

## Übungsblatt 6

(unendliche Mengen, Kombinatorik)

---

**Hinweis:** Zur Begründung Ihrer Antworten bei den Kombinatorik-Aufgaben können Sie versuchen, das Problem auf ein geeignetes Urnenmodell zurückzuführen.

**Aufgabe 1** (Falls noch nicht in der Vorwoche besprochen ...)

- (a) Nach R. Dedekind (1831–1916) ist eine Menge  $M$  *unendlich*, wenn es eine echte Teilmenge  $K$  von  $M$  gibt (also  $K \subseteq M$  und  $K \neq M$ ), die sich bijektiv auf  $M$  abbilden lässt. Zeigen Sie, dass  $\mathbb{N}$  nach dieser Definition eine unendliche Menge ist.
- (b) Ist  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  abzählbar?

**Aufgabe 2**

- (a) Seien  $M_1, \dots, M_n$  endliche nicht-leere Mengen. Geben Sie eine Formel für die Anzahl der Elemente des kartesischen Produkts  $M_1 \times \dots \times M_n$  an (ohne Beweis).
- (b) Wie viele Autonummern der Form

$$\text{FD} - b_1 b_2 \quad z_1 z_2 z_3$$

gibt es, wobei  $b_1$  und  $b_2$  jeweils beliebige Buchstaben zwischen A und Z sein können und  $z_1 \in \{1, \dots, 9\}$ ,  $z_2, z_3 \in \{0, \dots, 9\}$  gelten soll?

**Aufgabe 3**

- (a) Wie viele fünfstellige Dualzahlen gibt es, die mit 11 beginnen oder mit 00 enden?
- (b) Wie viele 6-stellige Passwörter können Sie aus 26 Buchstaben und 10 Ziffern bilden?
- (c) Wie viele 6-stellige Passwörter können Sie aus 26 Buchstaben und 10 Ziffern bilden, wenn in jedem Passwort mindestens eine Ziffer vorkommen soll?

**Aufgabe 4**

Auf wie viele Arten können sich 20 (unterscheidbare) Personen auf 60 Plätze in einem Bus verteilen?

**Aufgabe 5**

Auf wie viele Arten können sich 2 nicht unterscheidbare Spatzen auf 4 unterschiedliche Telegraphenleitungen verteilen?

**Aufgabe 6**

Ein Zug besteht aus 3 Wagen der ersten Klasse und 5 Wagen der zweiten Klasse. Die Wagen der ersten Klasse sind nicht weiter unterscheidbar, ebenso wenig die Wagen der zweiten Klasse. Wie viele unterschiedliche Wagenfolgen sind möglich?

### Aufgabe 7

- (a) Wie viele „Anagramme“ des Wortes „MATHE“ gibt es, das heißt, auf wie viele unterschiedliche Weisen können die 5 Buchstaben angeordnet werden?
- (b) Wie viele „Anagramme“ des Wortes „KLAUSUR“ gibt es, das heißt, auf wie viele unterschiedliche Weisen können die 7 Buchstaben angeordnet werden?

### Aufgabe 8 (Wenn noch Zeit ist ...)

Betrachten Sie das Gitter in Abbildung 1. Die Punkte markieren die so genannten *Knoten* des Gitters. Wie viele Wege mit genau 13 Schritten gibt es, um von *A* nach *B* zu gelangen? Dabei bedeutet ein Schritt, dass man von einem Knoten zu einem benachbarten Knoten geht. Ein Beispiel für einen Weg mit 13 Schritten ist in Abbildung 2 zu sehen.

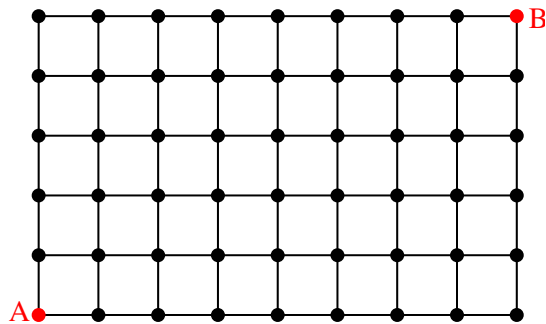


Abb. 1

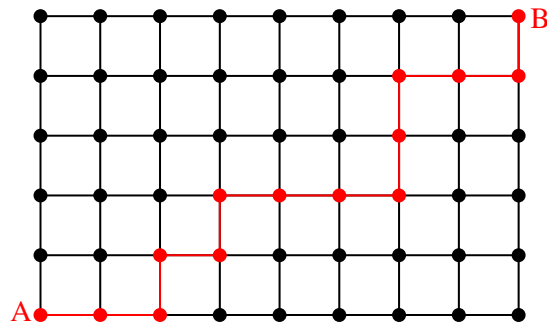


Abb. 2