Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2025/2026

KAPITEL V: Folgen und Reihen

4. Bestimmte Divergenz

Dozentin: Prof. Dr. Alexander Gepperth

Email: `alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de`

Bestimmte Divergenz

Definition

Eine reelle Zahlenfolge (x_n) heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn es zu jedem $M > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $x_n > M$ (bzw. $x_n < -M$).

Notation:

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$) oder
$x_n \to +\infty, n \to \infty$ (bzw. $x_n \to -\infty, n \to \infty$).

Bemerkung

- Statt „$+\infty$“ schreibt man oft nur „∞“.
- „Bestimmte Divergenz“ wird oft auch als „uneigentliche Konvergenz“ bezeichnet.
- Eine Folge, die divergiert, aber nicht bestimmt divergiert, heißt unbestimmt divergent.

Beispiele

- $x_n := n, n \in \mathbb{N}: \quad \lim_{n\to\infty} x_n = \infty;$
- $x_n := -n, n \in \mathbb{N}: \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty;$
- $f_n :=$ n-te Fibonacci-Zahl, $n \in \mathbb{N}: \quad \lim_{n\to\infty} f_n = \infty;$
- $x_n := (-1)^n, n \in \mathbb{N}: \quad (x_n)$ ist unbestimmt divergent;
- $(x_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots): \quad (x_n)$ ist unbestimmt divergent;

Rechenregeln zu bestimmter Divergenz – Teil 1

Seien (x_n) und (y_n) reelle Zahlenfolgen, so dass $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} y_n =: y \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

- $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \infty$.
- $\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \infty$, falls $y > 0$.
- $\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = -\infty$, falls $y < 0$.

Rechenregeln zu bestimmter Divergenz – Teil 2

Satz

Seien (x_n) und (y_n) reelle Zahlenfolgen, so dass

$$x_n \leq y_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.
- Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, dann gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Rechenregeln zu bestimmter Divergenz – Teil 3

Sei (x_n) eine reelle Zahlenfolgen.

- Ist $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ und ist $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$
- Ist $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $x_n > 0$ (bzw. $x_n < 0$) für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty \quad (\text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty).$$

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2025/2026

KAPITEL V: Folgen und Reihen

5. Geometrische Folge und geometrische Reihe

Dozentin: Prof. Dr. Alexander Gepperth

Email: `alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de`

Beispiel: Geometrische Folge

Sei $x_n := q^n$ für $n \in \mathbb{N}$, mit $q \in \mathbb{R}$ fest.

1. $q > 1$: Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.
2. $q = 1$: Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.
3. $q \in (0, 1)$: Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
4. $q = 0$: Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
5. $q \in (-1, 0)$: Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
6. $q = -1$: Dann ist $q^n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (alternierende Folge), also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, aber unbestimmt divergent.
7. $q < -1$: Dann ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbestimmt divergent.

Beispiel: Geometrische Reihe

Als geometrische Reihe bezeichnet man eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} q^k \quad \text{für ein } q \in \mathbb{R}.$$

Nach der geometrischen Summenformel (siehe Kapitel II.1) ist

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad \text{falls } q \neq 1.$$

Konvergenz der geometrischen Reihe

- Für $|q| < 1$ konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und es ist

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

- Für $q \geq 1$ divergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen ∞, also

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

- Für $q \leq -1$ divergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbestimmt.

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2025/2026

KAPITEL V: Folgen und Reihen

6. (Uneigentliche) Grenzwerte wichtiger Folgen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Alexander Gepperth

Email: alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de

(Uneigentliche) Grenzwerte wichtiger Folgen

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$ für jedes $k \in \mathbb{N}^*$;

2. geometrische Folge: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{falls } q > 1, \\ 1 & \text{falls } q = 1, \\ 0 & \text{falls } |q| < 1; \end{cases}$

   für $q \leq -1$ ist die geometrische Folge unbestimmt divergent;

3. geometrische Reihe: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q}$, falls $|q| < 1$;

   für $|q| \geq 1$ divergiert die geometrische Reihe;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ für jedes $a > 0$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

6. Eulerfolge: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2025/2026

KAPITEL V: Folgen und Reihen

7. Reihen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Alexander Gepperth

Email: `alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de`

Beispiele

1) Medikamentenabbau
   - Ein Patient bekommt alle 24 Stunden eine bestimmte Dosis d eines Medikaments verabreicht.
   - Der Patient scheidet innerhalb von 24 Stunden 30 % des im Körper befindlichen Medikaments aus.

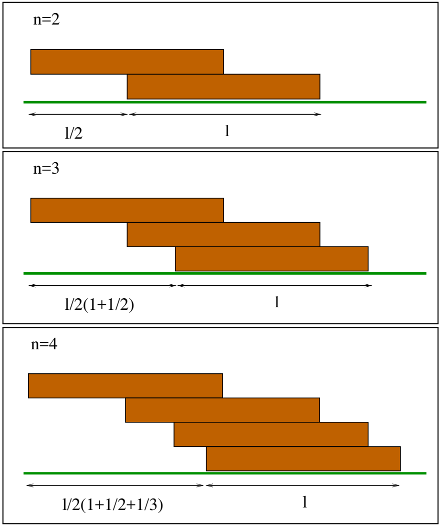
   Frage: Wie viel des Medikaments befindet sich nach n Tagen im Körper?

vergangene Tage	0	1	2
Medikamentenmenge	d	$d + 0,7d$	$d + 0,7d + (0,7)^2 d$

3	$\cdots$	n
$d + 0,7d + (0,7)^2 d + (0,7)^3 d$	$\cdots$	$d \sum_{k=0}^{n} (0,7)^k$

Beispiele

2) Bretter stapeln
   - n Bretter (gleicher Bauart) der Länge l sollen mit möglichst großem „Überhang“ gestapelt werden.



Beispiele

2) Bretter stapeln
   - n Bretter (gleicher Bauart) der Länge l sollen mit möglichst großem „Überhang“ gestapelt werden.

Anzahl Bretter	2	3	4	$\cdots$	n
Überhang	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$	$\frac{l}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$	$\cdots$	$\frac{l}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$

Frage

Kann man beliebig große Überhänge erzeugen, sofern genügend Bretter zur Verfügung stehen?

Definition

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $a_k \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$x_n := \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

- Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt (unendliche) Reihe.
- x_n ist die n-te Partialsumme.

Andere Notation für (x_n): $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Falls (x_n) konvergiert, dann bezeichnet $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *auch* den Grenzwert der Folge (x_n), also

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Sprechweise: „Die Reihe konvergiert.“

Definition (Fortsetzung)

- Die Reihe divergiert, falls sie nicht konvergiert.
- $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

Bemerkung

Entsprechend bezeichnet $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ für $m \in \mathbb{N}$ die Folge

$$(a_m, a_m + a_{m+1}, a_m + a_{m+1} + a_{m+2}, \ldots)$$

bzw. deren Grenzwert.

Wichtige Reihen

1) Geometrische Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, wobei $q \in \mathbb{R}$.

Erinnerung

Es ist

$$\boxed{x_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}} \quad \text{falls } q \neq 1.$$

Die Folge (x_n) konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist. Es ist dann

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1 - \lim_{n\to\infty} q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q}.}$$

Wichtige Reihen

2) Harmonische Reihe: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Definiere $x_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Dann gilt für $l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
x_{2^l} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right)}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{5} + \ldots + \tfrac{1}{8}\right)}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}} + \ldots + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2^{l-1}+1} + \ldots + \tfrac{1}{2^l}\right)}_{\geq 2^{l-1}\cdot\frac{1}{2^l}} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} \\
&= 1 + l \cdot \frac{1}{2} \to \infty, \quad l \to \infty.
\end{aligned}$$

Somit ist (x_n) unbeschränkt, und

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{divergiert.}}$$

Rechenregeln für den Umgang mit Reihen

Unmittelbar aus den Rechenregeln für Folgen ergibt sich:

Konvergieren die unendlichen Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, so konvergieren auch die Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k \text{ für jedes } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Es gilt dann

- $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k$,
- $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Rechenregeln für den Umgang mit Reihen

Satz („Cauchy-Produkt“– ohne Beweis)

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *absolut* konvergente Reihen und sei

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut, und es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$