

Digitaltechnik & Rechnersysteme

Schaltnetze - Teil II

Martin Kumm



WiSe 2025/2026

Was bisher geschah...

- Kommazahlen
 - Festkommazahlen
 - Gleitkommazahlen: Zahlen werden zu $\pm 1.m \cdot 2^e$ normalisiert; Komponenten werden gespeichert als
 - 1 Vorzeichen (s)
 - 2 Exponent (e)
 - 3 Mantisse (m)
- Informationsverarbeitung mit Schaltern
 - Reihenschaltung UND
 - Parallelschaltung ODER
 - Wechselschaltung NICHT
- Abstraktion mit Gattern
- UND-, ODER-, NICHT-Operationen
- Kombinatorische Schaltungen
- Boolesche Funktionen
- Wahrheitstabelle → Boolesche Funktion(en)

Wertetabelle einer Funktion



Beispiel:

$$f(x_0, x_1) = \overline{x_0} x_1 + x_0 \overline{x_1}$$

x_0	x_1	$f(x_0, x_1)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

➡ Exklusiv-Oder (*Exclusive Or*, XOR): $f(x_0, x_1) = x_0 \oplus x_1$
(Genau dann “1”, wenn eine Variable exklusiv “1” ist.)

Vorlesungsaufgabe

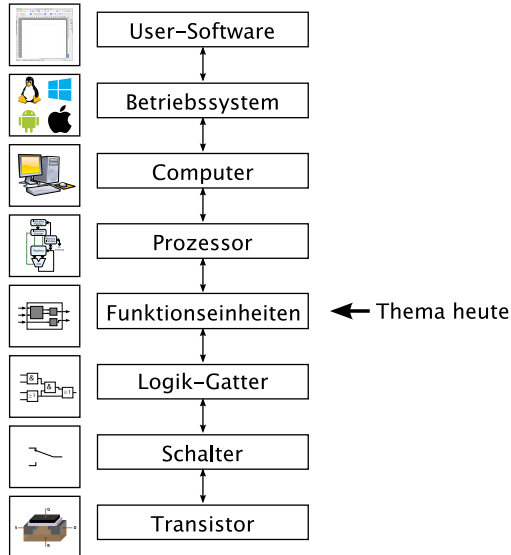


Bestimmen Sie die Wertetabelle der Funktion

$$g(x_0, x_1) = (x_0 + x_1) \cdot (\overline{x_0} + \overline{x_1})$$

x_0	x_1	$g(x_0, x_1)$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Die Macht der Abstraktion



Inhalte



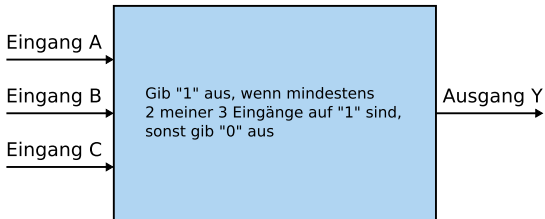
- 1 Wrap-Up
- 2 Normalformen
- 3 Symbolische Darstellung von Schaltfunktionen
- 4 Gesetze der Booleschen Algebra

Funktion einer Wahrheitstabelle?



Wie bekomme ich die Boolesche Funktion aus einer Wahrheitstabelle?

Für unser Beispiel-Schaltnetz:



A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Funktion durch Minterme



Ein Minterm ist in genau einer Zeile der Wahrheitstabelle »1«

Jede Zeile der Wahrheitstabelle lässt sich ein Minterm zuordnen:

x_2	x_1	x_0	Minterm
0	0	0	$\overline{x_2} \overline{x_1} \overline{x_0}$
0	0	1	$\overline{x_2} \overline{x_1} x_0$
0	1	0	$\overline{x_2} x_1 \overline{x_0}$
0	1	1	$\overline{x_2} x_1 x_0$
1	0	0	$x_2 \overline{x_1} \overline{x_0}$
1	0	1	$x_2 \overline{x_1} x_0$
1	1	0	$x_2 x_1 \overline{x_0}$
1	1	1	$x_2 x_1 x_0$

Durch ODER-Verknüpfung der passenden Minterme lässt sich eine (mögliche) Boolesche Funktion aus der Tabelle ablesen

Funktion durch Minterme



Beispiel:

x_2	x_1	x_0	$f(x_0, x_1, x_2)$	Minterm
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\overline{x_2} x_1 \overline{x_0}$
0	1	1	0	
1	0	0	0	
1	0	1	1	$x_2 \overline{x_1} x_0$
1	1	0	1	$x_2 x_1 \overline{x_0}$
1	1	1	0	

Die Funktion lautet: $f(x_0, x_1, x_2) = \overline{x_2} x_1 \overline{x_0} + x_2 \overline{x_1} x_0 + x_2 x_1 \overline{x_0}$

Funktion durch Maxterme



Ein Maxterm ist in genau einer Zeile der Wahrheitstabelle »0«

Jede Zeile der Wahrheitstabelle lässt sich ein Maxterm zuordnen:

x_2	x_1	x_0	Maxterm
0	0	0	$x_2 + x_1 + x_0$
0	0	1	$x_2 + x_1 + \overline{x_0}$
0	1	0	$x_2 + \overline{x_1} + x_0$
0	1	1	$x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}$
1	0	0	$\overline{x_2} + x_1 + x_0$
1	0	1	$\overline{x_2} + x_1 + \overline{x_0}$
1	1	0	$\overline{x_2} + \overline{x_1} + x_0$
1	1	1	$\overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_0}$

Durch UND-Verknüpfung der passenden Maxterme lässt sich eine (andere) Boolesche Funktion aus der Tabelle ablesen

Darstellung durch Maxterme



Beispiel Maxterme:

x_2	x_1	x_0	$f(x_0, x_1, x_2)$	Maxterm
0	0	0	0	$x_2 + x_1 + x_0$
0	0	1	0	$x_2 + x_1 + \overline{x_0}$
0	1	0	1	
0	1	1	0	$x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}$
1	0	0	0	$\overline{x_2} + x_1 + x_0$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	0	$\overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_0}$

Die Funktion lautet:

$$f(x_0, x_1, x_2) = (x_2 + x_1 + x_0) \cdot (x_2 + x_1 + \overline{x_0}) \cdot (x_2 + \overline{x_1} + \overline{x_0}) \cdot \dots$$

$$\dots + (\overline{x_2} + x_1 + x_0) \cdot (\overline{x_2} + \overline{x_1} + \overline{x_0})$$

Min- und Maxterme



Definition

Ein **Minterm** (**Maxterm**) von n Variablen ist ein Ausdruck, in dem alle Variablen genau einmal auftreten (negiert oder nicht-negiert) und **konjunktiv** (**disjunktiv**) verknüpft sind.

Eigenschaften

- Ein **Minterm** ist für **genau eine** bestimmte Variablenkombination **1**, für alle anderen **0**
- Ein **Maxterm** ist für **genau eine** bestimmte Variablenkombination **0**, für alle anderen **1**
- Jeder Zeile einer Wahrheitstabelle kann genau ein Minterm und genau ein Maxterm zugeordnet werden

Kanonische Form: Hauptsatz



Hauptsatz der Schaltalgebra:

Jede beliebige Schaltfunktion $y = f(x_n, \dots, x_1)$ lässt sich als Disjunktion von Mintermen (Konjunktion von Maxtermen) eindeutig darstellen. In der Disjunktion (Konjunktion) treten genau diejenigen Minterme (Maxterme) auf, die zu den Einsstellen (Nullstellen) der Schaltfunktion gehören.

Eine so dargestellte Funktion nennt man **kanonische** Disjunktive (Konjunktive) Normalform **KDNF** (**KKNF**).

Treten nicht alle Variablen in den Mintermen (Maxtermen) auf, spricht man von der (nicht-kanonischen) Disjunktiven (Konjunktiven) Normalform **DNF** (**KNF**).

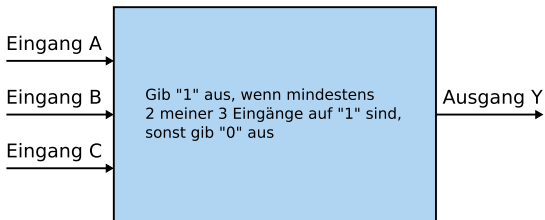
Äquivalenz von Schaltfunktionen



Zwei Schaltfunktionen sind **genau dann äquivalent**, wenn sie in ihren **kanonischen Normalformen (KDNF oder KKNF) übereinstimmen**.

Das ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass sie in ihren Wertetabellen übereinstimmen.

Vorlesungsaufgabe



A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

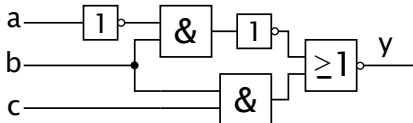
Vorlesungsaufgabe: Bestimmen Sie die zugehörige Schaltfunktion je als KDNF und KKNF.

Symbolische Darstellung als Schaltnetz



- Das **Schaltnetz** ist eine symbolische Darstellung einer Booleschen Funktion:
 - Operatoren (Verknüpfungen) werden durch ihre Schaltsymbole (Logik-Gatter) dargestellt
 - Variablen und Zwischenwerte als Verbindungslinien
- Die symbolische Darstellung entspricht einer **Implementierung** aufbauend auf Logik-Gattern und Leitungen!

Beispiel:



Funktion der Schaltbildes entspricht: $y = \overline{\overline{a}b} + bc$

Vorlesungsaufgabe



Ermitteln Sie das Schaltbild für die folgende Boolesche Funktion:

$$y = \overline{\overline{(a + b)}c} + ab$$

Boolesche Gesetze mit einer Variable



Identität

$$x + 0 = x$$

$$x \cdot 1 = x$$

Eins/Null Element

$$x + 1 = 1$$

$$x \cdot 0 = 0$$

Idempotenz

$$x + x = x$$

$$x \cdot x = x$$

Boolesche Gesetze mit einer Variablen



Involution

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Komplement

$$x + \overline{x} = 1$$

$$x \cdot \overline{x} = 0$$

Kommutativität



Kommutativität (Vertauschung)

$$x + y = y + x$$

$$x \cdot y = y \cdot x$$

➡ Die Reihenfolge der Variablen spielt keine Rolle

Vorlesungsaufgabe



Wenden Sie die oben genannten Regeln auf den folgenden Booleschen Ausdruck an um diesen zu vereinfachen:

$$y = ((a + 1)b + \bar{a}(0 + a) + \bar{b})(b + a \cdot \bar{a})$$

Boolesche Gesetze (bisher)

	Disjunktives Gesetz	Konjunktives Gesetz
Identität	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Eins/Null	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
Idempotenz	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Involution	$\overline{\overline{x}} = x$	
Komplement	$x + \bar{x} = 1$	$x \cdot \bar{x} = 0$
Kommutativität	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$

Vorlesungsaufgabe Lösung



Assoziativität und Distributivität



Assoziativität (Verbindung)

$$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$$

- ➡ Die Reihenfolge der Auswertung spielt **innerhalb der gleichen Operatoren** keine Rolle.

Distributivität (Verteilung)

$$x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$$

$$(x + y) \cdot (x + z) = x + y \cdot z$$

- ➡ Analog zum »Ausmultiplizieren« und »Ausklammern« in der gewöhnlichen Algebra
- ➡ Wichtig zum Vereinfachen von Schaltfunktionen!

Absorption



Absorption 1

$$x + x \cdot y = x$$

$$x \cdot (x + y) = x$$

Absorption 2

$$x + \bar{x} \cdot y = x + y$$

$$x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$$

➡ Wichtig zum Vereinfachen von Schaltfunktionen!

Vorlesungsaufgabe



Überzeugen Sie sich durch Aufstellen der Wahrheitstabelle, dass das Gesetz »Absorption 2« in Disjunktiver Form gültig ist:

$$x + \overline{x} \cdot y = x + y$$

Das De Morgansche Gesetz

De Morgan

$$\overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

➔ Löst man die Invertierung einer UND(ODER)-Verknüpfung mehrerer Variablen auf, so werden

- aus UND(ODER)-Verknüpfungen
ODER(UND)-Verknüpfungen
- alle Variablen des Terms invertiert.

bzw. allgemein:

$$\overline{x_1 + \dots + x_n} = \overline{x_1} \cdot \dots \cdot \overline{x_n}$$

$$\overline{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} = \overline{x_1} + \dots + \overline{x_n}$$

Vorlesungsaufgabe



Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck mittels De Morgan:

$$z = \overline{a\overline{b}} \cdot \overline{a + b}$$

Konsensus

Konsensus

$$xy + \bar{x}z + yz = xy + \bar{x}z$$

$$(x + y)(\bar{x} + z)(y + z) = (x + y)(\bar{x} + z)$$

x	y	z	xy	$\bar{x}z$	yz
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1

x	y	z	(x + y)	($\bar{x} + z$)	(y + z)
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Gesetze der Booleschen Algebra



	Disjunktives Gesetz	Konjunktives Gesetz
Identität	$x + 0 = x$	$x \cdot 1 = x$
Eins/Null	$x + 1 = 1$	$x \cdot 0 = 0$
Idempotenz	$x + x = x$	$x \cdot x = x$
Involution	$\overline{\overline{x}} = x$	
Komplement	$x + \overline{x} = 1$	$x \cdot \overline{x} = 0$
Kommutativität	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Assoziativität	$(x+y)+z = x+(y+z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Distributivität	$x \cdot y + x \cdot z = x \cdot (y + z)$	$(x + y) \cdot (x + z) = x + y \cdot z$
De Morgan	$\overline{(x + y)} = \overline{x} \cdot \overline{y}$	$\overline{(x \cdot y)} = \overline{x} + \overline{y}$
De Morgan (gen.)	$\overline{(x_1 + \dots + x_n)} = \overline{x_1} \cdot \dots \cdot \overline{x_n}$	$\overline{(x_1 \cdot \dots \cdot x_n)} = \overline{x_1} + \dots + \overline{x_n}$
Absorption 1	$x + x \cdot y = x$	$x \cdot (x + y) = x$
Absorption 2	$x + \overline{x} \cdot y = x + y$	$x \cdot (\overline{x} + y) = x \cdot y$
Konsensus	$xy + \overline{x}z + yz = xy + \overline{x}z$	$(x + y)(\overline{x} + z)(y + z) = (x + y)(\overline{x} + z)$

Darstellungsalternativen



Darstellungsformen für Schaltfunktionen (gleichberechtigt)

- Wahrheitstabelle
- Boolesche Funktion (Polynomdarstellung)
- Schaltbild (Grafische Darstellung durch Schaltsymbole)
- ...

Für diese gilt:

- Für eine Wahrheitstabelle existieren **mehrere** Boolesche Funktionen und **mehrere** Schaltbilder
- Für eine Boolesche Funktion existieren **mehrere** Schaltbilder aber **genau eine** Wahrheitstabelle
- Für ein Schaltbild existiert **genau eine** Boolesche Funktion und **genau eine** Wahrheitstabelle