Digitaltechnik & Rechnersysteme

KV-Minimierung

Martin Kumm

HOCHSCHULE FULDA
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

WiSe 2025/2026

Was bisher geschah...

Angewandte Informatik

- Symbolische Darstellung durch Gatter-Symbole
- Boolesche Gesetze

Gesetze der Booleschen Algebra

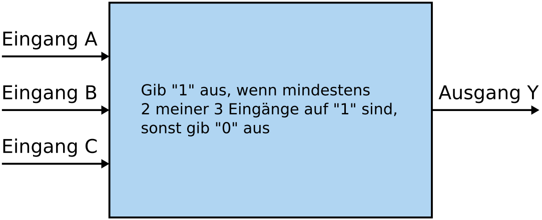
Angewandte Informatik

	Disjunktives Gesetz	Konjunktives Gesetz
Identität	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Eins/Null	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
Idempotenz	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Involution	$\overline{\overline{x}} = x$	
Komplement	$x + \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$
Kommutativität	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	$(x+y)+z = x+(y+z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Distributivität	$x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$	$(x + y) \cdot (x + z) = x + y \cdot z$
De Morgan	$\overline{(x + y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$	$\overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$
De Morgan (gen.)	$\overline{(x_1 + \ldots + x_n)} = \overline{x_1} \cdot \ldots \cdot \overline{x_n}$	$\overline{(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n)} = \overline{x_1} + \ldots + \overline{x_n}$
Absorption 1	$x + x \cdot y = x$	$x \cdot (x + y) = x$
Absorption 2	$x + \overline{x} \cdot y = x + y$	$x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$
Konsensus	$xy + \overline{x}z + yz = xy + \overline{x}z$	$(x + y)(\overline{x} + z)(y + z) = (x + y)(\overline{x} + z)$

Rückblick: Schaltfunktion aus Tabelle

Angewandte Informatik

Beispiel



A	B	C	Y	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$\overline{A}BC$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$A\overline{B}C$
1	1	0	1	$AB\overline{C}$
1	1	1	1	ABC

KDNF (Minterme ODER verknüpft):

$$\Rightarrow Y = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

Beispiel: Vereinfachung Schaltfunktion

Angewandte Informatik

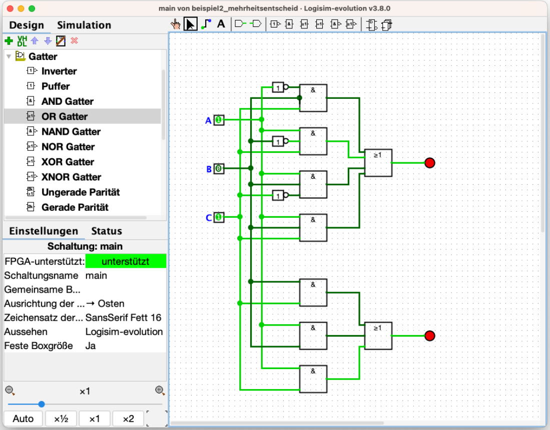
Vereinfachung mit Hilfe der Booleschen Algebra:

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{A}\,BC + A\overline{B}\,C + AB\overline{C} + ABC \\
&= (\overline{A} + A)BC + A\overline{B}\,C + AB\overline{C} \\
&= BC + A\overline{B}\,C + AB\overline{C} \\
&= (B + A\overline{B}\,)C + AB\overline{C} \\
&= (B + A)C + AB\overline{C} \\
&= BC + AC + AB\overline{C} \\
&= B(C + A\overline{C}\,) + AC \\
&= B(C + A) + AC \\
&= BC + AB + AC
\end{aligned}
$$

A	B	C	Y	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	BC
1	0	0	0	
1	0	1	1	AC
1	1	0	1	AB
1	1	1	1 1 1	BC, AB, AC

Überprüfung durch Simulation

Angewandte Informatik



Logiksimulation des vereinfachten Schaltnetzes mit *LogiSim evolution*

https://github.com/logisim-evolution/logisim-evolution

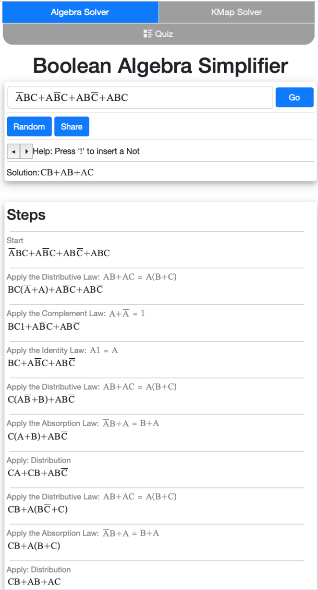
Übungsmaterial Boolesche Algebra

Unter

`www.boolean-algebra.com`

finden Sie ein Werkzeug zum Lösen Boolescher Ausdrücke

Mit nachvollziehbarem Lösungsweg, Wahrheitstabelle, KV-Diagramm!



Inhalte

Nicht-UND-Operator / NAND

Funktionsweise: Das Ergebnis des Nicht-UND-Operators ist genau dann 0 wenn alle Eingänge 1 sind, ansonsten ist das Ergebnis 1.

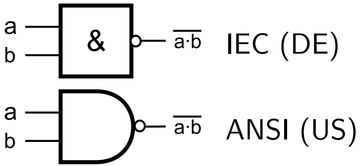
Die Schaltungsrealisierung wird als Nicht-UND-Gatter oder NAND-Gate bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = \overline{a \cdot b}$ (alt. $y = \overline{a \wedge b}$)

Wahrheitstabelle:

a	b	$\overline{a \cdot b}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Schaltsymbole:



Nicht-ODER-Operator / NOR

Funktionsweise: Das Ergebnis des Nicht-ODER-Operators ist genau dann 0 wenn mindestens ein Eingang 1 ist, ansonsten ist das Ergebnis 1.

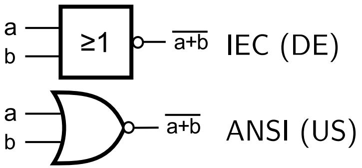
Die Schaltungsrealisierung wird als Nicht-ODER-Gatter oder NOR-Gate bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = \overline{a + b}$ (alt. $y = \overline{a \vee b}$)

Wahrheitstabelle:

a	b	$\overline{a+b}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Schaltsymbole:



Exklusiv-ODER (XOR) / Kontravalenz

Funktionsweise: Das Ergebnis des Exklusiv-ODER-Operators ist genau dann 1 wenn eine ungeradzahlige Anzahl an Eingängen 1 ist.

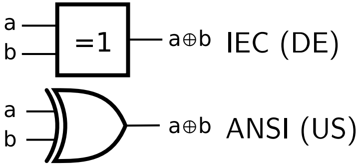
Die Schaltungsrealisierung wird als Exklusiv-ODER-Gatter oder Exclusive-OR-Gate, kurz XOR-Gate bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = a \oplus b = a\overline{b} + \overline{a}\,b$

Wahrheitstabelle:

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Schaltsymbole:



XOR-Rechenregeln

Identität, 1/0-Element

$$x \oplus 0 = x \quad x \oplus 1 = \overline{x}$$

$$x \oplus x = 0$$

Kommutativität (Vertauschung)

$$x \oplus y = y \oplus x$$

Assoziativität (Verbindung)

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$$

Distributivität (Verteilung)

$$x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus x \cdot z$$

Äquivalenz

Angewandte Informatik

Funktionsweise: Das Ergebnis des Äquivalenz-Operators ist genau dann 1 wenn alle Eingänge gleich sind.

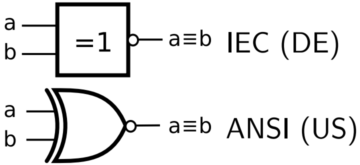
Die Äquivalenz entspricht dem negierten XOR-Operator.
Die Schaltungsrealisierung wird als Exklusiv-Nicht-ODER-Gatter oder Exclusive-NOR-Gate, kurz XNOR-Gate bezeichnet.

Boolescher Ausdruck: $y = a \equiv b = \overline{a \oplus b} = \overline{a}\,\overline{b} + ab$

Wahrheitstabelle:

a	b	$a \equiv b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Schaltsymbole:



Umrechnung in Normalformen

Umsetzung allgemeiner Formen in kanonische Normalformen

Erweiterung bei Konjunktionen: $x + \overline{x} = 1$
Erweiterung bei Disjunktionen: $x \cdot \overline{x} = 0$

Beispiel (zu Konjunktionen):

$$y = \overline{a} + bc \qquad \leftarrow \text{Erweitern mit den fehlenden Variablen}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
y &= \overline{a} \cdot (b + \overline{b}) \cdot (c + \overline{c}) + (a + \overline{a}) \cdot bc \\
&= (\overline{a}b + \overline{a}\overline{b}) \cdot (c + \overline{c}) + abc + \overline{a}bc \\
&= \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + abc + \overline{a}bc \qquad \leftarrow \text{identisch} \\
&= \overline{a}bc + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + abc \qquad \leftarrow \text{KDNF}
\end{aligned}$$

Vorlesungsaufgabe

Angewandte Informatik

Ermitteln Sie **kanonische** DNF für die folgenden Funktionen:

$$f(a, b, c) = bc + ab\overline{c}$$
$$g(a, b, c) = ab + \overline{a}\,bc$$

NAND/NOR Umformung

Angewandte Informatik

Eine wichtige Art der Realisierung ist die Darstellung über NAND und NOR Verknüpfungen, da diese funktional vollständige Systeme bilden und häufig die einfachste Art der Verknüpfung darstellen.

Gegeben ist y in DNF (OR/AND Form)

$$y = abc + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c$$

Gesucht: NAND/NAND Form

Nach doppelter Negation und Auflösung der inneren Negation:

$$y = \overline{\overline{abc + \bar{a}b\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c}} = \overline{\overline{abc} \cdot \overline{\bar{a}b\bar{c}} \cdot \overline{\bar{a}\bar{b}c}}$$

Analog lässt sich die NOR/NOR Form aus der KNF bestimmen.

Minimierung in Wahrheitstabellen

Minimierung in Wahrheitstabellen oft schwer zu erkennen:

x_1	x_0	$f_1(x_1, x_0)$
0	0	0
0	1	0
1	0	$1 \leftarrow x_1\overline{x_0}$
1	1	$1 \leftarrow x_1 x_0$

x_1	x_0	$f_2(x_1, x_0)$
0	0	0
0	1	$1 \leftarrow \overline{x_1}\, x_0$
1	0	0
1	1	$1 \leftarrow x_1 x_0$

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_0) &= x_1\overline{x_0} + x_1 x_0 \\ &= x_1(\overline{x_0} + x_0) = x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2(x_1, x_0) &= \overline{x_1}\, x_0 + x_1 x_0 \\ &= x_0(\overline{x_1} + x_1) = x_0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Keine Abhängigkeit von x_0

$\Rightarrow$ Keine Abhängigkeit von x_1

KV-Diagramme

Angewandte Informatik

Lösung: x_0 gegen x_1 in Zeilen/Spalten auftragen:

x_1	x_0	$f_1(x_1, x_0)$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

x_1	x_0	$f_2(x_1, x_0)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

f_1

		$x_0 = 1$
	0	0
$x_1 = 1$	1	1

f_2

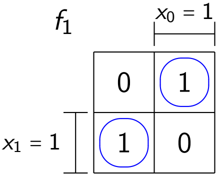
		$x_0 = 1$
	0	1
$x_1 = 1$	0	1

$\Rightarrow$ Horizontal/vertikal benachbarte 1en lassen sich zusammenfassen!

Minimierung in KV-Diagrammen

Angewandte Informatik

x_1	x_0	$f_3(x_1, x_0)$
0	0	0
0	1	$1 \leftarrow \overline{x_1}\, x_0$
1	0	$1 \leftarrow x_1 \overline{x_0}$
1	1	0



$\Rightarrow$ Keine horizontal/vertikal benachbarten 1en
$\Rightarrow$ Keine Zusammenfassung möglich!

KV-Diagramme

Diagrammdarstellung

Ausgehend von der disjunktiven Normalform wurden von E. W. Veitch (1952) und M. Karnaugh (1953) Diagramme zur graphischen Darstellung eingeführt. Sie dienen zur Vereinfachung und Systematisierung von Schaltfunktionen.

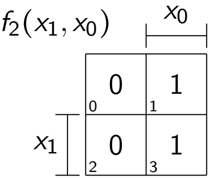
Die Diagramme werden als **KV-Diagramme** (manchmal auch Veitch-Diagramm) bezeichnet.

Die Darstellung erfolgt als zweidimensionale Anordnung von Feldern, sodass jedes Feld genau einer Kombination der Variablen entspricht, und benachbarte Felder sich in genau einer Variablen unterscheiden.

KV-Diagramme mit Index

Der Zeilenindex (=Binärdarstellung der Argument-Variablen) lässt sich im KV-Diagramm darstellen:

Index	x_1	x_0	$f_2(x_1, x_0)$
0	0	0	0
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	1	1



Dies macht ein einfaches Übertragen möglich.

KV-Minimierung mit *n* Variablen

Angewandte Informatik

Eine Funktion mit 2 Variablen ist 2-Dimensional und lässt sich auf der Ebene zeichnen.

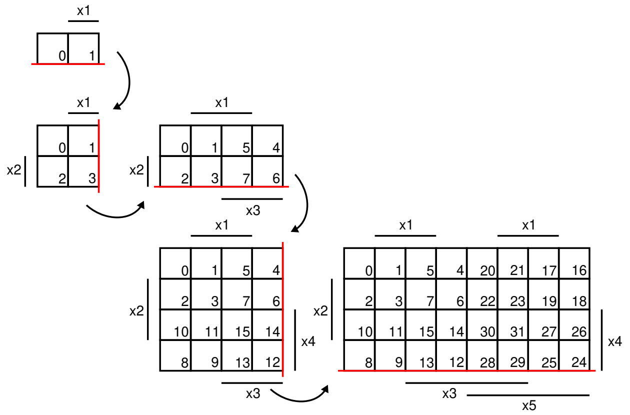
🤔 Wie funktioniert das für Funktionen mit *n* Variablen?

Jede Dimension kennt nur zwei Werte: »0« oder »1«.

🙂 Lösung: Projektion auf 2 Dimensionen durch Verdoppeln des Diagramms mit jeder Variable möglich!

KV: Systematischer Aufbau

Konstruktion größerer Diagramme (mehr Variablen) durch Spiegelung (Symmetriediagramm)



Vorlesungsaufgabe

a	b	c	$f(a,b,c,d)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Tragen Sie die Funktion in das KV-Diagramm ein.

$f(a,b,c)$