Digitaltechnik & Rechnersysteme

KV-Minimierung, Don't Cares

Martin Kumm

HOCHSCHULE FULDA
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

WiSe 2025/2026

Was bisher geschah...

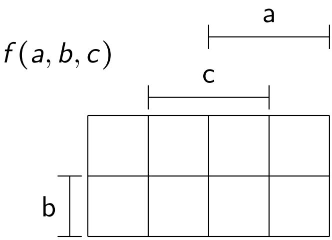
Angewandte Informatik

- Boolesche Algebra
- Abgeleitete Operatoren (NAND, NOR, XOR, Äquivalenz)
- Normalformen
  - Umrechnung in Normalformen (z.B. DNF in KDNF)
  - NAND/NOR Umformung
- KV-Diagramme
  - Aufbau
  - Ordnung von Termen

Vorlesungsaufgabe

a	b	c	$f(a,b,c,d)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Tragen Sie die Funktion in das KV-Diagramm ein.



Darstellungsalternativen Schaltnetze

Angewandte Informatik

Darstellungsformen für Schaltfunktionen (gleichberechtigt)

- Wahrheitstabelle
- **KV-Diagramm**
- Boolesche Funktion (Polynomdarstellung)
- Schaltbild (grafische Darstellung durch Schaltsymbole)

Für diese gilt:

- Für eine Wahrheitstabelle (**KV-Diagramm**) existieren mehrere Boolesche Funktionen und mehrere Schaltbilder
- Für eine Boolesche Funktion existieren mehrere Schaltbilder aber genau eine Wahrheitstabelle (**KV-Diagramm**)
- Für ein Schaltbild existiert genau eine Boolesche Funktion und genau eine Wahrheitstabelle (**KV-Diagramm**)

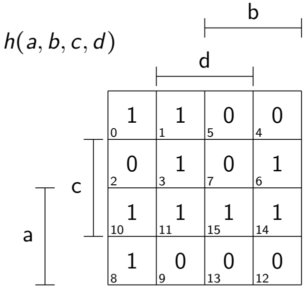
Inhalte

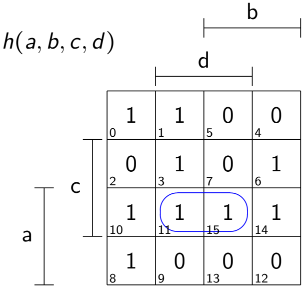
Angewandte Informatik

1. Wrap-Up
2. Minimierung mit KV-Diagrammen
3. Don't Care

Minimierung mit KV-Diagrammen

Angewandte Informatik





Jede »1« (»0«) repräsentiert einen Minterm (Maxterm)

Minterme (Maxterme), die sich in einer Variable unterscheiden liegen immer benachbart

Minterme sind Terme **nullter** Ordnung.

Diese lassen sich vereinfachen und man erhält Terme **erster Ordnung**: $a\overline{b}\,cd + abcd = acd$

Minimierung mit KV-Diagrammen

Angewandte Informatik

$h(a, b, c, d)$

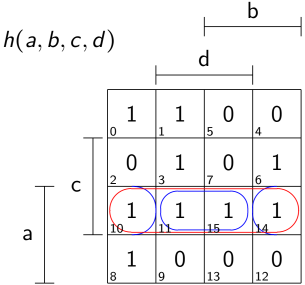
			d	d, b	b
		1 ($_0$)	1 ($_1$)	0 ($_5$)	0 ($_4$)
	c	0 ($_2$)	1 ($_3$)	0 ($_7$)	1 ($_6$)
a	c	1 ($_{10}$)	1 ($_{11}$)	1 ($_{15}$)	1 ($_{14}$)
a		1 ($_8$)	0 ($_9$)	0 ($_{13}$)	0 ($_{12}$)

Ausnahme: Ränder des Diagramms → umklappen

Der Term 1. Ordnung lautet: $a\overline{b}\,c\overline{d} + abc\overline{d} = ac\overline{d}$

Minimierung mit KV-Diagrammen

Angewandte Informatik



Zwei benachbarte Terme 1. Ordnung lassen sich zu einem Term 2. Ordnung zusammenfassen:

$acd + ac\overline{d} = ac$

Terme höchster Ordnung (= Primterme = Primimplikant) lassen sich direkt aus KV-Diagramm ablesen!

Primimplikant (Definition)

Angewandte Informatik

Primimplikant (Primterm): Term, der sich nicht weiter vereinfachen (zusammenfassen) lässt. (Ein Term mit maximaler Ordnung.) – Größtmögliche Zusammenfassung von 1, 2, 4, 8, etc. 1en (0en) im KV-Diagramm

1en (0en) können dabei mehrfach durch Primimplikanten überdeckt werden.

Das Ziel ist folglich möglichst wenige Primimplikanten zu verwenden.

Zur eindeutigen Minimierung müssen Primimplikanten weiter klassifiziert werden.

Klassifizierung Primimplikanten

Angewandte Informatik

Kernprimimplikant KPI (essentieller Primterm): Primimplikant, der zur Realisierung einer Funktion unbedingt erforderlich ist. Die Minterme aus denen er entstand, können nicht anders überdeckt werden. Diese werden zur Minimierung zwingend benötigt!

Absolut eliminierbarer Primimplikant API: Primimplikant, dessen Minterme (Maxterme) alle von Kernprimimplikanten überdeckt werden. Diese können zur Minimierung weggelassen werden.

Alle weiteren Primimplikanten sind **relativ eliminierbare Primimplikanten** (REPI). Hier muss zur Minimierung eine Auszahl erfolgen!

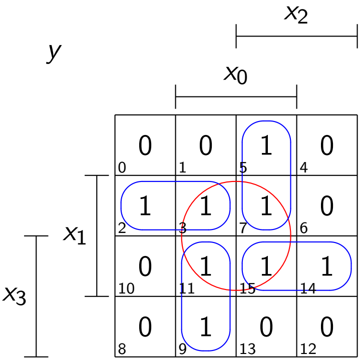
Minimierung mit KV-Diagrammen

Angewandte Informatik

Zur Minimierung müssen alle KPI, kein API und eine minimiale Anzahl REPIs verwendet werden.

Beispiel 1

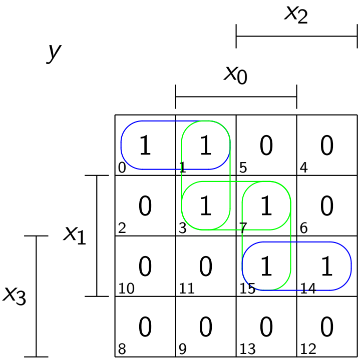
Angewandte Informatik



KPI, API, REPI

Beispiel 2

Angewandte Informatik



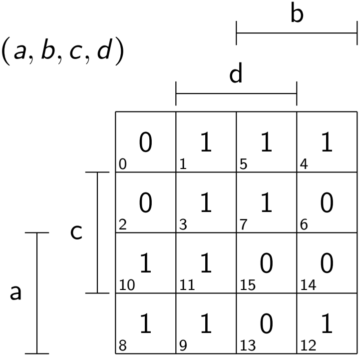
KPI, API, REPI

Vorlesungsaufgabe

Angewandte Informatik

Markieren Sie alle Primimplikanten.

$f(a, b, c, d)$



Welche Primimplikanten sind zur Minimierung notwendig?

Don't Care Belegungen

Häufig tritt die Situation auf, dass nicht für jede Belegung x der Wert der Funktion $f(x)$ zugeordnet werden muss oder kann. Es kann vielmehr offen bleiben, ob $f(x) = 1$ oder $f(x) = 0$ gesetzt wird.

Man bezeichnet solche Zuordungen mit **don't care** und spricht von einer **Redundanz** oder **Freistelle** der Funktion.

Statt einer 0 oder 1 wird häufig das Zeichen „–" zugeordnet (oft auch: „d" oder „*").

Dies stellt aber keinen dritten Wert dar, sondern zeigt nur an, dass an dieser Stelle die Funktion wahlweise zu 0 oder zu 1 gesetzt werden kann. Das lässt sich bei der Minimierung ausnutzen!

Beispiel für Don't Care

Thermometer-Code für die Ziffern 0 . . . 9

x_3	x_2	x_1	x_0	t_8	t_7	t_6	t_5	t_4	t_3	t_2	t_1	t_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1	0	1	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1	1	0	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1	1	0	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1	1	1	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–
1	1	1	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Beispiel für Don't Care

Angewandte Informatik

x_3	x_2	x_1	x_0	t_4
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

t_4

			x_0	x_0, x_2	x_2
		0 (0)	0 (1)	1 (5)	0 (4)
	x_1	0 (2)	0 (3)	1 (7)	1 (6)
x_3	x_1	1 (10)	1 (11)	1 (15)	1 (14)
x_3		1 (8)	1 (9)	1 (13)	1 (12)

$$t_4 = x_3 + x_0x_2 + x_1x_2$$

Vorlesungsaufgabe

Angewandte Informatik

Bestimmen Sie die Primimplikanden für t_6!

x_3	x_2	x_1	x_0	t_6
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	–
1	0	1	1	–
1	1	0	0	–
1	1	0	1	–
1	1	1	0	–
1	1	1	1	–

t_6

x_2 x_0 x_1 x_3

0 (0)	0 (1)	0 (5)	0 (4)
0 (2)	0 (3)	1 (7)	0 (6)
- (10)	- (11)	- (15)	- (14)
1 (8)	1 (9)	- (13)	- (12)

Hauptklassen von Schaltfunktionen

Angewandte Informatik

Man definiert zwei Hauptklassen von Schaltfunktionen: Eine Schaltfunktion heißt

1. **vollständig** (definiert), wenn für alle Belegungen x ein Funktionswert $f(x) \in \{0,1\}$ fest zugeordnet wird.
2. **unvollständig** (definiert), wenn es mindestens eine Belegung x gibt, der kein Funktionswert $f(x) \in \{0,1\}$ fest zugeordnet wird.

Wegen $|\{0,1\}^n| = 2^n$ lässt sich bei unvollständigen Schaltfunktionen aus jeweils zwei Teilmengen die dritte bestimmen.

Die Macht der Abstraktion