Hochschule Fulda
Fachbereich Angewandte Informatik
Prof. Dr. A. Radl

Wintersemester 2024/2025
Mathematische Grundlagen – AI1004
Besprechung: 09.12.–13.12.2024

Übungsblatt 7

(Folgen, geometrische Summenformel)

Aufgabe 1

(a) Geben Sie zu nachstehenden Folgen jeweils die Abbildungsvorschrift $\mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto x_n$ an:

(i) $(x_n) = (0, 3, 6, 9, 12, \ldots)$, (ii) $(x_n) = (-4, -1, 2, 5, 8, \ldots)$,

(iii) $(x_n) = (0, -1, 2, -3, 4, \ldots)$, (iv) $(x_n) = (0, 1, -2, 3, -4, \ldots)$,

(v) $(x_n) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots)$, (vi) $(x_n) = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \frac{1}{31}, \ldots)$.

(b) Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_0 := 2, \quad a_{n+1} := \frac{2a_n}{2 + a_n}, \quad n \geq 0.$$

Bestimmen Sie a_1, a_2 und a_3.

Aufgabe 2

Finden Sie jeweils Folgen $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ und $(y_n) \subseteq \mathbb{R}$, so dass nachfolgende Eigenschaften erfüllt sind.

(a) Mindestens eine der Folgen (x_n) bzw. (y_n) divergiert, aber die Folge $(x_n + y_n)$ konvergiert.

(b) Mindestens eine der Folgen (x_n) bzw. (y_n) divergiert, aber die Folge $(x_n \cdot y_n)$ konvergiert.

(c) Die Folgen (x_n) und (y_n) konvergieren, und es ist $x_n < y_n$ für alle n, aber es gilt *nicht* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

(d) Die Folge (x_n) divergiert, aber die Folge $(|x_n|)$ konvergiert.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$, falls

(a) $x_n = \dfrac{3n^2 + 4n + 20}{4n^3 + 1000}$, (b) $x_n = \dfrac{2n^3 + 7n^2 + 12}{-5n^3 - n + 3}$, (c) $x_n = \left(2 + \dfrac{3}{n}\right)^5$,

(d) $x_n = \sqrt[2n]{2^{1000}}$, (e) $x_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$, (f) $x_n = (-1)^n \dfrac{\sin(n)\cos(n)}{3n^3}$.

Aufgabe 4 (Teil (b) wenn noch Zeit ist ...)

Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

(a) Geben Sie zu $\varepsilon = 10$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ und $\varepsilon = \frac{1}{10^6}$ jeweils ein $N \in \mathbb{N}$ an, so dass $|x_n - 0| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist.

(b) Zeigen Sie direkt mit der Definition von „Konvergenz gegen x“, dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

gilt.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Wurzelfunktion monoton ist, das heißt, für $x, y \in [0, \infty)$ mit $x \leq y$ gilt auch $\sqrt{x} \leq \sqrt{y}$.

Aufgabe 5 (Wenn noch Zeit ist ...)

Bestimmen Sie mit Hilfe der geometrischen Summenformel (siehe Kapitel II.1) folgende Summen:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k$, (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k$, (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k$,

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{10}(-1)^k$, (e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{11}(-1)^k$, (f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}3^k$.