Nullfolgen

Bemerkung

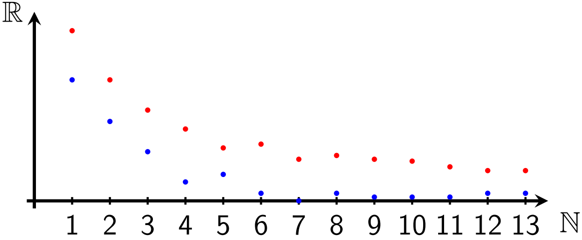
Die Folge (x_n) ist genau dann eine Nullfolge, wenn $(|x_n|)$ eine Nullfolge ist.

Monotonie des Grenzwertes

Satz

Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen, und gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $x_n \leq y_n$ für alle $n \geq N$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$



Achtung: Aus $x_n < y_n$ für alle $n \geq N$ folgt i. A. *nicht*

$$\lim_{n\to\infty} x_n < \lim_{n\to\infty} y_n!$$

Sandwichtheorem, Einschnürungssatz

Satz

Seien (x_n) und (y_n) konvergente Folgen mit
$x := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. Sei die Folge (z_n) so, dass

$$x_n \leq z_n \leq y_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert auch die Folge (z_n) und $\lim_{n\to\infty} z_n = x$.

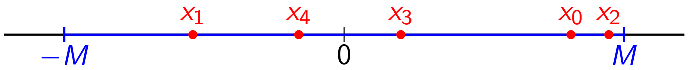
Beispiele

- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, k \in \mathbb{N}, k \geq 1$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, für $a > 0$

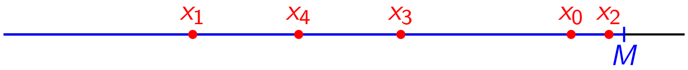
Beschränktheit

Eine Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ heißt

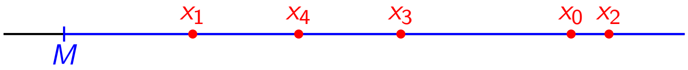
- beschränkt, falls es ein $M > 0$ gibt, so dass $|x_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.



- nach oben beschränkt, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.



- nach unten beschränkt, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x_n \geq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.



Zusammenhang Konvergenz und Beschränktheit

Beobachtung (ohne Beweis)

- Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- Die Umkehrung dieser Aussage gilt i. A. nicht!
  Beispiel: $((-1)^n)$ ist eine beschränkte Folge, welche nicht konvergent ist.

„beschränkte Folge mal Nullfolge ist Nullfolge“

Satz

Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist die Produktfolge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Nullfolge.

Kurz:

$$\boxed{(x_n) \text{ beschränkt}, (y_n) \text{ Nullfolge} \quad \Rightarrow \quad (x_n \cdot y_n) \text{ Nullfolge.}}$$

Monotone Folgen

Definition

- Eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt (streng) monoton wachsend, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} > x_n$).
- Eine Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt (streng) monoton fallend, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_{n+1} \leq x_n$ ($x_{n+1} < x_n$).

Konvergenzkriterium für monotone Folgen

Satz

Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Bemerkung

Nicht jede konvergente Folge ist monoton!

Beispiel: Eulerfolge

Sei $x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Man kann für die Eulerfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ zeigen:

1. Es ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ monoton wachsend.
2. Es ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ beschränkt mit $x_n \geq x_1 = 2$ und $x_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Nach dem Konvergenzkriterium für beschränkte, monotone Folgen konvergiert also die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ihr Grenzwert wird mit e bezeichnet (eulersche Zahl). Dieser liegt nach dem Satz über die Monotonie des Grenzwertes in dem abgeschlossenen Intervall $[2,3]$:

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in [2,3].$$

Es ist

$$e \approx 2.712818\ldots \ .$$

Beispiel: Wurzelfolge

$$x_0 := 1,\ x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), n \in \mathbb{N}$$

Beobachtung:

- $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \geq \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (folgt mit vollst. Ind.), also $(x_n)_{n\geq 1}$ nach unten durch $\sqrt{2}$ beschränkt.
- $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} - x_n = \dfrac{1}{2x_n}\underbrace{(2 - \underbrace{x_n^2}_{\geq 2})}_{\leq 0} \leq 0$ für $n \geq 1$

  also $(x_n)_{n\geq 1}$ monoton fallend.

Fazit: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen ein $x \geq \sqrt{2}$.
Wegen $\underbrace{x_{n+1}}_{\to x} = \frac{1}{2}(\underbrace{x_n}_{\to x} + \underbrace{\frac{2}{x_n}}_{\to 2/x})$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.