Digitaltechnik & Rechnersysteme

Schaltwerke und einfache Speicher

Martin Kumm

HOCHSCHULE FULDA
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

WiSe 2025/2026

Was bisher geschah...

Angewandte Informatik

- Addition / Subtraktion
  - Rechenschritt einer Stelle mittels Volladdierer
  - Durch serielle Verschaltung ergibt sich Ripple-Carry Addierer
- Multiplikation
  - UND-Verknüpfung der einzelnen Bit-Kombinationen und deren gewichtete Aufsummierung
  - Ripple Carry Array Multiplizierer
- Arithmetisch-logische Einheit / *Arithmetic Logic Unit* (ALU)
  - Fasst arithmetische und logische Operationen in einer Einheit zusammen
  - Das Rechenwerk eines Prozessors

Inhalte

Angewandte Informatik

Schaltwerke

Angewandte Informatik

Schaltnetze sind dadurch gekennzeichnet, dass zu einem bestimmten Zeitpunkt die Ausgänge **nur** von den Eingängen zu **diesem** Zeitpunkt abhängen.

Zeit spielt nur in Form von Verzögerungen (Schaltzeiten) eine Rolle.

Schaltnetze sind für die Erfassung von Abläufen, bei denen die **Vorgeschichte** eine Rolle spielt, nicht geeignet.

Schaltwerke

Angewandte Informatik

Zur Erfassung von Abläufen ist eine **Speicherung** der Vorgeschichte erforderlich.

Ein einfaches Beispiel stellt ein Zähler dar, wobei die Anzahl der Zählereignisse als „Zählerstand“ repräsentiert wird.

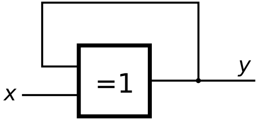
Solche Schaltungen bezeichnet man als **Schaltwerke** oder **sequentielle Schaltungen** oder **asynchrone Automaten**.

Die Speicherung wird durch das Einführen von Rückkopplungen realisiert.

Beispiel: XOR mit Rückkopplung

Angewandte Informatik

Beispiel: $y = x \oplus y$



Ausgangswert hängt nun von **vorherigem** Ausgangswert ab!
Wir nennen alten Ausgangswert y^t, den neuen $y^{t+\tau}$
(τ kann man sich als sehr kleine Zeitspanne vorstellen).

y^t	x	$y^{t+\tau}$	
0	0	0	← Ausgang bleibt stabil: $y^{t+\tau} = y^t = 0$
0	1	1	← Ausgang wechselt von 0 auf 1
1	0	1	← Ausgang bleibt stabil: $y^{t+\tau} = y^t = 1$
1	1	0	← Ausgang wechselt von 1 auf 0

Zustände und Zustandsvektor

Aufgrund der Historie kann sich das Schaltwerk in unterschiedlichen Zuständen befinden.

Variablen von denen der dieser Zustand beeinflusst wird werden als Zustandsvariablen q_i, $1 \leq i \leq k$ bezeichnet.

Die Menge der möglichen Zustände definiert einen Zustandsvektor $Q = \{0, 1\}^k$ (auch Zustandsraum genannt).

Für ein Schaltwerk mit k Zustandsvariablen enthält Q damit $l = 2^k$ Elemente.

Zustandsübergangsverhalten

Angewandte Informatik

Das Zustandsübergangsverhalten beschreibt die Übergänge von einem Zustand $q^t \in Q$ in einen Folgezustand $q^{t+\tau} \in Q$:

$$q^{t+\tau} = G(q^t, x), \quad q^t, q^{t+\tau} \in Q$$

G beschreibt, wie sich zum Zeitpunkt $t + \tau$ der Zustand eines Schaltwerks $q^{t+\tau}$ aus dem Zustand zu einem zurückliegenden Zeitpunkt q^t und dem Eingangsvektor x berechnen lässt.

τ kann hierbei eine gedachte Zeitspanne > 0 sein oder konkret in Gatterlaufzeiten ausgedrückt werden.

G wird als Zustandsübergangsfunktion (ZÜF) bezeichnet.

Zustandsübergänge werden auch Transitionen genannt.

Berechnung der Ausgänge

Das Verhalten zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch das Ausgangsverhalten (wie beim Schaltnetz) und das Zustandübergangsverhalten.

Ausgangsvektor zum Zeitpunkt t:

$$y = F(q^t, x),\ q^t \in Q$$

F wird als Ausgangsfunktion (AF) bezeichnet.

Beschreibung als Übergangstabelle

Zur Beschreibung des Verhaltens von Schaltwerken eignen sich die **Zustandsübergangstabelle** oder **Übergangstabelle**:

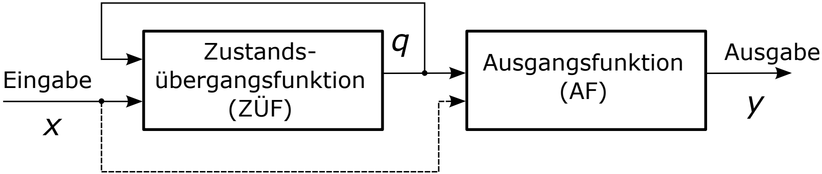
$q_{k-1}^t \dots q_1^t \; q_0^t$	$x_{n-1}^t \dots x_1^t \; x_0^t$	$q_{k-1}^{t+\tau} \dots q_1^{t+\tau} \; q_0^{t+\tau}$	$y_{m-1}^t \dots y_1^t \; y_0^t$
00 … 00	00 … 00		
⋮	⋮		
11 … 11	11 … 11		

k: Anzahl Zustandsbits, n: Anzahl Eingänge, m: Anzahl Ausgänge

In jedem möglichen Zustand werden sämtliche Eingangskombinationen betrachtet.

Darstellung eines allgemeinen Schaltwerks

Angewandte Informatik



Die ZÜF berechnet den Folge-Zustandsvektor $q^{t+\tau}$ in Abhängigkeit des aktuellen Zustandsvektors q^t und der aktuellen Eingabe x.

Die AF berechnet die Ausgabe y in Abhängigkeit des aktuellen Zustandsvektors q^t und der aktuellen Eingabe x.

Moore und Mealy Automaten

Angewandte Informatik

Üblicherweise werden zwei Typen von Automaten unterscheiden:

MEALY Automat: ist der allgemeine Fall

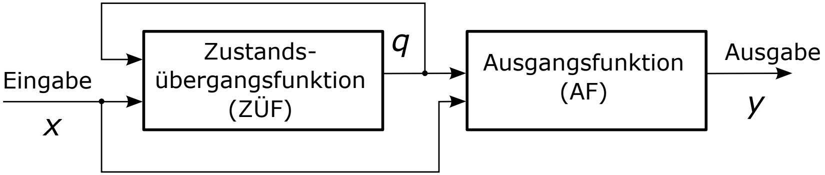
MOORE Automat: Einschränkung, dass die Ausgänge nur von den Zuständen abhängen:

$$y = F(q)$$

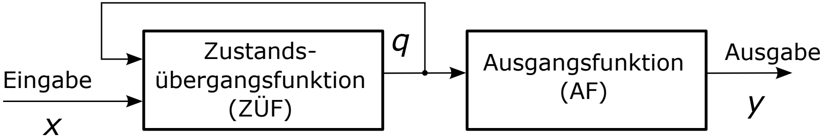
Moore und Mealy Automaten

Angewandte Informatik

MEALY Automat:



MOORE Automat:

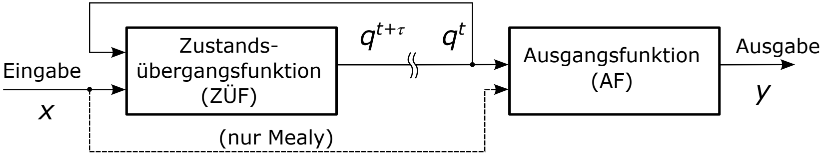


Schaltwerksanalyse

Angewandte Informatik

Vorgegeben ist ein Schaltbild.

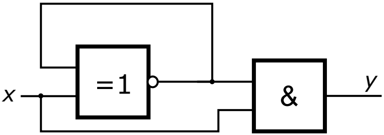
Durch die **Analyse** soll auf die Funktion geschlossen werden. Dazu werden Rückkopplungen so aufgetrennt, dass die Struktur eines Schaltnetzes entsteht (rückkopplungs**frei**).



Vorlesungsaufgabe

Angewandte Informatik

Analysieren Sie das folgende Schaltwerk:



Erstellen Sie die Zustandsübergangs- und Ausgangstabelle

Lösung Vorlesungsaufgabe

Stabile Zustände

Transitionen (Zustandsübergänge), bei denen (alle) q^t und $q^{t+\tau}$ übereinstimmen führen zu **stabilen Zuständen**.

D.h. für die Eingabekombination dieser Transition bleibt der Automat in seinem Zustand.

Vorlesungsaufgabe: Markieren Sie die Transitionen, welche zu stabilen Zuständen führen!

q^t	x	$q^{t+\tau}$	y
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

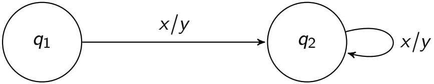
Beschreibung als Übergangsgraph

Angewandte Informatik

Übergangsgraph/**Zustandsübergangsgraph**: Den Knoten (Ecken) des Graphen werden die Zustände zugeordnet. Zustandsübergänge (Transitionen) entsprechen gerichteten Kanten (Pfeile).

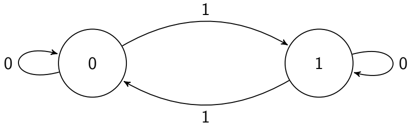
Die **Knoten** werden durch Kreise dargestellt und erhalten als Beschriftung die Zustandsbezeichnung.

Die **Kanten** werden mit dem Eingangsvektor beschriftet, der den entsprechenden Übergang auslöst, sowie dem Ausgabevektor:

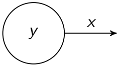


Beispiel: XOR mit Rückkopplung

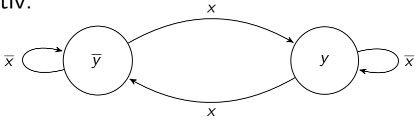
y^t	x	$y^{t+\tau}$	
0	0	0	← Ausgang bleibt stabil: $y^{t+\tau} = y^t = 0$
0	1	1	← Ausgang wechselt von 0 auf 1
1	0	1	← Ausgang bleibt stabil: $y^{t+\tau} = y^t = 1$
1	1	0	← Ausgang wechselt von 1 auf 0



Notation:



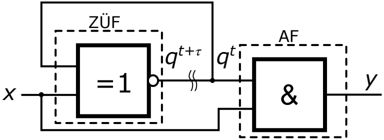
Alternativ:



Vorlesungsaufgabe

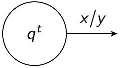
Angewandte Informatik

Erstellen Sie für das Schaltwerk den Zustandsübergangsgraph.



q^t	x	$q^{t+\tau}$	y
0	0	1	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

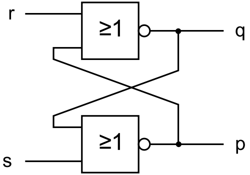
Notation:



Speichern einer binären Variablen

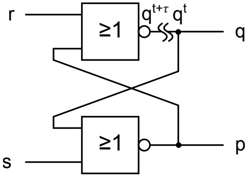
Angewandte Informatik

Ein sog. RS-Latch lässt sich aus zwei rückgekoppelten NOR-Gliedern realisieren:

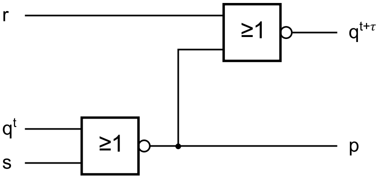


⇒ Zur Analyse werden so lange Rückkopplungen aufgetrennt bis ein Schaltnetz entsteht.

Analyse der Funktionsweise

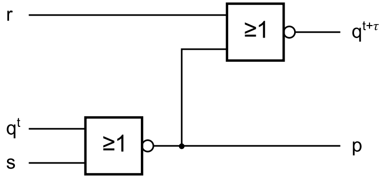


Daraus ergibt sich ein gewöhnliches Schaltnetz:



Analyse der Funktionsweise

Angewandte Informatik



Funktion der Schaltung:

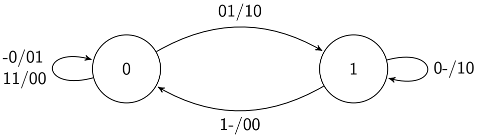
$$
\begin{aligned}
p &= \overline{s + q^t} = \overline{s}\,\overline{q^t} \\
q^{t+\tau} &= \overline{r + \overline{(s + q^t)}} \\
&= \overline{r}\,(s + q^t) \\
&= \overline{r}\,s + \overline{r}\,q^t
\end{aligned}
$$

Zustandsübergangstabelle:

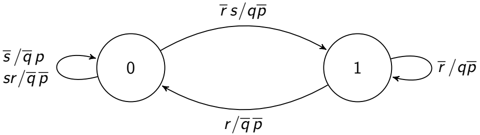
q^t	r	s	$q^{t+\tau}$	p
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

Zustandsdiagramm des RS-Latch

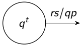
q^t	r	s	$q^{t+\tau}$	p
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0



Alternativ:



Notation:



Hinweis: Hier steht »-« für *don't care*.
Beispiel: Eine Transition mit rs =-0 wird aktiv sobald $s = 0$ ist, unabhängig von r. Sie reagiert also auf $rs = 00$ und $rs = 10$.

Verhalten des RS-Latch

Angewandte Informatik

	q^t	r	s	$q^{t+\tau}$	p	Bemerkung
0	0	0	0	0	1	speichern (0)
1	0	0	1	1	0	setzen
2	0	1	0	0	1	rücksetzen
3	0	1	1	0	0	(rücksetzen)
4	1	0	0	1	0	speichern (1)
5	1	0	1	1	0	setzen
6	1	1	0	0	0	rücksetzen
7	1	1	1	0	0	instabil

- Speicherung: stabile Zustände, mit $q^{t+\tau} = q^t \Rightarrow$ Zeilen 0, 4
- Setzen: mit $s = 1 \rightarrow q = 1 \Rightarrow$ Zeilen 1 und 5
- Rücksetzen: mit $r = 1 \rightarrow q = 0 \Rightarrow$ Zeilen 2 und 6

Übergangstabelle RS-Latch

Angewandte Informatik

Übergangstabelle (verkürzt):

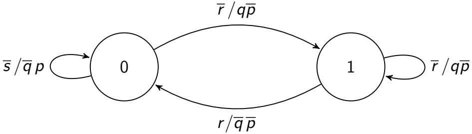
r	s	$q^{t+\tau}$	
0	0	q^t	speichern
0	1	1	setzen
1	0	0	rücksetzen
1	1	–	nicht zulässig

Wegen möglicher Instabilität ist $r = s = 1$ meist verboten!

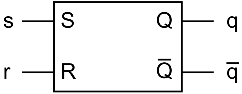
r = reset, s = set

Da $p = \overline{q}$ für stabile Zustände gilt, wird der 2. Ausgang als $\overline{q}$ bezeichnet

Das RS-Latch ist ein Element mit **zwei stabilen** Zuständen, auch **bistabiler** Speicher genannt.

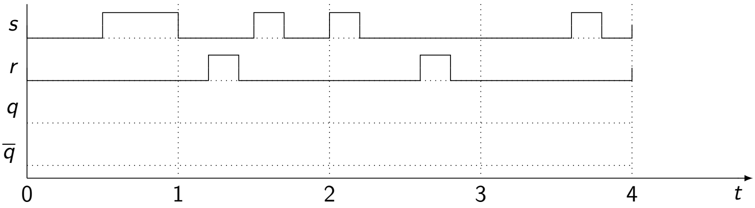


Schaltbild:



RS-Latch Timing

Angewandte Informatik



Vorlesungsaufgabe: Ermitteln Sie das Timing-Diagramm der Signale q und q' (für $q = 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$).

Probleme:

Zwei Ansteuersignale um ein Bit zu speichern.

Jede Änderung am Eingang wird **sofort** am Ausgang übernommen!

➡ Lösung: Daten und (zeitliche) Übernahme trennen