

Übungsblatt 4 – Lösungshinweise

(vollständige Induktion, Zahlbereiche)

Aufgabe 1

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1.$$

Lösungshinweis

$$A(n) : \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$$

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt $A(n)$.

Beweis:

I.A.: ($n = 1$)

$$\text{Linke Seite: } \prod_{k=1}^1 \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

$$\text{Rechte Seite: } 1 + 1 = 2.$$

Linke und rechte Seite stimmen überein. Also ist $A(1)$ wahr.

I.S.: ($n \rightarrow n + 1$) (Wir zeigen, dass $A(n + 1)$ wahr ist, also

$$\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 2,$$

unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist.)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Angenommen, es gilt

$$\underbrace{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)}_{A(n)} = n + 1. \quad (\text{IV}).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \stackrel{(\text{IV})}{=} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) (n+1) \\ &= n + 1 + 1 = n + 2. \end{aligned}$$

Somit ist $A(n + 1)$ wahr. \square

Aufgabe 2 (Bernoullische Ungleichung)

Sei $x \in [-1, \infty)$. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

gilt. An welcher Stelle haben Sie die Voraussetzung $x \geq -1$ verwendet?

Lösungshinweis

$$A(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$$

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n)$, sofern $x \geq -1$.

Beweis:

I.A.: ($n = 0$)

$$\text{Linke Seite: } (1+x)^0 = 1$$

$$\text{Rechte Seite: } 1+0x = 1$$

$1 \geq 1$ ist wahr, also ist $A(0)$ wahr.

I.S.: ($n \rightarrow n+1$) (Wir zeigen, dass $A(n+1)$ wahr ist, also

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x,$$

unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist.)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, es gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \quad (\text{IV}).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \stackrel{(\text{IV}), (*)}{\geq} (1+x)(1+nx) \\ &= 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x. \end{aligned}$$

Somit ist auch $A(n+1)$ erfüllt. \square

Die Voraussetzung $x \geq -1$ wurde bei der ersten Ungleichung $(*)$ verwendet. Wäre $1+x < 0$, dann würde sich das Ungleichheitszeichen umdrehen.

Aufgabe 3 (Lösungsansätze für Teilaufgaben (b) und (c) werden in der Vorlesung am 18.11.2024 nochmal ausgeführt.)

Schreiben Sie folgende Mengen als Intervalle oder Vereinigung von Intervallen.

$$(a) \ A := \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{9\} : \frac{4}{x-9} \leq 2 \right\}$$

$$(b) \ B := \{ x \in \mathbb{R} : |x+4| \geq 6 \}$$

$$(c) \ C := \{ x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq |x+3| \}$$

Lösungshinweis

(a) Fall 1: $x > 9$

$$\frac{4}{x-9} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \leq 2(x-9) \quad \Leftrightarrow \quad 2 \leq x-9 \quad \Leftrightarrow \quad 11 \leq x.$$

Fall 2: $x < 9$

$$\frac{4}{x-9} \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \geq 2(x-9) \quad \Leftrightarrow \quad 2 \geq x-9 \quad \Leftrightarrow \quad 11 \geq x.$$

Somit erhalten wir

$$A = [11, \infty) \cup (-\infty, 9).$$

(b) Fall 1: $x \geq -4$

$$|x - (-4)| \geq 6 \Leftrightarrow x - (-4) \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Fall 2: $x < -4$

$$|x - (-4)| \geq 6 \Leftrightarrow -4 - x \geq 6 \Leftrightarrow -10 \geq x.$$

Somit erhalten wir

$$B = (-\infty, -10] \cup [2, \infty).$$

(c) Fall 1: $x \geq 2$

$$|x - 2| \geq |x + 3| \Leftrightarrow x - 2 \geq x + 3 \Leftrightarrow -2 \geq 3.$$

Fall 2: $-3 \leq x < 2$

$$|x - 2| \geq |x + 3| \Leftrightarrow 2 - x \geq x + 3 \Leftrightarrow -1 \geq 2x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \geq x$$

Fall 3: $x < -3$

$$|x - 2| \geq |x + 3| \Leftrightarrow 2 - x \geq -x - 3 \Leftrightarrow 2 \geq -3.$$

Somit erhalten wir

$$C = \emptyset \cup \left[-3, -\frac{1}{2}\right] \cup (-\infty, -3) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right].$$

Aufgabe 4

Geben Sie für folgende Teilmengen von \mathbb{R} jeweils - falls vorhanden - das Supremum, das Infimum, das Maximum sowie das Minimum an:

(a) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ und } x^2 \leq 4\},$

(b) $M_2 := \{\frac{1}{z} : z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\},$

(c) $M_3 := \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^*\},$

(d) $M_4 := \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^*\}.$

Lösungshinweis

	sup	inf	max	min
M_1	2	0	2	–
M_2	1	–1	1	–1
M_3	2	0	2	–
M_4	1	–1	–	–

Aufgabe 5

Welche Aussagen sind wahr?

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y = x^2$ **wahr**

(b) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : y = x^2$ **falsch**

- (c) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y = x^2$ **wahr**
 (d) $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : y = x^2$ **falsch**
 (e) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : y = x^2$ **falsch**

Aufgabe 6 (Wenn noch Zeit ist ...)

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus

- (i) $\text{ggT}(156, -64)$,
 (ii) $\text{ggT}(-296, -96)$,
 (iii) $\text{ggT}(34, 21)$. Was fällt auf?

- (b) (Erweiterter euklidischer Algorithmus) Finden Sie Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$\text{ggT}(156, -64) = s \cdot 156 + t \cdot (-64).$$

Hinweis: Gehen Sie Ihre Rechenschritte aus Teil (a)(i) in umgekehrter Reihenfolge durch.

Lösungshinweis

- (a) (i) Es ist $\text{ggT}(156, -64) = \text{ggT}(156, 64)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} (1) \quad & 156 = 2 \cdot 64 + 28 \\ (2) \quad & 64 = 2 \cdot 28 + 8 \\ (3) \quad & 28 = 3 \cdot 8 + 4 \\ (4) \quad & 8 = 2 \cdot 4 + 0 \end{aligned}$$

und erhalten $\text{ggT}(156, -64) = 4$.

- (ii) Es ist $\text{ggT}(-296, -96) = \text{ggT}(296, 96)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} 296 &= 3 \cdot 96 + 8 \\ 96 &= 12 \cdot 8 + 0 \end{aligned}$$

und erhalten $\text{ggT}(-296, -96) = 8$.

- (iii) Wir berechnen

$$\begin{aligned} 34 &= 1 \cdot 21 + 13 \\ 21 &= 1 \cdot 13 + 8 \\ 13 &= 1 \cdot 8 + 5 \\ 8 &= 1 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

und erhalten $\text{ggT}(34, 21) = 1$. Es fällt auf, dass die Reste gerade die ersten Fibonacci-Zahlen sind.

- (b) Wir gehen die Rechenschritte aus Teil (a)(i) nun in umgekehrter Reihenfolge durch und erhalten

$$\begin{aligned} 4 &\stackrel{(3)}{=} 28 - 3 \cdot 8 \\ &\stackrel{(2)}{=} 28 - 3 \cdot (64 - 2 \cdot 28) = 7 \cdot 28 - 3 \cdot 64 \\ &\stackrel{(1)}{=} 7 \cdot (156 - 2 \cdot 64) - 3 \cdot 64 = 7 \cdot 156 - 17 \cdot 64 \\ &= 7 \cdot 156 + 17 \cdot (-64). \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (Wenn noch Zeit ist ...)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Desweiteren sei a_k für jedes $k \in \mathbb{N}^*$ eine reelle Zahl. Welche Gleichheiten gelten für jede Wahl von n und a_k ?

$$(i) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^3$$

$$(ii) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{l=3}^{n+2} (l-2)^3$$

$$(iii) \quad \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) = \sum_{k=1}^n a_k^2$$

$$(iv) \quad \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) = \prod_{k=1}^n a_k^2$$

$$(v) \quad 4 \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 4a_k$$

$$(vi) \quad 4 \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n (4a_k)$$

Nur die Gleichheiten in (ii), (iv) und (v) gelten für jede Wahl von n und a_k .