

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2024/2025

KAPITEL IV: Kombinatorik

1. Permutationen, Variationen und Kombinationen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl (Vertretung: Prof. Dr. A. Gepperth)

Email: alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de

Permutationen

Definition

Eine **Permutation** einer n -elementigen Menge $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ist eine bijektive Abbildung

$$\pi : X \rightarrow X.$$

Notationen

- ▶ $\pi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \pi(x_1) & \pi(x_2) & \cdots & \pi(x_n) \end{pmatrix},$
- ▶ $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(x_1) & \pi(x_2) & \cdots & \pi(x_n) \end{pmatrix},$
- ▶ $\pi = (\pi(x_1), \pi(x_2), \dots, \pi(x_n)).$

Anzahl Anordnungen

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es, eine n -elementige Menge anzuordnen?

Für eine n -elementige Menge X ist also die Anzahl $P(n)$ der Elemente der Menge

$$\{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in X \text{ und } a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$$

gesucht.

Bemerkung

Eine derartige Anordnung wird ebenfalls als eine „Permutation“ bezeichnet.

Beispiele: Permutationen

- ▶ $M = \{a, b\}$ mit $a \neq b$, also $n = 2$.
Mögliche Anordnungen: $(a, b), (b, a)$
 $P(2) = 2$
- ▶ $M = \{a, b, c\}$ mit $a \neq b, b \neq c, a \neq c$, also $n = 3$.
Mögliche Anordnungen:
 $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$
 $P(3) = 6$
- ▶ Wie viele Sitzordnungen gibt es in einer Vorlesung mit 150 Studierenden in einem Hörsaal mit 150 Plätzen?
Es gibt $P(150)$ Sitzordnungen.

Anzahl Anordnungen einer n -elementigen Menge

Satz

Sei $n \geq 1$. Es gibt $n!$ bijektive Abbildungen zwischen zwei n -elementigen Mengen $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$.

Folgerung

Es gilt

$$P(n) = n!.$$

Es gibt also $n!$ verschiedene Möglichkeiten, eine n -elementige Menge anzuordnen.

Variation ohne Wiederholung

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer n -elementigen Menge eine k -elementige Teilmenge auszuwählen und anzuordnen?

(Variation: unter Berücksichtigung der Reihenfolge!)

Für eine n -elementige Menge X ist also die Anzahl $V(n, k)$ der Elemente der Menge

$$\{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in X \text{ und } a_i \neq a_j \text{ für } i \neq j\}$$

gesucht.

Bemerkung

Eine derartige Anordnung nennt man eine „Variation ohne Wiederholung“ oder eine „ k -Permutation von n Objekten“.

Beispiele: Variation ohne Wiederholung

- ▶ $M = \{a, b, c\}$ mit $a \neq b, b \neq c, a \neq c$, also $n = 3$.
Mögliche Anordnungen der 2-elementigen Teilmengen:
 $(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b)$.
Also ist $V(3, 2) = 6$.
- ▶ Wie viele „Wörter“ aus 3 verschiedenen Buchstaben kann man bilden?
Es gibt $V(26, 3)$ Wörter.
- ▶ Ziehe aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Kugeln ohne Zurücklegen und unter Beachtung der Reihenfolge.
Es gibt $V(n, k)$ Möglichkeiten.

Anzahl Variationen ohne Wiederholung

Satz

Sei $1 \leq k \leq n$. Es gibt $\frac{n!}{(n-k)!}$ injektive Abbildungen zwischen einer k -elementigen Menge X und einer n -elementigen Menge Y .

Folgerung

Es gilt

$$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Es gibt also $\frac{n!}{(n-k)!}$ Möglichkeiten, aus einer n -elementigen Menge eine k -elementige Teilmenge auszuwählen und anzuordnen.

Der Fall der Anordnung einer n -elementigen Menge ergibt sich für $k = n$

Variation mit Wiederholung

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer n -elementigen Menge k Elemente anzuordnen, wobei Elemente mehrfach auftauchen dürfen?

(Variation: unter Berücksichtigung der Reihenfolge!)

Für eine n -elementige Menge X ist also die Anzahl $V^*(n, k)$ der Elemente der Menge

$$\{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in X\}$$

gesucht.

Bemerkung

Eine derartige Anordnung nennt man eine „Variation mit Wiederholung“.

Beispiele: Variation mit Wiederholung

- ▶ Zahlenschloss mit 4 Zahlenrädern von 0 bis 9
Es gibt $V^*(10, 4)$ verschiedene Zahlenkombinationen.
- ▶ $M = \{a, b, c\}$ mit $a \neq b, b \neq c, a \neq c$, also $n = 3$.
Mögliche Anordnungen von 2 nicht notwendigerweise unterschiedlichen Elementen dieser Menge:
 $(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)$.
Also ist $V^*(3, 2) = 9$.
- ▶ Ziehe aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Mal eine Kugel und lege sie nach jedem Zug wieder zurück, wobei die Reihenfolge der Ziehung beachtet wird.
Es gibt $V^*(n, k)$ verschiedene Ausgänge der Ziehungen.

Anzahl Variationen mit Wiederholung

Satz

Seien $n, k \geq 1$. Es gibt n^k Abbildungen zwischen einer k -elementigen Menge X und einer n -elementigen Menge Y .

Folgerung

Es gilt

$$V^*(n, k) = n^k.$$

Es gibt also n^k Möglichkeiten, k nicht notwendigerweise verschiedene Elemente einer n -elementigen Menge anzuordnen.

Kombination ohne Wiederholung

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer n -elementigen Menge eine k -elementige Teilmenge auszuwählen?

(Kombination: ohne Berücksichtigung der Reihenfolge!)

Für eine n -elementige Menge X ist also die Anzahl $C(n, k)$ der Elemente der Menge $\{M \in \mathbb{P}(X) : |M| = k\}$ gesucht.

Bemerkung

Eine derartige Auswahl nennt man eine „Kombination ohne Wiederholung“.

Beispiele: Kombination ohne Wiederholung

- ▶ $M = \{a, b, c\}$ mit $a \neq b, b \neq c, a \neq c$, also $n = 3$.
2-elementigen Teilmengen: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.
Also ist $C(3, 2) = 3$.
- ▶ Lottoziehung „6 aus 49“:
Es gibt $C(49, 6)$ mögliche Ausgänge.
- ▶ Eine Skathand besteht aus 10 von 32 Karten.
Es gibt $C(32, 10)$ verschiedene Skathände.
- ▶ Ziehe aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Kugeln ohne Beachtung der Reihenfolge.
Es gibt $C(n, k)$ verschiedene Möglichkeiten.

Anzahl Kombinationen ohne Wiederholung

- ▶ Jede k -elementige Teilmenge kann auf $P(k) = k!$ Arten angeordnet werden.
- ▶ $V(n, k)$ erhält man, indem man zu jeder k -elementigen Teilmenge die möglichen Anordnungen mitzählt, also

$$V(n, k) = \frac{\# k\text{-elementige Teilmengen}}{\# k\text{-elementigen Teilmengen}} \cdot \# \text{Anordnungen einer } k\text{-elementigen Teilmenge}$$

$$= C(n, k) \cdot P(k)$$

- ▶ Damit ist $C(n, k) = \frac{V(n, k)}{P(k)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Fazit

Es gilt

$$C(n, k) = \binom{n}{k}.$$

Eine n -elementige Menge besitzt also $\binom{n}{k}$ verschiedene k -elementige Teilmengen, wobei $0 \leq k \leq n$.

Weitere Beispiele – Binomischer Lehrsatz

- ▶ $(a + b)^n = ?$
$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)}_{\text{Klammer 1}} \underbrace{(a + b)}_{\text{Klammer 2}} \dots \underbrace{(a + b)}_{\text{Klammer } n}$$
- ▶ Beim Ausmultiplizieren wählt man in jeder Klammer entweder a oder b .
- ▶ Wenn man aus k Klammern a wählt und aus den verbleibenden $n - k$ Klammern b , so erhält man $a^k b^{n-k}$.
- ▶ Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, aus k verschiedenen Klammern a auszuwählen, so dass der Ausdruck $a^k b^{n-k}$ beim Ausmultiplizieren $\binom{n}{k}$ Mal auftaucht.

Diese Überlegung führt auf den binomischen Lehrsatz, siehe Kapitel II.1:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Weitere Beispiele – Anzahl der Elemente der Potenzmenge

Sei M eine Menge mit $|M| = n$.

Frage

Wie groß ist $|\mathbb{P}(M)|$?

Überlegung

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(M)| &= \sum_{k=0}^n \#k\text{-elementige Teilmengen von } M \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \stackrel{\text{binom. Lehrsatz}}{=} (1+1)^n = 2^n. \end{aligned}$$

Kombination mit Wiederholung

Frage

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus einer n -elementigen Menge k Elemente auszuwählen, wobei Elemente mehrfach ausgewählt werden dürfen.

(Kombination: ohne Berücksichtigung der Reihenfolge!)

Die Anzahl der Möglichkeiten bezeichnen wir mit $C^*(n, k)$.

Bemerkung

Eine derartige Auswahl nennt man eine „Kombination mit Wiederholung“.

Beispiele: Kombination mit Wiederholung

- ▶ Ziehe aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln k Mal eine Kugel und lege sie nach jedem Zug wieder zurück, wobei die Reihenfolge egal ist.
Es gibt $C^*(n, k)$ mögliche Ausgänge.
- ▶ Wurf mit 3 (nicht unterscheidbaren) Würfeln
Es gibt $C^*(6, 3)$ verschiedene Ausgänge.

Anzahl Kombinationen mit Wiederholung

Mit Hilfe des vorigen Beispiels aus der Vorlesung kommen wir auf die folgende Idee:

$$\begin{aligned} C^*(n, k) &= \# \text{ Möglichkeiten, } k \text{ Häkchen auf } n - 1 + k \text{ Positionen} \\ &\quad \text{zu verteilen} \\ &= \# \text{ Möglichkeiten, aus einer } (n - 1 + k)\text{-elementigen} \\ &\quad \text{Menge eine } k\text{-elementige Menge auszuwählen} \\ &= C(n - 1 + k, k) = \binom{n - 1 + k}{k}. \end{aligned}$$

Fazit

Seien $n, k \geq 1$. Es gilt

$$C^*(n, k) = \binom{n - 1 + k}{k}.$$

Variation und Kombination

Bemerkung

- ▶ Eine **Variation** ist eine Anordnung von Objekten in einer bestimmten Reihenfolge.
- ▶ Eine **Kombination** ist eine Auswahl von Elementen (ohne Berücksichtigung der Reihenfolge).

Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2024/2025

KAPITEL IV: Kombinatorik

2. Urnenmodelle

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl (Vertretung: Prof. Dr. A. Gepperth)

Email: alexander.gepperth@informatik.hs-fulda.de

Zusammenfassung Urnenmodelle

- ▶ Urne mit $n \geq 1$ verschiedenen Kugeln
- ▶ Ziehung von $k \geq 1$ Kugeln

	Berücksichtigung der Reihenfolge	Reihenfolge egal
ohne Wiederholung	$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$C(n, k) = \binom{n}{k}$
mit Wiederholung	$V^*(n, k) = n^k$	$C^*(n, k) = \binom{n-1+k}{k}$