

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2024/2025

KAPITEL 1: Grundlagen

2. Logik, Zusatz

Dozent: Prof. Dr. A. Gepperth

Email: alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de

Wiederholung: Aussagen und ihre Verknüpfungen

Eine mathematische Aussage beschreibt einen mathematischen Sachverhalt, dem ein Wahrheitswert **wahr** (w) oder **falsch** (f) zugeordnet werden kann.

Beispiel

A: „2 ist eine gerade Zahl.“ (w)

B: „2 ist eine ungerade Zahl.“ (f)

Aus mathematischen Aussagen A und B kann man mit Hilfe von

\neg („nicht“)

\wedge („und“)

\vee („oder“)

neue mathematischen Aussagen bilden, deren Wahrheitswerte von den Wahrheitswerten von A und B abhängen. Die Wahrheitswerte der neuen Aussagen sind in nachfolgenden Tabellen („Wahrheitstabellen“) definiert.

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Negation: $\neg A$

Sprechweise: „A gilt nicht.“

A	$\neg A$
w	f
f	w

Beispiel

A: „2 ist eine gerade Zahl.“ (w)

$\neg A$: „Es gilt nicht, dass 2 eine gerade Zahl ist.“ (f)

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Konjunktion (und): $A \wedge B$

Sprechweise „A und B (gelten).“

„Sowohl A gilt als auch B.“

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beispiel

A: „2 ist eine gerade Zahl.“ (w)

B: „3 ist eine gerade Zahl.“ (f)

$A \wedge B$: „2 ist eine gerade Zahl und 3 ist eine gerade Zahl.“ (f)

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Disjunktion (oder): $A \vee B$

Sprechweise: „ A (gilt) oder B (gilt).“

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beachte: Dies ist kein ausschließendes „oder“. Auch wenn A und B beide wahr sind, ist $A \vee B$ wahr.

Beispiel

A : „2 ist eine gerade Zahl.“ (w)

B : „3 ist eine gerade Zahl.“ (f)

C : „4 ist eine gerade Zahl.“ (w)

$A \vee B$: „2 ist eine gerade Zahl oder 3 ist eine gerade Zahl.“ (w)

$A \vee C$: „2 ist eine gerade Zahl oder 4 ist eine gerade Zahl.“

(w)

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Implikation: $A \Rightarrow B$

Sprechweise: „Wenn A (gilt), dann (gilt auch) B .“

„Aus A folgt B .“ „ A impliziert B .“

„ A ist hinreichend/eine hinreichende Bedingung für B .“

„ B ist notwendig/eine notwendige Bedingung für A .“

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Warum diese Definition? Intuitives Verständnis von $A \Rightarrow B$:

- ▶ Wenn A wahr ist, können wir eine eindeutige Aussage über B treffen (Zeilen 1 und 2)
- ▶ Wenn A falsch ist wissen wir nichts über B (kann wahr oder falsch sein, Zeilen 3 und 4)
- ▶ Wenn B falsch ist, kann A nicht wahr sein (Zeile 4) sonst Widerspruch zu Zeile 1
- ▶ Wenn B wahr ist, wissen wir nichts über A (Zeile 3)

Aussagen und ihre Verknüpfungen

Implikation: $A \Rightarrow B$

Problem: mathematische Definition von $A \Rightarrow B$ passt nicht ganz zu unserem Sprachgebrauch

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Beispiele:

- ▶ Aus A ("Donald Trump ist Amerikaner") folgt B ("Robert Habeck ist Deutscher")
- ▶ Aus A ("2 ist gerade") folgt B ("Robert Habeck ist Deutscher")
- ▶ Aus A ("3 ist gerade") folgt B ("Robert Habeck ist Franzose")

Vorsicht: Mathematische Definition von $A \Rightarrow B$ kümmert sich nicht um Kausalität!

Mathematische Sätze

Mathematische Sätze sind oft von der Form

Satz: Wenn A , dann B .

In Symbolen: $A \Rightarrow B$

Beispiel

Satz: Wenn n durch 4 teilbar ist, dann ist n auch durch 2 teilbar.

Oder: $A \Rightarrow B$ mit $A(n) : n/4 \in \mathbb{N}$ und $B(n) : n$ ist gerade

In einem **Beweis** wird gezeigt, dass die Aussage
 $(A(n) \Rightarrow B(n)) = w \forall n$

Zur Erinnerung: Wahrheitstafel von $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

- ▶ Zu beweisen: $A \Rightarrow B$ mit $A(n) : n/4 \in \mathbb{N}$ und $B(n) : n$ ist gerade
- ▶ Zum Beweis muss gezeigt werden, dass $A(n) \Rightarrow B(n)$ für jedes n "wahr" ergibt und/oder für kein n "falsch"!

Wie macht man das?

- ▶ **Tafelrechnung:** Ausprobieren ob $A(n) \Rightarrow B(n)$ für alle n !
- ▶ Systematisch: es genügt, dies zu zeigen für alle Fälle wo $A(n)$ wahr ist!
- ▶ Weil: falls $A(n)$ falsch ist ist die Implikation sowieso wahr (siehe Tafel!)

Direkter Beweis: Tafelrechnung