Лабораторная работа # 1

Численное дифференцирование и интегрирование

Предполагаемый язык выполнения лабораторных работ Python 3. Лабораторные работы выполняются студентами индивидуально или в группах по 2-3 человека (по желанию). По результатам выполнения лабораторной работы необходимо подготовить отчет. Отчет должен содержать описание реализованных вами алгоритмов, ссылку на реализацию, необходимые тесты и таблицы.

Теория

Пусть задана функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Выберем на этом отрезке шаг сетки h. В таком случае количество узлов сетки будет

$$n = \frac{b-a}{h},$$

а сами значения x можно задать как $x_i = a + hi, i = 0, .., n$.

Для вычисления производной в каждой точке x_i могут применяться различные методы, которые преимущественно отличаются количеством узлов, задействованных в вычислении, а также их расположением относительно точки, в которой находится производная. Степень, с которой h входит в оценку погрешности вычисления, называется порядком точности метода. К методам первого порядка точности можно отнести:

1. Правая разностная производная

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. Левая разностная производная

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

В целях повышения точности можно задействовать три узла таким образом, что

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

а значение производной в крайних точках можно определить следующим образом

$$y_1 = \frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}$$
$$y_n = \frac{y_{n-2} - 4y_{n-1} + 3y_n}{2h}$$

Данный подход называется центральной разностной производной и имеет второй порядок точности.

Для нахождения приближенного значения определенного интеграла могут использоваться так называемые квадратурные формулы

$$I = \int_a^b f(x)dx \simeq \sum_0^n A_i f(\bar{x}_i),$$

где $\bar{x}_i$ - некоторые точки из отрезка $[a, b]$.

Введем также сетку узлов на отрезке таким же образом.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

Тогда интеграл I разобьется в сумму элементарных интегралов

$$I = \sum_1^n I_i,$$

где каждый I_i вычисляется на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Геометрически это будет означать, что вся криволинейная трапеция разбивается на n элементарных криволинейных трапеций. Методы численного интегрирования отличаются способом вычисления площадей этих элементарных криволинейных трапеций.

1. Формула прямоугольников. Площадь каждой элементарной криволинейной трапеции можно приближать площадью прямоугольников. Причем в зависимости от той точки, которая определяет высоту прямоугольника можно получить либо метод левых прямоугольников

   $$I_i \simeq h \cdot f_{i-1}$$

   либо правых прямоугольников

   $$I_i \simeq h \cdot f_i$$

   либо средних прямоугольников

   $$I_i \simeq h \cdot f_{i-1/2}$$

2. Формула трапеций. Используя оба конца отрезка элементарной криволинейной трапеции, можно приближать ее площадь как площадь трапеции

   $$I_i \simeq \frac{h}{2}(f_{i-1} + f_i)$$

3. Формула Симпсона. Также криволинейную трапецию можно приближать параболой, которая проходит соответственно через точки x_{i-1}, $x_{i-1/2}$ и x_i. Таким образом

   $$I_i = \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i)$$