Digitaltechnik & Rechnersysteme

Zahlenkodierung

Martin Kumm

HOCHSCHULE FULDA
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

WiSe 2025/2026

Was bisher geschah...

Angewandte Informatik

- Die Macht der Abstraktion
- Was ist Information?
- Codierung von Information mit ...
  - fester Länge
  - variabler Länge, optimale Huffmann-Codierung

Inhalte

Angewandte Informatik

Stellenwertsysteme

Angewandte Informatik

Bei Stellenwertsystemen (sog. polyadischen Zahlensystemen) wird jedem Symbol eine Wertigkeit in Abhängigkeit der Stelle zugewiesen.

Wertigkeit der i-ten Ziffer x_i entspricht R^i

R wird als Basis oder auch Radix genannt.

In einem kanonischen Zahlensystem besteht der Ziffernvorrat aus den Ziffern $\{0, 1, 2, \ldots, R-1\}$

Der Wert einer n-stelligen Zahl lautet

$$X = x_0 R^0 + x_1 R^1 + x_2 R^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{n-1} x_i R^i$$

Der Wertebereich einer n-stelligen Zahl lautet $0 \ldots R^n - 1$

Stellenwertsysteme

Angewandte Informatik

Beispiel: Dezimalsystem

- Das Dezimalsystem hat Radix $R = 10$ und die Ziffern $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
- Die Dezimalzahl 1234_{10} ist eine verkürzte Schreibweise für

$$1234 = 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$$

Beispiel: Binärsystem (Dualsystem)

- Das Binärsystem hat Radix $R = 2$ und die Ziffern $\{0, 1\}$
- Die Binärzahl 0101_2 hat den Wert

$$\begin{aligned} 0101_2 &= 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 4 + 1 = 5 \end{aligned}$$

Konvertierung I

Angewandte Informatik

Algorithmus: Konvertierung in anderes Stellenwertsystem

1. Zahl durch R ganzzahlig mit Rest teilen
2. Der Rest entspricht der gesuchten Ziffer, beginnend mit der niedrigsten Stelle
3. Solange Divisionsergebnis ungleich Null ist, mit dem Divisionsergebnis die Schritte 1-2 wiederholen

Konvertierung II

Angewandte Informatik

Beispiel: Konvertierung von 100_{10} ins Binärsystem

$$
\begin{aligned}
100 : 2 &= 50 \text{ Rest } 0\\
50 : 2 &= 25 \text{ Rest } 0\\
25 : 2 &= 12 \text{ Rest } 1\\
12 : 2 &= 6 \text{ Rest } 0\\
6 : 2 &= 3 \text{ Rest } 0\\
3 : 2 &= 1 \text{ Rest } 1\\
1 : 2 &= 0 \text{ Rest } 1 \uparrow \text{ In dieser Richtung Ablesen}
\end{aligned}
$$

➡ $100_{10} = 1100100_2$

Vorlesungsaufgabe: Konvertieren Sie die Zahl 42_{10} ins Binärsystem!

Konvertierung III

Angewandte Informatik

Lösung: Konvertierung von 42_{10} ins Binärsystem

Hexadezimale Zahlen

Angewandte Informatik

- Hexadezimale Zahlen ($R = 16$) werden häufig zur kompakten Darstellung von Binärzahlen verwendet.
- Es werden die Ziffern $\{0, 1, 2, \ldots, 9, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}\}$ verwendet
  (A bis F repräsentieren die Wertigkeit 10 bis 15)
- Jedes Hexadezimale Digit kann mit genau 4 Bit dargestellt werden. Beispiel:

$$\underbrace{0111}_{=7_{16}}\ \underbrace{0101}_{=5_{16}}\ \underbrace{1010}_{=\mathrm{A}_{16}}\ \underbrace{1111}_{=\mathrm{F}_{16}} = 75\mathrm{AF}_{16}$$

Binär	Hex
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Zahlendarstellung in der Informatik I

Angewandte Informatik

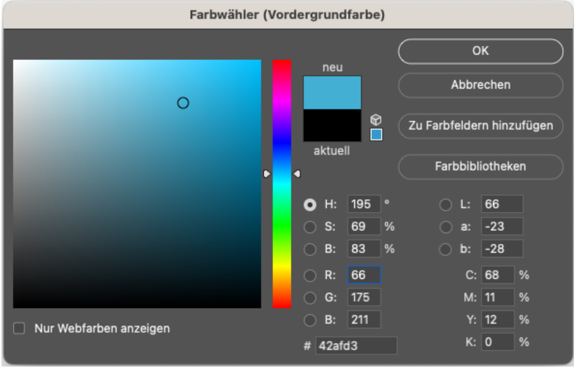
- In vielen Programmiersprachen (C/C++, Java, Python) wird binären/hexadezimalen Zahlen ein `0b`/`0x` vorangestellt, z.B.

$$12_{10} = 1100_2 = C_{16} = \texttt{0b1100} = \texttt{0xC} = 12$$

- Beispiel: MAC-Adresse auf Netzwerkgeräten

Zahlendarstellung in der Informatik II

- Beispiel: Farbauswahl in Programmen



- Jeder Farbkanal (RGB: rot, grün, blau) ist mit 8 Bit kodiert
- Lässt sich mit 2 Hex-Ziffern darstellen
- Beispiel: R: $66 = 42_{16}$, G: $175 = AF_{16}$, B: $211 = D3_{16}$
- Wird viel im Web verwendet

Konvertierung IV

Angewandte Informatik

Beispiel: Konvertierung von 100_{10} ins Hexadezimalsystem

$$100 : 16 = 6 \text{ Rest } 4$$
$$6 : 16 = 0 \text{ Rest } 6 \uparrow$$ In dieser Richtung Ablesen

➡ $100_{10} = 64_{16}$

Vorlesungsaufgabe: Konvertieren Sie die Zahl 42_{10} ins Hexadezimalsystem!

Lösung: Konvertierung von 42_{10} ins Hexadezimalsystem

Darstellung vorzeichenbehafteter Zahlen

Angewandte Informatik

Bisher unterstützt das Stellenwertsystem erst mal nur positive Zahlen

Negative bzw. allgemein vorzeichenbehaftete Zahlen können durch verschiedene Codierungen dargestellt werden:

- Vorzeichen-Betrag-Darstellung
- Einerkomplement-Darstellung
- Zweierkomplement-Darstellung

Vorzeichen-Betrag Darstellung ($R = 2$)

Angewandte Informatik

Das Bit mit höchster Wertigkeit (*most significant bit*, MSB) (x_{n-1}) wird für das Vorzeichen verwendet:

$$X = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i & \text{für } x_{n-1} = 0 \\ -\sum_{i=0}^{n-2} x_i 2^i & \text{für } x_{n-1} = 1 \end{cases}$$

Der Wertebereich ist $-(2^{n-1} - 1) \leq X \leq 2^{n-1} - 1$

Problem 1: Die Zahl 0 ist redundant (doppelt kodiert): $0 = -0$

Problem 2: Das Addieren/Subtrahieren erfordert Fallunterscheidung je nach Vorzeichen!

Vorzeichen-Betrag Darstellung

Angewandte Informatik

Beispiel: Darstellung der Zahl -6 mit $n = 4$ Bit

$6_{10} = 110_2$

Erweiterung auf 4 Bit:
$6_{10} = 0110_2$

Vorzeichen-Betrag (Setzen des Vorzeichenbits, da negativ):
$-6_{10} = 1110_{VB}$

Zweierkomplement-Darstellung

Angewandte Informatik

Ideal für das Rechnen wäre es, wenn die Codierung für die negative Zahl *komplementär* zur positiven Zahl ist.

D.h. für die Codierung von $-X$ gelten, dass $X - X = 0$ ist.

Dies gilt für die Zweierkomplement-Codierung:

- Positive Zahlen werden binär codiert wie bisher
- Negative Zahlen werden
  1. Bitweise invertiert
  2. mit 1 Addiert

Hierzu wird **i.d.R.** ein Bit mehr benötigt!

Das MSB definiert hierbei nach wie vor das Vorzeichen.

Der Wertebereich ist $-2^{n-1} \leq X \leq 2^{n-1} - 1$

Konvertierung Zweierkomplement

Angewandte Informatik

Beispiel: Darstellung von −6 im 4 Bit Zweierkomplement

Bitweise Invertierung: 0110 → 1001

Addition mit 1:

$$\begin{array}{lr} & 1001 \\ + & 1 \\ \hline & 1010 \end{array} \quad \Rightarrow -6_{10} = 1010_{2K}$$

$$\text{Test:} \quad \begin{array}{ll} & 1010\ (-6) \\ + & 0110\ (+6) \\ \hline & 0000\ (\text{Überträge werden ignoriert!}) \end{array}$$

Vorlesungsaufgabe: Konvertieren Sie die Zahl $-42_{10} = -101010_2$ ins Zweierkomplement!

Konvertierung Zweierkomplement

Angewandte Informatik

Lösung: Darstellung von -42 im Zweierkomplement

Rückkonvertierung Zweierkomplement

Angewandte Informatik

Die Rückkonvertierung aus dem Zweierkomplement zum Betrag erfolgt ebenfalls durch Bildung des Zweierkomplements

Beispiel: Betrag von $X = -6_{10} = 1010_{2K}$

Bitweise Invertierung: $1010 \rightarrow 0101$

Addition mit 1:

$$\begin{array}{rr} & 0101 \\ + & 1 \\ \hline & 0110 \end{array}$$

➡ $|X| = 0110_2 = 6_{10}$

Zweierkomplement Zahlenkreis ($n = 4$)

Angewandte Informatik