Hochschule Fulda
Fachbereich Angewandte Informatik
Prof. Dr. A. Radl

Wintersemester 2024/2025
Mathematische Grundlagen – AI1004
Besprechung: 25.11.–29.11.2024

Übungsblatt 5

(Relationen, Funktionen, Abzählbarkeit)

Aufgabe 1

(a) Durch welche der nachfolgenden Mengen ist der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad z \mapsto |z|$$

gegeben?

(i) $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ (ii) $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n, n) : n \in \mathbb{N}^*\}$ (iii) $\{(z, |z|) : z \in \mathbb{Z}\}$

(b) Durch welche der nachfolgenden Mengen ist der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x - 1$$

gegeben?

(i) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ii) $\{(x + 1, x) : x \in \mathbb{R}\}$ (iii) $\{(x, x - 1) : x \in \mathbb{R}\}$

(c) Durch welche der nachfolgenden Mengen ist der Graph der Funktion

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto 1$$

gegeben?

(i) $\mathbb{N} \times \{1\}$ (ii) $\{(n, 1) : n \in \mathbb{N}\}$ (iii) $\{1\} \times \mathbb{N}$

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \quad \text{und} \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|,$$

und bestimmen Sie folgende Bilder und Urbilder:

(i) $f(\mathbb{R} \setminus \{2\})$ (ii) $f^{-1}(\{4, 9\})$ (iii) $h([0, 5])$ (iv) $h([-5, 5])$
(v) $h^{-1}([0, 5])$ (vi) $h^{-1}([-5, 5])$ (vii) $h(\mathbb{Z})$

Aufgabe 3

Seien $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y := \{1, 2, 3\}$ und $\varphi : X \to Y$ durch $\varphi(1) := 3, \varphi(2) := 3, \varphi(3) := 2, \varphi(4) := 1$ und $\varphi(5) := 3$ gegeben. Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine nichtleere Teilmenge M von X derart an, dass die Abbildung $\varphi : M \to Y$ folgende Eigenschaften besitzt:

(a) bijektiv,

(b) surjektiv, aber nicht injektiv,

(c) injektiv, aber nicht surjektiv,

(d) weder injektiv noch surjektiv.

Aufgabe 4

(a) Gegeben seien die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3 - 1 \quad \text{ und } \quad g : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x} + 2,$$

wobei die Funktion $[0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto \sqrt{x}$ die Umkehrfunktion der Funktion $[0, \infty) \to [0, \infty), x \mapsto x^2$ bezeichnet. Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ sofern möglich.

(b) Betrachten Sie die Funktionen

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad x \mapsto x + 1,$$

und

$$g : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad x \mapsto \begin{cases} x - 1, & x \geq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Untersuchen Sie f, g, $g \circ f$ und $f \circ g$ jeweils auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität. Skizzieren Sie zunächst die jeweiligen Funktionsgraphen.

Aufgabe 5 (Wenn noch Zeit ist ...)

Sei R_1 die Relation

$$R_1 = \{(x^2, x^3) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

auf $\mathbb{R}$ und R_2 die Relation

$$R_2 = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}, m|n\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

auf $\mathbb{Z}$. Welche der Eigenschaften *linkstotal*, *rechtstotal*, *linkseindeutig* und *rechtseindeutig* besitzen die Relationen jeweils? Ist eine Funktion dabei?

Aufgabe 6 (Wenn noch Zeit ist ...)

(a) Ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar?

(b) Nach R. Dedekind (1831–1916) ist eine Menge M *unendlich*, wenn es eine echte Teilmenge K von M gibt (also $K \subseteq M$ und $K \neq M$), die sich bijektiv auf M abbilden lässt. Zeigen Sie, dass $\mathbb{N}$ nach dieser Definition eine unendliche Menge ist.