

**Вопросы к экзамену по курсу
«Алгебра и геометрия».
ИМИТ, 1 курс, зимняя сессия.**

1 Матрицы и системы линейных уравнений

1. Матрицы. Определение. Операции с матрицами (умножение, сложение, умножение на число, транспонирование, взятие обратной матрицы). Простейшие свойства матричных операций.
2. Определитель. Определение. Определители 2 на 2 и 3 на 3 (формула "крестик" и формула "звездочка"). Основные свойства (определитель с нулевой строкой/столбцом, умножение строки/столбца на число, теорема о сложении определителей, теорема о разложении определителя по 1,2 строкам, если 2 строки/столбца поменять местами, определитель с пропорциональными строками/столбцами, если к одной строке прибавить другую, умноженную на число).
3. Треугольные матрицы. Определение. Замкнутость относительно умножения. Определитель треугольной матрицы.
4. Метод Гаусса для вычисления определителей. С обоснованием.
5. "Продвинутые" свойства определителей. Определители транспонированных матриц. Разложение определителя по любой строке/столбцу. Теорема об определителе произведения. Определитель полураспавшейся матрицы.
6. Обратная матрица. Определение. Размер. Явная формула обратной матрицы. Критерий обратимости матриц. Метод Гаусса для поиска обратной матрицы с обоснованием.
7. Системы линейных уравнений. Определение, основные понятия. Допустимые действия с системами линейных уравнений. Метод Гаусса для решения СЛУ. Правило Крамера. Однородная система. Теорема о существовании ненулевого решения однородной системы.
8. Определитель Вандермонда.

2 Векторная геометрия. Геометрия линейных форм.

1. Определение (абстрактного) вектора. Определение равенства двух векторов и его свойства. Определение векторных операций (сложение, умножение на число). Свойства этих операций.
2. Определение аффинной и декартовой системы координат. Определение компланарной, левой и правой тройки векторов. Что происходит с координатами векторов при сложении векторов и при умножении вектора на число?
3. Произведения векторов (скалярное, векторное, смешанное). Определение и свойства. Тождество Якоби. Геометрический смысл векторного и смешанного произведения. Что означает равенство нулю произведения?
4. Теорема о вычислении произведений векторов в декартовом базисе.
5. Замена координат. Переход от одного базиса к другому. Матрица перехода. Ее свойства. Поворот системы координат на плоскости.
6. Определение прямой. Параметрическое, каноническое уравнения прямой. Уравнение прямой через две точки.
7. Определение плоскости. Параметрическое, общее уравнения плоскости. Уравнение плоскости через три точки. Уравнение плоскости через точку и нормаль в ДСК.
8. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Общее уравнение прямой. Направляющий вектор прямой, заданной общим уравнением в ДСК.

9. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
10. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
11. Углы и расстояния. Определение углов между прямыми, плоскостями. Расстояния между двумя множествами точек. Формула расстояния от точки до прямой. Формула расстояния от точки до плоскости.
12. Полярная система координат. Переход из ПСК в ДСК и обратно. Обобщения ПСК в пространстве.

3 Комплексные числа

1. Определение комплексных чисел, операции с ними, простейшие свойства. Комплексные сопряженные. Алгебраическая форма записи комплексных чисел.
2. Связь плоскости и множества комплексных чисел. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Операции с комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра.
3. Корни из комплексных чисел. Определение, формула, подсчет количества.
4. Корни из единицы. Первообразные корни из единицы. Свойства корней из единицы. Теорема о первообразных корнях.
5. Вывод тригонометрических и комбинаторных формул с помощью комплексных чисел (тема не встречается в теоретической части, только в виде задач).

4 Целые числа

1. Делимость целых чисел. Определение, основные свойства, алгоритм Евклида. НОД, НОК, теорема о представлении НОД.
2. Простые числа. Определение, количество, алгоритм поиска простых чисел. Основная теорема арифметики.
3. Остатки, сравнение по модулю. Определение, простейшие свойства. Доказательство признаков делимости. Обратные остатки.
4. Алгебраические системы. Группы, поля, кольца. Базовые свойства, примеры. Кольца и поля вычетов \mathbb{Z}_n .
5. Малая теорема Ферма. Функция Эйлера и теорема Эйлера.
6. Китайская теорема об остатках.

5 Многочлены

1. Многочлены. Определение. Делимость. Основные свойства делимости. НОД многочленов. Алгоритм Евклида.
2. Неприводимые многочлены. Теорема о разложении любого многочлена на неприводимые.
3. Корни многочленов. Теорема Безу. Производная. Выделение кратных множителей.
4. Основная теорема алгебры (без доказательства). Неприводимые многочлены в поле комплексных чисел и в поле вещественных чисел.
5. Многочлены над полем рациональных чисел. Редукция по модулю. Лемма Гаусса. Критерий Эйзенштейна.
6. Теорема Виета.
7. Интерполяция. Метод Ньютона. Интерполяционная формула Лагранжа.