A, 20:550–560, Aug 1979.
- [25] Daniel Gómez Vergel and Eduardo J.S. Villaseñor.
The time-dependent quantum harmonic oscillator revisited: Applications to quantum field theory.
Annals of Physics, 324(6):1360 – 1385, 2009.
- [26] Héctor Moya-Cessa and Manuel Fernández Guasti.
Coherent states for the time dependent harmonic oscillator: the step function.
Physics Letters A, 311(1):1 – 5, 2003.
- [27] M Fernández Guasti and H Moya-Cessa.
Solution of the schrödinger equation for time-dependent 1d harmonic oscillators using the orthogonal functions invariant.
Journal of Physics A: Mathematical and General, 36(8):2069, 2003.
- [28] H Moya-Cessa and M. Fernandez-Guasti.
Time dependent quantum harmonic oscillator subject to a sudden change of mass: continuous solution.
Revista Mexicana de Fisica, 53:42 – 46, 02 2007.
- [29] H. M. Moya-Cessa and F. Soto-Eguibar.
Discrete fractional fourier transform: Vandermonde approach.
IMA Journal of Applied Mathematics, 83(6):908–916, jun 2018.
- [30] Wolfgang Paul.
Electromagnetic traps for charged and neutral particles.
Rev. Mod. Phys., 62:531–540, Jul 1990.
- [31] Lowell S. Brown.
Quantum motion in a paul trap.
Phys. Rev. Lett., 66:527–529, Feb 1991.

- [32] J. I. Cirac, L. J. Garay, R. Blatt, A. S. Parkins, and P. Zoller.
Laser cooling of trapped ions: The influence of micromotion.
Phys. Rev. A, 49:421–432, Jan 1994.
- [33] Héctor Moya-Cessa, Francisco Soto-Eguibar, José M. Vargas-Martínez, Raúl Juárez-Amaro, and Arturo Zúñiga-Segundo.
Ion-laser interactions: The most complete solution.
Physics Reports, pages 229–261, 2012.
- [34] G. S. Agarwal and S. Arun Kumar.
Exact quantum-statistical dynamics of an oscillator with time-dependent frequency and generation of nonclassical states.
Phys. Rev. Lett., 67:3665–3668, Dec 1991.
- [35] I. Ramos-Prieto, A. Espinosa-Zuñiga, M. Fernández-Guasti, and H. M. Moya-Cessa.
Quantum harmonic oscillator with time-dependent mass.
Modern Physics Letters B, 32(20):1850235, July 2018.
- [36] Ravinder Puri.
Mathematical Methods of Quantum Optics.
Springer Berlin Heidelberg Imprint Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [37] J. J. Sakurai.
Modern quantum mechanics.
Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [38] M. H. Stone.
On one-parameter unitary groups in hilbert space.
The Annals of Mathematics, 33(3):643, July 1932.
- [39] P. Ehrenfest.
Bemerkung über die angeneherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik.
Zeitschrift für Physik, 45(7-8):455–457, July 1927.
- [40] Cesare Tronci Francois Gay-Balmaz.
The hamiltonian setting of koopman-von neumann theory and the dynamics of hybrid classical-quantum systems.
<https://arxiv.org/abs/1802.04787>, 2018.

PUBLICACIÓN: **SOLUTION TO THE TIME-DEPENDENT COUPLED HARMONIC OSCILLATORS HAMILTONIAN WITH ARBITRARY INTERACTIONS**

Quantum Reports **1.1**, 82–90 (2019)

Alejandro R. Urzúa, Irán Ramos-Prieto, Manuel Fernández-Guasti y Héctor M. Moya-Cessa

Resumen

Se muestra que, usando funciones invariantes ortogonales cuánticas, es posible resolver el sistema osciladores armónicos cuánticos con amplitudes de interacción dependientes del tiempo arbitrarias en el acoplamiento posición-posición. Un sistema de este tipo es una de las generalizaciones directas de un sistema de osciladores en evolución armónica, que puede ser encontrado en física no lineal, física cuántica, biofísica, química molecular, y cosmología. Se resuelve la evolución del sistema transformando el Hamiltoniano de interacción utilizando operadores unitarios, de rotación, compresión y traslación. Como finalidad complementaria, se muestra como el sistema de N osciladores acoplados tiene un conjunto de funciones ortogonales invariantes, que a su vez puede ser escrito como invariantes de Ermakov-Lewis.

3.1 Introducción

Es bien establecido que el oscilador armónico es uno de los sistemas más estudiados en la ciencia, en especial en la física. Sirve de caballo de batalla para desarrollar modelos simples de evolución armónica y no lineal cuando sus parámetros varían en el tiempo. Y, debido a que para cualquier función de potencial local dependiente de la posición, sus mínimos de energía pueden

ser aproximados por funciones cuadráticas. A su vez, los osciladores armónicos con dependencia temporal surgen en mecánica clásica y en mecánica cuántica en sistemas como trampas ópticas para átomos y moléculas [1, 2], células, incluyendo virus y bacterias [3, 4]. Cuando, aunado a la dependencia temporal, se agrega el acoplamiento de varios sistemas de oscilador, éstos se encuentran en muchos fenómenos cuánticos de comportamiento colectivo, como interacciones ión-láser [5], campos cuantizados propagándose en medios dieléctricos [6], métodos de atajos a la adiabaticidad [7, 8], efecto Cásimir [9, 10], y como modelo de juguete para estudiar aspectos finales en la evaporación de agujeros negros [11]; además, sus modos de Schmidt se usan en el estudio de enredamiento cuántico [12].

La existencia de invariantes en sistemas mecánicos con Hamiltonianos dependientes del tiempo, han atraído bastante interés en los últimos años [13]. Los invariantes, o constantes de movimiento [14], son de vital importancia en el estudio de la evolución de sistemas dinámicos, para lo cual, se han desarrollado variedades de métodos para obtener invariantes en sistemas con un grado de libertad [15, 16, 17]. En particular, el oscilador armónico dependiente del tiempo (OADT) ha recibido mucha atención debido a sus múltiples aplicaciones en diversas áreas que presentan diversos fenómenos físicos [18]. De los muchos métodos desarrollados para obtener invariantes, la derivación de éstos en el OADT clásico, lleva directamente a funciones ortogonales inviantes, o al invariante de Lewis-Ermakov [19]. Recientemente, las técnicas de invariantes se han posicionado como clave para el estudio de soluciones aproximadas en sistemas de trampas de partículas con interacciones dependientes del tiempo [20].

La extensión al dominio cuántico de la teoría de invariantes ha evolucionado, en al menos, dos direcciones. Por un lado, el análisis de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en una dimensión, es equivalente al estudio del OADT. El ir y venir de un sistema al otro requiere un cambio constante en el potencial $V(x)$ con un apropiado factor de escala para los parámetros dependientes del tiempo de la forma $\Omega^2(t) \rightarrow 2m(\mathcal{E} - V(x))$, además de un intercambio en las variables espaciales y temporales [21]. Los resultados obtenidos en la teoría clásica de invariantes, son entonces aplicables a potenciales espaciales arbitrarios que dependan del tiempo en sistemas cuánticos unidimensionales. Usando estas técnicas, se ha mostrado cómo definir estados coherentes asociados al OADT [22], además de invariantes de amplitud y fase [19]. Por otro lado, expresiones en términos cuánticos de operadores invariantes clásicos, pueden ser usados para obtener soluciones exactas de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, tal que el Hamiltoniano clásico es llevado a un Hamiltoniano cuántico considerando las coordenadas canónicas conjugadas de posición y momento, como operadores dependientes del tiempo siguiendo el paréntesis de Lie $[\hat{q}, \hat{p}] = i$. El análisis cuántico entonces se vuelve un problema de $1 + 1$ dimensiones, donde las funciones de onda dependen de las coordenadas espacial y temporal conjuntas. Además, invariantes exactos han sido obtenidos para sobrellevar casos de potenciales especiales [23]. Los más relevantes son el potencial lineal, y el cuadrático, que lleva al oscilador armónico cuántico dependiente del tiempo (OACDT) [24].

CAPÍTULO 3. PUBLICACIÓN: SOLUTION TO THE TIME-DEPENDENT COUPLED HARMONIC OSCILLATORS HAMILTONIAN WITH ARBITRARY INTERACTIONS

Recientemente, Macedo y Guedes, han mostrado la solución de un par de osciladores armónicos acoplados dependientes del tiempo, aunque se limitan a un caso particular de los acoplamientos dependientes del tiempo [25]. Por otro lado, Duncan y del Campo, han resuelto el sistema de osciladores acoplados dependientes del tiempo, considerando que los acoplamientos son, efectivamente, independientes del tiempo para ciertas condiciones, es decir, una aproximación adiabática [8]. Además, el uso de los invariantes de Ermakov-Lewis también se ha propuesto para la solución de sistemas de osciladores armónicos acoplados [26].

El OACDT se ha resuelto para diferentes escenarios, donde su masa es dependiente del tiempo [27, 28], o que posee efectos de amortiguamiento [29]. Distintas técnicas se han usado para resolver la ecuación de Schrödinger analoga, tal como reescalamiento de la posición y el tiempo, transformaciones unitarias, e invariantes dependientes del tiempo [15]. Las constantes de movimiento asociadas en ésta último son las bien conocidas cantidades de Ermakov-Lewis [30]. Finalmente, la aplicación de los métodos de invariantes han encontrado cabida en regímenes adiabáticos [31], para el control de ruido cuántico [32], y la propagación de luz en arreglos de guía de onda [33, 34, 35, 36].

El principal propósito de este trabajo es mostrar el desarrollo de un método para resolver un sistema de ecuaciones de Schrödinger con acoplamientos en la posición dependientes del tiempo del tipo $\lambda_i(t)\hat{q}_j\hat{q}_k$, donde las funciones $\lambda(t)$ son completamente independientes entre sí. A pesar de el principal logro de este trabajo es mostrar la solución cuando el sistema contiene dos osciladores acoplados, tomamos la oportunidad para llevar la solución en invariantes, dada por Thylwe [26], para N osciladores armónicos clásicos acoplados al dominio cuántico.

A reserva de nuestro conocimiento, se presenta aquí por primera vez, la solución de un par de osciladores armónicos con acoplamientos dependientes del tiempo totalmente arbitrarios y no relacionados. Soluciones anteriores han sido dada cuando los acoplamientos dependientes del tiempo están relacionados entre ellos mediante alguna regla adecuada [25], o ya sea considerando que el cambio que experimentan puede ser llevado a un escenario de estado estable usando técnicas adiabáticas [8].

Durante el desarrollo de este trabajo, a través de una serie de transformaciones unitarias de rotación, compresión y traslación, podemos tomar el Hamiltoniano que describe la evolución de un par de osciladores dependientes del tiempo a una forma integrable, es decir, que tenga tantas constantes de movimiento como ecuaciones de evolución. Se logra esto haciendo la generalización de algunos métodos operacionales para tratar osciladores cuánticos unidimensionales dependientes del tiempo [22].

3.2 Invariante de Ermakov-Lewis para N osciladores acoplados

En reminiscencia de los sistemas de ecuaciones vistos en el Capítulo §2, donde la interacción de subsistemas mediante elementos armónicos restitutivos constantes, ecuación (1.1), fueron tratados mediante métodos algebráicos. Ahora se presenta un sistema de N osciladores armónicos acoplados con frecuencia de oscilación y acoplamientos dependientes del tiempo. Para ésto, se da la siguiente definición

Definición 3.2.1. *Un sistema de N osciladores armónicos clásicos acoplados, sigue la ecuación diferencial*

$$(3.1) \quad \ddot{u}_j(t) + \Omega_j^2(t)u_j(t) = -\eta_{j,j+1}(t)u_{j+1}(t) - \eta_{j-1,j}(t)u_{j-1}(t), \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

donde $u_j(t)$ son las coordenadas canónicas de posición. La dimensión del sistema es N , y cuenta con las condiciones de frontera $u_{-1}(t) = u_{N+1}(t) = 0, \forall t$.

La Definición 3.2.1 es, en analogía con la ecuación (1.1), una generalización donde los términos de acoplamiento k son dependientes del tiempo. Además, sin pérdida de generalidad se ha hecho que $m_j = 1, \forall j$.

En una exportación hacia el dominio cuántico, donde las coordenadas canónicas de posición u y momento \dot{u} clásicas tienen contrapartes operacionales \hat{x} y \hat{p} , el Hamiltoniano cuántico asociado dependiente del tiempo al sistema de ecuaciones (3.1) puede ser obtenido mediante el uso de las ecuaciones de Hamilton, de la forma

$$(3.2) \quad \hat{H}_N(t) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\hat{p}_j^2 + \Omega_j^2 \hat{q}_j^2 \right) + \sum_{k=1}^{N-1} \eta_{k,k+1}(t) \hat{q}_k \hat{q}_{k+1}.$$

Como se obtuvo en [37], un oscilador armónico dependiente del tiempo posee una función invariante ortogonal cuántica

$$(3.3) \quad \hat{G}_1 = u_1(t)\hat{p}_1 - \dot{u}_1(t)\hat{q}_1,$$

donde $u_1(t)$ es la solución de la ecuación homogénea anisotrópica $\ddot{u}_1(t) + \Omega_1^2(t)u_1(t) = 0$; es decir, la ecuación de oscilador armónico del (3.1), es auxiliar en la definición de la función invariante ortogonal (3.3). En vista de la propiedad de separación de las ecuaciones de (3.1) cuando son homogéneas, se puede proponer la generalización de (3.3) para el caso de N osciladores armónicos acoplados.

Teorema 3.2.1. *La generalización de la función invariante ortogonal cuántica para N osciladores armónicos acoplados obece la relación*

$$(3.4) \quad \hat{G}_N := \sum_{j=1}^N u_j(t)\hat{p}_j - \dot{u}_j(t)\hat{q}_j.$$

Demostración. Para que una función ortogonal adquiera el carácter de invariante, debe cumplir con la condición de invarianza temporal

$$\frac{d\hat{G}_N}{dt} = 0,$$

pero esta condición escrita en términos del paréntesis de Lie para operadores Hermitianos toma la forma

$$\frac{\partial \hat{G}_N}{\partial t} = i [\hat{G}_N, \hat{H}_N].$$

De lo cual obtenemos la derivada parcial

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{G}_N}{\partial t} &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial t} (u_j(t)\hat{p}_j - \dot{u}_j(t)\hat{q}_j) \\ &= \sum_{j=1}^N \dot{u}_j(t)\hat{p}_j - \ddot{u}_j(t)\hat{q}_j\end{aligned}$$

además el conmutador evaluado resulta en

$$i [\hat{G}_N, \hat{H}_N] = \sum_{k=1}^N \left(u_k \Omega_j^2 \hat{q}_j + \dot{u}_k \hat{p}_j \right) + \sum_{l=1}^{N-1} \eta_{l,l+1} (u_l \hat{q}_{l+1} + u_{l+1} \hat{q}_{l+1}).$$

Entonces igualando ecuaciones se obtiene que

$$\sum_{j=1}^N \dot{u}_j(t)\hat{p}_j - \ddot{u}_j(t)\hat{q}_j = \sum_{k=1}^N \left(u_k \Omega_j^2 \hat{q}_j + \dot{u}_k \hat{p}_j \right) + \sum_{l=1}^{N-1} \eta_{l,l+1} (u_k \hat{q}_{k+1} + u_{k+1} \hat{q}_{k+1}),$$

donde una primera simplificación resulta en

$$-\sum_{j=1}^N \left(\ddot{u}_j + u_j \Omega_j^2 \right) \hat{q}_j = \sum_{k=1}^{N-1} \eta_{k,k+1} (u_k \hat{q}_{k+1} + u_{k+1} \hat{q}_{k+1}),$$

para lo cual, el segundo término se puede escribir como

$$\sum_{k=1}^{N-1} \eta_{k,k+1} (u_k \hat{q}_{k+1} + u_{k+1} \hat{q}_{k+1}) \equiv \sum_{k=1}^N (\eta_{k-1,l} u_{k-1} + \eta_{k,k+1} u_{k+1}) \hat{q}_k - (\eta_{0,1} u_0 \hat{q}_1 + \eta_{N,N+1} u_{N+1} \hat{q}_N).$$

Con ésto anterior, finalmente obtenemos

$$-\underbrace{\sum_{j=1}^N \left(\ddot{u}_j + u_j \Omega_j^2 + \eta_{j-1,j} u_{j-1} \eta_{j,j+1} u_{j+1} \right)}_{\text{Ecuación (3.1)=0}} \hat{q}_j = \eta_{0,1} u_0 \hat{q}_1 + \eta_{N,N+1} u_{N+1} \hat{q}_N,$$

y ya que la ecuación (3.1) es una igualdad a cero, resulta que si el lado izquierdo es nulo, entonces $(\eta_{0,1} u_0 \hat{q}_1 + \eta_{N,N+1} u_{N+1} \hat{q}_N) \rightarrow 0$. Lo cual resulta en que ambos lados de la ecuación se anulan, entonces \hat{G}_N es un invariante por derecho propio. ■

A su vez, es posible obtener el invariante de Ermakov-Lewis para N osciladores armónicos a partir de la definición del invariante ortogonal (3.4). Si la variable clásica $u_j(t)$ se descompone en una forma por $u_j := \rho_j \exp\left(-i \int dt / \rho_j^2\right)$, con ρ la solución de la ecuación de Ermakov

$$\ddot{\rho}(t)_j + \Omega_j^2(t) \rho_j(t) = \rho_j^{-3}, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

entonces (3.4) es de la forma

$$\hat{G}_j \equiv \left(\rho_j(t) \hat{p} - (\dot{\rho}_j - i\rho_j^{-1}) \hat{q}_j \right) \exp\left(-i \int dt / \rho_j^2\right),$$

con lo cual finalmente se obtiene

$$(3.5) \quad \hat{I}_j := \frac{1}{2} \left(\hat{G}_j \hat{G}_j^\dagger - \hat{G}_j^\dagger \hat{G}_j \right), \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

que también puede ser escrito como $\hat{I}_j \equiv \hat{G}_j \hat{G}_j^\dagger + 1 = \hat{G}_j^\dagger \hat{G}_j - 1$. Explícitamente, la ecuación (3.5) resulta en

$$(3.6) \quad \hat{I}_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{q}_j^2}{\rho_j^2(t)} + (\rho_j(t) \hat{p}_j - \dot{\rho}_j(t) \hat{q}_j) \right)^2.$$

El invariante clásico

En los procesos de cuantización [38], donde las cantidades clásicas como variables, funciones y números reales, pasan a ser observables, operadores y números complejos, es posible realizar el proceso inverso (decuantizar). Para ésto, se asocian a los operadores originales, cantidades reales, es decir c-números de la forma $\hat{p} \mapsto v$, $\hat{x} \mapsto v$, con lo cual el invariante (3.4) adquiere una naturaleza clásica determinista

$$G_N := \sum_{j=1}^N (u_j \bullet \dot{v}_j)(t) - (\dot{u}_j \bullet v_j)(t),$$

donde, a su vez, las funciones $u(t)_j$ y v_j son soluciones linealmente independientes de la ecuación (3.1).

3.3 Dos osciladores acoplados dependientes del tiempo

En un escenario, donde el Hamiltoniano de dos osciladores con acoplamiento cuadrático en la posición dependiente del tiempo sea

$$(3.7) \quad \hat{H}(t) = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + k_x(t) \hat{q}_x^2 + k_y(t) \hat{q}_y^2 \right) + k_I(t) (\hat{q}_x - \hat{q}_y)^2,$$

para $k_x(t)$, $k_y(t)$ y $k_I(t)$ constantes de restitución dependientes del tiempo. Es posible, realizando una transformación, como Macedo y Guedes justifican [25], reducir el orden del acoplamiento de

cuadrático a lineal. Entonces, se procede haciendo la sustitución $\Omega_j^2(t) = k_j(t) + k_I(t)$ para $j = x, y$; además, se introduce un nuevo parámetro dependiente del tiempo $\eta(t) = 2k_I(t)$ que, con lo cual resulta que la ecuación (3.7) se reduce a

$$(3.8) \quad \hat{H}(t) = \frac{1}{2} \left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \Omega_x^2(t)\hat{q}_x^2 + \Omega_y^2(t)\hat{q}_y^2 \right) + \eta(t)\hat{q}_x\hat{q}_y.$$

Mediante las ecuaciones de Hamilton, las ecuaciones de movimiento clásicas asociadas de (3.8) son

$$(3.9) \quad \dot{u}_j + \Omega_j^2(t)u_j = -\eta(t)u_j, \quad j = \{x, y\},$$

de donde emerge el invariante ortogonal cuántico dependiente del tiempo

$$(3.10) \quad \hat{G} = u_x\hat{p}_x - \dot{u}_x\hat{q}_x + u_y\hat{p}_y - \dot{u}_y\hat{q}_y,$$

y que como se muestra en [19], está compuesto de dos invariantes ortogonales cuánticos obtenidos mediante el procedimiento para invariantes de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo grado

$$\hat{G}_x = (u_x\hat{p}_x - \dot{u}_x\hat{q}_x) - \int dt \eta(t)(u_x\hat{q}_y - u_y\hat{q}_x), \quad \hat{G}_y = (u_y\hat{p}_y - \dot{u}_y\hat{q}_y) - \int dt \eta(t)(u_y\hat{q}_x - u_x\hat{q}_y),$$

de cuya suma se obtiene $\hat{G}_x + \hat{G}_y = \hat{G}$ de (3.10), debido a que los términos de integral se anulan. Finalmente, \hat{G} es invariante debido al teorema 2.2.1.

Transformaciones unitarias I

La finalidad de una transformación unitaria es tomar un operador unitario y realizar una transformación de similaridad para, en este especial contexto, llevar cantidades dependientes del tiempo, a unas totalmente independientes [39]. Los operadores unitarios reconocen a las traslaciones, compresiones y rotaciones. Para los dos primeros casos, la definición de los operadores se hace con la meta de llevar el invariante \hat{G} a un escenario independiente del tiempo

En el caso unidimensional, para un invariante $\hat{G} = u(t)\hat{p} - \dot{u}(t)\hat{q}$, el operador de traslación

$$(3.11) \quad \hat{D}_u := \exp \left(-\frac{i}{2} \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} \hat{q}^2 \right),$$

lo lleva a una forma $\hat{G}' = \hat{D}_u \hat{G} \hat{D}_u^\dagger = u(t)\hat{p}$. Es decir, eliminó el término $\dot{u}(t)\hat{q}$. En seguida, un operador de compresión [40] de la forma

$$(3.12) \quad \hat{S}_u := \exp \left(\frac{i}{2} \ln u(t) (\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q}) \right),$$

lleva al invariante \hat{G}' a una reducción $\hat{G}'' = \hat{S}_u \hat{G}' \hat{S}_u^\dagger = \hat{p}$. Con lo cual, el invariante original con dependencia temporal, es llevado a una forma totalmente independiente del tiempo, únicamente sobreviviendo el operador de momento \hat{p} .

Es posible entonces, tomar las definiciones (3.11) y (3.12) para construir el operador de transformación unidimensional

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \hat{T}_u &:= \hat{S}_u \hat{D}_u \\ &= \exp\left(\frac{i}{2} \ln u(t)(\hat{q}\hat{p} + \hat{p}\hat{q})\right) \exp\left(-\frac{i}{2} \frac{\dot{u}(t)}{u(t)} \hat{q}^2\right). \end{aligned}$$

Ahora, como se estipuló en el preámbulo de este trabajo, la necesidad de llevar las cantidades dependientes del tiempo a una independientes de él, nos encamina a definir, con ayuda de (3.13), un operador de transformación unitario bidimensional $\hat{T}_{x,y}$ de la forma

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \hat{T}_{x,y} &:= \hat{T}_x \hat{T}_y \equiv \hat{T}_u \\ &= \underbrace{\exp\left(\frac{i}{2} \ln u_x(t)(\hat{q}_x \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{q}_x)\right)}_{\hat{S}_x} \underbrace{\exp\left(\frac{i}{2} \frac{\dot{u}_x(t)}{u_x(t)} \hat{q}_x^2\right)}_{\hat{D}_x} \underbrace{\exp\left(-\frac{i}{2} \ln u_y(t)(\hat{q}_y \hat{p}_y + \hat{p}_y \hat{q}_y)\right)}_{\hat{S}_y} \underbrace{\exp\left(-\frac{i}{2} \frac{\dot{u}_y(t)}{u_y(t)} \hat{q}_y^2\right)}_{\hat{D}_y}. \end{aligned}$$

Que si es usado en el invariante ortogonal (3.10), resulta en

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \hat{G}_T &= \hat{T}_{x,y} \hat{G} \hat{T}_{x,y}^\dagger \\ &= \hat{T}_x \hat{T}_y (u_x \hat{p}_x - \dot{u}_x \hat{q}_x + u_y \hat{p}_y - \dot{u}_y \hat{q}_y) (\hat{T}_x \hat{T}_y)^\dagger \\ &= \hat{T}_x (u_x \hat{p}_x - \dot{u}_x \hat{q}_x) \hat{T}_x^\dagger + \hat{T}_y (u_y \hat{p}_y - \dot{u}_y \hat{q}_y) \hat{T}_y^\dagger \\ &= \hat{p}_x + \hat{p}_y, \end{aligned}$$

según las transformaciones dadas por (3.11), (3.12) y (3.13).

Es tiempo entonces, de resolver el problema dinámico. Para transformar la ecuación de Schrödinger asociada a un problema dinámico, en este caso

$$(3.16) \quad i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle,$$

mediante el operador \hat{T}_u , (3.14). Se transforma el vector de estado por

$$(3.17) \quad \hat{T}_u |\psi(t)\rangle = |\phi_u(t)\rangle \Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} (\hat{T}_u^\dagger |\phi_u(t)\rangle) = \hat{H} (\hat{T}_u^\dagger |\phi_u(t)\rangle).$$

Donde la parte izquierda de la ecuación, tanto \hat{T}_u^\dagger como $|\phi_u(t)\rangle$ dependen de t , por tanto se tiene

$$(3.18) \quad i \frac{\partial}{\partial t} (\hat{T}_u^\dagger) |\phi_u(t)\rangle = i \left(\hat{T}_u^\dagger \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \hat{T}_u^\dagger \right) |\phi_u(t)\rangle,$$

que mediante la definición de \hat{T}_u , (3.14), se puede ver que su derivada temporal resulta en

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{T}_u^\dagger &= -\frac{i}{2} \hat{T}_u^\dagger \left(\frac{u_x(t)}{\dot{u}_x(t)} (\hat{q}_x \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{q}_x) + \frac{\ddot{u}_x(t)u_x(t) - \dot{u}_x(t)^2}{u_x(t)^2} (\hat{S}_x^\dagger \hat{q}_x^2 \hat{S}_x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_y(t)}{\dot{u}_y(t)} (\hat{q}_y \hat{p}_y + \hat{p}_y \hat{q}_y) - \frac{\ddot{u}_y(t)u_y(t) - \dot{u}_y(t)^2}{u_y(t)^2} (\hat{S}_y^\dagger \hat{q}_y^2) \right), \end{aligned}$$

que con ayuda del apéndice 2.B, las transformaciones de las cantidades involucradas en (3.19) resulta en

(3.20)

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{T}_u^\dagger = \frac{i}{2} \hat{T}_u^\dagger \left((\ddot{u}_x(t)u_x(t) - \dot{u}_x(t)^2) \hat{q}_x^2 - \frac{\dot{u}_x(t)}{u_x(t)} (\hat{q}_x \hat{p}_x + \hat{p}_x \hat{q}_x) \right. \\ \left. + (\ddot{u}_y(t)u_y(t) - \dot{u}_y(t)^2) \hat{q}_y^2 - \frac{\dot{u}_y(t)}{u_y(t)} (\hat{q}_y \hat{p}_y + \hat{p}_y \hat{q}_y) \right) \equiv \frac{i}{2} \hat{T}_u^\dagger \square,$$

con lo cual se puede reescribir la ecuación (3.18) como

$$(3.21) \quad i \hat{T}_u^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{2} \square \right) |\phi_u(t)\rangle,$$

que a su vez, al estar el operador \hat{T}_u^\dagger factorizado a la izquierda, permite reescribir el problema dinámico, (3.17), en el espacio transformado de la forma

$$(3.22) \quad i \frac{\partial}{\partial t} |\phi_u(t)\rangle = \left(\hat{T}_u \hat{H} \hat{T}_u^\dagger + \frac{1}{2} \square \right) |\phi_u(t)\rangle.$$

Ahora, el trabajo es realizar la transformación del Hamiltoniano (3.8) por la acción del operador \hat{T}_u . Para ésto, en el apéndice 2.B se marcan las acciones de este operador sobre las variables canónicas, resultando en

(3.23)

$$\hat{T}_u \hat{H} \hat{T}_u = \frac{1}{2} \hat{T}_u \left(\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \Omega_x^2(t) \hat{q}_x^2 + \Omega_y^2(t) \hat{q}_y^2 \right) + 2\eta(t) \hat{q}_x \hat{q}_y \right) \hat{T}_u^\dagger \\ = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\hat{p}_x}{u_x(t)} + \dot{u}(t)_x \hat{q}_x \right)^2 + \left(\frac{\hat{p}_y}{u_y(t)} + \dot{u}_y(t) \hat{q}_y \right)^2 \right. \\ \left. + \Omega_x^2(t) u_x(t)^2 \hat{q}_x^2 + \Omega_y^2(t) u_y(t)^2 \hat{q}_y^2 + 2\eta(t) u_x(t) u_y(t) \hat{q}_x \hat{q}_y \right),$$

y que una vez que se suma el resultado $(1/2)\square$ de (3.20), se obtiene

$$(3.24) \quad i \frac{\partial}{\partial t} |\phi_u(t)\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{p}_x^2}{u_x(t)^2} + \underbrace{\left(\Omega_x^2(t) u_x(t) + \ddot{u}_x(t) \right) u_x \hat{q}_x^2}_{-\eta(t) u_y} \right. \\ \left. + \frac{\hat{p}_y^2}{u_y(t)^2} + \underbrace{\left(\Omega_y^2(t) u_y(t) + \ddot{u}_y(t) \right) u_y \hat{q}_y^2}_{-\eta(t) u_x} + 2\eta(t) u_x(t) u_y(t) \hat{q}_x \hat{q}_y \right) |\phi_u(t)\rangle.$$

Que sustituyendo lo que está entre llaves, y juntando términos semejantes, nos lleva a la ecuación dinámica transformada por \hat{T}_u

$$(3.25) \quad i \frac{\partial}{\partial t} |\phi_u(t)\rangle = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\hat{p}_x^2}{u_x(t)^2} + \frac{\hat{p}_y^2}{u_y(t)^2} - \eta(t) u_x(t) u_y(t) (\hat{q}_x - \hat{q}_y)^2 \right)}_{\hat{H}_u(t)} |\phi_u(t)\rangle.$$

Con la ecuación anterior en forma, es posible realizar una transformación de rotación mediante un operador \hat{R}_θ .

Transformaciones unitarias II

Existe otro tipo de operadores unitarios, además de aquellos de compresión o traslación, que permiten llevar la representación de las variables canónicas involucradas, a una forma integrable, mediante la diagonalización de éstas en una base ortogonal finita. Este tipo de operaciones se realiza mediante los generadores de rotaciones de un álgebra, en el caso tridimensional, en particular, éstos pueden ser combinaciones $\hat{q}_x\hat{p}_y - \hat{q}_y\hat{p}_x$ en la base de \hat{q}_z y \hat{p}_z . Entonces tenemos, una rotación alrededor de eje Z .

Definición 3.3.1. *Existe un operador \hat{R}_θ que realiza una rotación θ radianes alrededor del eje Z definido por*

$$(3.26) \quad \hat{R}_\theta := \exp(i\theta(\hat{q}_x\hat{p}_y - \hat{q}_y\hat{p}_x)),$$

cuyas acciones sobre las variables canónicas generan rotaciones derecha, o izquierdas, dadas explícitamente en el apéndice 3.A.1.

Entonces, la ecuación dinámica transformada (3.25), puede ser *rotada* mediante la acción del operador (3.26)

$$(3.27) \quad |\phi_\theta(t)\rangle = \hat{R}_\theta |\phi_u(t)\rangle \Rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} |\phi_u(t)\rangle = \underbrace{\hat{R}_\theta \hat{H}_u(t) \hat{R}_\theta^\dagger}_{\hat{H}_\theta(t)} |\phi_\theta(t)\rangle,$$

donde $\hat{H}_\theta(t)$ es el Hamiltoniano $\hat{H}_u(t)$ transformado por la acción de $\hat{R}_\theta(t)$, que puede ser dado explícitamente con ayuda de lo establecido en los apéndices 3.A.1.

$$(3.28) \quad \begin{aligned} \hat{H}_\theta(t) &= \hat{R}_\theta(t) \hat{H}_u(t) \hat{R}_\theta^\dagger \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{p}_x^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{u_x(t)^2} + \frac{\sin^2 \theta}{u_y(t)^2} \right) + \hat{p}_y^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{u_y(t)^2} + \frac{\sin^2 \theta}{u_x(t)^2} \right) + 2\hat{p}_x\hat{p}_y \sin(2\theta) \left(\frac{1}{u_y(t)^2} - \frac{1}{u_x(t)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \hat{q}_x^2(1 - \sin(2\theta)) + \hat{q}_y^2(1 + \sin(2\theta)) - 2\cos(2\theta)\hat{q}_x\hat{q}_y \right). \end{aligned}$$

Haciendo que el ángulo de rotación sea $\theta = \pi/4$, la ecuación (3.28) resulta en

$$(3.29) \quad i\frac{\partial}{\partial t} |\phi_\theta(t)\rangle = \left(\frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2\mu(t)} + \frac{\hat{p}_x\hat{p}_y}{2\nu(t)} + \lambda(t)\hat{q}_y^2 \right) |\phi_\theta(t)\rangle,$$

con los nuevos parámetros dependientes del tiempo dados por

$$(3.30) \quad \frac{1}{\mu(t)} = \frac{1}{u_x(t)^2} + \frac{1}{u_y(t)^2}, \quad \frac{1}{\nu(t)} = \frac{1}{u_y(t)^2} + \frac{1}{u_x(t)^2}, \quad \lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta(t)u_x(t)u_y(t).$$

Es de destacar que la ecuación (3.29) ya es totalmente integrable, ya que las operaciones involucradas de operadores, comutan para todo tiempo t . Entonces, podemos declarar que el

Hamiltoniano ha sido separado en dos partes: uno que contiene una partícula libre en la dirección x , que es dependiente del tiempo; además, un término de oscilador armónico dependiente del tiempo en la dirección y con un término de amortiguamiento proporcional a \hat{p}_x .

Finalmente, la ecuación (3.29) puede ser llevada a una forma más familiar, si se transforma mediante un operador de traslación $\hat{D} = \exp(i\alpha(t)\hat{p}_y)\exp(\beta(t)\hat{q}_y)$, tal que $|\phi_D\rangle = \hat{D}|\phi_0\rangle$, entonces se obtiene

$$(3.31) \quad i\frac{\partial}{\partial t}|\phi_D(t)\rangle = \left(\frac{\hat{p}_x^2}{2\mu(t)} - \frac{\beta(t)\hat{p}_x}{2\nu(t)} + \frac{\hat{p}_y^2}{2\mu(t)} + \lambda(t)\hat{q}_y^2 + \alpha(t)\dot{\beta}(t) + \lambda(t)\alpha(t)^2 + \frac{\beta(t)^2}{2\mu(t)} \right) |\phi_D(t)\rangle,$$

donde las funciones $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ no solo dependen de t , sino también del operador \hat{p}_x , obedeciendo el sistema de ecuaciones diferenciales

$$(3.32) \quad \dot{\alpha}(t) + \frac{\beta(t)}{\mu(t)} - \frac{\hat{p}_x}{2\nu(t)} = 0, \quad \dot{\beta}(t) - 2\lambda(t)\alpha(t) = 0.$$

Se nota que el Hamiltoniano en (3.31) ha sido separado en dos partes: uno que contiene un oscilador dependiente del tiempo en la dirección y , que puede ser resuelto mediante el método de invariantes de Ermakov-Lewis; y en la otra parte, una partícula libre en x , cuya solución es integrable [22]. Además, en el esquema de atajos a la adiabaticidad [7], las ecuaciones (3.32) proveen rutas para obtener resultados finales en procesos adiabáticos lentos.

Las acción del operador \hat{R}_θ sobre funciones de \hat{q}_x y \hat{q}_y , es obtenido mediante la acción derecha de éste por la forma descrita en el apéndice 4.A.1.

$$\hat{R}_\theta |\hat{q}_x, \hat{q}_y; t\rangle = |\hat{q}_x \cos \theta - \hat{q}_y \sin \theta, \hat{q}_y \cos \theta + \hat{q}_x \sin \theta; t\rangle$$

3.4 Conclusiones

Se mostró que el invariante cuántico \hat{G}_N de N osciladores armónicos dependientes del tiempo es, de hecho, constante para funciones de restitución y acoplamiento arbitrarias. Trasladamos este resultado a un escenario clásico. En el caso de dos osciladores acoplados por coeficientes arbitrarios, se mostró cómo resolver el sistema dinámico del Hamiltoniano para cualquier tipo de función de acoplamiento temporal, ya que, hasta donde se tiene registro, se había resuelto para casos especiales donde estas funciones estaban relacionadas y generaban una evolución adiabática [25]. Se logró lo anterior usando funciones invariantes ortogonales introducidas en [19], las cuales permiten separar el Hamiltoniano en una tal que el desacoplamiento se acompaña de sistemas de evolución libre y osciladores unidimensionales dependientes del tiempo, de los cuales la solución es bastante conocida [25, 30].

Es sabido que el invariante de Ermakov-Lewis para un sólo oscilador, no muestra la dependencia temporal explícitamente. Sin embargo, éste hecho no se cumple cuando cada oscilador es considerado por separado. Los invariantes cuánticos en (3.10) no contienen dependencia de t , sin embargo, tanto el invariante \hat{G}_x como \hat{G}_y , presentan dependencia explícita del tiempo a través de

$\eta(t)$, cosa que desaparece al considerar la suma $\hat{G}_x + \hat{G}_y$. Este hecho se cumple, no sólo para dos osciladores, sino para N de ellos.

El hecho de poder separar, y diagonalizar el sistema dinámico, a través de una serie de transformaciones dependientes del tiempo, que resultan en un sistema integrable de sistemas libres y amortiguados para el caso $N = 2$, nos da la confianza de creer que ésto se sigue cumpliendo para todo caso $N > 2$.

Hasta el momento, y basados en una documentación exhaustiva, es la primera vez que una solución para dos osciladores con acoplamientos dependientes del tiempo arbitrarios, es obtenida.

3.A Apéndices

3.A.1 Transformación del Hamiltoniano por el operador \hat{R}_θ

Para transformar cualquier ecuación dinámica, es decir el Hamiltoniano, primero debemos conocer cómo se transforman las coordenadas canónicas que involucra. El operador que actúa sobre estas cantidades en cuestión es

$$\hat{R}_\theta = \exp(i\theta(\hat{q}_x\hat{p}_y - \hat{q}_y\hat{p}_x)),$$

que claramente es un generador de rotaciones del álgebra $\mathfrak{su}(2)$ en la base de momento angular \hat{L}_z . Los elementos involucrados cumplen con los paréntesis de Lie

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{i,j}, \quad [\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad i, j = \{x, y\}$$

por tanto, el término $\hat{q}_x\hat{p}_y - \hat{p}_x\hat{q}_y$ operando en el paréntesis de Lie de \hat{q}_x, \hat{q}_y , y \hat{p}_x, \hat{p}_y resulta en

$$\begin{aligned} \underbrace{[\hat{q}_x\hat{p}_y - \hat{p}_x\hat{q}_y, \hat{q}_k]}_{\hat{L}_z} &= [\hat{q}_x\hat{p}_y, \hat{q}_k] - [\hat{p}_x\hat{q}_y, \hat{q}_k] \\ &= \hat{q}_x[\hat{p}_y, \hat{q}_k] - [\hat{p}_x, \hat{q}_k]\hat{q}_y \\ &= -i\hat{q}_x\delta_{y,k} + i\hat{q}_y\delta_{x,k}, \end{aligned}$$

con lo cual

$$[\hat{L}_z, \hat{q}_x] = i\hat{q}_y, \quad [\hat{L}_z, \hat{q}_y] = -i\hat{q}_x, \quad \Rightarrow \quad [\hat{L}_z, \hat{p}_x] = i\hat{p}_y, \quad [\hat{L}_z, \hat{p}_y] = -i\hat{p}_x.$$

Ahora, la acción completa del operador \hat{R}_θ se realiza mediante la expansión de Baker-Campbell-Hausdorff, por lo cual, para \hat{q}_x y \hat{q}_y se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{R}_\theta \hat{q}_x \hat{R}_\theta^\dagger &= \hat{q}_k + i\theta \underbrace{[\hat{L}_z, \hat{q}_k]}_{\hat{A}_1} + \frac{1}{2!} (i\theta)^2 \underbrace{[\hat{A}_1, \hat{q}_k]}_{\hat{A}_2} + \dots \\ &= \hat{q}_k + i\theta (i\hat{q}_y) + \frac{1}{2!} (i\theta)^2 (-i^2 \hat{q}_x) + \frac{1}{3!} (i\theta)^3 (-i^3 \hat{q}_y) + \dots \\ &= \hat{q}_x \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 - \dots\right)}_{\cos \theta} - \hat{q}_y \underbrace{\left(\theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \dots\right)}_{\sin \theta} \\ &= \hat{q}_x \cos \theta - \hat{q}_y \sin \theta, \\ \Rightarrow \hat{R}_\theta \hat{q}_y \hat{R}_\theta^\dagger &= \hat{q}_y \cos \theta + \hat{q}_x \sin \theta, \\ \hat{R}_\theta \hat{p}_x \hat{R}_\theta^\dagger &= \hat{p}_x \cos \theta - \hat{p}_y \sin \theta, \\ \hat{R}_\theta \hat{p}_y \hat{R}_\theta^\dagger &= \hat{p}_y \cos \theta + \hat{p}_x \sin \theta.\end{aligned}$$

Ahora, ya que el Hamiltoniano de un oscilador armónico también involucra cantidades cuadráticas, se requiere establecer lo siguiente

Lema 3.A.1. Si se conoce la acción de un operador \hat{A} sobre un operador \hat{B} , la acción sobre el cuadrado de \hat{B} es

$$\exp(i\alpha \hat{A}) \hat{B}^2 \exp(-i\alpha \hat{A}) = (\exp(i\alpha \hat{A}) \hat{B} \exp(-i\alpha \hat{A}))^2.$$

Demostración. Si \hat{A} y \hat{B} cierran en un álgebra, es posible entonces la acción del operador unitario que encierra a \hat{A} , sobre el cuadrado de \hat{B} . Para ésto, se requiere la propiedad del operador unidad

$$\exp(i\alpha \hat{A}) \exp(-i\alpha \hat{A}) = \hat{1},$$

con lo cual, separando $\hat{B}^2 = \hat{B}\hat{B}$, e introduciendo un $\hat{1}$ entre ambas, resulta en

$$\begin{aligned}\exp(i\alpha \hat{A}) \hat{B}^2 \exp(-i\alpha \hat{A}) &= \exp(i\alpha \hat{A}) \hat{B}\hat{B} \exp(-i\alpha \hat{A}) \\ &= \exp(i\alpha \hat{A}) \hat{B} \underbrace{\exp(-i\alpha \hat{A}) \exp(i\alpha \hat{A})}_{\hat{1}} \hat{B} \exp(-i\alpha \hat{A}) \\ &= (\exp(i\alpha \hat{A}) \hat{B} \exp(-i\alpha \hat{A})) (\exp(i\alpha \hat{A}) \hat{B} \exp(-i\alpha \hat{A})) \\ &= (\exp(i\alpha \hat{A}) \hat{B} \exp(-i\alpha \hat{A}))^2.\end{aligned}$$

■

Con esto anterior, las cantidades cuadráticas transformadas resultan en

$$\begin{aligned}\hat{R}_\theta \hat{q}_x^2 \hat{R}_\theta^\dagger &= \hat{q}_x^2 \cos^2 \theta - 2\hat{q}_x \hat{q}_y \cos \theta \sin \theta + \hat{q}_y^2 \sin^2 \theta, \\ \hat{R}_\theta \hat{q}_y^2 \hat{R}_\theta^\dagger &= \hat{q}_y^2 \cos^2 \theta + 2\hat{q}_x \hat{q}_y \cos \theta \sin \theta + \hat{q}_x^2 \sin^2 \theta, \\ \hat{R}_\theta \hat{p}_x^2 \hat{R}_\theta^\dagger &= \hat{p}_x^2 \cos^2 \theta - 2\hat{p}_x \hat{p}_y \cos \theta \sin \theta + \hat{p}_y^2 \sin^2 \theta, \\ \hat{R}_\theta \hat{p}_y^2 \hat{R}_\theta^\dagger &= \hat{p}_y^2 \cos^2 \theta + 2\hat{p}_x \hat{p}_y \cos \theta \sin \theta + \hat{p}_x^2 \sin^2 \theta,\end{aligned}$$

ya que \hat{q}_x y \hat{q}_y conmutan, el orden de su producto es indistinto y puede ser sumado.

3.2 Bibliografía

- [1] Héctor Moya-Cessa, Francisco Soto-Eguibar, José M. Vargas-Martínez, Raúl Juárez-Amaro, and Arturo Zúñiga-Segundo.
Ion–laser interactions: The most complete solution.
Physics Reports, 513(5):229–261, April 2012.
- [2] Alexander D. Cronin, Jörg Schmiedmayer, and David E. Pritchard.
Optics and interferometry with atoms and molecules.
Reviews of Modern Physics, 81(3):1051–1129, July 2009.
- [3] A. Ashkin, J. M. Dziedzic, and T. Yamane.
Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams.
Nature, 330(6150):769–771, December 1987.
- [4] A Ashkin and J. Dziedzic.
Optical trapping and manipulation of viruses and bacteria.
Science, 235(4795):1517–1520, March 1987.
- [5] Héctor Moya-Cessa, Francisco Soto-Eguibar, José M. Vargas-Martínez, Raúl Juárez-Amaro, and Arturo Zúñiga-Segundo.
Ion–laser interactions: The most complete solution.
Physics Reports, pages 229–261, 2012.
- [6] C. K. Law.
Effective hamiltonian for the radiation in a cavity with a moving mirror and a time-varying dielectric medium.
Physical Review A, 49(1):433–437, January 1994.
- [7] Xi Chen, A. Ruschhaupt, S. Schmidt, A. del Campo, D. Guéry-Odelin, and J. G. Muga.
Fast optimal frictionless atom cooling in harmonic traps: Shortcut to adiabaticity.
Physical Review Letters, 104(6), February 2010.
- [8] Callum W Duncan and Adolfo del Campo.
Shortcuts to adiabaticity assisted by counterdiabatic born–oppenheimer dynamics.
New Journal of Physics, 20(8):085003, August 2018.
- [9] V. V. Dodonov and A. B. Klimov.
Generation and detection of photons in a cavity with a resonantly oscillating boundary.
Physical Review A, 53(4):2664–2682, April 1996.

CAPÍTULO 3. PUBLICACIÓN: SOLUTION TO THE TIME-DEPENDENT COUPLED HARMONIC OSCILLATORS HAMILTONIAN WITH ARBITRARY INTERACTIONS

- [10] Ricardo Román-Ancheyta, Irán Ramos-Prieto, Armando Pérez-Leija, Kurt Busch, and Roberto de J. León-Montiel.
Dynamical casimir effect in stochastic systems: Photon harvesting through noise.
Physical Review A, 96(3), September 2017.
- [11] C. Kiefer, J. Marto, and P.V. Moniz.
Indefinite oscillators and black-hole evaporation.
Annalen der Physik, 18(10-11):722–735, October 2009.
- [12] Dmitry N. Makarov.
Coupled harmonic oscillators and their quantum entanglement.
Physical Review E, 97(4), April 2018.
- [13] Serge Bouquet and H. Ralph Lewis.
A second invariant for one-degree-of-freedom, time-dependent hamiltonians given a first invariant.
Journal of Mathematical Physics, 37(11):5509–5517, November 1996.
- [14] Herbert Goldstein.
Classical mechanics.
Addison Wesley, San Francisco, 2002.
- [15] John R. Ray and James L. Reid.
Invariants for forced time-dependent oscillators and generalizations.
Physical Review A, 26(2):1042–1047, August 1982.
- [16] N. J. Günther and P. G. L. Leach.
Generalized invariants for the time-dependent harmonic oscillator.
Journal of Mathematical Physics, 18(4):572–576, April 1977.
- [17] Kurt Bernardo Wolf.
On time-dependent quadratic quantum hamiltonians.
SIAM Journal on Applied Mathematics, 40(3):419–431, June 1981.
- [18] R. K. Colegrave and M. A. Mannan.
Invariants for the time-dependent harmonic oscillator.
Journal of Mathematical Physics, 29(7):1580–1587, July 1988.
- [19] M. Fernández Guasti and A. Gil-Villegas.
Orthogonal functions invariant for the time-dependent harmonic oscillator.
Physics Letters A, 292(4-5):243–245, January 2002.
- [20] Andreas Fring and Rebecca Tenney.

CAPÍTULO 3. PUBLICACIÓN: SOLUTION TO THE TIME-DEPENDENT COUPLED HARMONIC OSCILLATORS HAMILTONIAN WITH ARBITRARY INTERACTIONS

- Time-independent approximations for time-dependent optical potentials.
The European Physical Journal Plus, 135(2), January 2020.
- [21] Héctor Moya-Cessa and Manuel Fernández Guasti.
Coherent states for the time dependent harmonic oscillator: the step function.
Physics Letters A, 311(1):1–5, May 2003.
- [22] M. Fernández Guasti and H. Moya-Cessa.
Amplitude and phase representation of quantum invariants for the time-dependent harmonic oscillator.
Physical Review A, 67(6), June 2003.
- [23] H. Ralph Lewis and P. G. L. Leach.
Exact invariants for a class of time-dependent nonlinear hamiltonian systems.
Journal of Mathematical Physics, 23(1):165–175, January 1982.
- [24] I. Guedes.
Solution of the schrödinger equation for the time-dependent linear potential.
Physical Review A, 63(3), February 2001.
- [25] D. X. Macedo and I. Guedes.
Time-dependent coupled harmonic oscillators.
Journal of Mathematical Physics, 53(5):052101, May 2012.
- [26] Karl-Erik Thylwe and H Jürgen Korsch.
The 'ermakov - lewis' invariants for coupled linear oscillators.
Journal of Physics A: Mathematical and General, 31(14):L279–L285, April 1998.
- [27] Héctor Moya-Cessa and Manuel Fernández-Guasti.
Time dependent quantum harmonic oscillator subject to a sudden change of mass: continuous solution.
Revista Mexicana de Física, 35(1):42–46, 2007.
- [28] I. Ramos-Prieto, A. Espinosa-Zuñiga, M. Fernández-Guasti, and H. M. Moya-Cessa.
Quantum harmonic oscillator with time-dependent mass.
Modern Physics Letters B, 32(20):1850235, July 2018.
- [29] Kyu-Hwang Yeon, Duk-Hyeon Kim, Chung-In Um, Thomas F. George, and Lakshmi N. Pandey.
Relations of canonical and unitary transformations for a general time-dependent quadratic hamiltonian system.
Physical Review A, 55(6):4023–4029, June 1997.

CAPÍTULO 3. PUBLICACIÓN: SOLUTION TO THE TIME-DEPENDENT COUPLED HARMONIC OSCILLATORS HAMILTONIAN WITH ARBITRARY INTERACTIONS

- [30] H. R. Lewis.
Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type hamiltonians.
Physical Review Letters, 18(13):510–512, March 1967.
- [31] M. A. de Ponte and Alan C. Santos.
Adiabatic quantum games and phase-transition-like behavior between optimal strategies.
Quantum Information Processing, 17(6), May 2018.
- [32] Amikam Levy, A Kiely, J G Muga, R Kosloff, and E Torrontegui.
Noise resistant quantum control using dynamical invariants.
New Journal of Physics, 20(2):025006, February 2018.
- [33] D. Barral and J. Liñares.
Quantum light propagation in longitudinally inhomogeneous waveguides as a spatial lewis–ermakov physical invariance.
Optics Communications, 359:61–65, January 2016.
- [34] David Barral and Jesús Liñares.
Spatial propagation of quantum light states in longitudinally inhomogeneous waveguides.
Journal of the Optical Society of America B, 32(9):1993, August 2015.
- [35] Armando Perez-Leija, Robert Keil, Hector Moya-Cessa, Alexander Szameit, and Demetrios N. Christodoulides.
Perfect transfer of path-entangled photons in Jxphotonic lattices.
Physical Review A, 87(2), February 2013.
- [36] Armando Perez-Leija, J. C. Hernandez-Herrejon, Hector Moya-Cessa, Alexander Szameit, and Demetrios N. Christodoulides.
Generating photon-encodedWstates in multiport waveguide-array systems.
Physical Review A, 87(1), January 2013.
- [37] Alejandro R. Urzúa, Irán Ramos-Prieto, Francisco Soto-Eguibar, Víctor Arrizón, and Héctor M. Moya-Cessa.
Light propagation in inhomogeneous media, coupled quantum harmonic oscillators and phase transitions.
Scientific Reports, 9(1), November 2019.
- [38] J. J. Sakurai.
Modern quantum mechanics.
Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [39] Ravinder Puri.
Mathematical Methods of Quantum Optics.

CAPÍTULO 3. PUBLICACIÓN: SOLUTION TO THE TIME-DEPENDENT COUPLED
HARMONIC OSCILLATORS HAMILTONIAN WITH ARBITRARY INTERACTIONS

Springer Berlin Heidelberg Imprint Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.

- [40] H. M. Moya-Cessa and F. Soto-Eguibar.
Differential equations: an operational approach.
Rinton Press, 2011.

PARTE TRES

PUBLICACIÓN: LIGHT PROPAGATION IN INHOMOGENEOUS MEDIA,
COUPLED QUANTUM HARMONIC OSCILLATORS AND PHASE
TRANSITIONS

Scientific Reports **9.1**, 8401 (2019)

Alejandro R. Urzúa, Irán Ramos-Prieto, Francisco Soto-Eguibar, Víctor Arrizón y Héctor
M. Moya-Cessa

Resumen

Este trabajo responde a dos propósitos. En primera instancia, se muestra cómo utilizando analogía con la óptica clásica, es posible modelar dos osciladores armónicos acoplados y, también, dos campos cuantizados interactuando. Además, en segunda instancia, se lleva la analogía explícita de los osciladores armónicos acoplados clásicos a una correspondencia con un medio tipo GRIN¹ anisotrópicos. Esta relación se resuelve en un sistema de referencia rotado, usando métodos y técnicas de operadores utilizados en la teoría cuántica. Se muestra que el sistema, a su vez, genera una transición de fase en los parámetros de acoplamiento que lo lleva a transitar desde un sistema armónico, una dinámica libre, hasta un sistema repulsivo.

4.1 Introducción

Debido a la formulación de la mecánica cuántica, como una extensión basada en principios clásicos, con axiomas y entendimiento basado en hallazgos novedosos sobre la estructura atómica,

¹Graded Index, por sus siglas en inglés para medios de índice de refracción.

ya hace 90 años, es intrínseco que existan analogías entre ambos paradigmas que pueden ser explotados y aprovechados. Este tipo de forma de trabajo es especialmente útil cuando se pueden generar, y ocupar, métodos y herramientas matemáticas para dar solución a un problema de un clásico en función de uno cuántico, y viceversa [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]. En el caso específico de la óptica, es de remarcar la equivalencia matemática entre sistemas clásicos y cuánticos. Por un lado, la ecuación paraxial es equivalente a la ecuación de Schrödinger estacionaria; por otra cuenta, la ecuación de Helmholtz sigue un camino de realización similar a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo. Es así que, explorar analogías entre diferentes sistemas físicos en ambos paradigmas es útil, ya que nos lleva a un trabajo de importación y exportación de ideas, métodos y conclusiones de uno a otro lado, es un camino de dos vías.

A través del tiempo, se ha podido sistemas utilizar sistemas de óptica clásica para modelar y aproximar características de fenómenos de óptica cuántica [6]. En una propuesta, Man'ko *et al* utilizan sistemas *tipo cuánticos* para realizar tareas de computación cuántica [12]. Se ha mostrado que caminatas aleatorias cuánticas suceden en propagación libre cuando la función de onda inicial es establecida adecuadamente [13]. La aproximación al modelaje de osciladores armónicos dependientes del tiempo se ha logrado en medios GRIN anisotrópicos, permitiendo mostrar la división de modos en la solución de la ecuación de Helmholtz [14, 15]. Además, la propagación de campos clásicos en medios GRIN con dependencia lineal produce perfiles tipo Airy que pueden ser controlados precisamente [16].

Por otro lado, las transiciones de fase, en sistemas tanto termodinámicos como cuánticos, han recibido mucha atención [17, 18], tal es el caso de las presentes en el modelo de Rabi [19, 20]. Mediante el método de transformación de Holstein-Primakoff [21], se puede argumentar que la interacción de dos campos cuantizados es similar a la interacción en un sistema de Rabi, donde se logra haciendo que los operadores de spin se mapeen a operadores de creación y aniquilación, además las matrices de Pauli se modelan como un acoplamiento armónico, es así que un sistema de campos interactuando pueden presentar transiciones de fase.

Al estar consiente de todas estas correspondencias destacadas, en este trabajo aplicamos métodos de transformación propiamente utilizados en la teoría cuántica. Donde, mediante el uso de operadores unitarios, podemos resolver un problema óptico clásico. En este preciso momento podemos aclarar que una separación de variables resuelve el problema de la propagación de luz en medios GRIN, sin embargo, creemos que el uso de estos métodos operacionales presenta ventaja cuando el índice de refracción no sólo cambia en las coordenadas perpendiculares, sino también a través de la distancia de propagación, donde la separación no es posible.

En particular, en la primera sección se muestra que la propagación clásica de luz en un medio GRIN inhomogéneo se puede lograr, ya sea modelando un par de osciladores armónicos acoplados, o dos campos cuantizados interactuando. En la misma sección, se detalla cómo emerge un tipo de transición de fase en los parámetros involucrados que determinan el acoplamiento de

los sistemas. En la segunda sección, se muestra que es posible obtener *modos invariantes* de propagación en luz clásica en el medio GRIN inhomogéneo. Seguido, en la tercera sección se discute la posibilidad de crear un divisor de haces, tomando en cuenta que la aproximación a segundos orden de la ecuación de Helmholtz puede ser estudiada como un medio Kerr cuántico. Finalmente, se presentan conclusiones de los resultados obtenidos.

4.2 Óptica paraxial en medios inhomogéneos

En la teoría clásica electromagnética, la cuál describe la propagación de campos escalares en medios refractivos, la aproximación longitudinal a esta propagación se realiza mediante la ecuación de onda paraxial

$$(4.1) \quad 2ik_0 \frac{\partial E(q_x, q_y, q_z)}{\partial q_z} = (\nabla_{\perp} + k^2(q_x, q_y))E(q_x, q_y, q_z),$$

donde λ y $k_0 = 2\pi n_0/\lambda$ son la longitud de onda y el número de onda de la propagación, respectivamente, con n_0 es índice de refracción intrínseco, o de fabricación, del medio. La función escalar $k^2(q_x, q_y)$ describe la inhomogeneidad del medio sobre la cuál se propaga el campo escalar $E(q_x, q_y, q_z)$. Cabe destacar que el campo escalar, que de aquí en adelante $E \equiv E(q_x, q_y, q_z)$, es un campo óptico que puede ser realizado tanto en un medio libre con índice de refracción 0, puede ser inyectado en una guía óptica cuya propiedad refractiva siga la ecuación (4.1). En el segundo caso, la inhomogeneidad puede ser física, dado que es posible introducirla en un medio cuando es fabricado, como por ejemplo, en una fibra óptica. Si consideramos, en particular, que la función escalar k tiene la forma propuesta en [22]

$$(4.2) \quad k^2(q_x, q_y) = k_0^2 - (k_x q_x^2 + k_y q_y^2) + 2g q_x q_y,$$

donde k_x , k_y , y g son parámetros que caracterizan la amplitud de inhomogeneidad del medio. Este tipo de función escalar (4.2), es posible realizarla experimentalmente, según [22], la copropagación de modos duales en medios no lineales de Kerr realizan la inhomogeneidad.

La ecuación 4.1 guarda cierta correspondencia estructural con la ecuación de Schrödinger estacionaria [23]. El caso donde la función (4.2) se rige por $g \ll \{k_x, k_y\}$, ha sido resuelto utilizando aproximación de onda rotante para discernir términos de altas frecuencias que no contribuyen a la dinámica [22]. En este trabajo, se resuelve para cualquier combinación de parámetros. Para tal fin se propone

Proposición 4.2.1. *La ecuación paraxial (4.1) puede ser escrita como una ecuación tipo Schrödinger de la forma*

$$(4.3) \quad i \frac{\partial E}{\partial q_z} = \hat{H}E,$$

donde \hat{H} es un operador Hermitiano, en el cuál se ha hecho la correspondencia $q_i \mapsto \hat{q}_i$, $-i\frac{\partial}{\partial q_i} \mapsto \hat{p}_i$, para $i = \{x, y\}$. Es decir, las cantidades clásicas se mapean a operadores en el espacio de configuración cuántico. El operador Hermitiano \hat{H} es el Hamiltoniano

$$(4.4) \quad \hat{H} := -\frac{1}{2k_0} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{2k_0} (k_0^2 + k_x \hat{q}_x + k_y \hat{q}_y + 2g \hat{q}_x \hat{q}_y).$$

Ahora, como se mostró en *Transformaciones Unitarias II* (ver 3.3), es posible utilizar un operador de rotación tal que el Hamiltoniano (4.4) sea llevado a una forma diagonalizada. Si consideramos el operador de rotación $\hat{R}_\theta = \exp(i\theta(\hat{q}_x \hat{p}_y - \hat{q}_y \hat{p}_x))$ alrededor del eje Z, es posible aplicar esta transformación en el campo E de la ecuación (4.3), de la forma $E = \hat{R}_\theta^\dagger \mathcal{E}$, que aplicada sobre ambos lados de la ecuación implica poder reescribir en términos del nuevo campo \mathcal{E} , se tiene entonces

$$i \frac{\partial(\hat{R}_\theta^\dagger \mathcal{E})}{\partial \hat{q}_z} = \hat{H}(\hat{R}_\theta^\dagger \mathcal{E}),$$

y ya que \hat{R}_θ es independiente de la coordenada \hat{q}_z , se obtiene

$$i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \hat{q}_z} = (\hat{R}_\theta \hat{H} \hat{R}_\theta^\dagger) \mathcal{E},$$

donde el término encerrado en paréntesis resulta ser la transformación de similaridad, o rotación, del Hamiltoniano (4.4). Se ve cómo las coordenadas y momentos canónicos se transforman bajo \hat{R}_θ . Evaluando $\hat{R}_\theta \hat{A} \hat{R}_\theta^\dagger$ para $\hat{A} = \{\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{p}_x, \hat{p}_y\}$, se tiene, apéndice 3.A.1,

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \hat{R}_\theta \hat{q}_x \hat{R}_\theta^\dagger &= \hat{q}_x \cos \theta - \hat{q}_y \sin \theta, & \hat{R}_\theta \hat{q}_y \hat{R}_\theta^\dagger &= \hat{q}_y \cos \theta + \hat{q}_x \sin \theta, \\ \hat{R}_\theta \hat{p}_x \hat{R}_\theta^\dagger &= \hat{p}_x \cos \theta - \hat{p}_y \sin \theta, & \hat{R}_\theta \hat{p}_y \hat{R}_\theta^\dagger &= \hat{p}_y \cos \theta + \hat{p}_x \sin \theta, \end{aligned}$$

donde cláaramente se ve que el operador \hat{R}_θ genera una rotación antihoraria sobre las coordenadas. Entonces el Hamiltoniano, (4.4), en el esquema transformado resulta en

$$(4.6) \quad \hat{H}_\theta = \frac{1}{2k_0} (k_0^2 - \hat{p}_x^2 - \tilde{k}_x \hat{q}_x^2 - \hat{p}_y^2 - \tilde{k}_y \hat{q}_y^2 + \tilde{g} \hat{q}_x \hat{q}_y),$$

donde los términos tildados son nuevos parámetros que dependen de los parámetros originales, y del ángulo θ de la rotación

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \tilde{k}_x &= \frac{1}{2} (k_x + k_y) + \frac{1}{2} (k_x - k_y) \cos 2\theta - g \sin 2\theta, & \tilde{k}_y &= \frac{1}{2} (k_x + k_y) - \frac{1}{2} (k_x - k_y) \cos 2\theta + g \sin 2\theta, \\ \tilde{g} &= (k_x - k_y) \sin 2\theta + 2g \cos 2\theta. \end{aligned}$$

Entonces, la finalidad de la transformación es lograr una diagonalización de la ecuación original (4.6). Si vemos en el resultado para \tilde{g} de (4.5), podemos buscar el valor del parámetro θ tal que $\tilde{g} = 0$, que como consecuencia desacopla el término $\hat{q}_x \hat{q}_y$. Este valor buscado resulta en

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \tilde{g} &= (k_x - k_y) \sin 2\theta + 2g \cos 2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad (k_y - k_x) \sin 2\theta = 2g \cos 2\theta \\ \therefore \theta &= \frac{1}{2} \arctan \frac{2g}{k_y - k_x}, \end{aligned}$$

tal que los términos sinusoidales involucrados en las k 's tildadas quedan como

$$(4.9) \quad \cos 2\theta = \frac{k_y - k_x}{\sqrt{(k_y - k_x)^2 + 4g^2}}, \quad \sin 2\theta = \frac{2g}{\sqrt{(k_y - k_x)^2 + 4g^2}},$$

con lo cual, finalmente obtenemos que \tilde{k}_x y \tilde{k}_y se reducen a

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \tilde{k}_x &= \frac{1}{2} \left((k_x + k_y) - \sqrt{(k_x - k_y)^2 + 4g^2} \right), & \tilde{k}_y &= \frac{1}{2} \left((k_x + k_y) + \sqrt{(k_x - k_y)^2 + 4g^2} \right), \\ && \tilde{g} &= 0. \end{aligned}$$

Finalmente, dadas las transformaciones (4.5) y (4.10), el Hamiltoniano (4.6) resulta en

$$(4.11) \quad \hat{H}_\theta = \frac{1}{2k_0} \left(k_0^2 - (\hat{p}_x^2 + \tilde{k}_x \hat{q}_x^2) - (\hat{p}_y^2 + \tilde{k}_y \hat{q}_y^2) \right),$$

que tomando la proposición 4.2.1, el problema a resolver se torna en

$$(4.12) \quad i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \hat{q}_z} = \hat{H}_\theta \mathcal{E},$$

y ya que el Hamiltoniano transformado (4.11) es uno de dos osciladores armónicos acoplados, cuya solución es encontrada de manera rutinaria, el problema (4.12) posee una solución explícita.

Transición de fase

En este momento, revisamos una característica emergente debida a la forma en que se transformaron los parámetros del Hamiltoniano. Si se observa en la ecuación (4.10) para \tilde{k}_x , a diferencia de k_y , existe una resta global de términos, con lo cual, si observamos el punto en el que éstos coinciden, podemos discernir un punto crítico donde el parámetro \tilde{k}_x pasa de tener valores positivos, a negativos, atravesando una franja de ceros. Tenemos, entonces que

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \tilde{k}_x &= \frac{1}{2} \left((k_x + k_y) - \sqrt{(k_y - k_x)^2 + 4g^2} \right) \Rightarrow (k_x + k_y) = \sqrt{(k_x - k_y)^2 + 4g_c^2} \\ &\therefore g_c = \pm \sqrt{k_x k_y}, \end{aligned}$$

es decir, el parámetro de acoplamiento crítico global, no transformado, depende directamente del producto de los parámetros k_x y k_y . En este punto crítico (4.13), el acoplamiento del oscilador en el espacio de \hat{q}_x pasa de la armonicidad, a ser partícula libre y, luego la repulsividad [24, 25, 26]; dado esto, se reconoce como un tipo de transición de fase [17, 18]. Entonces podemos tener tres regímenes dependiendo del acoplamiento original g acotado por g_c , definidos por los intervalos

$$(4.14) \quad \begin{aligned} g < g_c, & \quad \text{Oscilador armónico,} \\ g = g_c, & \quad \text{Partícula libre,} \\ g > g_c, & \quad \text{Oscilador repulsivo.} \end{aligned}$$

Lo anterior se puede justificar desde un punto de vista operacional, si en la ecuación (4.11) reescribimos las cantidades para las posiciones y momentos canónicos en términos de operadores de creación y aniquilación del oscilador armónico, \hat{a} y \hat{a}^\dagger , obtenemos

$$\begin{aligned} & \hat{p}_x^2 + \tilde{k}_x \hat{q}_x + \hat{p}_y^2 + \tilde{k}_y \hat{q}_y \\ & \Rightarrow (\tilde{k}_x + 1) \left(\left(\hat{a}_x^\dagger \right)^2 + \hat{a}_x^2 \right) - (\tilde{k}_x - 1) \left\{ \left(\hat{a}_x^\dagger \right)^2, \hat{a}_x \right\} + (\tilde{k}_y + 1) \left(\left(\hat{a}_y^\dagger \right)^2 + \hat{a}_y^2 \right) - (\tilde{k}_y - 1) \left\{ \left(\hat{a}_y^\dagger \right)^2, \hat{a}_y \right\}, \end{aligned}$$

donde $\{\cdot, \cdot\}$ es el paréntesis de Poisson. Entonces, es posible ver que no se realizó aproximación de onda rotante para eliminar términos cruzados de los operadores de creación y aniquilación. Son estos términos los responsables de la susodicha transición de fase cuando un medio GRIN es considerado [22].

Finalmente, en la Figura 4.1 se presenta la gráfica de contornos del parámetro \tilde{k}_x en función de k_x y g para un valor fijo de k_y . Claramente se ve cómo la amplitud de \tilde{k}_x transita de valores positivos a negativos conforme el valor de g incrementa.

Analogía mecánica

Como se vio en los Capítulos 1 y 3, la realización de sistemas oscilatorios acoplados, con dependencia temporal, pueden dar lugar a la descripción de fenómenos análogos en óptica. En este caso, la propagación de luz clásica, puede darse la equivalencia cuando dos osciladores acoplados se modelan mediante un arreglo lineal de masas interconectadas por elementos restitutivos, como aquel visto en la Sección §1.3.2, y mostrado en la figura 1.3. En vista de ésto, por las ecuaciones (1.1) y (1.14), el sistema de ecuaciones diferenciales para la amplitud de la posición de las masas es

$$(4.15) \quad \begin{aligned} m_0 \ddot{q}_0 + (\kappa_0 + \kappa_1) q_0 - \kappa_1 q_1 &= 0, \\ m_1 \ddot{q}_1 + (\kappa_1 + \kappa_2) q_1 - \kappa_1 q_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, según lo mostrado en la sección §3.3, ecuación (3.7), el sistema de ecuaciones (4.16) posee un Hamiltoniano de la forma

$$(4.16) \quad H = \frac{1}{2m_0} p_0^2 + \frac{1}{2m_1} p_1^2 + \frac{1}{2} \kappa_0 q_0^2 + \frac{1}{2} \kappa_1 q_1^2 + \frac{1}{2} \kappa_1 (q_0 - q_1)^2,$$

que puede ser obtenido mediante las ecuaciones de Hamilton para \hat{p} y \hat{q} . Para ligar el sistema de propagación de luz (4.1) estudiado en este trabajo, y su contraparte mecánica, hacemos que la distancia de propagación sea el inverso del tiempo de evolución, es decir $z \mapsto -t$, además, las cantidades mecánicas se mapean a las cantidades ópticas de la forma

$$(4.17) \quad k_0 = m_0 = m_1 = m, \quad k_x = m \frac{\kappa_0 + \kappa_1}{2}, \quad k_y = m \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \quad g = m \kappa_1,$$

donde las cantidades relacionan los Hamiltonianos (4.11) y (4.16). Como extra, si estamos en el sistema mecánico y queremos realizar el sistema de propagación, el tiempo de evolución se mapea

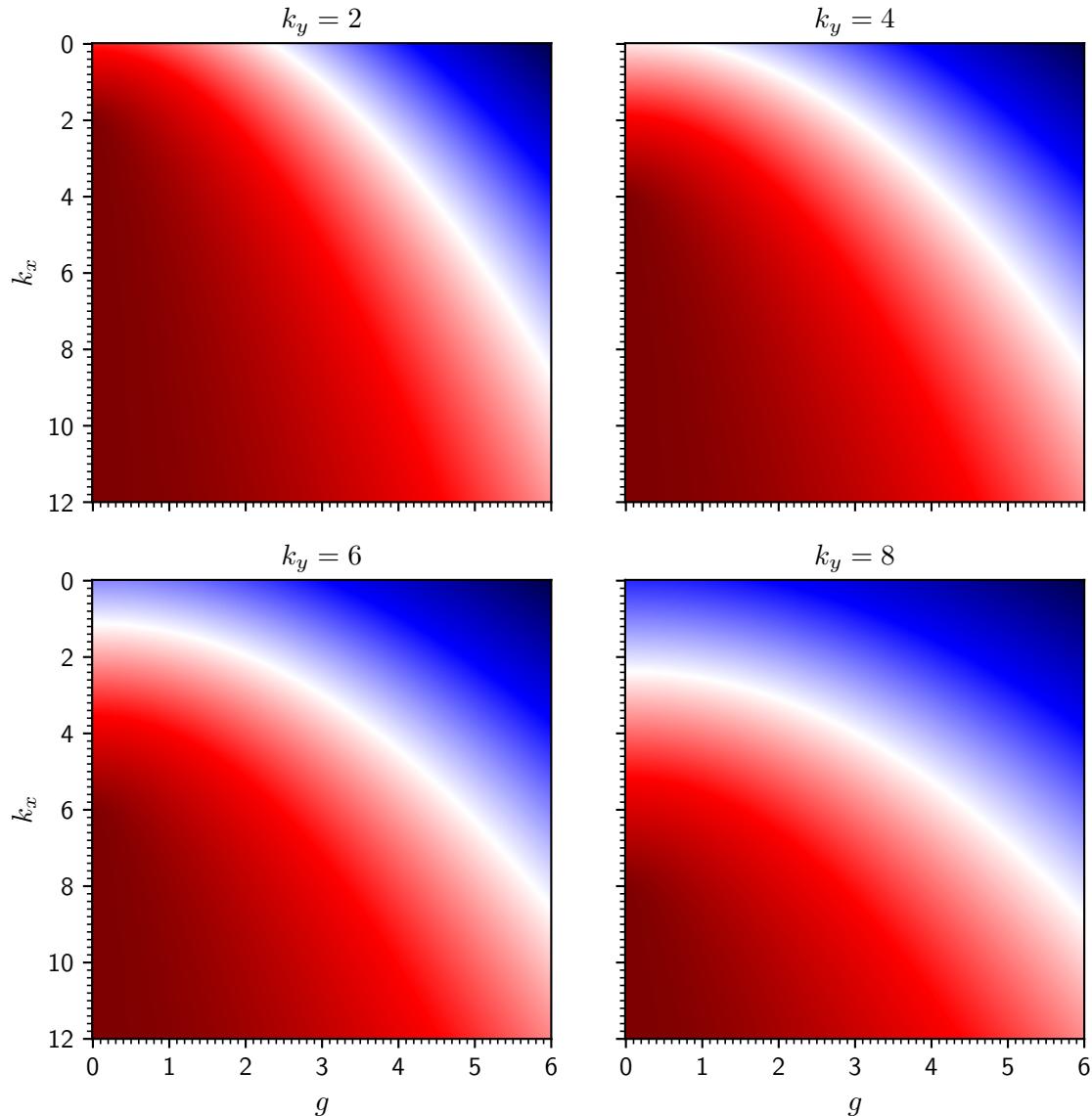


Figura 4.1: Diagrama de transición de fase. Se muestra cómo el parámetro \tilde{k}_x pasa de valores positivos, a positivos, a través de una región nula, ésto con una dependencia en k_x y g con $k_y = cte$. Esto describe comportamientos armónico (sección roja), libre (franja blanca) y repulsivo (sección azul) del oscilador en x .

a la distancia de propagación $t \mapsto -z$, y los parámetros mecánicos son equivalentes a

$$(4.18) \quad m_0 = m_1 = m = k_0, \quad \kappa_0 = \frac{g - 2k_x}{m}, \quad \kappa_1 = \frac{g}{m}, \quad \kappa_2 = \frac{g - 2k_y}{m}.$$

Esta analogía mecánica, es posible ya que ambos sistemas de ecuaciones obedecen leyes de evolución similares que ligan la propagación de luz en un medio GRIN, con aquel de un sistema mecánico acoplado, donde los elementos restitutivos juegan las veces del índice de freacción, constante o variable.

4.3 Modos invariantes de propagación

En esta sección se muestra cómo es que, soluciones de la ecuación (4.3) (o (4.12)) contienen modos invariantes de propagación. Este tipo de soluciones son interesantes y de uso práctico ya que, para cierto perfil bidimensional, mantienen sus distribución espacial y energética a través de las dirección de propagación, es decir, para cualquier valor de $z \geq 0$, un modo invariante es un perfil o distribución espacial que se ve igual mientras se propaga.

Debido a que la ecuación (4.12) es una ecuación tipo Schrödinger, significa que podemos hacer la siguiente proposición para sus soluciones

Proposición 4.3.1. *En el espacio del campo original, en el régimen $g < g_c$, una solución de valor inicial $E : E(q_x, q_y, q_z = 0)$ está dada por*

$$(4.19) \quad E(q_x, q_y, q_z = 0) = \hat{R}_\theta^\dagger \psi_{n_x}(q_x) \psi_{n_y}(q_y),$$

donde las ψ 's son funciones de Hermite-Gauss, que son eigenfunciones del oscilador armónico cuántico unidimensional.

Esta proposición toma en cuenta que ambos osciladores están en el régimen armónico de (4.14), con lo cual es posible establecer el campo inicial como la transformación de la multiplicación de dos eigenfunciones ortogonales del oscilador armónico cuántico.

Ahora podemos ir al espacio transformado, donde yace el campo \mathcal{E} , ya que $E = \hat{R}_\theta^\dagger \mathcal{E}$, significa

$$\mathcal{E} = \psi_{n_x}(q_x) \psi_{n_y}(q_y),$$

con lo cual, un par de postulados deben darse para proseguir.

Postulado 4.3.1. *La solución ecuación de Schrödinger para dos osciladores acoplados, \hat{H}_1 y \hat{H}_2 , está dada por el ansatz*

$$i \frac{\partial F(q_x, q_y, q_z)}{\partial q_z} = (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) F(q_x, q_y, q_z) \Rightarrow F(q_x, q_y, q_z) = \exp(\hat{H}_1 + \hat{H}_2) F(q_x, q_y, q_z = 0),$$

donde el exponencial puede ser separado si commuta, es decir, su paréntesis de Lie resulta en $[\hat{H}_1, \hat{H}_2] = 0$, entonces

$$\exp(\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \equiv \exp(\hat{H}_1) \exp(\hat{H}_2),$$

con lo cual finalmente tenemos que la solución es

$$(4.20) \quad F(q_x, q_y, q_z) = \exp(\hat{H}_1) \exp(\hat{H}_2) F(q_x, q_y, q_z = 0)$$

Postulado 4.3.2. Si la solución para dos osciladores acoplados está dada por las eigenfunciones individuales de cada uno, se tiene

$$F(q_x, q_y, q_z = 0) = \psi_{n_1}(\hat{q}_1) \psi_{n_2}(\hat{q}_2),$$

donde las ψ 's son funciones de Hermite-Gauss. Entonces se verifica la ecuación de eigenvalores

$$(4.21) \quad \begin{aligned} \hat{H}F(q_x, q_y, q_z = 0) &= (\hat{H}_1 + \hat{H}_2) \psi_{n_1}(\hat{q}_1) \psi_{n_2}(\hat{q}_2) \\ &= (E_1 + E_2) \psi_{n_1}(\hat{q}_1) \psi_{n_2}(\hat{q}_2), \end{aligned}$$

donde $E_j = \omega_j(n_j + \frac{1}{2})$, $j = 1, 2$, es la energía del oscilador individual, dada por su frecuencia ω_j y su nivel de energía n_j .

Entonces podemos hacer uso de los postulados previos, 4.3.1 y 4.3.2, para que la ecuación

$$i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \hat{q}_z} = \hat{H}_\theta \mathcal{E},$$

con

$$\hat{H}_\theta = \frac{1}{2k_0} \left(k_0^2 - \underbrace{(\hat{p}_x^2 + \tilde{k}_x \hat{q}_x^2)}_{\hat{H}_x} - \underbrace{(\hat{p}_y^2 + \tilde{k}_y \hat{q}_y^2)}_{\hat{H}_y} \right),$$

resulte en el *ansatz* de solución

$$(4.22) \quad \mathcal{E}(\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{q}_z) = \exp\left(-i \frac{k_0 \hat{q}_z}{2}\right) \exp\left(i \frac{\hat{q}_z}{k_0} \hat{H}_x\right) \exp\left(i \frac{\hat{q}_z}{k_0} \hat{H}_y\right) \mathcal{E}(\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{q}_z = 0),$$

y ya que el campo transformado \mathcal{E} es el producto ortogonal de eigenfunciones de osciladores armónico unidimensional, y el postulado 4.3.2 a través de la ecuación (4.21) marca la acción del Hamiltoniano en las eigenfunciones, finalmente se tiene

$$(4.23) \quad \begin{aligned} \mathcal{E}(\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{q}_z) &= \exp\left(-i \frac{k_0 \hat{q}_z}{2}\right) \exp\left(i \frac{\hat{q}_z}{k_0} \omega_x \left(n_x + \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(i \frac{\hat{q}_z}{k_0} \omega_y \left(n_y + \frac{1}{2}\right)\right) \psi_{n_x}(\hat{q}_x) \psi_{n_y}(\hat{q}_y) \\ &= \exp\left(-i \frac{k_0 \hat{q}_z}{2}\right) \exp\left(i \frac{\hat{q}_z}{2k_0} (\omega_x + \omega_y)\right) \exp\left(i \frac{\hat{q}_z}{k_0} (\omega_x n_x + \omega_y n_y)\right) \psi_{n_x}(\hat{q}_x) \psi_{n_y}(\hat{q}_y), \end{aligned}$$

con $\omega_j = \sqrt{\tilde{n}_j}$, $j = \{x, y\}$ la frecuencia angular del respectivo oscilador dado en término de los parámetros tildados. Finalmente, ya que \mathcal{E} en la ecuación (4.23) está en el espacio transformado, la solución en el espacio original se obtiene cuando $E = \hat{R}_\theta^\dagger \mathcal{E}$, entonces

$$(4.24) \quad E(\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{q}_z) = \exp\left(-i \frac{k_0 \hat{q}_z}{2}\right) \exp\left(i \frac{\hat{q}_z}{2k_0} (\omega_x + \omega_y)\right) \exp\left(i \frac{\hat{q}_z}{k_0} (\omega_x n_x + \omega_y n_y)\right) \hat{R}_\theta^\dagger \psi_{n_x}(\hat{q}_x) \psi_{n_y}(\hat{q}_y),$$

donde claramente se ve la independencia a la distancia de propagación \hat{q}_z , ya que cuando se toma el modulo al cuadrado de E , este resulta en sólo una función de \hat{q}_x y \hat{q}_y , es decir, $\|E(\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{q}_z)\|^2 : \|E(\hat{q}_x, \hat{q}_y, 0)\|^2$. Por último para la evaluación explícita de (4.24) es necesario realizar la acción del operador de rotación \hat{R}_θ^\dagger sobre las eigenfunciones de oscilador. La cual resulta en, véase apéndice 4.A.1,

$$(4.25) \quad \hat{R}_\theta^\dagger \psi_{n_x}(\hat{q}_x) \psi_{n_y}(\hat{q}_y) = \psi_{n_x}(\hat{q}_x \cos \theta + \hat{q}_y \sin \theta) \psi_{n_y}(\hat{q}_x \sin \theta - \hat{q}_y \cos \theta).$$

Después de todo lo detallado, los modos invariantes del modelo de propagación en un medio GRIN, como el de (4.2), resulta en

$$(4.26) \quad \|E(\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{q}_z)\|^2 = \|\psi_{n_x}(\hat{q}_x \cos \theta + \hat{q}_y \sin \theta) \psi_{n_y}(\hat{q}_x \sin \theta - \hat{q}_y \cos \theta)\|^2,$$

donde finalmente vemos explícitamente la independencia de la distancia de propagación \hat{q}_z . Los modos invariantes representan una distribución espacial bidimensional que depende del parámetro de rotación θ .

En la figura 4.2 se presentan casos del campo propagado (4.26). En este momento es conveniente recordar y recalcar que los modos invariantes mostrados en esta sección obedecen al régimen $g < g_c$, es decir, el oscilador en x se mantiene armónico. Sin embargo, como se mostró en la subsección §4.2, existen combinación de parámetros $\{k_x, k_y, g\}$ que llevan a valores negativos el parámetro transformado \tilde{k}_x , conduciendo al oscilador en x por un camino de partícula libre, hacia un oscilador repulsivo. En la parte negativa de \tilde{k}_x , las funciones de Hermite-Gauss no son más eigenfunciones del osciladores armónico, por tanto, no se produce un modo invariante. En este aspecto, Yuce [24] y Muñoz [25], mostraron que las eigenfunciones de oscilador repulsivo son una combinación de eigenfunciones de partícula libre, debido a que existe una equivalencia entre el potencial repulsivo y la evolución libre a través de una transformada canónica apropiada. Y, debido a que estas eigenfunciones son combinaciones de ondas planas y ondas confinadas en un espacio finito, o propagándose a través de una barrera de potencia, el argumento de no invarianza presentado no se mantiene cuando $g \geq g_c$.

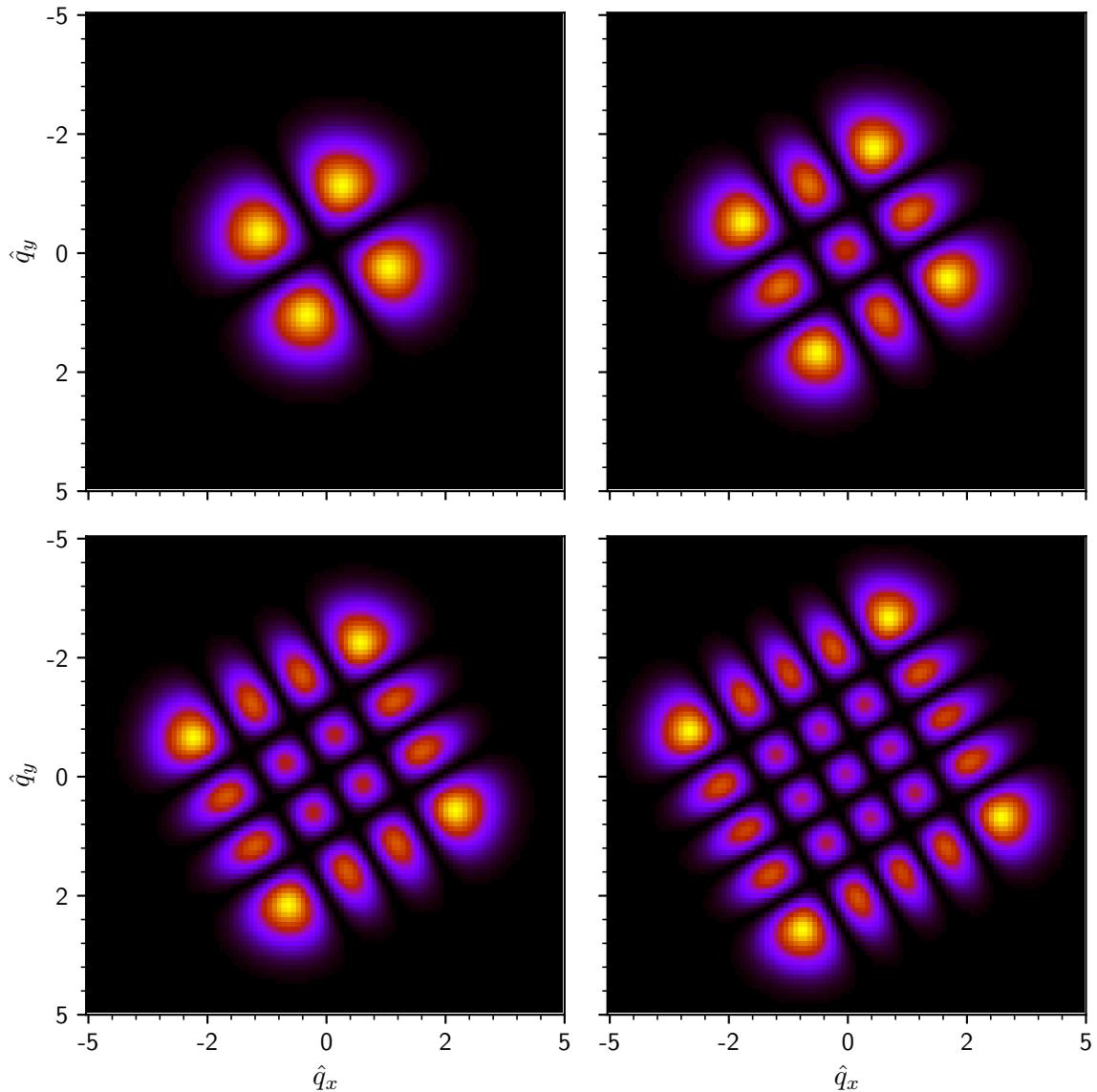


Figura 4.2: Propagación invariante de modos (4.26). Los parámetros generales son: $k_0 = 1$, $k_x = 1.2$, $k_y = 1.5$ y $g = 0.25$. Con lo cual, el ángulo de rotación (4.8) resulta en $\theta = -0.5151 \text{ rad} = -32.79 \text{ grad}$. Los modos de energía son, de arriba izquierda a derecha abajo: $n_x = n_y = 1$, $n_x = n_y = 2$, $n_x = n_y = 3$, $n_x = n_y = 4$.

4.4 Separación de la ecuación de Helmholtz

Las secciones precedentes nos cuentan un tratamiento de la ecuación paraxial (4.1), donde una aproximación de ángulo pequeño [27] fue impuesta a la dispersión del campo cerca de la dirección de propagación \hat{q}_z . En el caso donde esta aproximación no sea hecha, la ecuación original es la ecuación de Helmholtz

$$(4.27) \quad \nabla^2 E = -k^2 E,$$

la cuál es la ecuación de eigenvalores para el operador $\nabla^2 = \partial^2/\partial q_x^2 + \partial^2/\partial q_y^2 + \partial^2/\partial \hat{q}_z^2$, con k el eigenvalor, y en el caso particular de medios GRIN, la inhomogeneidad del medio. En este trabajo reescribiremos (4.27) tomando en cuenta que el eigenvalor k es una distribución espacial en q_x y q_y . Por tanto tenemos

$$(4.28) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \hat{q}_z^2} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial q_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_y^2} + k^2(q_x, q_y) \right) E.$$

Ahora, debido a que las derivadas parciales son básicamente operadores de momento, $\partial^2/\partial q_j^2 \propto \hat{p}_j^2$, con la ayuda de la ecuación (4.2) para k^2 , se puede proponer lo siguiente

Proposición 4.4.1. *El término encerrado entre paréntesis en la ecuación (4.28) es proporcional al Hamiltoniano (4.4), es decir*

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial q_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_y^2} + k^2(q_x, q_y) \right) \propto -\frac{1}{2k_0} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{2k_0} (k_0^2 + k_x \hat{q}_x + k_y \hat{q}_y + 2g \hat{q}_x \hat{q}_y),$$

donde el factor de proporción es simplemente un factor imaginario $-i$, con lo cual se puede presentar la ecuación (4.28) como

$$(4.29) \quad i \frac{\partial^2 E}{\partial \hat{q}_z^2} = - \left(\frac{1}{2k_0} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{1}{2k_0} (k_0^2 - k_x \hat{q}_x - k_y \hat{q}_y + 2g \hat{q}_x \hat{q}_y) \right)$$

de la cual se puede conocer su solución.

Para solucionar la ecuación (4.29) utilizamos el esquema de transformación utilizando anteriormente, llevando el Hamiltoniano a una forma rotada por el operador \hat{R}_θ , pasando a un espacio de un nuevo campo \mathcal{E} , y devolviendo al original utilizando el valor de θ dado por (4.8). Entonces tenemos

$$(4.30) \quad i \frac{\partial^2 E}{\partial \hat{q}_z^2} = \frac{1}{2k_0} \left(k_0^2 - (\hat{p}_x^2 + \tilde{k}_x \hat{q}_x^2) - (\hat{p}_y^2 + \tilde{k}_y \hat{q}_y^2) \right) E,$$

que es idéntica a la ecuación (4.11). Al ser (4.30) una ecuación de segundo orden en la variable \hat{q}_z , tiene por solución una exponencial encerrando en una raíz a los términos independientes de la variable susodicha, es decir, se tiene

$$(4.31) \quad E(\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{q}_z) = \exp \left(-i \hat{q}_x \sqrt{\frac{1}{2k_0} (k_0^2 - (\hat{p}_x^2 + \tilde{k}_x \hat{q}_x^2) - (\hat{p}_y^2 + \tilde{k}_y \hat{q}_y^2))} \right) E(\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{q}_z = 0),$$

donde si la condición inicial son las eigenfunciones del oscilador armónico presentadas en la sección de invariantes, proposición 4.3.1, finalmente tenemos

$$(4.32) \quad E(\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{q}_z) = \exp\left(-i\hat{q}_z\sqrt{\frac{k_0}{2} - \frac{\omega_x}{k_0}\left(n_x + \frac{1}{2}\right) - \frac{\omega_y}{k_0}\left(n_y + \frac{1}{2}\right)}\right) E(\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{q}_z = 0).$$

Ahora, podemos desarrollar el término de raíz en una aproximación de términos de potencia introduciendo la cantidad $\kappa^2 = k_0^2 - k_x - k_y$ y desarollando en k_0^2 , tenemos

$$(4.33) \quad \begin{aligned} \sqrt{\frac{k_0}{2} - \frac{\omega_x}{k_0}\left(n_x + \frac{1}{2}\right) - \frac{\omega_y}{k_0}\left(n_y + \frac{1}{2}\right)} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sqrt{k_0^2 - 2\omega_x\left(n_x + \frac{1}{2}\right) - 2\omega_y\left(n_y + \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sqrt{\kappa^2 + k_x + k_y - \omega_x(n_x + 1) - \omega_y(n_y + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sqrt{\kappa^2 - \Omega} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2k_0}} \sqrt{1 - \underbrace{\frac{\Omega}{\kappa^2}}_r} \end{aligned}$$

con $\Omega = k_x + k_y - \omega_x(n_x + 1) - \omega_y(n_y + 1)$. Y ya que se conoce la expansión de la raíz a segundo orden, $\sqrt{1-x} = 1 - r/2 - r^2/8$, se tiene finalmente que la ecuación (4.32) es

$$(4.34) \quad E(\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{q}_z) = \exp\left(-i\hat{q}_z \frac{\kappa}{\sqrt{2k_0}} \left(1 - \frac{\Omega}{2\kappa^2} - \frac{\Omega^2}{8\kappa^4}\right)\right) E(\hat{q}_x, \hat{q}_y, \hat{q}_z = 0).$$

La ecuación (4.34) permite la separación de campos [28], ya que los términos cuadráticos se asemejan a un tipo de interacción óptica no lineal cuántica, conocida como medio o interacción de Kerr [29].

4.5 Conclusiones

Se demostró que es posible modelar, mediante un sistema mecánico de dos partículas y dos elementos restitutivos, la propagación de luz en medios GRIN con aproximación paraxial, y la interacción de campos cuantizados. Ambos sistemas son equivalentes mediante comparación de parámetros involucrados, es decir, índices de refracción del medio, con rigidez de los elementos restitutivos. Además, se muestra que una rotación del sistema original, nos lleva a un esquema desacoplado, donde la solución está dada en términos de eigenfunciones de oscilador armónico, generando haces invariantes de propagación. En el caso general, existe un parámetro de acoplamiento crítico, que lleva a uno de los osciladores acoplados a experimentar una transición de fase en los parámetros que definen su dinámica. Este oscilador recorre entre dos extremos, la armonidad y la repulsividad, pasando por la evolución libre. Los haces invariantes sólo suceden en la parte armónica de ambos osciladores acoplados. Finalmente, se mostró que la

ecuación de Helmholtz, sin aproximación paraxial, puede ser tratada de la misma forma que su contraparte linealizada, portanto una solución de segundo orden que permite aproximar el factor de su evolución en ordenes de los parámetros de rígidez de los osciladores. Donde aún las eigenfunciones de oscilador, son solución. Se muestra que esta aproximación genera una separación de modos en términos cuadráticos de los parámetros, generando así, un tipo de medio conocido en óptica cuántica como medio Kerr.

4.A Apéndices

4.A.1 Acción del operador \hat{R}_θ sobre las eigenfunciones de oscilador

Para conocer la acción del operador \hat{R}_θ sobre funciones de posición, es necesario realizar primero su factorización. El operador tiene una forma explícita

$$\hat{R}_\theta = \exp(i\theta(\hat{q}_x\hat{p}_y - \hat{p}_x\hat{q}_y)),$$

si se definen las cantidades operacionales

$$\hat{K}_+ = \hat{q}_x\hat{p}_y, \quad \hat{K}_- = \hat{p}_x\hat{q}_y,$$

donde existe un tercer operador central

$$\hat{K}_0 = \frac{i}{2}(\hat{q}_x\hat{p}_x - \hat{q}_y\hat{p}_y),$$

con el cual se cierra un álgebra $\mathfrak{su}(1,1)$, cuyos paréntesis de Lie son

$$\begin{aligned} [\hat{K}_0, \hat{K}_+] &= \hat{K}_+, & [\hat{K}_0, \hat{K}_-] &= -\hat{K}_-, \\ [\hat{K}_+, \hat{K}_-] &= -2\hat{K}_0. \end{aligned}$$

Es de notar que el mapeo exponencial del operador \hat{K}_0 resulta en el producto de operadores de compresión espacial [30, 31, 32, 33, 34, 35].

Para obtener la factorización, o separación, de \hat{R}_θ , se establece lo siguiente

Proposición 4.A.1. *El operador $\hat{R}_\theta = \exp(i\theta(\hat{K}_+ - \hat{K}_-))$ se factoriza como*

$$\exp(i\theta(\hat{K}_+ - \hat{K}_-)) = \exp(if_1\hat{K}_+)\exp(if_2\hat{K}_0)\exp(if_3\hat{K}_-),$$

con f_1, f_2 y f_3 dados por

$$f_1 = \tan\theta, \quad f_2 = 2i\ln\cos\theta, \quad f_3 = -\tan\theta.$$

Demostración. Para demostrar la proposición anterior, se procede a definir ambos lados de la igualdad como

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \exp(i\theta(\hat{K}_+ - \hat{K}_-)), \\ \hat{B} &= \exp(if_1\hat{K}_+)\exp(if_2\hat{K}_0)\exp(if_3\hat{K}_-), \\ \Rightarrow \hat{A} &= \hat{B}. \end{aligned}$$

Ahora procedemos a derivar ambos lados de la ecuación, dado que \hat{A} depende explícitamente de θ y \hat{B} lo hace a través de las funciones f 's que dependen de θ .

$$\begin{aligned} \text{(l.h.s)} \quad \frac{d\hat{A}}{d\theta} &= i\theta(\hat{K}_+ - \hat{K}_-) \hat{A} \\ \text{(r.h.s)} \quad \frac{d\hat{B}}{d\theta} &= i\dot{f}_1 \hat{K}_+ \hat{B} + i\dot{f}_2 \exp(if_1 \hat{K}_+) \hat{K}_0 \exp(-if_1 \hat{K}_+) \hat{B} + \\ &\quad i\dot{f}_3 \exp(if_1 \hat{K}_+) \exp(if_2 \hat{K}_0) \hat{K}_- \exp(-if_2 \hat{K}_0) \exp(-if_1 \hat{K}_+) \hat{B}, \end{aligned}$$

donde observamos que existen dos transformaciones de operados en el lado derecho (r.h.s), las cuales, usando los resultados del paréntesis de Lie, y la fórmula Baker-Campbell-Hausdorff, obtenemos

$$\begin{aligned} \exp(if_1 \hat{K}_+) \hat{K}_0 \exp(-if_1 \hat{K}_+) &= \hat{K}_0 - if_1 \hat{K}_+, \\ \exp(if_1 \hat{K}_+) \exp(if_2 \hat{K}_0) \hat{K}_- \exp(-if_2 \hat{K}_0) \exp(-if_1 \hat{K}_+) &= (\hat{K}_- - 2if_1 \hat{K}_0 - f_1^2) \exp(-if_2), \end{aligned}$$

y ya que se cumple la igualdad inicial $\hat{A} = \hat{B}$, se puede establecer la igualdad de factores internos como

$$i\theta(\hat{K}_+ - \hat{K}_-) = i\dot{f}_1 \hat{K}_+ + i\dot{f}_2(\hat{K}_0 - if_1 \hat{K}_+) + i\dot{f}_3(\hat{K}_- - 2if_1 \hat{K}_0 - f_1^2) \exp(-if_2),$$

que juntando términos comunes en los operados \hat{K} 's resulta en el sistema de ecuaciones diferenciales para las f 's

$$\begin{aligned} \hat{K}_+ : \quad i\dot{f}_3 \exp(-if_2) &= -i \\ \hat{K}_0 : \quad i\dot{f}_2 + 2\dot{f}_3 f_1 \exp(-if_2) &= 0 \\ \hat{K}_- : \quad i\dot{f}_1 + \dot{f}_2 f_1 - i\dot{f}_3 f_1^2 \exp(-if_2) &= i, \end{aligned}$$

y cuyo sistema reducido es

$$\dot{f}_1 - f_1^2 = 1, \quad \dot{f}_2 = -2if_1, \quad \dot{f}_3 = -\exp(if_2).$$

Finalmente, el sistema de ecuaciones anterior posee solución exacta, y donde las condiciones iniciales de las funciones son $f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0$. Las funciones explícitas resultan

$$f_1 = \tan \theta, \quad f_2 = 2i \ln \cos \theta, \quad f_3 = -\tan \theta,$$

lo cuál demuestra la aseveración de la proposición. ■

Demostrada la factorización del operador \hat{R}_θ , podemos ahora, aplicarlo a una función arbitraria y general de las coordenadas \hat{q}_x y \hat{q}_y .

Postulado 4.A.1. *Suponga una función arbitraria $F : F(\hat{q}_x, \hat{q}_y) | \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, la acción del operador \hat{R}_θ sobre esta función está dada por*

$$(4.35) \quad \hat{R}_\theta F(\hat{q}_x, \hat{q}_y) = F(\hat{q}_x \cos \theta - \hat{q}_y \sin \theta, \hat{q}_x + \hat{q}_y \cos \theta).$$

Es decir, la acción del operador genera una rotación dextrogiro de las coordenadas.

Demostración. Se puede observar que el operador \hat{R}_θ factorizado puede ser escrito como el producto de operadores de compresión y traslación de la forma

$$\begin{aligned}\hat{R}_\theta &= \exp(i \tan \theta \hat{q}_x \hat{p}_y) \exp(i \ln \cos \theta (\hat{q}_x \hat{p}_x - \hat{q}_y \hat{p}_y)) \exp(-i \tan \theta \hat{q}_y \hat{p}_x) \\ &= \hat{T}_y \hat{S}_{xy} \hat{T}_x,\end{aligned}$$

donde \hat{T} y \hat{S} son operadores de traslación y compresión respecto de la variable descrita. Con lo anterior, se muestra que sobre una función F definida previamente, las acciones de los operadores \hat{T} son

$$\hat{T}_x F(\hat{q}_x, \hat{q}_y) = F(\hat{q}_x - \hat{q}_y \tan \theta, \hat{q}_y), \quad \hat{T}_y F(\hat{q}_x, \hat{q}_y) = F(\hat{q}_x, \hat{q}_y + \hat{q}_x \tan \theta),$$

además, la acción de un operador de compresión general, con argumento r , sobre las variables \hat{q}_x y \hat{q}_y está dado por

$$\exp(ir \hat{q}_x \hat{p}_x) = \exp(r) \hat{q}_x, \quad \exp(ir \hat{q}_y \hat{p}_y) = \exp(r) \hat{q}_y,$$

Finalmente obtenemos la transformación

$$\begin{aligned}(4.36) \quad \hat{R}_\theta F(\hat{q}_x, \hat{q}_y) &= \hat{T}_y \hat{S}_{xy} \hat{T}_x F(\hat{q}_x, \hat{q}_y) \\ &= \hat{T}_y \hat{S}_x \hat{S}_y F(\hat{q}_x - \hat{q}_y \tan \theta, \hat{q}_y) \\ &= \hat{T}_y \hat{S}_x F(\hat{q}_x - \hat{q}_y \tan \theta \cos \theta, \hat{q}_y \cos \theta) \\ &= \hat{T}_y F(\hat{q}_x \cos \theta - \hat{q}_y \sin \theta, \hat{q}_y \cos \theta) \\ &= F(\hat{q}_x \cos \theta - \hat{q}_y \sin \theta, (\hat{q}_y + \hat{q}_x \tan \theta) \cos \theta) \\ &= F(\hat{q}_x \cos \theta - \hat{q}_y \sin \theta, \hat{q}_y \cos \theta + \hat{q}_x \sin \theta).\end{aligned}$$

■

4.2 Bibliografía

- [1] H. M. Nussenzveigh.
Introduction to Quantum Optics.
Gordon and Breach, London, 1973.
- [2] G. Nienhuis and L. Allen.
Paraxial wave optics and harmonic oscillators.
Phys. Rev. A, 48:656–665, 1993.
- [3] D. Anderson.
Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers.
Phys. Rev. A, 27:3135–3145, 1983.
- [4] S. Danakas and P. K. Aravind.
Analogies between two optical systems (photon beam splitters and laser beams) and two quantum systems (the two-dimensional oscillator and the two-dimensional hydrogen atom).
Phys. Rev. A, 45:1973–1977, 1992.
- [5] V. Man'ko, M. Moshinsky, and A. Sharma.
Diffraction in time in terms of Wigner distributions and tomographic probabilities.
Phys. Rev. A, 59:1809–1815, 1999.
- [6] D. Dragoman.
Chapter 5 - phase space correspondence between classical optics and quantum mechanics.
In E. Wolf, editor, *Progress in Optics*, volume 43 of *Progress in Optics*, pages 433 – 496.
Elsevier, 2002.
- [7] C. Paré, L. Gagnon, and P. A. Bélanger.
Aspherical laser resonators: An analogy with quantum mechanics.
Phys. Rev. A, 46:4150–4160, 1992.
- [8] M. A. M. Marte and S. Stenholm.
Paraxial light and atom optics: The optical Schrödinger equation and beyond.
Phys. Rev. A, 56:2940–2953, 1997.
- [9] O. Crasser, H. Mack, and W. P. Schleich.
Could Fresnel optics be quantum mechanics in phase space?
Fluctuation and Noise Letters, 4:L43–L51, 2004.
- [10] M. A. Alonso.
Wigner functions in optics: describing beams as ray bundles and pulses as particle ensembles.
Advances in Optics and Photonics, 3:272–365, 2011.

- [11] I. Ramos-Prieto, A. R. Urzúa-Pineda, F. Soto-Eguibar, and H. M. Moya-Cessa.
KvN mechanics approach to the time-dependent frequency harmonic oscillator.
Scientific Reports, 8:8401, 2018.
- [12] M. A. Man’ko, V. I. Man’ko, and R. Vilela Mendes.
Quantum computation by quantumlike systems.
Phys. Lett. A, 288:132–138, 2001.
- [13] T. Eichelkraut, C. Vetter, A. Perez-Leija, H. M. Moya-Cessa, D. N. Christodoulides, and
A. Szameit.
Coherent random walks in free space.
Optica, 1:268–271, 2014.
- [14] H. M. Moya-Cessa, M. Fernández Guasti, V. M. Arrizon, and S. Chávez-Cerda.
Optical realization of quantum-mechanical invariants.
Optics Letters, 34(9):1459–1461, 2009.
- [15] V. Arrizon, F. Soto-Eguibar, A. Zú niga Segundo, and H. M. Moya-Cessa.
Revival and splitting of a Gaussian beam in gradient index media.
J. Opt. Soc. Am. A, 32:1140–1145, 2015.
- [16] S. Chávez-Cerda, U. Ruiz, V. Arrizón, and H. M. Moya-Cessa.
Generation of Airy solitary-like wave beams by acceleration control in inhomogeneous
media.
Optics Express, 19(17):16448–16454, 2011.
- [17] M.-J. Hwang, R. Puebla, and M. B. Plenio.
Quantum phase transition and universal dynamics in the Rabi model.
Phys. Rev. Lett., 115:180404, 2015.
- [18] R. Gutierrez-Jauregui and H. J. Carmichael.
Dissipative quantum phase transitions of light in a generalized Jaynes-Cummings-Rabi
model.
Phys. Rev. A, 98:023804, 2018.
- [19] I. I. Rabi.
On the process of space quantization.
Phys. Rev., 49:324–328, 1936.
- [20] D. Braak.
Integrability of the Rabi model.
Phys. Rev. Lett., 107:100401, 2011.

- [21] T. Holstein and H. Primakoff.
Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet.
Phys. Rev., 58:1098–1113, 1940.
- [22] S. Chávez-Cerda, J. R. Moya-Cessa, and H. M. Moya-Cessa.
Quantumlike systems in classical optics: applications of quantum optical methods.
J. Opt. Soc. Am. B, 24(2):404–407, 2007.
- [23] Amnon Yariv.
Quantum electronics.
Wiley, New York, 1989.
p. 115.
- [24] C. Yuce, A. Kilic, and A. Coruh.
Inverted oscillator.
Physica Scripta, 74:114–116, 2006.
- [25] C. A. Mu noz, J. Rueda-Paz, and K. B. Wolf.
Discrete repulsive oscillator wavefunctions.
J. Phys. A, 42(48):485210, 2009.
- [26] I. A. Pedrosa and I. Guedes.
Exact quantum states of an inverted pendulum under time-dependent gravitation.
Int. J. Mod. Phys. A, 19:4165–4172, 2004.
- [27] J. J. Sakurai.
Modern quantum mechanics.
Cambridge University Press, Cambridge, 2017.
- [28] F. Soto-Eguibar, V. Arrizon, A. Zú niga Segundo, and H. M. Moya-Cessa.
Optical realization of quantum Kerr medium dynamics.
Optics Letters, 39(21):6158–6161, 2014.
- [29] B. Yurke and D. Stoler.
Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states
via amplitude dispersion.
Phys. Rev. Lett., 57:13–16, 1986.
- [30] Ravinder Puri.
Mathematical Methods of Quantum Optics.
Springer Berlin Heidelberg Imprint Springer, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [31] R. London and P. L. Knight.

CAPÍTULO 4. PUBLICACIÓN: LIGHT PROPAGATION IN INHOMOGENEOUS MEDIA,
COUPLED QUANTUM HARMONIC OSCILLATORS AND PHASE TRANSITIONS

Squeezed light.

J. Mod. Opt., 34:709–759, 1987.

[32] H. P. Yuen.

Two-photon coherent states of the radiation field.

Phys. Rev. A, 13:2226–2243, 1976.

[33] C. M. Caves.

Quantum-mechanical noise in an interferometer.

Phys. Rev. D, 23:1693–1708, 1981.

[34] H. M. Moya-Cessa and A. Vidiella-Barranco.

Interaction of squeezed states of light with two-level atoms.

J. Mod. Optics, 39:2481, 1992.

[35] S. M. Barnett, A. Beige, A. Ekert, B. Garraway, C.H. Keitel, and V. Kendon.

Journeys from quantum optics to quantum technology.

Progress in Quantum Electronics, 54:19–45, 2017.

SOBRE: ASPECTOS COMPUTACIONALES DE ESTA TESIS

Los cálculos numéricos de ésta tesis, en los capítulos 1, 2, y 4, fueron realizados utilizando el lenguaje dinámico JULIA [1], en conjunto con llamadas a paqueterías y descriptores propios de Python [2].

Las llamadas a los módulos se hacen mediante el descriptor PYCALL [3]. Para el cálculo de precisión se utilizó paquetería MPMATH [4]. Para la visualización se utilizó la paquetería gráfica MATPLOTLIB [5].

Todo el cálculo numérico y de visualización gráfica se llevó a cabo en el entorno de desarrollo JUPYTER [6] bajo JUPYTERLAB con kernels IPYTHON [7] y IJULIA (liga).

Los notebooks de trabajo pueden ser encontrados en https://github.com/rurz/PhD_Calcs.

5.1 Bibliografía

[1] Jeff Bezanson, Alan Edelman, Stefan Karpinski, and Viral B Shah.

Julia: A fresh approach to numerical computing.

SIAM Review, 59(1):65–98, 2017.

[2] Guido Van Rossum and Fred L Drake Jr.

Python tutorial.

Centrum voor Wiskunde en Informatica Amsterdam, The Netherlands, 1995.

[3] Steven G Johnson.

Juliapy/pycall.jl.

[4] Fredrik Johansson et al.

mpmath: a Python library for arbitrary-precision floating-point arithmetic (version 0.18),
December 2013.
[http://mpmath.org/.](http://mpmath.org/)

- [5] J. D. Hunter.
Matplotlib: A 2d graphics environment.
Computing in Science & Engineering, 9(3):90–95, 2007.
- [6] Kluyver Thomas, Ragan-Kelley Benjamin, Perez Fernando, Granger Brian, Bussonnier Matthias, Frederic Jonathan, Kelley Kyle, Hamrick Jessica, Grout Jason, Corlay Sylvain, and et al.
Jupyter notebooks; a publishing format for reproducible computational workflows.
Stand Alone, 0:87–90, 2016.
- [7] Fernando Pérez and Brian E. Granger.
IPython: a system for interactive scientific computing.
Computing in Science and Engineering, 9(3):21–29, May 2007.