Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет информационных технологий и программирования

Прикладная математика

Лабораторная работа №4

Выполнили студенты группы № M32091

Фисенко Никита Данилович

Рустамов Марк Самирович

Санкт-Петербург 2023

Постановка задачи:

- Реализовать метод Гаусса с выбором ведущего элемента для решения СЛАУ
- Реализовать алгоритм LU-разложения с использованием разреженно-строчного (разреженно-столбцового) формата хранения матрицы, а также метод решения СЛАУ с использованием LU-разложения.
- Реализовать итерационный метод решения СЛАУ (метод Зейделя).
- Провести исследование реализованных методов на системах с матрицами $A^{(k)}$, число обусловленности которых регулируется за счет изменения диагонального преобладания.
- Оценить зависимость числа обусловленности и точности полученного решения в зависимости от параметра k.
- Провести аналогичные исследования на матрицах Гильберта.
- Сравнить между собой прямые и итерационные методы по эффективности методов в зависимости от размеров n матрицы.

Цель работы:

Изучение методов решения СЛАУ, их реализация, анализ работы на различных матрицах, а также сравнение эффективности методов.

Теория:

1. ***Метод Гаусса с выбором ведущего элемента.***

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента – это алгоритм решения систем линейных уравнений, который позволяет избежать ошибок округления и улучшить точность вычислений. В методе Гаусса с выбором главного элемента на каждом шаге исключения i-го неизвестного в качестве ведущего используется уравнение (с i-го по n-ое), содержащее максимальный по модулю коэффициент – главный элемент. При этом в качестве него может использоваться один из коэффициентов i-го столбца, i-ой строки или всей непреобразованной части матрицы. Первый подход называется выбором главного элемента по столбцу, второй – по строке, а третий – по всей матрице. При использовании двух последних происходит перестановка столбцов матрицы системы. Это приводит к изменению порядка следования компонент вектора неизвестных и требует его восстановления по окончании процесса решения.

2. ***Метод LU-разложения (A = LU).***

Метод LU-разложения – это алгоритм решения систем линейных уравнений, который позволяет разложить матрицу коэффициентов системы на произведение двух матриц: верхнетреугольной (U) и нижнетреугольной (L).

Это позволяет упростить решение системы линейных уравнений и уменьшить количество вычислений. Алгоритм метода заключается в следующем: выполнить элементарные преобразования над матрицей, чтобы привести ее к верхнетреугольному виду, одновременно выполнить аналогичные преобразования над единичной матрицей, чтобы получить нижнетреугольную матрицу. Затем решить СЛАУ с помощью обратного хода.

Пример LU - разложения (A=LU)

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} & A & & & E & \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} & U & & & L_0 & \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \qquad L=L_0^{-1}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \qquad U=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

3. *Итерационный метод решения СЛАУ (метод Зейделя).*

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + c_1, \\ x_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + c_n \end{cases}$$

Метод Зейделя – это итерационный алгоритм решения систем линейных уравнений, который позволяет получить приближенное решение системы с заданной точностью. Он основан на последовательном вычислении значений неизвестных в каждой строке системы линейных уравнений. Алгоритм метода заключается в следующем: необходимо задать начальное приближение для неизвестных, далее вычислить новые значения для неизвестных, используя уже известные значения из предыдущих итераций. Затем проверить достигнутую точность решения. Если точность не удовлетворительна, перейти к следующей итерации. Повторять вышеуказанные шаги до достижения требуемой точности.

Рассмотрим пример:

$$\begin{cases} 5x_1-x_2+3x_3=5 \\ x_1-4x_2+2x_3=20 \\ 2x_1-x_2+5x_3=10 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1=(5+x_2-3x_3)/5 \\ x_2=(20-x_1-2x_3)/(-4) \\ x_3=(10-2x_1+x_2)/5 \end{cases}$$

Нулевое приближение:

$$x_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_{22}} = \frac{20}{-4} = -5$$

$$x_3^{(0)} = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{10}{5} = 2$$

Первое приближение:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = (5 + x_2^{(0)} - 3x_3^{(0)})/5 = (5-5-3 \cdot 2)/5 = -1{,}2 \\ x_2^{(1)} = (20 - x_1^{(1)} - 2x_3^{(0)})/(-4) = (20+1{,}2-2 \cdot 2)/(-4) = -4{,}3 \\ x_3^{(1)} = (10 - 2x_1^{(1)} + x_2^{(1)})/5 = (10-2 \cdot (-1{,}2)-4{,}3)/5 = 1{,}62 \end{cases}$$

Второе приближение :

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = (5 + x_2^{(1)} - 3x_3^{(1)})/5 = \\ x_2^{(2)} = (20 - x_1^{(2)} - 2x_3^{(1)})/(-4) = \\ x_3^{(2)} = (10 - 2x_1^{(2)} + x_2^{(2)})/5 = \end{cases}$$

И так далее до достижения необходимой точности.

Реализация методов:

https://github.com/russianZAK/applied-mathematics/blob/main/Lab%204/lab4.ipynb

Выводы:

- Число обусловленности возрастает с ростом размерности матриц при одинаковом параметре k; при одинаковой размерности матриц число обусловленности так же возрастает с ростом параметра k
- Для методов Гаусса и LU-разложения точность полученного решения увеличивается с ростом размерности матрицы при постоянном параметре k и так же увеличивается с ростом параметра k при постоянной размерности. Однако при той же размерности и параметре k метод LU-разложения, как правило, работает более точно. Для метода Зейделя точность остается примерно одинаковой для постоянных размерностей вне зависимости от параметра k и увеличивается с ростом размерности.
- Число обусловленности для матриц Гильберта для размерностей меньше 5 не превышает 10^5, но далее число обусловленности начинает резко возрастать. Матрицы Гильберта обладают свойством "плохой обусловленности". Обусловленность матрицы определяет, насколько чувствительны результирующие значения будут к погрешностям в исходных данных. Чем больше число обусловленности, тем более чувствительная к погрешностям становится система.
- Для метода Гаусса точность полученного решения матриц Гильберта очень низкая вне зависимости размерности. Для метода LU-разложения точность увеличивается с ростом размерности, а для метода Зейделя наоборот – уменьшается, однако при n больше 5 начинает увеличиваться

- Для матриц строгой диагональной доминированности метод Зейделя обычно сходится быстрее, чем метод Гаусса и метод LU-разложения. Это связано с особенностями этих методов. Наши результаты показали, что метод LU-разложения и метод Зейделя работают одинаково эффективно на матрицах, удовлетворяющих условию строгой диагональной доминированности вне зависимости от размерности. Однако такой вывод нельзя сделать о методе Гаусса.
- Метод LU-разложения наиболее эффективный для решения обычных матриц. Метод Гаусса – наименее эффективный. Метод Зейделя может не сходиться для некоторых систем линейных уравнений. Как уже было отмечено ранее он сходится быстрее только для матриц, удовлетворяющих условию строгой диагональной доминированности или условию положительной определенности.