



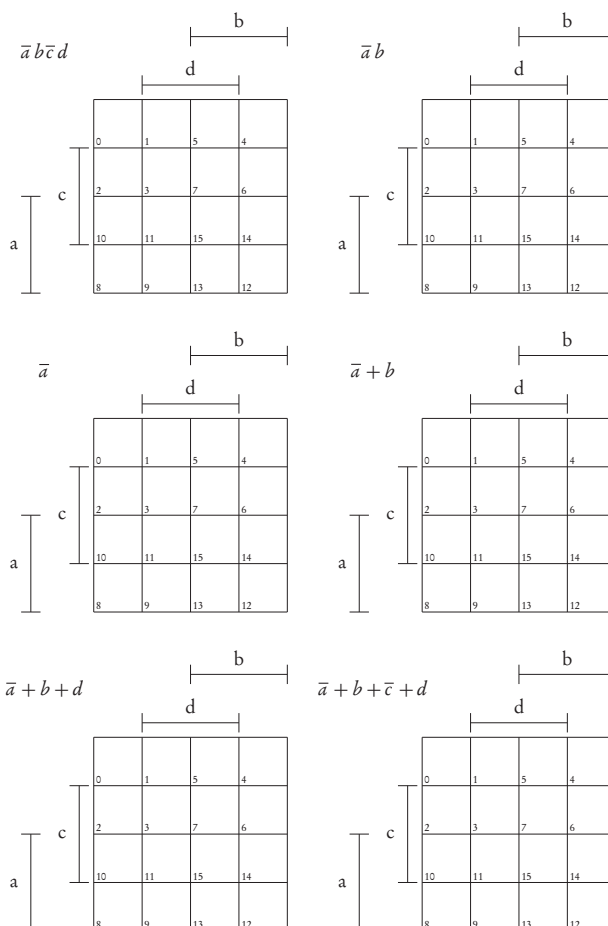
## 6. Übungsblatt - KV-Minimierung I

Digitaltechnik und Rechnersysteme • Wintersemester 2025/2026

### 1 Gruppenübung

#### 1.1 KV-Diagramm

Zeichnen Sie die folgenden Terme in die zugehörigen KV-Diagramme von vier Variablen  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$ :



## 1.2 Synthese einer NAND-Schaltung

Gegeben sei eine boolesche Funktion  $f$  in vier Variablen durch ihre Dezimaläquivalentdarstellung

$$f(a, b, c, d) = \{0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 15\}$$

mit den Wertigkeiten  $a = 2^3$ ,  $b = 2^2$ ,  $c = 2^1$ ,  $d = 2^0$ .

In der Dezimaläquivalentdarstellung werden die '1'-Stellen der Funktion durch die Dezimalzahlen der Eingabe (entsprechend ihrer Wertigkeiten) angegeben. Beispiel: Hat eine Funktion  $g(a, b, c, d)$  eine '1' für  $g(0, 1, 0, 1)$ , so lautet das Dezimaläquivalent für die oben angegebenen Wertigkeiten entsprechend  $0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5_{10}$

Es soll die kostengünstigste NAND-Realisierung entwickelt werden. Gehen Sie dazu nach den Teilaufgaben vor und machen Sie sich klar, warum die Teilschritte notwendig sind.

- Erstellen Sie die Wahrheitstabelle (Wertigkeit:  $a = 2^3$ ,  $b = 2^2$ ,  $c = 2^1$ ,  $d = 2^0$ ).
- Zeichnen Sie das KV-Diagramm der Funktion.
- Bestimmen Sie alle Primimplikanten und deren Typ (KPI, API, oder REPI, siehe Definitionen unten).
- Finden Sie die kostengünstigste DNF mit Hilfe der Primimplikanten.
- Entwickeln Sie aus der DNF die kostengünstigste NAND-Realisierung der Funktion und zeichnen Sie die resultierende Schaltung.

*Definitionen:*

- Als **Primimplikant** werden die größten zusammenhängenden Minterme (oder Maxterme) bezeichnet, die in Gruppen von  $1, 2, 4, \dots, 2^N$  Elementen ( $N \in \mathbb{Z}_0$ ) im KV-Diagramm zusammengefasst werden können.
- Kernprimimplikanten (KPI)** sind Primimplikanten, die Minterme (oder Maxterme) überdecken, die von keinem anderen Primimplikanten überdeckt werden.
- Absolut eliminierbare Primimplikanten (API)** sind Primimplikanten, deren Minterme (oder Maxterme) alle von Kernprimimplikanten überdeckt werden.
- Alle weiteren Primimplikanten sind relativ **eliminierbare Primimplikanten (REPI)**.

*Hinweis:* Um eine Funktion nur mit NAND-Gattern zu realisieren, versuchen Sie die AND/OR-Realisierung durch mittels Involution und dem Satz von De Morgan umzuformen.

## 1.3 Synthese einer minimierten Schaltung

Gegeben sei die Boolesche Funktion  $f(a, b, c, d)$ .

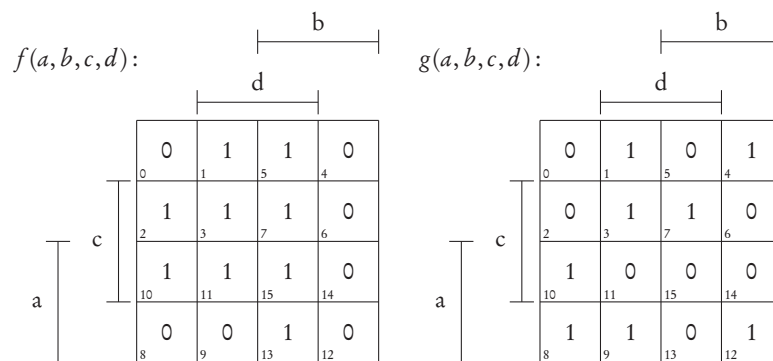
$$f(a, b, c, d) = a\bar{b}\bar{c} + b\bar{c}\bar{d} + acd + a\bar{b}d + \bar{a}bd + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}c\bar{d}$$

- Zeichnen Sie das KV-Diagramm der Funktion (möglichst ohne eine Wahrheitstabelle zu verwenden).
- Bestimmen Sie alle Primimplikanten aus den Mintermen sowie den Maxtermen und geben Sie deren Typ an (Beachten Sie die Definitionen aus Aufgabe 1.2).
- Bestimmen Sie die minimale/kostengünstigste DNF und KNF durch Ablesen aus dem KV-Diagramm.
- Zeichnen Sie die Schaltung der minimalen DNF und KNF als zweistufige AND/OR bzw. OR/AND Realisierung der Funktion.

## 2 Hausübung

### 2.1 Typisierung von Primimplikanten (2 Punkte)

Markieren Sie die Primimplikanten im folgenden KV-Diagramm und geben Sie deren Typ an (KPI: Kernprimimplikant, API: Absolut eliminierbarer Primimplikant, REPI: Relativ eliminierbarer Primimplikant).

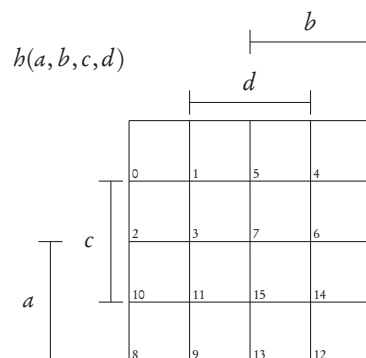


### 2.2 Minimierung mit KV-Diagrammen (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$h(a, b, c, d) = abc + ab\bar{d} + a\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}c$$

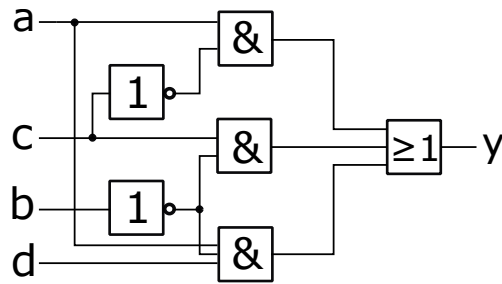
- a) Ermitteln Sie das KV-Diagramm der Funktion  $h(a, b, c, d)$  und markieren Sie alle Primimplikanten. Verwenden Sie die folgende Variablenanordnung im KV-Diagramm:



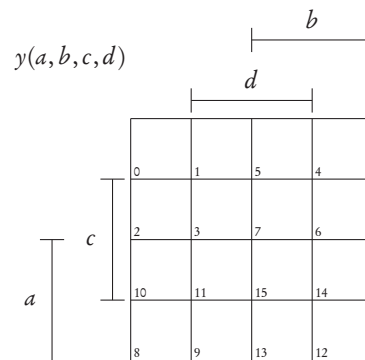
- b) Geben Sie den Typ aller Primimplikanten an (KPI, API, REPI)
- c) Geben Sie die minimierte Funktion als DNF an.

### 2.3 Schaltungsvereinfachung (4 Punkte)

Vereinfachen Sie folgende Schaltung mithilfe eines KV-Diagramms.



Verwenden Sie die folgende Variablenanordnung:



Zeichnen Sie das Schaltbild (auf Gatterebene) der vereinfachten Schaltung.