Andreas Bley
Christian Rieck

UNIKASSEL VERSITÄT
FB 10, Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26

Übungsblatt 3

Grundlagen der Mathematik

Abgabe bis **Freitag, 14. November 2025, 23:59 Uhr**

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (5 Punkte)
Es seien $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ und $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Bilden Sie folgende Mengen:

(a) $(A \cap B) \cup C$
(b) $(A \setminus B) \setminus C$
(c) $A \setminus (B \setminus C)$
(d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$
(e) $\mathcal{P}((A \cup B) \cap C)$

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Gegeben seien die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$A = \{-1, 1, 8, \sqrt{7}, 2, 3\}, \qquad C = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{7}\},$$
$$B = \{1, 2, 4, \sqrt{7}, 0\}, \qquad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\sqrt{7}\}.$$

Entscheiden Sie mit Begründung, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

$$A \subseteq B, \quad A \supseteq B, \quad A \subseteq D, \quad A \supseteq D, \quad A = D$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Es seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sowie

$$M = \{(1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 6), (3, 2), (3, 4)\} \subseteq A \times B$$

gegeben. Finden Sie Teilmengen $A_1, A_2 \subseteq A$ von A sowie $B_1, B_2 \subseteq B$ von B mit der Eigenschaft

$$M = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2).$$

Tipp: Stellen Sie die Menge M in geeigneter Form zeichnerisch dar.

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:
Für alle Mengen A, B, A', B' gilt:

(a) $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$.
(b) $(A \times B) \cup (A' \times B') = (A \cup A') \times (B \cup B')$.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 5

(a) Geben Sie die folgenden Mengen explizit an, indem Sie alle Elemente in der Form $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ notieren.

(i) $\{x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{N}_0 : x^2 + y^2 \leq 25\}$

(ii) $\{x \in \mathbb{N}_0 \mid x \text{ ist keine Primzahl} \wedge x < 60 \wedge x \text{ ist nicht durch 2 oder 3 teilbar}\}$

(b) Finden Sie eine Aussage $P(x)$ (soweit möglich in reiner Formelsprache), so dass Sie die folgenden Mengen in der Form $\{x \in A | P(x)\}$ schreiben können, wobei $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ sein soll.

(i) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...\}$

(ii) $\{1, 5, 9, 13, 17, 21, ...\}$

(iii) $\{1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 28, \ldots\}$

Aufgabe 6

Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$A = \{x \mid \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ x = (2 + 6k)^2\}$$
$$B = \{x \mid \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ x = (1 + 3\ell)\}$$

Beweisen Sie, dass $A \subseteq B$ und $A \neq B$ gilt.

Aufgabe 7

(a) Gegeben seien die beiden Mengen $A = \{2, 4, 6\}$ und $B = \{2, 3, 4\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche sind falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

(i) $(2, 3) \in A \times B$

(ii) $(3, 2) \in A \times B$

(iii) $\{4, 3\} \subseteq A \times B$

(iv) $(2, 2) \in A^2$

(v) $\{3, 6\} \subseteq A \Delta B$, wobei $A \Delta B$ die *symmetrische Differenz* bezeichnet, also $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

(vi) $(2, 4) \in \mathcal{P}(A)$

(b) Gegeben sei die Menge $A = \{0\}$.

(i) Bestimmen Sie $\mathcal{P}(A)$.

(ii) Bestimmen Sie $A \times \mathcal{P}(A)$.

(iii) Bestimmen Sie $A \cup \mathcal{P}(A)$. (Wir setzen für nachfolgende Aufgaben $B := A \cup \mathcal{P}(A)$.)

(iv) Bestimmen Sie $\mathcal{P}(B)$.

(v) Bestimmen Sie B^2.

(vi) Ist $(0, 0) \in \mathcal{P}(B)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(vii) Ist $(\{0\}, 0) \in \mathcal{P}(B^2)$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(viii) Ist $\{0, \{\emptyset, 0\}\} \in A \times \mathcal{P}(A)$? Begründen Sie Ihre Antwort.