Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Механико-математический факультет

Кафедра газовой и волновой динамики

Курсовая работа

# Задача о трещине с изломом

# Fracture crack problem

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., проф. Звягин А.В.

Выполнил:

студент 5-го курса

Гафуров Руслан Ирекович

Москва

2020

# Аннотация

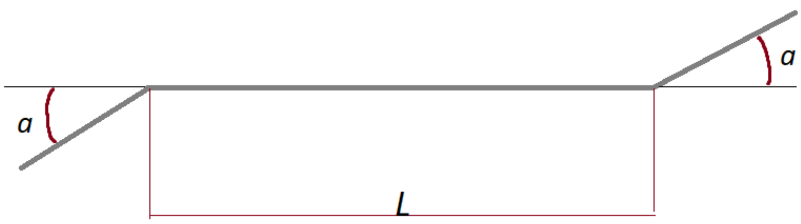
В данной работе рассматривается задача о трещине с изломом. Исследуется зависимость коэффициента интенсивности напряжений от угла излома трещины и относительных размеров малых элементов трещины. Полученное решение также позволяет наглядно увидеть, как изменяются смещения и напряжения в нашей линейно-упругой среде. Приведены соответствующие графики.

# Оглавление

# Постановка задачи

Рассмотрим задачу о трещине с изломом. Предполагаем, что у трещины есть два излома.

- На границе всей трещины известное напряжение –p, действующее по нормали к границе трещины.
- Длина основной части трещины равна L.
- Угол излома трещины измеряется как указано ниже.
- Массовых сил нет.
- Среда линейно-упругая.
- Задача двумерная.




На всей трещине нормальные напряжения равны –p. Касательные напряжения равны нулю.

На бесконечности

$$\sigma = 0$$

# Основные уравнения

В основной системе уравнений используются уравнения равновесия

$$\begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} = 0, \\ \sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y} = 0. \end{cases}$$

условие совместности деформаций

$$2\varepsilon_{xy,xy} = \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx}$$

выражение компонент тензора деформаций через перемещения

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}))$$

закон Гука

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

Зная выражения для деформаций, из закона Гука, можем преобразовать условие совместности деформаций

$$2\sigma_{xy,xy}\frac{1+\nu}{E} = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{xx,yy} + \sigma_{yy,xx}) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx,yy} + \sigma_{yy,yy} + \sigma_{xx,xx} + \sigma_{yy,xx})$$

Далее, используя уравнения равновесия, получаем выражение

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0$$

Введем функцию напряжений $U$

$$U_{,yy} = \sigma_{xx}$$

$$U_{,xx} = \sigma_{yy}$$

$$-U_{,xy} = \sigma_{xy}$$

Тогда предыдущее выражение примет вид

$$\Delta\Delta U = 0$$

В полученном уравнении произведем замену переменных

$$z = x + iy \quad \bar{z} = x - iy$$

Операторы дифференцирования примут следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = -(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2})$$

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \qquad \Delta\Delta = 16\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}$$

Получим бигармоническое уравнение в новых координатах

$$\frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0$$

Общее решение этого уравнения

$$U(z, \bar{z}) = F_1(z)\bar{z} + F_2(z) + G_1(\bar{z})z + G_2(\bar{z})$$

$$U(x, y) = \frac{1}{2}[\varphi(z)\bar{z} + \bar{\varphi}(\bar{z})z + \psi(\bar{z}) + \psi(z)]$$

Тогда из определения функции напряжений следует

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \Delta U = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}[\varphi'(z)\bar{z} + \bar{\varphi}(\bar{z}) + \psi'(z)] = 2[\varphi'(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})] = 4Re\varphi'(z)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - 2i\sigma_{xy} = 2[\bar{\varphi}''(\bar{z})z + \bar{\psi}''(\bar{z})]$$

Применим комплексное сопряжение ко второму уравнению и получим формулы Колосова-Мусхелишвили

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4Re\varphi'(z)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2[\varphi''(z)\bar{z} + \psi''(z)]$$

Теперь задача для отыскания напряжений сводится к поиску функций $\varphi(z), \ \ \psi(z)$. Осталось выразить перемещения через эти же комплексные функции. Для этого воспользуемся законом Гука

$$\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{yy} = \sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$$

$$\frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy} = \sigma_{xy}$$

В эти уравнения подставляем выражение напряжений, через функцию напряжений, и выражение деформаций через перемещения

$$\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial u_x}{\partial x} = (1-\nu)\Delta U - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$\frac{E}{1+\nu}\frac{\partial u_y}{\partial y} = (1-\nu)\Delta U - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)}(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

Подставим выражения для оператора лапласа от функции напряжений в первые два уравнения и проинтегрируем их

$$\frac{E}{1+\nu}u_x = 4(1-\nu)Re\varphi(z) - \frac{\partial U}{\partial x} + f(y)$$
$$\frac{E}{1+\nu}u_y = 4(1-\nu)Im\varphi(z) - \frac{\partial U}{\partial y} + g(x)$$

Из третьего уравнения предыдущей системы следует $f'(y)+g'(x)=0$. Значит $f(y)=ky+b$, $g(x)=-ky+c$. Эти функции определяют перенос и поворот тела, как жесткого целого, поэтому можем положить их равными нулю. Далее получим уравнение

$$\frac{E}{1+\nu}(u_x+iu_y) = 4(1-\nu)[Re\varphi(z)+iIm\varphi(z)] - \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y}$$

Так как

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = 2\frac{\partial U}{\partial z} = \varphi(z) + \bar{\varphi}'(\bar{z})z + \bar{\psi}'(\bar{z})$$

В конечном виде выражение для перемещений имеет вид

$$\frac{E}{1+\nu}(u_x+iu_y) = (3-4\nu)\varphi(z) - \bar{\varphi}'(\bar{z})z - \bar{\psi}'(\bar{z})$$

Аналогично для плосконапряженного состояния

$$\frac{E}{1+\nu}(u_x+iu_y) = \frac{3-\nu}{1+\nu}\varphi(z) - \bar{\varphi}'(\bar{z})z - \bar{\psi}'(\bar{z})$$

Получили систему для вычисления напряжений и деформаций

$$\sigma_{xx}+\sigma_{yy} = 4Re\varphi'(z)$$
$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2i\sigma_{xy} = 2[\varphi''(z)\bar{z}+\psi''(z)]$$
$$2\mu(u_x+iu_y) = k\varphi(z) - \bar{\varphi}'(\bar{z})z - \bar{\psi}'(\bar{z})$$

$\mu$ - модуль сдвига, $k=3-4\nu$ - в случае плоскодеформированного состояния, $k=\frac{3-\nu}{1+\nu}$ в случае плосконапряженного состояния.

Теперь рассмотрим следующую краевую задачу. Трещина длины $2L_1$, с действующим по нормали давлением p.

$$y = 0, |x| < L_1 : \sigma_{yy} = -p, \sigma_{xy} = 0$$
$$y = 0, |x| > L_1 : u_y = 0, \sigma_{xy} = 0$$

На бесконечности

$$\sigma = 0$$

Так как касательные напряжения равны нулю, из формул Колосова-Мусхелишвили получаем

$$Im(x\varphi''(x) + \psi'(x)) = 0$$

Введем обозначения

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}T(z), \quad \psi(z) = -\frac{1}{2}zT'(z) + \frac{1}{2}T(z)$$

Тогда формулы Колосова-Мусхелишвили примут следующий вид

$$\sigma_{xx} = ReT'(z) - yImT''(z)$$
$$\sigma_{yy} = ReT'(z) + yImT''(z)$$
$$\sigma_{xy} = -yReT''(z)$$

А выражение для перемещений

$$u_x = \frac{1}{2\mu}(\frac{k-1}{2}ReT(z) - yImT'(z))$$
$$u_y = \frac{1}{2\mu}(\frac{k+1}{2}Im(z) - yReT'(z))$$

Получим следующую краевую задачу для функции $T(z)$

$$y = 0, |x| < L_1, \quad ReT'(z) = -p$$
$$y = 0, |x| > L_1, \quad ImT'(z) = 0$$

Введем функцию (1) $Q(z) = -i\sqrt{(z - L_1)(z + L_1)}\, T'(z)$

$$y = 0, |x| < L_1, \quad ReQ(z) = \sqrt{(L_1)^2 - x^2}\, ReT(z) = -\sqrt{(L_1)^2 - x^2}\, p$$
$$y = 0, |x| > L_1, \quad ReQ(z) = \sqrt{x^2 - (L_1)^2}\, ImT(z) = 0$$

Решением этой задачи является интеграл типа Коши

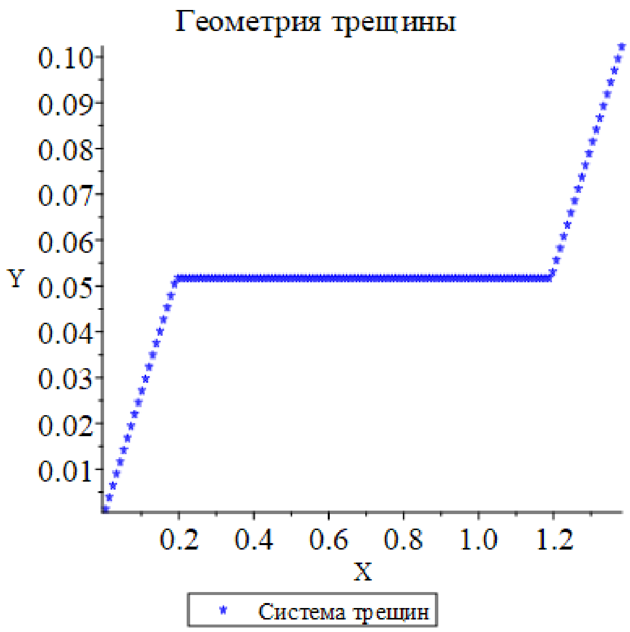
$$Q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-L_1}^{L_1} \frac{-2p\sqrt{(L_1)^2 - x^2}}{x - z}dx$$

Из (1) получаем значение $T'(z)$

$$T'(z) = \frac{1}{\pi\sqrt{z^2 - (L_1)^2}} \int_{-L_1}^{L_1} \frac{p\sqrt{(L_1)^2 - x^2}}{z - x} dx$$

# Методы решения

Для решения нашей задачи пользуемся методом граничных элементов. Идея заключается в том, что мы делим границу трещины на некоторое число N элементов, длина которых должна быть много меньше характерных размеров в задаче. Также разрыв смещений на каждом элементе полагаем постоянным.




Воспользуемся выражениями для напряжений и перемещений полученными Краучем [1]

$$F(x,y) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)}[(x-L)log\sqrt{(x-L)^2+y^2} - (x+L)log(\sqrt{(x+L)^2+y^2}) - y(arctan(y,x-L) - arctan(y,x+L))]$$

$$\sigma_{xx} = 2D_x(2F_{xy}(x,y,L) + yF_{xyy}(x,y,L)) + 2D_y2(F_{yy}(x,y,L) + yF_{yyy}(x,y,L))$$

(2) $$\sigma_{yy} = -2D_x yF_{xyy}(x,y,L) + 2D_y(F_{yy}(x,y,L) - yF_{yyy}(x,y,L))$$

$$\sigma_{xy} = 2D_x(F_{yy}(x,y,L) + yF_{yyy}(x,y,L)) - 2D_y(F_{yy}(x,y,L) + yF_{yyy}(x,y,L))$$

$$u_x = 2D_x((1-\nu)F_y(x,y,L) + yF_{yy}(x,y,L)) - D_y((1-2\nu)F_x(x,y,L) - yF_{xy}(x,y,L))$$

$$u_y = D_x((1-2\nu)F_x(x,y,L) - yF_{xy}(x,y,L)) + D_y(2(1-\nu))F_y(x,y,L) - yF_{yy}(x,y,L)$$

Все выражения отнесены к модулю сдвига $\mu$.

Далее составляем матрицу влияния граничных элементов друг на друга.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1,2N} \\ \dots & \dots & \\ A_{2N,1} & \dots & A_{2N,2N} \end{pmatrix}$$

Где $A_{ij}$ влияние j-го элемента на i-ый. Выражения для вычисления $A_{ij}$ описаны в [1].

Также составляем столбец правых частей

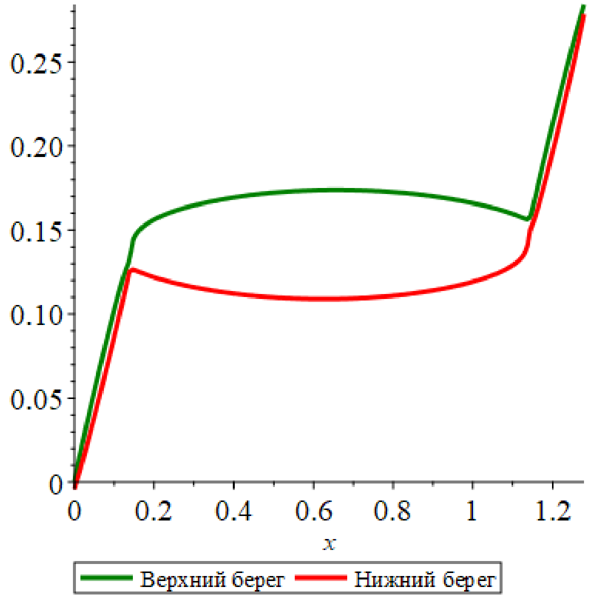
$$b_{ij} = \begin{pmatrix} -p_0 \\ \dots \\ -p_0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Первые N значений равны $-p_0$, что соответствует значениям $\sigma_{yy}$. Начиная с N+1 до 2N нули, так как $\sigma_{xy}$ отсутствует на границе всей трещины.

Решая систему линейных уравнений, получаем значения скачков перемещений $D_x^i$, $D_y^i$. Из формул (2) находим напряжения и перемещения.

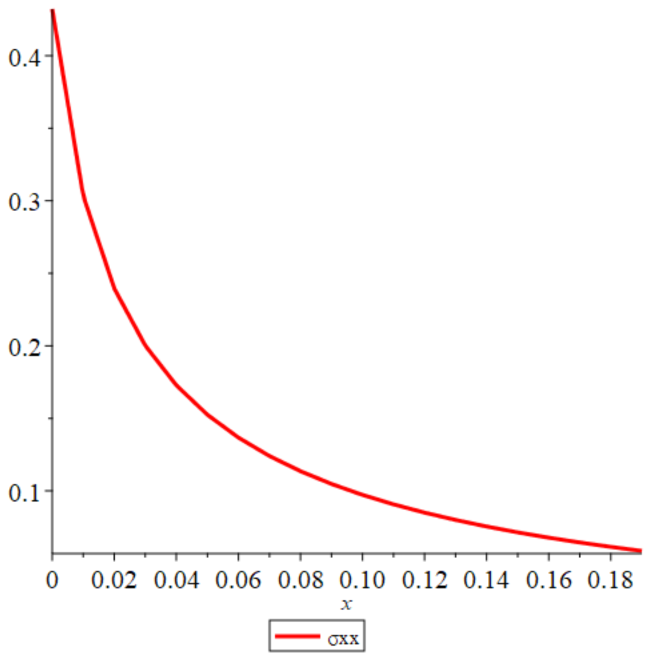
# Результаты

Раскрытие берегов трещины. На графиках демонстрируются перемещения $U_y$ для верхнего и нижнего берегов трещины в случае, когда «малые» трещины располагаются под углом 45 градусов к основной трещине.

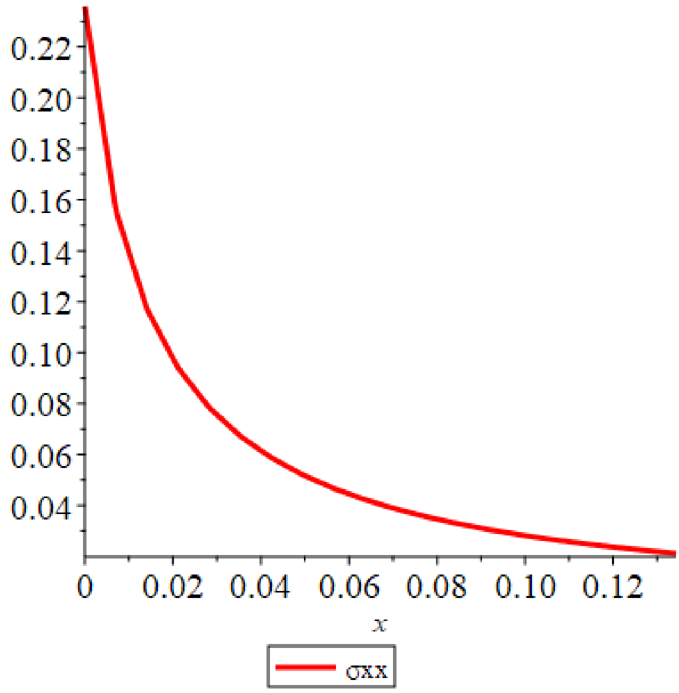



Графики напряжений $\sigma_{xx}$ на продолжении трещины при различных углах наклона (по горизонтальной оси указано расстояние от трещины):

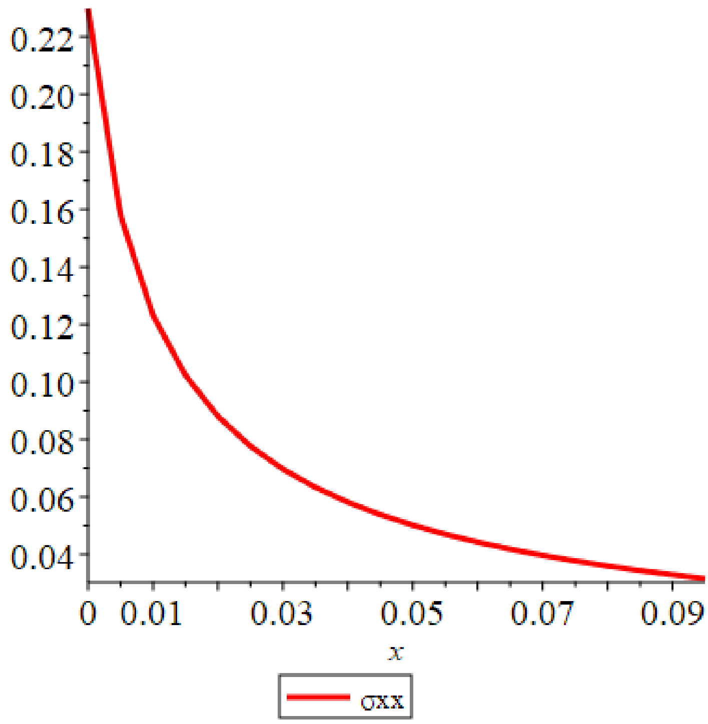
Трещина без изломов



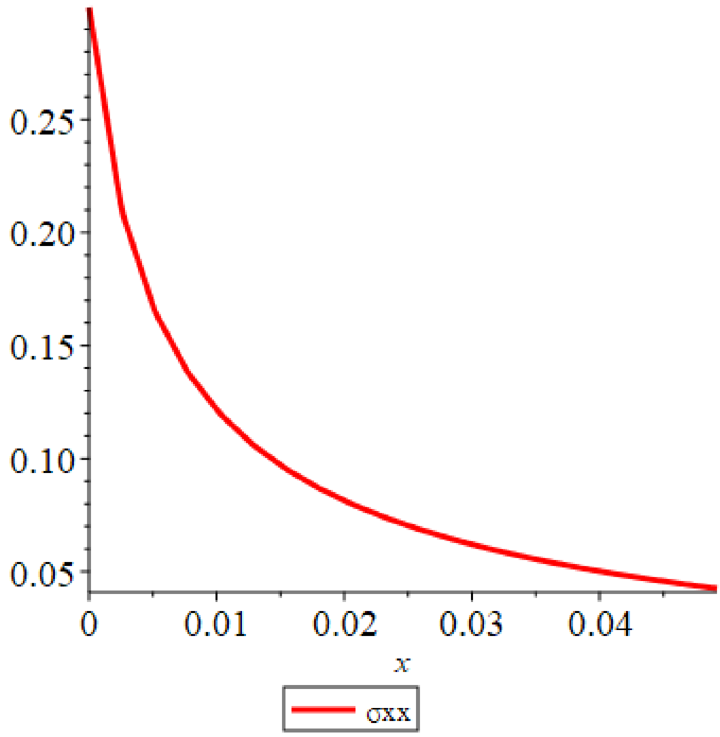
$\frac{\pi}{4}$




$\frac{\pi}{3}$

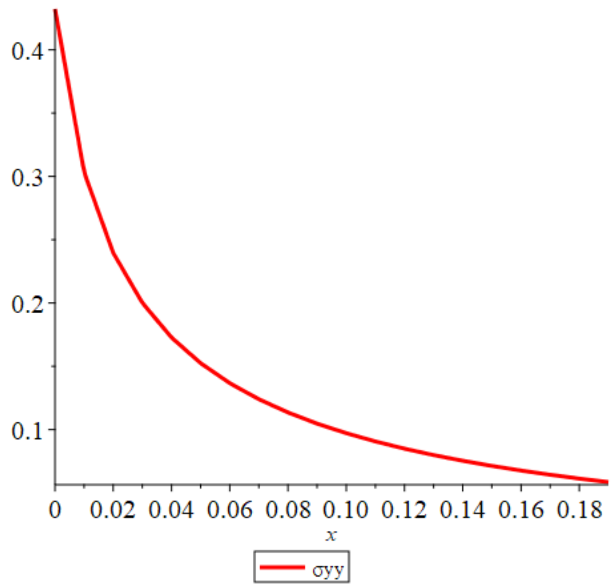


$$\frac{5\pi}{12}$$

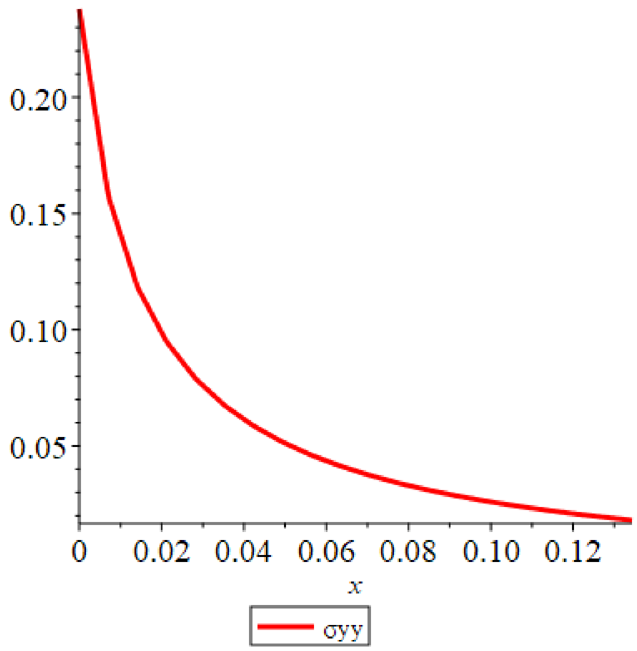


Графики напряжений $\sigma_{yy}$ на продолжении трещины при различных углах наклона (по горизонтальной оси указано расстояние от трещины):

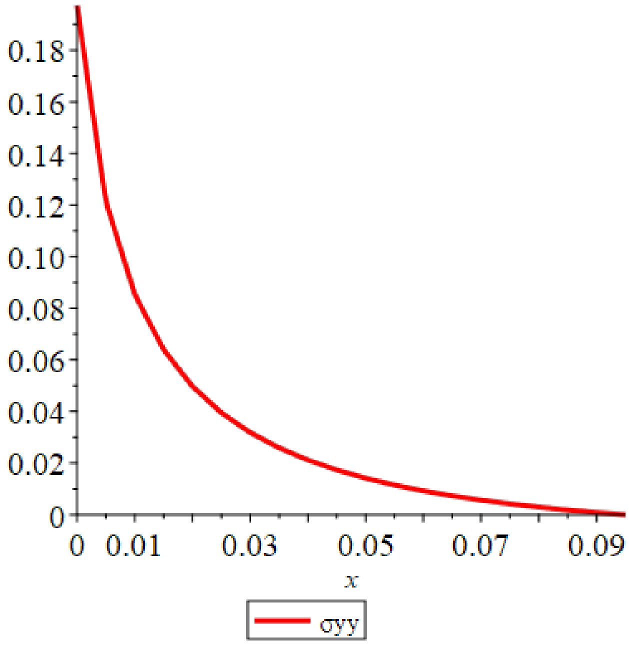
Трещина без изломов



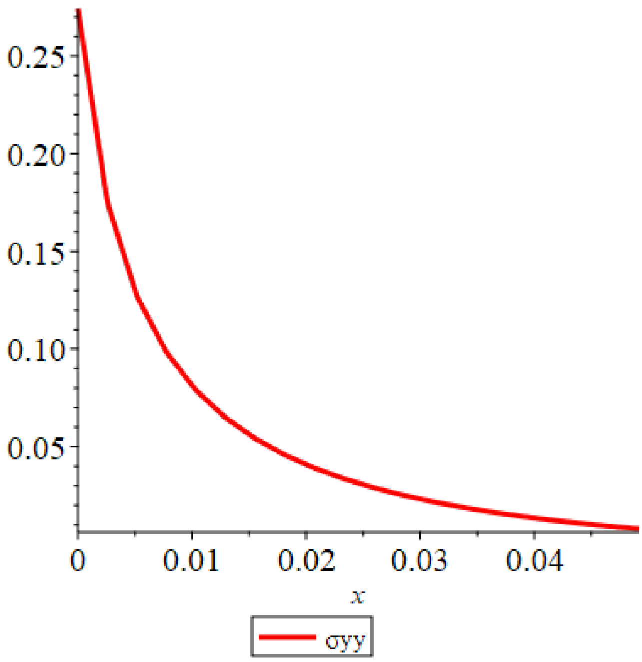

$$\frac{\pi}{4}$$



$$\frac{\pi}{3}$$




$$\frac{5\pi}{12}$$



Как видно из представленных выше графиков, напряжения на продолжении трещины с увеличением угла излома уменьшаются. Посмотрим, что происходит с коэффициентом интенсивности напряжений при изменении угла и относительной длины «малых» трещин.

| **Угол наклона** | **Относительная длина «малых» трещин** | **Коэффициент интенсивности напряжений** |
|---|---|---|
| 0 (трещина без изломов) | 0,2L | K = 0.04961 |
| $\frac{\pi}{4}$ | 0,2L | K = 0.02315 |
| $\frac{\pi}{3}$ | 0,2L | K = 0.01536 |
| $\frac{5\pi}{12}$ | 0,2L | K = 0.00442 |
| $\frac{\pi}{4}$ | 0,4L | K = 0.03211 |
| $\frac{\pi}{3}$ | 0,4L | K = 0.02114 |
| $\frac{5\pi}{12}$ | 0,4L | K = 0.00639 |

Результаты выше приведены только для углов более 45 градусов. Так как при меньших углах численное решение сложно интерпретировать с физической точки зрения. При углах более 40 градусов трещина ведет себя вполне объяснимо. При меньших углах берега трещины могут слишком сильно расходится или же наоборот, верхний берег трещины может уходить вниз, а нижний берег вверх, данную ситуацию можно наблюдать, если произвести расчет при угле излома в 30 градусов. Тогда КИН принимает отрицательные значения.

# Итоги работы

В данной работе, используя основные уравнения теории упругости, с помощью численных методов (метода граничных элементов) была проведено исследование трещины с изломом.

- Наглядно показано раскрытие берегов трещины
- Посчитаны напряжения на продолжении трещины и приведены соответствующие графики
- Установлено, что с ростом угла излома трещины КИН увеличивается
- Установлено, что с ростом длины «малых» трещин КИН увеличивается

# Список литературы


1. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела.: Пер. с англ. – М.:Мир, 1987
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках.: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984