Mathematische Grundlagen der Informatik

WiSe 2024/2025

KAPITEL I: Grundlagen

1. Mengen

Dozentin: Prof. Dr. Agnes Radl

Email: agnes.radl@informatik.hs-fulda.de

Mengen

Georg Cantor[1] (1895) „Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die Elemente von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Notation

- $m \in M$ oder $M \ni m$, falls m ein Element der Menge M ist.
- $m \notin M$ oder $M \not\ni m$, falls m kein Element der Menge M ist.

Beispiel

- $M = \{1, 2, 3, 5\}$; dann $5 \in M$, $4 \notin M$;
  beachte: $\{1, 2, 2\} = \{1, 2\}$ und $\{1, 2\} = \{2, 1\}$
- $\mathbb{N}$ (Menge der natürlichen Zahlen), also $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $\{m \in \mathbb{N} : m \text{ gerade}\}$

[1] Georg Cantor (1845–1918), deutscher Mathematiker

leere Menge

$\emptyset$ oder $\{\}$

Menge, die kein Element enthält.

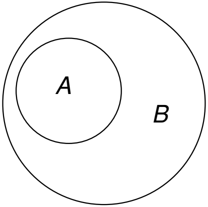
Teilmenge, Obermenge

Seien A und B Mengen.

$$A \subseteq B,$$

falls für alle $x \in A$ auch $x \in B$ gilt.

- A ist eine Teilmenge von B bzw.
- B ist eine Obermenge von A.



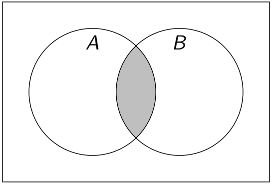
Beispiel

- $\{1, 4\} \subseteq \{1, 2, 4, 5\}$
- $\{2n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$

Bemerkung

- Für jede Menge A gilt:
  $\emptyset \subseteq A, \;\; A \subseteq A$.
- $A = B$ bedeutet $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Durchschnitt



Seien A und B Mengen.

Durchschnitt von A und B:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Beispiel

- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 5, 12\}$, $A \cap B = \{1, 5\}$
- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{3, 4\}$, $A \cap B = \emptyset$
- $A = \emptyset$, B beliebige Menge: $A \cap B = \emptyset$
- Ist $A \subseteq B$, dann ist $A \cap B = A$.
- $A \cap A = A$

Bemerkung

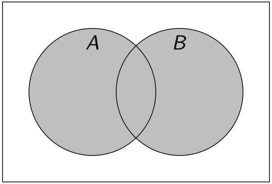
- A und B heißen disjunkt, falls $A \cap B = \emptyset$.

Vereinigung

Seien A und B Mengen.

Vereinigung von A und B:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$$



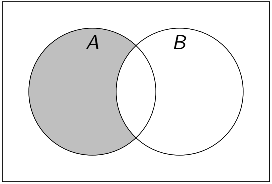
Beispiel

- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 5, 12\}$, $\quad A \cup B = \{1, 2, 5, 12\}$
- $A = \emptyset$, B beliebige Menge: $\quad A \cup B = B$
- $A \cup A = A$

Bemerkung

- disjunkte Vereinigung: $A \dot\cup B$ bedeutet $A \cup B$, wobei $A \cap B = \emptyset$.

Differenz



Seien A und B Mengen.

Differenz von A und B:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

Beispiel

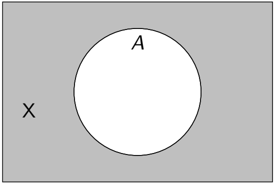
- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 5, 12\}$, $\quad A \setminus B = \{2\}$
- $A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\quad A \setminus B = \emptyset$

Komplement

Seien A und X Mengen, wobei $A \subseteq X$.

Komplement von A in X:

$$\overline{A} = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$$

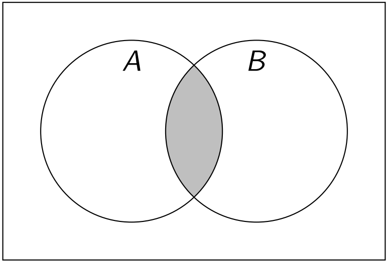


Beispiel

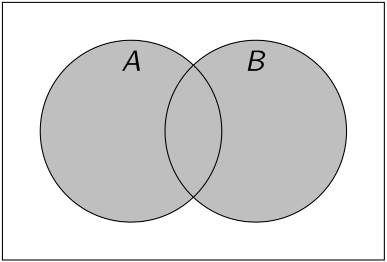
- $X = \mathbb{N}$, $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $\quad \overline{A} = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$

Zusammenfassung der Venn-Diagramme

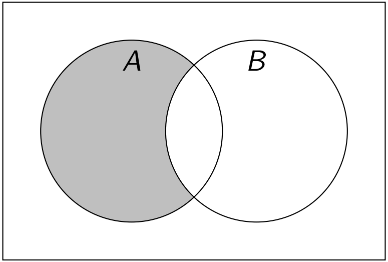
$A \cap B$



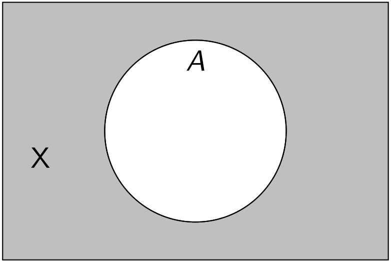
$A \cup B$



$A \setminus B$

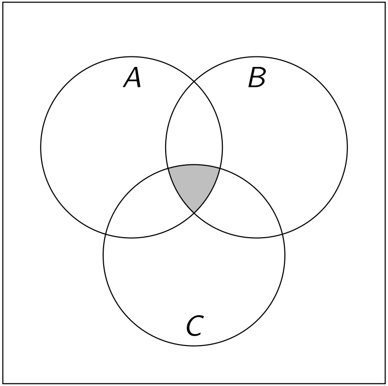


$\overline{A}$

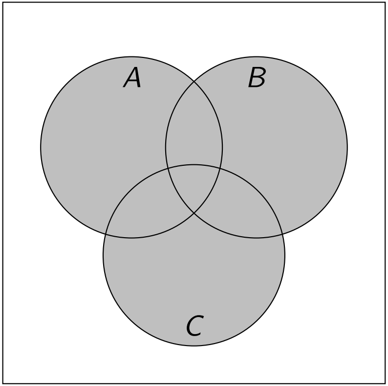


Venn-Diagramme mit 3 Mengen (Beispiele)

$A \cap B \cap C$



$A \cup B \cup C$



Das Russel'sche Paradoxon

Wir betreiben hier "naive" Mengenlehre ohne Festlegung von ursprünglichen, unbeweisbaren Regeln (Axiomen). Dies kann zu Problemen in der Form von Widersprüchen (Paradoxa) führen!

- Mengen können Mengen enthalten: $M = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
- Es folgt: $\{1\} \in M$ bzw. $\{2\} \in M$
- Betrachte $\mathcal{M} = \{M : M \notin M\}$ "Menge aller Mengen die sich nicht selbst enthalten"
- Enthält $\mathcal{M}$ sich selbst?
- Falls $\mathcal{M} \in \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ entält sich selbst $\rightarrow$ Widerspruch zur Annahme
- Falls $\mathcal{M} \notin \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ enthält sich nicht selbst $\rightarrow$ müsste sich per Definition selbst enthalten $\rightarrow$ Widerspruch zur Annahme

Rechenregeln für Mengen

Es seien A, B, C Mengen. Dann gelten die folgenden Regeln:

Assoziativgesetze (für Vereinigung und Durchschnitt)

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

Distributivgesetze („Wie vertragen sich Vereinigung und Durchschnitt?“)

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

de Morgansche Regeln

(X Menge, $A, B \subseteq X$; Komplementbildung in X)

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$