

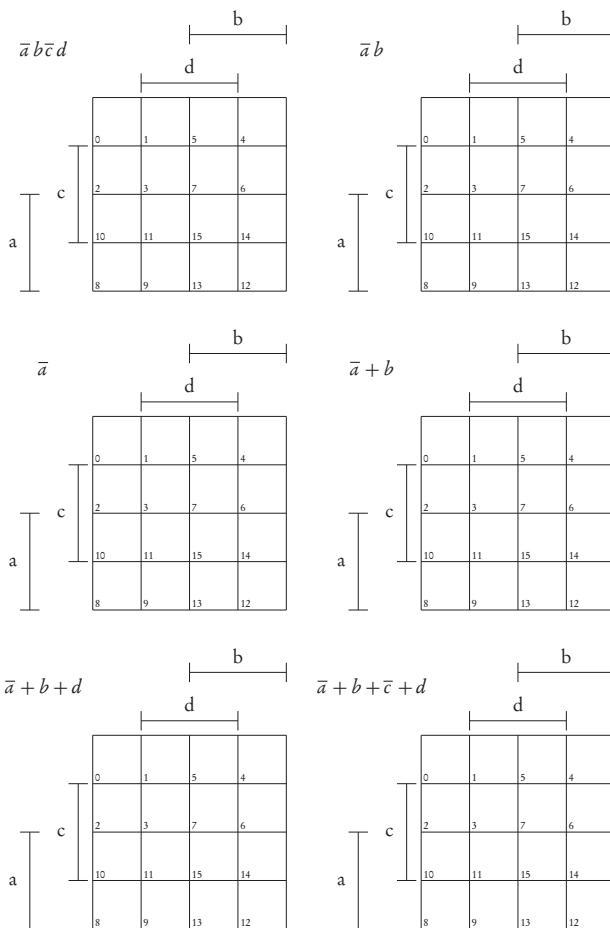
6. Übungsblatt - KV-Minimierung I

Digitaltechnik und Rechnersysteme • Wintersemester 2025/2026

1 Gruppenübung

1.1 KV-Diagramm

Zeichnen Sie die folgenden Terme in die zugehörigen KV-Diagramme von vier Variablen a, b, c und d :



1.2 Synthese einer NAND-Schaltung

Gegeben sei eine boolesche Funktion f in vier Variablen durch ihre Dezimaläquivalentdarstellung

$$f(a, b, c, d) = \{0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 15\}$$

mit den Wertigkeiten $a = 2^3, b = 2^2, c = 2^1, d = 2^0$.

In der Dezimaläquivalentdarstellung werden die '1'-Stellen der Funktion durch die Dezimalzahlen der Eingabe (entsprechend ihrer Wertigkeiten) angegeben. Beispiel: Hat eine Funktion $g(a, b, c, d)$ eine '1' für $g(0, 1, 0, 1)$, so lautet das Dezimaläquivalent für die oben angegebenen Wertigkeiten entsprechend $0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 5_{10}$

Es soll die kostengünstigste NAND-Realisierung entwickelt werden. Gehen Sie dazu nach den Teilaufgaben vor und machen Sie sich klar, warum die Teilschritte notwendig sind.

- a) Erstellen Sie die Wahrheitstabelle (Wertigkeit: $a = 2^3, b = 2^2, c = 2^1, d = 2^0$).
- b) Zeichnen Sie das KV-Diagramm der Funktion.
- c) Bestimmen Sie alle Primimplikanten und deren Typ (KPI, API, oder REPI, siehe Definitionen unten).
- d) Finden Sie die kostengünstigste DNF mit Hilfe der Primimplikanten.
- e) Entwickeln Sie aus der DNF die kostengünstigste NAND-Realisierung der Funktion und zeichnen Sie die resultierende Schaltung.

Definitionen:

- Als **Primimplikant** werden die größten zusammenhängenden Minterme (oder Maxterme) bezeichnet, die in Gruppen von $1, 2, 4, \dots, 2^N$ Elementen ($N \in \mathbb{Z}_0$) im KV-Diagramm zusammengefasst werden können.
- **Kernprimimplikanten (KPI)** sind Primimplikaten, die Minterme (oder Maxterme) überdecken, die von keinem anderen Primimplikanten überdeckt werden.
- **Absolut eliminierbare Primimplikanten (API)** sind Primimplikaten, deren Minterme (oder Maxterme) alle von Kernprimimplikanten überdeckt werden.
- Alle weiteren Primimplikanten sind relativ **eliminierbare Primimplikaten (REPI)**.

Hinweis: Um eine Funktion nur mit NAND-Gattern zu realisieren, versuchen Sie die AND/OR-Realisierung durch mittels Involution und dem Satz von De Morgan umzuformen.

1.3 Synthese einer minimierten Schaltung

Gegeben sei die Boolesche Funktion $f(a, b, c, d)$.

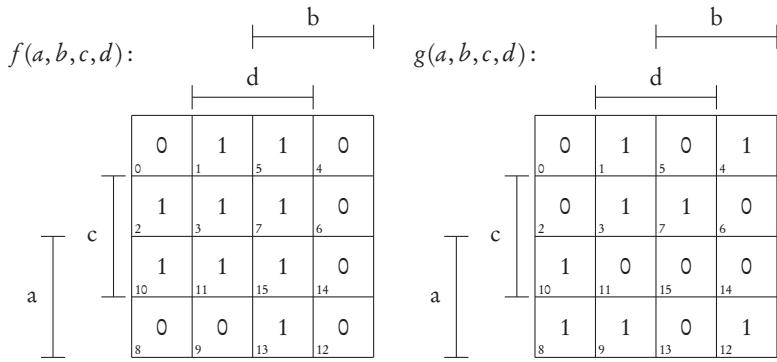
$$f(a, b, c, d) = a\bar{b}\bar{c} + b\bar{c}\bar{d} + acd + a\bar{b}d + \bar{a}bd + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + a\bar{b}cd$$

- a) Zeichnen Sie das KV-Diagramm der Funktion (möglichst ohne eine Wahrheitstabelle zu verwenden).
- b) Bestimmen Sie alle Primimplikanten aus den Mintermen sowie den Maxtermen und geben Sie deren Typ an (Beachten Sie die Definitionen aus Aufgabe 1.2).
- c) Bestimmen Sie die minimale/kostengünstigste DNF und KNF durch Ablesen aus dem KV-Diagramm.
- d) Zeichnen Sie die Schaltung der minimalen DNF und KNF als zweistufige AND/OR bzw. OR/AND Realisierung der Funktion.

2 Hausübung

2.1 Typisierung von Primimplikanten (2 Punkte)

Markieren Sie die Primimplikanten im folgenden KV-Diagramm und geben Sie deren Typ an (KPI: Kernprimimplikant, API: Absolut eliminierbarer Primimplikant, REPI: Relativ eleminierbarer Primimplikant).

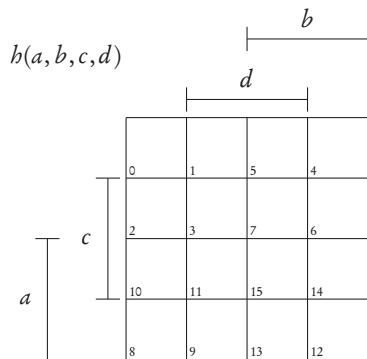


2.2 Minimierung mit KV-Diagrammen (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$h(a,b,c,d) = abc + ab\bar{d} + a\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}c$$

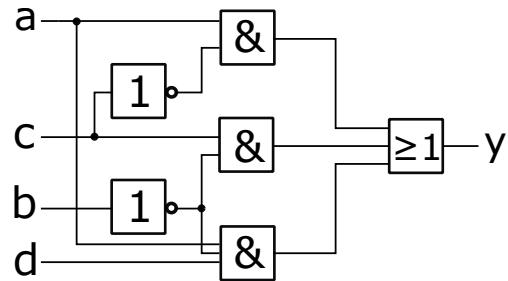
- a) Ermitteln Sie das KV-Diagramm der Funktion $h(a,b,c,d)$ und markieren Sie alle Primimplikanten. Verwenden Sie die folgende Variablenanordnung im KV-Diagramm:



- b) Geben Sie den Typ aller Primimplikanten an (KPI, API, REPI)
 c) Geben Sie die minimierte Funktion als DNF an.

2.3 Schaltungsvereinfachung (4 Punkte)

Vereinfachen Sie folgende Schaltung mithilfe eines KV-Diagramms.



Verwenden Sie die folgende Variablenanordnung:

$y(a, b, c, d)$	b
	d
a	
0	1
2	3
10	11
8	9
5	7
15	13
4	6
12	14

Zeichnen Sie das Schaltbild (auf Gatterebene) der vereinfachten Schaltung.