

“科大国创杯” 2021 年安徽省青少年信息学科普日活动 初中组试题

比赛时间：2021 年 4 月 10 日 14:00–18:00

1 超市购物 (shopping)

直接模拟即可，可参见标程。

2 坑 (hole)

设 l_i, r_i 是第 i 只跳蚤到左边/右边最近坑的距离，没坑则为 $+\infty$ 。

假设我们的操作向左最多移动 L 步，向右最多移动 R 步，那么该操作方案能杀死所有跳蚤的充要条件是对所有 i ，要么 $L \geq l_i$ 或 $R \geq r_i$ 。同时，用 L 个左和 $L+R$ 个右或 R 个右和 $L+R$ 个左可以构造出一种操作方案。所以我们只需要在 l_i 和 0 中枚举 L ， r_i 和 0 中枚举 R ，判断合法并用 $\min(L, R) + L + R$ 更新答案即可。

进一步的，我们将跳蚤按 l_i 排序，枚举 $L = l_j$ ，那么 R 显然是 $r_{j+1}, r_{j+2}, \dots, r_n$ 中的最大值，预处理即可。复杂度 $O(n \log n)$ 。

3 收衣服 (sort)

考虑 DP。注意到第 $i-1$ 轮结束后， $[1, i-1]$ 位置上恰好是 $[1, i-1]$ 号衣服。于是我们设 f_i 表示，第 i 轮开始， $[i, n]$ 中取遍 $i, i+1, \dots, n$ 的 $(n-i+1)!$ 种排列时的排序代价。

我们考虑枚举 i 号衣服的位置为 j ，那么需要付出 $w_{i,j}$ 的代价翻转 $[i, j]$ 。

那么从 $i+1$ 轮往后的代价是多少呢？其实就是 f_{i+1} 。这是因为，考虑所有 $i, i+1, \dots, n$ 的排列组成的集合，将其中每个元素翻转 $[i, j]$ 后集合并不变。

于是有 $f_i = \sum_{j=i}^n (w_{i,j}(n-i)! + f_{i+1})$ 。复杂度 $O(n^2)$ 。

4 地铁 (subway)

设 d_i 表示 1 号车站到 i 的顺时针距离， x 表示整条地铁的总长度，那么一组 $\{d_i, x\}$ 合法的充要条件如下：

1. $d_1 = 0$, d_i, x 为正整数，且 $\forall 1 \leq i < n, d_i - d_{i+1} \leq -1, d_n \leq x - 1$;
2. 对每个 1 类信息，若 $S_i < T_i$, $d_{S_i} - d_{T_i} \leq -L_i$ ，否则 $d_{S_i} - d_{T_i} \leq x - L_i$;
3. 对每个 2 类信息，若 $S_i < T_i$, $d_{T_i} - d_{S_i} \leq L_i$ ，否则 $d_{T_i} - d_{S_i} \leq L_i - x$ 。

根据差分约束理论，若 x 给定，将所有变量当做点，一条 $a - b \leq c$ 限制对应一条 $b \rightarrow a$ 边权为 c 的单向边，则存在合法方案的充要条件是该图不存在负环。

那么图中的每个环都给出了一个关于 x 的一次不等式，这说明 x 的取值范围一定是个区间。

于是，我们可以分别求出 x 的最大值和最小值，下面介绍怎么求 x 的最大值。我们二分 x_0 ，将 $x = x_0$ 带入判断负环，如果不存在负环那合法， x 的上界只会更大；如果存在负环，考虑任取一个负环，令 k 表示其边权和前 x 的系数。

- $k = 0$ ，那么显然无解；
- $k > 0$ ，此时减小 x 这个环只会负的更多，那么 x 的上界比 x_0 大；
- $k < 0$ ，此时增大 x 这个环只会负的更多，那么 x 的上界比 x_0 小。

这样我们可以二分出唯一可能的下界和上界 l, r ，那么如果 $1 \leq l \leq r$ 且 $x = l, r$ 均合法答案便为 $r - l + 1$ ，否则为 0（本题不可能），如果上界过大答案为 -1。判断负环用 Bellman-Ford 算法，点数 $O(n)$ ，边数 $O(n + m)$ ，总复杂度 $O(n(n + m) \log V)$ ，其中 V 是值域。