

# Digitaltechnik & Rechnersysteme

## Arithmetik II und Schaltwerke

Martin Kumm



WiSe 2022/2023

# Die »Eigene Aufgabe«



Sie hatten mit dem Aufgabenblatt 6 die Aufgabe eine »Eigene Aufgabe« zu erstellen und hochzuladen

Falls noch nicht geschehen bitte Aufgabenstellung hochladen.

Denken Sie an: Klare Aufgabenstellung (Was ist gegeben, was gesucht?) sowie alternativer Lösungsweg!

Wenn genügend Aufgaben zusammenkommen wird eine davon in der Klausur dran kommen!

# Was bisher geschah...



- Wrap-Up zu Darstellungsalternativen
- Don't cares
  - Vereinfachungsmöglichkeit im KV-Diagramm wenn Ausgabewert für bestimmte Eingabe egal (*don't care*) ist
- Spezielle Schaltnetze
  - Dekoder
  - Multiplexer (allgemein)
- Addition / Subtraktion
  - Rechenschritt einer Stelle mittels Volladdierer
  - Durch serielle Verschaltung ergibt sich Ripple-Carry Addierer

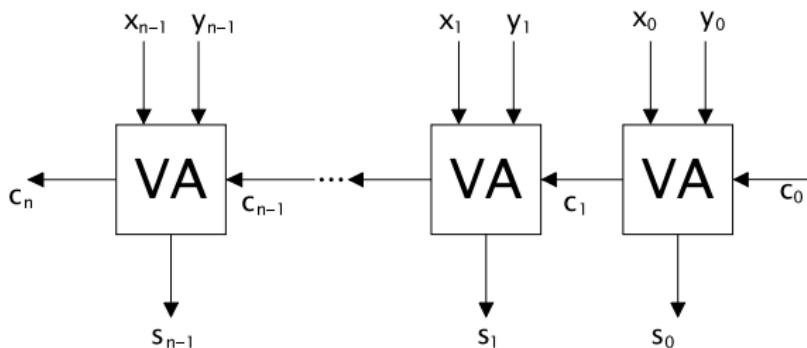
# Ripple-Carry Addierer

AI

Angewandte Informatik

## Ripple-Carry Addierer

- Durch die Weiterschaltung der Überträge zu höherwertigen VAs gelangt man zum Ripple-Carry-Addierer (RCA).
- Direkte Umsetzung der »Papier und Bleistift« Methode.
- Der VA für das LSB (rechts) kann durch einen HA ersetzt werden, wenn kein Carry-Eingang nötig ist.



# Grundlegende Subtraktion



Wie funktioniert die Subtraktion?

Die Subtraktion wird über eine Addition mit dem Zweierkomplement realisiert:  $D = X - Y = X + (-Y)$

Beispiel:  $700_{10} - 82_{10}$  ( $X = 01010111100_2$ ,  $Y = 1010010_2$ ):

$$\begin{array}{r} \overline{Y} & 11110101101 \\ +1 & \\ \hline -Y = & 11110101110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} X & 01010111100 \\ +(-Y) & +11110101110 \\ \hline = D & = 1|01001101010 \end{array}$$

- Überträge werden im Zweierkomplement ignoriert!
- Alle Zahlen (auch Ergebnis) müssen gleiche Wortbreite haben!
- Alle Zahlen (auch Ergebnis) müssen auch darstellbar sein!

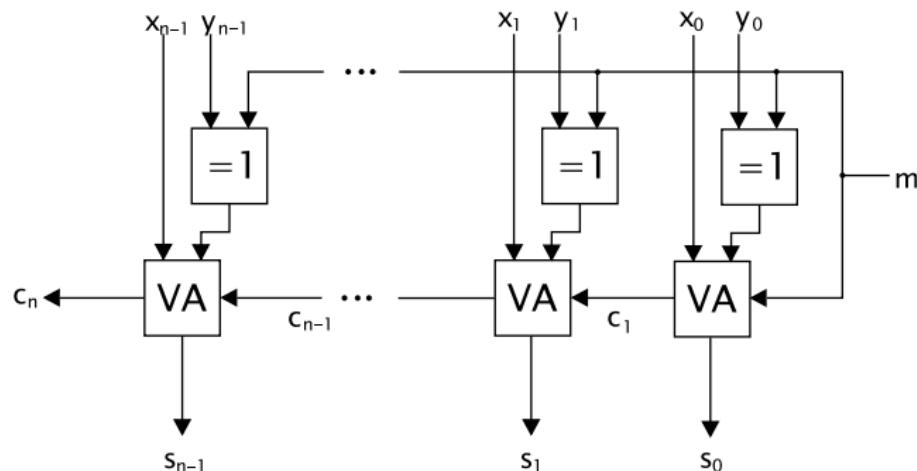
# Ripple-Carry Addierer/Subtrahierer

AI

Angewandte Informatik

Für die Subtraktion wird das Komplement gebildet und über das Carry-In eine Eins hinzuaddiert.

Ein Umschaltbarer Addierer/Subtrahierer lässt sich somit über zusätzliche XOR-Gatter realisieren ( $m = 0$  Addieren,  $m = 1$  Subtrahieren):



# Inhalte



- 1 Wrap-Up
  - Ripple-Carry Addierer
  - Grundlegende Subtraktion
- 2 Multiplikation
- 3 Arithmetisch-logische Einheit (ALU)
- 4 Schaltwerke
- 5 Schaltwerksanalyse
- 6 Übergangsgraph

# Multiplikation mit binären Zahlen



Die Multiplikation wird auf bitweise Multiplikation mit anschließender bitverschobener Summation reduziert:

$$P = X \times Y = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i \times Y}_{=X}$$

Beispiel  $n = 4$ :  $P = x_0 2^0 Y + x_1 2^1 Y + x_2 2^2 Y + x_3 2^3 Y$

Beispiel:  $0111_2 \times 1101_2 = 7_{10} \times 13_{10} = 91_{10} (= 1011011_2)$

$$\begin{array}{rcl} x_0 2^0 Y & = 1 \times 2^0 \times 13_{10} & 1101_2 \\ x_1 2^1 Y & = 1 \times 2^1 \times 13_{10} & +11010_2 \\ x_2 2^2 Y & = 1 \times 2^2 \times 13_{10} & +110100_2 \\ x_3 2^3 Y & = 0 \times 2^3 \times 13_{10} & +000000_2 \\ \hline & & = 1011011_2 \end{array}$$

# Vorlesungsaufgabe



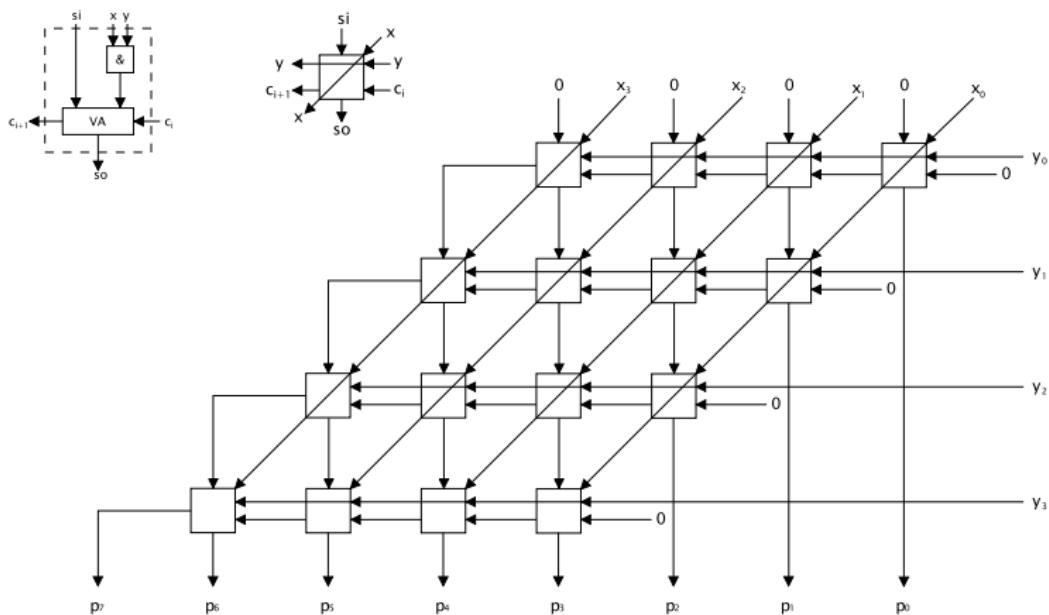
Berechnen Sie das Ergebnis der Binären Multiplikation aus:

$$9_{10} \times 5_{10} = 1001_2 \times 101_2 (= 45_{10} = 101101_2)$$

# Ripple Carry Array Multiplizierer

AI

Angewandte Informatik



# Moderne Multiplizierer



Der Ripple Carry Array Multiplizierer ist einer der einfachsten Multiplizierer aber leider auch der langsamste

Viele Logikstufen müssen hier verarbeitet werden um das Ergebnis zu erzeugen

In modernen Multiplizierern werden die Teilprodukte als auch deren Summation weitestgehend parallel berechnet

⇒ Bei Interesse sehen wir uns wieder im Modul  
»Computerarithmetik« im Master AI! 😊

# Arithmetisch-logische Einheit I



Die Arithmetisch-logische Einheit (engl. *Arithmetic Logic Unit, ALU*) ist die Recheneinheit einer CPU

Sie fasst die arithmetischen und logischen Operationen in einer Einheit zusammen

Arithmetische Operationen sind u.A.

- Addition, Subtraktion
- Vergleichsoperation
- Multiplikation
- Division

Logische Operationen sind u.A.

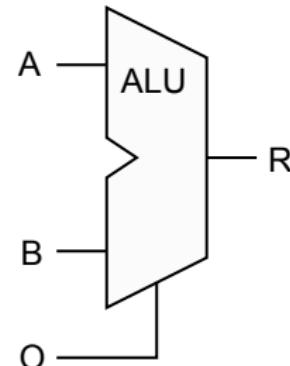
- UND, ODER, NICHT, XOR (Bitweise für ein ganzes Wort)
- Bitverschiebungen nach rechts oder links

# Arithmetisch-logische Einheit II

Die ALU ist rein kombinatorisch.

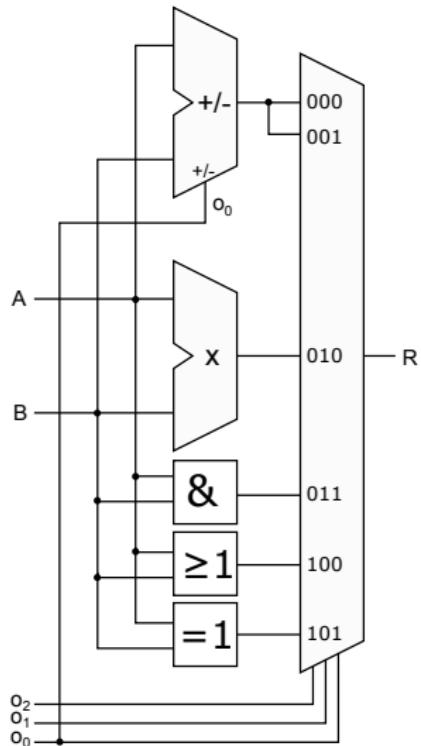
Die ALU hat i.d.R

- zwei Operanden-Worte ( $A$  und  $B$ , je  $n$  Bit)
- ein Ergebnis-Wort ( $R$ ,  $n$  Bit)
- ein Steuereingang zur Auswahl der Operation ( $O$ ,  $m$  Bit)



Ggf. existieren noch weitere Ein-/Ausgaben wie z.B. Überträge

# Aufbau einer ALU



$o_2$	$o_1$	$o_0$	Operation	$R$
0	0	0	+	$A + B$
0	0	1	-	$A - B$
0	1	0	$\times$	$A \times B$
0	1	1	UND	$A \wedge B$
1	0	0	ODER	$A \vee B$
1	0	1	XOR	$A \oplus B$
1	1	-	keine	-

# Schaltwerke

AI

Angewandte Informatik

Schaltnetze sind dadurch gekennzeichnet, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt die Ausgänge **nur** von den Eingängen zu **diesem** Zeitpunkt abhängen.

Zeit spielt nur in Form von Verzögerungen (Schaltzeiten) eine Rolle.

Schaltnetze sind für die Erfassung von Abläufen, bei denen die **Vorgeschichte** eine Rolle spielt, nicht geeignet.

# Schaltwerke



Zur Erfassung von Abläufen ist eine **Speicherung** der Vorgeschichte erforderlich.

Ein einfaches Beispiel stellt ein Zähler dar, wobei die Anzahl der Zählereignisse als „Zählerstand“ repräsentiert wird.

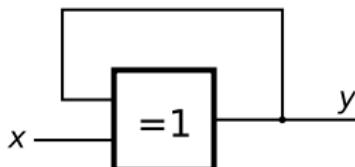
Solche Schaltungen bezeichnet man als **Schaltwerke** oder **sequentielle Schaltungen** oder **asynchrone Automaten**.

Die Speicherung wird durch das Einführen von Rückkopplungen realisiert.

# Beispiel: XOR mit Rückkopplung



Beispiel:  $y = x \oplus y$



Ausgangswert hängt nun von **vorherigem** Ausgangswert ab!

Wir nennen alten Ausgangswert  $y^t$ , den neuen  $y^{t+\tau}$

( $\tau$  kann man sich als sehr kleine Zeitspanne vorstellen).

$y^t$	$x$	$y^{t+\tau}$	
0	0	0	← Ausgang bleibt stabil: $y^{t+\tau} = y^t = 0$
0	1	1	← Ausgang wechselt von 0 auf 1
1	0	1	← Ausgang bleibt stabil: $y^{t+\tau} = y^t = 1$
1	1	0	← Ausgang wechselt von 1 auf 0

# Zustände und Zustandsvektor



Aufgrund der Historie kann sich das Schaltwerk in unterschiedlichen **Zuständen** befinden.

Variablen von denen der dieser Zustand beeinflusst wird werden als **Zustandsvariablen**  $q_i$ ,  $1 \leq i \leq k$  bezeichnet.

Die Menge der möglichen Zustände definiert einen **Zustandsraum**  $Q = \{0, 1\}^k$ .

Für ein Schaltwerk mit  $k$  Zustandsvariablen enthält  $Q$  damit  $I = 2^k$  Elemente.

# Zustandsübergangsverhalten

AI

Angewandte Informatik

Das **Zustandsübergangsverhalten** beschreibt die Übergänge von einem Zustand  $q^t \in Q$  in einen Folgezustand  $q^{t+\tau} \in Q$ :

$$q^{t+\tau} = G(q^t, x), \quad q^t, q^{t+\tau} \in Q$$

$G$  beschreibt, wie sich zum Zeitpunkt  $t + \tau$  der Zustand eines Schaltwerks  $q^{t+\tau}$  aus dem Zustand zu einem zurückliegenden Zeitpunkt  $q^t$  und dem Eingangsvektor  $x$  berechnen lässt.

$\tau$  kann hierbei eine gedachte Zeitspanne  $> 0$  sein oder konkret in Gatterlaufzeiten ausgedrückt werden.

$G$  wird als **Zustandsübergangsfunktion (ZÜF)** bezeichnet.

Zustandsübergänge werden auch **Transitionen** genannt.

# Berechnung der Ausgänge



Das Verhalten zum Zeitpunkt  $t$  wird beschrieben durch das Ausgangsverhalten (wie beim Schaltnetz) und das Zustandübergangsverhalten.

Ausgangsvektor zum Zeitpunkt  $t$ :

$$y = F(q^t, x), \quad q^t \in Q$$

$F$  wird als **Ausgangsfunktion (AF)** bezeichnet.

# Beschreibung als Übergangstabelle

Zur Beschreibung des Verhaltens von Schaltwerken eignen sich die **Zustandsübergangstabelle** oder **Übergangstabelle**:

$q_{k-1}^t \dots q_1^t q_0^t$	$x_{n-1}^t \dots x_1^t x_0^t$	$q_{k-1}^{t+\tau} \dots q_1^{t+\tau} q_0^{t+\tau}$	$y_{m-1}^t \dots y_1^t y_0^t$
00 ... 00	00 ... 00		
$\vdots$	$\vdots$		
11 ... 11	11 ... 11		

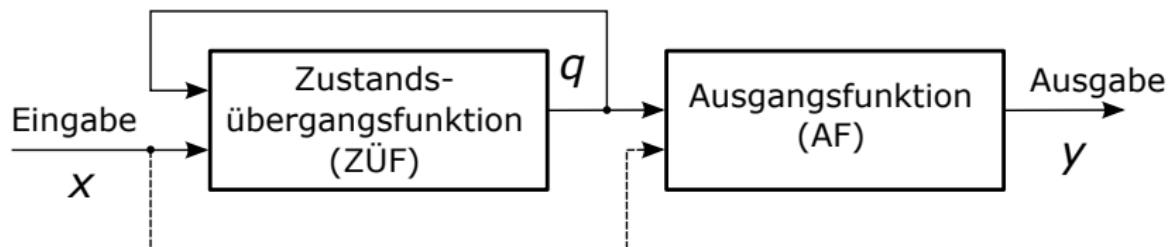
$k$ : Anzahl Zustandsbits,  $n$ : Anzahl Eingänge,  $m$ : Anzahl Ausgänge

In jedem möglichen Zustand werden sämtliche Eingangskombinationen betrachtet.

# Darstellung eines allgemeinen Schaltwerks

AI

Angewandte Informatik



Die ZÜF berechnet den Folge-Zustandsvektor  $q^{t+\tau}$  in Abhängigkeit des aktuellen Zustandsvektors  $q^t$  und der aktuellen Eingabe  $x$ .

Die AF berechnet die Ausgabe  $y$  in Abhängigkeit des aktuellen Zustandsvektors  $q^t$  und der aktuellen Eingabe  $x$ .

# Moore und Mealy Automaten



Üblicherweise werden zwei Typen von Automaten unterscheiden:

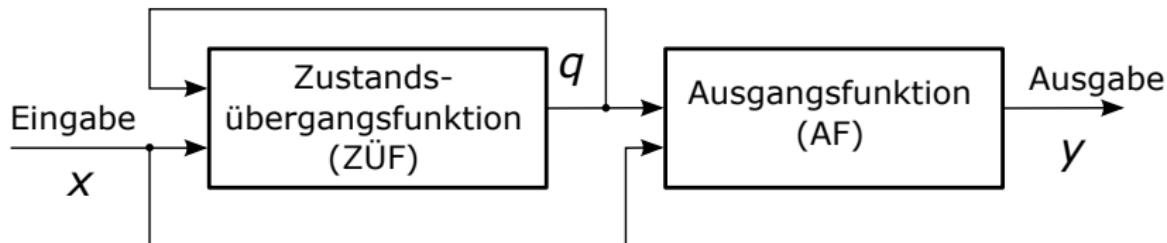
**MEALY Automat:** ist der allgemeine Fall

**MOORE Automat:** Einschränkung, dass die Ausgänge nur von den Zuständen abhängen:

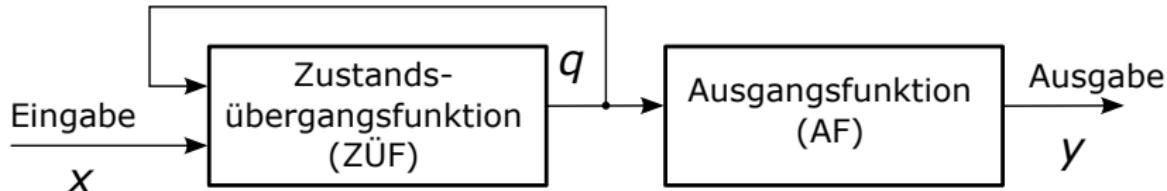
$$y = F(q)$$

# Moore und Mealy Automaten

## MEALY Automat:



## MOORE Automat:



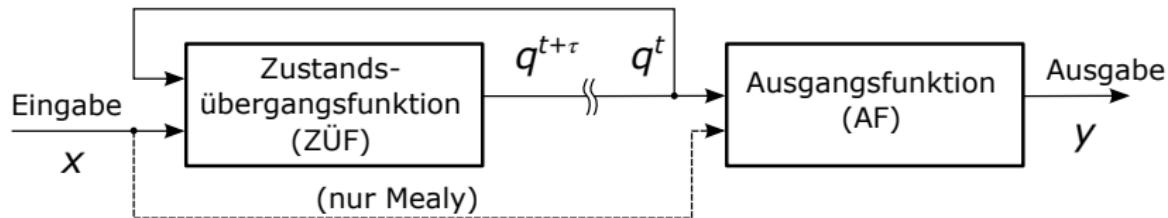
# Schaltwerksanalyse

AI

Angewandte Informatik

Vorgegeben ist ein Schaltbild.

Durch die **Analyse** soll auf die Funktion geschlossen werden.  
Dazu werden Rückkopplungen so aufgetrennt, dass die Struktur  
eines Schaltnetzes entsteht (rückkopplungsfrei).

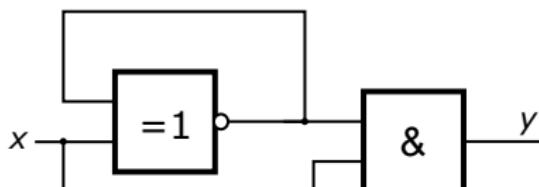


# Vorlesungsaufgabe

AI

Angewandte Informatik

Analysieren Sie das folgende Schaltwerk:



Erstellen Sie die Zustandsübergangs- und Ausgangstabelle

# Lösung Vorlesungsaufgabe

---



# Stabile Zustände

AI

Angewandte Informatik

Transitionen (Zustandsübergänge), bei denen alle  $q^t$  und  $q^{t+\tau}$  übereinstimmen führen zu **stabilen Zuständen**.

D.h. für die Eingabekombination dieser Transition bleibt der Automat in seinem Zustand.

# Vorlesungsaufgabe

AI

Angewandte Informatik

Markieren Sie die Transitionen, welche zu stabilen Zuständen führen:

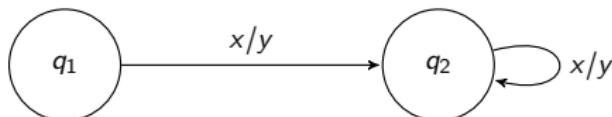
$q^t$	$x$	$q^{t+\tau}$	$y$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

# Beschreibung als Übergangsgraph

**Übergangsgraph/Zustandsübergangsgraph:** Den Knoten (Ecken) des Graphen werden die Zustände zugeordnet. Zustandsübergänge (**Transitionen**) entsprechen gerichteten Kanten (Pfeile).

Die **Knoten** werden durch Kreise dargestellt und erhalten als Beschriftung die Zustandsbezeichnung.

Die **Kanten** werden mit dem Eingangsvektor beschriftet, der den entsprechenden Übergang auslöst, sowie dem Ausgabevektor:

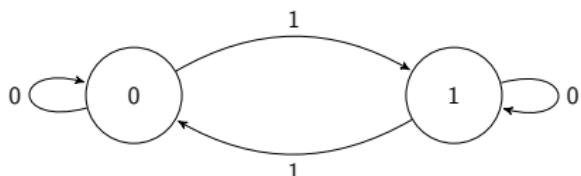


# Beispiel: XOR mit Rückkopplung

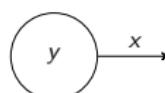
AI

Angewandte Informatik

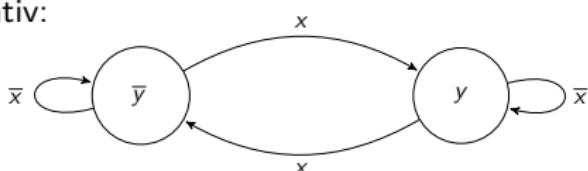
$y^t$	$x$	$y^{t+\tau}$	
0	0	0	← Ausgang bleibt stabil: $y^{t+\tau} = y^t = 0$
0	1	1	← Ausgang wechselt von 0 auf 1
1	0	1	← Ausgang bleibt stabil: $y^{t+\tau} = y^t = 1$
1	1	0	← Ausgang wechselt von 1 auf 0



Notation:



Alternativ:

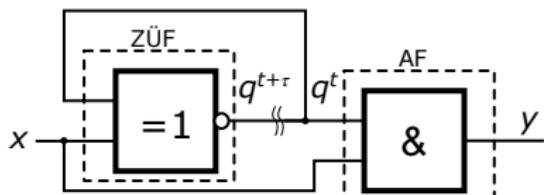


# Vorlesungsaufgabe

AI

Angewandte Informatik

Erstellen Sie für das Schaltwerk den Zustandsübergangsgraph.



$q^t$	$x$	$q^{t+\tau}$	$y$
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Notation:

