

Digitaltechnik & Rechnersysteme

Schaltnetze

Martin Kumm



WiSe 2022/2023

Was bisher geschah...



- Zahlencodierung, Stellenwertsystem
- Vorzeichenbehaftete Zahlen
 - Vorzeichen-Betrag: Vorzeichenbit + Betrag separat codiert
 - Einerkomplement: negative Zahlen bitweise invertiert
 - Zweierkomplement: negative Zahlen bitweise invertiert + 1
- Kommazahlen
 - Festkommazahlen: Nachkommastellen mit codiert
 - Gleitkommazahlen: Zahlen werden zu $\pm 1.m \cdot 2^e$ normalisiert; Komponenten werden gespeichert als
 - 1 Vorzeichen (s)
 - 2 Exponent (e)
 - 3 Mantisse (m)

Inhalte

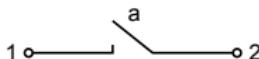


- 2 Informationsverarbeitung mit Schaltern
- 3 Kombinatorische Schaltungen
- 4 Boolesche Funktionen
- 5 Normalformen
- 6 Gesetze der Booleschen Algebra - Teil 1

Informationsverarbeitung mit Schaltern



Symbolische Darstellung eines Schalters:



Eingang a besagt ob Schalter offen oder geschlossen:

Schalter a geschlossen	Verbindung 1 \leftrightarrow 2?
nein	nein
ja	ja

🤔 Aber wie lassen sich damit Informationen verarbeiten?

Informationsverarbeitung mit Schaltern

AI

Angewandte Informatik

Serienschaltung zweier Schalter:



Schalter a geschlossen	Schalter b geschlossen	Verbindung 1↔2?
nein	nein	nein
nein	ja	nein
ja	nein	nein
ja	ja	ja

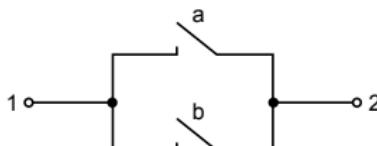
Logische Abstraktion über binäre Variablen:

- Schalter offen/geschlossen: 0/1
- Verbindung vorhanden nein/ja: 0/1

a	b	1↔2
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Informationsverarbeitung mit Schaltern

Parallelschaltung zweier Schalter:



Vorlesungsaufgabe: Wie lautet die Wahrheitstabelle?

a	b	$1 \leftrightarrow 2$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Komplexe Informationsverarbeitung



Aber wie lassen sich damit komplexe Informationen verarbeiten?

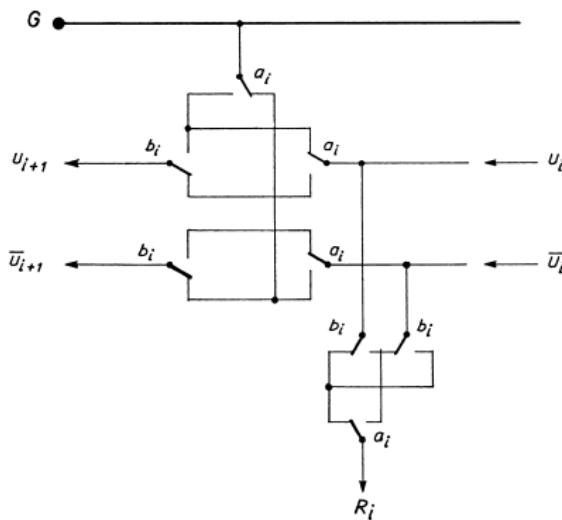
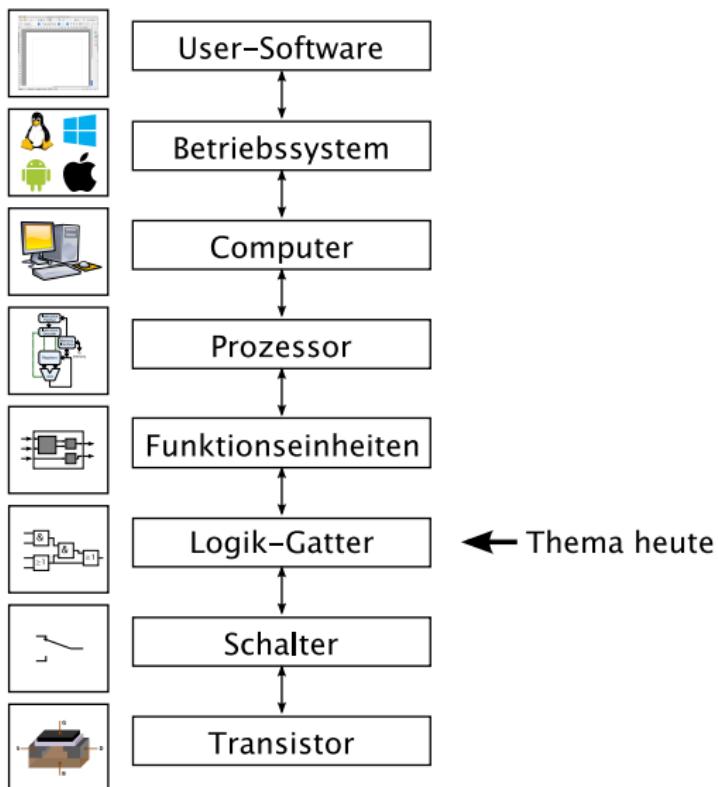


Bild 16. Einschrittige Addierschaltung für eine Binärstelle. Sie enthält nur Kontakte a_i und b_i der beiden Summanden. Es gibt zwei Übertragungsketten u und \bar{u} . („Es wird übertragen“ und „es wird nicht übertragen“)

Schalter-Realisierung einer 1-Bit Addierschaltung des Z1 / Z3 Computers
(Quelle: Konrad Zuse, »Der Computer, mein Lebenswerk«)

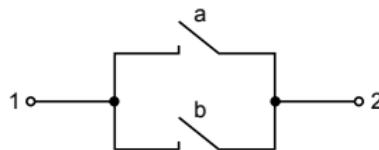
Die Macht der Abstraktion



Schaltalgebra



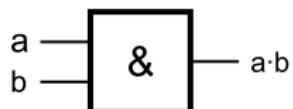
Reihenschaltung



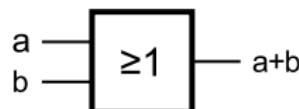
Parallelschaltung

Abstraktion:

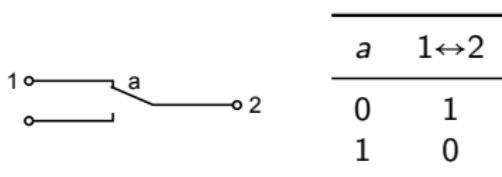
UND-Verknüpfung



ODER-Verknüpfung

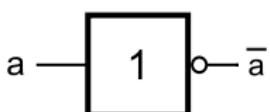


NICHT-Verknüpfung/Negation



Abstraktion:

NICHT-Verknüpfung/Negation

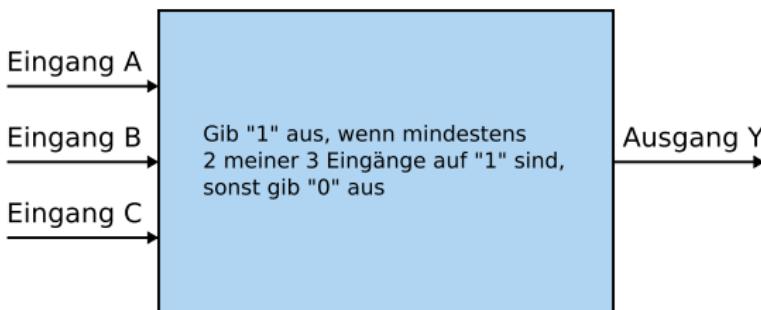


Ein digitales Verarbeitungselement

Ein **Schaltnetz** oder auch **kombinatorische Schaltung** ist eine Zusammenschaltung von Logik-Gattern mit

- einem oder mehreren digitalen **Eingängen**
- einem oder mehreren digitalen **Ausgängen**
- einer **funktionalen Spezifikation**, die für jede mögliche Kombination von Eingaben die Ausgabe angibt

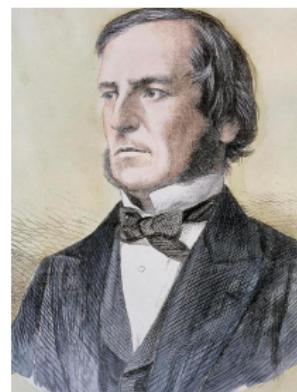
Beispiel:



Wie konstruiert man so ein Schaltnetz?

Boolesche Algebra

- Der Entwurf und die Analyse von Systemen, die binäre Signale verarbeiten erfolgt mit Hilfe der Booleschen Algebra
- Die Boolesche Algebra ist ein Teilgebiet der Algebra und behandelt mengentheoretische und logische Verknüpfungen zwischen den Elementen einer Menge
- Uns interessiert hier nur die zweielementige Boolesche Algebra auf der Menge $\{0, 1\}$
- Die Boolesche Algebra findet u.A. Anwendung in der Aussagenlogik und der Schaltalgebra



George Boole
(um 1860)

Schaltalgebra

Eine Schaltalgebra ist eine Boolesche Algebra mit

- einer binären Trägermenge $B = \{0, 1\}$
- der Konjunktion/UND-Verknüpfung $\gg\cdot\ll$ (auch: \wedge ; $\&$)
- der Disjunktion/ODER-Verknüpfung $\gg+\ll$ (auch: \vee)
- der Negation/NICHT-Verknüpfung $\gg-\ll$ (auch \neg)
- den beiden neutralen Elementen 0 und 1.

Wir verwenden hier die $\gg\cdot\ll$, $\gg+\ll$ und $\gg-\ll$ für die UND-, ODER und NICHT-Verknüpfung, da viele Regeln (z.B. Punkt vor Strichrechnung) ähnlich sind.

Wie bei der gewöhnlichen Multiplikation kann der $\gg\cdot\ll$ weggelassen werden, also $a \cdot b \cdot c = abc$

NICHT-Verknüpfung / Negation

Funktionsweise: Das Ergebnis der Negation ist 1 wenn der Eingang 0 ist und 0 wenn der Eingang 1 ist.

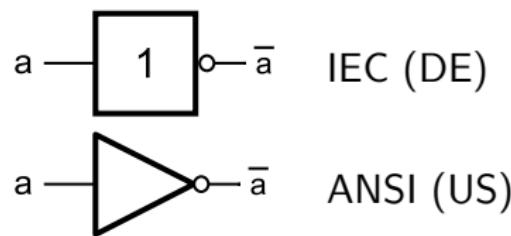
Die Schaltungsrealisierung wird als NICHT-Gatter, NOT-Gate oder als **Inverter** bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = \bar{a}$, (alt. $y = \neg a$)

Wahrheitstabelle:

a	\bar{a}
0	1
1	0

Schaltsymbole:



UND-Verknüpfung / Konjunktion

Funktionsweise: Das Ergebnis der UND-Verknüpfung ist genau dann 1 wenn alle Eingänge 1 sind

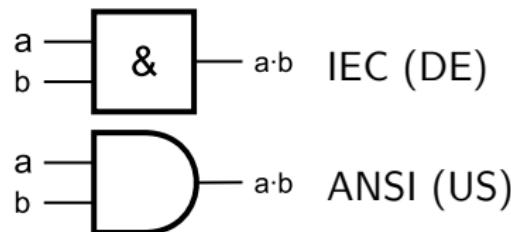
Die Schaltungsrealisierung wird als UND-Gatter oder AND-Gate bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = a \cdot b$, kurz $y = ab$ (alt. $y = a \wedge b$)

Wahrheitstabelle:

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Schaltsymbole:



ODER-Verknüpfung / Disjunktion

Funktionsweise: Das Ergebnis der ODER-Verknüpfung ist genau dann 1 wenn **mindestens ein** Eingang 1 ist

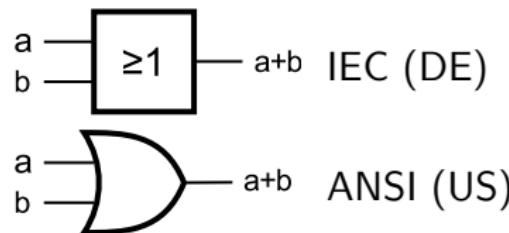
Die Schaltungsrealisierung wird als ODER-Gatter oder OR-Gate bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = a + b$ (alt. $y = a \vee b$)

Wahrheitstabelle:

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Schaltsymbole:



Boolesche Funktionen



Zur Beschreibung kombinatorischer Schaltungen sind Boolesche Funktionen (auch Schaltfunktionen oder logische Funktionen genannt) geeignet.

Das sind Ausdrücke in denen Variablen und Konstanten durch Boolesche Operatoren verknüpft werden.

Durch Auswertung der Ausdrücke ergibt sich der Funktionswert.

$$\text{Beispiel: } f(a, b, c) = (a + \overline{b}) \cdot \overline{c} + \overline{b + a}$$

Reihenfolge der Operatoren bei der Auswertung:

- ① Klammerausdrücke
- ② Negation (ist äquivalent zu Klammer)
- ③ Konjunktion (UND)
- ④ Disjunktion (ODER)

Darstellung von Booleschen Funktionen

Darstellung durch **Wertetabellen**

Index	x_{n-1}	x_{n-2}	...	x_2	x_1	x_0	$y = f(x_{n-1}, \dots, x_1, x_0)$
0	0	0	...	0	0	0	$f(0, 0, \dots, 0, 0, 0)$
1	0	0	...	0	0	1	$f(0, 0, \dots, 0, 0, 1)$
2	0	0	...	0	1	0	$f(0, 0, \dots, 0, 1, 0)$
3	0	0	...	0	1	1	$f(0, 0, \dots, 0, 1, 1)$
:	:	:	:	:	:	:	:
$2^n - 2$	1	1	...	1	1	0	$f(1, 1, \dots, 1, 1, 0)$
$2^n - 1$	1	1	...	1	1	1	$f(1, 1, \dots, 1, 1, 1)$

Wertetabelle einer Funktion



Beispiel:

$$f(x_0, x_1) = \overline{x_0}x_1 + x_0\overline{x_1}$$

x_0	x_1	$f(x_0, x_1)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

→ Exklusiv-Oder (*Exclusive Or*, XOR): $f(x_0, x_1) = x_0 \oplus x_1$
 (Genau dann "1", wenn eine Variable exklusiv "1" ist.)

Vorlesungsaufgabe



Bestimmen Sie die Wertetabelle der Funktion
 $g(x_0, x_1) = (x_0 + x_1) \cdot (\overline{x_0} + \overline{x_1})$

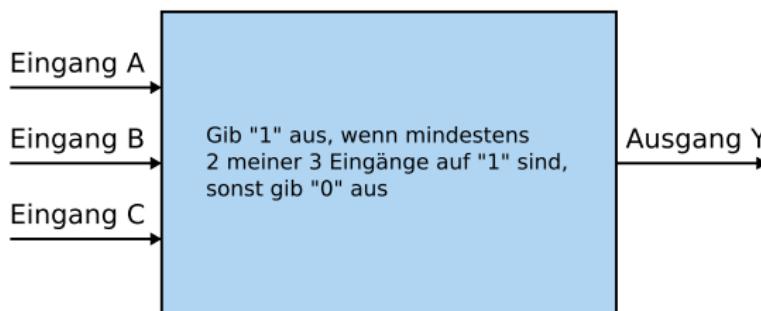
x_0	x_1	$g(x_0, x_1)$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Funktion einer Wahrheitstabelle?



🤔 Wie bekomme ich die Boolesche Funktion aus einer Wahrheitstabelle?

Für unser Beispiel-Schaltnetz:



A	B	C		Y
0	0	0		0
0	0	1		0
0	1	0		0
0	1	1		1
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		1
1	1	1		1

Funktion durch Minterme



Ein Minterm ist in genau einer Zeile der Wahrheitstabelle »1«

Jede Zeile der Wahrheitstabelle lässt sich ein Minterm zuordnen:

x_2	x_1	x_0	Minterm
0	0	0	$\overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0}$
0	0	1	$\overline{x_2} \overline{x_1} x_0$
0	1	0	$\overline{x_2} x_1 \overline{x_0}$
0	1	1	$\overline{x_2} x_1 x_0$
1	0	0	$x_2 \overline{x_1} \overline{x_0}$
1	0	1	$x_2 \overline{x_1} x_0$
1	1	0	$x_2 x_1 \overline{x_0}$
1	1	1	$x_2 x_1 x_0$

Durch ODER-Verknüpfung der passenden Minterme lässt sich eine (mögliche) Boolesche Funktion aus der Tabelle ablesen

Funktion durch Minterme



Beispiel:

x_2	x_1	x_0	$f(x_0, x_1, x_2)$	Minterm
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\overline{x}_2 x_1 \overline{x}_0$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$x_2 \overline{x}_1 x_0$
1	1	0	1	$x_2 x_1 \overline{x}_0$
1	1	1	0	

Die Funktion lautet: $f(x_0, x_1, x_2) = \overline{x}_2 x_1 \overline{x}_0 + x_2 \overline{x}_1 x_0 + x_2 x_1 \overline{x}_0$

Funktion durch Maxterme



Ein Maxterm ist in genau einer Zeile der Wahrheitstabelle »0«

Jede Zeile der Wahrheitstabelle lässt sich ein Maxterm zuordnen:

x_2	x_1	x_0	Maxterm
0	0	0	$x_2 + x_1 + x_0$
0	0	1	$x_2 + x_1 + \overline{x_0}$
0	1	0	$x_2 + \overline{x_1} + x_0$
0	1	1	$x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}$
1	0	0	$\overline{x_2} + x_1 + x_0$
1	0	1	$\overline{x_2} + x_1 + \overline{x_0}$
1	1	0	$\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0$
1	1	1	$\overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_0}$

Durch UND-Verknüpfung der passenden Maxterme lässt sich eine (andere) Boolesche Funktion aus der Tabelle ablesen

Darstellung durch Maxterme

Beispiel Maxterme:

x_2	x_1	x_0	$f(x_0, x_1, x_2)$	Maxterm
0	0	0	0	$x_2 + x_1 + x_0$
0	0	1	0	$x_2 + x_1 + \overline{x_0}$
0	1	0	1	
0	1	1	0	$x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}$
1	0	0	0	$\overline{x_2} + x_1 + x_0$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	0	$\overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_0}$

Die Funktion lautet:

$$f(x_0, x_1, x_2) = (x_2 + x_1 + x_0) \cdot (x_2 + x_1 + \overline{x_0}) \cdot (x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}) \cdot \dots \\ \dots + (\overline{x_2} + x_1 + x_0) \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_0})$$

Min- und Maxterme

Definition

Ein **Minterm** (**Maxterm**) von n Variablen ist ein Ausdruck, in dem alle Variablen genau einmal auftreten (negiert oder nicht-negiert) und **konjunktiv** (**disjunktiv**) verknüpft sind.

Eigenschaften

- Ein **Minterm** ist für **genau eine** bestimmte Variablenkombination **1**, für alle anderen **0**
- Ein **Maxterm** ist für **genau eine** bestimmte Variablenkombination **0**, für alle anderen **1**
- Jeder Zeile einer Wahrheitstabelle kann **genau ein Minterm** und **genau ein Maxterm** zugeordnet werden

Kanonische Form: Hauptsatz

Hauptsatz der Schaltalgebra:

Jede beliebige Schaltfunktion $y = f(x_n, \dots, x_1)$ lässt sich als Disjunktion von Mintermen (Konjunktion von Maxtermen) eindeutig darstellen. In der Disjunktion (Konjunktion) treten genau diejenigen Minterme (Maxterme) auf, die zu den Einsstellen (Nullstellen) der Schaltfunktion gehören.

Eine so dargestellte Funktion nennt man kanonische Disjunktive (Konjunktive) Normalform **KDNF (KKNF)**.

Treten nicht alle Variablen in den Mintermen (Maxtermen) auf, spricht man von der (nicht-kanonischen) Disjunktiven (Konjunktiven) Normalform **DNF (KNF)**.

Äquivalenz von Schaltfunktionen



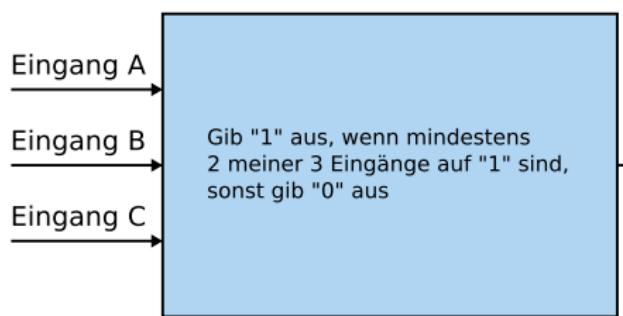
Zwei Schaltfunktionen sind **genau dann äquivalent**, wenn sie in ihren **kanonischen Normalformen (KDNF oder KKNF)** **übereinstimmen**.

Das ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass sie in ihren Wertetabellen übereinstimmen.

Beschreibung durch Schaltfunktion



Beispiel:



A	B	C		Y
0	0	0		0
0	0	1		0
0	1	0		0
0	1	1		1
<hr/>				
1	0	0		0
1	0	1		1
1	1	0		1
1	1	1		1

Vorlesungsaufgabe: Bestimmen Sie die zugehörige Schaltfunktion je als KDNF und KKNF.

Ergebnis Vorlesungsaufgabe



Boolesche Gesetze mit einer Variable



Identität

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

Eins/Null Element

$$x + 1 = 1$$

$$x \cdot 0 = 0$$

Idempotenz

$$x + x = x$$

$$X \cdot X = X$$

Boolesche Gesetze mit einer Variablen



Involution

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Komplement

$$x + \overline{x} = 1$$

$$x \cdot \overline{x} = 0$$

Kommutativitat

AI

Angewandte Informatik

Kommutativitat (Vertauschung)

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

⇒ Die Reihenfolge der Variablen spielt keine Rolle

Vorlesungsaufgabe



Wenden Sie die oben genannten Regeln auf den folgenden Booleschen Ausdruck an um diesen zu vereinfachen:

$$y = ((a + 1)b + \bar{a}(0 + a) + \bar{b})(b + a \cdot \bar{a})$$

Boolesche Gesetze (bisher)

	Disjunktives Gesetz	Konjunktives Gesetz
Identität	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Eins/Null	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
Idempotenz	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Involution	$\bar{\bar{x}} = x$	
Komplement	$x + \bar{x} = 1$	$x \cdot \bar{x} = 0$
Kommutativität	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$

Vorlesungsaufgabe Lösung

