

## Aufgabensammlung

### Mathematische Grundlagen der Informatik – AI1004

---

#### Aufgabe 1 (Mengen, Logik)

*In dieser Aufgabe sind keine Begründungen verlangt.*

- (a) Sei  $X$  eine Menge und seien  $A, B \subseteq X$ . Veranschaulichen Sie die Mengen

$$\overline{A \cup B} \quad \text{und} \quad B \setminus A$$

jeweils in einem Venn-Diagramm.

Hinweis:  $\overline{A}$  bezeichnet das Komplement von  $A$  in  $X$ .

- (b) Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = (1, 2], \quad M_2 = (2, 3] \quad \text{und} \quad M_3 = \mathbb{N},$$

wobei  $\mathbb{N}$  die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet, also  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Geben Sie folgende Mengen an:

- (i)  $(M_1 \cap M_2) \cap M_3$ ,
- (ii)  $(M_1 \cup M_2) \cap M_3$ ,
- (iii)  $(M_1 \setminus M_2) \setminus M_3$ .

- (c) Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

- (i)  $\exists x \in \mathbb{R} : 1/x < 1$
- (ii)  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : xy = 0$
- (iii)  $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$

- (d) Verneinen Sie die folgende Aussage:  $\exists x \in \mathbb{R} : 1/x < 1$

#### Aufgabe 2 (Vollständige Induktion)

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass gilt:  $x_n \geq \sqrt{2}$  für  $x_0 := 1, x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \quad \forall n \geq 1$

#### Aufgabe 3 (Digitale Logik)

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke und geben Sie stets die Regel der Booleschen Algebra an, die der Umformung zugrundeliegt:

- a)  $\overline{a \vee \overline{a}} \wedge a$

b)  $(a \vee 1) \wedge b$

#### Aufgabe 4 (Funktionen und ihre Eigenschaften)

*In dieser Aufgabe sind keine Begründungen verlangt.*

Betrachten Sie die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty), \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen von  $f$ .
- (b) Ist  $f$  injektiv?
- (c) Ist  $f$  surjektiv?
- (d) Geben Sie  $f([0, 2])$  an, also das Bild des Intervalls  $[0, 2]$  unter  $f$ .
- (e) Geben Sie  $f^{-1}([1, 2])$  an, also das Urbild des Intervalls  $[1, 2]$  unter  $f$ .

#### Aufgabe 5 (Kombinatorik)

Führen Sie jede Frage auf ein Urnenmodell zurück und erläutern Sie dies kurz!

- (a) Angenommen Sie wollen einen Fruchtkorb mit 4 Früchten packen, und es stehen Bananen, Aprikosen, Pflaumen, Äpfel, Birnen, Mango und Kiwi in unbeschränkter Menge zur Verfügung. Auf wieviele verschiedene Arten ist das möglich?
- (b) Wie viele Möglichkeiten gäbe es wenn die Anordnung der Früchte im Korb eine Rolle spielt?

#### Aufgabe 6 (Verschiedenes)

a) Bestimmen Sie den ggT von 128 und 56 mit dem Algorithmus von Euklid!

b) Erläutern Sie das 2. Cantorsche Diagonalargument: was wird dabei gezeigt und (grob) wie?