Redes Neuronales
Análisis del modelo Integrate-and-Fire

Trabajo Práctico 2

Igor Andruskiewitsch

2020

1 Introducción

1.1 Modelo Integrate-and-Fire

Este trabajo está orientado a comprender el modelo **Integrate-and-Fire** , que modela la evolución temporal del potencial de membrana $V_m(t)$ al tiempo t, entre el interior y el exterior de una neurona genérica. Este modelo es descrito como la siguiente ecuación diferencial ordinaria (ODE):

$$\dot{V_m}(t) = \frac{1}{\tau_m}(E_L - V_m(t) + R_m I_e(t))$$

Donde:

- E_L es el potencial en reposo (mV)
- $I_e(t)$ es la corriente eléctrica externa inyectada en el tiempo t (mV)
- R_m es la resistencia en megaOhms ($M\Omega$)
- τ_m es el tiempo característico de la membrana

El desafío de este modelo recae en la corriente externa $I_e(t)$, como esta función es desconocida, no podemos encontrar una solución analítica al problema. Aún así, podemos utilizar distintos métodos para aproximar el comportamiento de la neurona, que vamos a ver más adelante.

2 Resolución Analítica

Si consideramos la corriente externa como una constante $I_e(t) = I_e$, podemos buscar una solución analítica a nuestro modelo. Además, vamos a graficar la solución para $0ms \leq t \leq 200ms$ con los siguientes valores para los parámetros:

$$V_m(t=0) = E_L = -65mV, \qquad R = 10M\Omega, \qquad V_{th} = -50mV, \qquad \tau_m = 10ms$$

Cabe aclarar que el valor de V_{th} no se va a considerar para este primer paso, ya que este valor marca el umbral para el cual nuestro $I_e(t)$ afecta el potencial de la neurona. Como en este caso $I_e(t)$ es constante, no tendremos que considerar este valor.

Comenzando con la resolución, teniendo en cuenta que ahora I_e es una constante, podemos reescribir la ecuación de la siguiente forma:

$$\dot{V_m}(t) = AV_m(t) + B$$

Donde:

$$A = \frac{-1}{\tau_m} \qquad B = \frac{R_m I_e + E_L}{\tau_m}$$

Ahora comenzamos a resolver esta ecuación:

$$V'(t) = AV(t) + B \Rightarrow \frac{V'(t)}{AV(t) + B} = 1$$

Hacemos el reemplazo $U(t) = AV(t) + B$, $U'(t) = AV'(t)$, luego:

$$V'(t) = \frac{U'(t)}{A} \Rightarrow \frac{U'(t)}{AU(t)} = 1 \Rightarrow \frac{U'(t)}{U(t)} = A \Rightarrow \int \frac{U'(t)}{U(t)} = At + C$$

Ahora, sabiendo que $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x))$, vemos que:

$$\ln(U(t)) = At + C \Rightarrow U(t) = e^{At+C} = AV(t) + B$$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{1}{A}(e^{At+C} - B) = (\frac{e^C}{A} e^{At}) - \frac{B}{A}$$

Tomando $c^1 = \frac{e^C}{A}$ y reemplazando A y B obtenemos:

$$c^1 e^{\frac{-t}{\tau_m}} - \frac{\frac{(R_m I_e + E_L)}{\tau_m}}{\frac{-1}{\tau_m}} = c^1 e^{\frac{-t}{\tau_m}} + R_m I_e + E_L$$

Ahora necesitamos conocer el valor de c^1. Esto lo podemos hacer ya que conocemos el valor inicial en $t = 0$:

$$c^1 e^{\frac{-t}{\tau_m}} + R_m I_e + E_L = -65 \Rightarrow c^1 - 65 = R_m I_e - 65 \Rightarrow c^1 = R_m I_e$$

Reemplazando, obtenemos:

$$V_m(t) = (R_m I_e) e^{\frac{-t}{\tau_m}} + R_m I_e + E_L = (R_m I_e)(e^{\frac{-t}{\tau_m}} + 1) + E_L$$