Digitaltechnik & Rechnersysteme

Schaltnetze - Teil II

Martin Kumm

Hochschule Fulda
University of Applied Sciences

AI | Angewandte Informatik

WiSe 2022/2023

Was bisher geschah...

Angewandte Informatik

- Kombinatorische Schaltungen
- UND-, ODER-, NICHT-Operationen
- Boolesche Funktionen
- Hauptsatz der Schaltalgebra
- Wahrheitstabelle → Boolesche Funktion(en) über KDNF und KKNF
  - DNF: disjunktive (ODER-)Verknüpfung von Mintermen
  - Minterm: UND-Verknüpfung der (negierten oder nicht-negierten) Eingangsvariablen
  - KNF: konjunktive (UND-)Verknüpfung von Maxtermen
  - Maxterm: ODER-Verknüpfung der (negierten oder nicht-negierten) Eingangsvariablen
- Gesetze der Booleschen Algebra - Teil 1

Gesetze der Booleschen Algebra (bisher)

	Disjunktives Gesetz	Konjunktives Gesetz
Identität	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Eins/Null	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
Idempotenz	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Involution	$\overline{\overline{x}} = x$	
Komplement	$x + \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$
Kommutativität	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$

Inhalte

Angewandte Informatik

Assoziativität und Distributivität

Angewandte Informatik

Assoziativität (Verbindung)

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$$
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$$

⇒ Die Reihenfolge der Auswertung spielt innerhalb der gleichen Operatoren keine Rolle.

Distributivität (Verteilung)

$$x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$$
$$(x + y) \cdot (x + z) = x + y \cdot z$$

⇒ Analog zum »Ausklammern« und »Ausmultiplizieren«
⇒ Wichtig zum Vereinfachen von Schaltfunktionen!

Absorption

Angewandte Informatik

Absorption 1

$$x + x \cdot y = x$$
$$x \cdot (x + y) = x$$

Absorption 2

$$x + \overline{x} \cdot y = x + y$$
$$x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$$

⇒ Wichtig zum Vereinfachen von Schaltfunktionen!

Vorlesungsaufgabe

Überzeugen Sie sich durch Aufstellen der Wahrheitstabelle, dass das Gesetzt »Absorption 2« in Disjunktiver Form gültig ist:

$$x + \overline{x} \cdot y = x + y$$

Das De Morgansche Gesetz

Angewandte Informatik

De Morgan

$$\overline{(x+y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$
$$\overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$$

bzw. allgemein:

$$\overline{(x_1 + \ldots + x_n)} = \overline{x_1} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n}$$
$$\overline{(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)} = \overline{x_1} + \ldots + \overline{x_n}$$

$\Rightarrow$ Löst man die Invertierung einer UND(ODER)-Verknüpfung mehrerer Variablen auf, so wird aus der UND(ODER)-Verknüpfung eine ODER(UND)-Verknüpfung, zusätzlich werden alle Variablen des Terms invertiert.

Vorlesungsaufgabe

Angewandte Informatik

Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck mittels De Morgan:

$$z = \overline{a\overline{b}} \cdot \overline{a + b}$$

Konsensus

Konsensus

$$xy + \overline{x}z + yz = xy + \overline{x}z$$

$$(x+y)(\overline{x}+z)(y+z) = (x+y)(\overline{x}+z)$$

x	y	z	xy	$\overline{x}z$	yz
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

x	y	z	$(x+y)$	$(\overline{x}+z)$	$(y+z)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Gesetze der Booleschen Algebra

	Disjunktives Gesetz	Konjunktives Gesetz
Identität	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Eins/Null	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
Idempotenz	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Involution	$\overline{\overline{x}} = x$	
Komplement	$x + \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$
Kommutativität	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	$(x+y)+z = x+(y+z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Distributivität	$x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$	$(x + y) \cdot (x + z) = x + y \cdot z$
De Morgan	$\overline{(x + y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$	$\overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$
De Morgan (gen.)	$\overline{(x_1 + \ldots + x_n)} = \overline{x_1} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n}$	$\overline{(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)} = \overline{x_1} + \ldots + \overline{x_n}$
Absorption 1	$x + x \cdot y = x$	$x \cdot (x + y) = x$
Absorption 2	$x + \overline{x} \cdot y = x + y$	$x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$
Konsensus	$xy + \overline{x}z + yz = xy + \overline{x}z$	$(x + y)(\overline{x} + z)(y + z) = (x + y)(\overline{x} + z)$

Nicht-UND-Operator / NAND

Angewandte Informatik

Funktionsweise: Das Ergebnis des Nicht-UND-Operators ist genau dann 0 wenn alle Eingänge 1 sind, ansonsten ist das Ergebnis 1.

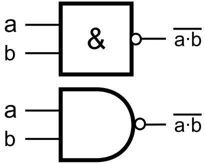
Die Schaltungsrealisierung wird als Nicht-UND-Gatter oder NAND-Gate bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = \overline{a \cdot b}$ (alt. $y = \overline{a \wedge b}$)

Wahrheitstabelle:

a	b	$\overline{a \cdot b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Schaltsymbole:



IEC (DE)

ANSI (US)

Nicht-ODER-Operator / NOR

Funktionsweise: Das Ergebnis des Nicht-ODER-Operators ist genau dann 0 wenn mindestens ein Eingang 1 ist, ansonsten ist das Ergebnis 1.

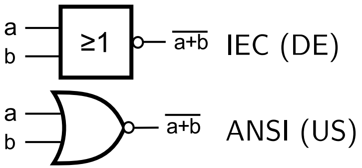
Die Schaltungsrealisierung wird als Nicht-ODER-Gatter oder NOR-Gate bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = \overline{a + b}$ (alt. $y = \overline{a \vee b}$)

Wahrheitstabelle:

a	b	$\overline{a+b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Schaltsymbole:



Exklusiv-ODER (XOR) / Kontravalenz

Funktionsweise: Das Ergebnis des Exklusiv-ODER-Operators ist genau dann 1 wenn eine ungeradzahlige Anzahl an Eingängen 1 ist.

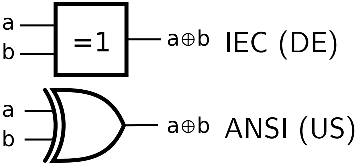
Die Schaltungsrealisierung wird als Exklusiv-ODER-Gatter oder Exclusive-OR-Gate, kurz XOR-Gate bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = a \oplus b = a\overline{b} + \overline{a}\, b$

Wahrheitstabelle:

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Schaltsymbole:



XOR-Rechenregeln

Angewandte Informatik

Identität, 1/0-Element

$$x \oplus 0 = x \quad x \oplus 1 = \overline{x}$$

$$x \oplus x = 0$$

Kommutativität (Vertauschung)

$$x \oplus y = y \oplus x$$

Assoziativität (Verbindung)

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$$

Distributivität (Verteilung)

$$x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus x \cdot z$$

Äquivalenz

Funktionsweise: Das Ergebnis des Äquivalenz-Operators ist genau dann 1 wenn alle Eingänge gleich sind.

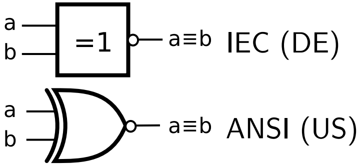
Die Äquivalenz entspricht dem negierten XOR-Operator.
Die Schaltungsrealisierung wird als Exklusiv-Nicht-ODER-Gatter oder Exclusive-NOR-Gate, kurz XNOR-Gate bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = a \equiv b = \overline{a \oplus b} = \overline{a}\,\overline{b} + ab$

Wahrheitstabelle:

a	b	$a \equiv b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Schaltsymbole:



Implikation

Angewandte Informatik

Funktionsweise: Das Ergebnis der Implikation zweier Variablen a und b ist genau dann 1 wenn aus Aussage »a folgt b« wahr ist.

Eine direkte Schaltungsrealisierung als Gatter gibt es nicht. Relevant nur in der Aussagelogik.

Boolescher Ausdruck: $y = a \rightarrow b = \overline{a} + b$

Wahrheitstabelle:

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Wie viele Schaltfunktionen gibt es?

Angewandte Informatik

- Für n Eingänge umfasst eine Schaltfunktion f genau 2^n Elemente, da $B = \{0, 1\}^n$ gilt, d.h. alle Kombinationen von 0 und 1 für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auftreten können
- Anzahl möglicher n-stelliger Schaltfunktionen entspricht der Anzahl möglicher Abbildungen einer 2^n-elementigen Menge auf eine 2-elementige Menge, d. h. $2^{(2^n)}$
- Beispiel: 2 Eingänge $\rightarrow 2^{2^2} = 2^4 = 16$ unterschiedliche Schaltfunktionen
- Die Anzahl der Schaltfunktionen wächst schnell:
    - Bei 3 Eingängen bereits $2^{2^3} = 256$,
    - bei 4 Eingängen $2^{2^4} = 65536$,
    - bei 5 Eingängen > 4 Milliarden!

Alle Schaltfunktionen mit zwei Eingängen

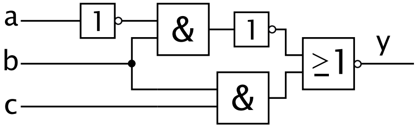
Angewandte Informatik

x_2	x_1	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
		Konstante 0	neg. Disjunktion $\overline{x_1 + x_2}$ (NOR)	neg. Implikation $\overline{x_1 \to x_2}$	$\overline{x_2}$	neg. Implikation $\overline{x_2 \to x_1}$	$\overline{x_1}$	Antivalenz $x_1 \not\equiv x_2$, $x_1 \oplus x_2$ (XOR)	neg. Konjunktion $\overline{x_1 \cdot x_2}$ (NAND)	Konjunktion $x_1 \cdot x_2$ (AND)	Äquivalenz $x_1 \equiv x_2$	x_1	Implikation $x_2 \to x_1$	x_2	Implikation $x_1 \to x_2$	Disjunktion $x_1 + x_2$ (OR)	Konstante 1

Symbolische Darstellung als Schaltnetz

- Das Schaltbild ist eine symbolische Darstellung einer Booleschen Funktion:
  - Operatoren (Verknüpfungen) werden durch ihre Schaltsymbole (Logik-Gatter) dargestellt
  - Variablen und Zwischenwerte als Verbindungslinien
- Die symbolische Darstellung entspricht einer **Implementierung** aufbauend auf Logik-Gattern und Leitungen!

Beispiel:



Funktion der Schaltbildes entspricht: $y = \overline{\overline{\overline{a}\, b} + bc}$

Vorlesungsaufgabe

Ermitteln Sie das Schaltbild für die folgende Boolesche Funktion:

$$y = \overline{\overline{(a \oplus b)c} + ab}$$

Darstellungsalternativen

Darstellungsformen für Schaltfunktionen (gleichberechtigt)

- Wahrheitstabelle
- Boolesche Funktion (Polynomdarstellung)
- Schaltbild (Grafische Darstellung durch Schaltsymbole)
- ...

Für diese gilt:

- Für eine Wahrheitstabelle existieren mehrere Boolesche Funktionen und mehrere Schaltbilder
- Für eine Boolesche Funktion existieren mehrere Schaltbilder aber genau eine Wahrheitstabelle
- Für ein Schaltbild existiert genau eine Boolesche Funktion und genau eine Wahrheitstabelle

Vereinfachung von Schaltfunktionen

Angewandte Informatik

Es gibt unterschiedliche Darstellungen (Polynome) für dieselbe Schaltfunktion. Ziel ist es, eine **aufwandsoptimale** Form (bezüglich der Realisierung) zu finden.

Dazu müsste nach einer **Kostenfunktion** optimiert werden, die jedoch auf der verwendeten Realisierung beruht (Herstellungstechnik, Technologie, usw.)

Ziel ist also eine möglichst gute Anpassung an die angestrebte Realisierung.

Als Näherung soll hier die **Anzahl Eingangsvariablen** pro Verknüpfung und die **Anzahl der Verknüpfungen** als Maß für den Aufwand gewählt werden.

Die Vereinfachung erfolgt mit Hilfe der Gesetzen der Booleschen Algebra.

Nachteil der Min-/Maxtermdarstellung

Angewandte Informatik

Bisherige Betrachtungen: Schaltfunktionen werden durch Min- bzw. Maxterme dargestellt. Jeder Term entspricht dabei einer ausgezeichneten Belegung.

Nachteil: Bei sehr komplexen Funktionen ist diese Darstellung sehr aufwändig!

Gesucht: eine kompaktere Notation für logische Ausdrücke.

Unterschied in einer Variablen

Angewandte Informatik

Existieren in einem Ausdruck **zwei** Minterme, welche sich in **genau einer** Variablen x_i unterscheiden, so unterscheiden sich die zugehörigen Belegungen im Wert dieser Variablen.

$$A = \overline{x_4} \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot \overline{x_1} + \overline{x_4} \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot x_1$$

Wendet man das Distributivgesetz auf diese beiden Terme an, so erhält man

$$\begin{aligned} A &= \overline{x_4} \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot (\overline{x_1} + x_1) \\ &= \overline{x_4} \cdot x_3 \cdot x_2 \cdot 1 \\ &= \overline{x_4} \cdot x_3 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Es entsteht also der neue, um x_1 verkürzte Ausdruck $\overline{x_4} \cdot x_3 \cdot x_2$, der **zwei** Minterme ersetzt.

Zusammenfassen zu Termen

Angewandte Informatik

Das Zusammenfassen ist nicht auf Minterme (Maxterme) beschränkt, sondern lässt sich allgemein auf Terme anwenden.

Das gezeigte Vorgehen ist nur auf solche Terme anwendbar, die sich **in genau einer** Variablen unterscheiden.

Notwendige Voraussetzung ist dabei der Unterschied in genau einer Variablen bei sonst gleicher Untermenge von Variablen.

Vorlesungsaufgabe

Angewandte Informatik

Sie lesen folgende kanonische DNF aus der Wahrheitstabelle ab:

a	b	c	$f(a,b,c)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$f(a,b,c) = \overline{a}\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\overline{c} + \overline{a}\,bc + a\overline{b}\,\overline{c} + ab\overline{c}$$

Wie lautet die minimale DNF?