UNIKASSEL VERSITÄT

Andreas Bley
Christian Rieck

FB 10, Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26

# Übungsblatt 2

## Grundlagen der Mathematik

Abgabe bis **Freitag, 7. November 2025, 23:59 Uhr**

## Hausaufgaben

**Aufgabe 1** (4+4 Punkte)
Sei $n$ eine natürliche Zahl. Wir definieren die folgenden Aussageformen:

- $a(n)$ : „$(n+1)^2$ ist eine gerade Zahl."
- $b(n)$ : „$n$ ist eine ungerade Zahl."
- $c(n)$ : „$n$ ist eine Primzahl."

Untersuchen Sie nun die folgenden quantifizierten Aussagen:

(i) $\forall n \in \mathbb{N} : a(n) \Rightarrow b(n)$

(ii) $\exists n \in \mathbb{N} : a(n) \wedge c(n)$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1 \; \exists k, \ell \in \mathbb{N},\; k, \ell > 1 : (\neg c(n)) \Rightarrow (n = k \cdot \ell)$

(iv) $\exists k, \ell \in \mathbb{N},\; k, \ell > 1 \; \forall n \in \mathbb{N},\; n > 1 : (\neg c(n)) \Rightarrow (n = k \cdot \ell)$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Formulieren Sie für (i), (ii), (iii) und (iv) sprachlich korrekte deutsche Sätze.

(b) Entscheiden Sie für jede Aussage, ob diese wahr oder falsch ist *und* geben Sie dafür jeweils eine nachvollziehbare Begründung an.

*Hinweise zu den „nachvollziehbaren Begründungen":*
Wahre Existenz-Aussagen kann man sehr einfach dadurch begründen, dass man ein Objekt, dessen Existenz behauptet wird, explizit angibt und die behaupteten logischen Bedingungen für dieses Objekt nachweist: Man gibt also ein konkretes Beispiel an.

Für die Begründung einer falschen All-Aussage genügt ein konkretes Gegenbeispiel, denn die Negation einer falschen All-Aussage entspricht einer wahren Existenz-Aussage.

Für die Begründung einer wahren All- oder falschen Existenz-Aussage bedarf es in der Mathematik einer aufwendigeren logischen Argumentation. Hier dürfen Sie Ihr Wissen aus der Schulmathematik und dem Mathematikvorkurs nutzen.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)
Schreiben Sie folgende Aussagen mit den Quantoren $\forall$ und $\exists$ und bilden Sie dann die Verneinung (ebenfalls in Quantorschreibweise).

(a) Es gibt ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $x > 0$.

(b) Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x > 0$.

(c) Für alle $y \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $y > x$.

(d) Es gibt ein $y \in \mathbb{Z}$, sodass für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $y > x$.

**Aufgabe 3** (4+2+2 Punkte)
Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zwei Funktionen in den natürlichen Zahlen.

(a) Bilden Sie die formale Negation der Aussage

$$\exists c \in \mathbb{N},\ n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : (n \geq n_0) \Rightarrow (f(n) \leq c \cdot g(n)).$$

In der formalen Negation sollen keine Verneinungszeichen ($\neg$) mehr auftreten.

(b) Geben Sie die gegebene Aussage logisch und sprachlich korrekt als deutschen Satz wider.

(c) Geben Sie die Negation der gegebenen Aussage logisch und sprachlich korrekt als deutschen Satz wieder.

Verwenden Sie dabei nicht Formulierungen wie „es existiert kein'“ oder „es gibt kein/nicht“ und lösen Sie dabei die Negtion der inneren Implikation sinnvoll auf, d.h. schreiben Sie nicht „es folgt nicht ..., dass“ oder „es gilt nicht, dass aus ... folgt“.

# Präsenzaufgaben

### Aufgabe 4

In den folgenden Aussagen ist jeweils mindestens eine Existenzaussage („Es gibt...“) oder eine Allaussage („Für alle...“) enthalten.

(a) Formulieren Sie die Aussagen so um, dass die Existenzaussagen bzw. Allaussagen deutlich und die Aussagen eindeutig interpretierbar werden.

 (i) Einige natürliche Zahlen haben mehr als zwei Teiler.

 (ii) Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.

 (iii) Wir können eine natürliche Zahl finden, die von genau 12 Zahlen geteilt wird.

 (iv) Eine Vorlesung wird von jedem Studenten besucht.

 (v) Ein Student besucht jede Vorlesung.

(b) Negieren Sie die Aussagen aus Aufgabenteil (a).

### Aufgabe 5

Lösen Sie das folgende Rätsel (aus Logeleien in *Die Zeit*):

Alle Knaffs haben die gleiche Form und sind gleich groß. Alle grünen Hunkis haben ebenfalls die gleiche Form und Größe. Zwanzig Knaffs passen gerade in einen Plauz. Alle Hemputis enthalten grüne Hunkis. Ein grüner Hunki ist zehn Prozent größer als ein Knaff. Ein Hemputi ist kleiner als ein Plauz.

Wenn der Inhalt aller Plauze und aller Hemputis vorwiegend rot ist, wie viele grüne Hunkis können maximal in einem Hemputi sein?

### Aufgabe 6

Eine natürliche Zahl, die größer als 1 und ausschließlich durch sich selbst und durch 1 teilbar ist nennt man Primzahl.

(a) Negieren Sie die folgenden Aussagen:

 (i) Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 + n + 41$ eine Primzahl.

 (ii) Es gibt eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ für die $n^2 + n + 41$ eine Primzahl ist.

 (iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $n^2 + n + 41$ keine Primzahl ist, dann ist $n$ eine Primzahl.

 (iv) Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ so dass

$$(nm)^2 + (nm) + 41$$

 keine Primzahl ist.

(b) Entscheiden Sie für jede Aussage aus (a), ob die Aussage oder ihre Negation wahr ist. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

(c) Beweisen Sie Ihre Behauptungen aus (b).

**Aufgabe 7**

Schreiben Sie die folgenden Aussagen formal mit Quantoren und Aussageformen der Art „$2|x$“ auf (wobei „$2|x$“ heißt, dass 2 ein Teiler von $x$ ist). Negieren Sie jede der Aussagen sowohl formal in Quantorenschreibweise als auch in Worten. Die Menge $M$ sei dabei immer eine Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.

(a) Alle Elemente der Menge $M$ sind gerade.

(b) Für alle Elemente $m \in M$ gilt: Wenn $m$ gerade ist, dann ist $m$ auch durch 4 teilbar.

(c) Es gibt zwei verschiedene Elemente $p, q \in M$ deren Differenz ungerade ist.

(d) Für alle Elemente $p \in M$ gibt es eine natürliche Zahl $r$, so dass für alle Elemente $q \in M$ mit $q \neq p$ gilt, dass die Differenz von $p$ und $q$ betragsmäßig mindestens $r$ ist.