

## Übungsblatt 3

(Summenzeichen, Binomialkoeffizienten, binomischer Lehrsatz, vollständige Induktion)

---

### Aufgabe 1

Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe des Summenzeichens:

- (a)  $1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + 5^6,$
- (b)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27},$
- (c)  $4 + 7 + 10 + 13 + 16 + 19 + 22.$

### Aufgabe 2

Zeigen Sie für  $n \in \mathbb{N}^*$  folgende Identitäten mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes:

- (a)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$
- (b)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

### Aufgabe 3

Zeigen Sie nachfolgende Behauptungen jeweils mit vollständiger Induktion.

- (a) Für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

- (b) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$2^n \geq n + 1.$$

- (c) Für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  ist die Zahl  $3^n - 3$  ohne Rest durch 6 teilbar.

### Aufgabe 4 (Zum Knobeln – wenn noch Zeit ist ...)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jedes  $n \in \mathbb{N}^*$  die Potenzmenge von  $\{1, \dots, n\}$  genau  $2^n$  Elemente enthält.

### Aufgabe 5 (Wenn noch Zeit ist ...)

Zeigen Sie folgende Identitäten für die Binomialkoeffizienten:

- (a)  $\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1},$  falls  $n \in \mathbb{N}^*,$
- (b)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$  falls  $n, k \in \mathbb{N}$  und  $k \leq n.$
- (c)  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$  falls  $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$  und  $k+1 \leq n.$