

Redes Neuronales

Análisis del modelo Integrate-and-Fire

Trabajo Práctico 2

Igor Andruskiewitsch

2020

1 Introducción

Este trabajo está orientado a comprender el modelo **Integrate-and-Fire**, que modela la evolución temporal del potencial de membrana $V_m(t)$ en el tiempo t , entre el interior y el exterior de una neurona genérica. Descrito por la siguiente ecuación diferencial ordinaria (ODE):

$$\dot{V}_m(t) = \frac{1}{\tau_m}(E_L - V_m(t) + R_m I_e(t))$$

Donde:

- E_L es el potencial en reposo (mV)
- $I_e(t)$ es la corriente eléctrica externa inyectada en el tiempo t (mV)
- R_m es la resistencia en megaOhms ($M\Omega$)
- τ_m es el tiempo característico de la membrana

2 Resolución

2.1 Resolución analítica

Si consideramos la corriente externa como una constante $I_e(t) = I_e$, podemos buscar una solución analítica a nuestro modelo. Consideramos los siguientes valores para los parámetros:

$$V_m(t=0) = E_L = -65 \text{ mV}, \quad R = 10 \text{ M}\Omega,$$

$$V_{th} = -50 \text{ mV}, \quad \tau_m = 10 \text{ ms}, \quad I_e = 2 \text{ nA}$$

Teniendo en cuenta que ahora I_e es una constante, podemos reescribir la ecuación de la siguiente forma:

$$\dot{V}_m(t) = \frac{1}{\tau_m}(E_L - V_m(t) + R_m I_e(t)) = AV_m(t) + B$$

Donde: $A = \frac{-1}{\tau_m}$, $B = \frac{R_m I_e + E_L}{\tau_m}$.

Luego, despejando:

$$V'(t) = AV(t) + B \Rightarrow \frac{V'(t)}{AV(t) + B} = 1$$

Hacemos el reemplazo $U(t) = AV(t) + B$, $U'(t) = AV'(t)$, luego:

$$V'(t) = \frac{U'(t)}{A} \Rightarrow \frac{U'(t)}{AU(t)} = 1 \Rightarrow \frac{U'(t)}{U(t)} = A \Rightarrow \int \frac{U'(t)}{U(t)} dt = \int A dt$$

Ahora, sabiendo que $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + C_0$ y $\int A dx = Ax + C_1$, podemos resolver ambas integrales: $\ln(U(t)) = At + C$ donde C es constante. Luego:

$$\ln(U(t)) = At + C \Rightarrow U(t) = e^{At+C} = AV(t) + B$$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{1}{A}(e^{At+C} - B) = \left(\frac{e^C}{A}e^{At}\right) - \frac{B}{A}$$

Tomando la constante $k = \frac{e^C}{A}$ y reemplazando A y B obtenemos:

$$ke^{\frac{-t}{\tau_m}} - \frac{\frac{(R_m I_e + E_L)}{\tau_m}}{\frac{-1}{\tau_m}} = ke^{\frac{-t}{\tau_m}} + R_m I_e + E_L$$

Ahora necesitamos conocer el valor de k . Esto lo podemos hacer ya que conocemos el valor inicial en $t = 0$:

$$V_m(t=0) = ke^{\frac{-t}{\tau_m}} + R_m I_e + E_L = -65 \Rightarrow k = -R_m I_e$$

Reemplazando, obtenemos:

$$V_m(t) = (-R_m I_e)e^{\frac{-t}{\tau_m}} + R_m I_e + E_L = (R_m I_e)(-e^{\frac{-t}{\tau_m}} + 1) + E_L$$

Al graficar esta fórmula para los valores de t : $0 \text{ ms} \leq t \leq 200 \text{ ms}$ y los parámetros antes mencionados obtenemos la siguiente curva:

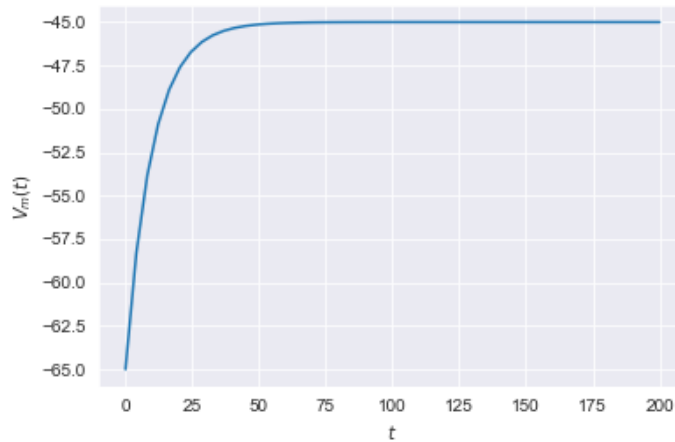


Figure 1: Solución analítica sin umbral de disparo

2.2 Aproximación con Runge-Kutta de 4to orden

En esta sección, vamos a comparar los resultados dados por la resolución analítica sin considerar el umbral de disparo, con los resultados dados por la aproximación usando Runge-Kutta-4 (RK4), incluyendo el umbral de disparo. Ambos se realizan utilizando $0 \text{ ms} \leq t \leq 200 \text{ ms}$ y el caso de RK4 con un paso de integración $h = 0.05 \text{ ms}$.

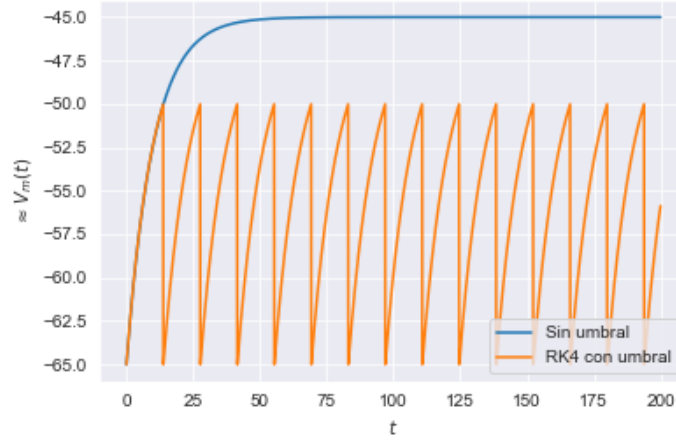


Figure 2: Comparación entre solución analítica sin umbral de disparo y aproximación con RK4 con umbral de disparo en -50 mV

Podemos observar que ambos métodos comienzan con una crecida exponencial y mientras que uno se estabiliza, el otro vuelve a realizar el mismo proceso ya que vuelve al valor inicial. Esto se debe a que en el primer gráfico no incluimos el *umbral de disparo*.

3 Comprensión de I_e

En esta sección vamos a realizar algunos experimentos para comprender la importancia del **input** I_e en el modelo. Vamos a comenzar por intentar entender la relación entre I_e y la frecuencia del disparo variando con $0 \leq I_e \leq 50$:

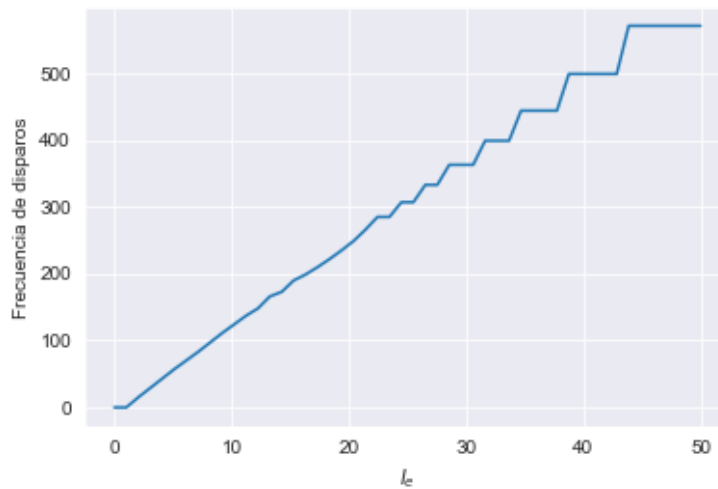


Figure 3: Relación entre I_e y la frecuencia de disparo

Como podemos observar en la figura 3, para los casos $I_e = 0$ y $I_e = 1$ no hay ningún disparo y por lo tanto su frecuencia es 0. Sin embargo, para $I_e = 2$ ya obtenemos disparos y a medida que I_e incrementa tenemos una frecuencia cada vez más alta. La frecuencia graficada corresponde a la **cantidad de disparos** que sucedieron en el rango $0 \text{ ms} \leq t \leq 200 \text{ ms}$.

3.1 Variando I_e de manera uniforme

Al comienzo habíamos definido el $I_e(t)$ como una función que depende de t , luego, para poder encontrar una solución analítica pasamos a tomar $I_e(t) = I_e$ como una constante. Ahora vamos a variar a I_e de manera uniforme entre 0 y 5 para cada t , para ver cómo se comporta el modelo:

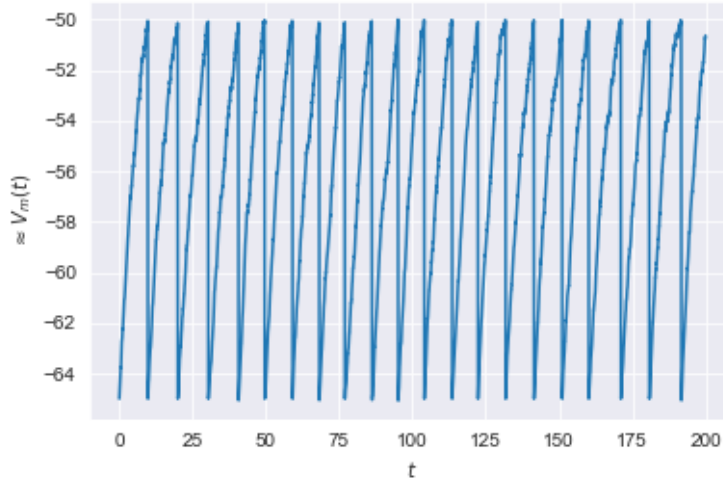


Figure 4: Aproximación del modelo con I_e uniformemente distribuido

En la figura 4 podemos observar que aún variando uniformemente el valor de I_e en función de t , seguimos viendo *picos*, y a una frecuencia similar a la que obtuvimos con $I_e = 2$. Otra observación que surge a partir del gráfico son las formas de las líneas que reflejan el flujo de entrada discontinuo.

4 Conclusión

Se logró obtener una solución analítica del modelo **Integrate-and-Fire** al tomar $I_e(t) = I_e$ constante, que produjo un gráfico exponencial. Por otro lado también vimos que al aproximar con RK4 obteníamos valores muy parecidos a los dados por la resolución analítica y pudimos comenzar a probar el umbral de disparo. Por último, sabiendo que la implementación de RK4 es lo suficientemente buena para ver el comportamiento del modelo, pudimos utilizar $I_e(t)$ dependiente de t y vimos que aún así el modelo mantenía un comportamiento parecido al visto en los gráficos anteriores.