Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2024/2025

KAPITEL V: Folgen und Reihen

1. Motivation

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl (Vertretung: Prof. Dr. A. Gepperth)

Email: `alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de`

Beispiele

1a) Bakterienkultur verdoppelt sich durch Zellteilung jede Stunde

vergangene Stunden	0	1	2	3	$\cdots$	n
Anzahl Bakterien	a	$2a$	$2 \cdot 2a$	$2 \cdot 2 \cdot 2a$	$\cdots$	$2^n a$

1b) radioaktiver Zerfall

verstrichene HWZ	0	1	2	$\cdots$	n
Anzahl Atomkerne	N	$\frac{1}{2}N$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}N$	$\cdots$	$\left(\frac{1}{2}\right)^n N$

Beispiele

2) Verzinsung von Kapital K mit Jahreszinssatz von 10 %

Zeit	Guthaben
nach 1 Jahr	$\left(1+\frac{1}{10}\right) K = 1,1K$
nach 2 Jahren	$\left(1+\frac{1}{10}\right)^2 K$
nach 3 Jahren	$\left(1+\frac{1}{10}\right)^3 K$
nach 100 Jahre	$\left(1+\frac{1}{10}\right)^1 00K \approx 13781K$

Was passiert für „$n \to \infty$“?

Beispiele

3) Medikamentenabbau
   - Ein Patient bekommt alle 24 Stunden eine bestimmte Dosis d eines Medikaments verabreicht.
   - Der Patient scheidet innerhalb von 24 Stunden 30 % des im Körper befindlichen Medikaments aus.

   Frage: Wie viel des Medikaments befindet sich nach n Tagen im Körper?

vergangene Tage	0	1	2
Medikamentenmenge	d	$d + 0,7d$	$d + 0,7d + (0,7)^2 d$

3	$\cdots$	n
$d + 0,7d + (0,7)^2 d + (0,7)^3 d$	$\cdots$	$d \sum_{k=0}^{n} (0,7)^k$

Beispiele

4) Kaninchenvermehrung nach Fibonacci (ca. 1170–1240)

   (Tragzeit: 1 Monat; fortplanzungsfähig ebenfalls nach 1 Monat; jeder Wurf besteht aus genau einem weiteren Kaninchenpaar)

Anzahl Monate	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
Anzahl Kaninchenpaare	1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$

   Anzahl f_n der Kaninchenpaare nach n Monaten:

$$f_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & n \geq 2. \end{cases}$$

   f_n heißt n-te Fibonacci-Zahl.

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2024/2025

KAPITEL V: Folgen und Reihen

2. Folgen und Konvergenz

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl (Vertretung: Prof. Dr. A. Gepperth)

Email: alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de

Folgen

Definition

Eine Folge in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto x_n.$$

Kurznotation:

$(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ bzw. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ bzw. $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \subseteq \mathbb{R}$
oder nur (x_n) bzw. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$.

Bemerkung

Manchmal ist der Definitionsbereich der Abbildung nicht ganz $\mathbb{N}$, sondern startet bei einem $n_0 \in \mathbb{N}$, also

$$f : \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \to \mathbb{R}.$$

Kurznotation: $(x_n)_{n\geq n_0}$.

Beispiele für Folgen

- $x \in \mathbb{R},\ x_n := x :\quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x, x, x, \ldots)$ (konstante Folge)
- $x_n := \frac{1}{n} :\quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$
- $x_n := \frac{1}{2^n} :\quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$
- $x_n := (-1)^n :\quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, \ldots)$
- $x_n := n :\quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, \ldots)$
- $p \in \mathbb{R},\ x_n := \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n :$
  $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(1 + p, \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{p}{3}\right)^3, \ldots\right)$
- $q \in \mathbb{R},\ x_n := \sum_{k=0}^{n} q^k :$
  $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1 + q, 1 + q + q^2, 1 + q + q^2 + q^3, \ldots)$

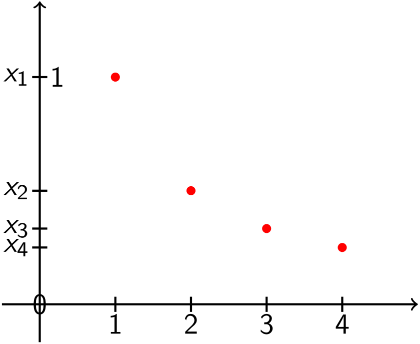
Grundfrage:

Wie sieht das *Langzeitverhalten* einer solchen Folge aus, d. h., was passiert für „$n \to \infty$“?

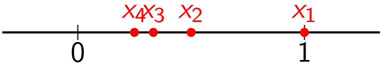
Visualisierung von Folgen

Beispiel: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Möglichkeit 1:



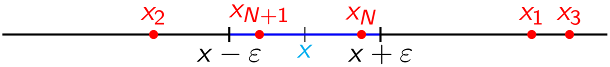
Möglichkeit 2:



Konvergenz

Definition

- Eine reelle Folge (x_n) heißt konvergent gegen $x \in \mathbb{R}$, falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|x_n - x| < \varepsilon$.



Notation: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$ oder $x_n \to x, n \to \infty$

- Die Zahl x heißt der Grenzwert oder Limes der Folge.
- (x_n) heißt konvergent, wenn es ein $x \in \mathbb{R}$ gibt, gegen das sie konvergiert.
- Ist $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, so bezeichnet man (x_n) als Nullfolge.
- Die Folge (x_n) heißt divergent, falls sie nicht konvergiert.

Beispiele

zur Konvergenz

- Die konstante Folge $(x, x, x, \ldots)$, $x \in \mathbb{R}$ konvergiert gegen x.
- Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ konvergiert gegen 0.

zur Divergenz

- Die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.
- Die Folge $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

Bemerkung

- Eine Folge kann keine zwei verschiedenen Grenzwerte haben.
- Der „Anfang" einer Folge hat keinen Einfluss auf die Frage ihrer Konvergenz:

  $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn für ein $N \in \mathbb{N}$ die Folge $(x_n)_{n\geq N}$ konvergent ist.

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2024/2025

KAPITEL V: Folgen und Reihen

3. Umgang mit Folgen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl (Vertretung: Prof. Dr. A. Gepperth)

Email: `alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de`

Rechenregeln für Zahlenfolgen

Satz (ohne Beweis)

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen* mit den jeweiligen Grenzwerten $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Dann gelten:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y, \qquad \lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = x - y.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$, insb. $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \cdot x$ für $c \in \mathbb{R}$ fest.
3. Ist $y \neq 0$, so existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $y_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.