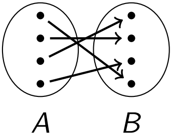
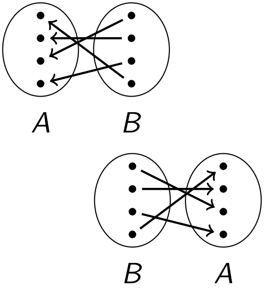
Umkehrfunktion

f



f^{-1}



Ist f bijektiv, so besitzt f eine Umkehrfunktion oder Inverse

$$f^{-1} : B \to A,$$

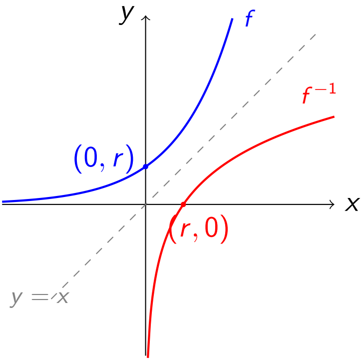
wobei $f^{-1}(y) = x$ genau dann, wenn $f(x) = y$.

Graph der Umkehrfunktion

Ist f bijektiv, so besitzt f eine Umkehrfunktion oder Inverse

$$f^{-1} : B \to A,$$

wobei $f^{-1}(y) = x$ genau dann, wenn $f(x) = y$.



Bemerkung

Zeichnerisch erhält man den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} durch Spiegelung des Graphen von f an der 1. Winkelhalbierenden.

Komposition

Definition

Sind $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Funktionen mit $f(A) \subseteq C$, so ist

$$g \circ f : A \to D, \quad x \mapsto g(f(x))$$

die Komposition oder Verkettung von g und f.

Beispiel

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2, \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3,$
$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^3 = (x^2)^3 = x^6$

Bemerkung

Mit id_X bezeichnen wir die Identität auf X: $\quad \mathrm{id}_X : X \to X, x \mapsto x.$

Ist $f : A \to B$ bijektiv, so ist

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B.$$

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2024/2025

KAPITEL III: Relationen und Abbildungen

3. Abzählbar – überabzählbar

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl (Vertretung: Prof. Dr. A. Gepperth)

Email: `alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de`

Abzählbar und überabzählbar

Definition

Eine Menge M heißt abzählbar, falls $M = \emptyset$ oder falls es eine surjektive Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to M$$

gibt, (also $f(\mathbb{N}) = M$).

Ansonsten heißt M überabzählbar.

Bemerkung

Mit dieser Definition sind endliche Mengen abzählbar. (Manche Autor*innen unterscheiden nicht nur

- „abzählbar“– „überabzählbar“,

sondern

- „endlich“– „abzählbar“– „überabzählbar“.)

Beispiele

Abzählbare Mengen sind zum Beispiel:

- $\mathbb{N}$,
- $\mathbb{Z}$,
- $\mathbb{Q}$,
- $\bigcup_{n=0}^{\infty} M_n$, wobei M_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ abzählbar.

Überabzählbare Mengen sind zum Beispiel:

- $(0, 1)$,
- $\mathbb{R}$,
- $\mathbb{P}(\mathbb{N})$.

Bemerkung

Sind M und N Mengen, zwischen denen es eine bijektive Abbildung gibt, so besitzen sie dieselbe Kardinalität. Wir schreiben dann $|M| = |N|$.

Beispiel

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$,
- $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$,
- $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$.