

Aufgabensammlung

Mathematische Grundlagen der Informatik – AI1004

Aufgabe 1 (Mengen, Logik)

In dieser Aufgabe sind keine Begründungen verlangt.

- (a) Sei X eine Menge und seien $A, B \subseteq X$. Veranschaulichen Sie die Mengen

$$\overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{und} \quad B \setminus A$$

jeweils in einem Venn-Diagramm.

Hinweis: \overline{A} bezeichnet das Komplement von A in X .

- (b) Gegeben seien die Mengen

$$M_1 = (1, 2], \quad M_2 = (2, 3] \quad \text{und} \quad M_3 = \mathbb{N},$$

wobei \mathbb{N} die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet, also $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Geben Sie folgende Mengen an:

- (i) $(M_1 \cap M_2) \cap M_3$,
- (ii) $(M_1 \cup M_2) \cap M_3$,
- (iii) $(M_1 \setminus M_2) \setminus M_3$.

- (c) Entscheiden Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

- (i) $\exists x \in \mathbb{R} : 1/x < 1$
- (ii) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : xy = 0$
- (iii) $\exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0$

- (d) Verneinen Sie die folgende Aussage: $\exists x \in \mathbb{R} : 1/x < 1$

Aufgabe 2 (Vollständige Induktion)

Zeigen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass gilt: $x_n \geq \sqrt{2}$ für $x_0 := 1, x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{2}{x_n}}{2} \quad \forall n \geq 1$

Aufgabe 3 (Digitale Logik)

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke und geben Sie stets die Regel der Booleschen Algebra an, die der Umformung zugrundeliegt:

- a) $\overline{a \vee \overline{a}} \wedge a$

b) $(a \vee 1) \wedge b$

Aufgabe 4 (Funktionen und ihre Eigenschaften)

In dieser Aufgabe sind keine Begründungen verlangt.

Betrachten Sie die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty), \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in [0, 1], \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

- (a) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen von f .
- (b) Ist f injektiv?
- (c) Ist f surjektiv?
- (d) Geben Sie $f([0, 2])$ an, also das Bild des Intervalls $[0, 2]$ unter f .
- (e) Geben Sie $f^{-1}([1, 2])$ an, also das Urbild des Intervalls $[1, 2]$ unter f .

Aufgabe 5 (Kombinatorik)

Führen Sie jede Frage auf ein Urnenmodell zurück und erläutern Sie dies kurz!

- (a) Angenommen Sie wollen einen Früchtekorb mit 4 Früchten packen, und es stehen Bananen, Aprikosen, Pflaumen, Äpfel, Birnen, Mango und Kiwi in unbeschränkter Menge zur Verfügung. Auf wieviele verschiedene Arten ist das möglich?
- (b) Wie viele Möglichkeiten gäbe es wenn die Anordnung der Früchte im Korb eine Rolle spielt?

Aufgabe 6 (Verschiedenes)

a) Bestimmen Sie den ggT von 128 und 56 mit dem Algorithmus von Euklid!

b) Erläutern Sie das 2. Cantorsche Diagonalargument: was wird dabei gezeigt und (grob) wie?