Übungsblatt 2 – Lösungshinweise

(Logik)

Aufgabe 1

Seien A und B mathematische Aussagen. Füllen Sie nachstehende Wahrheitstafel aus und überlegen Sie anschließend, welche Spalten übereinstimmen. Beachten Sie, dass „$\neg$" stärker bindet als „$\wedge$" bzw. „$\vee$", das heißt, „$\neg A \wedge \neg B$" bedeutet „$(\neg A) \wedge (\neg B)$" und „$\neg A \vee \neg B$" bedeutet „$(\neg A) \vee (\neg B)$".

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w				
w	f				
f	w				
f	f				

Lösungshinweis

A	B	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	f	f	f	f
w	f	w	f	f	w
f	w	w	f	f	w
f	f	w	w	w	w

Es fällt auf, dass die erste und vierte sowie die zweite und dritte Spalte übereinstimmen. Es ist also „$\neg(A \wedge B)$" äquivalent zu „$\neg A \vee \neg B$" und „$\neg(A \vee B)$" zu „$\neg A \wedge \neg B$".

Aufgabe 2

Sei $z \in \mathbb{Z}$. Welche der folgenden Aussagen ist/sind wahr? Schreiben Sie die Aussagen zunächst mit Hilfe von „$\Rightarrow$", „$\Leftarrow$" oder „$\Leftrightarrow$".

(a) Es gilt genau dann $z^2 \geq 0$, wenn $z \geq 0$ ist.
In Symbolen: $z^2 \geq 0 \Leftrightarrow z \geq 0$ (falsch)

(b) Eine hinreichende Bedingung dafür, dass z durch 2 ohne Rest teilbar ist, ist die Teilbarkeit von z durch 4 ohne Rest.
In Symbolen: z durch 2 ohne Rest teilbar $\Leftarrow$ z durch 4 ohne Rest teilbar (wahr)

(c) Eine notwendige Bedingung dafür, dass z durch 2 ohne Rest teilbar ist, ist die Teilbarkeit von z durch 4 ohne Rest.
In Symbolen: z durch 2 ohne Rest teilbar $\Rightarrow$ z durch 4 ohne Rest teilbar (falsch)

Aufgabe 3

Welche der nachfolgenden Aussagen sind äquivalent zu der Aussage: „Wenn das Wetter schön ist, dann kommt Maxi Musterfrau mit dem Fahrrad an die Hochschule."
(Hinweis: Schreiben Sie die Aussagen zunächst mit Hilfe von „$\Rightarrow$", „$\Leftarrow$" oder „$\Leftrightarrow$".)

(a) Wenn das Wetter nicht schön ist, dann kommt Maxi Musterfrau nicht mit dem Fahrrad an die Hochschule.

(b) Wenn das Wetter nicht schön ist, dann kommt Maxi Musterfrau mit dem Fahrrad an die Hochschule.

(c) Das Wetter ist nicht schön oder Maxi Musterfrau ist mit dem Fahrrad an der Hochschule.

(d) Wenn Maxi Musterfrau ohne Fahrrad an der Hochschule ist, dann ist das Wetter nicht schön.

Die Aussage ist nur zu (c) und zu (d) äquivalent.

Aufgabe 4

Beweisen Sie, durch direkten Beweis, den Satz $A(n) \Rightarrow B(n) \forall n$ für die Aussagen:

- $A(n)$: n ist ungerade
- $B(n)$: n^2 ist ungerade

Hinweise: Sie müssen die Wahrheit von $A \Rightarrow B$ für alle n zeigen so in der letzten Vorlesung besprochen. Benutzen Sie dafür die Wahrheitstabelle des Operators $\Rightarrow$. Eventuell sind nicht alle Zeilen der Tabelle zu zeigen, begründen Sie dies!

Lösung: Es genügt zu zeigen, dass $A(n)$ und $B(n)$ stets gleichzeitig wahr sind, und der Fall $A(n) = w$, $B(n) = f$ nicht vorkommen kann. Dazu setzen wir $n = 2k + 1$ mit $l \in \mathbb{N}$. Ausssage $A(n)$ ist somit erfüllt. Daraus berechnen wir $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, woraus folgt dass n^2 ungerade ist. Somit ist $B(n)$ auch stets erfüllt wenn $A(n)$ erfüllt ist und der Fall $A(n) = w$, $B(n) = f$ kann nicht vorkommen. Die Zeilen der Wahrheitstabelle, in den A falsch ist müssen nicht betrachtet werden da $A \Rightarrow B$ in diesem Fall sowieso immer wahr ist, unabhängig von B.

Aufgabe 5

Beweisen Sie den Satz aus der letzten Aufgabe durch Widerspruchsbeweis!

Lösung: Wir wollen zeigen dass $\neg(A(n) \Rightarrow B(n)) = f \forall n$. Dies kann man umformulieren als $\neg(A(n) \Rightarrow B(n)) = \neg(\neg(A \wedge \neg B)) = A \wedge \neg B$. Wir müssen also zeigen, dass $(A(n) \wedge \neg B(n)) = f \forall n$. Wiederum ist es nicht nötig, dies für $A(n) = f$ zu zeigen da die Aussage dann sowieso falsch ist (Wahrheitstafel erstellen!). Wir nehmen also $A(n) = w$ an: $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. Damit gilt $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ und somit N ungerade, daher auch $B(n) = w$, die Aussage $\neg(A(n) \Rightarrow B(n))$ ist somit falsch falls $A(n) = w$. Andere Möglichkeiten gibt es nicht, da $A(n) = w$ stets bedeutet dass $B(n) = w$ und somit ist der Wahrheitswert von $\neg(A(n) \Rightarrow B(n))$ stets falsch. Damit ist der Satz $A(n) \rightarrow B(n) \forall n$ gezeigt.

Aufgabe 6

Vereinfachen Sie die folgenden logischen Ausdrücke:

- $A \vee (\neg A \wedge B)$
- $\neg(A \wedge B) \vee \neg(\neg A \vee B)$ (aus der digitalen Schaltungstechnik!)

Lösung:

- $A \vee (\neg A \wedge B)$ =(Distributivgesetz)= $(A \vee \neg A) \wedge (A \vee B)$ = (Boolesche Algebra Nr. 5)= $t \vee \neg A = \neg A$
- $\neg(A \wedge B) \vee \neg(\neg A \vee B)$ = (De Morgan)=$(\neg A \vee \neg B) \vee (A \wedge \neg B)$ =(Ausklammern)= $\neg A \vee (\neg B \wedge (t \wedge A)) = \neg A \vee \neg B = \neg(A \wedge B)$