

## Übungsblatt 4 – Lösungshinweise

(vollständige Induktion, Zahlbereiche)

---

### Aufgabe 1

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1.$$

#### Lösungshinweis

$$A(n) : \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1$$

Behauptung: Für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , gilt  $A(n)$ .

Beweis:

I.A.: ( $n = 1$ )

Linke Seite:  $\prod_{k=1}^1 \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$

Rechte Seite:  $1 + 1 = 2.$

Linke und rechte Seite stimmen überein. Also ist  $A(1)$  wahr.

I.S.: ( $n \rightarrow n + 1$ ) (Wir zeigen, dass  $A(n + 1)$  wahr ist, also

$$\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 2,$$

unter der Annahme, dass  $A(n)$  wahr ist.)

Sei  $n \in \mathbb{N}^*$ . Angenommen, es gilt

$$\underbrace{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)}_{A(n)} = n + 1. \quad (\text{IV}).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right) &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) \stackrel{(\text{IV})}{=} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) (n + 1) \\ &= n + 1 + 1 = n + 2. \end{aligned}$$

Somit ist  $A(n + 1)$  wahr.  $\square$

### Aufgabe 2 (Bernoullische Ungleichung)

Sei  $x \in [-1, \infty)$ . Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

gilt. An welcher Stelle haben Sie die Voraussetzung  $x \geq -1$  verwendet?

### Lösungshinweis

$$A(n) : (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Behauptung: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $A(n)$ , sofern  $x \geq -1$ .

Beweis:

I.A.: ( $n = 0$ )

$$\text{Linke Seite: } (1+x)^0 = 1$$

$$\text{Rechte Seite: } 1 + 0x = 1$$

$1 \geq 1$  ist wahr, also ist  $A(0)$  wahr.

I.S.: ( $n \rightarrow n+1$ ) (Wir zeigen, dass  $A(n+1)$  wahr ist, also

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x,$$

unter der Annahme, dass  $A(n)$  wahr ist.)

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Angenommen, es gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \quad (\text{IV}).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \stackrel{(\text{IV}), (*)}{\geq} (1+x)(1+nx) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x. \end{aligned}$$

Somit ist auch  $A(n+1)$  erfüllt.  $\square$

Die Voraussetzung  $x \geq -1$  wurde bei der ersten Ungleichung (\*) verwendet. Wäre  $1+x < 0$ , dann würde sich das Ungleichheitszeichen umdrehen.

**Aufgabe 3** (Lösungsansätze für Teilaufgaben (b) und (c) werden in der Vorlesung am 18.11.2024 nochmal ausgeführt.)

Schreiben Sie folgende Mengen als Intervalle oder Vereinigung von Intervallen.

$$(a) A := \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{9\} : \frac{4}{x-9} \leq 2 \right\}$$

$$(b) B := \{x \in \mathbb{R} : |x+4| \geq 6\}$$

$$(c) C := \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq |x+3|\}$$

### Lösungshinweis

(a) Fall 1:  $x > 9$

$$\frac{4}{x-9} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \leq 2(x-9) \Leftrightarrow 2 \leq x-9 \Leftrightarrow 11 \leq x.$$

Fall 2:  $x < 9$

$$\frac{4}{x-9} \leq 2 \Leftrightarrow 4 \geq 2(x-9) \Leftrightarrow 2 \geq x-9 \Leftrightarrow 11 \geq x.$$

Somit erhalten wir

$$A = [11, \infty) \cup (-\infty, 9).$$

(b) Fall 1:  $x \geq -4$

$$|x - (-4)| \geq 6 \Leftrightarrow x - (-4) \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 2.$$

Fall 2:  $x < -4$

$$|x - (-4)| \geq 6 \Leftrightarrow -4 - x \geq 6 \Leftrightarrow -10 \geq x.$$

Somit erhalten wir

$$B = (-\infty, -10] \cup [2, \infty).$$

(c) Fall 1:  $x \geq 2$

$$|x - 2| \geq |x + 3| \Leftrightarrow x - 2 \geq x + 3 \Leftrightarrow -2 \geq 3.$$

Fall 2:  $-3 \leq x < 2$

$$|x - 2| \geq |x + 3| \Leftrightarrow 2 - x \geq x + 3 \Leftrightarrow -1 \geq 2x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \geq x$$

Fall 3:  $x < -3$

$$|x - 2| \geq |x + 3| \Leftrightarrow 2 - x \geq -x - 3 \Leftrightarrow 2 \geq -3.$$

Somit erhalten wir

$$C = \emptyset \cup \left[ -3, -\frac{1}{2} \right] \cup (-\infty, -3) = \left( -\infty, -\frac{1}{2} \right].$$

#### Aufgabe 4

Geben Sie für folgende Teilmengen von  $\mathbb{R}$  jeweils - falls vorhanden - das Supremum, das Infimum, das Maximum sowie das Minimum an:

$$(a) M_1 := \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ und } x^2 \leq 4\},$$

$$(b) M_2 := \left\{ \frac{1}{z} : z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\},$$

$$(c) M_3 := \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^* \right\},$$

$$(d) M_4 := \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

#### Lösungshinweis

	sup	inf	max	min
$M_1$	2	0	2	–
$M_2$	1	–1	1	–1
$M_3$	2	0	2	–
$M_4$	1	–1	–	–

#### Aufgabe 5

Welche Aussagen sind wahr?

$$(a) \forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y = x^2 \text{ wahr}$$

$$(b) \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : y = x^2 \text{ falsch}$$

- (c)  $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y = x^2$  wahr
- (d)  $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : y = x^2$  falsch
- (e)  $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : y = x^2$  falsch

**Aufgabe 6** (Wenn noch Zeit ist ...)

- (a) Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus
  - (i)  $\text{ggT}(156, -64),$
  - (ii)  $\text{ggT}(-296, -96),$
  - (iii)  $\text{ggT}(34, 21).$  Was fällt auf?
- (b) (Erweiterter euklidischer Algorithmus) Finden Sie Zahlen  $s, t \in \mathbb{Z}$  so, dass

$$\text{ggT}(156, -64) = s \cdot 156 + t \cdot (-64).$$

Hinweis: Gehen Sie Ihre Rechenschritte aus Teil (a)(i) in umgekehrter Reihenfolge durch.

**Lösungshinweis**

- (a) (i) Es ist  $\text{ggT}(156, -64) = \text{ggT}(156, 64).$  Wir berechnen

$$\begin{array}{ll} (1) & 156 = 2 \cdot 64 + 28 \\ (2) & 64 = 2 \cdot 28 + 8 \\ (3) & 28 = 3 \cdot 8 + 4 \\ (4) & 8 = 2 \cdot 4 + 0 \end{array}$$

und erhalten  $\text{ggT}(156, -64) = 4.$

- (ii) Es ist  $\text{ggT}(-296, -96) = \text{ggT}(296, 96).$  Wir berechnen

$$\begin{array}{ll} 296 = 3 \cdot 96 + 8 \\ 96 = 12 \cdot 8 + 0 \end{array}$$

und erhalten  $\text{ggT}(-296, -96) = 8.$

- (iii) Wir berechnen

$$\begin{array}{l} 34 = 1 \cdot 21 + 13 \\ 21 = 1 \cdot 13 + 8 \\ 13 = 1 \cdot 8 + 5 \\ 8 = 1 \cdot 5 + 3 \\ 5 = 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 = 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 = 2 \cdot 1 + 0 \end{array}$$

und erhalten  $\text{ggT}(34, 21) = 1.$  Es fällt auf, dass die Reste gerade die ersten Fibonacci-Zahlen sind.

- (b) Wir gehen die Rechenschritte aus Teil (a)(i) nun in umgekehrter Reihenfolge durch und erhalten

$$\begin{aligned} 4 &\stackrel{(3)}{=} 28 - 3 \cdot 8 \\ &\stackrel{(2)}{=} 28 - 3 \cdot (64 - 2 \cdot 28) = 7 \cdot 28 - 3 \cdot 64 \\ &\stackrel{(1)}{=} 7 \cdot (156 - 2 \cdot 64) - 3 \cdot 64 = 7 \cdot 156 - 17 \cdot 64 \\ &= 7 \cdot 156 + 17 \cdot (-64). \end{aligned}$$

**Aufgabe 7** (Wenn noch Zeit ist ...)

Sei  $n \in \mathbb{N}^*$ . Desweiteren sei  $a_k$  für jedes  $k \in \mathbb{N}^*$  eine reelle Zahl. Welche Gleichheiten gelten für jede Wahl von  $n$  und  $a_k$ ?

$$(i) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=2}^{n+1} (k+1)^3$$

$$(ii) \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{l=3}^{n+2} (l-2)^3$$

$$(iii) \quad \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left( \sum_{k=1}^n a_k \right) = \sum_{k=1}^n a_k^2$$

$$(iv) \quad \left( \prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left( \prod_{k=1}^n a_k \right) = \prod_{k=1}^n a_k^2$$

$$(v) \quad 4 \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 4a_k$$

$$(vi) \quad 4 \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n (4a_k)$$

Nur die Gleichheiten in (ii), (iv) und (v) gelten für jede Wahl von  $n$  und  $a_k$ .