Hochschule Fulda
Fachbereich Angewandte Informatik
Prof. Dr. A. Radl

Wintersemester 2024/2025
Mathematische Grundlagen – AI1004
Besprechung: 28.10.–01.11.2024

Übungsblatt 1 – Lösungshinweise

(Mengen)

Aufgabe 1

(a) Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Entscheiden Sie jeweils, welche Schreibweisen korrekt sind.

(i) $1 \in M$, korrekt (ii) $\{1\} \in M$, falsch (iii) $\{1\} \subseteq M$. korrekt

(b) Sei $L = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Entscheiden Sie jeweils, welche Schreibweisen korrekt sind.

(i) $2 \in L$, falsch (ii) $\{2\} \in L$, korrekt (iii) $\{2\} \subseteq L$, falsch (iv) $\{\{2\}\} \subseteq L$. korrekt

Aufgabe 2

(a) Gegeben seien die Mengen $X = \{1, 3, 5, 7\}$, $Y = \{5, 7, 8\}$ und $Z = \{1, 5\}$. Geben Sie folgende Mengen an:

(i) $Z \setminus X$, (ii) $X \setminus Z$ (iii) $X \cap Y \cap Z$ (iv) $X \cup Y \cup Z$ (v) $X \times Z$.

(b) In der Grundmenge $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ betrachten wir die Teilmengen

$$L = \{1, 2, 4, 7\}, \quad M = \{3, 5, 6, 8, 9\}, \quad N = \{4, 5, 9\}.$$

Bestimmen Sie

(i) $\overline{L} \cap N$, (ii) $(L \cap \overline{M}) \cup (N \cap \overline{N})$, (iii) $L \cap \overline{N \cap \overline{M}}$.

(c) Gegeben seien die Mengen $M_1 = \mathbb{Z}$, $M_2 = \mathbb{N}$, $M_3 = \{-1, 1, 2\}$ und $M_4 := [-1, 2)$. Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(i) $M_4 \cup M_3$, (ii) $M_4 \cap (M_2 \setminus M_3)$, (iii) $M_3 \setminus (M_1 \setminus M_2)$.

(d) Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Geben Sie die Potenzmenge $\mathbb{P}(A)$ von A an, indem Sie die darin enthaltenen Elemente auflisten.

Lösungshinweis

(a) (i) $Z \setminus X = \{1, 5\} \setminus \{1, 3, 5, 7\} = \emptyset$,
(ii) $X \setminus Z = \{1, 3, 5, 7\} \setminus \{1, 5\} = \{3, 7\}$,
(iii) $X \cap Y \cap Z = \{5\}$,
(iv) $X \cup Y \cup Z = \{1, 3, 5, 7, 8\}$.
(v) $X \times Z = \{(1, 1), (1, 5), (3, 1), (3, 5), (5, 1), (5, 5), (7, 1), (7, 5)\}$.

(b) (i) $\overline{L} \cap N = \{5, 9\}$,
(ii) $(L \cap \overline{M}) \cup (N \cap \overline{N}) = L$,
(iii) $L \cap \overline{N \cap \overline{M}} = \{1, 2, 7\}$.

(c) (i) $M_4 \cup M_3 = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\}$,
(ii) $M_4 \cap (M_2 \setminus M_3) = \{0\}$,
(iii) $M_3 \setminus (M_1 \setminus M_2) = \{1, 2\}$.

(d) $\mathbb{P}(A) = \{M : M \subseteq A\} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

Aufgabe 3

(a) In der Vorlesung haben wir gesehen, dass sich die Menge der geraden natürlichen Zahlen in der Form $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ schreiben lässt und die Menge der ungeraden natürlichen Zahlen in der Form $\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}$. Stellen Sie folgende Mengen nach dem gleichen Prinzip dar:

(i) Die Menge der natürlichen Zahlen, die ohne Rest durch 7 teilbar ist. $\{7n : n \in \mathbb{N}\}$

(ii) Die Menge der natürlichen Zahlen, die bei Division durch 5 den Rest 3 lässt. $\{5n+3 : n \in \mathbb{N}\}$

(iii) Die Menge der natürlichen Zahlen, die sowohl durch 2 als auch durch 3 ohne Rest teilbar ist. $\{6n : n \in \mathbb{N}\}$

(b) Geben Sie folgende Mengen durch Auflistung der ersten Elemente an:

(i)	$\{3n-2 : n \in \mathbb{N}\} = \{-2, 1, 4, 7, \ldots\}$	(ii)	$\{3n+2 : n \in \mathbb{N}\} = \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$
(iii)	$\{2^n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 4, 8, \ldots\}$	(iv)	$\{2^{2n} : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 4, 16, 64, \ldots\}$

Aufgabe 4

Seien A, B und C Mengen.

(a) Veranschaulichen Sie die Mengen

$$(A \cap B) \cup C, \quad (A \cup B) \cap C, \quad (A \cup C) \cap (B \cup C), \quad (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

durch Venn-Diagramme. Was fällt auf?

(b) Veranschaulichen Sie die Mengen

$$A \cup (B \cap C) \quad \text{und} \quad (A \cup B) \cap C$$

durch Venn-Diagramme. Was fällt auf?

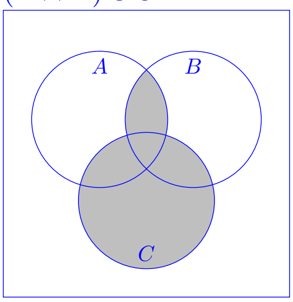
(c) Sei X eine Menge und seien $A, B \subseteq X$. Veranschaulichen Sie die Mengen

$$\overline{A \cup B}, \quad \overline{A} \cup \overline{B}, \quad \overline{A \cap B}, \quad \overline{A} \cap \overline{B}$$

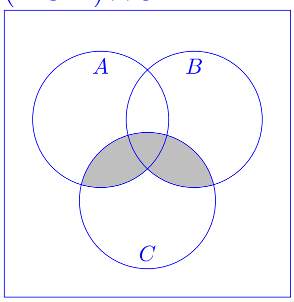
durch Venn-Diagramme. Was fällt auf?

Lösungshinweis

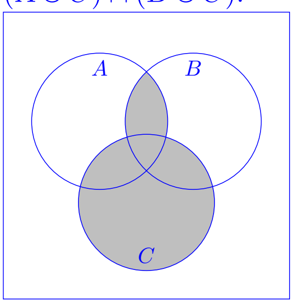
(a) $(A \cap B) \cup C$:



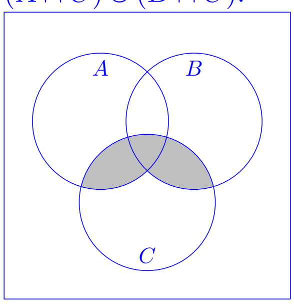
$(A \cup B) \cap C$:



$(A \cup C) \cap (B \cup C)$:

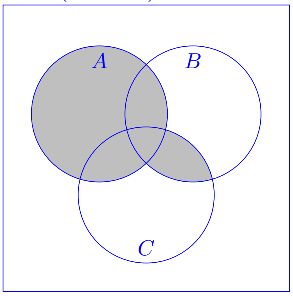


$(A \cap C) \cup (B \cap C)$:

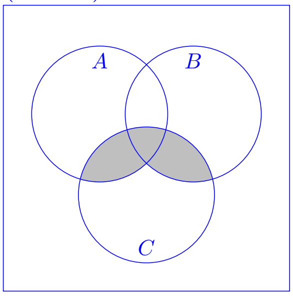


Es fällt auf, dass $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ gilt sowie $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

(b) $A \cup (B \cap C)$:

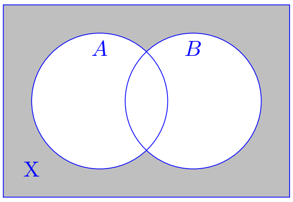


$(A \cup B) \cap C$:

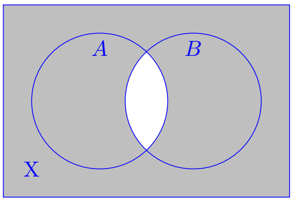


Es fällt auf, dass man die Klammern nicht weglassen kann.

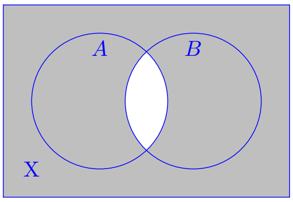
(c) $\overline{A \cup B}$:



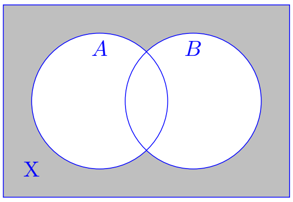
$\overline{A} \cup \overline{B}$:



$\overline{A \cap B}$:



$\overline{A} \cap \overline{B}$:



Es fällt auf, dass $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ gilt sowie $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Aufgabe 5 (Wenn noch Zeit ist ...)

Seien A, B, C Teilmengen einer Grundmenge X. Kreuzen Sie an, welche Mengengleichheiten für jede Wahl von A, B, C und X immer erfüllt sind?

	immer erfüllt	nicht immer erfüllt
(i) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$		x
(ii) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$	x	
(iii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	x	
(iv) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$	x	

Falls eine Gleichheit nicht immer erfüllt ist, geben Sie ein konkretes Beispiel an, bei dem keine Gleichheit gilt.
In Zeile (i) der Tabelle gilt nicht immer Gleichheit. Zum Beispiel für $A = B = C = \{1, 2, 3\}$ ist $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus \emptyset = A$, aber $(A \setminus B) \setminus C = \emptyset \setminus C = \emptyset$.