

# Redes Neuronales

## Análisis del modelo Integrate-and-Fire

### Trabajo Práctico 2

Igor Andruskiewitsch

2020

## 1 Introducción

Este trabajo está orientado a comprender el modelo **Integrate-and-Fire**, que modela la evolución temporal del potencial de membrana  $V_m(t)$  en el tiempo  $t$ , entre el interior y el exterior de una neurona genérica. Descrito por la siguiente ecuación diferencial ordinaria (ODE):

$$\dot{V}_m(t) = \frac{1}{\tau_m}(E_L - V_m(t) + R_m I_e(t))$$

Donde:

- $E_L$  es el potencial en reposo ( $mV$ )
- $I_e(t)$  es la corriente eléctrica externa inyectada en el tiempo  $t$  ( $mV$ )
- $R_m$  es la resistencia en megaOhms ( $M\Omega$ )
- $\tau_m$  es el tiempo característico de la membrana

## 2 Resolución

### 2.1 Resolución analítica

Si consideramos la corriente externa como una constante  $I_e(t) = I_e$ , podemos buscar una solución analítica a nuestro modelo. Consideramos los siguientes valores para los parámetros:

$$V_m(t=0) = E_L = -65 \text{ mV}, \quad R = 10 \text{ M}\Omega,$$

$$V_{th} = -50 \text{ mV}, \quad \tau_m = 10 \text{ ms}, \quad I_e = 2 \text{ nA}$$

Teniendo en cuenta que ahora  $I_e$  es una constante, podemos reescribir la ecuación de la siguiente forma:

$$\dot{V}_m(t) = \frac{1}{\tau_m}(E_L - V_m(t) + R_m I_e(t)) = AV_m(t) + B$$

Donde:  $A = \frac{-1}{\tau_m}$ ,  $B = \frac{R_m I_e + E_L}{\tau_m}$ .

Luego, despejando:

$$V'(t) = AV(t) + B \Rightarrow \frac{V'(t)}{AV(t) + B} = 1$$

Hacemos el reemplazo  $U(t) = AV(t) + B$ ,  $U'(t) = AV'(t)$ , luego:

$$V'(t) = \frac{U'(t)}{A} \Rightarrow \frac{U'(t)}{AU(t)} = 1 \Rightarrow \frac{U'(t)}{U(t)} = A \Rightarrow \int \frac{U'(t)}{U(t)} dt = \int A dt$$

Ahora, sabiendo que  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + C_0$  y  $\int A dx = Ax + C_1$ , podemos resolver ambas integrales:  $\ln(U(t)) = At + C$  donde  $C$  es constante. Luego:

$$\ln(U(t)) = At + C \Rightarrow U(t) = e^{At+C} = AV(t) + B$$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{1}{A}(e^{At+C} - B) = \left(\frac{e^C}{A}e^{At}\right) - \frac{B}{A}$$

Tomando la constante  $k = \frac{e^C}{A}$  y reemplazando  $A$  y  $B$  obtenemos:

$$ke^{\frac{-t}{\tau_m}} - \frac{\frac{(R_m I_e + E_L)}{\tau_m}}{\frac{-1}{\tau_m}} = ke^{\frac{-t}{\tau_m}} + R_m I_e + E_L$$

Ahora necesitamos conocer el valor de  $k$ . Esto lo podemos hacer ya que conocemos el valor inicial en  $t = 0$ :

$$V_m(t=0) = ke^{\frac{-t}{\tau_m}} + R_m I_e + E_L = -65 \Rightarrow k = -R_m I_e$$

Reemplazando, obtenemos:

$$V_m(t) = (-R_m I_e)e^{\frac{-t}{\tau_m}} + R_m I_e + E_L = (R_m I_e)(-e^{\frac{-t}{\tau_m}} + 1) + E_L$$

Al graficar esta fórmula para los valores de  $t$ :  $0 \text{ ms} \leq t \leq 200 \text{ ms}$  y los parámetros antes mencionados obtenemos la siguiente curva:

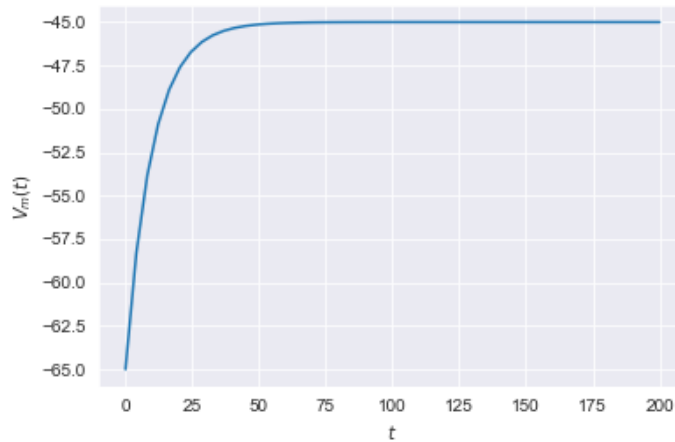


Figure 1: Solución analítica sin umbral de disparo

## 2.2 Aproximación con Runge-Kutta de 4to orden

En esta sección, vamos a comparar los resultados dados por la resolución analítica sin considerar el umbral de disparo, con los resultados dados por la aproximación usando Runge-Kutta-4 (RK4), incluyendo el umbral de disparo. Ambos se realizan utilizando  $0 \text{ ms} \leq t \leq 200 \text{ ms}$  y el caso de RK4 con un paso de integración  $h = 0.05 \text{ ms}$ .

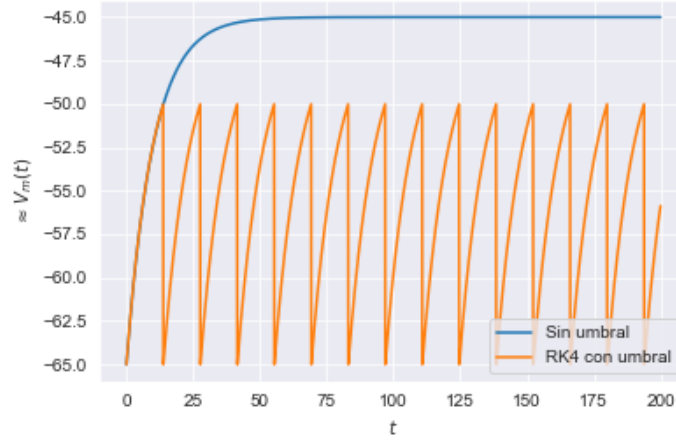


Figure 2: Comparación entre solución analítica sin umbral de disparo y aproximación con RK4 con umbral de disparo en  $-50 \text{ mV}$

Podemos observar que ambos métodos comienzan con una crecida exponencial y mientras que uno se estabiliza, el otro vuelve a realizar el mismo proceso ya que vuelve al valor inicial. Esto se debe a que en el primer gráfico no incluimos el *umbral de disparo*.

## 3 Comprensión de $I_e$

En esta sección vamos a realizar algunos experimentos para comprender la importancia del **input**  $I_e$  en el modelo. Vamos a comenzar por intentar entender la relación entre  $I_e$  y la frecuencia del disparo variando con  $0 \leq I_e \leq 50$ :

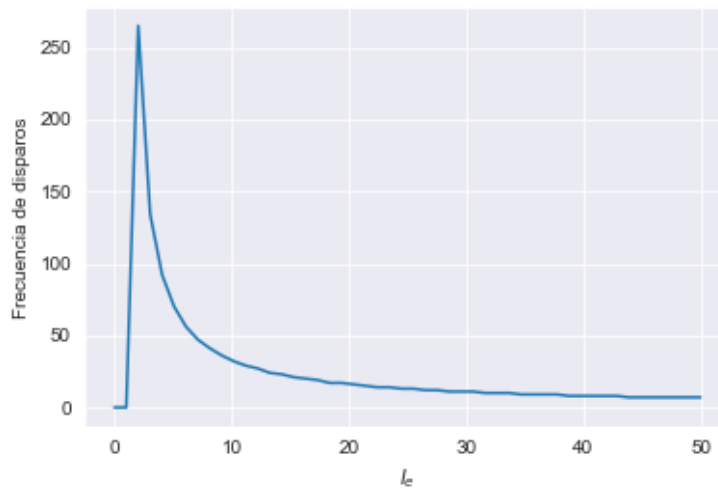


Figure 3: Relación entre  $I_e$  y la frecuencia de disparo

Como podemos observar en la figura 3, para los casos  $I_e = 0$  y  $I_e = 1$  no hay ningún disparo y por lo tanto su frecuencia es 0. Sin embargo, para  $I_e = 2$  ya obtenemos disparos y a medida que  $I_e$  incrementa tenemos una frecuencia cada vez más baja (y por lo tanto más disparos). Si bien no vamos a buscar cuál es la relación exacta entre estos valores, podemos intuir a partir del gráfico que parece ser de la forma  $e^{-x}$ , trasladado y expandido.

### 3.1 Variando $I_e$ de manera uniforme

Al comienzo habíamos definido el  $I_e(t)$  como una función que depende de  $t$ , luego, para poder encontrar una solución analítica pasamos a tomar  $I_e(t) = I_e$  como una constante. Ahora vamos a variar a  $I_e$  de manera uniforme entre 0 y 5 para cada  $t$ , para ver cómo se comporta el modelo:

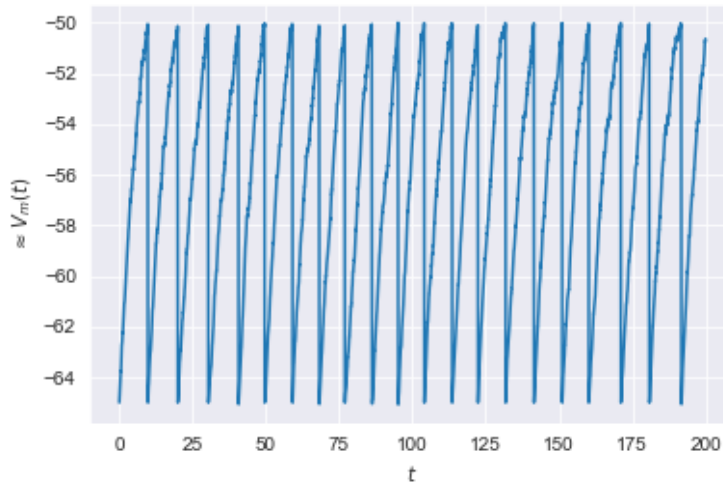


Figure 4: Aproximación del modelo con  $I_e$  uniformemente distribuido

En la figura 4 podemos observar que aún variando uniformemente el valor de  $I_e$  en función de  $t$ , seguimos viendo *picos*, y a una frecuencia similar a la que obtuvimos con  $I_e = 2$ . Otra observación que surge a partir del gráfico son las formas de las líneas que reflejan el flujo de entrada discontinuo.

## 4 Conclusión

Se logró obtener una solución analítica del modelo **Integrate-and-Fire** al tomar  $I_e(t) = I_e$  constante, que produjo un gráfico exponencial. Por otro lado también vimos que al aproximar con RK4 obteníamos valores muy parecidos a los dados por la resolución analítica y pudimos comenzar a probar el umbral de disparo. Por último, sabiendo que la implementación de RK4 es lo suficientemente buena para ver el comportamiento del modelo, pudimos utilizar  $I_e(t)$  dependiente de  $t$  y vimos que aún así el modelo mantenía un comportamiento parecido al visto en los gráficos anteriores.