

Übungsblatt 4

(vollständige Induktion, Zahlbereiche)

Aufgabe 1

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1.$$

Aufgabe 2 (Bernoullische Ungleichung)

Sei $x \in [-1, \infty)$. Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

gilt. An welcher Stelle haben Sie die Voraussetzung $x \geq -1$ verwendet?

Aufgabe 3 (Lösungsansätze für Teilaufgaben (b) und (c) werden in der Vorlesung am 18.11.2024 nochmal ausgeführt.)

Schreiben Sie folgende Mengen als Intervalle oder Vereinigung von Intervallen.

(a) $A := \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \{9\} : \frac{4}{x-9} \leq 2\right\}$

(b) $B := \{x \in \mathbb{R} : |x+4| \geq 6\}$

(c) $C := \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq |x+3|\}$

Aufgabe 4

Geben Sie für folgende Teilmengen von \mathbb{R} jeweils - falls vorhanden - das Supremum, das Infimum, das Maximum sowie das Minimum an:

(a) $M_1 := \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ und } x^2 \leq 4\},$

(b) $M_2 := \left\{\frac{1}{z} : z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\},$

(c) $M_3 := \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^*\right\},$

(d) $M_4 := \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}^*\right\}.$

Aufgabe 5

Welche Aussagen sind wahr?

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y = x^2$

(b) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : y = x^2$

(c) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : y = x^2$

(d) $\forall y \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R} : y = x^2$

(e) $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : y = x^2$

Aufgabe 6 (Wenn noch Zeit ist ...)

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus

(i) $\text{ggT}(156, -64)$,

(ii) $\text{ggT}(-296, -96)$,

(iii) $\text{ggT}(34, 21)$. Was fällt auf?

(b) (Erweiterter euklidischer Algorithmus) Finden Sie Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ so, dass

$$\text{ggT}(156, -64) = s \cdot 156 + t \cdot (-64).$$

Hinweis: Gehen Sie Ihre Rechenschritte aus Teil (a)(i) in umgekehrter Reihenfolge durch.

Aufgabe 7 (Wenn noch Zeit ist ...)

Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Desweiteren sei a_k für jedes $k \in \mathbb{N}^*$ eine reelle Zahl. Welche Gleichheiten gelten für jede Wahl von n und a_k ?

(i) $\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^3$

(ii) $\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{l=3}^{n+2} (l-2)^3$

(iii) $\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) = \sum_{k=1}^n a_k^2$

(iv) $\left(\prod_{k=1}^n a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^n a_k \right) = \prod_{k=1}^n a_k^2$

(v) $4 \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 4a_k$

(vi) $4 \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{k=1}^n (4a_k)$