Übung zur vollständigen Induktion 28.11.'21

$A(n): \prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$ zeige: $A(n) = w \quad \forall n \geq 2$

Induktionsanfang: Zeige $A(2)=w$ durch Ausrechnen

$$\prod_{k=2}^{2} \left(1-\frac{1}{k}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

Induktionsschluß: zeige $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Induktionsvoraussetzung: $A(n)=w$ bzw. $\prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n}$

zu zeigen mit I.V.: $A(n+1)=w$ bzw. $\prod_{k=2}^{n+1} \left(1-\frac{1}{k}\right) \overset{!}{=} \frac{1}{n+1}$

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \overset{I.V.}{=} \frac{1}{n} \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad \square$$

Name:

Modul:

Matr.-Nr.:

Vorname:

Datum:

FB: AI

Punkte:

Note:

Erläuterung:

$$\prod_{k=2}^{n+1} \left(1-\frac{1}{k}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

Beweis der Konvergenz der Folge $x_n = 1/n$

Beweis: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ konvergiert gegen $x = 0$ bzw. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Sei $\varepsilon > 0$: $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right|$

Bzw: $|x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Sei N so gewählt dass $N > \frac{1}{\varepsilon}$

Für jedes $n \geq N$: $|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} = \varepsilon$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0