Andreas Bley
Christian Rieck

UNIKASSEL VERSITÄT
FB 10, Institut für Mathematik
Wintersemester 2025/26

Übungsblatt 5

Grundlagen der Mathematik

Abgabe bis **Freitag, 28. November 2025, 23:59 Uhr**

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (3+3 Punkte)

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage mit vollständiger Induktion: Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 24$ lässt sich in der Form $n = 5 \cdot k + 7 \cdot \ell$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ schreiben.

(b) Gilt die Aussage aus (a) auch für 3 und 6? Genauer: Gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass alle $n \geq n_0$ als $n = 3 \cdot k + 6 \cdot \ell$ mit $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ dargestellt werden können? Analysieren Sie ihren Induktionsbeweis aus (a) mit Blick auf diese Aussage und beweisen Sie ihre Aussage.

Aufgabe 2 (3+3+3 Punkte)
Zeigen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt $n! > 2^n$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{1}{k}) = n + 1$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)
Bekanntlich beträgt die Winkelsumme in einem beliebigen Dreieck 180 Grad. Dieses Ergebnis dürfen Sie benutzen, wenn Sie folgende Verallgemeinerung untersuchen.

In der Ebene seien n Punkte $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ gegeben. Verbindet man jeweils P_i durch eine Strecke mit P_{i+1} und schließlich noch P_n mit P_1, so entsteht ein n-Eck mit den Seiten $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$ und P_nP_1. Beachten Sie, dass sich zwei Strecken jeweils höchstens in einem gemeinsamen Punkt P_i treffen und keine weiteren Schnittpunkte existieren. Je zwei aufeinanderfolgende Seiten schließen einen Winkel ein. Sind alle n Winkel kleiner als 180 Grad, so spricht man von einem konvexen n-Eck.

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Die Winkelsumme in einem konvexen n-Eck (mit $n \geq 3$) beträgt $(n-2) \cdot 180$ Grad.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4

Betrachten Sie folgende Aussage und den „Beweis“:

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $2n + 1 \leq 2^n$.

Beweis: Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 0$ ist die Aussage korrekt.

Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gilt $2n + 1 \leq 2^n$.

Induktionsschritt: Wir müssen zeigen, dass $2(n+1)+1 \leq 2^{n+1}$ gilt. Dies sieht man anhand folgender Ungleichungskette:

$$2(n+1) + 1 = 2n + 3 = (2n+1) + 2 \overset{\text{IV}}{\leq} 2^n + 2 \leq 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Was ist an dem behaupteten Beweis falsch? Erläutern Sie genau, welcher Teil dieses „Induktionsbeweises“ falsch ist, und wieso. (Induktionsanfang oder Induktionsschritt oder beides? Für welche Zahl n funktioniert der Induktionsanfang oder Induktionsschluss nicht? Welcher Teilschritt des „Beweises“ (Welches Argument genau?) ist in diesem Fall wieso falsch? Funktioniert der Induktionsanfang oder der Induktionsschritt gegebenenfalls für andere Zahlen n? Wie könnte man die jeweilige Behauptung zu einer korrekten Aussage berichtigen?)

Aufgabe 5

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Ebene durch n Geraden in maximal $\frac{1}{2} \cdot (n^2+n+2)$ zerteilt werden kann.

Aufgabe 6

Zu einer Konferenz erscheinen $n \geq 2$ Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler. Da sich alle vorher noch nicht kennen, soll jeweils jedes Paar ein kurzes Gespräch miteinander führen.

(a) Wie viele verschiedene Zweiergespräche finden insgesamt statt? Stellen Sie zunächst eine allgemeine Formel für die Anzahl aller möglichen Zweiergespräche auf.

(b) Beweisen Sie Ihre Formel aus (a) mit vollständiger Induktion.