Andreas Bley
Christian Rieck

UNIKASSEL VERSITÄT
FB 10, Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26

# Übungsblatt 6

## Grundlagen der Mathematik

Abgabe bis **Freitag, 5. Dezember 2025, 23:59 Uhr**

## Hausaufgaben

**Aufgabe 1** (4+2+4 Punkte)
„Die Türme von Hanoi" ist ein Geduldsspiel. Es besteht aus drei senkrecht aufgestellten Stäben $A, B, C$, auf die mehrere gelochte Scheiben gesteckt werden. Die Scheiben sind alle unterschiedlich groß. Am Anfang liegen alle Scheiben auf Stab $A$, der Größe nach geordnet, wobei die größte unten liegt. Das Ziel ist, alle Scheiben auf Stab $C$ zu versetzen. In jedem Zug darf die oberste Scheibe eines beliebigen Stabes auf einen anderen Stab versetzt werden, aber nur, wenn dort keine kleinere Scheibe liegt.

(a) Wie viele Züge benötigen Sie mindestens, um das Spiel mit 1, 2, 3 bzw. 4 Scheiben zu lösen.

(b) Stellen Sie eine Vermutung auf, wie viele Züge man bei $n$ Scheiben mindestens benötigt.

(c) Beweisen Sie Ihre Vermutung durch vollständige Induktion.

**Aufgabe 2** (2+3+5 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n$ die Anzahl der $n$-stelligen Zahlen, die aus den Ziffern 0, 1, 2 bestehen, mit 1 beginnen und bei denen zwischen zwei von Null verschiedenen Ziffern immer mindestens eine 0 steht. Für $n = 4$ sind das die Zahlen 1000, 1001, 1002, 1010 und 1020.

(a) Berechnen Sie $A_n$ für $n = 3$ und $n = 5$.

(b) Begründen Sie, dass $A_n$ für $n \geq 3$ die Rekursionsgleichung $A_n = A_{n-1} + 2 \cdot A_{n-2}$ erfüllt und bestimmen Sie die Anfangswerte $A_1$ und $A_2$.

(c) Leiten Sie eine explizite Formel für $A_n$ her, d.h. berechnen Sie $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ für die
$A_n = \lambda \cdot \alpha^n + \mu \cdot \beta^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
(Aus Ihren Lösungen sollte ersichtlich sein, wie Sie zu diesen reellen Konstanten gelangen.)

## Präsenzaufgaben

### Aufgabe 3

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $T_n$ die Menge der Tupel in $\{0,1\}^n$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Nullen enthalten und $A_n$ deren Anzahl, d.h.

$$T_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n \mid \text{Für alle } k \in \{1, \dots, n-1\} \text{ gilt } x_k \neq 0 \text{ oder } x_{k+1} \neq 0\}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n$ die Anzahl der Elemente von $T_n$. Als Beispiel: Für $n = 3$ ist die Menge $T_n = \{(0,1,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$ und die Anzahl der Elemente $A_n = 5$.

(a) Bestimmen Sie $T_n$ und $A_n$ für $n \in \{1, 2, 4\}$.

(b) Geben Sie eine Rekursionsgleichung für $A_n$ an und begründen Sie, wieso diese korrekt ist.

Hinweis: Ein typisches Vorgehen bei solchen Aufgaben ist es, sich zunächst zu überlegen, mit welcher Ziffer $x_n$ oder mit welchen Ziffernfolgen $x_{n-1}, x_n$ (ggf. bis $x_{n-k}, \dots, x_n$ für passendes $k$) die Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ in $T_n$ enden können, und anschließend zu überlegen, in welcher Beziehung die diesen Endziffern jeweils vorausgehenden kleineren Tupel $(x_1, \dots, x_{n-1})$ oder $(x_1, \dots, x_{n-2})$ (oder $(x_1, \dots, x_{n-k-1})$) zu den Mengen $T_{n-1}$ oder $T_{n-2}$ (ggf. bis $T_{n-k-1}$) stehen. Aus der Vorschrift (oder Beobachtung), wie sich die Tupel in $T_n$ aus Tupeln in $T_{n-1}$ usw. konstruieren lassen – und zwar so, dass Sie jedes Tupel in $T_n$ auch genau einmal konstruieren – erhalten Sie dann die entsprechende Rekursionsgleichung für die Anzahl $A_n$ dieser Tupel auf Basis der Anzahlen $A_{n-1}$ usw. der kleineren Tupel.

(c) Erlauben wir in den Tupeln nicht nur die Ziffern 0 und 1, sondern auch die 2, so erhalten wir für die Anzahl $B_n$ der Tupel der Länge $n$ ohne aufeinanderfolgende Nullen die Werte $B_1 = 3, B_2 = 8, B_3 = 22$, usw. sowie die Rekursionsformel $B_n = 2B_{n-1} + 2B_{n-2}$ für alle $n \geq 3$.

Leiten Sie eine explizite Formel für $B_n$ her, d. h. berechnen Sie $a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so dass $B_n = a_1 \cdot \lambda n_1 + a_2 \cdot \lambda n_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (Aus Ihren Lösungen sollte ersichtlich sein, wie Sie zu diesen reellen Konstanten gelangen.)

Hinweis: Es handelt sich um eine lineare Rekursion. Verwenden Sie den gleichen Ansatz wie in Beispiel 3.12 im Skript, um zunächst $\lambda_1$ und $\lambda_2$ zu bestimmen, so dass die Rekursionsbedingung erfüllt ist. Bestimmen Sie anschließend $a_1$ und $a_2$, so dass auch die Anfangsbedingungen stimmen.