Суррогатная модель для быстрого расчёта аэродинамических характеристик крыла

Выполнил: Студент 863 группы Штин Руслан Андреевич

Научный руководитель: к.т.н. Савельев Андрей Александрович

МФТИ, Институт аэромеханики и летательной техники

Москва 2022

Введение
Цель

Нужно построить следующую суррогатную модель **SM**:

$$(\alpha, M) \rightarrow \mathbf{SM} \rightarrow M_{\mathrm{IS}}, C_{\mathrm{P}}, C_{\mathrm{X}}, C_{\mathrm{Y}}$$

Крыло **W**

$$\mathbf{W} = [\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{79024}]$$

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$$

Методы решения задач
Виды суррогатных моделей

$\mathbf{x} = (\alpha, M) \in D \subset \mathbb{R}^{n_x},\ n_x = 2$ – точка для предсказания

$\tilde{\mathbf{x}}_i = (\alpha_i, M_i) \in D \subset \mathbb{R}^{n_x},\ \ i = \overline{1..n}$ – точка из обучающей выборки

$\mathbf{y} = \mathbf{SM}(\mathbf{x})$ - предсказание

- Линейная регрессия (**LS**): $\mathbf{y} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}, \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \dots)$
- Метод радиальных базисных функций **(RBF)**:$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\mathbf{x}) \cdot b_i\ ,\ \ \phi_i = f(\|x - \tilde{x}_i\|_2)$
- Кригинг (**KRG**): $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(\mathbf{x}) \cdot b_i\ , \psi_i = \sigma^2 \cdot \exp\left(-\sum_{k=1}^{n_x} \frac{\|x_k - \tilde{x}_{i,k}\|^{p_k}}{l_k}\right)$

$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n_p} p_i(\mathbf{x}) \cdot a_i + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(\mathbf{x}) \cdot b_i$ – учёт полиномиального тренда

Методы решения задач

SMT – Surrogate Modeling Toolbox

AEROSPACE ENGINEERING
UNIVERSITY of MICHIGAN

NASA isae SUPAERO cnrs ICA ONERA THE FRENCH AEROSPACE LAB

Table of Contents

SMT: Surrogate Modeling Toolbox

The surrogate modeling toolbox (SMT) is an open-source Python package consisting of libraries of surrogate modeling methods (e.g., radial basis functions, kriging), sampling methods, and benchmarking problems. SMT is designed to make it easy for developers to implement new surrogate models in a well-tested and well-document platform, and for users to have a library of surrogate modeling methods with which to use and compare methods.

The code is available open-source on GitHub.

Cite us

To cite SMT: M. A. Bouhlel and J. T. Hwang and N. Bartoli and R. Lafage and J. Morlier and J. R. R. A. Martins.

A Python surrogate modeling framework with derivatives. Advances in Engineering Software, 2019.

Методы решения задач

Предсказание интегральных характеристик

Прямой метод

$$\alpha, M \;\to \mathbf{SM} \;\to C_{\mathrm{X}}\,, C_{\mathrm{Y}}$$

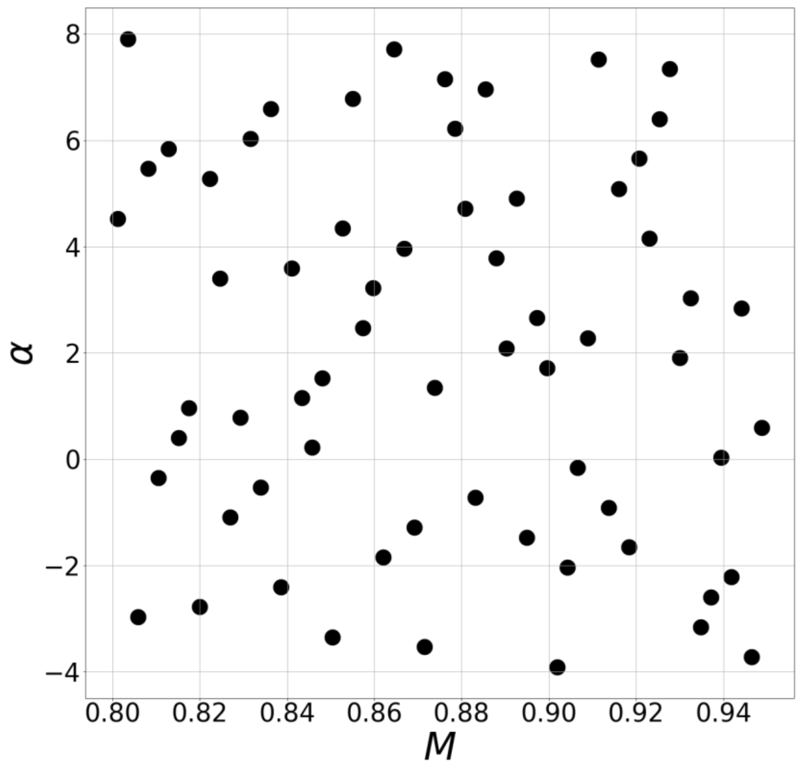
Методы решения задач

Предсказание интегральных характеристик. Прямой метод

Обучающая выборка

$$\left\{(\alpha_i, M_i); \left(C_{X_i}, C_{Y_i}\right)\right\}_{i=1}^{64}$$

$$\alpha \in [-4°, 8°], M \in [0.80, 0.95]$$



получена из CFD-расчётов с помощью
программы ZEUS (EWT – ЦАГИ)

система уравнений RANS + SST

Методы решения задач

Предсказание интегральных характеристик. Прямой метод

Метод суррогатного моделирования	Ошибка (RMSE) в каунтах	
	C_{X}	C_{Y}
LS	5.120	12.480
RBF	4.369	5.732
KRG	1.380	2.068

1 каунт $C_{\mathrm{X}} = 10^{-4}$

1 каунт $C_{\mathrm{Y}} = 10^{-3}$

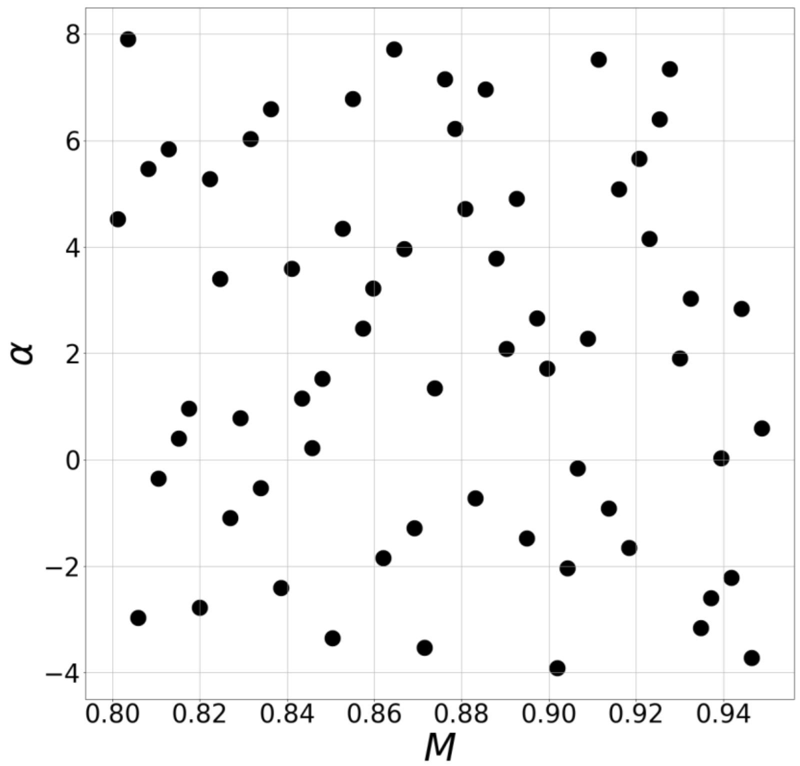
Методы решения задач
Предсказание распределённых характеристик

Обучающая выборка

$$\left\{(\alpha_i, M_i); \left({C_{\mathrm{P}}}_i\right)\right\}_{i=1}^{64}$$

$${C_{\mathrm{P}}}_i = [C_{\mathrm{P}}^1, C_{\mathrm{P}}^2, \ldots, C_{\mathrm{P}}^{79024}]$$

$$\alpha \in [-4°, 8°], M \in [0.80, 0.95]$$



получена из CFD-расчётов с помощью
программы ZEUS (EWT – ЦАГИ)

система уравнений RANS + SST

Методы решения задач

Предсказание распределённых характеристик

$C_{\mathrm{P}_i} = \left[C_{\mathrm{P}}^1, C_{\mathrm{P}}^2, \dots, C_{\mathrm{P}}^{79024}\right]_i, i = \overline{1, 64}$ – поле коэффициента давления на крыле

$$\left[{C_{\mathrm{P}}}_i^j\right] = \begin{pmatrix} {C_{\mathrm{P}}}_1^1 & {C_{\mathrm{P}}}_2^1 & \cdots & {C_{\mathrm{P}}}_{64}^1 \\ {C_{\mathrm{P}}}_1^2 & {C_{\mathrm{P}}}_2^2 & \cdots & {C_{\mathrm{P}}}_{64}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {C_{\mathrm{P}}}_1^{79024} & {C_{\mathrm{P}}}_2^{79024} & \cdots & {C_{\mathrm{P}}}_{64}^{79024} \end{pmatrix}$$

– матрица полей коэффициента давления на крыле

Методы решения задач

Предсказание распределённых характеристик

$$\text{SVD}:\left[C_{\mathrm{P}}{}_i^j\right] = \mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$$

$\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\sigma} = (\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \dots, \mathrm{U}_{64}), \|\mathrm{U}_i\|_{79024\times 1}$ – вектор главных компонент

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} k_1^1 & k_2^1 & \cdots & k_{64}^1 \\ k_1^2 & k_2^2 & \cdots & k_{64}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1^{64} & k_2^{64} & \cdots & k_{64}^{64} \end{bmatrix}$$

Верхний индекс – номер главной компоненты

Нижний индекс – номер режима, которому соответствует данный набор коэффициентов

Методы решения задач

Предсказание распределённых характеристик

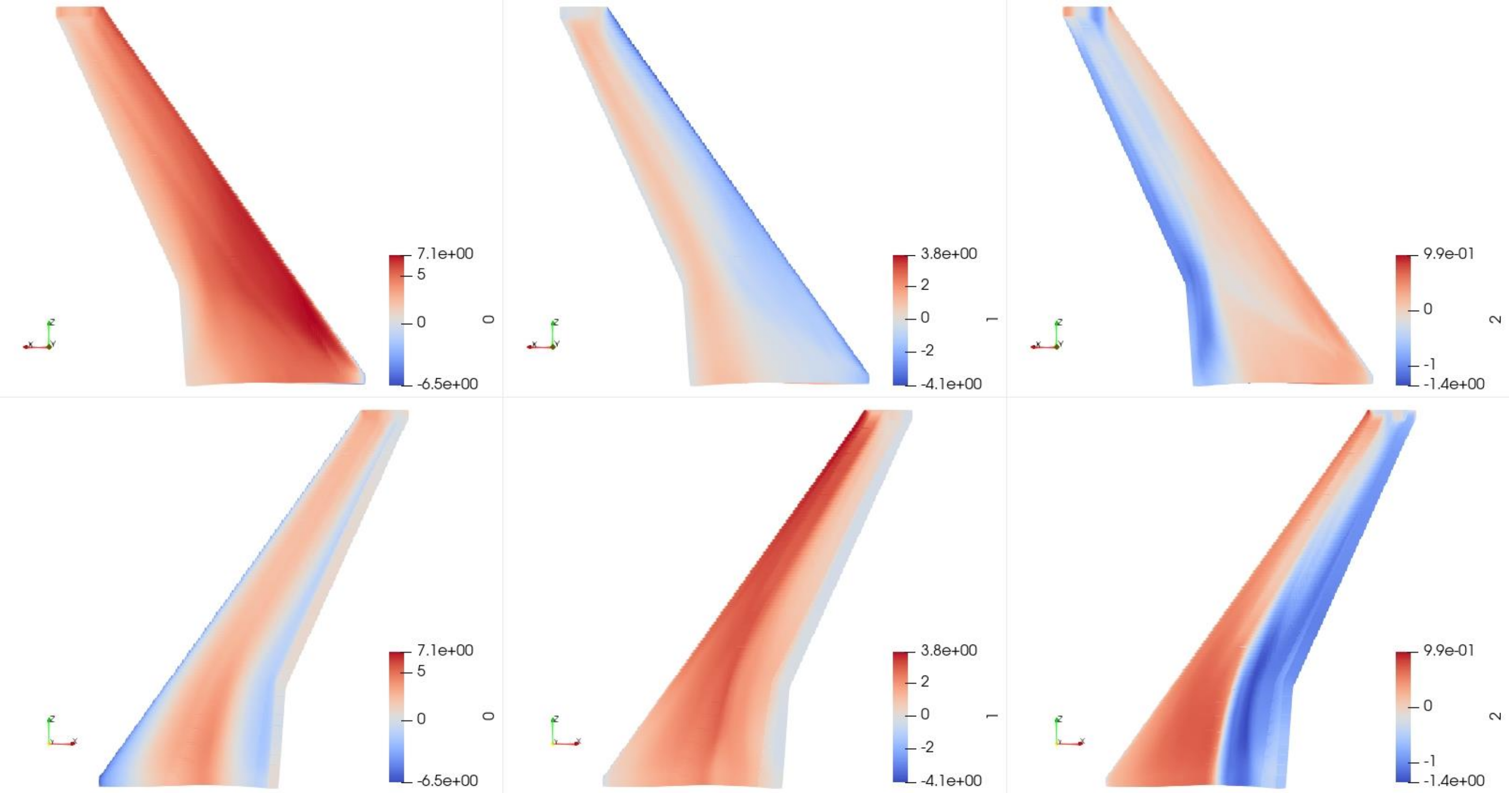
$$\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\sigma} = (\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \dots, \mathrm{U}_{64}), \|\mathrm{U}_i\|_{79024\times 1}$$

$$\hat{C}_{\mathrm{P}} \approx \sum_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i \cdot k^i, k^i = k^i(\alpha, M)$$

U_1 U_2 U_3

up:

down:



Методы решения задач

Предсказание распределённых характеристик

$$\mathbf{U} \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2, \dots, \mathrm{U}_{64}), \|\mathrm{U}_i\|_{79024\times 1}$$

$$\hat{C}_{\mathrm{P}} \approx \sum_{i=1}^{n} \mathrm{U}_i \cdot k^i, k^i = k^i(\alpha, M)$$

обучающая выборка: $\begin{cases} M_1, \alpha_1 \to k_1^1, k_1^2, k_1^3 \\ M_2, \alpha_2 \to k_2^1, k_2^2, k_2^3 \\ \dots \\ M_{64}, \alpha_{64} \to k_{64}^1, k_{64}^2, k_{64}^3 \end{cases}$

Верхний индекс – номер главной компоненты

Нижний индекс – номер режима, которому соответствует данный набор коэффициентов

Методы решения задач

Предсказание распределённых характеристик

Алгоритм предсказания

$$n = 3$$

$$(\alpha, M) \to \mathbf{SM} \to k^1, k^2, k^3$$

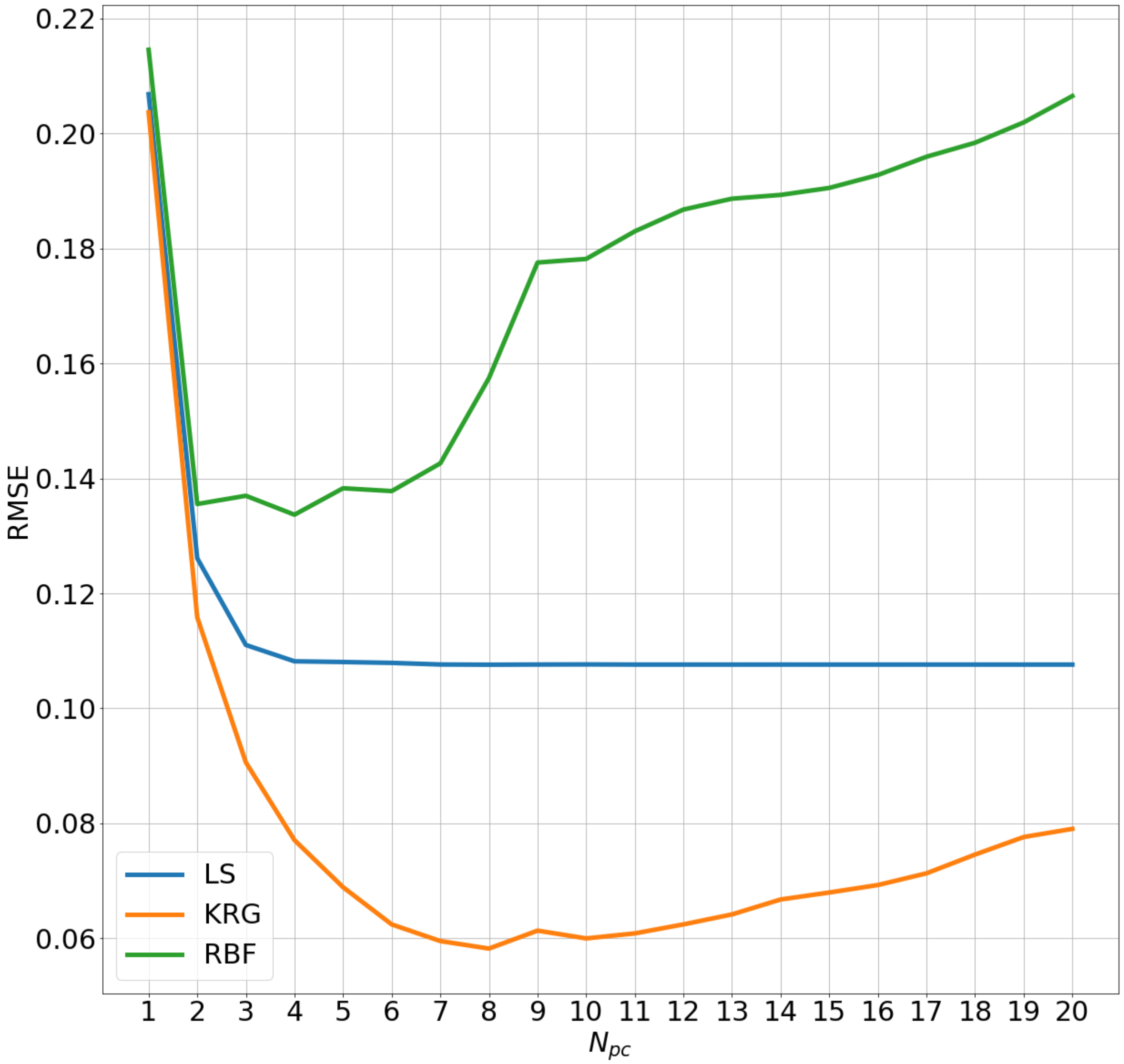
$$\tilde{C}_{\mathrm{P}} = \mathrm{U}_1 \cdot k^1 + \mathrm{U}_2 \cdot k^2 + \mathrm{U}_3 \cdot k^3 \;, \left\| \tilde{C}_{\mathrm{P}} \right\|_{79024 \times 1}$$

Численные результаты

Предсказание распределённых характеристик

RMSE – корень из средней квадратичной ошибки

N_{PC} - количество главных компонент (principal components)



Численные результаты

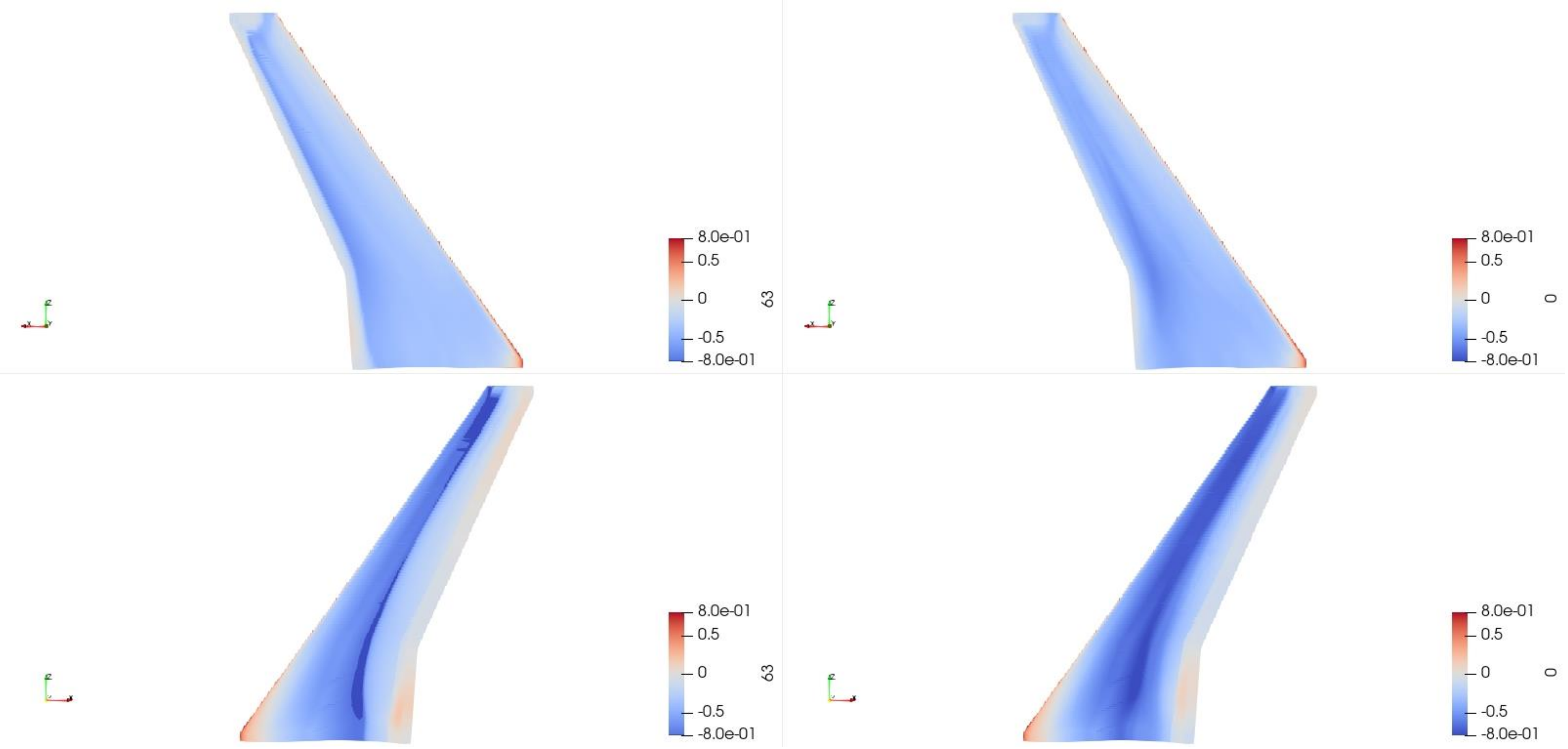
Предсказание распределённых характеристик

Train / Test = 63 / 1 $\alpha = -1.656°, M = 0.918$ $\mathrm{RMSE}_{C_\mathrm{P}} = 0.0618$

original C_P predicted C_P

up:

down:



Методы решения задач

Предсказание интегральных характеристик

Метод интегрирования

$$\alpha, M \ \rightarrow \mathbf{SM} \ \rightarrow C_{\mathrm{P}}$$

$$C_{\mathrm{P}} \rightarrow \int_S \rightarrow C_{\mathrm{XP}}, C_{\mathrm{YP}}$$

Методы решения задач

Предсказание интегральных характеристик. Метод интегрирования

$$C_{\text{Y}_\text{P}} = \iint\limits_{S_{\text{нижн}} \cup S_{\text{верх}}} C_\text{P} dS$$

$$\overrightarrow{dC} = \begin{pmatrix} dC_{\text{X}_\text{P}} \\ dC_{\text{Y}_\text{P}} \\ dC_{\text{Z}_\text{P}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\text{P} dS_\text{X} \\ C_\text{P} dS_\text{Y} \\ C_\text{P} dS_\text{Z} \end{pmatrix} = C_\text{P} \cdot dS \cdot \vec{n}$$

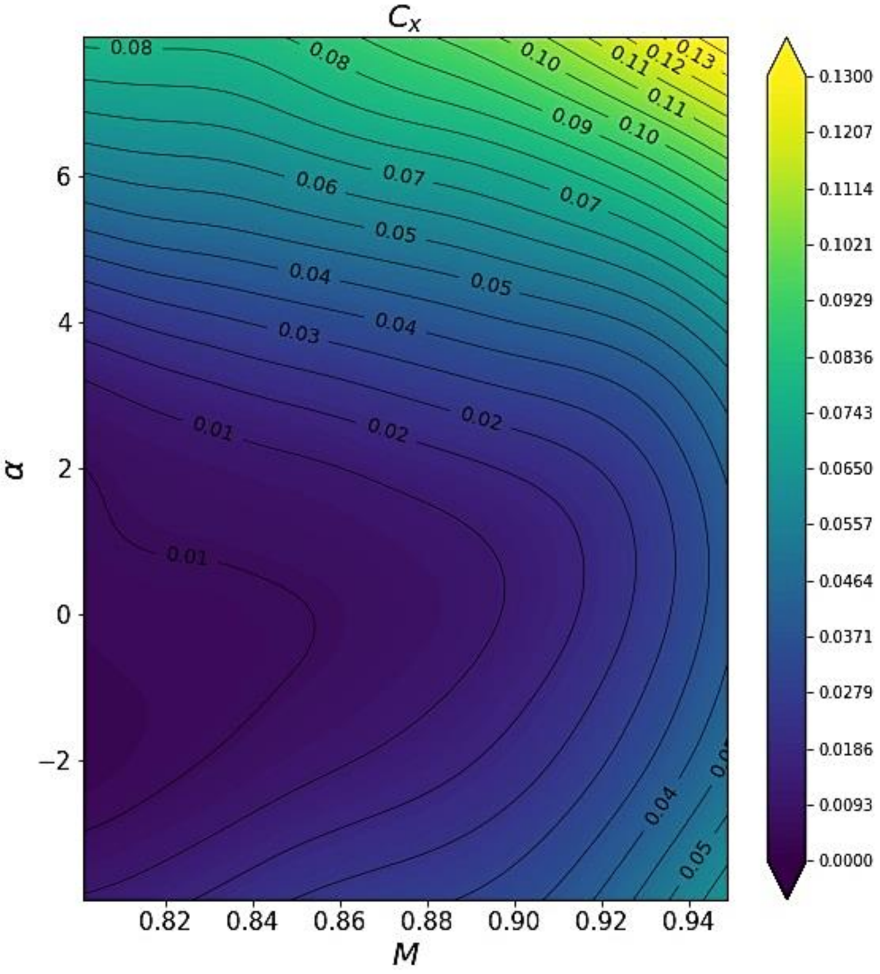
Численные результаты

Предсказание интегральных характеристик

Прямой метод

Модель : Кригинг + квадратичный тренд

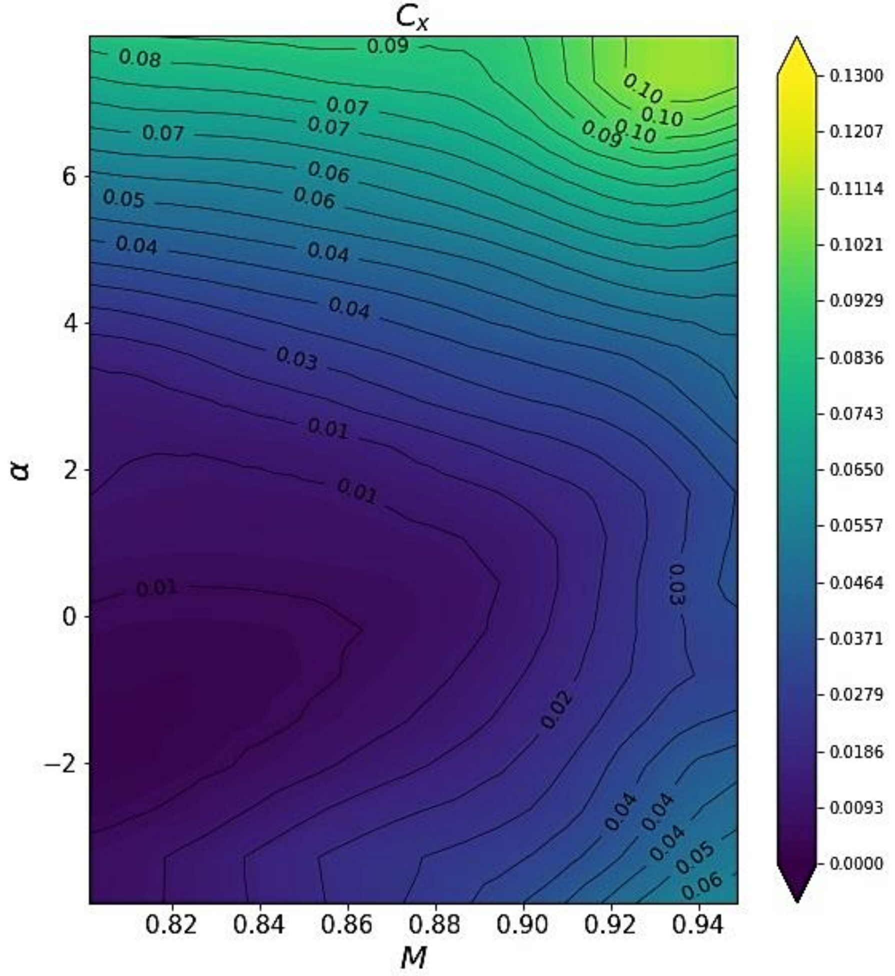
Сетка: 100×100



Метод интегрирования

Модель : Кригинг + 8 главных компонент

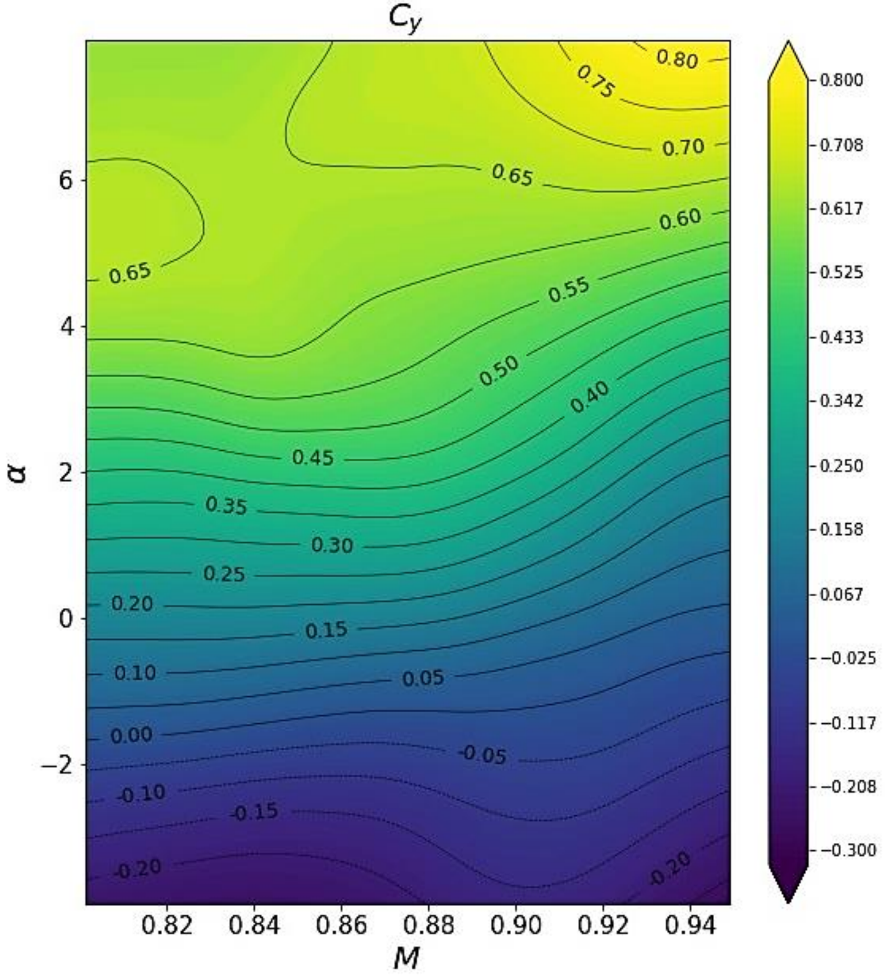
Сетка: 20×20



Численные результаты

Предсказание интегральных характеристик

Прямой метод
Модель : Кригинг + квадратичный тренд
Сетка: 100×100



Метод интегрирования
Модель : Кригинг + 8 главных компонент
Сетка: 20×20