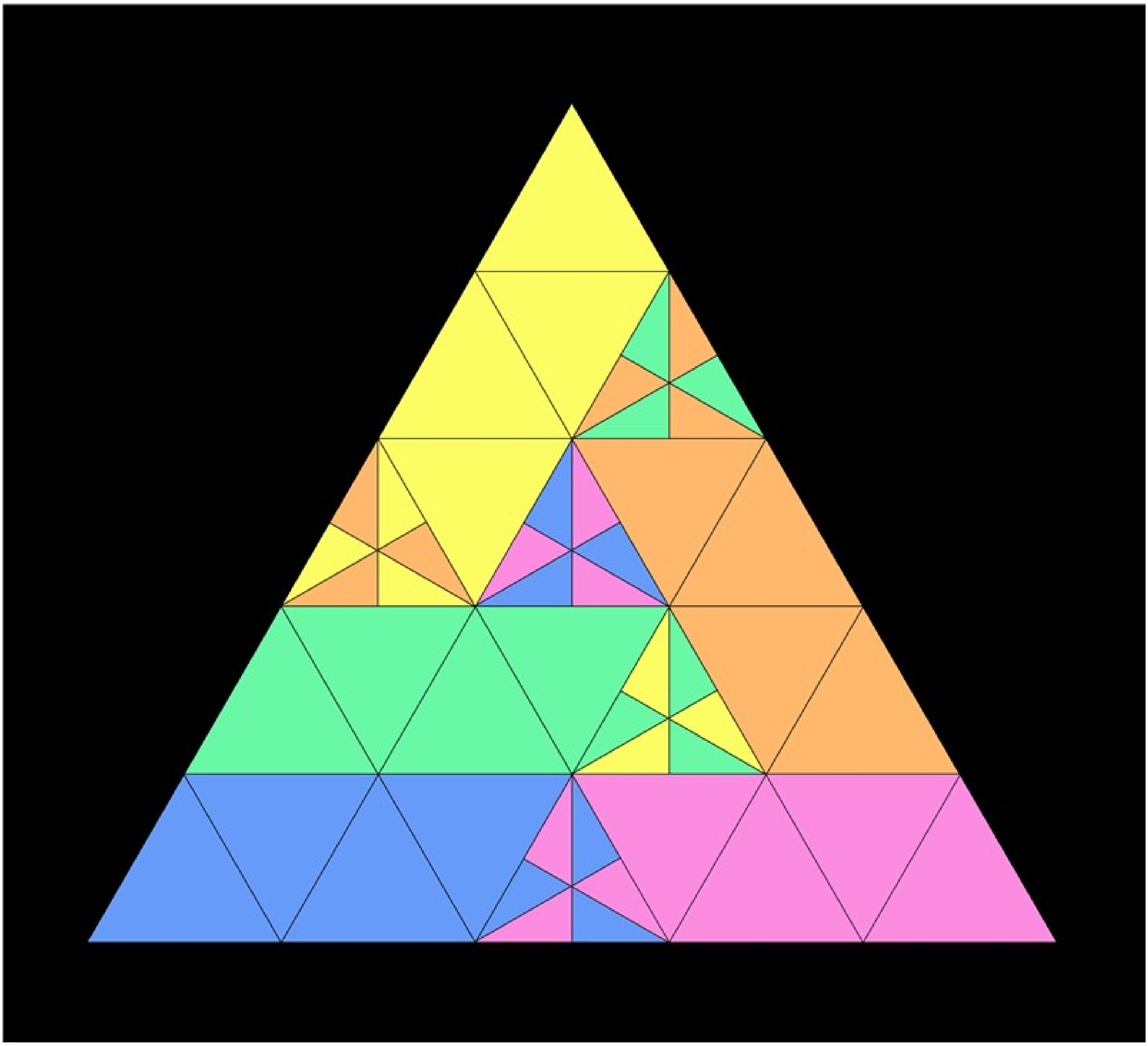
Д. Ю. МИХАЙЛОВ

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ
В
НАСТОЯЩУЮ МАТЕМАТИКУ



Санкт-Петербург
2022

Оглавление

Версия от 2022-12-11

Данная книга не является законченным продуктом. В настоящее время я продолжаю над ней работать и несколько раз в месяц публикую новую редакцию, которую можно свободно скачать по адресу: https://drive.google.com/file/d/1pHArgViE-72uCLowmG4gyg9pMRnz_EWx/view?usp=sharing

Предисловие

Все истинно великое совершается
медленным, незаметным ростом.
Сенека

Математика — это язык.
Станьте его носителем!

Длинных предисловий обычно не читают. А зря. Нередко в них содержатся идеи, которые кристаллизовались в уме автора в течение многих лет практики.

Хороших книг по математике довольно много. В том числе, на русском языке. Но большинство из них объединяет один недостаток: они написаны сильными математиками. «Какой же это недостаток?» — спросите вы. Дело в том, что сильные математики, как правило, от рождения одарены незаурядными способностями, учились в лучших матшколах и, как выразился Александр Шень, у них могут быть самые неожиданные идеи о том, что и как можно объяснить школьникам. Непостижимые для нас с вами вещи кажутся им элементарными, они думают, что все такие же умные, как они, и им даже не приходит в голову, что тут может быть что-то непонятно. Так стоит ли удивляться, что, например, Алексей Савватеев называет книгу Куранта и Роббинса «Что такое математика» простой и доступной каждому? Однако жестокая правда в том, что доступна она только для скачивания…

Да, у всех разные способности, хоть нам и неприятно думать, что мир устроен так несправедливо. И мы сделали бы только хуже, объявив всех одинаково способными, а не преуспевших в науке — безвольными лентяями.

Но, к счастью, математика не так уж и сложна. Недаром ведь ее изучают с первого класса! На свете не так много людей, не понимающих идеи счета и не умеющих складывать небольшие числа. Поэтому каждый может двигаться в своем темпе, развиваясь и получая удовольствие. И у меня бывали довольно слабые ученики, которым это удавалось, потому что они придерживались единственно правильного подхода к служению Царице наук — честно пытались во всем разобраться. Но я не видел сильных учеников-зубрил.

Многое зависит и от учителя. Как вы думаете, чем отличается хорошее преподавание от плохого? При хорошем сначала предлагают подумать над задачей, а потом дают теорию и намекают на решение, которое, хотя и с некоторой помощью, ученик находит сам. При плохом — сразу показывают, как решать, нередко без теории, и предлагают просто зазубрить алгоритм.

И тут я подхожу к наболевшему.

В большинстве российских школ математическое образование поставлено с ног на голову. Старшеклассники умеют решать логарифмические неравенства, но ничего не слышали ни о доказательстве по индукции, ни о числах Фибоначчи, ни о треугольнике Паскаля.

Каждая школа заинтересована, чтобы выпускники как можно лучше сдавали ЕГЭ. Фактическое владение предметом и умение мыслить отодвигаются на второй план. Что происходит, я поясню на примере. Предположим, я задал своему ученику решить 100 задач. Он говорит, что решил. Проверять все у меня нет ни времени, ни желания. Я проверяю, скажем, 27-ю, 56-ю и 79-ю. Но если бы он наперед знал, что я буду проверять именно эти задачи, он мог бы только их и сделать! Что-то похожее мы видим в современной школе. Все примерно понимают, какие типы заданий могут быть на экзамене, и многие только к ним и готовятся. То есть люди не изучают математику, а натаскиваются на контрольные задания. С моей точки зрения, это настолько же нелепо, как, работая персональным водителем, брить только правую сторону лица, потому что левую не видит работодатель.

Совершается чудовищная подмена. Вместо того чтобы учить детей математике, их учат притворяться, что они ее понимают…

Неверно, однако, было бы думать, что в России совсем нет математического образования. Есть, и очень хорошее. Только вот дается оно почти исключительно в элитных матшколах. Там математику преподают на очень высоком уровне, к которому, кстати говоря, и стоит стремиться. Но между обычной школой и математической пролегает почти непреодолимая для простых смертных пропасть. Я преподаю математику уже не один десяток лет и знаю, сколь многие тщетно пытаются через нее перепрыгнуть. Если вы откроете один из сборников матшкольных задач (они традиционно состоят из «листков», каждый из которых посвящен отдельной теме, и мы будем следовать этой традиции, чтоб максимально проникаться матшкольным духом), то, скорее всего, заметите, что даже самые первые задачки слишком трудны и уровень сложности растет очень круто. За годы практики я понял, что подавляющему большинству надо начинать подъем с гораздо меньшей высоты и двигаться намного более плавно. Этой цели и призвана послужить моя книга. Если угодно, она задумана как мостик через упомянутую выше пропасть. Поэтому каждый листок я постарался начать с большого количества совсем простых задач, решая которые вы будете постепенно и безболезненно дрейфовать от уровня обычной школы (который я затрудняюсь описать приличными словами) к уровню топовых физ-мат лицеев. Метафорически выражаясь, вместо того чтобы пытаться запрыгнуть на отвесную скалу, вы будете не спеша подниматься по пологому склону, который в конце концов приведет вас к подножию матшкольной программы, а уж двигаться дальше вы сможете сами: начиная с некоторого уровня, человек приобретает способность самостоятельно читать книги по математике и понимать, что там написано. Шире — он приобретает способность к эффективному самообучению. Теперь он может сам себе ставить задачи, намечать и реализовывать пути их достижения.

Поэтому главная цель этой книжки — не столько дать набор сведений и приемов, сколько сформировать необходимые понятия, научить основным методам доказательств и способам рассуждений, познакомить с ключевыми идеями, наконец, научить математическому мышлению. Нет, не научить, а дать возможность научиться!

С этой целью я уже много лет придумываю и коллекционирую задачи. Поначалу я намеренно не сортировал их по темам, потому что сам факт того, что задача на такую-то тему — подсказка. Я полагал, что решающий сам должен догадаться, каким методом следует воспользоваться. Но со временем мои взгляды изменились. Ведь чтобы применять тот или иной метод, надо сначала им овладеть.

У кого-то может возникнуть недоумение: если книга для начинающих, то почему она сплошь состоит из задач? Как решать их, ничего не зная? Не логичнее ли было бы на месте автора сначала объяснить что к чему, показать образцы решений, а уж потом давать упражнения? Но не так ли написаны школьные учебники? Скажите честно: вы многое из них помните? Скорее всего, нет. И дело тут не столько в памяти, сколько в том, что большинство людей попросту не умеет читать. Одно дело — просто пробежаться глазами по тексту, и совсем другое — понять, что там на самом деле написано. Согласитесь, между этими двумя вещами — большая, огромная разница!

Чтобы не быть голословным, ниже я приведу пример задачи и ее решения (максимально разжеванного):

Двузначное число 12 делится на 4, трехзначное число 112 — на 8, четырехзначное число 2112 — на 16. Вообще, для любого натурального числа n существует составленное из цифр 1 и 2 n-значное число, делящееся на 2^n. Докажите это. Для гурманов: уточните и обобщите утверждение задачи.

Подсказка: доказательство удобно провести по индукции.

Решение. База содержится в условии задачи. Для шага индукции обозначим n-ое число как A_n и разберем отдельно два случая:

1) $A_n = k2^n$, причем k нечетно. Но приписать слева к A_n единицу — это то же самое, что прибавить к нему $10^n = 5^n2^n = m2^n$. Обратите внимание, что m нечетно. Получаем число $A_{n+1} = k2^n + m2^n = (k + m)2^n$. «Ну и что? — спросит иной скептически настроенный читатель, — как из этого следует доказываемое утверждение?» А вот как: и k, и m — нечетные числа, значит в сумме они дают четное, поэтому A_{n+1} делится на 2^{n+1}. А это и есть шаг индукции (для нечетного k).

Тут по сложившейся и, вероятно, уже знакомой читателю традиции я должен бы написать что-нибудь в духе «разбор второго случая мы оставляем читателю в качестве упражнения». И хотя как преподаватель я действительно рекомендую вам рассмотреть второй случай самостоятельно, но, помня, как меня самого подчас бесили подобные фразы, все же приведу разбор и второго случая:

2) $A_n = k2^n$, причем k четно. Но приписать слева к A_n двойку — это то же самое, что прибавить к нему $2\times10^n = 5^n2^{n+1} = 2m2^n$. Обратите внимание, что 2m четно. Получаем число $A_{n+1} = k2^n + 2m2^n = (k + 2m)2^n$. «Ну и что? — спросит иной скептически настроенный читатель, — как из этого следует доказываемое утверждение?» А вот как: и k, и 2m — четные числа, значит в сумме они дают четное, поэтому A_{n+1} делится на 2^{n+1}. А это и есть шаг индукции (для четного k).

Уточнение: для каждого n составленное из двоек и единиц число единственно.

Обобщение: «1» в условии задачи можно заменить на любую нечетную цифру, а «2» — на любую четную, кроме «0».

Вы уверены, что поняли смысл прочитанного? Разумеется, лично Вы можете быть исключением, но для подавляющего большинства ответ будет отрицательным. А вот самому решить задачу, не поняв, что написано в условии, не получится. Давайте рассмотрим пример:

Существуют ли две степени двойки с одинаковыми остатками от деления на 9?

Я надеюсь, что вы уже знаете ответ. Если нет, попробуйте еще раз прочитать условие, на этот раз более внимательно. Знаете ли вы, что такое степени двойки?

$2^0 = 1$
$2^1 = 2$
$2^2=2\cdot2=4$
$2^3=2\cdot2\cdot2=8$
…

Понимаете ли вы, что их бесконечно много?

А что такое остатки от деления на 9? Да это же целые числа от 0 до 8! Представим себе, что у всех степеней двойки разные остатки от деления на 9. Это значит, что каждой из них надо предоставить свой персональный остаток. Но позвольте: их же всего 9, и они очень быстро закончатся! Кажется, ответ на вопрос задачи совершенно очевиден, и тут вообще не о чем рассуждать. Но, к моему великому изумлению, 90% моих учеников не смогли решить ее с первого раза. Мы пытались разобраться, почему, и обычно дело сводилось к тому, что условие задачи не было как следует прочитано (понято). Натренировавшись на коротеньких условиях, со временем вы сможете читать и книги по математике. Да, они тоже нужны, на одних задачах далеко не уедешь, но, как ни странно, читать нужно сначала научиться. Это одна из целей моей книжки. Другая — не менее важная — научить вас мыслить. «Я и так умею!» — подумали многие из вас. Давайте проверим.

Рассмотрим несколько решений моих учеников:

1. Любое ли четное число, начиная с 4, можно представить в виде суммы двух простых слагаемых?

Решение. 4 = 2 + 2. Далее, любое четное число можно представить в виде суммы двух нечетных слагаемых, а все простые числа, большие 2, как раз нечетны.

Ответ: да.

2. Две стороны прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите третью сторону.

Решение. Применим теорему Пифагора:

$x=\sqrt{3^2+4^2}=5$

Ответ: 5.

3. Бесконечно ли много простых чисел?

Решение. Простые числа образуют подмножество натуральных чисел, которых бесконечно много. Следовательно, простых чисел тоже бесконечно много.

Ответ: да.

4. Период полувыведения некоторого лекарства составляет 3 часа. Через сколько часов это лекарство полностью выводится из организма?

Решение. $3\cdot2=6$

Ответ: 6.

5. Найдите вероятность выпадения 18 очков при бросании трех игральных кубиков.

Решение. При бросании трех игральных кубиков может выпасть от 3 до 18 очков — всего 16 возможностей, и 18 очков — одна из них. По классическому определению вероятности: $p=\frac{1}{16}$.

Ответ: $\frac{1}{16}$.

Если хотя бы одно из этих рассуждений кажется вам убедительным, у вас проблемы. Ну или пространство для развития — с какой стороны посмотреть.

Решая мои задачи, вы из простого смертного можете превратиться в жреца науки. И не просто науки, но Царицы наук!

Чтобы понимать математику, надо долго думать над хорошими задачами. Подчеркну еще раз: полезно не только решать их, но и размышлять над ними: что вы вынесли из решения, чему научились, что поняли, какие известные вещи увидели в новом свете.

Начиная решать задачу, желательно ничем, кроме обычного калькулятора, не пользоваться. Исключение — если вы чего-то не знаете, и вам не понятно условие. Например, в нем говорится про числа Ферма, а вам не известно, что это. Конечно, надо загуглить. Вообще, интернет — штука очень полезная. Пользоваться им можно и нужно. Но не забывайте, что мои задачи — это пища для вашего ума.

Решать надо не спеша. Внимательно прочитайте условие, проникнитесь им. Рассмотрите частные случаи. Попытайтесь обобщить. Иногда достаточно просто записать условие задачи на языке математики (например, составив уравнение), и она тут же решится.

Нередко, однако, бывает полезно и противоположное умение: переводить с языка математики на какой-то более понятный. Рассмотрим, например, следующее определение:

Обыкновенным графом G = (X, U) называется упорядоченная пара множеств: конечного непустого X, элементы которого называют вершинами графа G, и подмножества $U \subseteq \widetilde{X}^{[2]}$, элементы которого называются ребрами этого графа. (Здесь $\widetilde{X}^{[2]}$ — множество неупорядоченных пар различных элементов X.)

Это строгое определение графа. С точки зрения математика, лучше не скажешь. Но если вы начинающий, весьма вероятно, что после нескольких таких определений у вас появится труднопреодолимое желание закрыть книгу и не открывать ее больше никогда. А заодно сформируется (или закрепится) по меньшей мере одно из убеждений:

1) математика — ахинея, придуманная одними фриками для других;

2) вы — «гуманитарий».

Но что если я попрошу вас представить города и дороги. Пока ничего сложного, правда? А теперь назовем города *вершинами* графа, а дороги — его *ребрами*. Легко вообразить несколько городов, между которыми нет ни одной дороги. Это *пустой граф*. Если из каждого города можно проехать в любой другой (возможно, через третий), граф называется *связным*. А если из каждого города можно проехать в любой другой напрямую, то такой граф называется *полным*. Все предельно ясно! А теперь вспомним, что мы договорились изображать города точками и называть их вершинами графа, а дороги изображать отрезками и называть их ребрами графа.

К слову замечу, что математикам комфортнее оперировать такими понятиями, как вершина и ребро, а не такими, как город и дорога.

Все используемые формулы выводите; теоремы — доказывайте. Если за полчаса-час не возникло идей, можно отложить задачу и вернуться к ней на следующий день. Перед сном желательно еще раз покрутить условие в голове. Утром решение может явиться само.

С другой стороны, ни к чему пытаться решить все задачи. Снова сравню их с пищей. Без нее мы не можем. Но это не значит, что мы должны пытаться съесть все, что попадает в поле зрения. Не пытайтесь самоутверждаться. Если за день-два ничего не придумали, спокойно гуглите. Разобраться в чужом красивом решении иногда бывает так же полезно, как придумать свое. Да и много нового узнаете.

Ищите параллели между задачами, это весьма увлекательно!

В овладении математикой может сильно пригодиться английский. Также было бы неплохо знать хотя бы один язык программирования. Учитывая, что математика — это тоже язык, вам придется стать полиглотом :-)

Не торопитесь. Все значительное достигается трудом настойчивым и каждодневным. Что-то понять можно (и нужно) уже сейчас. Для понимания на хорошем уровне потребуются годы. Не ждите быстрых результатов и поменьше думайте о своих умственных способностях. Постепенно и незаметно количество перейдет в качество, ваши усилия будут вознаграждены, и рано или поздно мир заиграет для вас новыми чудесными красками.

Для развития необходим самостоятельный поиск решений. Однако все хорошо в меру. Будьте добросовестны, но не требуйте от себя слишком многого: если бы один человек сам мог во всем разобраться, вся современная математика была бы известна уже в Древней Греции.

Впрочем, как показывает практика, с добросовестностью у большинства проблемы…

В математике нет царской дороги. Я хотел бы заполнить пропасть между обычными школами и обывателями с одной стороны и матшколами и настоящей математикой с другой, но смогу ли? Ведь вы сами должны будете напрягаться — с этой книгой или без нее. Приведу аналогию: если вы наняли инструктора по фитнесу, он за вас не накачается. Вам самим придется прикладывать усилия. Регулярно и помногу. Все упирается в то, что прикладывать эти усилия вы не способны ну или, во всяком случае, не хотите…

В школе в основном учат следовать образцам и оттачивают технику. По-настоящему содержательным вещам, таким как теория чисел и методы доказательств, внимания почти не уделяется. Неудивительно, что у многих математика ассоциируется со скучными монотонными действиями.

Предлагаемые вашему вниманию задачи позволят вам увидеть Царицу наук в совсем ином свете. Решая их, вы с наслаждением почувствуете, как расширяется ваш математический кругозор. И, возможно, даже согласитесь, что нет ничего интереснее и красивее математики :-)

Ценовая политика и сотрудничество

Принято думать, что хороший репетитор не может страдать от нехватки учеников. Дескать, довольные клиенты будут охотно рекомендовать его друзьям и знакомым, а ему останется только выбирать, с кем работать, а с кем — нет. Суровая действительность показывает, что это не так. У меня были десятки учеников, которые оставляли восторженные отзывы, но не рекомендовали меня ни одному человеку. Как следствие, вместо того чтобы изучать математику и совершенствовать методику преподавания, я вынужден заниматься тем, к чему не чувствую ни малейшего призвания — поиском и привлечением новых клиентов. И это несмотря на то, что на свете полно людей, желающих учиться у такого, как я. Подобное положение дел я считаю глубоко противоестественным, но до сих пор не придумал ничего остроумнее, чем делиться прибылью с теми, кто снабжает меня учениками. Так что если вы, дорогой читатель, желаете подзаработать, милости прошу: направляйте ко мне учеников, и не менее 20% прибыли — ваши.

Сказанное не может не отражаться на моей ценовой политике.

Если вы найдете меня сами (через знакомых, с которыми я ни о чем не договаривался, на Ютьюбе, в ТикТоке, во ВКонтакте и пр.), то, скорее всего, с вас я буду брать 1200 рублей в час. Но если вы найдете меня на таком сервисе, как Профи, или придете по рекомендации одного из моих сейлз-менеджеров (каковым — смотрите выше — может стать любой желающий), то, не взыщите, с вас мне придется брать больше.

Прежде чем мы приступим к занятиям, я могу предложить вам бесплатное 15-минутное тестирование.

Постоянным ученикам я могу годами не поднимать цену.

Кроме того, для сильных учеников (каковых порядка 10%) возможны дополнительные скидки.

А для тех, чей уровень не ниже моего, занятия будут полностью бесплатными :-)

0. Задачки на внимательность и здравый смысл

1. Сколько лошадиных сил у лошади?
2. Гусеница не длиннее червяка. Червяк не длиннее гусеницы. Кто длиннее?
3. Палку нужно распилить на 12 частей. В скольких местах придется ее распилить?
4. Назовите две цифры, одинаковые по форме, но разные по значению.
5. Вы участвуете в марафоне и обогнали бегуна, бежавшего вторым. Какую позицию вы занимаете?
6. Назовите самую известную числовую последовательность.
7. Предположим, что у вас и у меня имеется одинаковая сумма денег. Сколько денег я должен вам дать, чтобы у вас стало на 10 рублей больше, чем у меня?
8. На столе лежат две монеты, в сумме они дают 3 рубля. Одна из них – не 1 рубль. Какие это монеты?
9. От прямоугольного стола отпилили один угол. Сколько углов стало у стола?
10. Как-то один парикмахер сказал, что лучше бы он постриг двоих откуда угодно, чем одного жителя своего города. Почему он так сказал?
11. Какой знак, используемый в математике, надо поставить между 4 и 5, чтобы получилось число большее 4, но меньшее 5?
12. С какой скоростью должна бежать собака, чтобы не слышать звона сковородки, привязанной к ее хвосту?
13. Сколько получится десятков, если 2 десятка умножить на 3 десятка?
14. Некто был в командировке с 5 по 15 сентября. Сколько дней длилась командировка?
15. Из книжки вырвали несколько страниц так, что после 38 сразу следовала 55. Сколько страниц вырвали?
16. Чему равно среднее арифметическое n одинаковых чисел?
17. (*Числа Фибоначчи*) Продолжите последовательность: 0; 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; …
18. Сколько оборотов делает часовая стрелка за 24 часа?
19. Торговец купил некий товар за 7 рублей, продал его за 8, потом вновь купил за 9 рублей и опять продал его за 10. Какую прибыль он получил?
20. Что больше: сумма всех цифр или их произведение?
21. У Маши не хватало для покупки букваря семи копеек, а у Миши одной копейки. Они сложились, чтобы купить один букварь на двоих, но денег все равно не хватило. Сколько стоил букварь?
22. Как из трех спичек, не ломая их, сделать 4?
23. Почему в зеркале меняются местами право и лево, а не верх и низ?
24. Один поезд идет из Москвы в Екатеринбург, а другой – из Екатеринбурга в Москву. Вышли они одновременно, но скорость первого в 3 раза больше скорости второго. Какой поезд будет дальше от Москвы в момент встречи?
25. Один археолог утверждал, что нашел монету, датированную 35-м годом до н. э. Возможно ли это?
26. 12 рабочих должны отнести 12 центнеров картофеля из деревни в город. Каждый может нести только 1 центнер, и им понадобится для переноски 1 час. За какое время выполнят эту работу 6 рабочих?
27. Позавчера Пете было 17 лет. В следующем году будет 20. Как такое возможно?
28. Улитка за день залезает вверх по столбу на 3 см, а за ночь, уснув, нечаянно спускается на 2 см. Высота столба 10 м, а наверху лежит конфета. Через сколько дней улитка ее достанет? (**Ответ:** 998.)
29. Четырех кроликов надо разделить между тремя лицами так, чтобы никто не получил больше, чем остальные. Ни один кролик не должен пострадать.
30. В бухте стоит корабль; с его борта свисает веревочная лестница. У лестницы 10 ступенек. Расстояние между ступеньками 30 см. Самая нижняя ступенька касается поверхности воды. Океан сегодня очень спокоен, но начинается прилив, который поднимает воду за час на 15 см. Через сколько времени покроются водой три ступеньки веревочной лестницы?
31. Согласно статистике, 10% людей предпочитают уединение. Из этих 10% у 80% незарегистрированные в телефонных справочниках номера. У скольких из 400 абонентов, взятых наугад из телефонного справочника, окажутся такие номера?

32. 0 в любой степени — это 0; любое число в нулевой степени — это 1. Тогда, согласно первому утверждению, $0^0 = 0$, а согласно второму, $0^0 = 1$. Но если две величины равны одному и тому же, значит, они равны друг другу. Следовательно, 0 = 1. Найдите ошибку.
33. На столе стоит 10 ваз, в любых 2 вазах вместе лежит не более 5 орехов. Какое наименьшее и наибольшее число орехов может быть во всех вазах вместе?
34. У Саши сестер на 2 больше, чем братьев. На сколько у Сашиных родителей больше дочерей, чем сыновей?
35. Сравните дроби: а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$; б) $\frac{13}{25}$ и $\frac{19}{40}$; в) $\frac{14}{43}$ и $\frac{22}{67}$. Придумайте еще пары дробей, которые можно сравнить при помощи таких же идей. Попытайтесь обобщить ваши идеи.
36. Может ли пара ног у одной лошади пройти за сутки большее расстояние, чем другая пара?
37. «Сколько просите за один?» – поинтересовался покупатель в магазине. «Двадцать рублей», – ответил продавец. «А за двенадцать?» – «Сорок рублей». – «Вообще-то, мне нужно сто двадцать». – «Пожалуйста. С вас шестьдесят рублей». Что покупал этот человек?
38. Когда получается 2 • 2 = 5?
39. Когда получается 3 + 3 = 10?

Литература: [3], [7], [13], [21].

1. Наглядная математика

Лекция на YouTube

1. Нарисуйте на клетчатой бумаге прямоугольник со сторонами 3 и 4. Чему равна его площадь? Разделите прямоугольник диагональю. Чему равна площадь каждой из получившихся частей?
2. Почему вторая степень называется квадратом, а третья – кубом?
3. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 3, 4 и 5. Найдите площадь его полной поверхности.
4. На рисунке 1.1 изображен прямоугольник со сторонами $a + b$ и c. Сосчитайте его площадь двумя способами. Выведите отсюда формулу (a + b)c = ac + bc.

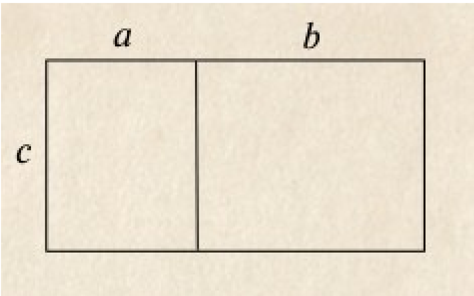


Рисунок 1.1

5. Нарисуйте прямоугольник со сторонами $a + b + c$ и d. Сосчитайте его площадь двумя способами. Выведите отсюда формулу (a + b + c)d = ad + bd + cd.
6. Нарисуйте прямоугольник со сторонами $a + b$ и $c + d$. Глядя на вашу картинку, подумайте, как раскрыть скобки в выражении (a + b)(c + d).
7. Нарисуйте квадрат со стороной a + b + c. Раскройте скобки в выражении $(a + b + c)^2$.
8. Пользуясь похожими идеями, проиллюстрируйте формулы сокращенного умножения:
   а) квадрат суммы, квадрат разности, разность квадратов;
   б)* куб суммы, куб разности, сумма кубов, разность кубов.
9. Первый множитель = 45. Как изменится произведение, если второй множитель уменьшить на 8? (**Ответ:** уменьшится на 360.)
10. Длина футбольного поля 150 м, ширина – 92 м. Поле окружено беговыми дорожками шириной 4 м. Считая поле прямоугольным, найдите его площадь вместе с дорожками.
11. Если диагонали четырехугольника пересекаются под прямым углом, то его площадь равна половине произведения диагоналей. Докажите это.

12. *Медиана* — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны. Соедините вершины треугольника с серединами противолежащих сторон. Сколько получилось медиан? А сколько треугольников?
13. Можно ли разрезать торт на 8 частей, сделав 3 разреза?
14. Найдите сумму n первых натуральных чисел. (Решение)
15. Найдите сумму: 11 + 22 + 33 + 44 + 55 + 66 + 77 + 88 + 99.
16. (*Теорема Пифагора*) Пусть *a*, *b* и *c* — стороны прямоугольного треугольника (рисунок 1.2). Докажите, что $a^2 + b^2 = c^2$.

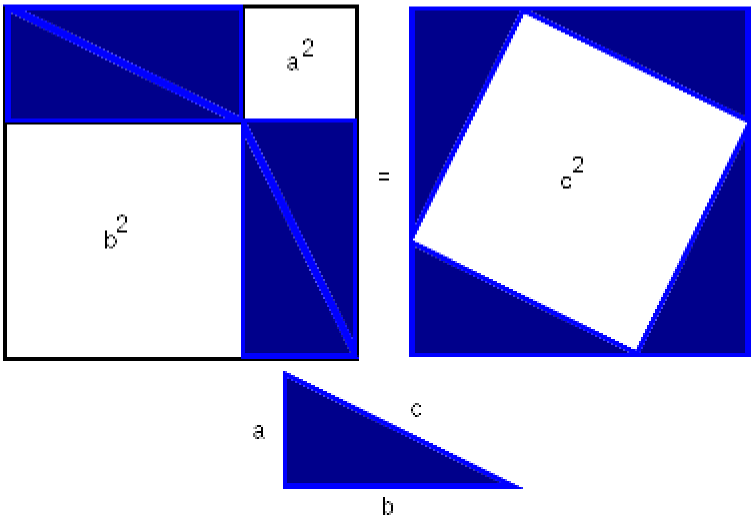


Рисунок 1.2

17. Найдите сумму n первых нечетных чисел.
18. (Продолжение) *Пифагоровой тройкой* называют такие натуральные числа a, b и c, что $a^2 + b^2 = c^2$. Покажите способ нахождения всех пифагоровых троек, в которых гипотенуза отличается от большего катета на 1.
19. Докажите, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=1$.
20. На клетчатой бумаге нарисуйте прямоугольник с целыми сторонами. Отрежьте от него квадрат с максимально возможной стороной. Сделайте то же с получившимся прямоугольником. Можно ли эту процедуру повторять бесконечно? Если нет, то какая фигура останется на последнем шаге? Можно ли ею замостить исходный прямоугольник?
21. Можно ли замостить плоскость квадратами, среди которых только 2 одинаковых?
22. Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать на 2, на 3 или на 4 равных треугольника.
23. На круглом торте нарисован дракон, глаз которого не находится в центре круга. Разрежьте данный торт на две части и переложите их так, чтобы они снова образовали круглый торт, а глаз дракона оказался бы точно в его центре.
24. Как разделить арбуз на две цельные части, чтобы после его поедания осталось 3 корки?
25. На прямоугольном столе лежат линейка и кирпич. Как измерить пространственную диагональ кирпича?
26. Введите в поисковой системе «proof without words» или «visual proof» и посмотрите картинки и видео.

Литература: [13], [14], [17], [19], [20].

2. Полный перебор

1. Сколькими способами число 10 можно представить в виде суммы: а) двух; б) трех целых положительных слагаемых?
2. Сколько делителей у числа 12?
3. Сколько делителей у числа 30?
4. Сколько общих делителей у чисел 12 и 30?
5. Сколько делителей у числа 101?

6. Множество A состоит из прямоугольников с целыми сторонами и периметром P. Сколько элементов в множестве A и какова наибольшая площадь прямоугольника, если P = : а) 14; б) 16?
7. Некоторые числа можно представить в виде суммы двух квадратов, например: $100 = 36 + 64 = 6^2 + 8^2$; $101 = 1 + 100 = 1^2 + 10^2$. Можно ли представить в виде суммы двух квадратов число 99?
8. Существует ли прямоугольный треугольник с целыми сторонами?
9. Докажите, что 3 прямые не могут разделить плоскость на 5 частей.
10. Многоугольник называют *правильным*, если в нем равны все стороны и все углы. Каждую из вершин правильного треугольника можно покрасить синим или красным цветом. Сколько существует различных раскрасок? Раскраски, которые можно получить друг из друга поворотом, считаем одинаковыми. (**Ответ:** 4.)
11. То же для квадрата. (**Ответ:** 6.)
12. Тот же вопрос для квадрата и трех цветов. (**Ответ:** 24.)
13. В поезде 10 вагонов. Каждый из них можно покрасить одним из 10 цветов. Требуется узнать, сколькими способами можно это сделать. Можете ли вы перебрать все варианты? (**Ответ:** нет, вы не можете. Даже если вы перестанете есть и спать и будете рассматривать один вариант в секунду, вам не хватит и 800 лет. Как видим, возможности перебора крайне ограничены. Поэтому мы переходим к более цивилизованным методам подсчета.)

Литература: [18], [19], [20].

3. Комбинаторика – 1

1. У красавицы есть 40 платьев и 30 пар туфель. Сколькими способами она может нарядиться?
2. Из города A в город B ведут 5 дорог, а из города B в город C — 8 дорог. Сколькими способами можно проехать из города A в город C?
3. Посетитель ресторана хочет заказать салат, суп и чай. Сколькими способами он может это сделать, если в меню значатся 15 салатов, 10 видов супа и 50 разновидностей чая?
4. Решите последнюю задачу из предыдущего листка.
5. Маша может купить или тетрадь с ручкой, или учебник. В магазине продается 5 видов тетрадей, 6 видов ручек и 7 видов учебников. Сколькими способами она может сделать покупку?
6. Сколькими способами можно вырезать 5-клеточную полоску из шахматной доски? (**Решение и ответ:** 4 • 8 (горизонтальных) + 4 • 8 (вертикальных) = 64.)
7. Ответы к заданиям 1–11 профильного ЕГЭ по математике записываются в поля, каждое из которых состоит из 17 клеток. Ответ может выражаться целым числом или конечной десятичной дробью. В одну клетку могут быть вписаны цифра, знак «минус» или запятая. Выпускник Недоумов заполняет бланк наудачу, не читая задания. Считая все допустимые комбинации символов равновозможными, примерно оцените вероятность угадать правильный ответ.

Литература: [2], [7], [8], [10], [11], [15], [17], [20], [21], [26], [28].

4. Числовая прямая

1. Нарисуйте числовую прямую. Отметьте точки с целыми координатами. Покрасьте синим цветом те из них, которые делятся на 2, а красным — те, которые не делятся на 2.
2. Найдите координату середины отрезка, если его концы имеют координаты 17 и 33.
3. Точку с координатой x сдвинули на 5 единиц вправо. Какова её координата теперь?
4. Найдите координаты середины отрезка, если его концы имеют координаты x и y.
5. Нарисуйте на числовой оси точки x, для которых $x - \frac{1}{3}$ — целое число.
6. Нарисуйте на числовой оси точки x, для которых $\frac{x}{2}$ — целое число.
7. Нарисуйте на числовой оси точки x, для которых 2x — целое число.
8. На сколько сдвинется середина отрезка на числовой оси, если один его конец неподвижен, а второй сдвинулся на 3 единицы?
9. Нарисуйте на числовой оси все точки x, для которых $|x| > 1$.

Литература: [10], [14].

5. Графы

1. У каждого из семерых братьев есть сестра. Сколько всего сестер?
2. Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля – Меркурий, Плутон – Венера, Земля – Плутон, Плутон – Меркурий, Меркурий – Венера, Уран – Нептун, Нептун – Сатурн, Сатурн – Юпитер, Юпитер – Марс и Марс – Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?
3. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?
4. В шахматном турнире с тремя участниками было сыграно 6 партий. Сколько партий сыграл каждый?
5. *Граф* — это множество точек, называемых *вершинами*, некоторые из которых могут быть соединены отрезками — *ребрами* графа. Придумайте несколько ситуаций, которые удобно изобразить в виде графа.
6. В Радужной стране 7 городов (от красного до фиолетового). Из каждого города можно проехать в любой другой (изображающий такую систему дорог граф называют *связным*). Сколько дорог должно быть в Радужной стране?
7. (Продолжение) Новый президент Радужной страны в своей предвыборной кампании пообещал, что при нем из каждого города можно будет проехать в любой другой напрямую (изображающий такую систему дорог граф называют *полным*). Сколько теперь дорог должно быть в Радужной стране? Если затрудняетесь с ответом, решите сначала следующую задачу.
8. Нарисуйте полные графы, построенные на n вершинах для $1 \le n \le 6$. Сколько в каждом из них ребер? Сформулируйте общую гипотезу и докажите ее двумя способами.
9. *Степенью вершины* графа называют число выходящих из нее ребер. Как выяснить, сколько ребер в графе, зная степени всех его вершин?
10. У каждого марсианина по 3 руки. Могут ли 13 марсиан взяться за руки так, чтобы не оставалось свободных рук?
11. Дорожки парка образуют квадрат с одной диагональю. Иван Иваныч потерял запонку. Чтобы поскорее ее найти, он хочет пройти по каждой дорожке ровно один раз. Удастся ли ему это сделать? А если бы в квадрате были обе диагонали?
12. (Продолжение) Тот же вопрос для каждого графа из задачи 8. Почему иногда удается пройти по всем дорожкам ровно по разу, а иногда — нет? Для каких полных графов такой обход возможен? Сформулируйте и докажите общее правило для произвольного графа.
13. Имеется группа островов, соединённых мостами. Турист побывал на всех островах, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведёт с Троекратного, если турист: а) не с него начал и не на нём закончил? б) с него начал, но не на нём закончил? в) с него начал и на нём закончил?
14. Докажите, что в связном графе есть цикл, содержащий все рёбра, тогда и только тогда, когда степень любой вершины графа четна (такие графы называются *эйлеровыми*).
15. *Деревом* называют связный граф без циклов. Сколько ребер имеет дерево, построенное на n вершинах?
16. Докажите, что если число рёбер не меньше числа вершин, то граф имеет *цикл*: можно найти замкнутый путь, проходящий по рёбрам и не проходящий два раза по одному ребру.
17. Сколько ребер должно быть в связном графе с n вершинами?
18. Сколько ребер может быть в несвязном графе с n вершинами?
19. В графе 9 вершин и 8 ребер. Сколько в нем может быть вершин степени 1? Для каждого возможного случая найдите пример такого графа. Для невозможного — докажите, почему он невозможен. А если потребовать связности графа?
20. *Остовным деревом* называют минимальный связный подграф, содержащий все вершины. Сколько существует остовных деревьев у полного графа с 3 вершинами? А с 4?
21. Найдите ошибку в следующем рассуждении. Дерево с 10 вершинами имеет 9 ребер. Полный граф, построенный на 10 вершинах, (обозначение: K_{10}) содержит 45 ребер. Следовательно, K_{10} имеет C_{45}^{9} остовных деревьев.
22. Докажите, что в любом городе число людей, у которых нечётное количество знакомых, живущих в этом городе, является чётным.

23. На вечеринке был 41 человек. Каждый обменялся телефонами не менее чем с 20 участниками. Но когда Борис пришел домой, он понял, что не взял телефон у Алисы. Сможет ли Борис узнать телефон Алисы?
24. (*Формула Эйлера для многогранников*) Пусть В — число вершин выпуклого многогранника, Р — число его рёбер и Г — число граней. Докажите, что В – Р + Г = 2. (Решение)
25. Гусеница ползает по проволочному каркасу куба. Сможет ли гусеница совершить путешествие по всем 12 ребрам, не проползая дважды по одному ребру?
26. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие равное число знакомых в этой компании. (Знакомства симметричны: если А знаком с Б, то Б знаком с А.)
27. Могут ли 13 шаров расположиться в пространстве так, чтобы каждый из них касался ровно трех других?
28. Колобок хочет доказать попарную эквивалентность n высказываний. Сколько импликаций ему потребуется?
29. Графы G и H называются *изоморфными*, если существует такое взаимно однозначное соответствие между вершинами G и H, что вершины A и B графа G соединены ребром тогда и только тогда, когда соединены ребром соответствующие им вершины графа H. Выберите верные утверждения: а) если два графа изоморфны, то в них одинаковое число вершин; б) если у двух графов одинаковое число вершин, то они изоморфны.
30. Нарисуйте все неизоморфные друг другу графы с не более чем четырьмя вершинами.
31. Нарисуйте два изоморфных друг другу графа с пятью вершинами.
32. В трёх вершинах правильного пятиугольника расположили по фишке. Разрешается передвигать их по диагонали в любую свободную вершину. Можно ли таким образом добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на свое место, а две другие поменялись местами?
33. В классе 18 учеников. Каждый из них дружит не менее, чем с 12 одноклассниками. Докажите, что среди учеников этого класса найдутся четверо, имеющие одинаковое число друзей. (**Доказательство:** Предположим противное. У каждого из учеников может быть от 12 до 17 друзей, всего 6 вариантов. Тогда, чтобы не нашлось четверых, имеющих одинаковое число друзей, каждый из 6 вариантов должен быть представлен не более чем 3 учениками. Но 3 • 6 =18, поэтому каждый вариант должен быть представлен *ровно* 3 учениками. Однако это означало бы, что мы построили граф, в котором 3 вершины степени 12, 3 вершины степени 13, … и 3 вершины степени 17, то есть сумма степеней всех вершин нечетна, что невозможно.)
34. Докажите, что в любой компании из шести человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. (Считается, что если А знаком с Б, то Б знаком с А.) (**Доказательство:** Изобразим знакомства синими ребрами, а незнакомства — красными. Из каждой вершины исходит 5 ребер. По принципу Дирихле среди них найдутся 3 одноцветных. Рассмотрим образуемый ими вместе с инцидентными им вершинами подграф. Если провести в нем еще 1 ребро того же цвета, то все доказано. В противном случае это три вершины треугольника другого цвета.)
35. На доске отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: белым, синим или красным. Докажите, что найдутся 3 точки в вершинах одноцветного треугольника. Подумайте, как можно обобщить эту задачу. (Решение на YouTube) (**Доказательство:** Из каждой вершины исходит 16 ребер. По принципу Дирихле среди них найдутся 6 одноцветных. Рассмотрим образуемый этими ребрами и инцидентными им вершинами подграф. Если провести в нем еще 1 ребро того же цвета, то все доказано. В противном случае имеем 6 вершин, на которых надо построить полный двухцветный граф, в каковом (см. предыдущую задачу) непременно найдется одноцветный треугольник. **Обобщение:** Для любого количества цветов n можно указать число вершин x_n, гарантирующее, что в построенном на них полном n-цветном графе найдется одноцветный треугольник, причем $x_1 = 3$; $x_n \le n(x_{n-1} - 1) + 2$. Таким образом, эти значения образуют последовательность 3, 6, 17, 66, 327, 1958, 13701, 109602, … В то же время мы не утверждаем, что это числа Рамсея. Известно лишь, что R(3, 3) = 6, R(3, 3, 3) = 17 и 51 ≤ R(3, 3, 3, 3) ≤ 64.)
36. Докажите, что в полном графе на 9 вершинах, ребра которого покрашены красным или синим, найдется либо красный треугольник, либо синий квадрат с синими диагоналями.
37. *Числом Рамсея* R(x, y) называют такое минимальное число, что в построенном на этом числе вершин полном графе, ребра которого покрашены в синий или в красный цвет, найдется или полный подграф порядка x, все ребра которого синие, или полный подграф порядка y, все ребра которого красные. (Из предыдущих задач мы уже знаем, что R(3, 3) ≤ 6 и R(3, 4) ≤ 9.) Докажите, что $R(x, y) \leqslant C_{x+y-2}^{x-1}$.
38. Докажите, что R(3, 3) = 6.
39. Нарисуйте табличку 5 × 5 и заполните ее числами Рамсея R(n, m) для 1 ≤ n ≤ 5 и 1 ≤ m ≤ 5.

Литература: [7], [8], [10], [12], [13], [15], [17], [21], [26], [27], [28].

6. Принцип Дирихле

1. Какое наименьшее число учеников должно быть в классе, чтобы гарантированно можно было найти трех учеников, родившихся в один день недели?
2. В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.
3. Докажите, что среди москвичей есть два человека с равным числом волос, если известно, что у любого человека на голове менее одного миллиона волос.
4. Обязательно ли среди 25 "медных" монет (то есть монет достоинством 1, 2, 3, 5 коп.) найдётся 7 монет одинакового достоинства?
5. 41 яблоко разложили по 8 корзинам. Выберите верные утверждения: а) хотя бы в одной корзине лежит не меньше 5 яблок; б) хотя бы в одной корзине лежит не меньше 6 яблок; в) хотя бы в одной корзине лежит не меньше 7 яблок.

6. Носки считаются парой, если они одного цвета. Из ящика с носками двух разных цветов взяли три носка. Найдите вероятность того, что среди выбранных носков встретится хотя бы одна пара.
7. Таксист проехал 11 км. С первым пассажиром он ехал 3 км, со вторым — 4, а с третьим — 5. Докажите, что в какой-то момент он вез не меньше двух пассажиров одновременно.
8. На шахматную доску поставили 17 королей. Докажите, что какие-то 2 короля бьют друг друга.
9. В коробке 82 карандаша. Докажите, что среди них найдется или 10 разноцветных карандашей, или 10 карандашей одного цвета.
10. С какого раза можно гарантированно угадать миллионный знак после запятой числа π?
11. Существуют ли 2 степени двойки с одинаковыми остатками при делении на 9?
12. 100 литров воды разлили по 5 бочкам. Сколько воды в каждой бочке? (Решение)
13. В поэтическом кружке 32 стихотворца. Пиит Вася сочинил 15 стихотворений, а остальные сочинили меньше. Докажите, что найдутся трое, сочинивших одинаковое количество стихотворений.
14. В ящике лежат носки: 8 чёрных, 9 синих, 10 белых. Какое наименьшее количество носков надо вынуть не глядя, чтобы среди вынутых оказалось два носка а) одного цвета; б) разных цветов; в) чёрного цвета?
15. Несократимую дробь $\dfrac{m}{n}$ записали в виде периодической десятичной дроби. Сколько цифр может содержать наименьший период? (**Ответ:** $\le n - 1$.)
16. Решите числовой ребус: $\dfrac{Ч \cdot И \cdot С \cdot Л \cdot О}{Ф \cdot Е \cdot Р \cdot М \cdot А}$.
17. Докажите, что при любом выборе пяти точек внутри квадрата с площадью 2 найдется пара точек, удаленных одна от другой менее чем на 1.
18. Кот Базилио пообещал Буратино открыть великую тайну, если он составит чудесный квадрат 6 × 6 из чисел +1, −1, 0 так, чтобы все суммы по строкам, по столбцам и по большим диагоналям были различны. Узнает ли Буратино великую тайну?
19. В кинотеатре 7 рядов по 10 мест каждый. Группа из 50 детей сходила на утренний сеанс, а потом на вечерний. Докажите, что найдутся двое детей, которые на утреннем сеансе сидели в одном ряду и на вечернем тоже сидели в одном ряду.
20. За круглым столом сидят несколько депутатов. Напротив каждого должна стоять табличка с его именем, но таблички перепутались так, что ни одна не стоит на своем месте. Докажите, что можно так повернуть стол, чтобы по крайней мере 2 таблички стояли напротив своих депутатов.
21. Докажите, что у любого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон. (**Решение:** Пусть это не так. Рассмотрим грань с наибольшим числом сторон n. К ней примыкает n граней, каждая из которых может иметь от 3 до n − 1 стороны: всего n − 3 варианта. n − 3 < n => по принципу Дирихле повторения неизбежны.)

Литература: [2], [7], [8], [10], [11], [14], [15], [17], [21], [28].

7. Комбинаторика – 2

1. Маша может купить или тетрадь с ручкой, или учебник с обложкой. В магазине продается 5 видов тетрадей, 6 видов ручек, 7 видов учебников и 3 вида обложек. Сколькими способами она может сделать покупку?
2. Каждая костяшка домино разделена на две половинки, на каждой из которых нарисовано от 0 до 6 точек. Объясните, почему доминошек ровно 28.
3. Сколько ладей можно поставить на шахматную доску так, чтобы никакие две не били друг друга?
4. (Продолжение) Сколькими способами это можно сделать?
5. Сколькими способами можно расставить 17 книг на полке?
6. 17 девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?
7. Сколько существует ожерелий, составленных из 17 различных бусинок?
8. Каждую из вершин треугольника можно покрасить синим, зеленым или красным цветом. Сколько существует различных раскрасок? А если цвета не могут повторяться?
9. Каждую из вершин тетраэдра можно покрасить желтым, синим, зеленым или красным цветом. Сколько существует различных раскрасок? А если цвета не могут повторяться?
10. Если множество A содержит каждый элемент множества B, то множество B называют *подмножеством* множества A. Например, {*, Δ} есть подмножество множества {*, 87, Δ, #}. Множество X содержит n элементов. Сколько существует подмножеств множества X? Для

начала разберите простые случаи: при n = 1, 2, 3. Попытайтесь угадать закономерность и понять, почему она именно такова.

11. Сколько различных произведений, кратных 10, можно образовать из множителей 2, 3, 5, 7, 9, 11? Порядок множителей не важен.
12. How many functions f : {1, 2, 3, 4, 5} → {a, b, c, d} are there? (**Solution:** 4^5.)
13. На прямой отметили n точек. Сколько получилось различных отрезков с концами в этих точках? (Сначала поэкспериментируйте с небольшими значениями n.)
14. Сколько ребер имеет полный граф, построенный на n вершинах? Для начала поэкспериментируйте с небольшими n.
15. Сколько диагоналей у n-угольника? (Решение)
16. Сколькими способами можно выбрать 3 дежурных из класса, в котором 20 человек? А если кого-то надо назначить старшим?
17. Сколькими способами можно выбрать k дежурных из класса, в котором n человек? Ответ на вопрос этой задачи — *число сочетаний из n по k*. Обозначение: C_n^k . Убедитесь, что полученная вами формула дает верный результат для небольших n и k.
18. Полный граф на 6 вершинах имеет форму выпуклого шестиугольника.
    а) Сколько существует треугольников, составленных из ребер этого графа?
    б)* Каждое ребро графа покрасили или синим, или красным. Докажите, что найдутся 2 одноцветных треугольника. Сравните с задачей 5.34. (Решение)
19. Незнайка стоит в точке (0; 0). За один ход он может переместиться на 1 вправо или вверх.
    а) Сколькими способами он может добраться до точки (n; n)?
    б)* А если нельзя пересекать прямую y = x?
    в) Сколькими способами он может добраться до точки (n; k)?
20. Воробушек сидит в точке (0; 0; 0). Сколькими путями он может долететь до точки с целыми координатами (a; b; c), если координаты не должны убывать и в любой момент по крайней мере 2 из них должны выражаться целыми числами?
21. Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове БУЛКА? А в слове МАТЕМАТИКА?
22. Имеется куб размером 10 × 10 × 10, состоящий из маленьких единичных кубиков. В центре O одного из угловых кубиков сидит кузнечик. Он может прыгать в центр кубика, имеющего общую грань с тем, в котором кузнечик находится в данный момент, причем так, чтобы расстояние до точки O увеличивалось. Сколькими способами кузнечик может допрыгать до кубика, противоположного исходному? (**Решение:** Поставьте в соответствие каждому маршруту кузнечика слово, в котором по 9 раз встречаются буквы x, y и z. **Ответ:** $27! / (9!)^3$.)
23. В мешке лежат 14 шариков — по 2 каждого из 7 цветов радуги. Сколько различных наборов можно составить из этих 14 шариков? Попробуйте обобщить задачу. (**Ответ:** 3^7. Обобщением будет задача, идентичная задаче о количестве делителей натурального числа.)
24. Кот Леопольд изобразил выпуклый n-угольник и провел в нем все диагонали. Оказалось, что никакие три из них не пересекаются в одной точке. Сколько образовалось точек пересечения?
25. Сколько существует простых неориентированных графов с n вершинами? А ориентированных?
26. Сколько делителей у натурального числа n?
27. В автосалоне r красных машин, b синих и g зеленых. Муж и жена хотят купить две машины разных цветов. Сколькими способами они могут это сделать? Все машины разные. (**Ответ:** rb + rg + bg, если обе машины будут в общем пользовании, и 2(rb + rg + bg), если у каждого будет персональная машина.)
28. В классе a мальчиков и b девочек. Сколькими способами можно: а) выбрать старосту; б) выбрать пару дежурных (мальчика и девочку); в) каждой девочке тайно влюбиться в одного мальчика? г) В классе провели тестирование по комбинаторике (зачет-незачет). Сколько существует возможных исходов тестирования класса? д) Тот же вопрос при оценивании по пятибалльной системе. е) На выпускном танцевали медленный танец. Сколькими способами это могло реализоваться? ж) Тот же вопрос при оценивании танца по пятибалльной системе. (**Ответ:** а) a + b; б) ab; в) a^b; г) 2^{a+b}; д) 5^{a+b}; е) 2^{ab}; ж) 6^{ab}.)
29. Сколько различных сумм можно составить из n первых натуральных чисел, используя каждое число не более одного раза?
30. Красная Шапочка хочет сложить прямоугольный параллелепипед из 30 одинаковых кубиков. Сколькими способами она может это сделать? А из 210 кубиков? (**Ответ:** 5 и 14.)
31. What digit is the most frequent between the numbers 1 and 1000 (inclusive)? (**Answer:** 1)
32. В Радужной стране 7 городов (от красного до фиолетового). Президент радужной страны велел построить такую систему дорог, чтобы, во-первых, из каждого города можно было проехать в любой другой и, во-вторых, из каждого города выходило не больше двух дорог. Сколькими способами это можно сделать? (**Решение:** система дорог может быть или в виде замкнутой линии, или незамкнутой (из двух городов выходит по 1 дороге, из остальных — по 2). Первая ситуация реализуется (7 – 1)! / 2 = 360 способами, вторая — 7! / 2 = 2520 способами. **Ответ:** 2880.)
33. Сколькими способами можно разрезать на доминошки доску 2 × n?
34. (*Числа Каталана*) Найдите число разбиений выпуклого (n+2)-угольника на треугольники его непересекающимися диагоналями.

35. В банк пришли n человек, каждый из которых хочет открыть вклад на 1000 рублей и n человек, каждый из которых хочет взять 1000 рублей в кредит. Сколькими способами они могут встать в очередь, чтобы все желающие получили кредит, если исходно в банке не было денег?
36. На окружности расставили 2012 черных точек и одну белую. Среди множества всех многоугольников с вершинами в этих точках каких будет больше: с белой точкой или без нее? (**Ответ:** с белой точкой. Не задействуя белой точки, можно составить некоторое количество многоугольников. Обозначим его через p. Но в каждом из этих многоугольников можно увеличить количество углов на 1, добавив белую точку. Кроме того, используя белую точку, можно составить еще 2012 • 2011/2 = 2023066 треугольников. Таким образом, с белой точкой можно составить p + 2023066 многоугольников.)
37. Колесо обозрения имеет простое число p кабинок, каждую из которых нужно покрасить в один из a цветов. Сколько существует различных раскрасок? Раскраски, которые можно получить друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.
38. (*Малая теорема Ферма*) Пользуясь результатом предыдущей задачи, докажите, что $(a^p - a) \vdots p$ при любом целом a и простом p.
39. Для каждого правильного многогранника найдите число его вершин, ребер и граней.
40. Для каждого правильного многогранника найдите число его диагоналей. (Решение)
41. Футбольный мяч сшит из правильных 5- и 6-угольников. Докажите, что 5-угольников ровно 12.
42. Колесо обозрения имеет p^2 кабинок (p — простое число), каждую из которых можно покрасить в один из a цветов. Сколько существует различных раскрасок? Раскраски, которые можно получить друг из друга поворотом, считаются одинаковыми. (**Решение:** Существует a одноцветных раскрасок. Так как колесо можно разделить на p групп по p подряд идущих кабинок (для удобства их количество обозначим через q (q = p)), разноцветные раскраски могут быть 2 типов: 1) Переходящие в другие при повороте на q. Это возможно, только если все p групп раскрашены одинаково. Таких неодноцветных раскрасок $\frac{a^q - a}{q}$. 2) Переходящие в другие только при полном повороте. Их $\frac{a^{pq} - a^q}{pq}$. Итого $a + \frac{a^q - a}{q} + \frac{a^{pq} - a^q}{pq}$. После обратной замены окончательно имеем: $a + \frac{a^p - a}{p} + \frac{a^{p^2} - a^p}{p^2}$.

Литература: [2], [7], [8], [10], [11], [15], [17], [20], [21], [26], [28].

8. Треугольник Паскаля

1. Ладья стоит в левом нижнем углу доски 6 × 6. Каждым ходом она может перейти на одну клеточку вправо или на одну клеточку вверх (двигаться влево, вниз или по диагонали нельзя). На каждой клеточке доски напишите, сколькими способами ладья может до нее добраться.
2. (Продолжение) Мысленно продолжите доску вправо и вверх до бесконечности и поверните ее на 135^0 по часовой стрелке. Получившаяся числовая таблица называется *треугольником Паскаля*.
3. Сформулируйте правило Паскаля — способ, которым вычисляются входящие в треугольник Паскаля числа.
4. Сосчитайте и напишите результаты друг под другом: 11^0, 11^1, 11^2, 11^3, 11^4. Что вы замечаете? Объясните ваше наблюдение.
5. Докажите, что любое число, кроме единицы, встречается в треугольнике Паскаля конечное число раз.
6. Строки треугольника Паскаля нумеруются, начиная с нулевой. Элементы строки также нумеруются, начиная с нулевого. Докажите, что k-й элемент n-й строки есть C_n^k. Как это связано с задачей 1?
7. Чему равна сумма всех элементов n-й строки треугольник Паскаля? Докажите ваш результат разными способами. Как он связан с предыдущей задачей?
8. Предъявите комбинаторное доказательство формулы $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.
9. (*Бином Ньютона*) Раскройте скобки в выражении $(a + b)^n$. Почему полученные вами коэффициенты образуют n-ю строку треугольника Паскаля? Какие задачи этого листка связаны с данным результатом?
10. Вычислите: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \ldots + (-1)^n C_n^n$.
11. Пусть a, b и n — натуральные числа. При каком условии $(a + b)^n - a^n - b^n$ делится на n? (**Подсказка:** посмотрите на n-ю строку треугольника Паскаля.)
12. Докажите правило Паскаля не менее чем двумя способами.
13. Крокодил Гена выписал n первых строк треугольника Паскаля. 1) сколько он написал чисел? 2) какова сумма всех этих чисел? 3) (только для самых умных) сколько примерно символов он использовал?
14. Предложите какой-нибудь способ продолжить треугольник Паскаля вверх.

15. Воспользуйтесь треугольником Паскаля, чтобы доказать формулу для n+1-го числа Фибоначчи: $F_{n+1}=\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n-k}^{k}$.
16. Какие еще известные последовательности сокрыты в треугольнике Паскаля?

Литература: [2], [8], [10], [11], [16], [17], [20], [26], [28].

9. Уравнения

1. *Решить уравнение* — значит найти все его корни или доказать, что их нет. Решите уравнения и сделайте проверку. Для каждого уравнения нарисуйте схему и придумайте задачу.

   а) x + 8 = 12;
   б) x – 6 = 11;
   в) 14 – x = 5;
   г) 3x = 21;
   д) 24 : x = 6;
   е) x : 7 = 8.

2. Решите уравнения и сделайте проверку:

   а) 15 + 3x = 120;
   б) x : 5 – 7 = 18;
   в) 17 – 8 : x = 15;
   г) (x – 1)(x + 2) = 0;
   д) $x^2 – 3x = 0$;
   е) $x^3 + 5x^2 – x – 5 = 0$;
   ж) $x^3 – 2x^2 – 29x – 42 = 0$.

3. Какое число заменено звёздочкой в уравнении $x^3 + * |x| − 5 = 0$, если x = 1 является его корнем?
4. Воспользовавшись формулой «квадрат суммы», решите уравнение: $x^2 + 8x − 20 = 0$.
5. Выведите формулу для решения квадратных уравнений.
6. (*Теорема о рациональных корнях*) Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ — корень уравнения $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$. Докажите, что $a_0 \vdots p$ и $a_n \vdots q$.
7. Решите уравнение: $10x^3 – 3x^2 – 2x + 1 = 0$. (**Ответ:** -0,5.)
8. Решите уравнение: $(2\sin x+1)(3\cos y+4)=21$.
9. Решите уравнение: $3^x+4^x=5^x$. (**Решение:** разделим обе части равенства на 4^x; слева получим убывающую функцию, справа — возрастающую.)
10. Решите уравнение: $x^x=x$ (**Ответ:** $x_1 = 1$; $x_2 = -1$.)
11. Решите уравнение $x^2 = \cos(x)$ с точностью до трех знаков.

Литература: [2], [22], [28].

10. Текстовые задачи

1. Инспектор ДПС за первый час остановил 8 машин, за второй час — на 4 машины больше, а за третий — в 2 раза меньше, чем за второй. Сколько машин остановил инспектор за 3 часа?
2. На двух полках 25 книг. На одной из них на 3 книги больше, чем на другой. Сколько книг на каждой полке?
3. У некоторого количества людей и собак оказалось 5 голов и 14 ног. Сколько людей и сколько собак?

4. Десяти собакам и кошкам скормили 56 котлет. Каждой собаке досталось 6 котлет, каждой кошке — 5. Сколько было собак и сколько кошек?
5. Бутылка с пробкой стоит 11 рублей. Бутылка на 10 рублей дороже пробки. Сколько стоят бутылка и пробка по отдельности?
6. У Саши и Вани есть по нескольку яблок. Если Саша даст 1 яблоко Ване, у них будет поровну. Если Ваня даст 1 яблоко Саше, у Саши будет их в два раза больше. Сколько яблок у каждого?
7. В первый день в парикмахерской постриглись несколько человек. Во второй день — на 6 больше, а в третий — в 2 раза меньше, чем за первые два. Сколько людей постриглось в первый день, если всего за 3 дня обновили прическу 63 человека?
8. a пирожков стоят b рублей. Сколько таких пирожков можно купить на c рублей?
9. Кирпич весит 1 кг плюс еще полкирпича. Сколько весит кирпич?
10. В зоомагазине продают больших и маленьких птиц. Большая птица вдвое дороже маленькой. Леди купила 5 больших птиц и 3 маленьких. Если бы она вместо этого купила 3 больших птицы и 5 маленьких, то потратила бы на 20 рублей меньше. Сколько стоит каждая птица? (**Ответ:** 10 р.; 20 р.)
11. Какой угол образуют минутная и часовая стрелки в 11 часов 20 минут?
12. Если к числу приписать справа 0, оно увеличится на 207. Найдите это число.
13. Каждую сторону прямоугольника увеличили на 3 см; в результате его площадь увеличилась на 39 см^2. Найдите периметр исходного прямоугольника.
14. (Весьма вероятно, что, решив эту задачу, вы полюбите буквы.) Если первую величину умножить на себя, результат снова умножить на первую величину, получившееся число сложить с собой и к этой сумме прибавить первую величину, умноженную на вторую величину, получится искомое число. Найдите его, если первая величина равна трем, а вторая — четырем. (**Решение и ответ:** $2a^3 + ab = 66$.)
15. Расстояние между A и B 10 км. Велосипедист выехал из A в B со скоростью 5 м/с. Вместе с ним в том же направлении выбежала собака со скоростью 10 м/с. Добежав до B, она сразу побежала назад. Встретившись с велосипедистом, она снова побежала в сторону B, потом – опять навстречу велосипедисту и так она бегала между B и движущимся с постоянной скоростью велосипедистом, пока он не доехал до B. Сколько километров пробежала собака?
16. Стрелки часов сомкнулись в 12 часов. Когда они снова сомкнутся? (**Ответ:** $1^1/_{11}$ часа.)
17. Первую половину пути мальчик шел со скоростью 4 км/ч, а вторую – 6 км/ч. Какова его средняя скорость? (**Решение и ответ:** положим, весь путь составил 24 км. Тогда время, затраченное на первую половину, = 3 часа, а на вторую – 2. Средняя скорость = 24/(3 + 2) = 4,8 км/ч.)
18. Первую половину времени мальчик шел со скоростью 4 км/ч, а вторую – 6 км/ч. Какова его средняя скорость?
19. Площадь прямоугольного треугольника равна 84. Найдите его катеты, если гипотенуза равна 25.
20. Изначально расстояние между поездами было 520 км. Поезда одновременно начали двигаться друг навстречу другу. Скорость первого поезда равна 70 км/ч, второго – 60 км/ч. Через какое время расстояние между поездами составит 65 км?
21. Из A в B и из B в A на рассвете вышли навстречу друг другу два путника. Они встретились в полдень, но не остановились, а каждый продолжал идти с той же скоростью, и первый пришел (в B) в 4 часа дня, а второй (в A) в 9 часов вечера. В котором часу был в этот день рассвет? (**Решение:** до встречи они двигались одно и то же время, поэтому преодоленные расстояния относятся как V_1/V_2. После встречи тому, кто двигался медленнее, оставалось пройти во столько раз больше, во сколько раз меньше его скорость => $V_1^2/V_2^2 = 9/4$. Положим $V_1 = 3$; $V_2 = 2$. Время движения до полудня (встречи) обозначим через t. Тогда 2(t + 9) = 3(t + 4) => t = 6. **Ответ:** 6.)

Литература: [10], [13], [21], [22], [28].

11. Проценты

Процент — это одна сотая часть.

1. Сколько процентов составляет 6 от 30?
2. Согласно статистике, 51% новорожденных — мальчики. Сколько (примерно) мальчиков приходится на 100 девочек?
3. Товар сначала подорожал на 10%, а потом подешевел на 10%. Какова его стоимость сейчас относительно первоначальной?
4. Один час занятий со мной стоит 1500 рублей. Однако если вы порекомендуете меня кому-то еще и он возьмет не менее 2 платных уроков, я буду делать вам скидку 20% до конца учебного года. Сколько учеников вы должны привести, чтобы платить за час занятий не более 500 рублей? (**Ответ:** ≥5.)

5. Некто положил 1000 рублей в банк под k% годовых (k — целое число). Придя через 10 лет за деньгами, он обнаружил, что на счету более 2000 рублей. Найдите минимальное возможное значение k.
6. В начале 21 века инфляция в России составляла в среднем 15% в год. Найдите (приблизительный) период удвоения цен в России.
7. Лиса Алиса дала Буратино 1 рубль в долг под 1% в день. Буратино собирается отдать долг через 10 лет. Сколько денег он отдаст Лисе Алисе?
8. Если 90% от P равно 30% от M, то какой процент от P составляет M? (**Ответ:** 300.)
9. В 100 кг ягод было 99% воды. Ягоды подсушили, и в них стало 98% воды. Какова масса ягод?
10. Работа была поделена поровну между работниками в бригаде. После первого дня посчитали, сколько человек выполнило не менее 30% своей доли — таких оказалось 70% всех работающих. Когда стали считать только тех, кто выполнил не менее 70% своей доли — таких оказалось 30% работавших. Можно ли быть уверенным, что выполнена хотя бы треть работы?

Литература: [21], [28].

12. Координаты на плоскости

Изобразите на координатной плоскости множество всех точек (x, y), для которых верно, что:
1. x = 3
2. y = 4
3. x = 3 или y = 4
4. x = 3 и y = 4
5. x = y
6. x > 2
7. x > y
8. xy = 0
9. x + y = 0
10. $x^2 + y^2 = 1$
11. $x^2 + y^2 = 0$
12. x + y = 1
13. $x^2 = y^2$
14. y = 2x
15. (x – y)(x + y)(y – 2x) = 0
16. $x + x^2 = y + y^2$
17. y = |x|
18. x = |y|
19. x = |x|
20. Точку с координатами (x, y) отразили симметрично относительно оси OX, оси OY и прямой x = y. Найдите координаты трёх получившихся точек.
21. Концы отрезока имеют координаты (x_1; y_1) и (x_2; y_2). Найдите координаты середины отрезка. Подумайте, как можно обобщить эту задачу.
22. Напишите уравнение окружности с центром в начале координат, проходящей через точку (1; 2).
23. Сколько существует целых точек плоскости, удаленных от начала координат на расстояние r: $r \leqslant 13; r \in \mathbb{Z}$?
24. Две вершины квадрата имеют координаты (5; 0) и (0; 2). Каковы координаты двух остальных вершин? (**Ответ:** (2; 7) и (7; 5) или (-2; -3) и (3; -5) или (3,5; 3,5) и (1,5; -1,5).)
25. Через центр правильного четырехугольника провели прямую. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин четырехугольника до этой прямой постоянна.
26. Сколько существует целых точек пространства, удаленных от точки (0; 0; 0) на расстояние r: $r \leqslant 5; r \in \mathbb{Z}$?
27. Изобразите график уравнения: $x + |x| = y + |y|$.

Литература: [10], [28].

13. Функции и графики

Лекция на YouTube

1. Изобразите график зависимости периметра квадрата от длины его стороны.
2. Изобразите график зависимости площади квадрата от длины его стороны.
3. В чайник налили воду с температурой 20^0C и поставили на плиту. Через 3 минуты вода закипела, а еще через 2 минуты плиту выключили, после чего вода начала остывать. Изобразите график зависимости температуры воды от времени, полагая, что температура окружающего воздуха 20^0C.
4. Машина тронулась с места и поехала с ускорением. Нарисуйте график зависимости расстояния от времени.
5. *Функция* (или *отображение*) — это правило, которое каждому элементу области определения (аргументу) сопоставляет ровно один элемент множества значений (значение функции). Обозначение: f(x), где x — аргумент, f(x) — значение функции. Функция может быть задана формулой, графиком, таблицей или словесным описанием. Для каждого из перечисленных способов придумайте свои примеры функций. Для каждой из придуманных вами функций укажите ее область определения и множество значений, а также постройте ее график.
6. Приведите несколько примеров функций, определенных на множестве натуральных чисел.
7. f(x) = 2x + 3. Заполните таблицу:

x	f(x)	f(x) + 5	2f(x)	f(x + 1)	f(f(x))
4					
0					
– 1,5					

8. Сумма двух положительных чисел больше их разности в 12 раз. Напишите формулу, с помощью которой можно найти меньшее число, зная большее.
9. Найдите точки пересечения прямой y = 2x + 6 с осями координат и по этим точкам постройте прямую.
10. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми y = 4x, x = 3 и y = 0.
11. Какие часы показывают правильное время ровно два раза в сутки?
12. Найдите все линейные функции, область определения которых (1; 3), а множество значений (2; 6). (**Ответ:** y = 2x; y = 8 – 2x.)
13. Изобразите график любой непрерывной функции, удовлетворяющей требованиям: область определения [– 4; 3]; множество значений [– 2; 6]; убывает на промежутках [– 4; – 1] и [2; 3], а возрастает – на промежутке [– 1; 2]; f(– 2) = f(2) = 3. Используя график, решите уравнение f(x) = 0, а также найдите значения функции при x = – 3 и при x = – 2.
14. Найдите точки пересечения прямой y = 4 – 2x с осями координат и по этим точкам постройте прямую. Составьте уравнения медиан треугольника, образованного этой прямой и осями координат.
15. Найдите координаты точки пересечения прямых, заданных уравнениями y = ax + b и y = cx + d, где a, b, c и d — некоторые числа. Сколько может быть таких точек? При каких условиях реализуется каждая из возможностей?
16. Дан график функции *y = f(x)* и вещественное число *a*. Как изменится график в результате следующих преобразований:
   a) y = f(x) + a;
   b) y = f(x + a);
   c) y = af(x) (особого внимания заслуживает случай a = -1);
   d) y = f(ax) (особого внимания заслуживает случай a = -1);
   e) y = |f(x)|;
   f) y = f(|x|)?
17. Suppose f(x) = 2x for x < 4 and f(x) = 8 for x ≥ 4. Find the area from 0 to 7 under the graph of f(x).
18. S – площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$ и y = 9. Докажите, что 27 < S < 54.
19. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками уравнений: x = 0; y = 0; x = 2π; y = 5 + sin(x).
20. Решите неравенства и проиллюстрируйте ваши решения с помощью графиков:
   а) $x^2 \geq 9$;
   б) $y^2 < 16$;
   в) 1/t < 3;

г) $x^2 + 4 < 0$;
д) $x^8 \geq -1$;
е) $|x| > 5$;
ж) $\cos(x) \geq 1$;
з) $a^x < -2$.

21. Решите уравнения:
а) $2^x = 2x$;
б) $2^x = x^2$;
в) $2^x = \sqrt{x}$.
22. Сколько корней имеет уравнение $x^2 = \cos(x)$?
23. Найдите область определения и множество значений функции $y = (-2)^x$.
24. Три точки лежат в вершинах прямоугольного треугольника с катетами a и b. Напишите уравнение проходящей через них окружности, введя удобную систему координат. Подумайте, как можно обобщить эту задачу, в том числе на трехмерное пространство. Всегда ли она будет иметь решение?
25. Приведите примеры функций, у которых 0, 1, 2, 3 и ∞ неподвижных точек.
26. Дана функция $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. Найдите: а) координаты точки пересечения графика функции с осью ординат; б) угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в этой точке; в) уравнение этой касательной.
27. Решите уравнения: а) $x^5 + x^3 + x = 0$; б) $x^7 + x^5 + x^3 + x = 4$.
28. Может ли функция быть одновременно и четной, и нечетной?
29. Что больше: $\log_2 3$ или 1,5?
30. Взаимно обратные функции нейтрализуют друг друга, как кислота и щелочь: $\ln(e^x) = x$; $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}(x)) = x$ и т. д. Так почему же такие равенства как $\arcsin(\sin(x)) = x$ и $\arccos(\cos(x)) = x$ выполняются далеко не всегда? Приведите другие примеры подобных равенств.
31. Некто решил квадратное уравнение, у которого оказалось два различных корня. Делая проверку, он подставил корни так: $ax_1^2 + bx_2 + c = 0$. Может ли это равенство случайно оказаться верным?
32. Найдите все прямоугольники с целыми сторонами, площадь которых равна их периметру. (**Решение:** обозначим стороны прямоугольника через x и y, тогда $xy = 2x + 2y \Rightarrow y = \dfrac{2x}{x-2}, x, y \in \mathbb{N}$. **Ответ:** (3; 6) и (4; 4).)
33. Центры n единичных окружностей расположены в вершинах правильного n-угольника со стороной 2. Найдите радиус окружности R, касающейся всех n единичных окружностей. Нарисуйте график R(n).
34. Пусть f(x) — многочлен степени n, g(x) — многочлен степени m. Какова степень многочлена:
a) f(x)g(x);
b) f(x) + g(x)?
35. (*Теорема Безу*) Докажите, что: а) остаток от деления многочлена f(x) на двучлен (x − c) равен f(c); б) f(x) делится на (x − c) тогда и только тогда, когда f(c) = 0.
36. Для каких многочленов существуют обратные?
37. *Числом e* назовем такое число, что площадь фигуры, ограниченной графиками уравнений x = 1, y = 0, $y = \dfrac{1}{x}$ и x = e, равна 1 (рисунок 13.1). Покажите, что $e > \sqrt{2} + 1$. (**Указание:** сравните площадь под гиперболой с площадью трапеции.)

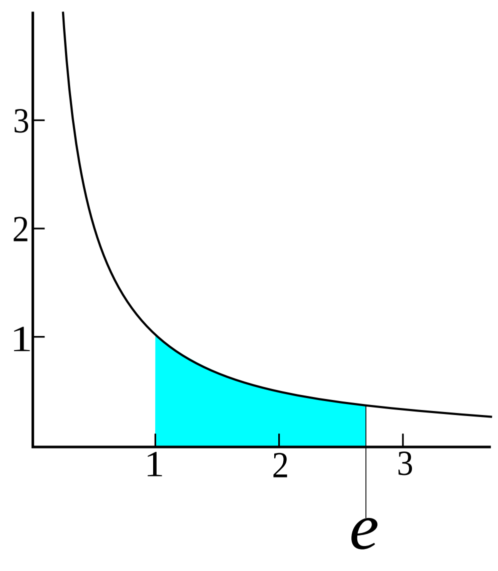


Рисунок 13.1

38. Придумайте несколько функций, обратных самим себе.
39. (*Проблема Штейнера*) Четыре города расположены в вершинах квадрата со стороной 1. Соедините их системой дорог с минимальной общей длиной. Какова эта длина? (**Ответ:** $1 + 3^{0,5}$.)
40. Пользуясь школьными методами, оцените длину дуги синусоиды от 0 до π. (**Ответ:** 3,72 < S < 3,97. (Для справки: S ≈ 3,82.))
41. Может ли область определения функции образовывать счетное множество, а область значений – континуальное?
42. Может ли область определения функции образовывать континуальное множество, а область значений – счетное?
43. *Число e* — это такое число, что угловой коэффицент касательной, проведенной к графику функции y = e^x в точке (0; 1), равен 1. Покажите, что $2<e<4$.
44. Найдите площадь фигуры, заключенной между осями координат и графиком функции y = ln(x).
45. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и касающейся кривой, заданной уравнением y = e^x. Сколько существует таких прямых? (**Ответ:** y = ex.)
46. Напишите уравнение прямой, проходящей через начало координат и касающейся кривой, заданной уравнением y = ln(x). Сколько существует таких прямых? (**Ответ:** y = x/e.)
47. Может ли окружность быть графиком функции (заданной на подмножестве вещественных чисел)? Могут ли точки окружности быть графиком функции? Может ли окружность задавать функцию?
48. Верны ли следующие утверждения: а) если функция периодическая, то ее производная также является периодической функцией; б) если функция периодическая, то ее первообразная также является периодической функцией; в) если производная функции стремится к нулю на плюс или минус бесконечности, то она имеет горизонтальную асимптоту; г) если функция имеет горизонтальную асимптоту, то ее производная стремится к нулю на плюс или минус бесконечности? (**Ответ:** а) да; б) нет; в) нет; г) нет (опровергающий пример: y = $\sin(x^2)$ / x.)
49. Что больше: e^π или π^e? Решение
50. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Существует ли число M такое, что $|f(x)|<M \ \forall x \in [a;b]$? (Теорема Вейерштрасса.)
51. Исследуйте, пожалуйста, функцию $y=1/\sqrt{1-x^2}$ по следующему плану:
    1) Область определения функции.
    2) Четность, нечетность.
    3) Периодичность.
    4) Точки разрыва, особые точки, вертикальные асимптоты.
    5) Поведение на бесконечности, горизонтальные и наклонные асимптоты.
    6) Точки пересечения с осями координат, интервалы знакопостоянства.
    7) Экстремумы, промежутки возрастания и убывания.
    8) Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
    9) Множество значений функции.
52. То же задание для функций: а) y = $x^4 - 2x^2$; б) y = x + $\frac{1}{x}$; в) $y=\frac{1}{\sin(x)}$.
53. Find the area of the largest rectangle that fits into rhe triangle with sides x = 0, y = 0 and $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}=1$. (**Answer:** 6.)
54. Вычислите интеграл от 0 до 4π функции $\sin^{99}$x.
55. Непрерывная функция f(x) удовлетворяет условиям: 1) f(1) = a; 2) f(n + m) = f(n)f(m). Какая это функция?
56. Непрерывная функция g(x) удовлетворяет условиям: 1) g(a) = 1; 2) g(nm) = g(n) + g(m). Какая это функция?
57. Можно ли определить синус и косинус как функции f(x) и g(x), удовлетворяющие условиям: 1) $(f(x))^2 + (g(x))^2 = 1$; 2) f(0) = 0? (**Ответ:** нет (опровергающий пример: f(x) = |sin(x)|).)
58. Правда ли, что если точка является точкой перегиба, то вторая производная в ней равна нулю?
59. Сколько корней имеет уравнение sin(n) = 0, если n – натуральное число?
60. Какой формы должен быть сосуд, чтобы налитой в него краски не хватило для покраски его снаружи, сколь бы тонким слоем мы ни наносили краску?
61. Двое студентов брали один и тот же интеграл. У одного получился ответ «x^2/4 + x/4 + (ln|8x – 4|)/8 + C», а у другого – «x^2/4 + x/4 + (ln|2x–1|)/8 + C». Студенты заспорили:

    – У меня правильно! – сказал один, – я проверил дифференцированием, и у меня все сошлось.

    – Значит, не так проверил, – возразил второй, – потому что я тоже проверял, и у меня тоже сошлось.

Они долго спорили, потом на несколько секунд задумались и вдруг начали смеяться. Что они поняли?

62. Покажите способ нахождения всех примитивных пифагоровых троек. Решите задачу не так, как в листке «Делимость и остатки». (Решение)
63. Найдите области определения и множества значений функций: а) $y = 2^{\sin(x)}$; б) $y = 2^{\mathrm{tg}(x)}$; в) $y = (-3)^{\sin(x)}$; г) $y = (-3)^{\mathrm{tg}(x)}$. (**Ответ:** а) y € [0,5; 2]; б) x ≠ π/2 + πn, y € (0; +∞); в) x = πn/2, y = {–3; –1/3; 1}; г) x = arctg(n) + πm, n € **Z**, m € **Z**, $y = (-3)^n$.)
64. Материальная точка, двигаясь прямолинейно, прошла за единицу времени расстояние, равное 1; свое движение она начала с состояния покоя и закончила состоянием покоя. Докажите, что в некоторый момент своего движения материальная точка имела ускорение, абсолютная величина которого не меньше 4. (**Решение:** если точка двигалась равноускоренно в обе стороны, ее максимальная скорость была достигнута за 0,5 и составила 2, что соответствует ускорению 4. В случае неравноускоренного движения в какой-то момент ускорение было еще больше.)
65. Муравей начинает ползти по натянутой резинке длиной 1 км со скоростью 1 см/с (относительно резинки). В то же время резинка начинает равномерно растягиваться на 1 км в секунду (то есть через одну секунду ее длина составит 2 км, через 2 секунды – 3 км и т. д.). Доберется ли муравей до другого конца резинки?
66. Решите в натуральных числах уравнение: $a^b = b^a$ $(a \neq b)$. (**Ответ:** (2; 4); (4; 2). Докажем, что иных решений нет: $a^b = b^a \Rightarrow b \cdot \ln(a) = a \cdot \ln(b) \Rightarrow \ln(a)/a = \ln(b)/b$. Функция $y = \ln(x)/x$ принимает положительные значения при x > 1 и имеет единственную точку экстремума при x = e. А так как в промежутке от 1 до e содержится только одно целое число, 2, то иные решения невозможны.)
67. Иголку длиной 2 случайно бросают на разлинованную бумагу, где расстояние между соседними линиями тоже 2. Какова вероятность того, что иголка пересечет линию бумаги? (**Solution:** This happens when $\cos\theta > y$ = distance from midpoint of needle to nearest line. In the rectangle $0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le y \le 1$ shade the part where $\cos\theta > y$ and find the fraction of area that is shaded. **Answer:** $p = 2/\pi$. (см. [27], exercise 5.6.29.))

Литература: [8], [10], [14], [16], [17], [20], [22], [24], [26], [27], [28].

14. Четность

1. Можно ли доску размером 5 × 5 заполнить доминошками размером 1 × 2?
2. Нарисуйте такой четырехугольник, чтобы можно было провести прямую, пересекающую все его стороны (не проходя через его вершины).
3. Может ли прямая пересекать все 11 сторон 11-угольника (не проходя через его вершины)?
4. Выпуклый 101-угольник имеет ось симметрии. Докажите, что она содержит ровно одну из его вершин. Что можно сказать в случае 10-угольника?
5. Вершины многоугольника раскрасили в синий или зеленый цвета. Назовем сторону многоугольника одноцветной, если она соединяет вершины одного цвета, и разноцветной в противном случае. Гусеница проползла по всему периметру многоугольника и подсчитала количество разноцветных сторон. Могло ли у нее получиться четное число? А нечетное?
6. Решите в целых числах уравнение: 2x + 3 = 4y.
7. В парламенте одной страны было 2 партии с равным числом членов. После очередного голосования, в котором все приняли участие и никто не воздержался, выяснилось, что «за» проголосовало на 25 человек больше, чем «против». Глава первой партии сказал, что тут какой-то обман. Как он это понял?
8. Может ли быть верным равенство: $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = (n+4)^3$?
9. Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.
10. Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел?
11. В ряд записаны числа от 1 до 10. Можно ли, вставив между ними 9 знаков + или –, получить 0?
12. Маленький пирожок стоит 1 рубль, средний — 3 рубля, большой — 5 рублей. Можно ли купить ровно 10 таких пирожков, заплатив ровно 25 рублей?
13. Заколдованный волчок может поворачиваться только на 5, 15 и 45 градусов. Злая мачеха пообещала Золушке отпустить ее на бал лишь в том случае, если волчок вернется в исходное положение после 25 поворотов. Попадет ли Золушка на бал?
14. На шахматной доске расположены 9 фигур симметрично относительно диагонали. Сколько фигур может стоять на этой диагонали?
15. В каждой клетке квадратной таблицы размером 25 × 25 записано одно из чисел 1, 2, 3, …, 25. При этом, во-первых, ни в какой строке нет двух равных чисел и, во-вторых, в клетках, симметричных относительно одной из диагоналей, записаны равные числа. Докажите, что на этой диагонали каждое из чисел 1, 2, 3, …, 25 записано ровно один раз.
16. Как раздать 300 конфет трем девочкам, чтобы каждая девочка получила нечетное число конфет?

17. Имеются три бумажных стаканчика для мороженого. Требуется разложить по этим стаканчикам 10 монет так, чтобы в каждом стаканчике было нечетное число монет. Как это сделать?
18. В таблицу 1000×1001 вписаны натуральные числа. Могут ли суммы всех чисел в любой строке и в любом столбце быть простыми числами?
19. Сумма k последовательных целых чисел делится на k. Что вы можете сказать про k? (**Ответ:** k нечетно.)
20. Замкнутая кривая без самопересечений разделяет плоскость на «внешнюю» и «внутреннюю» части. Как определить, к какой из этих частей принадлежит данная точка?
21. На футбольном поле лежат три мяча: красный, синий и зеленый. Мальчик бьет по одному из них так, что он пролетает между двумя другими. Так он делает 27 раз. Могут ли после этого все мячи оказаться на исходных местах?
22. (*Лемма Шпернера*) Дан треугольник, вершины которого покрашены в синий, зеленый и красный цвета, и его триангуляция (разбиение на меньшие треугольники). Вершины триангуляции покрасили теми же цветами таким образом, чтобы любая вершина на стороне исходного треугольника была бы покрашена одним из цветов вершин этой стороны. Докажите, что хотя бы один треугольник разбиения имеет вершины всех трех цветов и что таких трехцветных треугольников нечетное число. Подумайте, как можно обобщить задачу на трехмерное пространство. (Решение)

Литература: [2], [7], [10], [11], [15], [21], [28].

15. Раскраски

1. На каждой клетке доски 5×5 сидит жук. По команде каждый жук переползает на соседнюю клетку. Могут ли после этого быть заняты все клетки?
2. Докажите, что можно поставить на шахматную доску 32 коня так, чтобы никакие два не били друг друга.
3. Одна костяшка домино покрывает две клетки шахматной доски. Можно ли покрыть 31 костяшкой все клетки, кроме двух противоположных (на одной диагонали)?
4. От шахматной доски отрезали одну угловую клеточку. Можно ли замостить оставшуюся часть доски прямоугольниками, каждый из которых покрывает ровно 3 клеточки?
5. Может ли конь обойти всю шахматную доску, начав путь в левой нижней клетке и закончив в правой верхней?
6. Докажите, что доску размером 50×50 нельзя разрезать на фигуры из четырех клеток в форме буквы «Т».
7. Вершины правильного 222-угольника покрасили в красный и синий цвет. Будем называть сторону одноцветной, если вершины покрашены в один цвет, и разноцветной, если они покрашены в разные цвета. Можно ли так раскрасить вершины, чтобы одноцветных и разноцветных сторон было поровну? (**Решение и ответ:** Нет. Пусть такая раскраска существует. Тогда, обходя многоугольник, мы будем попадать в вершину другого цвета после каждой разноцветной стороны. То есть, начав с некоторой вершины, мы поменяем цвет 111 раз и вернемся в нее же, что невозможно. Требуемая раскраска существует, если и только если число сторон многоугольника делится на 4.)
8. Мышка грызёт куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков, кубик за кубиком. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика? (**Указание:** раскрасьте кубики в шахматном порядке. **Ответ:** нет.)

Литература: [2], [7], [10], [11], [13], [15], [21], [28].

16. Игры и стратегии

1. Крестьянину нужно перевезти через реку волка, козу и капусту. Но лодка такова, что в ней может поместиться только крестьянин, а с ним или один волк, или одна коза, или одна капуста. Но если оставить волка с козой, то волк съест козу, а если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как перевез свой груз крестьянин?
2. На сковороде помещается 2 котлеты. Котлета жарится с одной стороны 5 минут. За какое минимальное время можно поджарить с обеих сторон 3 котлеты? Как это сделать?
3. Имея 2 сосуда объемом 5 литров и 3 литра, отмерьте 1 литр (получите его в одном из сосудов).

4. У вас есть шесть неразличимых по виду гирек: две по 19 г и четыре – по 20. Как при помощи одного взвешивания на чашечных весах найти две гирьки, одинаковые по весу? (**Решение:** положить на каждую чашу по 2 гирьки.)
5. Есть стакан с одинаковыми шариками и лестница с сотней ступенек. Какое минимальное число шариков придётся разбить, чтобы найти самую высокую ступеньку, с которой можно ронять шарики целыми (т. е. чтобы они не разбивались)?
6. Нескольким белочкам раздали 50 орешков так, чтобы каждая из них получила хотя бы по 1 орешку и ни у каких двух не было поровну. Какое наибольшее число белочек могли получить орешки?
7. (*Жадный алгоритм*) Предъявите наибольшее десятизначное число, записанное различными цифрами, такое, что произведение любых двух соседних цифр ≤ 20.
8. Из 8 шаров, на вид совершенно одинаковых, один весит чуть меньше остальных. Сколько нужно взвешиваний на чашечных весах, чтобы выявить более легкий шар? (**Решение:** положим на каждую чашу по 3 шара… **Ответ:** 2.)
9. Обычно, желая вскипятить чайник, его ставят на полный огонь. Придумайте ситуацию, в которой целесообразно поставить чайник на малый огонь.
10. Двое играют в шахматы. Как один может выиграть у другого несколько раз за одну партию?
11. Как разделить 3 яблока между 4 людьми, сделав наименьшее число разрезов? (**Решение:** от каждого отрезать 1/4.)
12. У вас есть двое песочных часов. Первыми можно отмерить 7 мин., вторыми – 11. Как отмерить 15 мин.? Решите задачу разными способами. (**Решения**: 1) одновременно пускаем двое песочных часов; по прошествии 7 минут начинаем отсчет времени; когда 11-минутные часы остановятся, пускаем их снова; 2) одновременно пускаем двое песочных часов; когда 7-минутные часы остановятся, пускаем их снова; когда 11-минутные часы остановятся, переворачиваем 7-минутные.)
13. Разделите поровну 7 одинаковых булок между 12 лицами, не разрезая ни 1 булки на 12 частей.
14. Каково минимальное число гирь, которыми можно взвесить любой груз от 1 до 1000 г (масса груза – целое число граммов), если гири можно класть только на одну чашу весов? (**Ответ:** 10.)
15. На прямой отметили несколько точек. Потом между каждыми двумя соседними точками отметили по одной точке. Так сделали 3 раза, получилось 113 точек. Сколько точек было в начале? (**Ответ:** 15.)
16. Ведущий кладет на стол монетку и закрывает ее рукой. Вы должны угадать, какой стороной лежит монетка. Если она лежала орлом и вы угадали, вы получаете 2 рубля. Если решкой и вы угадали — 1 рубль. Если не угадали — 0 рублей. Какова справедливая цена входа в игру? (**Ответ:** 2/3 рубля.)
17. Каково минимальное число гирь, которыми можно взвесить любой груз от 1 до 1000 г (масса груза – целое число граммов)? (**Решение и ответ:** 1, 3, 9, 27, 81, 243 и 729 г – итого 7 гирь.)
18. Вы находитесь на вершине скалы высотой 100 м. С собой у вас есть веревка 75 м длиной и нож. Ровно посередине скалы растет крепкое дерево. Как вам спуститься вниз?
19. Двое играют в игру. У них есть куча из 100 камней. Они берут оттуда по очереди от 1 до 7 камней за раз. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. Кто выиграет? (**Решение:** первый каждым своим ходом делает число оставшихся камней кратным 8. **Ответ:** первый.)
20. Шоколадная плитка разделена на дольки n × m. Сколько раз придется ее разламывать, чтобы разделить на отдельные дольки?
21. У путешественника нет денег, но есть незамкнутая цепочка из семи колец. Он остановился в гостинице на неделю и договорился с хозяином, что за каждый день заплатит одним кольцом. Хозяин настоял на том, чтобы оплата производилась ежедневно, но распилено было только одно кольцо. Как путешественнику расплатиться с хозяином гостиницы?
22. Несколько камней весят в сумме 10 т. Каким минимальным числом трехтонных грузовиков можно гарантированно перевезти все эти камни, если известно, что ни один из них не весит больше 1 т? (**Решение:** 4 грузовиками нельзя перевезти 13 камней по 10/13 т; в каждый из 5 грузовиков можно положить ≥ 2 т. **Ответ:** 5.)
23. 100 пиратов хотят разделить добычу так, чтобы никто не счел себя обделенным. Предложите способ, как это можно сделать, полагая, что вся их добыча в виде золотого песка. (**Решение:** первый берет, как ему кажется, 1/100, остальные становятся в ряд, он показывает каждому из них то, что хочет забрать, и, если все согласны, забирает и уходит. Если кто-то возражает, он говорит: «Отсыпь лишнее и бери себе». В конце концов кто-то уходит со своей «1/100». Тогда следующий берет 1/99…)
24. Есть два шнура, горящих неравномерно. Каждый сгорает за час. Как при помощи этих шнуров и зажигалки отмерить 45 минут? (**Решение:** одновременно поджечь оба шнура: первый – с обоих концов, второй – с одного. Когда догорит первый шнур, поджечь второй шнур с другого конца. Шнур, подожженный с обоих концов, сгорит за полчаса. Если бы второй шнур продолжал гореть, будучи подожженным с одного конца, это заняло бы еще полчаса. Если же его поджечь со второго конца, он сгорит вдвое быстрее, то есть за 15 минут. 30 + 15 = 45.)
25. Из Санкт-Петербурга в Москву надо передать почтой посылку в сундуке. Почта все ворует, если не заперто. Поэтому на этот сундук в Санкт-Петербурге вешается замок. Как передать посылку, чтобы на почте не украли и в Москве открыли? (**Решение:** в Москве повесить еще 1 замок.)
26. У вас есть два одинаковых стеклянных шарика. За какое минимальное число бросков можно гарантированно определить, начиная с какого этажа 100-этажного здания шарики разбиваются? (**Решение:** Бросим первый шарик с 14-го этажа. Если он разобьется, будем бросать второй шарик сначала с 1-го этажа, потом со 2-го и так далее, пока он не разобьется или пока мы не доберемся до 13-го этажа. Всего получается не более 14 бросков. Если при падении с 14-го этажа первый шарик уцелеет, сбросим его с 27-го этажа. Тут он снова может разбиться или не разбиться. В первом случае будем бросать второй шарик сначала с 15-го этажа, потом с 16-го и так далее, пока он не разобьется или пока мы не доберемся до 26-го этажа. Всего получается не более 14 бросков. Если при падении с 27-го этажа первый шарик уцелеет, сбросим его с 39-го этажа и т. д. В общем, пока первый шарик остается цел, бросаем его с этажей №: 14; 27; 39; 50; 60; 69; 77; 84; 90; 95; 99. Как только (если) он разбивается, исследуем при помощи второго шарика этажи, находящиеся между теми этажами, с которых были произведены два последних сбрасывания первого шарика. В любом случае потребуется не более 14 бросков. **Ответ:** 14.)

Литература: [2], [7], [10], [11], [13], [15], [20], [21], [23], [28].

17. Делимость и остатки

Лекция на YouTube

1. Бабушка дала внучке некоторое количество денег (целое число рублей), попросила купить на них как можно больше пирожков, а сдачу разрешила оставить себе. Оказалось, что один пирожок стоит 6 рублей. Сколько денег может остаться у внучки?
2. Является ли 0 четным числом?
3. Докажите, что произведение двух последовательных натуральных чисел четно, а сумма — нечетна.
4. Найдите наименьшее положительное число, которое делится на 1000.
5. Найдите наименьшее положительное число, которое не делится на 1000.
6. Найдите наименьшее положительное число, на которое делится 1000.
7. Найдите наименьшее положительное число, на которое не делится 1000.
8. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
9. Нарисуйте все возможные прямоугольники с площадями от 2 до 20 и целыми сторонами. Что вы замечаете?
10. (Продолжение) Выпишите все площади, которым соответствует ровно один прямоугольник. Такие числа называют *простыми*. Продолжите получившуюся у вас последовательность на 5 чисел и дайте определение простого числа.
11. Какой цифрой может оканчиваться простое число?
12. В Тройном королевстве имеют хождение только монеты по 9 и по 15 золотых. Удастся ли такими монетами заплатить 500 золотых? (Вам могут давать сдачу.)
13. Найдите наибольшее натуральное число, записанное 10 различными цифрами и делящееся на 36.
14. Найдите наименьшее составное число, на которое не делится 100!
15. Существует ли число, у которого бесконечно много делителей?
16. p — простое число. Всегда ли p + 7 — составное число?
17. Чиполлино думает, что если n > 1 не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5, 7, то n простое. Прав ли он? Если да, докажите это. Если нет, приведите наименьший контрпример.
18. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2, на 5 и на 10.
19. Какие числа имеют ровно три различных делителя?
20. Докажите, что среди n подряд идущих натуральных чисел ровно одно делится на n.
21. Назовите последние 10 цифр числа 100!
22. Какой цифрой оканчивается произведение 10 сомножителей: 11 • 13 • … • 27 • 29?
23. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 4, на 25 и на 100.
24. Чебурашка задумал нечетное число, возвел его в квадрат и поделил результат на 8. Что получилось в остатке? Почему?
25. Докажите, что полусумма двух соседних нечётных простых чисел — составное число.
26. Сколько различных произведений можно образовать из множителей 2, 3, 5, 7, 11? Сколько из них будет делиться на 2? на 6? на 10? Сколько из них будет иметь ровно 4 различных делителя? Будет ли какое-то из произведений иметь ровно 5 различных делителей? Почему? Что еще можно спросить? Поэкспериментируйте с другими наборами чисел. Что вы замечаете?
27. Почему нельзя делить на ноль?
28. Может ли M! оканчиваться ровно на 5 нулей? Решение
29. Сумма трёх различных наименьших делителей некоторого числа A равна 8. На сколько нулей может оканчиваться число A? (**Ответ:** на 1.)
30. Любое ли четное число, начиная с 4, можно представить в виде суммы двух простых чисел?
31. Любой ли квадрат простого числа, начиная с 25, при делении на 24 дает в остатке 1?
32. Может ли число, состоящее из 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть квадратом натурального числа? (Решение)
33. Докажите, что для любого натурального n на отрезке [n + 1, n! + 1] найдется простое число. (Решение)
34. a и b – натуральные числа. Чему равно произведение их НОД и НОК?
35. При перемножении 78 на 87 получили 6846. Правильно ли выполнено умножение?
36. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2^n и на 5^n.
37. На сколько квадратов можно разделить данный квадрат? (**Ответ:** нельзя только на 2, 3 и 5.)
38. Можете ли вы назвать все пары простых чисел, отличающихся на: а) 1; б) 15; в)* 2?
39. Можете ли вы назвать все тройки простых чисел вида (p; p + 2; p + 4)?
40. Какой цифрой может оканчиваться простое число вида n^2+1? (**Ответ:** 1, 2, 5 или 7.)
41. Умножьте 15 625 на 65. Что вы замечаете? Почему? Придумайте похожие примеры.

42. Среди натуральных чисел, не превосходящих 10^8, существует 16 простых чисел, десятичная запись которых содержит только нули и единицы. Найдите вероятность того, что натуральное число, не превосходящее 10^8, десятичная запись которого содержит только нули и единицы, просто. (**Решение и ответ:** P = 16 / 2^8 = 1 / 16.)
43. Докажите, что $a^4 – a^2$ делится на 4.
44. Докажите, что $a^4 – a^3 – a^2 + a$ делится на 6.
45. Докажите, что произведение k последовательных целых чисел делится на k!
46. Может ли сумма двух квадратов быть числом вида $4n+3$?
47. Может ли квадратное число оканчиваться на две нечетные цифры?
48. Среди первых 2000 натуральных чисел найдите 3 различных числа, НОД которых является наибольшим из всех возможных. (**Ответ:** 666; 1332; 1998.)
49. «Привет!» – «Привет!» – «Как дела?» – «Хорошо. Растут два сына, дошкольника». – «А сколько им лет?» – «Произведение их возрастов равно числу голубей около этой скамейки». – «Этой информации мне недостаточно!» – «Старший похож на мать». – «Вот теперь я знаю ответ на свой вопрос!» Назовите возраст сыновей. (Примечание: дошкольный возраст – меньше 7 лет). (**Решение:** Поскольку информация о том, что один сын старше другого, оказалась полезной, около скамейки было квадратное число n голубей (1 < n < 9). **Ответ:** 1 и 4.)
50. Сколько существует простых чисел, не входящих ни в одну примитивную пифагорову тройку?
51. Сформулируйте и докажите признаки делимости на 3 и на 9.
52. На клетчатой бумаге изображен прямоугольник с целочисленными сторонами a и b. Сколько клеточек пересекает диагональ прямоугольника? (**Ответ:** a + b – (a, b).)
53. $a^b – 1$ — простое число. Чему могут быть равны a и b? (**Ответ:** a = p + 1, b = 1 или a = 2, b = p, где p — простое число.)
54. Требуется проложить газопровод длиной 450 м, используя трубы длиной 9 и 13 м. Сколько труб той и другой длины нужно взять, чтобы число сварных швов было минимальным? (**Ответ:** 11 и 27.)
55. Может ли гипотенуза примитивной пифагоровой тройки делиться на 3?
56. В числе поменяли местами некоторые цифры и получили число, в три раза большее исходного. Докажите, что полученное число делится на 27.
57. Натуральное число n имеет ровно p различных делителей (p — простое число). Следует ли из этого, что число n: 1) или простое, или квадратное? 2) является четной степенью простого числа? Какое из этих двух утверждений более сильное?
58. Сколько различных простых делителей может иметь натуральное число n? (**Ответ:** Не более, чем их имеет ближайший праймориал снизу.)
59. Докажите, что существует сколь угодно много подряд идущих составных чисел.
60. Решите в целых числах уравнение: $y^4 = x^2 + x$. Решение на YouTube (**Ответ:** (0; 0); (-1; 0).)
61. Решите в натуральных числах уравнение: $x! - 2 = y^2$. (**Ответ:** (3; 2).)
62. Докажите, что среди чисел, образующих примитивную пифагорову тройку, ровно одно четно (и, кроме того, делится на 4), а гипотенуза всегда нечетна.
63. Докажите, что среди чисел, образующих примитивную пифагорову тройку, ровно одно делится на 3, ровно одно делится на 4 и ровно одно делится на 5.
64. Докажите признак делимости на 11: число делится на 11 в том и только в том случае, если разность суммы цифр на четных местах и суммы цифр на нечетных местах делится на 11. (**Указание:** Воспользуйтесь тем, что 10 = –1 (mod 11) .)
65. Пусть a — целое число. Заметим, что $(a^2 – a) ⋮ 2$ и $(a^3 – a) ⋮ 3$. Обобщите эти факты. (**Решение:** 1) Пусть p — простое число. Тогда $(a^p – a) ⋮ p$ (*малая теорема Ферма*). 2) Произведение n идущих подряд целых чисел делится на n. 3) $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ (*теорема Эйлера*). 4) Порядок любого элемента конечной группы делит порядок этой группы (следствие тоеремы Лагранжа.).)
66. Решите в целых числах уравнение: $x^2 + 4xy + y^2 = 3$. (**Решение:** Перейдем к сравнению по модулю 4: $x^2 + y^2 = 3$ (mod 4). Данное сравнение не имеет решений, а значит не имеет их и исходное уравнение.)
67. Докажите, что таблица умножения ненулевых остатков по модулю n обладает центральной симметрией. (**Доказательство:** рассмотрим элемент строки a и столбца b. Это остаток от деления ab на n. Но в строке (n – b) и в столбце (n – a) стоит $(n – a)(n – b) = n^2 – n(a + b) + ab = ab$ (mod n).)
68. Какое наибольшее число различных целых чисел можно выбрать, если требуется, чтобы сумма и разность любых двух из них не делились на 15? (**Ответ:** {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.) Extra credit: Сколькими способами это можно сделать, если числа должны принадлежать отрезку [0; 15]? (**Решение:** можно выбрать одно из чисел 0 или 15, одно из чисел 1 или 14, одно из чисел 2 или 13, … , одно из чисел 7 или 8. **Ответ:** $2^8 = 256$.)
69. Хулиган Петя и двоечник Вася начали рвать стенгазету следующим образом: Петя каждый попавшийся ему кусок разрывал на 4 части, а Вася — на 16. Заметив это безобразие, учитель велел им собрать все кусочки и заново склеить стенгазету. Смогут ли они это сделать, если им удалось найти 2022 кусочка?
70. Рассмотрим таблицу умножения ненулевых остатков от деления на m. Докажите равносильность следующих утверждений:
    1) в строке a есть единица;
    2) в строке a нет нулей;
    3) в строке a все числа разные;
    4) (a, m) = 1.

(**Решение:** Если бы (a, m) был > 1, их общие множители наследовались бы элементами строки a, и в ней не было бы единиц. Это доказывает **(1) => (4)**. Пусть в строке a есть 0. $\Rightarrow \exists\, b : ab \equiv 0 \mod (m)$. Если бы (a, m) = 1, то $b \equiv 0 \mod (m)$, что противоречит условию. Значит, **(4) => (2)**. Пусть (a, m) = d > 1. Тогда m = dk, и в строке a на k-м месте будет 0. Это доказывает **(2) => (4)**. Пусть (a, m) = 1. Предположим, $ar_1 \equiv ar_2 \mod (m)$. Но тогда $r_1 = r_2$, что невозможно. Поэтому **(4) => (3)**. Но если в строке a нет нулей и все числа разные, то среди них обязана быть 1, поэтому из **(4) => (1)**. Пусть (a, m) = d > 1. Тогда элементы строки a отличаются не менее чем на 2, и, так как все они меньше m, их не может быть m − 1. Это доказывает **(3) => (4)**.)

71. Suppose p is prime and gcd(a, p) = 1. Prove that $a^{p-1} + (p-1)! \ \vdots\ p$.
72. Натуральное число n умножили на число m, полученное из n перестановкой цифр. Могло ли получиться 98765432? (**Решение:** перестановка цифр не меняет остатка от деления на 9. Но на главной диагонали таблицы умножения остатков при делении на 9 стоят числа 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1. То есть остаток в квадрате может быть 0, 1, 4 или 7. А наше число имеет остаток 8. **Ответ:** нет.)
73. $a^b + 1$ — простое число. Чему могут быть равны a и b? (**Ответ:** a = 1 или b = 0 или a = p – 1, b = 1 или a = 2n, $b = 2^m$, где p — простое число, n, m — натуральные числа, for if b has an odd factor k and b = kc, then $a^b + 1$ is divisible by $a^c + 1$.)
74. Пусть n > 4. Докажите, что (n − 1)! делится на n в том и только в том случае, если n составное.
75. Определите вид числа n > 1 (простое или составное), если (n − 1)! + 1 делится на n. Для подлинных служителей Царицы наук: сформулируйте и докажите обратное утверждение. (**Решение:** (*Теорема Вильсона*) Пусть p — простое число. Тогда (p − 1)! + 1 делится на p. **Доказательство:** для любого простого числа p > 3 числа 2, 3, . . . , p − 2 можно разбить на такие пары (a; b), что $ab \equiv 1$ (mod p), ибо в любой строке таблицы умножения ненулевых остатков от деления на p есть ровно одна единица, причем $a^2 \equiv 1$ (mod p) только при a = ±1. Другое доказательство есть следствие малой теоремы Ферма и теоремы Безу. По модулю p имеем равенство: $x^{p-1} - 1 = (x - 1)(x - 2) \dots (x - p + 1)$. Подставляя x = 0, получаем требуемое.)
76. Докажите, что все числа Ферма взаимно просты. Как из этого следует бесконечность множества простых чисел?
77. Найдите наименьшее натуральное число, у которого ровно 100 различных делителей. (**Ответ:** $2^4 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 45360$ (сверхсоставное число).)
78. Решите в целых числах уравнение: $2^x + 7 = y^2$. (**Ответ:** $(1;3) \cup (1;-3)$.)
79. Предположим, сегодня среда. Через какое количество лет, того же числа того же месяца, снова гарантированно будет среда? (**Ответ:** через 28.)
80. Покажите способ нахождения всех примитивных пифагоровых троек. Решите задачу не так, как в листке «Функции и графики». (**Ответ:** $a = m^2 - n^2$; $b = 2mn$; $c = m^2 + n^2$ при взаимно простых n и m разной четности (m > n).)
81. Решите в натуральных числах уравнение: $n! + 5n + 13 = k^2$. (**Решение:** предположим, что n ≥ 5. Тогда n! делится на 2 и на 5, а значит десятичная запись числа в левой части уравнения оканчивается на 3 или на 8. Но квадрат целого числа не может оканчиваться ни на 3, ни на 8. Перебирая n от 1 до 4, находим единственное решение. **Ответ:** n = 2; k = 5.)
82. Алиса и Боря придумали шифрование, которым можно передать любое натуральное число. Например, если Алиса получает шифр (2, 1, 1), то она знает, что Боря послал ей число 60. Приведем еще несколько пар «шифр — значение»:

    (0, 4) — 81
    (1, 1, 0, 0, 0, 1) — 78
    (3, 0, 0, 0, 1) — 88
    (0, 0, 0, 0, 0, 1) — 13
    (1, 0, 2) — 50
    (1, 0, 1) — 10
    (1, 1) — 6

    Разгадайте принцип шифрования. Какое число закодировано шифром (2, 0, 0, 0, 0, 0, 1)?
83. (Продолжение) «Эх, жалко, что мы не можем ограничиваться числами из первой тысячи, — посетовала Алиса, — тогда, например, число «60» можно было бы передавать просто как 211, а не как (2, 1, 1)!» Почему она уверена, что шифр «211» был бы сокращенной записью именно шифра «(2, 1, 1)», а не «(211)», «(2, 11)» или «(21, 1)»?
84. (Продолжение) Какое число из первой сотни имеет самый длинный шифр? А из первой тысячи?
85. Сумма номеров домов на одной стороне квартала = 247. Какой номер имеет седьмой дом от угла? (**Решение:** Т. к. 247 нечетно, речь идет о нечетной стороне. Сумма n первых нечетных чисел = n^2 => $247 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 13 \cdot 19$ => a = 16, b = 3 => $247 = 16^2 - 3^2 = 7 + 9 + \dots + 19 + \dots + 29 + 31$. Всего 13 домов. С какой стороны ни считай, получается **Ответ:** 19.)
86. Докажите, что $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120.
87. Простое число p ≥ 7. Докажите, что $p^4 - 1$ делится на 240.
88. Решите в целых числах уравнение: $a^b - c^d = 1$.

Литература: [2], [6], [7], [8], [10], [11], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [26], [28].

18. Алгоритм Евклида

Лекция на YouTube

1. Докажите, что для любых натуральных чисел *a* и *b*, *a* ≥ *b* имеет место равенство (*a*, *b*) = (*a* − *b*, *b*). (Здесь и далее через (*n*, *m*) обозначен наибольший общий делитель чисел *n* и *m*.)
2. (*Алгоритм Евклида*) Используя результат предыдущей задачи, придумайте метод нахождения (a, b).
3. Найдите: а) (347, 207); б) (−475, −76); в) (233, 377).
4. Докажите, что дробь $\dfrac{12n+1}{30n+2}$ не сократима ни при каком целом n.
5. *Диофантово уравнение* — это уравнение в целых числах. Решите диофантовы уравнения:

1) $15x + 25y = 40$;
2) $3x + 18y = 6$;
3) $12x + 16y = 0$;
4) $12x + 16y = 5$;
5) $36x + 49y = 1$.

6. (*Соотношение Безу*) Для каких параметров a и b диофантово уравнение $ax + by = d$ разрешимо (не разрешимо)? Отдельно рассмотрите важный частный случай: $ax + by = 1$.
7. (*Лемма Евклида*) Выведите из результата предыдущей задачи, что если $(a, b) = 1$ и $bc \vdots a$, то $c \vdots a$.
8. (*Основная теорема арифметики*) Используя лемму Евклида, докажите, что всякое натуральное число, большее 1, или само является простым, или единственным образом (с точностью до перестановки) разлагается на простые множители.
9. Почему 1 не считается простым числом?
10. Хулиган Ваня отобрал у милой девочки Маши открытку размерами $m \times n$ сантиметров и начал ее резать. Каждый раз он отрезает от открытки квадрат с максимально возможной стороной. Добрый преподаватель Максим Амирьянович отобрал у хулигана Вани остаток открытки, который имеет форму квадрата. С какой стороной?
11. Предыдущая задача дает геометрическое истолкование алгоритму Евклида. Примените его сразу к трем числам и придумайте геометрическую интерпретацию этой процедуры.
12. (З*олотое сечение)* От прямоугольника отрезали квадрат. Оставшийся прямоугольник оказался подобен исходному. Докажите, что стороны исходного прямоугольника несоизмеримы (то есть не могут одновременно выражаться рациональными числами). Найдите большую сторону исходного прямоугольника, если меньшая равна 1. Представьте ее в виде непрерывной дроби.
13. (*Серебряное сечение)* От прямоугольника отрезали два квадрата. Оставшийся прямоугольник оказался подобен исходному. Пользуясь получившейся картинкой, докажите иррациональность квадратного корня из 2. Представьте в виде непрерывной дроби большую сторону исходного прямоугольника, если меньшая равна 1.
14. (Продолжение) Попробуйте обобщить две предыдущие задачи.
15. Найдите НОД сотого и стопервого чисел Фибоначчи.
16. Докажите, что число шагов в алгоритме Евклида может быть сколь угодно большим.
17. Найдите (111...1, 11...1) — в записи первого числа 100 единиц, в записи второго — 60.
18. Найдите $(2^n – 1, 2^m – 1)$. (**Ответ:** $2^{(n, m)} – 1$.)

Литература: [2], [6], [7], [8], [10], [11], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20], [21], [26], [28].

19. Индукция

Лекция на YouTube

Аксиома индукции. Если известно, что некоторое утверждение верно для 1, и из предположения, что утверждение верно для некоторого n, вытекает его справедливость для n+1, то это утверждение верно для всех натуральных чисел.

1. Докажите, что $(6^n – 1) \vdots 5$ при любом целом $n \geq 0$.
2. Найдите сумму n первых натуральных чисел. Решите задачу не так, как в листке «Наглядная математика».
3. На плоскости провели n различных прямых. Оказалось, что никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. На сколько частей они разделили плоскость? Если идея решения долго не приходит, поэкспериментируйте со значениями n от 0 до 4, составьте табличку и сформулируйте гипотезу. Докажите ее по индукции. Объясните смысл полученной вами формулы. Как она связана с предыдущей задачей?
4. Найдите сумму n первых нечетных чисел. Решите задачу не так, как в листке «Наглядная математика».
5. Докажите, что $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
6. Докажите, что $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$.
7. Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ при любом натуральном n.
8. Докажите, что $2^n > n$ при любом натуральном n.

9. Найдите все значения n, при которых $n! > 2^n$.
10. Найдите все значения n, при которых $n^2 > 2^n$.
11. Докажите, что простых чисел бесконечно много.
12. (*Малая теорема Ферма*) Используя метод математической индукции, докажите, что $(a^p - a) \vdots p$ при любом целом a и простом p.
13. Докажите, что $111111111 \vdots 9$ и вообще число, записанное 3^n единицами, делится на 3^n.
14. Известно, что $x+\dfrac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что число $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ также является целым при любом целом n.
15. Даны три стержня, на один из которых нанизаны n колец, кольца отличаются размером и лежат меньшее на большем. За один ход можно переложить только одно кольцо, причём нельзя класть большее на меньшее. За какое наименьшее число ходов можно перенести всю башню на другой стержень?
16. Докажите, что для любого количества цветов n можно указать число вершин R_n, гарантирующее, что в построенном на них полном графе, ребра которого покрашены в один из n цветов, найдутся 3 точки в вершинах одноцветного треугольника, причем $R_1 = 3$; $R_n \le n(R_{n-1} - 1) + 2$.

Литература: [2], [7], [8], [10], [11], [14], [15], [16], [17], [19], [20], [21], [24], [25], [26], [28].

20. Числа Фибоначчи

1. Приведите пример набора из 10 целочисленных отрезков ≤ 55, такого, что ни из каких трех нельзя сложить треугольник.
2. Вы находитесь на первой клетке n-клеточной полоски. Вы можете перемещаться вправо на 1 клетку (шаг) или на 2 клетки (прыжок). а) Сколькими способами вы можете добраться до последней клетки? б) То же, проходя через k-ю клетку? в) То же, не проходя через k-ю клетку? г) Предложите формулу, связывающую полученные результаты.
3. *Числа Фибоначчи* задаются рекуррентной формулой $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ с начальными значениями $F_0 = 0$ и $F_1 = 1$. Найдите сумму n первых чисел Фибоначчи. (**Ответ:** $F_{n+2} - 1$.)
4. Расширьте последовательность Фибоначчи на отрицательные индексы.
5. Найдите сумму квадратов n первых чисел Фибоначчи. Сформулировать гипотезу поможет задача 21 из листка «Наглядная математика».
6. Найдите сумму n первых чисел Фибоначчи с нечетными индексами.
7. Найдите сумму n первых чисел Фибоначчи с четными индексами.
8. Пусть F_n — n-е число Фибоначчи. Докажите тождество: $\dfrac{\left(\sum\limits_{i=0}^{n} F_i\right)+1}{\sum\limits_{i=0}^{n} F_i^2}=\dfrac{1}{F_n}+\dfrac{1}{F_{n+1}}.$
9. Докажите, что количество упорядоченных разбиений числа n на нечетные слагаемые есть n-е число Фибоначчи. (**Решение:** Индукция. База очевидна. Пусть последнее слагаемое в разбиении = 1. Убирая его, получим разбиение для n – 1. То есть разбиений числа n, оканчивающихся 1, столько же, сколько всего разбиений числа n – 1. Пусть теперь последнее слагаемое > 1. Уменьшая его на 2, получаем разбиение для n – 2. Снова биекция. => $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.)
10. (*Тождество Кассини*) Докажите, что $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.
11. Вершины треугольника имеют координаты (0; 0), (F_{n-1}, F_n), (F_n, F_{n+1}). Найдите его площадь. (**Подсказка:** воспользуйтесь результатом предыдущей задачи.)
12. Представьте в виде непрерывных дробей числа 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, … Угадайте закономерность и докажите ее по индукции.
13. (Продолжение) Опираясь на предыдущую задачу, найдите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)$.
14. (Продолжение) Найденное вами число называется *золотое сечение*. Обозначим его через φ. Среди множества его замечательных свойств выделим следующее: $\varphi^2 = \varphi + 1$. Выразите через φ его старшие степени: φ^3, φ^4, φ^5, …, φ^n. Что вы замечаете? Уравнение $x^2 = x + 1$ имеет и второй корень. Обозначим его через Ψ. Докажите, что Ψ обладает тем же свойством, что и φ.
15. (*Формула Бине*) Пользуясь результатом предыдущей задачи, выведите формулу, позволяющую вычислить произвольное число Фибоначчи по его номеру.
16. *Числа Люка* задаются рекуррентной формулой $L_n = L_{n-2} + L_{n-1}$ с начальными значениями $L_0 = 2$ и $L_1 = 1$. Докажите, что $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$, где F_n — n-е число Фибоначчи.

17. Докажите, что $F_n = \dfrac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5}$.

Литература: [2], [3], [19], [20], [25], [26], [28].

21. Инварианты

1. Шестерым детям раздали конфеты так, что первый получил 1 конфету, второй – 2, … шестой – 6. Можно ли теперь, раздавая (или забирая) по 2 конфеты, сделать так, чтобы у всех детей оказалось одно и то же количество конфет?
2. На доске написаны 10 единиц и 10 двоек. За ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными – единицу. Какой может быть последняя оставшаяся цифра?
3. Вася нашёл число 100! = 1 · 2 · 3 · . . . · 99 · 100, затем сложил в этом числе все цифры. Получилось новое число, в котором он опять сложил все цифры, и так далее, пока не получилось однозначное число. Какое?
4. Каждое из чисел от 1 до 1 000 000 заменили на его сумму цифр. Каждое из полученных чисел вновь заменили на его сумму цифр. Так делали, пока не получили миллион однозначных чисел. Каких чисел среди них больше: единиц или двоек? (Решение)
5. На доске написано число 500. За один ход можно или увеличить его на 15, или уменьшить на 3. Можно ли таким образом получить 1000? (**Ответ:** нельзя, поскольку остаток от деления на 3 числа, записанного на доске, не меняется (инвариантен). Однако остаток от деления 500 на 3 равен 2, а остаток от деления 1000 на 3 равен 1.)
6. На острове Серобуромалин живут хамелеоны: 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых. Если два хамелеона разных цветов встречаются, то они оба меняют цвет на третий. Может ли случиться, что в некоторый момент все хамелеоны на острове станут одного цвета? (**Решение:** нет, ибо в ходе разрешенных преобразований происходит перестановка остатков от деления на 3.)
7. Из числа вычли сумму его цифр, из полученного числа вновь вычли сумму его цифр и т. д. После одиннадцатого вычитания впервые получили 0. Каким могло быть первое число? (**Ответ:** 100 – 109.)

Литература: [2], [7], [10], [11], [15], [17], [21], [28].

22. Доказательство от противного

Лекция на YouTube

1. Докажите принцип Дирихле: если n килограммов картошки разложили по k мешкам, то найдется мешок, в котором не меньше, чем $\dfrac{n}{k}$ килограммов картошки, и найдется мешок, в котором не больше, чем $\dfrac{n}{k}$ килограммов картошки.
2. В стране Семёрка 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из каждого города можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через другие города).
3. *Касательная* к окружности — это прямая, которая имеет с окружностью ровно одну общую точку. Докажите, что касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведённому в точку касания.
4. Прямая имеет с окружностью общую точку и перпендикулярна к радиусу, проведённому в эту точку. Докажите, что эта прямая — касательная.
5. Докажите, что любое натуральное число > 1 имеет простой делитель.
6. Бесконечно ли много простых чисел?
7. Докажите, что число $\log_2 3$ иррационально.
8. Докажите не менее чем тремя способами, что число $\sqrt{2}$ иррационально. Решение
9. (*Малая теорема Ферма*) Пусть x и y — целые числа от 1 до p – 1, где p — простое, и пусть a не делится на p. Докажите, что ax – ay тоже не делится p. Пользуясь этим результатом, докажите, что $(a^p - a) \vdots p$ при любом целом a и простом p.

Литература: [4], [5], [7], [15], [26], [28].

23. Теория множеств

1. Профессор начертил 2 прямые и на каждой из них поставил по 3 точки. Всего получилось 5 точек. Как он это сделал?
2. Человек попал под ливень, и ему негде и нечем было укрыться. Он вымок до нитки, но ни один волос на его голове не промок. Почему?
3. В компании 3 футболиста, 4 хоккеиста и 5 теннисистов. Сколько всего спортсменов в этой компании?
4. На каждой из двух окружностей поставили 3 точки. Сколько всего точек?
5. Двое отцов и двое сыновей съели три пирожка, каждый – по одному. Как это возможно?
6. Дано высказывание: «Все слоны добрые». Как звучит противоположное высказывание?
7. Найдите пересечение множеств чисел Ферма и чисел Мерсенна.
8. Сколько натуральных чисел ≤100 не делятся ни на 2, ни на 3? Проиллюстрируйте ваше решение при помощи кругов Эйлера.
9. (Продолжение) Как найти мощность объединения 2 множеств?
10. Сколько натуральных чисел ≤100 не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5? Проиллюстрируйте ваше решение при помощи кругов Эйлера.
11. (Продолжение) Как найти мощность объединения 3 множеств?
12. A = {1, 2, abc, {1, 2, 3}, 4};
   x = {1, 2, 3};
   y = {1, 2, 4}.

Выберите верные утверждения:

а) $x \in A$
б) $x \subset A$
в) $y \in A$
г) $y \subset A$

13. На мехмате девушек-математиков столько же, сколько юношей-механиков. Кого больше: девушек или механиков?
14. Каких чисел больше – простых или составных?
15. Как известно, между любыми двумя рациональными числами найдется иррациональное, а между любыми двумя иррациональными числами найдется рациональное. Следовательно, рациональные и иррациональные числа чередуются, и, стало быть, количество первых равно количеству вторых. С другой стороны, общеизвестно, что мощность множества иррациональных чисел больше мощности множества рациональных. Разрешите это противоречие. (**Решение:** Между любыми двумя иррациональными числами найдется не одно, но бесконечно много рациональных чисел. То же можно сказать и о количестве иррациональных чисел, заключенных между любыми двумя рациональными. Только в первом случае получается счетное множество, а во втором – несчетное.)
16. Несчетность множества действительных чисел можно доказать диагональным методом Кантора. Почему так же нельзя доказать несчетность множества рациональных чисел?

Литература: [2], [7], [8], [10], [11], [14], [16], [17], [20], [24], [26], [28].

24. Биекции

1. *Биекцией* называют взаимно однозначное отображение. Сколько существует биекций:
   а) {1, 2, 3, 4, 5} → {a, b, c, d};
   б) {1, 2, 3, 4} → {a, b, c, d, e};
   в) {1, 2, 3, 4, 5} → {a, b, c, d, e}?
2. В одной комнате 16 лампочек, в другой – 16 выключателей. Сколько раз придется зайти во вторую комнату, чтобы определить, какой выключатель от какой лампочки? (**Ответ:** 4.)
3. Каких чисел больше: натуральных или квадратных?

Литература: [2], [8], [10], [11], [14], [17], [20], [26], [28].

25. Логические задачи

1. Незнайка купил на рынке корзину с яблоками. «В этой корзине не меньше 5 яблок!» — заверил продавец. Но когда Незнайка заглянул в корзину, он понял, что его обманули. Сколько яблок могло быть в корзине?
2. Все автомобили, принадлежащие автопарку, исправны. Верны ли следующие утверждения: а) если автомобиль принадлежит автопарку, то он исправен; б) если автомобиль исправен, то он принадлежит автопарку; в) если автомобиль неисправен, то он не принадлежит автопарку; г) если автомобиль не принадлежит автопарку, то он неисправен? (**Ответ:** верны а) и в).)
3. Двое мудрецов взяли 3 шляпы – 2 красные и 1 синюю, зашли в темную комнату и надели по шляпе. Затем они вышли на свет, смотрят друг на друга, и каждый пытается понять, какая на нем шляпа. Удастся ли им это сделать, если на обоих красные шляпы? Переговариваться они не могут.
4. Известно, что: 1) некоторые цветы быстро вянут; 2) все розы — цветы. Следует ли из этого, что некоторые розы быстро вянут?
5. Мама говорит сыну: «Если ты будешь хорошо себя вести, я дам тебе конфетку». Даст ли мама сыну конфетку, если он будет вести себя плохо?
6. На острове живут рыцари и лжецы, всего 1000 человек. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Все жители поочередно выступили с заявлениями. Первый сказал: «Все мы лжецы». Остальные сказали: «Все, кто говорил до меня, лжецы». Сколько рыцарей на острове?
7. В некоем конгрессе заседают сто политических деятелей. Каждый из них либо продажен, либо честен. Известны следующие факты:

   1) По крайней мере один из конгрессменов является честным.

   2) Из каждой произвольно выбранной пары конгрессменов по крайней мере один продажен.

   Можно ли с помощью этих двух утверждений определить, сколько конгрессменов в этом конгрессе честны, а сколько – продажны?
8. Человек говорит: «Я лжец!» Может ли он быть жителем острова рыцарей и лжецов?
9. Когда мой брат говорит правду, бабушка чихает. Однажды он сказал, что получил 5, но бабушка не чихнула. Тогда он сказал, что получил 4, и бабушка чихнула. Приободрившись, он подтвердил: «Уж точно получил не меньше 3». Но бабушка больше ни чихала. Какую оценку он получил?
10. В тетради 10 листов. На первом написано: «В этой тетради есть ровно одно ложное изречение». На втором написано: «В этой тетради есть ровно два ложных изречения». И так далее, а на последнем, десятом листе, написано: «В этой тетради есть ровно десять ложных изречений». На какой странице написано верное изречение?
11. Гуляя по сказочному лесу, вы встретили трех троллей, охраняющих мост. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Тролли не пропустят вас, пока вы не определите, кто из них рыцарь, а кто — лжец. Каждый из троллей произнес одну фразу:

   Тролль 1: Если я лжец, то ровно двое из нас рыцари.

   Тролль 2: Тролль 1 лжет.

   Тролль 3: Либо мы все лжецы, либо по меньшей мере один из нас рыцарь.

   Кто есть кто? Решение
12. Трое мудрецов взяли 5 шляп – 3 красные и 2 синие, зашли в темную комнату и надели по шляпе. Затем они вышли на свет и смотрят друг на друга. Кто первый догадается, какая на нем шляпа, если на двоих красные шляпы, а на одном — синяя?
13. Каждый из 10 гномов либо всегда говорит правду, либо всегда лжёт. Известно, что каждый из них любит ровно один сорт мороженого: сливочное, шоколадное или фруктовое. Сначала Белоснежка попросила поднять руки тех, кто любит сливочное мороженое, и все подняли руки, потом тех, кто любит шоколадное мороженое — и половина гномов подняли руки, потом тех, кто любит фруктовое мороженое — и руку поднял только один гном. Сколько среди гномов правдивых? (**Ответ:** 4.)
14. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора.
15. Объясните, в чем разница между признаком и свойством. Может ли признак не являться свойством? Может ли свойство не являться признаком?

16. Встретил как-то Принц трёх ведуний и спросил про свою судьбу. Арта сказала: «Будет у Принца супруга ленива. А победит он больше 100 Драконов». Бина: «Нет-нет, победит Принц меньше 100 Драконов. Зато жена будет трудолюбива». Веда: «Нет, жена, увы, будет ленивица. Зато хоть одного Дракона Принц точно победит». Что ждёт Принца, если он знает, что одна из них вечно лжёт, другая всегда говорит правду, а третья сначала говорит правду, а потом лжёт? (**Ответ:** Принц победит ровно 100 драконов, и жена будет ленива.)
17. Страна имеет форму квадрата и разделена на 25 одинаковых квадратных графств. В каждом графстве правит либо граф-рыцарь, который всегда говорит правду, либо граф-лжец, который всегда лжет. Однажды каждый граф сказал: «Среди моих соседей поровну рыцарей и лжецов». Сколько рыцарей может быть в этой стране? (Графы являются соседями, если их графства имеют общую сторону.) (**Решение:** по периметру могут быть только лжецы. **Ответ:** 0, 4 или 8.)
18. У скучающего короля трое заключенных. Им завязали глаза, и он приказал им вытянуть наугад одну из 5 бирок. Про бирки известно, что 2 из них черные, а 3 – белые. Каждому надели на спину вытянутую им бирку, построили одного за другим и сняли повязки с глаз. Король пообещал освободить тех, кто угадает цвет бирки на своей спине. Того, кто попытается угадать, но не угадает, повесят. Так же как и того, кто будет подсказывать другим.

    Тот, кто стоял последим и видел цвет бирок двух передних заключенных, не рискнул назвать цвет своей бирки. Тот, кто стоял вторым и видел только бирку первого заключенного, тоже не рискнул назвать цвет своей бирки. Тогда тот, кто стоял впереди и вообще никаких бирок не видел, правильно назвал цвет своей бирки – «белый» и вышел на свободу.

    Восстановите ход рассуждений освобожденного. Предполагается, что все заключенные умны. (**Решение:** если бы последний увидел 2 черные бирки, он догадался бы, что на нем – белая. Но он молчит, следовательно, он видит либо две разноцветные бирки, либо две белые. Если бы на мне была черная бирка, второй догадался бы, что на нем – белая. Но он тоже молчит, значит на мне белая бирка.)
19. Перед вами пять утверждений, три из которых являются ложными. Найдите их. 1 + 2 = 3. 2 + 3 = 5. 3 + 5 = 9. 5 + 9 = 14. 9 + 14 = 21. (**Ответ:** ложными являются следующие утверждения: 1. Перед вами пять утверждений, три из которых являются ложными. 2. 3 + 5 = 9. 3. 9 + 14 = 21. Обоснование: первое утверждение ложно, поскольку тут не пять, а шесть утверждений.)
20. Павел смотрит на Марию. Мария смотрит на Петра. Павел женат. Петр не женат. Верно ли, что человек, состоящий в браке, смотрит на человека, не состоящего в браке? (Требуется выбрать один из трех вариантов ответа: «Да», «Нет» или «Недостаточно информации».)
21. Выберите верные утверждения: а) из всех правил есть исключения; б) истины нет; в) все хорошо в меру. (**Решение «в»:** Мета-мера не исключает меры, а лишь ограничивает ее. Противоречия нет. Впрочем, иные могут рассудить так. Если каждую вещь следует брать с умеренностью, то саму умеренность также следует брать умеренно, значит, не каждую вещь следует брать с умеренностью. Почему это не так, мы увидим на примере. Некто придерживается диеты, то есть соблюдает умеренность в еде. Его пригласили на день рождения, и он оказался перед полным яствами столом. «Если все хорошо в меру, — решил он, — значит, и умеренность в еде тоже хороша в меру». Насладившись праздником, он вернулся к своей диете. Как видим, несмотря на применение принципа «Все хорошо в меру» к самому себе, питание не стало «вещью, которую не следует брать с умеренностью».)
22. Каждый из а) 7; б) 9 сидящих за круглым столом сказал: «Мои соседи — рыцарь и лжец». Сколько рыцарей и сколько лжецов сидит за столом? (**Ответ:** а) все лжецы; б) все лжецы или 6 рыцарей и 3 лжеца.)
23. На острове живут 33 рыцаря, а также лжецы и фантазёры. Каждого жителя этого острова по очереди спросили: «Сколько среди вас рыцарей?» Было получено десять различных ответов, каждый из которых был назван более, чем одним жителем. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда называют неверное число, которое ещё не было названо, а фантазёры всегда называют число, которое на единицу больше предыдущего ответа. Обязательно ли было названо число 40? (**Указание:** докажите, что не могло быть названо никакое число < 33. **Ответ:** да.)

Литература: [7], [10], [13], [21], [26], [28].

26. Теория вероятностей

1. В ящике лежат 10 шаров: 6 синих и 4 красных. Из этого ящика не глядя берут один шар. Какова вероятность того, что он будет: а) синий; б) красный; в) зеленый; г) или синий, или красный; д) или синий, или зеленый; е) или синий, или красный, или зеленый?
2. Объясните своими словами, что такое вероятность. Какие значения она может принимать? Чему равна вероятность: а) достоверного события; б) невозможного события?
3. В ящике имеется 10 белых и 15 черных шаров. Из ящика вынимаются 4 шара. Какова вероятность того, что все вынутые шары будут белыми?
4. Метровую ленту случайным образом разрезают ножницами. Найдите вероятность того, что длина обрезка составит не менее 80 см.
5. В мешке лежат три карточки: на первой с обеих сторон написана буква «А», на второй — буква «Б», на третьей — с одной стороны «А», с другой — «Б». Вы не глядя достали одну карточку, положили ее на стол и увидели букву «А». Какова вероятность, что с другой стороны тоже буква «А»? (**Ответ:** 2/3.)
6. (Парадокс Монти Холла) Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трех дверей. За одной находится автомобиль, за двумя другими – козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где

находится автомобиль, а где – козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?

7. Отец обещает сыну приз, если тот выиграет 2 партии подряд. Играется всего 3 партии. Играть надо с тренером и с чемпионом (чемпион играет намного сильнее тренера). Можно выбрать одну из схем: 1) Т – Ч – Т; 2) Ч – Т – Ч. Какая схема выгоднее?
8. 8 шаров – 6 белых и 2 черных – не глядя разложили в 2 ящика по 4 шара. Какова вероятность того, что черные шары окажутся в разных ящиках? (**Ответ:** 4/7.)
9. Игральный кубик бросают 10 раз. Какова вероятность того, что «1» выпадет ровно 3 раза? (**Решение и ответ:** $p=C_{10}^{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{7}=0{,}155\ldots$ (*Формула Бернулли*).)
10. Монетку бросают до тех пор, пока не выпадет решка. Оцените с точностью не менее 1% вероятность того, что количество бросков будет простым числом. (**Решение и ответ:** p = p(2) + p(3) + p(5) + p(7) + … = 1/4 + 1/8 + 1/32 + 1/128 + … => p > 1/4 + 1/8 + 1/32 + 1/128 = 53/128. Если бы все натуральные числа, начиная с 11, были простыми, то p равнялась бы 53/128 + 1/1024 = 425/1024. Но 12 – составное число => p < 425/1024. Поэтому 424/1024 < p < 425/1024.)
11. Вступая в игру, игрок платит некоторую сумму и подбрасывает монету, пока не выпадет орёл. После этого игра заканчивается, а игрок получает 2^n рублей, где n – количество выпавших решек. При каком вступительном взносе игра становится справедливой?
12. 1000 человек независимо друг от друга угадывают натуральное число от 1 до 1000. Какова вероятность того, что все они ошибутся? Решение
13. В классе 25 человек. Что более вероятно: что у кого-то из одноклассников дни рождения придутся на один день или что у каждого будет свой неповторимый день рождения?
14. В городе N каждый тысячный житель — профессор. 90% профессоров умеют интегрировать, но среди всех жителей города таковых только 9%. Вы встретили случайного человека на улице города N и нечаянно узнали, что он умеет интегрировать. Какова вероятность того, что он — профессор? (**Решение и ответ:** $p=\frac{0{,}9\cdot 0{,}001}{0{,}09}=0{,}01$. (*Теорема Байеса*))
15. Какова вероятность того, что n^3-n делится на 24? (n – натуральное число.) (**Ответ:** 5/8.)
16. Опрос преподавателей показал, что в среднем в одной группе 29 студентов. Но, с точки зрения студентов, в среднем их оказалось 82 человека в группе. Как это может быть? (**Решение:** Suppose there are 95 classes of 20 students and 5 classes of 200 students…)
17. Два охотника, вероятности попадания у которых равны 0,3 и 0,7, выстрелили одновременно в медведя и убили его. В шкуре оказалась одна пробоина. Как им разделить добычу? (**Ответ:** 9:49.)
18. На 9 карточках записаны цифры от 0 до 8. Из них наугад выбираются 2 карточки и кладутся на стол рядом – вторая справа от первой. Какова вероятность того, что получившееся число – четное? (**Ответ:** 5/9.)
19. Отец сказал сыну: «У меня есть десять десятидолларовых банкнот и десять однодолларовых. Ты можешь распределить их как угодно, но так, чтобы получилось два набора. Один положим в шляпу А, второй – в шляпу Б. Потом я завяжу тебе глаза и, перемешав содержимое шляп, положу одну справа от камина, а вторую – слева. Ты возьмешь наугад одну из шляп и вынешь из нее одну бумажку». Как распределить по шляпам двадцать бумажек, чтобы вероятность вытянуть десять долларов была максимальна, и чему будет равна эта вероятность? (**Решение и ответ:** положить в одну шляпу 1 десятидолларовую банкноту, а во вторую – все остальные. Вероятность вытянуть 10 долларов = 0,5 + 0,5 • 9/19 ≈ 0,74.)
20. Грани куба красят в 6 различных цветов, среди которых есть синий и красный. Найдите вероятность того, что синяя и красная грань будут иметь общее ребро.
21. Пусть $0\leqslant x\leqslant 1;\, n,m\in\mathbb{N}$. Что больше: $1-(1-x^n)^m$ или $(1-(1-x)^m)^n$? (**Ответ:** второе.)
22. Игральный кубик бросают 4 раза. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков четная? (**Решение и ответ:** Кубик подобен монетке со сторонами «1» и «2», ибо у того и у другой чет и нечет выпадают с вероятностью 0,5. Имеется 2^4 возможностей, в 4 из которых выпадает 1 четная сторона и 3 нечетных, и еще в 4 – 3 четных и 1 нечетная. То и другое делает сумму выпавших очков нечетной. Вычитая соответствующие вероятности из 1, имеем: 1 – 4 • (1/16) – 4 • (1/16) = 0,5.)
23. В каждом из четырех мешков есть белые и черные шарики. Вероятность вытянуть черный шарик из первого мешка больше, чем из второго, а из третьего – больше, чем из четвертого. Содержимое первого и третьего мешка поместили в красную коробку, а второго и четвертого – в зеленую. Может ли случиться так, что вероятность вытянуть черный шарик из зеленой коробки больше, чем из красной? (**Ответ:** да, например, если в первом мешке черных шариков было 21 из 100, во втором – 2 из 10, в третьем – 79 из 100, а в четвертом – 78 из 100, то в красной коробке их окажется 100 из 200, а в зеленой – 80 из 110.)
24. Отрезок случайным образом поделили на 3 части. Какова вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник? (**Решение 1:** присвоим концам отрезка координаты (0; 0) и (1; 0) и рассмотрим движение точки по оси X от 0 до 0,5. Каждому ее положению с координатой x соответствует часть отрезка (0,5; 1) длины x, на которой должна находиться другая точка. Проинтегрируем функцию y = x в пределах от 0 до 0,5 и умножим результат на 2. **Решение 2:** примем длину отрезка за 1. Координату первой точки отложим по оси x, координату второй — по оси y. Пространством элементарных событий будет квадрат с вершинами в точках (0; 0), (1; 0), (0; 1). Поскольку (x – 0,5)(y – 0,5) < 0, а также $|x-y|<0{,}5$, множество благоприятствующих исходов составляет внутренние области треугольников с вершинами в точках (0; 0,5), (0,5; 0,5), (0,5; 1) и (0,5; 0), (0,5; 0,5), (1; 0,5) соответственно. **Ответ:** 0,25.)
25. (*Задача о беспорядках*) n первых натуральных чисел записывают в случайном порядке. Какова вероятность того, что ни одно из них не окажется на своем месте? (**Решение и ответ:** Применим формулу включений-исключений:
$$p=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k(n-k)!=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots(-1)^k\frac{1}{n!}\to\frac{1}{e}\approx 0{,}37.)$$

Литература: [2], [10], [16], [17], [23], [24], [27], [28].

27. Геометрия

1. На сколько частей могут разделить плоскость две различные прямые? А три?
2. Из гнезда вылетели две ласточки. Какова вероятность того, что через 15 секунд они будут находиться на одной прямой?
3. Как называется самая длинная хорда окружности?
4. Найдите угол между биссектрисами смежных углов.
5. В треугольнике ABC проведена медиана BM. BM = AM. Чему равен угол ABC?
6. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна m и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найдите стороны треугольника.
7. Несколько учеников дали такие определения диаметра: 1) самая длинная хорда окружности; 2) отрезок, соединяющий две точки окружности и проходящий через ее центр; 3) отрезок, делящий окружность пополам; 4) диагональ вписанного прямоугольника; 5) отрезок, проходящий через центр окружности. Кто дал правильное определение?
8. Сколько точек можно поставить на плоскости так, чтобы любые три из них были в вершинах остроугольного треугольника?
9. В окружность с радиусом 1 вписали правильный шестиугольник. Найдите его сторону.
10. *Числом пи* (обозначение: π) называется отношение длины окружности к ее диаметру. Пользуясь результатом предыдущей задачи, докажите, что $\pi > 3$.
11. Докажите, что $\pi < 4$.
12. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D, а на стороне AC взята точка E. При этом отрезок DE параллелен BC и равен по длине отрезку EC. Найдите угол ABC, если углы BAC и BCD равны соответственно 55^0 и 25^0.
13. Вершины выпуклого четырехугольника имеют координаты (0; 5), (12; 0), (17; 12) и (5; 17). Докажите, что это квадрат. Найдите его площадь и периметр.
14. Выведите из предыдущей задачи *теорему Пифагора*: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.
15. Найдите расстояние между точками (0; 2) и (3; 6).
16. Считая Землю шаром с радиусом R, определите, сколь далеко видно с высоты h.
17. В прямоугольном треугольнике меньшая сторона 6, а б***о***льшая – 10. Найдите меньшую высоту этого треугольника.
18. В треугольнике ABC к стороне AC проведены высота BK и медиана BM, причём AM = BM. Найдите косинус угла KBM, если AB = 2, BC = 4.
19. Отрезок, соединяющий точки (15; 1) и (-1; 13) служит диаметром окружности. Напишите ее уравнение. Где находится точка (0; 0): внутри окружности, на ней или снаружи? Найдите общие точки окружности с осями координат.
20. Найдите угол между биссектрисами острых углов прямоугольного треугольника.
21. Какие вам известны признаки прямоугольного треугольника?
22. В треугольник со сторонами a, b, c вписана окружность радиусом r. Найдите площадь треугольника.
23. Два несмежных ребра тетраэдра равны 6, остальные ребра равны 5. Найдите площадь полной поверхности тетраэдра.
24. Из гнезда вылетели три ласточки. Какова вероятность того, что через 15 секунд они будут находиться в одной плоскости?
25. Две стороны треугольника равны соответственно 8 и 10 см. Какой может быть третья сторона?
26. Найдите такую точку, что сумма расстояний от нее до всех вершин выпуклого четырехугольника минимальна.
27. Трое учеников дали такие определения числа π: 1) 3,14; 2) отношение длины окружности к ее диаметру; 3) площадь единичного круга. Кто дал правильное определение?
28. Докажите, что если в окружности хорда AB пересекает хорду CD под прямым углом и делит ее пополам, то AB – диаметр.
29. В круговой сектор с центральным углом в 60° и радиусом R вписана окружность с радиусом 1. Найдите R. Сформулируйте и решите обратную задачу. Сколькими способами это можно сделать?
30. Каков радиус наименьшего круга, покрывающего треугольник со сторонами 3, 4 и 6?
31. Сколько углов по 40^0 может быть в треугольнике? А по 90? А по 60?

32. Население России составляет около 150 000 000 человек. Рассмотрим карту России, выполненную в масштабе 1 : 10 000 000. Она полностью умещается в прямоугольнике 1 × 0,5 м. Почему же, если население России, которое свободно помещается на ее территории, также уменьшить в 10 000 000 раз, то эти 15 человек никак не поместятся на карте?
33. Докажите теорему Пифагора хотя бы двумя способами. Подумайте, как можно ее обобщить.
34. В круглом бассейне плавает рыба. Она плывет от бортика в направлении точно на север и, проплыв 6 метров, опять сталкивается с бортиком. Тогда рыба поворачивает на восток, проплывает еще 8 метров и опять оказывается у бортика. Какой диаметр бассейна?
35. Как изменится внутренний диаметр гайки при ее нагревании?
36. Какой формы должна быть ограда известной длины, чтобы оградить максимальную площадь?
37. Углы прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите его стороны, если наибольшая из них на 1 см длиннее наименьшей.
38. С помощью карандаша и линейки нарисуйте на клетчатой бумаге квадрат, площадь которого в 5 раз больше площади одной клетки.
39. Высота колеса обозрения 100 метров. Колесо делает полный оборот за 6 минут. Через сколько минут вы будете на высоте 75 метров? (**Ответ:** 2 и 4.)
40. (*Тригонометрические функции*) Нарисуйте окружность $x^2 + y^2 = 1$. Если точка P(x, y) движется по этой окружности и если φ есть направленный угол, на который нужно повернуть положительную ось x, чтобы она совпала с радиусом OP, то $\cos(\varphi)$ и $\sin(\varphi)$ являются координатами точки P: $\cos(\varphi) = x$, $\sin(\varphi) = y$. Докажите, что $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$. *Тангенсом* (tg) называют отношение синуса (sin) к косинусу (cos), *котангенсом* (ctg) — отношение косинуса к синусу. Докажите, что: а) $1 + \mathrm{tg}^2(\varphi) = \cos^{-2}(\varphi)$; б) $1 + \mathrm{ctg}^2(\varphi) = \sin^{-2}(\varphi)$.
41. Найдите sin(x), cos(x), tg(x) и ctg(x) для $x = 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 180^0$ и 270^0.
42. В единичную окружность вписан правильный шестиугольник. Его вершины служат вершинами полного графа. Найдите сумму длин его ребер. Как можно обобщить эту задачу? (**Ответ:** $6\left(2+\sqrt{3}\right)$.)
43. Какими правильными многоугольниками можно замостить плоскость?
44. Вертикально стоявшая палка начала падать. Как зависит длина тени палки от угла, который она образует с землей, если солнце стоит в зените?
45. Какой процент плоскости можно покрыть непересекающимися кругами одинакового радиуса?
46. Некто прошел одну милю на юг, одну милю на восток, одну милю на север и одну милю на запад и оказался в том месте, откуда отправлялся в путь. Где такое могло случиться?
47. На середине лестницы, приставленной к стене, сидит мальчик. По какой траектории он будет двигаться, если лестница начнет скользить по полу?
48. Периметр прямоугольника равен 12. Чему может быть равна его площадь?
49. Сколько существует точек, равноудаленных от 3 данных прямых? (**Ответ:** 0, 1, 2 или 4.)
50. Диаметр круга больше его радиуса на π. Найдите площадь круга.
51. Высота столба = 1. Выразите длину тени столба через высоту солнца над горизонтом.
52. Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на ее средней линии.
53. Две медианы треугольника пересекаются под прямым углом и равны соответственно 9 и 12. Найдите третью медиану. (**Ответ:** 15.)
54. Докажите теорему Пифагора, опираясь на следующие утверждения: 1) если диаметр перпендикулярен хорде, то он делит ее пополам; 2) если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды. (Решение)
55. Докажите теорему Пифагора, опираясь на следующие утверждения: 1) если прямая имеет общую точку с окружностью и перпендикулярна радиусу, проведенному к этой точке, то данная прямая – касательная; 2) если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.
56. Мужчина построил треугольный дом. Все стороны выходят на юг. Большой медведь шел мимо. Какого он цвета?
57. Докажите, что площадь четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними. Сравните с задачей 1.11.
58. Назовите простейшую самоподобную фигуру.
59. Выберите верные утверждения: 1) существует треугольник с целочисленными углами и сторонами; 2) все параболы подобны; 3) если две стороны прямоугольного треугольника равны 3 и 4, то третья сторона равна 5; 4) в десятичной записи числа π все цифры встречаются с одинаковой частотой.
60. Как сложить из 6 спичек 4 равносторонних треугольника с длиной стороны в одну спичку?
61. Торт разрезали пополам и половинки поставили друг на друга. То же проделали с получившейся фигурой и так далее. Докажите, что площадь поверхности торта может стать сколь угодно велика.

62. На столе катушка ниток, у Вас в руках конец нити. Нитка проходит снизу от оси катушки. Вы тянете нитку на себя. К Вам или от Вас покатится катушка?
63. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 20 см, а высота, опущенная на нее – 11 см. Можно ли около этого треугольника описать окружность?
64. Сколько существует правильных многогранников? Почему?
65. Дана окружность. При помощи циркуля и линейки найдите ее центр. Решите задачу не менее чем двумя способами.
66. Периметр прямоугольника равен 4. Чему может быть равна его диагональ?
67. Сформулируйте и докажите 7 признаков равнобедренного треугольника.
68. В единичный куб вписан тетраэдр (так, что его вершины – часть вершин куба, а ребра – диагонали граней). Найдите объем тетраэдра. (**Ответ:** 1/3.)
69. Что получится, если соединить середины смежных сторон пространственного четырехугольника?
70. Докажите теорему о медианах треугольника не менее чем шестью способами. Обобщите полученный результат на старшие размерности.
71. Дан единичный отрезок. При помощи циркуля и линейки постройте отрезок длиной $\sqrt{5}$. Решите задачу не менее чем двумя способами.
72. Гусеница хочет проползти из одного угла кубической комнаты (нижнего юго-западного) в противоположный (верхний северо-восточный). Найдите кратчайший путь такого путешествия по стенам комнаты. Сколько существует таких путей?
73. (*Формула Пика*) Докажите, что площадь многоугольника с вершинами в целых точках и без самопересечений определяется формулой $S=i+\frac{b}{2}-1$, где i — число целых точек внутри многоугольника, b — число целых точек на границе многоугольника. (Решение)
74. Атомы водорода (H) в молекуле метана (CH_4) расположены в вершинах правильного тетраэдра. Атом углерода (C) равноудален от атомов водорода. Найдите угол, образованный связями H—C — H.
75. На середине прочной нерастяжимой нити длиной 50 см находится бусинка массой 1 г. Вы берете нить за концы и тянете их в разные стороны, держа руки на одном уровне. Хватит ли Вам сил натянуть нить так, чтобы она вся оказалась на одной прямой?
76. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит катет на отрезки, равные 3 и 4. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.
77. В Δ ABC угол A = 135^0; AC = 1, BC = 5. Найдите площадь Δ ABC.
78. Что вы можете сказать об углах треугольника, если радиус описанной около него окружности равен одной из его: а) сторон; б) средних линий?
79. В равнобедренном Δ ASC с основанием AC = 12 проведена высота SO = 9. Прямая, проходящая через вершину A и середину SO, пересекает отрезок SC в точке E. Найдите AE.
80. Стороны треугольника имеют длины 3, 4 и 5. Каждая его вершина служит центром единичной окружности. Найдите площадь фигуры, лежащей внутри треугольника, но вне окружностей.
81. Существует ли прямоугольный параллелепипед с целочисленными ребрами и диагоналями?
82. Внутри равнобедренного треугольника расположен другой равнобедренный треугольник. Могут ли боковые стороны внутреннего треугольника быть больше, чем боковые стороны внешнего?
83. Найдите объем треугольной пирамиды, если ее боковые ребра попарно перпендикулярны и имеют длины a, b и c.
84. Пусть 0 ≤ a ≤ b. Докажите, что $a\leqslant\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant b$. Дайте геометрическое истолкование этим неравенствам. Придумайте обобщение для 3 чисел. (**Решение для 3 чисел:** в пространстве будет клин — пятигранник с 3 параллельными ребрами a, b и c. $\frac{a+b+c}{3}$ будет соответствовать отрезок, соединяющий точки пересечения медиан треугольных граней клина).
85. Что можно и что нельзя построить циркулем и линейкой?
86. Найдите на прямой такую точку, чтобы сумма ее расстояний до двух точек A и B, лежащих по одну сторону этой прямой, была бы наименьшей.
87. В шестиугольнике ABCDEF все углы = 120^0; AB = 3; BC = 4; CD = 5; EF = 1. Найдите DE и FA. (**Ответ:** 6 и 8.)
88. Некто прошел одну милю на юг, одну милю на восток и одну милю на север и оказался в том месте, откуда отправлялся в путь. Где такое могло случиться? (**Решение:** некто начал свой путь: 1) с северного полюса, туда же и вернулся; 2) дело могло происходить и недалеко от южного полюса: некто из некоторой точки пошел на юг и добрался до параллели, длина которой равна 1/n мили. Затем, двигаясь на восток, прошел эту параллель n раз и, повернув на север, вернулся в начальную точку.)
89. Верны ли следующие утверждения: а) если все ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, то вершина этой пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около ее основания; б) если все грани пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, то вершина этой пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в ее основание; в) если вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около ее

основания, то все ребра этой пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы; г) если вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в ее основание, то все грани этой пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы? (**Ответ:** верны а), в) и г).)

90. *Скалярное произведение* векторов **a** и **b** — это число, равное произведению модулей **a** и **b** на косинус угла между ними. Как найти скалярное произведение двух векторов, зная их координаты?
91. Радиус циферблата часов = 1. Каков модуль суммы 11 векторов, начала которых покоятся на цифре «12», а концы – на остальных цифрах? (**Решение:** цифры 1, 6, 7 и 12 находятся в вершинах параллелограмма, поэтому сумма векторов, указывающих на цифры 1 и 7, равна 2. Аналогичное рассуждение справедливо и для остальных пар векторов. **Ответ:** 12.)
92. Существует ли замкнутая кривая, не являющаяся окружностью и обладающая тем свойством, что все ее точки равноудалены от некоторой точки A? (**Ответ:** да, это любая замкнутая линия, нарисованная на поверхности сферы и не являющаяся окружностью.)
93. Треугольник ограничен графиками функций: $y=\frac{3}{4}\cdot x+18$; 21x + 20y = 504; $\frac{x}{24}+\frac{y}{18}=1$. Найдите его периметр, площадь, уравнения вписанной и описанной окружностей, координаты точки пересечения медиан.
94. Существует ли правильный многоугольник, у которого длина одной диагонали равна сумме двух других? (**Ответ:** 12-угольник.)
95. Даны три окружности, никакие две из которых не имеют общих точек. Сколько можно провести окружностей, касающихся всех трех данных? (**Ответ:** 8.)
96. Можно ли покрыть плоскость внутренними областями углов, сумма которых $<2\pi$? (**Ответ:** нет.)
97. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений ее боковых сторон лежат на одной прямой.
98. В трапеции ABCD с основаниями AD и BC известно, что AC = 4, BD = 3, угол BDA вдвое больше угла CAD. а) Докажите, что угол BDA тупой. б) Найдите площадь трапеции ABCD.
99. Вычислите $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
100. На сколько частей могут разделить плоскость n различных прямых? (**Ответ:** min = n + 1; следующее возможное значение — 2n (n – 1 прямая параллельны и одна их пересекает либо все проходят через одну точку); $max=\frac{n(n+1)}{2}+1$. Какие значения достижимы между 2n и $\frac{n(n+1)}{2}+1$ — неизвестно.)
101. Разделите равносторонний треугольник на 5 равных частей.
102. Существует ли треугольник с целочисленными сторонами, медианами и площадью?

Литература: [4], [5], [7], [9], [10], [13], [14], [16], [20], [22], [27], [28].

28. Ряды

1. Можете ли вы назвать самое маленькое положительное число?
2. Докажите, что сумма всех величин, обратных квадратам натуральных чисел, < 2. Решите задачу не менее чем тремя способами.
3. Сумма всех величин, обратных квадратам натуральных чисел, равна $\pi^2/6$. Чему равна сумма всех величин, обратных квадратам целых чисел, кроме нуля?
4. Сумма всех величин, обратных кубам натуральных чисел, ≈ 1,202 (постоянная Апери). Чему равна сумма всех величин, обратных кубам целых чисел, кроме нуля?
5. Определим *число e* как сумму ряда $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\ldots$ Покажите, что $2,66<e<2,75$.
6. Докажите, что ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ расходится.
7. Продолжите ряд и найдите его сумму: 1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + 1/17 + …
8. Положив (нужным образом) друг на друга несколько одинаковых пластинок (например, костяшек домино), можно образовать навес длиной x костяшек. Каково наибольшее достижимое значение длины навеса x?
9. Найдите сумму всех величин, обратных треугольным числам. (**Ответ:** 2.)
10. Продолжите ряд и найдите его сумму: 1/4 + 1/8 + 1/9 + 2/16 + 1/25 + 1/27 + 1/32 + 1/36 + 1/49 + 3/64 + 2/81 + 1/100 + … Решение
11. Найдите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}$. (**Solution:** Write down the Taylor series for xe^x around x = 0. Integrate and substitute x = 1. **Answer:** 1. (см. [27], exercise 10.5.12.))

Литература: [2], [10], [11], [14], [16], [17], [20], [24], [26], [27], [28].

29. Геометрическая прогрессия

1. Период полувыведения некоторого лекарства составляет 3 часа. Через сколько часов это лекарство полностью выводится из организма?
2. Шарик для настольного тенниса уронили на пол. Сколько раз он подпрыгнет?
3. Вы записались в тренажерный зал. Известно, что на каждой следующей тренировке вы будете сильнее, чем на предыдущей. Предположим, вы будете вечно жить и тренироваться. Правда ли то, что рано или поздно вы сможете поднять любой вес?
4. Как возвести 29 в 32-ю степень, используя только 5 операций умножения?
5. На пруду растёт кувшинка. Ежедневно она увеличивается вдвое. Через 20 дней кувшинка закрыла весь пруд. Через сколько дней она закрыла половину пруда?
6. Скупой рыцарь заметил, что каждый год количество монет у него утраивается. Через сколько лет (примерно) у него будет триллион монет, если сейчас у него 243 монеты? (**Ответ:** через 20.)
7. Какое наименьшее число операций умножения потребуется, чтобы вычислить a^n? ($n \in \mathbb{N}$)
8. Существуют ли пять различных двузначных натуральных чисел, образующих геометрическую прогрессию? (**Ответ:** да, например: 16, 24, 36, 54, 81.)
9. В стране дураков наблюдается инфляция, в результате которой покупательная способность денег (назовем их рублями) уменьшается на 1% в месяц. Буратино устроился на работу. На момент получения первой зарплаты она была эквивалентна 1000 $. Полагая, что Буратино складывает все заработанные деньги в чулок и не имеет других доходов, его зарплата, выраженная в рублях, не меняется, а $ имеет постоянную покупательную способность, помогите Буратино ответить на вопрос, сможет ли он когда-либо купить квартиру за: а) 200 000 $; б) 100 000 $; в) 99 999,99 $.
10. Углы прямоугольного треугольника образуют геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель. (**Ответ:** $(1+\sqrt{5})/2$ или $(\sqrt{5}-1)/2$ (золотое сечение).)
11. Сколько потребуется цифр для записи числа x в n-ричной системе счисления? (**Ответ:** $\lfloor \log_n(x) \rfloor + 1$.)
12. Докажите, что $1{,}57 < \log_2 3 < 1{,}6$.
13. На сколько простых множителей можно разложить натуральное число n? (**Ответ:** от 0 до $\log_2 n$.)
14. Предположим, по мере взросления человека каждые 10 лет скорость усвоения знаний уменьшается вдвое. Первый брат-близнец учил нечто с 5 до 15 лет. Второй брат-близнец начал учить то же в 15 лет. Сколько ему потребуется времени, чтобы наверстать первого брата?

Литература: [2], [10], [11], [14], [16], [17], [20], [24], [26], [27], [28].

30. Задания с параметром

1. При каких значениях параметра a следующие уравнения и неравенства имеют решения:
   1) $ax = 1$;
   2) $x^2 = a$;
   3) $x^2 + 6x + a = 0$.
   4) $\sin(x) = a$;
   5) $\cos(x) = \frac{1}{a}$;
   6) $\mathrm{tg}(x) = a$;
   7) $\mathrm{ctg}(x) = \frac{1}{a}$;
   8) $\sin(x) > a$;
   9) $ax = \frac{1}{x}$;
   10) $\cos(x) = x^4 + a$;
   11) $|x+a| \leqslant -x^2$?

2. Найдите площадь фигуры, заключенной между графиками функций: y = n – x; y = x; y = 3x. (**Ответ**: $n^2/8$.)
3. Для каждого значения параметра a найдите число решений уравнения:
$$x^2+a=\sqrt{1-x^2}$$
4. Для каждого значения параметра a найдите число решений системы:
$$(x-3)(y-4)=0$$
$$x^2+y^2=a^2$$

Обозначив число решений через n, постройте график функции n = f(a).

5. Для каждого значения параметра a найдите число решений системы:
$$y=\left|x^2-4\right|$$
$$y=ax+4$$
Обозначив число решений через n, постройте график функции n = f(a).
6. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых уравнение
$$\sqrt{x-a}\sin(x)=\sqrt{x-a}\cos(x)$$
имеет ровно один корень на отрезке [0; π].
7. Для каждого значения параметра a найдите число решений системы:
$$\left(4-x^2-y^2\right)\left(y^2-4x+16\right)=0$$
$$ax-4a-y=0$$
8. Для каждого значения параметра a найдите число решений системы:
$$x^2+y^2+12x-6y+45-a^2=0$$
$$(x-9)^6\cdot\left(e^{y+5}-1\right)|a|=0$$
Если число решений нечетно, найдите их.
9. При каких значениях параметра a система
$$ax-y+6a+6=0$$
$$x^2+y^2-14x-12y+60=0$$
имеет ровно одно решение? Решение
10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\tan\left(\sqrt{a-x^2}\right)=0$ имеет ровно четыре корня.
11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система
$$x^2+y^2+z^2=a^3+2a^2+a+\frac{1}{3}$$
$$x+y+z=1$$
имеет единственное решение. Найдите это решение.
12. а) Для каждого значения параметра a найдите число решений системы:
$$y=a^x$$
$$y=\log_a x$$
б)* При каких значениях параметра a можно вычислить бесконечную степенную башню
$$a^{a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}\quad ?$$
Решение

Литература: [2], [28].

31. Комплексные числа

Мнимая единица (обозначение: i) — это число, квадрат которого равен -1.
Комплексным числом называют число вида a + bi, где a и b — вещественные числа.

1. Комплексное число $Z=-1+\sqrt{3}i$. Найдите |Z|, Z^2, Z^3. Изобразите все эти числа на комплексной плоскости. Выразите их в тригонометрической форме. Что вы замечаете?
2. Решите в комплексных числах уравнение $x^n = 1$ при n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Обобщите полученные результаты.
3. (*Формула Муавра*) Пользуясь методом математической индукции, докажите, что $(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$.
4. (*Формула Эйлера*) Докажите, что $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ Решение
5. Решите уравнение в комплексных числах: $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. (**Решение**: домножим обе части равенства на x – 1.)

6. Предложите способ нахождения всех примитивных пифагоровых троек. Решите задачу не так, как в листках «Делимость и остатки» и «Функции и графики».

Литература: [1], [2], [6], [10], [11], [14], [16], [17], [20], [24], [27], [28].

32. Теория групп

Бинарная операция — это отображение, сопоставляющее каждой упорядоченной паре элементов (*a*, *b*) множества A элемент *c* того же множества: (*a*, *b*) → *c*, где $a, b, c \in A$.

Группа — это такая упорядоченная пара (G, *), где G — произвольное множество, а * — определенная на нем бинарная операция, для которой выполнены *аксиомы группы*:

1) Существование нейтрального элемента (единицы) e: a * e = e * a = a;

2) Существование обратного элемента a^{-1}: a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.

3) Ассоциативность: (a * b) * c = a * (b * c)

1. Какие из операций — сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень — определены на множестве натуральных чисел, сравнимых с 1 по модулю 3 (то есть на множестве {1, 4, 7, 10, 13, 16, …})?
2. Сколько существует бинарных операций, определенных на множестве мощности m? (**Подсказка:** сколькими способами можно заполнить таблицу умножения m × m?)
3. Является ли группой множество целых чисел с операцией нахождения НОД? (**Решение:** Не может, потому что нет обратного элемента. 1. Ассоциативность НОД(a, НОД(b, c)) = НОД(НОД(a, b), c) (выполняется) 2. Существует нейтральный элемент e такой что для любого целого числа a выполняется НОД(a, e) = a. То есть нейтральный элемент должен делиться на любое целое число a. Таким числом может быть только 0. (выполняется) 3. Для любого целого числа a есть обратное число a^{-1}, такое что НОД(a, a^{-1}) = 0. Не выполняется, потому что наибольший общий делитель всегда больше или равен 1: НОД ≥ 1 (не выполняется).)
4. Пусть e — нейтральный элемент группы. Докажите, что $e = e^{-1}$. (**Решение:** $ee^{-1} = e^{-1}e = e$.)
5. Докажите, что любая нетривиальная (не {0}) подгруппа целых чисел имеет вид nZ (**Набросок решения:** Пусть n — наименьшее положительное число, принадлежащее G. Тогда n+n принадлежит G, n+n+n принадлежит G и так далее. Покажем, что никакие другие числа не принадлежат G. От противного. Пусть x принадлежит G и kn < x < (k+1)n, тогда x – kn принадлежит G, но 0 < x – kn < n. Противоречие.)
6. Докажите, что порядок любого элемента конечной группы делит порядок этой группы. (Решение)
7. Выведите из результата предыдущей задачи теорему Эйлера, а из нее — малую теорему Ферма.
8. Докажите, что если порядок группы G — простое число p, то группа G циклическая, порождённая любым своим элементом g ≠ e, изоморфна Z/pZ, в частности, G коммутативна.

Литература: [1], [8], [10], [11], [14], [28].

33. Разные задачи

1. Сложив числитель и знаменатель обыкновенной дроби, получили 105. Каково наименьшее возможное натуральное значение этой дроби? (**Ответ:** 2.)
2. a = 2b. Что больше: a или b?
3. Исключите лишнее: квадрат; ромб; равносторонний треугольник; прямоугольник. Предложите максимальное число различных вариантов.
4. Можете ли вы запомнить число 0149162536496481100121144169196225256289324361400?
5. Что выгоднее: очистить сосуд прополаскиванием, использовав сразу 100 мл воды, или прополоскать сначала 50 мл, а потом снова 50 мл?
6. На доске написаны числа 25 и 36. Играют двое, ходы делают по очереди. За ход разрешается дописать еще одно натуральное число — разность любых двух имеющихся на доске чисел, если она еще не встречалась. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?
7. Пользуясь тремя тройками, получите все числа от 1 до 12. Для чисел 8 и 10 придумайте как можно больше равенств. (**Решение:** 3,(3) * 3 = (3 + 3)# / 3 = [3,3 * 3] = (3 + !3) * !3 = 10.)
8. 5 копеек = (25 копеек)^{0,5} = (1/4 рубля)^{0,5} = 1/2 рубля = 50 копеек. Найдите ошибку.
9. На какое наибольшее число натуральных слагаемых можно разложить число 96 так, чтобы все слагаемые были больше 1 и попарно взаимно простыми? (**Решение:** сумма первых девяти простых чисел 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 100. Заменив любое из этих чисел меньшим на 4, мы нарушим требование взаимной простоты. Не получится и заменить сумму двух чисел. Можно заменить лишь три числа одним, например: 3 + 10 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 96. **Ответ:** на 7.)
10. Продолжите последовательность: 2, 5, 10, 17, 28, 41, 58, 77, 100, 129, 160, …
11. Переставьте одну цифру так, чтобы равенство выполнялось: 30 – 33 = 3. (**Ответ:** $30 - 3^3 = 3$; $30 - 3 = 3^3$.)

12. Соедините все вершины квадрата тремя отрезками, соблюдая следующие условия: карандаш нельзя отрывать от бумаги; карандаш должен вернуться в исходную точку. Решите задачу не менее чем двумя способами.
13. Из 8-го «А» в 8-й «Б» перевели несколько учеников. Может ли в обоих классах повыситься средний балл?
14. Чтобы развить силу воли, надо работать над собой, но чтобы работать над собой, нужна сила воли; следовательно, развить силу воли невозможно. Найдите ошибку в этом рассуждении.
15. Как известно, из того, что $a>b$ и $b>c$ следует, что $a>c$. Тем не менее, в популярной игре «Камень, ножницы, бумага» камень оказывается сильнее ножниц, ножницы сильнее бумаги, а бумага сильнее камня. Как же такое возможно?
16. Два друга стоят на балконах друг под другом. Они одновременно вскрикнули. Кто кого раньше услышит?
17. В ряд записано 10 неотрицательных чисел. Сумма любых трех соседних ≤ 1. Чему может быть равна сумма всех 10 чисел? (**Ответ:** от 0 до 4.)
18. Маша и Саша взяли с собой в школу по одинаковой пачке печенья и условились есть его на каждой перемене по 2 или 3 штуки. У Саши к концу четвёртого урока осталось только 1 печенье, а у Маши к шестому уроку печенье закончилось. Сколько печенья в пачке? (**Ответ:** 10.)
19. Сравните числа: 1 и $\frac{22}{67}+\frac{70}{211}+\frac{80}{241}$.
20. Есть два литровых сосуда, и оба заполнены вином точно до мерной черты, один – красным, второй – белым. Из первого сосуда берут чайную ложку вина, переливают ее во второй, тщательно размешивают и затем вливают чайную ложку смеси из второго сосуда в первый. Чего больше – красного ли вина в белом или белого в красном? Решение
21. Найдите сумму n первых четных чисел.
22. Получите верное равенство, переложив ровно одну спичку: VII = I.
23. Джо попросил у отца-математика 150 долларов, чтобы купить велосипед. Отец деньги дать просто так отказался, но предложил такую схему: Джо торгует на улице лимонадом, а в конце рабочего дня отец смотрит, сколько он заработал, и дает ему сумму, равную квадрату выручки. В первый день Джо наторговал на 3 доллара, и папа думал, что легко отделался, пока хитрый сынок не доказал ему, что он не прав. Как Джо смог получить требуемую сумму в первый же день?
24. Стержень, закрепленный одним концом на шарнире, толкнули вверх так, чтобы он не упал ни вперед, ни назад. Через какое время он примет вертикальное положение?
25. Продолжите последовательность: 1; 3; 7; 12; 18; 26; 35; 45; 56; 69; …
26. Выберите верные утверждения: 1) понятие делимости применимо ко всем действительным числам; 2) 0 делится на любое число; 3) если вероятность события = 0, то это событие невозможно; 4) функция $y = x^3$ возрастает на всей области определения; 5) в десятичной записи числа 2^{40} есть по крайней мере две одинаковые цифры.
27. Напишите выражение, содержащее букву x, числа, операцию взятия целой части и арифметические операции, которое равнялось бы ближайшему к x целому числу (любому, если их два). (**Ответ:** $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2(x - \lfloor x \rfloor) \rfloor$.)
28. Какое самое большое число можно выразить, использовав только три девятки? Решение на YouTube (**Указание:** тетрация.)
29. Сколько можно поставить ладей на объемной шахматной доске 4 × 4 × 4 так, чтобы они не били друг друга? (**Ответ:** 16.)
30. В университете важности работает 81 сотрудник, которые все время посвящают тому, чтобы измерять свой уровень важности с помощью шкалы целых чисел. Все сотрудники пришли на совещание, и заняли места за круглым столом. Известно, что уровень важности сотрудников, которые сидят рядом, отличается на 2 или 3 пункта. Какой наибольшей может быть разница уровней важности сотрудников этого университета, если известно, что все уровни важности сотрудников разные? (**Решение:** Присвоим каждому сотруднику номера от 0 до 80 и рассмотрим ситуацию, в которой разница уровней важностей будет наибольшей: у нулевого сотрудника будет уровень 0, у первого – 3, у второго – 6, ... (каждый раз прибавляем 3) ... , у сорокового – 120, у сорок первого – 118, у сорок второго – 116, у сорок третьего – 113, ... (каждый раз вычитаем 3) ... , у восьмидесятого – 2. Наибольшая разница составляет 120. Еще больше она быть не может, так как за 40 шагов можно подняться (или опуститься) не более чем на 3*40 = 120. **Ответ:** 120.)
31. Винни-Пух нашел параметрическое представление координат точки, движущейся со скоростью 1 по большой окружности единичной сферы с центром в начале координат из точки (1; 0; 0) в точку $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: x(t) = cos(t); y(t) = sin(t/2); z(t) = sin(t/2). Не ошибся ли он?
32. Злой учитель физкультуры поймал шестерых хулиганов, куривших в туалете, и случайно зашедшего туда отличника. «Каждый из вас, – сказал учитель, – либо пробежит марафон, либо подтянется 1000 раз – смотря по тому, что вы скажете». «Если квадратное число делится на 8, то оно делится на 16», – сказал 1-й хулиган. «В любом треугольнике найдется хотя бы один угол, не превосходящий 60^0», – сказал 2-й. «Если уменьшить все стороны треугольника, то уменьшится и его площадь», – сказал 3-й. «Через любую точку плоскости можно провести

прямую, параллельную данной», – сказал 4-й. «Если радиус описанной около треугольника окружности в два раза больше радиуса вписанной в него окружности, то этот треугольник правильный», – сказал 5-й. «Нельзя расположить на плоскости 5 различных попарно касающихся окружностей», – сказал 6-й. Первого, второго и пятого хулиганов учитель заставил подтягиваться, а третьего, четвертого и шестого – бежать. А вот отличника, который внимательно наблюдал за всем этим и которому очень не хотелось ни бежать, ни подтягиваться, пришлось отпустить. Что сказал отличник?

33. (*Закон Бенфорда*) Некто собрал весь песок с пляжа, взвесил каждую песчинку и записал их массы в стандартном виде. В каком проценте случаев (примерно) первой цифрой оказалась «1»? А «9»? (**Ответ:** 30%; < 5%.)
34. Прочтите слово: 3,14...век.
35. «Простых чисел можно записать сколько угодно», – сказал учитель. «Даже 1000?» – спросил ученик. «Да». – «А 1000.000 можно?» – «Да». – «А $e^{1000.000}$?» – «Нет». Почему учитель так ответил?

Литература: [2], [3], [7], [8], [10], [11], [13], [15], [17], [18], [19], [20], [21], [22], [26], [27], [28].

Литература

1. Алексеев В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях. — М.: МЦНМО, 2001.
2. Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ.— М.: МЦНМО, 2002.
3. Арнольд В. И. Задачи для детей от 5 до 15 лет. — 2-е изд., дополненное. — М.: МЦНМО, 2007.
4. Атанасян Л. С. и др. Геометрия. 7—9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений — 20-е изд. — М.: Просвещение, 2010.
5. Атанасян Л. С. и др. Геометрия. 10—11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни — 18-е изд. — М.: Просвещение, 2009.
6. Бибиков П. В. и др. Теория чисел во второй школе. — М.: МЦНМО, 2021.
7. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы. — Киров: издательство «АСА», 1994.
8. Голенищева-Кутузова Т. И., Казанцев А. Д., Кудряшов Ю. Г. и др. Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Ч. 1 — М.: МЦНМО, 2010.
9. Гордин Р. К. ЕГЭ 2020. Математика. Геометрия. Планиметрия. Задача 16 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2020.
10. Задачи по математике / Под редакцией А. Шеня. М.: МЦНМО, 2000.
11. Задачи по математике / Под редакцией В. Доценко. М.: МЦНМО, 2004.
12. Зыков А. А. Основы теории графов — М.: Вузовская книга, 2004.
13. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки / Текстологическая обработка Ю. В. Нестеренко; Под ред. М. К. Потапова. — 5-е изд., исправленное. — М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. Лит., 1987.
14. Казимиров Н. И., Савватеев А. В. Введение в настоящую математику: пособие для учителей математики по мотивам курса «100 уроков математики» Алексея Савватеева. — М.: Русский фонд содействия образованию и науке. Университет Дмитрия Пожарского, 2022.
15. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи / Под ред. В. О. Бугаенко. — 4-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2008.
16. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2001.
17. Нурлигареев Х. Д. и др. Листки класса 2017 «Д» 57 школы.
18. Сгибнев А. И. Делимость и простые числа.— 3-е изд., испр.— М.: МЦНМО, 2015.
19. Спивак А. В. Арифметика. — М.: Бюро Квантум, 2007.
20. Спивак А. В. Новая школьная энциклопедия. Числа и фигуры — М.: Росмэн, 2005.
21. Спивак А. В. Тысяча и одна задача по математике — 6-е изд. — М.: Просвещение, 2016.
22. Шарыгин И. Ф. Математика для поступающих в вузы: учеб. пособие — 6-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2006.
23. Шень А. Вероятность: примеры и задачи. — 4-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО, 2016.
24. Apostol Tom M. Calculus Volume 1 One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra — Second Edition, 1967.
25. Chasnov Jeffrey R. Fibonacci Numbers and the Golden Ratio. — The Hong Kong University of Science and Technology, 2019.
26. Levin Oscar. Discrete Mathematics An Open Introduction — 3rd Edition — School of Mathematical Science University of Northern Colorado Greeley, Co 80639, 2021.
27. Strang Gilbert. Calculus. — Massachusetts Institute of Technology, 1991.
28. https://www.problems.ru/

Дмитрий Юрьевич Михайлов

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ВВЕДЕНИЕ В НАСТОЯЩУЮ МАТЕМАТИКУ

YouTube: https://www.youtube.com/channel/UCocsNgfW9tGLP8zktA6CtRg
TikTok: https://www.tiktok.com/@dima_math
Сайт: http://lbvf77lbvf.narod.ru
ВКонтакте: https://vk.com/id2177613
Skype: Doka382
Телефон: +7-952-371-13-71

Отблагодарить автора:

Сбербанк: 2202 2061 3269 2083
Альфа-Банк: 4584 4328 2354 8236
СБП: +7-952-371-13-71
BTC: 1DimaeQ4DTk5mNLsShNqnCYpe2pDu1Gihf