Andreas Bley
Christian Rieck

UNI KASSEL VERSITÄT
FB 10, Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26

Übungsblatt 4

Grundlagen der Mathematik

Abgabe bis **Freitag, 21. November 2025, 23:59 Uhr**

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweisen Sie, dass für alle nicht-negativen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ aus $a \cdot b = c$ folgt, dass $a \leq \sqrt{c}$ oder $b \leq \sqrt{c}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie die folgende Aussage mit Hilfe eines indirekten Beweises (d.h. Kontraposition):
Für alle $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \neq y$ gilt, wenn $\frac{x+y}{x-y}$ unkürzbar ist, dann ist $\frac{x}{y}$ unkürzbar.
(Hinweis: Ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ heißt unkürzbar, wenn a und b teilerfremd sind.)

Aufgabe 3 (12 Punkte)
Wir betrachten die folgende Aussage für natürliche Zahlen $n, m \in \mathbb{N}$: Wenn $m + n$ gerade ist, dann ist $m^2 + n^2$ gerade.

(a) Beweisen Sie diese Aussage auf drei unterschiedliche Arten, und zwar

  (i) durch einen direkten Beweises,
  (ii) durch einen indirekten Beweis (Kontraposition) und
  (iii) durch einen Widerspruchsbeweis.

  Achten Sie insbesondere darauf, sich an die jeweilige Beweisstruktur zu halten und diese sauber darzustellen: Von welchen Voraussetzungen und Annahmen gehen Sie aus, welche Folgerungen oder Widersprüche erhalten Sie daraus in welchen Einzelschritten, und wieso beweist dies die Aussage.

(b) Entscheiden Sie, ob die gegebene Aussage sogar eine Äquivalenz ist, also $m + n$ genau dann gerade ist, wenn $m^2 + n^2$ gerade ist. Begründen Sie ihre Entscheidung.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4

Betrachten Sie folgenden Beweis:

> Für eine beliebige endliche Zahl $\{p_1, \ldots, p_r\}$ von Primzahlen sei $n := p_1 p_2 \cdots p_r + 1$ und p ein Primteiler von n. Wir sehen, dass p von allen p_i verschieden ist, da sonst p sowohl die Zahl n also auch das Produkt $p_1 p_2 \cdots p_r$ teilen würde, somit auch die 1, was nicht sein kann. Eine *endliche* Menge $\{p_1, \ldots, p_r\}$ kann also niemals die Menge *aller* Primzahlen sein. $\square$

(a) Formulieren Sie einen Satz, der mit diesem Beweis gezeigt wird.

(b) Analysieren Sie die Beweisstruktur. (Handelt es sich um einen direkten Beweis, indirekten Beweis, oder Widerspruchsbeweis? Dies hängt auch von Ihrem gewählten Satz ab.) Für die Begründung Ihrer Antwort können Sie den Beweis leicht anpassen.

Aufgabe 5

Beweisen Sie die folgenden Aussagen *ohne* Verwendung von vollständiger Induktion.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist n oder $n+1$ durch 2 teilbar.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n(n+1)(n+2)$ durch 6 teilbar.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n(n+1)(2n+1)$ durch 6 teilbar.

Sie dürfen in den Beweisen außer der vollständigen Induktion alle Beweistechniken, elementare Teilbarkeitseigenschaften und den Satz zur Division mit Rest verwenden (um z.B. jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ entweder als $n = 2k$ oder $n = 2k+1$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ darstellen zu können):
Für alle $n, p \in \mathbb{N}$ existieren Zahlen $q, r \in \mathbb{N}_0$, so dass $n = pq + r$ und $0 \leq r < q$ gilt.

Aufgabe 6

Zeigen Sie die folgende Aussage durch einen indirekten Beweis (d.h. zeigen Sie die Kontraposition):
Für zwei positive reelle Zahlen $a, b > 0$ folgt aus $a^2 < b^2$ die Ungleichung $a < b$.

Aufgabe 7

Wir nennen eine Zahl $a \in \mathbb{Q}$ eine Quadratzahl, wenn ein $b \in \mathbb{Q}$ mit $a = b^2$ existiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen jeweils durch Widerspruchsbeweise.

(a) Für jede Primzahl $p \in \mathbb{P}$ ist $\sqrt{p}$ irrational.

(b) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $\sqrt{n}$ genau dann irrational, wenn n keine Quadratzahl ist.

(c) Für eine positive rationale Zahl $0 < a \in \mathbb{Q}$ ist $\sqrt{a}$ genau dann irrational, wenn a keine Quadratzahl ist.

(d) Für jede positive irrationale Zahl $0 < a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist $\sqrt{a}$ irrational.

Zusatz: Können Sie diese Aussagen in einem einzigen Beweis mit Fallunterscheidungen zeigen?