

1 Exercise 1.13

まず

$$\text{Fib}(n) = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \quad (1)$$

を数学的帰納法で証明する

$n = 1$ のとき

$$\text{Fib}(1) = \frac{\phi - \psi}{\sqrt{5}} \quad (2)$$

$$= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

$$= 1 \quad (4)$$

となり成り立つ .

$n = 2$ のとき

$$\text{Fib}(2) = \frac{\phi^2 - \psi^2}{\sqrt{5}} \quad (5)$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5 - (1 - 2\sqrt{5} + 5)}{4\sqrt{5}} \quad (6)$$

$$= \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} \quad (7)$$

$$= 1 \quad (8)$$

となり成り立つ .

$n = 3$ のとき

$$\text{Fib}(3) = \frac{\phi^3 - \psi^3}{\sqrt{5}} \quad (9)$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt{5} + 15 + 5\sqrt{5} - (1 - 3\sqrt{5} + 15 - 5\sqrt{5})}{8\sqrt{5}} \quad (10)$$

$$= \frac{6\sqrt{5} + 10\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} \quad (11)$$

$$= \frac{16\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} \quad (12)$$

$$= 2 = 1 + 1 = \text{Fib}(1) + \text{Fib}(2) \quad (13)$$

となり成り立つ .

$n = 4$ のとき

$$\text{Fib}(4) = \frac{\phi^4 - \psi^4}{\sqrt{5}} \quad (14)$$

$$= \frac{1 + 4\sqrt{5} + 30 + 20\sqrt{5} + 25 - (1 - 4\sqrt{5} + 30 - 20\sqrt{5} + 25)}{16\sqrt{5}} \quad (15)$$

$$= \frac{8\sqrt{5} + 40\sqrt{5}}{16\sqrt{5}} \quad (16)$$

$$= 3 = 1 + 2 = \text{Fib}(2) + \text{Fib}(3) \quad (17)$$

となり成り立つ .

次に $n = k, k + 1$ のとき成り立つとする

$$\text{Fib}(k) = \frac{\phi^k - \psi^k}{\sqrt{5}} \quad (18)$$

$$\text{Fib}(k + 1) = \frac{\phi^{k+1} - \psi^{k+1}}{\sqrt{5}} \quad (19)$$

$n = k + 2$ のときは

$$\text{Fib}(k + 2) = \frac{\phi^{k+1} - \psi^{k+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\phi^k - \psi^k}{\sqrt{5}} \quad (20)$$

$$= \frac{\phi^{k+1} - \psi^{k+1} + \phi^k - \psi^k}{\sqrt{5}} \quad (21)$$

$$= \frac{\phi^k(\phi + 1) - \psi^k(\psi + 1)}{\sqrt{5}} \quad (22)$$

ここで

$$\phi^2 = \phi + 1, \quad \psi^2 = \psi + 1 \quad (23)$$

より

$$\text{Fib}(k + 2) = \frac{\phi^k(\phi + 1) - \psi^k(\psi + 1)}{\sqrt{5}} \quad (24)$$

$$= \frac{\phi^k\phi^2 - \psi^k\psi^2}{\sqrt{5}} \quad (25)$$

$$= \frac{\phi^{k+2} - \psi^{k+2}}{\sqrt{5}} \quad (26)$$

となり成り立つ .

以上より , 数学的帰納法から

$$\text{Fib}(n) = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \quad (27)$$

が成り立つことを証明した .

次に

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \sim \frac{1 - 2.23606797749979}{2} \sim -0.618033988749895 \quad (28)$$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi^n = 0 \quad (29)$$

となるので ,

$$\text{Fib}(n) = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \sim \frac{\phi^n - 0}{\sqrt{5}} = \phi^n / \sqrt{5} \quad (30)$$

となる