

ВОПРОСЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
2021/22 учебный год. ЛЕКТОР Д. С. Теляковский

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Условия постоянства и монотонности функций на промежутке. Локальные экстремумы.
2. Условия выпуклости функций на промежутке. Точки перегиба.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3. Первообразная и неопределенный интеграл. Основные свойства. Интегрирование по частям. Замена переменной интегрирования.
4. Интегрирование элементарных рациональных функций.
5. Подстановки Эйлера, их геометрический смысл.
6. Определение определенного интеграла Римана. Необходимое условие интегрируемости.
7. Суммы Дарбу, их свойства. Интегралы Дарбу.
8. Интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости Дарбу (случай $\lambda_P \rightarrow 0$).
9. Интегрируемость непрерывных и монотонных на отрезке функций.
10. Интегрируемость ограниченных на отрезке функций, имеющих конечное число точек разрыва.
11. Свойства определенного интеграла: линейность, интегрируемость модуля интегрируемой на отрезке функции, интегрируемость произведения интегрируемых на отрезке функций.
12. Аддитивность интеграла как функции отрезка.
13. Оценки интеграла. Теорема о среднем.
14. Интеграл с переменным верхним пределом.
15. Формула Ньютона–Лейбница, интегрирование по частям и замена переменного в определенном интеграле.

16. Обобщённая первообразная, её единственность, формула Ньютона–Лейбница для обобщённой первообразной.
17. Неравенства Коши–Буняковского и Минковского для интегралов.
18. Мера Жордана. Критерий интегрируемости неотрицательной на отрезке функции.
19. Вычисление площади фигуры в декартовых и полярных координатах.
20. Вычисление длины параметрически заданной кривой.
21. Вычисление площади боковой поверхности и объёма тела вращения.
22. Несобственные интегралы: определение, линейность, формула замены переменного интегрирования, интегрирование по частям, критерий Коши сходимости.
23. Абсолютная сходимость несобственных интегралов, достаточное условие абсолютной сходимости (признак сравнения).
24. Интегральный признак сходимости ряда с монотонными членами.
25. Признак Лейбница сходимости ряда. Преобразование Абеля.
26. Условная сходимость несобственных интегралов, примеры.
27. Признаки Абеля–Дирихле сходимости рядов и несобственных интегралов.
28. Несобственные интегралы с несколькими особенностями на промежутке, интегралы в смысле главного значения.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

29. Координатное n -мерное пространство. Евклидово пространство, неравенства Коши–Буняковского (в \mathbb{C}^n) и Минковского.
30. Нормированное пространство. Последовательности в нормированном пространстве. Необходимое и достаточное условие сходимости последовательности в \mathbb{R}^n .

31. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности в \mathbb{R}^n .
32. Функции точки в \mathbb{R}^n . Пределы и повторные пределы, примеры.
33. Непрерывные функции в \mathbb{R}^n , теорема о промежуточном значении.
34. Теоремы Вейерштрасса для непрерывных функций, определенных на ограниченных замкнутых множествах в \mathbb{R}^n .
35. Теорема Кантора для непрерывных функций, определенных на ограниченных замкнутых множествах в \mathbb{R}^n .
36. Частные производные. Дифференцируемость функций в \mathbb{R}^n .
37. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости отображений из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m (покоординатная дифференцируемость).
38. Достаточное условие дифференцируемости (непрерывность первых частных производных).
39. Дифференцируемость сложной функции, доказательство для функции $z = f(x(u, v), y(u, v))$.
40. Линейность операции дифференцирования, формулы производной произведения и частного.
41. Производная по направлению, градиент.
42. Касательная плоскость и нормаль к графику функции $z = f(x, y)$. Необходимое и достаточное условие существования невертикальной касательной плоскости.
43. Частные производные высших порядков. Достаточное условие равенства смешанных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.
44. Дифференциалы функций многих переменных. Инвариантность формы дифференциала первого порядка и неинвариантность формы дифференциала высших порядков.
45. Формула для дифференциала $d^n f = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f$ (случай независимых переменных).

46. Формула Лагранжа конечных приращений для функций нескольких переменных. Достаточное условие постоянства функции в области.

РЕКОМЕНДОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе.
2. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Том I.
3. *Рудин У.* Основы математического анализа.
4. Лекции С.Б. Стечкина по математическому анализу. Том I.
5. *Теляковский С.А.* Курс лекций по математическому анализу. Семестр II.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II.