Hochschule Fulda
Fachbereich Angewandte Informatik
Prof. Dr. A. Radl

Wintersemester 2024/2025
Mathematische Grundlagen – AI1004
Besprechung: 13.01.–17.01.2025

Übungsblatt 9

(rekursive Folgen, Reihen, Polynomdivision)

Aufgabe 1
Bestimmen Sie die Grenzwerte der folgenden Reihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 5\left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=2}^{\infty} 2\,(-0.4)^k .$$

Aufgabe 2
Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{\sqrt{k}}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^k$

Aufgabe 3
Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{3^k}$ (b) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k\left(1-\frac{1}{k}\right)$ (c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{k^2 5^k}$ (d) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

Aufgabe 4
Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_0 := 1 \quad \text{und} \quad x_{n+1} := \sqrt{2+x_n},\ n \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$x_{n+1} \geq x_n$$

gilt.

(b) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \leq 2$$

gilt.

(c) Schließen Sie nun auf die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für eine konvergente Folge (y_n) mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ auch $\lim_{n\to\infty} \sqrt{y_n} = \sqrt{y}$ gilt. Ebenso können Sie die Monotonie der Wurzelfunktion verwenden, d. h., für $a, b \in [0,\infty)$ mit $a \leq b$ gilt auch $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

Aufgabe 5 (Wenn noch Zeit ist ...)
Führen Sie folgende Polynomdivisionen durch:

(a) $(-x^3+4x^2-x-6) : (x-2)$,

(b) $(3x^3+10x^2-7x+4) : (3x^2-2x+1)$,

(c) $(x^5-2x^3-x^2+1) : (2x^3-2)$.