Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2025/2026

KAPITEL II: Zahlbereiche

5. Beträge von Zahlen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl (Vertretung: Prof. Dr. A. Gepperth)

Email: `alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de`

Absolutbetrag

Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der (Absolut-)Betrag definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Anschaulich: Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x|$ der *Abstand* zwischen x und 0 auf der Zahlengeraden, und für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x - y|$ der Abstand zwischen x und y.

Absolutbetrag

Definition

Für $x \in \mathbb{R}$ ist der (Absolut-)Betrag definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Rechenregeln

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $|x| \geq 0$, sowie $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$;
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ (Multiplikativität);
3. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, falls $y \neq 0$;
4. $|-x| = |x|$
5. Sei $C \in \mathbb{R}, C \geq 0$. Dann gilt $-C \leq x \leq C$ genau dann, wenn $|x| \leq C$.

Dreiecksungleichung

Satz
Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$|x + y| \leq |x| + |y| .$$

Beweis.
Da $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ gilt, folgt mit den Rechenregeln für reelle Zahlen

$$x + y \leq |x| + |y| . \tag{1}$$

Desweiteren gelten $-x \leq |-x| = |x|$ und $-y \leq |-y| = |y|$ und deshalb auch

$$-(x + y) = -x + (-y) \leq |x| + |y| . \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. $\square$

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2025/2026

KAPITEL III: Relationen und Abbildungen

1. Grundbegriffe

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl (Vertretung: Prof. Dr. A. Gepperth)

Email: alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de

Binäre Relationen

Erinnerung: Sind A und B Mengen und $R \subseteq A \times B$, so bezeichnet man R als binäre oder zweistellige Relation zwischen A und B.

Definition

Eine binäre Relation $R \subseteq A \times B$ heißt

- linkstotal, falls für alle $x \in A$ ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in R$.
- rechtstotal, falls für alle $y \in B$ ein $x \in A$ existiert mit $(x, y) \in R$.
- linkseindeutig, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ und für alle $y \in B$ aus $(x_1, y), (x_2, y) \in R$ folgt, dass $x_1 = x_2$.
- rechtseindeutig, falls für alle $x \in A$ und für alle $y_1, y_2 \in B$ aus $(x, y_1), (x, y_2) \in R$ folgt, dass $y_1 = y_2$.

Funktionen

Definition

Seien A und B Mengen. Eine Relation $R \subseteq A \times B$ ist eine Abbildung oder Funktion, falls sie

- linkstotal

und

- rechtseindeutig

ist.

Bemerkung

Das heißt, *jedem* Element in A wird *genau ein* Element in B zugeordnet.

Funktionen (informell)

Seien A und B Mengen.

Eine Abbildung oder Funktion von A nach B ist eine Vorschrift f, die jedem $x \in A$ genau ein Element $f(x) \in B$ zuordnet.

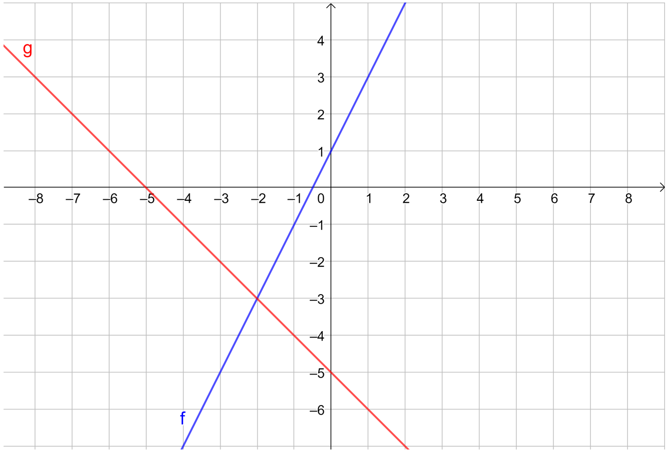
Notation: $f : A \to B, x \mapsto f(x)$.

- A ist der Definitionsbereich von f.
- B ist die Zielmenge.
- $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B$ ist der Graph von f.

Beispiele zur Visualisierung von Graphen

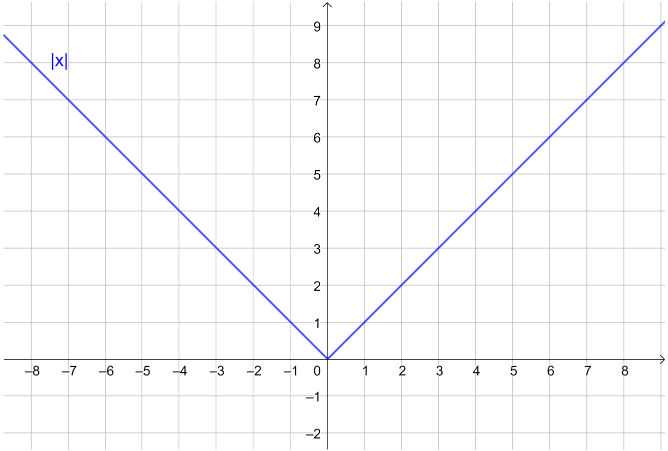
Graph von Geraden

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 2x + 1$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -x - 5$$



Graph der Betragsfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|\,, \text{ wobei } |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



Graph von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

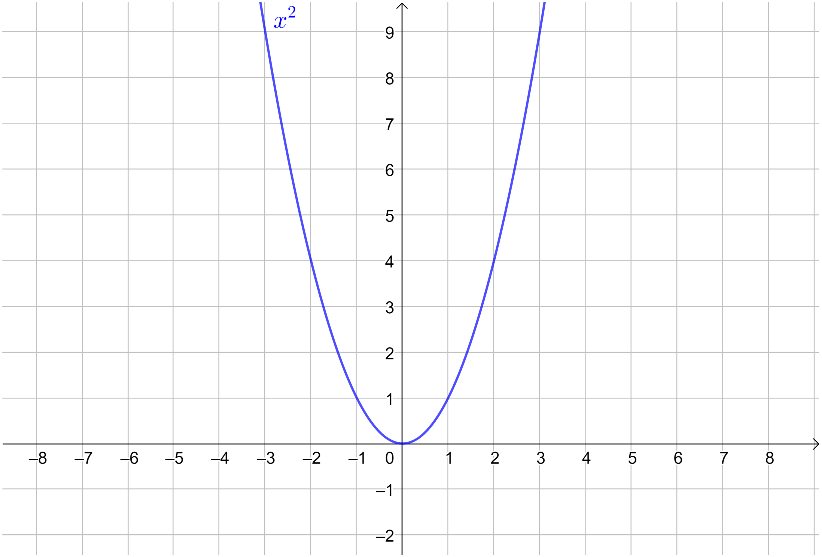


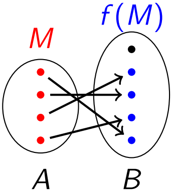
Bild und Urbild einer Abbildung

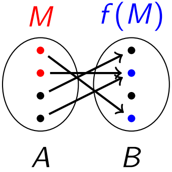
Seien A und B Mengen und sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

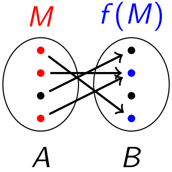
- Für $M \subseteq A$ ist $f(M) := \{f(x) : x \in M\} \subseteq B$ das Bild von M unter f.
- Für $N \subseteq B$ ist $f^{-1}(N) := \{x \in A : f(x) \in N\} \subseteq A$ das Urbild von N unter f.

Beispiele (Bild, Urbild)

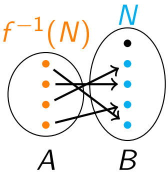
Bild von M unter f

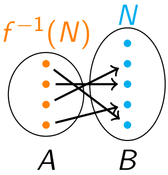


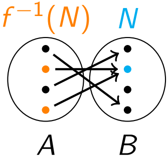


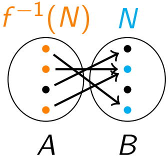


Urbild von N unter f



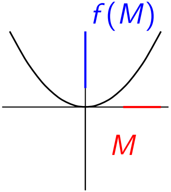


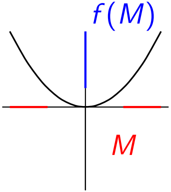




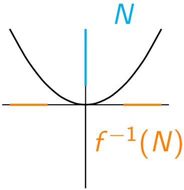
Beispiele (Bild, Urbild)

Bild





Urbild



Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2025/2026

KAPITEL III: Relationen und Abbildungen

2. Injektiv, surjektiv, bijektiv

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl (Vertretung: Prof. Dr. A. Gepperth)

Email: alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de

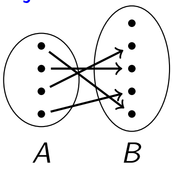
injektiv, surjektiv, bijektiv

Definition

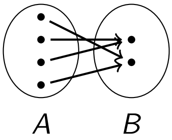
Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

- injektiv, falls für alle $x_1, x_2 \in A$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt.
  Die zu Grunde liegende Relation ist also linkseindeutig.
- surjektiv, wenn es für alle $y \in B$ ein $x \in A$ gibt mit $y = f(x)$, (d. h. f(A)=B).
  Die zu Grunde liegende Relation ist also rechtstotal.
- bijektiv, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

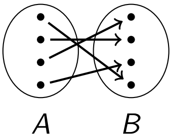
injektiv



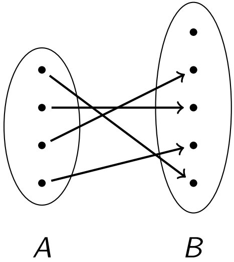
surjektiv



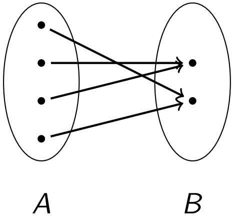
bijektiv



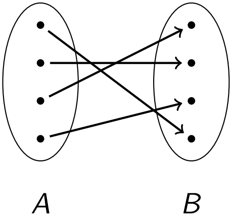
injektiv, surjektiv, bijektiv



injektiv
nicht surjektiv
nicht bijektiv



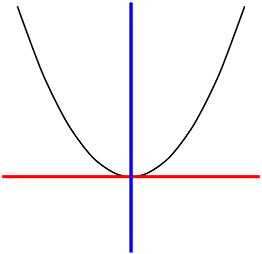
nicht injektiv
surjektiv
nicht bijektiv



injektiv
surjektiv
bijektiv

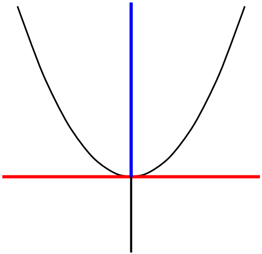
Beispiel: $x \mapsto x^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



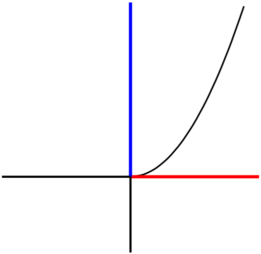
nicht injektiv
nicht surjektiv
nicht bijektiv

$f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$



nicht injektiv
surjektiv
nicht bijektiv

$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$



injektiv
surjektiv
bijektiv