

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2024/2025

KAPITEL II: Zahlbereiche

1. Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl (Vertretung: Prof. Dr. A. Gepperth)

Email: `alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de`

Peano¹-Axiome

Peano-Axiome zur Charakterisierung der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$:

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl besitzt genau einen Nachfolger.
3. Es gibt keine natürliche Zahl mit dem Nachfolger 0.
4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
5. \mathbb{N} selbst ist die einzige Teilmenge von \mathbb{N} , die die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n' enthält.

¹Giuseppe Peano (1858–1932), italienischer Mathematiker

Problem

Sei $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage.

Frage

Wie zeigt man, dass $A(n)$ für *jedes* $n \in \mathbb{N}$ wahr ist?

Idee:

Dazu genügt es, folgende zwei Aussagen zu zeigen:

- ▶ $A(0)$ ist wahr. (Induktionsanfang (IA))
- ▶ Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr. (Induktionsschritt (IS))

Dies ist das Beweisprinzip der **vollständigen Induktion**.

Bemerkung

Dies funktioniert auch, wenn man $A(n)$ für alle $n \geq m$, ($m \in \mathbb{N}$), zeigen möchte - beim Induktionsanfang ist dann $A(m)$ zu zeigen.

Beispiel: Gaußsche² Summenformel

Satz

Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

²Carl Friedrich Gauß (1777–1855), deutscher Mathematiker

Beispiel: Geometrische Summenformel

Satz

Sei $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Beispiel: Binomischer Lehrsatz

Satz

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$