Hochschule Fulda
Fachbereich Angewandte Informatik
Prof. Dr. A. Radl

Wintersemester 2024/2025
Mathematische Grundlagen – AI1004
Besprechung: 16.12.–20.12.2024

Übungsblatt 8

(Folgen, bestimmte Divergenz, geometrische Reihe)

Aufgabe 1

Finden Sie jeweils Folgen $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ und $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, so dass nachfolgende Eigenschaften erfüllt sind:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \infty$.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = -\infty$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = c$, wobei c eine beliebig vorgegebene reelle Zahl ist.

(d) Die Folge $(x_n y_n)$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Aufgabe 2

Berechnen Sie die (eventuell uneigentlichen) Grenzwerte der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}$ sofern vorhanden, falls

(a) $x_n = 1 - \left(\frac{-1}{5}\right)^n$, (b) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{n}{2n+1}$, (c) $x_n = (-1)^n \frac{n}{2n+1}$

(d) $x_n = \frac{n^2 - 2n^4 - 2}{2n^3 + n^2}$, (e) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n-1}$, (f) $x_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$.

Hinweis zu (f): Bernoullische Ungleichung und Sandwichtheorem.

Aufgabe 3

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot \frac{1}{10^k}.$$

Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren jeweils die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-1}{7}\right)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\frac{x-1}{7}\right)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{x-1}{7}\right)^k.$$

Aufgabe 4

Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 2, \quad a_{n+1} := \frac{2a_n}{2 + a_n}, \quad n \geq 0.$$

Zeigen Sie zunächst mit vollständiger Induktion, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Überlegen Sie dann, ob die Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 5 (Wenn noch Zeit ist ...)

Betrachten Sie die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq \mathbb{R}$, wobei

(a) $x_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n}+1}$, (b) $x_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$,

(c) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (d) $x_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} ((k+1)^2 - k^2)$.

Bestimmen Sie die (eventuell uneigentlichen) Grenzwerte der Folgen (x_n), sofern vorhanden.

Aufgabe 6 (Wenn noch Zeit ist ...)

(a) Zeigen Sie: Ist $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte Folge und $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullfolge, das heißt, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, dann ist die Folge $(x_n y_n) \subseteq \mathbb{R}$ ebenfalls eine Nullfolge.

(b) Zeigen Sie: Divergiert die Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bestimmt gegen ∞, so konvergiert die Folge $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ gegen 0.