Angewandte Informatik

Hochschule Fulda
University of Applied Sciences

Prof. Dr.-Ing. Martin Kumm

Musterlösung 5. Gruppenübung

Digitaltechnik und Rechnersysteme • Wintersemester 2025/2026

1.1 Boolesche Algebra II

a)
$$\begin{aligned} f(a,b) &= a+\overline{(a+b)} && \textbf{De Morgan} \\ &= a+\overline{a}\cdot\overline{b} && \textbf{Absorption 1} \\ &= a+\overline{b} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} g(a,b,c) &= a\cdot b\cdot c+a\cdot\overline{b}\cdot c+a\cdot b\cdot\overline{c} && \textbf{Idempotenz} \\ &= a\cdot b\cdot c+a\cdot\overline{b}\cdot c+a\cdot b\cdot c+a\cdot b\cdot\overline{c} && \textbf{Distributivität} \\ &= a\cdot c\cdot(b+\overline{b}) \quad + \quad a\cdot b\cdot(c+\overline{c}) && \textbf{Komplement} \\ &= a\cdot c\cdot 1+a\cdot b\cdot 1 && \textbf{Identität} \\ &= a\cdot c+a\cdot b && \textbf{Distributivität} \\ &= a\cdot(c+b) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} h(x,y) &= \overline{\overline{x+x\cdot y}\cdot(x+\overline{x}\cdot y)} && \textbf{Absorption 1} \\ &= \overline{\overline{x}(x+\overline{x}\cdot y)} && \textbf{Absorption 2} \\ &= \overline{\overline{x}\cdot(x+y)} && \textbf{Distributivität} \\ &= \overline{\overline{x}\cdot x+\overline{x}\cdot y} && \textbf{Komplement} \\ &= \overline{\overline{x}\cdot y} && \textbf{De Morgan} \\ &= x+\overline{y} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} i(a,b,c,d) &= abcd+ab\overline{c}+a\overline{b}+\overline{a} && \textbf{Distributivität} \\ &= a(bcd+b\overline{c}+\overline{b})+\overline{a} && \textbf{Absorption 2} \\ &= a(bcd+\overline{b}+\overline{c})+\overline{a} && \textbf{Absorption 2} \\ &= a(\overline{b}+cd+\overline{c})+\overline{a} && \textbf{Absorption 2} \\ &= a(\overline{b}+\overline{c}+d)+\overline{a} && \textbf{Absorption 2} \\ &= \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+d \end{aligned}$$

1.2 Äquivalenz

$$\begin{aligned} x\equiv y &= xy+\overline{x}\,\overline{y} \\ \overline{x}\,\overline{y}+xy &= \overline{\overline{x}y+x\overline{y}} \\ &= \overline{\overline{x}y}\cdot\overline{x\overline{y}} \\ &= (x+\overline{y})\cdot(\overline{x}+y) \\ &= xy+\overline{x}\,\overline{y} \quad \checkmark \end{aligned}$$

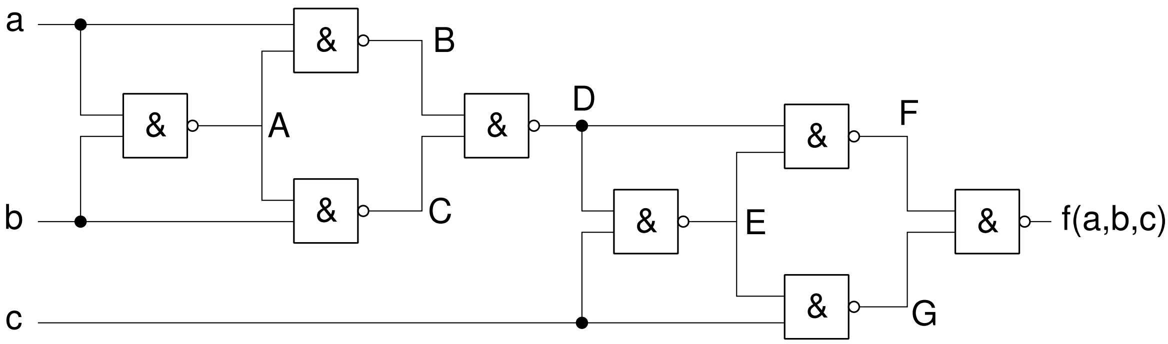
$$
\begin{aligned}
\overline{x} \oplus y &= \overline{\overline{x}}\, y + \overline{x}\,\overline{y} \\
&= xy + \overline{x}\,\overline{y} \quad \surd
\end{aligned}
$$

1.3 Schaltungsanalyse

Bei dieser Schaltung gibt es unterschiedliche Lösungsstrategien, welche im Folgenden dargestellt werden.

Holzhammer-Methode (analytisch):

Wir berechnen die Funktion an jedem Ausgang jedes NAND Gliedes, die in der Abbildung mit Großbuchstaben gekennzeichnet sind.



$$
\begin{aligned}
A &= \overline{a b} = \overline{a} + \overline{b} \\
B &= \overline{a \cdot A} = \overline{a \cdot (\overline{a} + \overline{b})} = \overline{\underbrace{a\overline{a}}_{=0} + a\overline{b}} = \overline{a} + b \\
C &= \overline{b \cdot A} = \overline{b \cdot (\overline{a} + \overline{b})} = \overline{\overline{a}\, b + \underbrace{b\overline{b}}_{=0}} = a + \overline{b} \\
D &= \overline{B \cdot C} = \overline{(\overline{a} + b) \cdot (a + \overline{b})} = \overline{(\overline{a} + b)} + \overline{(a + \overline{b})} = a\overline{b} + \overline{a}\, b = a \oplus b \\
E &= \overline{D \cdot c} = \overline{(a\overline{b} + \overline{a}\, b) c} = \overline{a\overline{b}\, c + \overline{a}\, b c} = (\overline{a} + b + \overline{c}) \cdot (a + \overline{b} + \overline{c}) \\
&= \underbrace{a\overline{a}}_{=0} + \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{c} + ab + \underbrace{b\overline{b}}_{=0} + b\overline{c} + a\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c} + \underbrace{\overline{c}\,\overline{c}}_{=\overline{c}} \\
&= \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{c} + ab + a\overline{c} + \underbrace{b\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c}}_{=\overline{c}(b+\overline{b})=\overline{c}} + \overline{c} \\
&= \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{c} + ab + \underbrace{a\overline{c} + \overline{c}}_{=\overline{c}} = \overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{c} + ab + \overline{c} \\
F &= \overline{D \cdot E} = \overline{(a\overline{b} + \overline{a}\, b) \cdot (\overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{c} + ab + \overline{c})} \\
&= (\overline{a} + b)(a + \overline{b}) + (a + b)(a + c)(\overline{a} + \overline{b})c \\
&= \underbrace{a\overline{a}}_{=0} + \overline{a}\,\overline{b} + ab + \underbrace{b\overline{b}}_{=0} + (\underbrace{aa}_{=a} + ac + ab + bc)(\overline{a}\, c + \overline{b}\, c) \\
&= \overline{a}\,\overline{b} + ab + \underbrace{a\overline{a}\, c}_{=0} + \underbrace{a\overline{a}\, c}_{=0} + \underbrace{a\overline{a}\, bc}_{=0} + \overline{a}\, bc + a\overline{b}\, c + a\overline{b}\, c + \underbrace{ab\overline{b}\, c}_{=0} + \underbrace{b\overline{b}\, c}_{=0} \\
&= \overline{a}\,\overline{b} + ab + \overline{a}\, bc + a\overline{b}\, c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{a}\,\underbrace{(\overline{b}+bc)}_{=\overline{b}+c} + a\,\underbrace{(b+\overline{b}\,c)}_{=b+c} \\
&= \overline{a}\,\overline{b} + ab + \underbrace{\overline{a}\,c + ac}_{=c(a+\overline{a})=c} = \overline{a}\,\overline{b} + ab + c \\
G &= \overline{E \cdot c} = \overline{(\overline{a}\,\overline{b} + \overline{a}\,\overline{c} + ab + \overline{c}) \cdot c} \\
&= \overline{\overline{a}\,\overline{b}\,c + \underbrace{\overline{a}\,\overline{c}\,c}_{=0} + abc + \underbrace{\overline{c}\,c}_{=0}} \\
&= (a + b + \overline{c}) \cdot (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}) \\
&= \underbrace{a\overline{a}}_{=0} + a\overline{b} + a\overline{c} + \overline{a}\,b + \underbrace{b\overline{b}}_{=0} + b\overline{c} + \overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c} + \underbrace{\overline{c}\,\overline{c}}_{=\overline{c}} \\
&= a\overline{b} + \overline{a}\,b + \underbrace{a\overline{c} + b\overline{c} + \overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c} + \overline{c}}_{=(a+b+\overline{a}+\overline{b}+1)\overline{c}=\overline{c}} = a\overline{b} + \overline{a}\,b + \overline{c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c) &= \overline{F \cdot G} = \overline{(\overline{a}\,\overline{b} + ab + c) \cdot (a\overline{b} + \overline{a}\,b + \overline{c})} \\
&= (a+b)(\overline{a} + \overline{b})\overline{c} + (\overline{a} + b)(a + \overline{b})c \\
&= \underbrace{a\overline{a}\,c}_{=0} + a\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,b\overline{c} + \underbrace{b\overline{b}\,\overline{c}}_{=0} + \underbrace{a\overline{a}\,c}_{=0} + \overline{a}\,\overline{b}\,c + abc + \underbrace{b\overline{b}\,c}_{=0} \\
&= a\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,b\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,c + abc
\end{aligned}
$$

Informatiker-Methode (analytisch):

Bei genauerem Hinsehen erkennt man, dass die Schaltung aus zwei Teilen aufgebaut ist: Eine Funktion mit zwei Ausgangsvariablen mit den Eingängen a und b und dem Ausgang D und eine Funktion mit den Eingängen D und c und dem gesuchten Ausgang $f(a,b,c)$. Bei weiterer Analyse erkennt man, dass diese beiden Funktionen identisch sind. Nach Berechnen der Funktion $D = a \oplus b$ wie oben lautet die gesuchte Funktion:

$$
\begin{aligned}
f(a,b,c) &= D \oplus c \\
&= a \oplus b \oplus c \\
&= (a\overline{b} + \overline{a}\,b) \oplus c \\
&= (a\overline{b} + \overline{a}\,b)\overline{c} + \overline{(a\overline{b} + \overline{a}\,b)}c \\
&= a\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,b\overline{c} + (\overline{a} + b) \cdot (a + \overline{b})c \\
&= a\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,b\overline{c} + \underbrace{a\overline{a}\,c}_{=0} + \overline{a}\,\overline{b}\,c + abc + \underbrace{b\overline{b}\,c}_{=0} \\
&= a\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,b\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,c + abc
\end{aligned}
$$

Hinweis: Die Lösung $a \oplus b \oplus c$ oder $a\overline{b} + \overline{a}\,b \oplus c$ ist bereits ausreichend, da nicht nach einer bestimmten Form der Vereinfachung gefragt war.

Holzhammer-Methode (Wahrheitstabelle):

Es wird eine Wahrheitstabelle für jeden NAND-Ausgang gebildet und Spalte für Spalte gefüllt:

a	b	c	A	B	C	D	E	F	G	$f(a,b,c)$
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1

Das Ergebnis erhält man als DNF:

$$f(a,b,c) = \overline{a}\,\overline{b}\,c + \overline{a}\,b\overline{c} + a\overline{b}\,\overline{c} + abc$$

Informatiker-Methode (Wahrheitstabelle):

Hat man erkannt, dass die Schaltung aus zwei Teilen besteht, genügt es die Wahrheitstabelle für die Teilschaltung aufzustellen:

a	b	A	B	C	D
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0

Für die Teilschaltung ergibt sich die Funktion als DNF:

$$f(a,b) = \overline{a}\,b + a\overline{b} = a \oplus b$$
$$f(a,b,c) = a \oplus b \oplus c$$

Die weitere Rechnung erfolgt analog wie obige Informatiker-Methode (analytisch).

Schaltbild (eine Möglichkeit):