

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

А.В. ГУСЬКОВ, К.Е. МИЛЕВСКИЙ,  
А.В. СОТЕНКО

# ВНЕШНЯЯ БАЛЛИСТИКА

Утверждено  
Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК  
2010

УДК 531.55(075.8)  
Г 968

Рецензенты:

Директор ФКП «Новосибирский опытный завод измерительных приборов» *А.Г. Бухаров*,  
Начальник отдела испытаний ОАО «Института прикладной физики», доцент *А.А. Полиновский*

Работа подготовлена на кафедре ГДУ для студентов  
III – IV курсов ФЛА специальности 170103

**Гуськов А.В.**

Г 968 Внешняя баллистика : учеб. пособие / А.В. Гуськов, К.Е. Милевский, А.В. Сотенко. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – 188 с.  
ISBN 978-5-7782-1421-7

Приведены расчеты траектории движения снарядов по известным данным, рассмотрено определение проектных баллистических характеристик движения по заданным тактико-техническим данным, представлен расчет стабилизации снарядов различного назначения и дано определение условий их управляемости, а также факторы, влияющие на рассеивание траекторий снарядов и способы уменьшения рассеивания и повышения точности стрельбы.

Авторы выражают благодарность группе студентов кафедры ГДУ, которые приняли активное участие в подготовке оригинала-макета учебного пособия: А.А. Морозовой и К.В. Леваку.

УДК 531.55 (075.8)

**ISBN 978-5-7782-1421-7**

© Гуськов А.В., Милевский К.Е.,

Сотенко А.В., 2010

© Новосибирский государственный  
технический университет, 2010

---

---

## **ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ. ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ**

---

---

Наука о движении ракет и снарядов называется баллистикой.

Наука о полете ракет и снарядов после прекращения их силового взаимодействия с пусковой установкой называется внешней баллистикой.

Слово «баллистика» созвучно греческому слову «бросаю», от последнего произошло также наименование первых тяжелых летательных установок, которые в давние времена назывались баллистами.

Внешняя баллистика занимается решением четырех основных задач [1].

**1. Первая задача** состоит в расчете траекторий движения снарядов по заранее известным данным. Для ее решения необходимо, прежде всего, правильно определить, какие силы действуют на снаряд в полете, и знать, какова будет их величина в каждый момент времени. Затем следует составить дифференциальные уравнения движения снаряда с учетом всех действующих сил. В результате решения этих уравнений получаются все характеристики движения: скорость, ускорение, время полета и координаты центра масс, по которым может быть построена траектория.

**Первую задачу называют основной или прямой задачей внешней баллистики.** Число сил, действующих на снаряд при движении, характер их изменения, а также число уравнений, описывающих движение, и их вид зависят от назначения снаряда, его конструкции, способа стабилизации в полете и предлагаемой траектории движения.

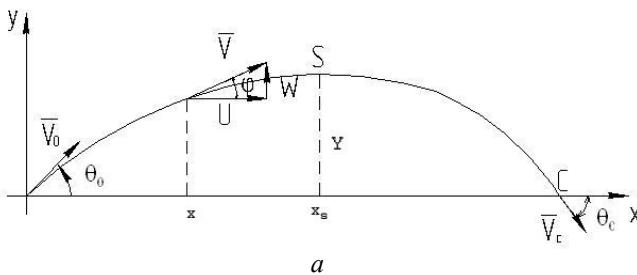
**2. Вторая, или так называемая обратная, задача** состоит в определении проектных баллистических характеристик движения по заданным тактико-техническим данным ракетной или артиллерийской системы. Вторая задача непосредственно связана с баллистическим проектированием системы, важным этапом которого является отыскание оптимальных режимов движения и траекторий полета.

3. Расчет стабилизации снарядов различного назначения и определение условий их управляемости – это **третья задача внешней баллистики**.

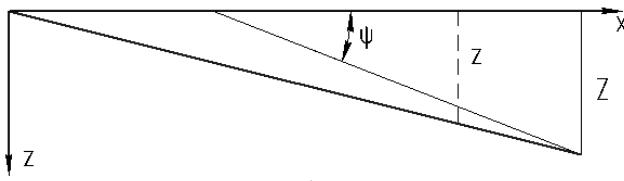
4. **Четвертая задача внешней баллистики** – это изучение факторов, влияющих на рассеивание траекторий снарядов, и рассмотрение способов уменьшения рассеивания и повышения точности стрельбы.

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Положение снаряда определяется относительно правой системы координат (прямоугольных координат). Начало координат полагают совпадающим с точкой вылета снаряда [2].



*a*



*b*

Положение снаряда относительно координат:

*a* – оси *xy*; *b* – оси *xz*

Плоскость *xy* – вертикальная плоскость, проходящая через вектор начальной скорости снаряда (плоскость бросания).

Плоскость *xz* – плоскость горизонта *X* в начале координат.

Ось *oz* считают направленной вправо от плоскости бросания, если смотреть по направлению стрельбы.

Обозначение элементов траектории следующие:

*x, y, z* – координаты центра массы снаряда;

$s$  – длина дуги траектории;

$t$  – время полета;

$\theta$  – угол наклона к горизонту касательной к траектории;

$v$  – скорость снаряда;

$u, w$  – горизонтальная и вертикальная проекция скорости.

Значения элементов траектории в вершине отличаются индексом  $s$ , например:  $V_s, X_s$ . Значения элементов траектории в точках вылета отмечаются индексом 0, например  $V_0, \theta_0$ . Значения элементов траектории в точках падения отмечаются индексом  $c$ , например:  $V_c, \theta_c$ . Некоторым наиболее важным элементам дают особые обозначения и названия, например:

- полная горизонтальная дальность  $X = X_c$ ;
- полное время полета  $T = t_c$ ;
- высота траектории  $Y = Y_c$ ;
- боковое отклонение в точке падения  $Z = Z_c$ ;
- угол бросания  $\theta_0$ ;
- угол падения  $\theta_c$ ;
- окончательная скорость  $V_c$ .

Угол  $\theta$  положителен на восходящей и отрицателен на нисходящей ветви траектории.

Вес снаряда –  $q$ .

Калибр снаряда –  $d$ .

Плотность воздуха, измеренная в единицах массы на единицу объема, –  $\rho$ .

# 1. ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

## 1.1. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАССЫ СНАРЯДА В ПУСТОТЕ. ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Движущийся в воздухе снаряд подвержен действию двух сил:

- силы тяжести;
- силы сопротивления воздуха.

В некоторых случаях, например при стрельбе снарядом крупного калибра с малой начальной скоростью или при полете снаряда в разреженных слоях атмосферы, сила сопротивления воздуха может быть значительно меньше силы тяжести [2, 3].

Рассмотрим некоторую точку траектории  $M$ . Учитывая единственную силу  $q = mg$ , действующую на снаряд, получим следующую систему дифференциальных уравнений движения (рис. 1.1):

$$m\ddot{x} = 0; m\ddot{y} = -q = -mg .$$

После сокращения на  $m$ :

$$\ddot{x} = 0; \ddot{y} = -g .$$

Начальные условия:

$$t = 0; \quad x = 0; \quad y = 0;$$

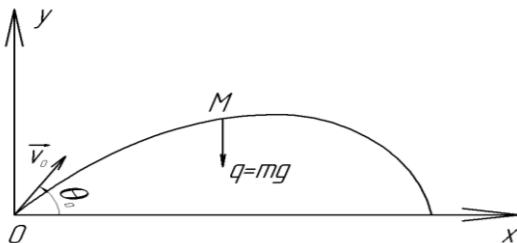


Рис. 1.1. Движение центра массы снаряда

при  $\dot{x}_t = V_0 \cos \theta_0$

$$\dot{y}_t = V_0 \sin \theta_0.$$

Так как вес снаряда не входит ни в дифференциальные уравнения, ни в начальные условия, то получим непосредственно следующий вывод: движение центра массы в пустоте не зависит от его веса.

Интегрируя систему (1.1) первый раз, получим

$$\frac{dx}{dt} = C_1 \frac{dy}{dt} = -gt + C_2.$$

Из начальных условий находим:

$$C_1 = V_0 \cos \theta_0;$$

$$C_2 = V_0 \sin \theta_0.$$

Для любой точки траектории можем записать:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = V_0 \cos \theta_0, \quad (1.1)$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = V_0 \sin \theta_0 - gt. \quad (1.2)$$

Имея в виду, что  $\dot{x}_t = u$  (горизонтальная проекция скорости), получим из системы (1.2) следующий вывод: при движении в пустоте горизонтальная проекция скорости остается постоянной вдоль траектории.

Интегрируя систему (1.1) второй раз, будем иметь

$$x = V_0 \cos \theta_0 t + C_3,$$

$$y = V_0 \sin \theta_0 t - \frac{gt^2}{2} + C_4. \quad (1.2a)$$

Из начальных условий находим  $C_3 = C_4 = 0$  и, исключая переменную  $t$ , получим уравнения траектории.

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \theta_0};$$

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx^2}{2V_0 \cos^2 \theta_0}. \quad (1.3)$$

**Траекторией движения снаряда** называют совокупность точек, последовательно проходимых снарядом на всех участках своего пути [4].

## 1.2. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ

Уравнение (1.3) есть уравнение кривой второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Вычислим дискриминант  $B^2 - AC$ . Так как уравнение траектории не содержит членов с произведением  $xy$  или с  $y^2$ , то  $B^2 - AC = 0$ , в этом случае кривая второго порядка является параболой.

Следовательно, траектория в пустоте есть парабола.

Тогда уравнение (1.3) запишем в виде

$$y = ax - bx^2. \quad (1.4)$$

Приравниваем  $x$  нулю:

$$ax - bx^2 = x \text{ (а } bx = 0\text{),}$$

найдем

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{a}{b}.$$

Первое решение отвечает точке вылета. Второе – точке падения.

Полная горизонтальная дальность равна

$$X = x_2 = \frac{a}{b}.$$

Перенесем начало координат вдоль оси  $x$  на расстояние половины полной дальности, получаем (рис. 1.2)

$$y = y_1; \quad x = a/2b + x_1;$$

и, подставляя эти величины в уравнение (1.4), будем иметь

$$y_1 = a\left(\frac{a}{2b} + x_1\right) - b\left(\frac{a}{2b} + x_1\right)^2$$

и окончательно:

$$y_1 = \frac{a^2}{4b} - bx_1^2.$$

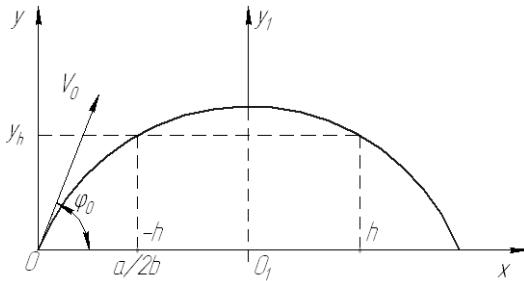


Рис. 1.2. Параболическая траектория

Это уравнение параболы, в котором отсутствуют нечетные степени  $X$ . Следовательно, новая ось  $y_1$  является осью симметрии параболы, так как двум произвольным значениям  $x = +h$  и  $x = -h$  отвечает одно и то же значение  $y_h$ .

**Вывод.** Траектория в пустоте имеет вертикальную ось симметрии, отстоящую от точки вылета на расстояние половины полной дальности.

### 1.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТРАЕКТОРИИ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЕЕ ТОЧКЕ

#### 1. Скорость снаряда

Для определения скорости снаряда в произвольной точке траектории составим уравнение сил для некоторой точки  $M$  [4] (рис. 1.3):

$$\frac{gV^2}{2g} - \frac{gV_0^2}{2g} = -mgy,$$

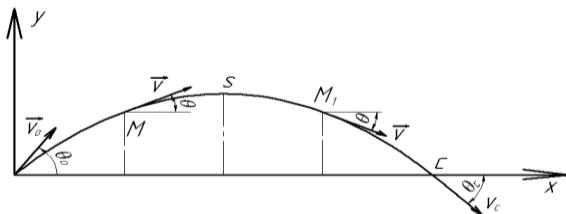


Рис. 1.3. Элементы траектории

откуда

$$V = \sqrt{V_0^2 - 2gy}. \quad (1.5)$$

Из этого уравнения следуют два свойства:

1) скорости в двух точках траектории, находящихся на одной высоте, равны. Следствие:  $V_0 = V_c$ , окончательная скорость равна начальной скорости;

2) скорость снаряда убывает с высотой. Минимальная скорость имеет место в вершине.

## 2. Угол наклона касательной

Дифференцируя уравнение траектории (1.3) и имея в виду, что  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta$ , получаем выражение

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx}{V_0^2 \cos^2 \theta_0}. \quad (1.6)$$

Согласно принятому положительному отчету углов  $\theta$  против часовой стрелки от горизонта к касательной, этот угол положителен на входящей ветви траектории и отрицателен на нисходящей.

Ранее мы видели, что траектория имеет вертикальную ось симметрии. Следовательно, в двух точках траектории, находящихся на одной высоте, углы наклона касательной по абсолютной величине должны быть равны: угол падения по абсолютной величине равен углу бросания [4].

## 3. Элементы точек падения и вершины траектории

Из уравнения (1.3), полагая  $y = 0$ , получим для точки падения

$$X = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g}. \quad (1.7)$$

Из выражения (1.2а) для  $x$  имеем

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \theta_0}.$$

Подставляя  $x = X$  из выражения (1.7), получим после преобразований

$$T = \frac{2V_0 \sin \theta_0}{g}. \quad (1.8)$$

Ранее мы имели  $V_0 = V_c$ ,  $|\theta_c| = \theta_0$ .

Для вершины траектории имеем

$$X_s = \frac{X}{2} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{2g}.$$

Подставляем значение  $X_s$  в уравнение (1.3) и получаем после преобразований

$$Y = \frac{V_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}. \quad (1.9)$$

Это выражение может быть приведено к следующему виду:

$$Y = \frac{X \operatorname{tg} \theta_0}{4}. \quad (1.9a)$$

Для времени полета имеем

$$t_s = \frac{xs}{V_0 \cos \theta_0} = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{2g V_0 \cos \theta_0},$$

или окончательно

$$t_s = \frac{V_0^2 \sin \theta_0}{g} = \frac{T}{2}.$$

## **1.4. ИССЛЕДОВАНИЕ СЕМЕЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ С ОДИНАКОВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ**

### **1. Угол наибольшей дальности**

Из выражения (1.7) для полной горизонтальной дальности

$$X = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

следует непосредственно, что наибольшая дальность отвечает углу бросания, при котором  $\sin 2\theta_0 = 1$ , т.е.  $\theta_0 = 45^\circ$ . При этом  $X_{\max} = \frac{V_0^2}{g}$ .

При угле бросания  $\theta_0 = 90^\circ - a$  получим

$$X = \frac{V_0^2}{g} \sin 2(90^\circ - a) = \frac{V_0^2}{g} \sin(180^\circ - 2a) = \frac{V_0^2 \sin 2a}{g}.$$

Таким образом, одну и ту же полную дальность мы можем получить при двух различных углах бросания:  $a$  и  $90^\circ - a$ .

## 2. Огибающая семейства траекторий. Парабола безопасности

Напишем уравнение семейства траекторий, отвечающих различным углам бросания, в следующем виде:

$$y = xp_0 - \frac{gx^2}{2V_0^2} (1 - p_0^2), \quad (1.10)$$

где  $p_0 = \tan \theta_0$  – параметр семейства кривых.

Для отыскания огибающей семейства кривых необходимо продифференцировать уравнение семейства по параметру  $p_0$  и из полученного уравнения и уравнения семейства исключить параметр  $p_0$ . Решая в такой последовательности, получим

$$0 = x - \frac{gx^2}{V_0^2} p_0,$$

$$p_0 = \frac{V_0^2}{gx}.$$

Подставляя значение  $p_0$  в (1.10), имеем уравнение огибающей

$$y = \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2}. \quad (1.11)$$

В этом уравнении отсутствуют нечетные степени  $x$ . Следовательно, ось  $y$  является осью симметрии параболы, определяемой уравнением (1.11).

Решая уравнение (1.10) относительно  $p_0 = \operatorname{tg} \theta_0$ , получим

$$\frac{gx^2}{2V_0^2} p_0^2 - xp_0 + \frac{gx^2}{2V_0^2} + y = 0,$$

$$p_0 = \frac{V_0^2}{gx^2} \left[ x \pm \sqrt{x^2 - \frac{2gx^2}{V_0^2} \left( \frac{gx^2}{2V_0^2} + y \right)} \right],$$

или окончательно

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{V_0^2}{gx} \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{2g}{V_0^2} \left( \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2V_0^2} - y \right)} \right]. \quad (1.12)$$

Анализируя полученное уравнение, приходим к следующим выводам.

- Для точек, находящихся на огибающей (рис. 1.4), выражение в круглых скобках на основании уравнения (1.11) обращается в ноль. При этом из уравнения (1.12) получаем единственное значение  $\theta_0$ .

- Любая точка внутри огибающей может быть поражена при двух установках угла бросания. Точка, находящаяся на огибающей, может быть поражена при одной установке угла бросания. Ни одна точка вне огибающей не может быть поражена.

- Для точек, находящихся вне огибающей, получаем мнимое решение.

- Огибающая семейства траекторий носит название параболы безопасности – это ясно из указанных свойств огибающей [4].

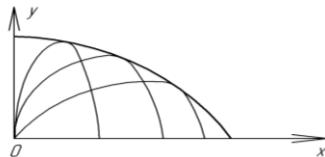


Рис. 1.4. Парабола безопасности

### 3. Закон понижения. Построение изохрон

Из уравнения траектории (1.3)

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \theta_0},$$

подставляя во второе слагаемое правой части  $x = V_0 \cos \theta_0 t$ , получим

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gt^2}{2}, \text{ откуда}$$

$$x \operatorname{tg} \theta_0 - y = \frac{gt^2}{2}. \quad (1.13)$$

Из рис. 1.5 видно, что  $x \operatorname{tg} \theta_0 - y = AB - MB = AM$ .

Назовем отрезок  $AM$  понижением под линией выстрела, а отрезок  $OA$  – удалением вдоль линии выстрела и найдем значение этих величин.

Из выражения (1.13) видно, что понижение под линией выстрела зависит только от времени полета и не зависит от угла бросания. Удаление вдоль линии выстрела зависит только от времени полета, так как

$$OA = \frac{x}{\cos \theta_0} = \frac{V_0 \cos \theta_0 t}{\cos \theta_0} = V_0 t.$$

**Вывод.** Для различных траекторий, отвечающих одной и той же начальной скорости, равным временам полета соответствуют равные понижения под линией выстрела и равные удаления вдоль линии выстрела.

На этом основании можно построить так называемые изохроны, или кривые равных времен полета (рис. 1.6).

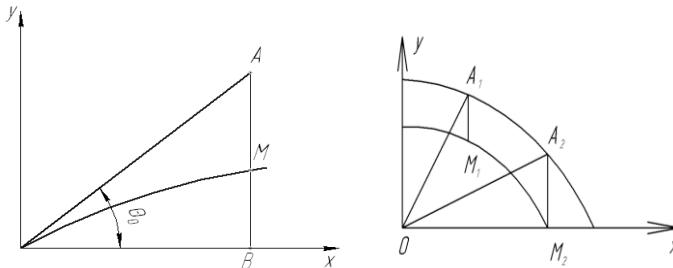


Рис. 1.5. Понижение траектории под линией выстрела

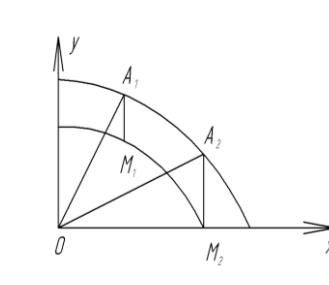


Рис. 1.6. Изохроны, или кривые равных времен полета

Чтобы построить изохрону, отвечающую некоторому времени  $t_i$ , надо построить окружность с радиусом, равным  $V_0 t_i$  и с центром в точке с координатами  $x = 0$ ;  $y = -\frac{gt_i^2}{2}$ . Действительно, изохрана получается понижением всех точек окружности равных удалений  $V_0 t_i$  на величину  $\frac{gt_i^2}{2}$ .

### 1.5. ЗАВИСИМОСТЬ УГЛА ПРИЦЕЛИВАНИЯ ОТ УГЛА МЕСТА ЦЕЛИ ПРИ ПОСТОЯННОЙ НАКЛОННОЙ ДАЛЬНОСТИ

Рассмотрим случай, когда цель  $M$  может занимать различные положения на окружности, отвечающей некоторой наклонной дальности  $D$  [4] (рис. 1.7). При этом имеем зависимость  $\theta_0 = \alpha + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – угол места цели, образованный линией цели и горизонтом орудия;  $\alpha$  – угол прицеливания, составленный линией цели и линией выстрела.

Исследуем характер изменения угла прицеливания  $\alpha$  в зависимости от изменения угла цели  $\varepsilon$  для заданной наклонной дальности  $D$ , т.е. для случая, когда цель перемещается по периметру окружности радиусом  $D$ .

Из уравнения траектории (1.3)

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \theta_0},$$

подставляя  $x = D \cos \varepsilon$ ;  $y = D \sin \varepsilon$ ;  $\theta = \alpha + \varepsilon$ , получим после сокращения на  $D$ :

$$\sin \varepsilon = \cos \varepsilon \operatorname{tg} (\alpha + \varepsilon) - \frac{g D \cos^2 \varepsilon}{2V_0^2 \cos^2 (\alpha + \varepsilon)}.$$

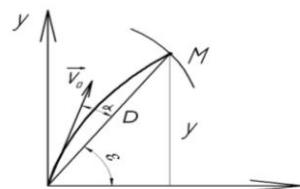


Рис. 1.7. Угол прицеливания

Или окончательно

$$D = \frac{2V_0^2}{g} \frac{\cos(\alpha + \varepsilon) \sin \alpha}{\cos^2 \varepsilon}. \quad (1.14)$$

Если задавать постоянное значение наклонной дальности  $D$ , то уравнение (1.14) будет выражать зависимость между углом прицеливания и углом места цели при данном значении наклонной дальности.

Решим уравнение (1.14) относительно  $\alpha$ , для чего преобразуем числитель второго множителя правой части уравнения.

$$\begin{aligned} 2\sin \alpha \cos(\alpha + \varepsilon) &= 2\sin \alpha (\cos \alpha \cos \varepsilon - \sin \alpha \sin \varepsilon) = \\ &= \sin 2\alpha \cos \varepsilon - 2\sin^2 \alpha \sin \varepsilon = \sin 2\alpha \cos \varepsilon - 2\sin^2 \alpha \sin \varepsilon = \\ &= \sin 2\alpha \cos \varepsilon - (1 - \cos 2\alpha) \sin \varepsilon = \sin 2\alpha \cos \varepsilon + \cos 2\alpha \sin \varepsilon + \\ &\quad + \cos 2\alpha \sin \varepsilon - \sin \varepsilon = \sin(2\alpha + \varepsilon) - \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Подставляя уравнения (1.14), получим

$$\sin(2\alpha + \varepsilon) = \frac{gD}{V_0^2} \cos^2 \varepsilon + \sin \varepsilon. \quad (1.15)$$

Задаваясь определенными значениями  $D$  и  $\varepsilon$ , можно вычислить  $2\alpha + \varepsilon$ , а затем и угол  $\alpha$ . Дальности траекторий в пустоте, в том числе и наклонные дальности, обычно значительно превышают соответствующие дальности в воздухе. Поэтому, имея в виду применение полученных зависимостей хотя бы в первом приближении для траекторий в воздухе, необходимо из (1.15) исключить наклонную дальность  $D$ .

Вместо наклонной дальности  $D$  за исходную величину примем тот угол прицеливания  $\alpha_0$ , который отвечал бы данной дальности, если бы цель была на горизонте. Для цели на горизонте  $\varepsilon = 0$ ;  $\theta_0 = \alpha = \alpha_0$ .

Применяя равенство (1.15) к этому частному случаю, получим

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{gD}{V_0^2} = \frac{gX}{V_0^2}.$$

Рассматривая теперь для той же наклонной дальности случай, когда  $\varepsilon \neq 0$ , и подставляя значение  $\frac{gD}{V_0^2} = \sin 2\alpha_0$  в уравнение (1.15), получим

$$\sin(2\alpha + \varepsilon) = \sin 2\alpha_0 \cos^2 \varepsilon + \sin \varepsilon. \quad (1.16)$$

В этом виде выражение известно под названием формулы Лендера. Зависимость (1.16) может быть выражена интересным графиком, изображающим семейство кривых зависимости  $\alpha$  от  $\varepsilon$  для различных значений  $\alpha_0$  (рис. 1.8).

Применение графика разберем на следующем примере. Пусть при цели на горизонте установка угла прицеливания  $\alpha_0 = 20^\circ$ , требуется

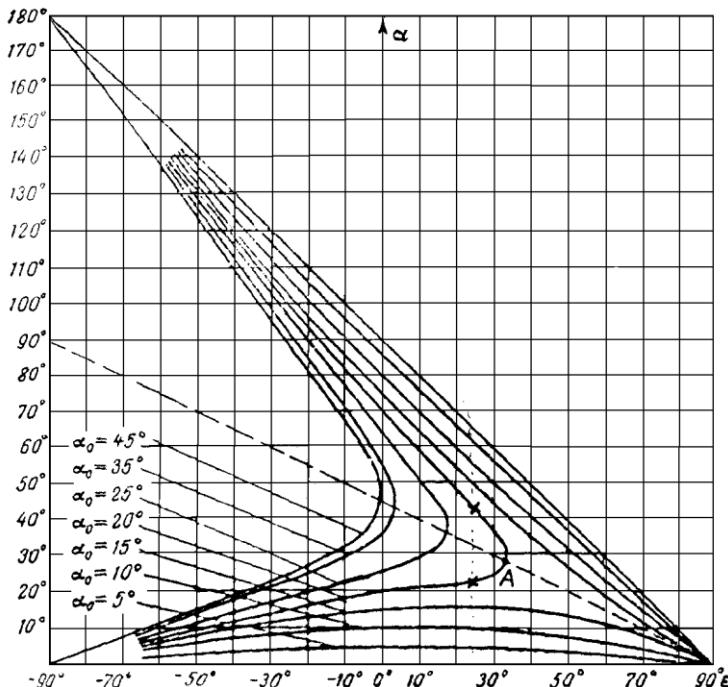


Рис. 1.8. Семейство кривых зависимостей  $\alpha$  от  $\varepsilon$  для различных значений  $\alpha_0$

определить угол прицеливания, если при той же наклонной дальности угол места цели равен  $25^\circ$ . Проводим через точку на оси абсцисс, отвечающую  $\varepsilon = 25^\circ$ , прямую, параллельную оси ординат. Эта прямая пересекается с кривой, отвечающей  $\alpha_0 = 20^\circ$ , в двух точках. Этим двум точкам отвечают значения  $\alpha = 22^\circ$  и  $\alpha = 43^\circ$ , и, следовательно, цель может быть поражена при любом из двух указанных углов прицеливания.

## 1.6. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ СНАРЯДА В СЛОЕ

Напишем формулы для полного времени полета и для высоты траектории:

$$T = \frac{2V_0 \sin \theta_0}{g}, \quad Y = \frac{2V_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}.$$

Возведя обе части равенства в квадрат и разделив почленно первое на второе, получим  $\frac{T^2}{Y} = \frac{8}{g}$ ,

$$T = \sqrt{\frac{8}{g} Y}. \quad (1.17)$$

Рассмотрим участок траектории, расположенной выше  $y_i$  (рис. 1.9). Этот участок мы можем рассматривать как самостоятельную траекторию с точкой вылета  $M_i$  и точкой падения  $M'_i$ .

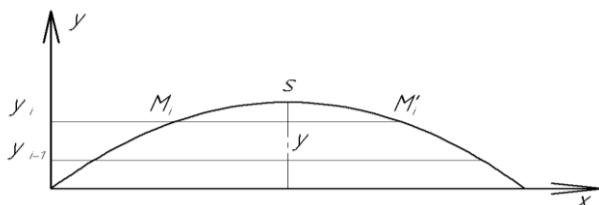


Рис. 1.9. Высота траектории

Высота этой траектории равна  $y = y_i$ . Применяя (1.17), найдем

$$T_i = \sqrt{\frac{8}{g}(Y - y_i)} . \quad (1.18)$$

Разделив на (1.17) почленно, получим

$$\frac{T_i}{T} = \sqrt{\frac{Y - y_i}{Y}} .$$

Относительное время пребывания снаряда в  $i$ -м слое, ограниченном высотами, отвечающими ординатам  $y_{i-1}$  и  $y_i$ , найдем как разность между относительными временами для слоя выше  $y_{i-1}$  и для слоя выше  $y_i$ :

$$\frac{T_{i-1} - T_i}{T} = \sqrt{\frac{Y - y_{i-1}}{Y}} = \sqrt{\frac{Y - y_i}{Y}} .$$

Если траекторию разбить на  $n$  равных слоев, то для  $i$ -го слоя, отвечающего значениям ординат  $y_{i-1}$  и  $y_i$ , получим

$$\frac{y_{i-1}}{Y} = \frac{i-1}{n}; \quad \frac{y_i}{Y} = \frac{i}{n} .$$

Обозначая через  $t$  время пребывания снаряда в  $i$ -м слое, найдем

$$\frac{t_i}{T} = \sqrt{\frac{Y - y_{i-1}}{Y}} - \sqrt{\frac{Y - y_i}{Y}} = \sqrt{1 - \frac{i-1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{i}{n}}$$

или окончательно:

$$\frac{t_i}{T} = \frac{\sqrt{n-i+1} - \sqrt{n-i}}{\sqrt{n}} . \quad (1.19)$$

Формула (1.19) применяется обычно для приближенного определения весов слоев при подсчете баллистического ветра или баллистического изменения температуры.

Из оценки видно, что относительное время пребывания снаряда в самом верхнем слое значительно превышает соответствующие времена для нижних слоев, это объясняется большей длиной участка траектории и меньшей скоростью снаряда в верхнем слое.

## 1.7. СРЕДНЯЯ ВЫСОТА ТРАЕКТОРИИ

Рассмотрим площадь  $OSCO$ , ограниченную траекторией и осью абсцисс (рис. 1.10).

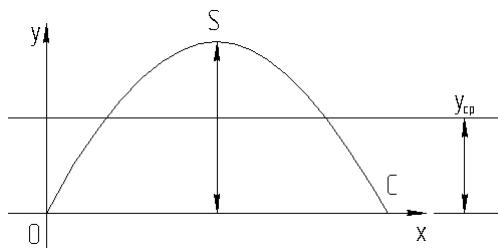


Рис. 1.10. Средняя высота траектории

Она равна  $\frac{x}{0} \int y dx$ . Вынесем  $y$  со средним значением из-под знака интеграла.  $\int_0^x y dx = y_{cp} X$ . Легко видеть, что  $y_{cp}$  – это высота прямоугольника, основание которого  $X$ , а площадь равновелика площади  $OSCO$ . Вычислим  $y_{cp}$ :

$$\begin{aligned} y_{cp} &= \frac{1}{X} \int_0^x y dx = \frac{1}{X} \int_0^x \left( x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{dx^2}{2V_0^2 \cos^2 \theta_0} \right) dx = \\ &= \frac{1}{X} \left( \frac{X^2}{2} \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{g}{2V_0^2 \cos^2 \theta_0} \frac{X^3}{3} \right) = \frac{X \operatorname{tg} \theta_0}{4} \left( 2 - \frac{2gX}{3V_0^2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} \theta} \right) = \\ &= \frac{X \operatorname{tg} \theta_0}{4} \left( 2 - \frac{2g}{3V_0^2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} \theta} \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \right) = \frac{X \operatorname{tg} \theta_0}{4} \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Окончательно  $y_{cp} = \frac{2}{3} Y$ .

Последняя формула применяется обычно для определения средней вдоль траектории плотности воздуха, которая применяется на высоте

$$y_{cp} = \frac{2}{3} Y.$$

### 1.8. ПОПРАВОЧНЫЕ ФОРМУЛЫ, ОТВЕЧАЮЩИЕ МАЛЫМ ИЗМЕНЕНИЯМ ПАРАМЕТРОВ $V_0$ И $\theta_0$

Элементы траектории зависят в безвоздушном пространстве от двух параметров  $V_0$  и  $\theta_0$ . Рассмотрим малые изменения этих параметров  $\delta V_0$  и  $\delta\theta_0$  и определим отвечающие им изменения элементов точки падения и вершины [2, 4].

Логарифмируем и дифференцируем выражение для полной дальности:

$$X = \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g},$$

получим

$$\frac{dX}{X} = 2 \frac{dV_0}{V_0} + \frac{2d\theta_0}{\tg 2\theta_0}.$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости относительно  $dV_0$  и  $d\theta_0$  и заменяя дифференциалы приращениями, получим

$$\frac{\delta X}{X} = 2 \frac{\delta V_0}{V_0} + 2 \frac{\delta\theta_0}{\tg 2\theta_0}.$$

Рассматривая изменения только начальной скорости, найдем

$$\frac{\delta X}{X} = 2 \frac{\delta V_0}{V_0}.$$

Таким образом, изменение начальной скорости на 1 % вызывает изменение полной горизонтальной дальности на 2 %. Рассматривая изменение только угла бросания, получим

$$\frac{\delta X}{X} = \frac{2\delta\theta_0}{\tg 2\theta_0}.$$

Из этого выражения видно, что относительное изменение дальности, отвечающее некоторому отклонению  $\delta\theta_0$  в угле бросания, сильно растет, когда угол бросания стремится к нулю. Следовательно, при малых углах бросания следует всемерно избегать ошибок вертикальной на-водки, так как они вызывают значительные ошибки в дальности.

С другой стороны, при углах бросания, близких к  $45^\circ$ , эти ошибки мало влияют на дальность. Для остальных элементов точки падения и вершины аналогично получим:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta V_0}{V_0} + \frac{\delta\theta_0}{\operatorname{tg}\theta_0},$$

$$\delta\theta_c = -\delta\theta_0,$$

$$\delta V_c = \delta V_0,$$

$$\frac{\delta Y}{Y} = 2 \frac{\delta V_0}{V_0} + 2 \frac{\delta\theta_0}{\operatorname{tg}\theta_0}.$$

## 1.9. ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Элементы траектории в воздухе значительно отличаются от элементов траектории в безвоздушном пространстве. Эта разница тем больше, чем больше скорость снаряда и чем меньше его калибр (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Снаряд	$V_0$	$\theta_0$	Дальность		Отношение $\frac{X_{\text{п}}}{X_{\text{в}}}$
			Пустота $X_{\text{п}}$	Воздух $X_{\text{в}}$	
7,62 мм, пуля	800	$15^\circ$	32,700	3070	8,2
7,62 мм, снаряд	680	$40^\circ$	47,800	13200	3,6
122 мм, снаряд	230	$40^\circ$	5300	4200	1,3
82 мм, мина	60	$45^\circ$	367	350	1,05

Таким образом, при начальной скорости, меньшей 50 м/с, можно непосредственно применять формулу параболической теории для вычисления элементов траектории в воздухе. В частности, можно применить параболическую теорию для расчета траектории ручных гранат или бутылок с горючим составом.

Наряду с этим некоторые общие зависимости дают удовлетворительные результаты для траекторий в воздухе при больших начальных скоростях для выражений:

- относительного времени пребывания снаряда;
- средней высоты траектории.

---

## 2. ДВИЖЕНИЕ СНАРЯДА В ВОЗДУШНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

---

### 2.1. СОПРОТИВЛЕНИЕ ВОЗДУХА

Изучение сопротивления воздуха полету артиллерийского снаряда имеет весьма важное значение для задач внешней баллистики. В большинстве случаев, встречающихся в практике артиллерийской стрельбы, сила сопротивления воздуха значительно превышает вес снаряда (табл. 2.1).

Т а б л и ц а 2.1

Калибр снаряда	Скорость $V_0$ , м/с	Сила сопротивле- ния воздуха $R$ , кг	Вес снаряда $q$ , кг	$\frac{R}{q}$
152 мм дальнобойный	700	205	50	4,1
	500	110		2,2
	250	10		0,2
76,2 мм	700	53	6,5	8,2
	500	2,60		4,5
	250	0,46		0,4
7,62 мм пуля	700	0,25	0,011	42
	500	0,023		23
	250	—		2,1

Только при скорости снаряда порядка 50 м/с и меньше можно для снарядов средних и крупных калибров пренебрегать силой сопротивления воздуха.

## 2.2. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

### 2.2.1. ТЕОРИЯ НЬЮТОНА

Ньютон рассматривал воздух, состоящий из отдельных упругих частиц – шариков. При движении в воздухе твердое тело ударяет по этим частицам и сообщает им определенную скорость [4].

Кинетическая энергия, сообщаемая этим частицам, получается за счет энергии движущегося тела, что и определяет сопротивление воздуха движению твердого тела.

Пусть некоторая пластина, площадь которой равна  $S$ , движется по направлению своей нормали со скоростью  $V$ . За промежуток времени  $dt$  пластина пройдет расстояние  $Vdt$  и опишет объем  $SVdt$  (рис. 2.1). Масса всех частиц, с которыми столкнется пластина, равна  $\rho SVdt$ , где  $\rho$  – массовая плотность газа.

Составим уравнение количества движения  $2\rho SV^2 dt = Rdt$  или после сокращения на  $dt$ :  $R = 2S\rho V^2$ .

Если рассматривать частицы воздуха как абсолютно неупругие шарики, то, учитывая, что после удара скорость преобразуется в ноль, получим соответственно  $R = S\rho V^2$ . Или в общем случае можно записать:

$$R = kS\rho V^2; \quad 1 < k < 2.$$

Для пластины, движущейся под углом  $\alpha$  к нормали, Ньютон получил выражение

$$R = kS\rho V^2 \cos^2 \alpha, \quad (2.1)$$

а для тела произвольной формы

$$R = \lambda \sigma \rho V^2, \quad (2.2)$$

где  $\lambda$  – коэффициент, зависящий от формы передней части поверхности тела, а  $\sigma$  – площадь наибольшего поперечного сечения тела.

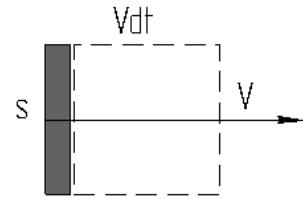


Рис. 2.1. Определение сопротивления воздуха

Основная причина неудовлетворительности теории Ньютона заключается в том, что в ней не учитываются взаимодействие частиц воздуха, характер обтекания тела воздухом, а также уплотнения и разрежения, получающиеся в различных частях поверхности тела.

## 2.2.2. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ

Рассмотрим установившееся движение идеального газа. Выделим вдоль линии тока элемент струи длиной  $dS$  и сечением  $d\sigma$  и напишем уравнение движения этого элемента. Масса элемента равна  $\rho dS d\sigma$ . Давление слева равно  $p$ , а справа –  $(p + dp)$  (рис. 2.2).

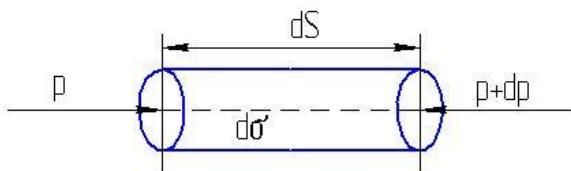


Рис. 2.2. Установившееся движение идеального газа

Уравнение движения напишем в следующем виде:

$$\rho d\sigma dS \frac{dV}{dt} = p - (p + dp) d\sigma.$$

Так как  $\frac{dS}{dt} = V$ , то  $V dV = -\frac{dp}{\rho}$ .

Интегрируя в пределах от начальной до произвольной точки струи, получим

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2} = - \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}.$$

Для небольших скоростей газа можно, пренебрегая его сжимаемостью, получить  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ,

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2} = - \frac{1}{\rho} (p - p_0)$$

или

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{V_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \text{const.}$$

Из этого выражения видно, что при увеличении скорости вдоль струи давление падает. Если струя встречает препятствие, нормальное к направлению струи, то скорость обращается в ноль. При этом получим

$$\frac{\rho V_0^2}{2} = p - p_0 = \Delta p. \quad (2.3)$$

Таким образом, добавочное давление, получающееся при ударе струи о преграду, равно  $\frac{\rho V_0^2}{2}$ ; эта величина носит название *скоростной напор*.

Сравнивая выражение (2.3) с формулой (2.1), видим, что коэффициент  $k$  получается по Бернулли равным  $\frac{1}{2}$  вместо 1–2 по Ньютону.

Если учесть сжимаемость воздуха и рассматривать адиабатическую зависимость между плотностью и давлением

$$\frac{p}{\rho} = \text{const}, \quad k = 1,4,$$

$$\frac{p}{\rho^k} = \frac{p_0}{\rho_0^k}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{k}},$$

получим

$$-\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{p_0^k}{\rho_0} \int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{k}} dp = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left( p_0^{\frac{k-1}{k}} - p^{\frac{k-1}{k}} \right) = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

Уравнение Бернулли примет следующий вид:

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2} = \frac{k-1}{k} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} \right].$$

В случае удара струи о нормальное препятствие получим  $V=0$ , отсюда

$$\frac{V_0^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right].$$

Введя выражение для скорости звука в начальной точке струи

$$a_0 = \sqrt{\frac{kp_0}{\rho_0}},$$

получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{V_0}{a_0} \right)^2 &= \frac{2}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right], \\ \frac{p}{p_0} &= \left[ 1 + \frac{k-1}{2} \left( \frac{V_0}{a_0} \right)^2 \right]^{\frac{k}{k-1}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если скорость струи  $V_0$  мала по сравнению со скоростью звука  $a_0$ , то, разлагая выражение в квадратных скобках по биному, после преобразований будем иметь:

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{\rho_0 V_0^2}{2} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{V_0}{a_0} \right)^2 \right]. \quad (2.5)$$

Сравнивая полученное уравнение с выражением (2.3), видим, что второе слагаемое в скобках представляет собой поправку на сжимаемость.

При  $V_0 = 70$  м/с получим

$$1 + \frac{1}{4} \left( \frac{V_0}{a_0} \right)^2 = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{70}{340} \right)^2 = 1,01,$$

т. е. учет сжимаемости дает поправку в 1 %. При  $V_0 = 150$  м/с поправка будет уже 5 %.

Уравнение Бернуlli позволяет вычислить избыточное давление потока на небольшую площадку, нормальную к направлению потока.

Расчеты по этой формуле хорошо согласуются с опытом.

Однако уравнение Бернуlli нельзя применять при скорости потока, большей чем скорость звука, так как при этом в потоке появляются скачки давления и нарушается непрерывность изменения основных характеристик потока:

- давления;
- плотности;
- температуры.

### 2.2.3. ТЕОРИЯ ПЛОСКОГО СКАЧКА ДАВЛЕНИЯ

Если струя газа, ударяющая о преграду, имеет скорость, большую скорости звука, то на некотором расстоянии впереди преграды появляется ударная волна, на поверхности которой давление, температура и плотность резко возрастают скачком, а скорость потока падает [3].

При этом имеет место разрыв непрерывности изменения указанных характеристик потока.

Толщина переднего слоя, в котором происходит изменение давления в потоке, весьма мала и находится в пределах  $10^{-5}$ – $10^{-6}$  мм.

В случае обтекания снаряда сверхзвуковым потоком плоский прямой скачок получается только непосредственно впереди вершины снаряда или взрывателя, а далее с боков будет иметь место косой скачок.

Выведем основные зависимости теории плоского прямого скачка давления. Рассмотрим небольшую плоскую площадку вершины снаряда, о которую ударяет сверхзвуковая струя воздуха (рис. 2.3).

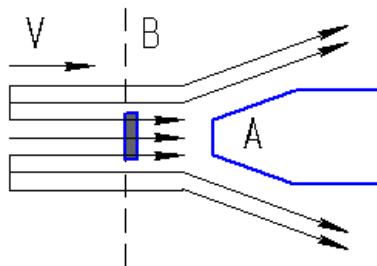


Рис. 2.3. Скачок давления при встрече с вершиной снаряда

Впереди площадки  $A$  образуется ударная стоячая волна  $B$ , или фронт скачка. Перед скачком имеем следующие характеристики потока: скорость потока  $V$ , давление  $p$ , плотность  $\rho$ , температура  $T$ .

Характеристики потока непосредственно за скачком обозначим  $V_1$ ,  $p_1$ ,  $S_1$ ,  $T_1$ .

Рассмотрим в момент  $t$  элемент струи, имеющий основание, равное единице поверхности, и высоту  $Vdt$ , причем передняя граница элемента непосредственно примыкает к фронту скачка (рис. 2.4).

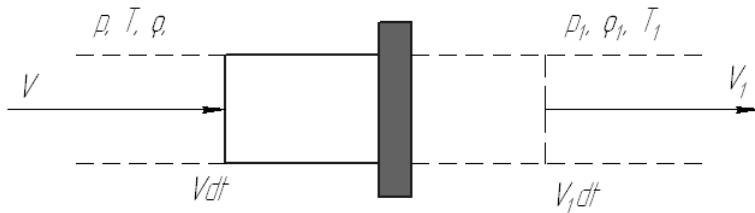


Рис. 2.4. Фронт скачка

В момент времени  $t + dt$  весь элемент пройдет через фронт скачка. При этом передняя граница элемента переместится на величину  $V_1dt$ , а задняя на  $Vdt$  и совпадет с фронтом волны.

Найдем зависимости между характеристиками потока до скачка  $V$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  и после скачка  $V_1$ ,  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $T_1$ , полагая первые известными.

Для этого воспользуемся следующими уравнениями:

- 1) уравнением сохранения массы элемента при прохождении через фронт скачка;
- 2) уравнением количества движения;
- 3) уравнением энергии;
- 4) уравнением состояния газа.

### 1. Уравнение сохранения массы

До прохода элемента через скачок имеем массу  $\rho Vdt$ , а после прохода элемента  $\rho_1 V_1 dt$ . Приравнивая эти величины и обозначая  $\Delta V = V - V_1$ , где  $\Delta V$  – величина скачка скорости, получим

$$\rho_1 = \frac{\rho V}{V - \Delta V}. \quad (2.6)$$

## 2. Уравнение количества движения

Количество движения элемента до скачка  $\rho V dt V$ , а после скачка  $\rho V dt (V - \Delta V)$ .

Импульс силы на переднюю границу элемента равен  $p_1 dt$ , а на заднюю  $p dt$ .

Уравнение количества движения после сокращения на  $dt$  получим в следующем виде:

$$\rho V (V - \Delta V) - \rho V^2 = p - p_1, \text{ или } p_1 - p = \rho V \Delta V. \quad (2.7)$$

## 3. Уравнение энергии

Кинетическая энергия элемента до прохода через скачок равна  $\frac{\rho V dt}{2} V^2$ , а после прохода через скачок  $\frac{\rho V dt}{2} (V - \Delta V)^2$ , внутренняя энергия элемента получится до скачка  $g \rho V dt \frac{C_V T}{A}$ , после скачка  $g \rho V dt \frac{C_V T_1}{A}$ , где  $g \rho V dt$  – вес элемента, а  $\frac{1}{A}$  – механический эквивалент тепла.

Работа давления, действующего на переднюю границу объема, равна  $p_1 (V - \Delta V) dt$ , а на заднюю  $p V dt$ .

После преобразований окончательно получим уравнение энергии в следующем виде:

$$\rho V \left[ \frac{V - \Delta V}{2} - \frac{V^2}{2} + \frac{g C_V}{A} (T_1 - T) \right] = p V - p_1 (V - \Delta V).$$

Разделив обе части равенства на  $\rho V$ , после преобразований будем иметь:

$$-\Delta V \left( V - \frac{\Delta V}{2} \right) + \frac{g C_V}{A} T_1 - T = \frac{p}{\rho} - p_1 \frac{V - \Delta V}{\rho V}. \quad (a)$$

На основании уравнения (2.6) имеем  $\frac{V - \Delta V}{\rho V} = \frac{1}{\rho_1}$ . И из уравнения состояния идеального газа получим:

$$\frac{p}{\rho} - \frac{p_1}{\rho_1} = gRT - gRT_1 = -gR(T - T_1).$$

Подставляя в эти значения уравнение (а), найдем

$$g\left(\frac{C_V}{A} + R\right)T_1 - T = \Delta V\left(V - \frac{\Delta V}{2}\right).$$

Из термодинамики известно, что  $C_p - C_V = AR$ , где  $C_V$  – теплоемкость при постоянном объеме;  $C_p$  – теплоемкость при постоянном давлении;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $A$  – механический эквивалент тепла, откуда следует:

$$\frac{C_V}{A} + R = \frac{C_p}{A};$$

после преобразований окончательно получим уравнение энергии в следующем виде:

$$T_1 - T = \frac{A\Delta V}{gC_p}\left(V - \frac{\Delta V}{2}\right). \quad (2.8)$$

В уравнениях (2.6), (2.7) и (2.8) остается одна неизвестная величина  $\Delta V$ . Для ее определения воспользуемся уравнением состояния газа.

#### 4. Уравнение состояния газа

Имеем  $p - p_1 = g\rho_1 RT_1 - g\rho RT$ .

На основании уравнения количества движения (2.7) получим

$$V\rho\Delta V = g\rho_1 RT_1 - g\rho RT.$$

Подставляя сюда значения  $\rho_1$  и  $T_1$  из уравнений (2.1) и (2.8), будем иметь:

$$V\Delta V = gRT \frac{\Delta V}{V - \Delta V} + \frac{AR}{C_p} \frac{V\Delta V}{V - \Delta V} \left(V - \frac{\Delta V}{2}\right). \quad (2.9)$$

Далее, из выражения для скорости звука  $a = \sqrt{kgRT}$  имеем  
 $gRT = \frac{a^2}{k}$  и, кроме того,

$$\frac{AR}{C_p} = \frac{C_p - C_V}{C_p} = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}.$$

Из уравнения (2.9) после сокращения на  $\Delta V$  получим

$$V = \frac{a^2}{k(V - \Delta V)} + \frac{k-1}{k} \frac{V}{V - \Delta V} \left( V - \frac{\Delta V}{2} \right),$$

$$V(V - \Delta V) = \frac{a^2}{k} + \frac{k-1}{k} V \left( V - \frac{\Delta V}{2} \right).$$

После преобразований

$$\Delta V = \frac{2V}{k+1} \left( 1 - \frac{a^2}{V^2} \right). \quad (2.10)$$

Определив  $\Delta V$  и подставив в уравнения (2.6), (2.7), (2.8), найдем характеристики потока за скачком. Для сокращения письма обозначим  $\frac{a}{V} = \alpha$ . Из уравнения (2.6) получим

$$\rho_1 = \frac{\rho V}{V - \frac{2V}{k+1}(1-\alpha^2)} = \frac{\rho}{1 - \frac{2}{k+1} + \frac{2\alpha^2}{k+1}}.$$

Или окончательно:

$$\rho_1 = \rho \frac{k+1}{k-1+2\alpha^2}. \quad (2.11)$$

Из уравнения (2.7) получим

$$p_1 = p + \rho V \frac{2V}{k+1} (1-\alpha^2) = p \left[ 1 + \frac{\rho}{p} \frac{2V^2}{k+1} (1+\alpha^2) \right].$$

Заменяя  $\frac{p}{\rho} = gRT = \frac{a^2}{k}$ , получим

$$\begin{aligned} p_1 &= p \left[ 1 + \frac{2k}{k+1} \frac{V^2}{a^2} (1 - \alpha^2) \right] = p \left( 1 + \frac{2k}{k+1} \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2} \right) = \\ &= p \left[ 1 - \frac{2k}{k+1} + \frac{2k}{(k+1)\alpha^2} \right]. \end{aligned}$$

Или окончательно:

$$p_1 = p \left[ \frac{2k}{(k+1)\alpha^2} - \frac{k-1}{k+1} \right]. \quad (2.12)$$

Определим еще скорость потока за скачком:

$$V_1 = V - \Delta V = V \left[ 1 - \frac{2}{k+1} (1 - \alpha^2) \right].$$

Или окончательно:

$$V_1 = \frac{V}{k+1} (k-1+2\alpha^2). \quad (2.13)$$

Пользуясь полученными зависимостями, можно определить потоки за скачком, а следовательно, и скачки давления  $\Delta p = p_1 - p$ ; температуры  $\Delta T = T_1 - T$  и скорости  $\Delta V = V - V_1$ . Если начальная скорость потока равна скорости звука, то  $\alpha = 1$  и из уравнений (2.11), (2.12), (2.13) получим, что  $\rho_1 = \rho$ ;  $p_1 = p$  и  $V_1 = V$ , т.е. скачок не имеет места.

Не будет также скачка, если начальная скорость потока меньше скорости звука. В этом случае исходя из выведенных зависимостей мы получили бы скачок разрежения, существование которого, однако, противоречит второму началу термодинамики.

Численные значения  $\Delta V$ ,  $\Delta p$ ,  $\Delta T$  в зависимости от скорости потока перед скачком показаны в табл. 2.2. Заслуживает внимания чрезвычайно большое повышение температуры за скачком при скоростях потока, превышающих 2000 м/с (кумулятивный снаряд).

Т а б л и ц а 2.2

$V$ , м/с	$\Delta V$ , м/с	$\Delta p$ , кг/см <sup>2</sup>	$\Delta T^\circ$
340	0	0	0
400	93	0,47	33
500	224	1,39	87
600	338	2,6	146
800	544	5,4	288
1000	734	9,2	465
1500	1181	22,2	1075
2000	1611	40,3	1925
2500	2035	63,6	3020
3000	2460	92,3	4350
4000	3300	165	7750

#### 2.2.4. ДИНАМИЧЕСКИЙ АДИАБАТИЧЕСКИЙ ЗАКОН. ФОРМУЛА ГЮГОНЬО

При адиабатическом процессе соотношение между давлением и плотностью определяется зависимостью

$$\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p}{\rho^k}.$$

При наличии скачка процесс будет отличным от адиабатического, несмотря на отсутствие теплообмена с окружающей средой. Действительно, определим из уравнения (2.11)  $\rho_1$  и подставим в уравнение

(2.12), найдем  $\alpha^2 = \frac{a^2}{V^2}$ . При этом для упрощения письма обозначим

$$b = \frac{\rho_1}{\rho}; \text{ получим}$$

$$\frac{k+1}{k-1+2\alpha^2} = b,$$

откуда

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{k+1}{2b} - \frac{k-1}{2} = \frac{k+1-(k-1)b}{2b}, \\ \frac{2k}{2\alpha^2} - (k-1) &= \frac{4kb}{(k+1)-(k-1)b} - (k-1) = \\ &= \frac{4kb - (k^2 - 1) + (k-1)^2 b}{k+1-(k-1)b} = \frac{(k^2 + 1)b - (k^2 - 1)}{k+1-(k-1)b}.\end{aligned}$$

Подставим полученное значение в уравнение (2.12), найдем после сокращения на  $(k+1)$  и подстановки  $b = \frac{\rho_1}{\rho}$ :

$$\frac{p_1}{p} = \frac{(k+1)\frac{\rho_1}{\rho} - k + 1}{k+1 - (k-1)\frac{\rho_1}{\rho}}. \quad (2.14)$$

Эта формула (2.14), полученная Гюгоньо, носит название динамической адиабатического закона. При наличии скачка давления нельзя применять обычную адиабатическую зависимость между давлением и плотностью. По этой же причине нельзя в данном случае применять уравнения (2.4) и (2.5), выведенные для обычного адиабатического процесса.

### 2.2.5. ДАВЛЕНИЕ В ВЕРШИНЕ СНАРЯДА. ФОРМУЛА РЭЛЕЯ

После прохождения струи через скачок для участка от внутренней стороны скачка и до вершины снаряда можно применить обычное уравнение Бернуlli. Обозначая через  $p_b$  давление у вершины снаряда, воспользуемся уравнением (2.4), заменив  $p$  через  $p_b$ , а  $p_0$ ,  $V_0$  и  $a_0$  через  $p$ ,  $V$  и  $a_1$  соответственно. Таким образом, будем иметь [2, 4]:

$$\frac{p_b}{p_1} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} \left( \frac{V_1}{a_1} \right)^2 \right]^{k/(k-1)}$$

и, подставляя это выражение  $a_1^2 = \frac{kp_1}{\rho_1}$ , получим

$$\frac{p_b}{p_1} = \left( 1 + \frac{k-1}{2k} \frac{\rho_1 V_1^2}{p_1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (2.15)$$

Подставим в (2.15) значения  $p_1$ ,  $\rho_1$  и  $V_1$  из уравнений (2.11), (2.12), (2.13):

$$\frac{\rho_1 V_1^2}{p_1} = \rho \frac{k+1}{k-1+2\alpha^2(k+1)^2} \cdot \frac{V^2(k-1+2\alpha^2)^2}{p \left[ \frac{2k}{(k+1)\alpha^2} - \frac{k-1}{k+1} \right]} = \frac{\rho V^2(k-1+2\alpha^2)\alpha^2}{p 2k - (k-1)\alpha^2}.$$

Так как  $\frac{kp}{\rho} = \alpha^2$ , то  $\frac{\rho V^2}{2} = k \frac{V^2}{\alpha^2} = \frac{k}{\alpha^2}$ , откуда  $\frac{\rho_1 V_1^2}{p_1} = \frac{k(k-1+2\alpha^2)}{2k - (k-1)\alpha^2}$ ,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{k-1}{2k} \frac{\rho_1 V_1^2}{p_1} &= 1 + \frac{\frac{k-1}{2} + \alpha^2}{\frac{2k}{k-1} - \alpha^2} = \frac{\frac{2k}{k-1} + \frac{k-1}{2}}{\frac{2k}{k-1} - \alpha^2} = \frac{(k+1)^2}{2(k-1)} \frac{1}{\frac{2k}{k-1} - \alpha^2} = \\ &= \frac{k+1}{2\alpha^2} \frac{1}{\frac{2k}{(k+1)\alpha^2} - \frac{k-1}{k+1}}. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (2.15) полученное выражение, а также значение  $p_1$  из уравнения (2.12), найдем

$$\frac{p_b}{p} = \left[ \frac{2k}{(k+1)\alpha^2} - \frac{k-1}{k+1} \right] \left( \frac{k+1}{2\alpha^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{1}{\left[ \frac{2k}{(k+1)\alpha^2} - \frac{k-1}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{k+1}{2\alpha^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{1}{\left[ \frac{2k}{(k+1)\alpha^2} - \frac{k-1}{k+1} \right]^{\frac{1}{k-1}}} = \\
&= \left( \frac{k+1}{2\alpha^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{1}{\left( \frac{k-1}{k+1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left[ \frac{2k}{(k-1)\alpha^2} - 1 \right]^{\frac{1}{k-1}}}.
\end{aligned}$$

Подставляя сюда  $\alpha = \frac{a}{V}$ , после преобразований будем иметь формулу Рэлея:

$$\frac{p_b}{p} = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left( \frac{2}{k-1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\left( \frac{V}{a} \right)^{\frac{2k}{k-1}}}{\left[ \frac{2k}{k-1} - \left( \frac{V}{a} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{k-1}}}. \quad (2.16)$$

Для воздуха, принимая  $k = 1,4$ , получим

$$\frac{p_b}{p} = \frac{166,7 \left( \frac{V}{a} \right)^7}{\left[ 7 \left( \frac{V}{a} \right)^2 - 1 \right]^{2,5}}. \quad (2.16')$$

Таким образом, при движении снаряда со скоростью звука давление на небольшой площадке вершины снаряда вычисляется по формуле (2.16) или (2.16').

При движении снаряда со скоростью, меньшей скорости звука, это давление может быть вычислено исходя из уравнения Бернулли по формуле (2.4).

При  $V = a$  обе формулы дают одинаковый результат:

$$\frac{p_b}{p} = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Численные значения избыточного давления  $p_b - p$  ( $\text{кг}/\text{см}^2$ ) для нормальных условий приведены в табл. 2.3.

Т а б л и ц а 2.3

$V, \text{ м/с}$	$p_b - p$ ( $\text{кг}/\text{см}^2$ ) (МПа)	$V, \text{ м/с}$	$p_b - p$ ( $\text{кг}/\text{см}^2$ ) (МПа)
0	0	800	6,70
100	0,06	900	8,65
200	0,27	1000	10,8
300	0,67	1100	13,2
400	1,35	1200	15,8
500	2,34	1300	18,6
600	3,56	1400	21,6
700	5,02	1500	24,9

### 2.3. ФИЗИЧЕСКИЕ ФАКТОРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ВОЗДУХА АРТИЛЛЕРИЙСКИМ СНАРЯДОМ

Три основных фактора определяют сопротивление воздуха полету снаряда [2, 4]:

- вязкость, или внутреннее трение жидкости;
- образование вихрей при обтекании снаряда;
- образование баллистической волны при сверхзвуковой скорости снаряда.

#### 2.3.1 .ВЯЗКОСТЬ

Все реальные жидкости и газы обладают вязкостью. Рассмотрим в жидкости две площадки, движущиеся, как указано на рис. 2.5, со скоростями  $V$  и  $V + dV$ .

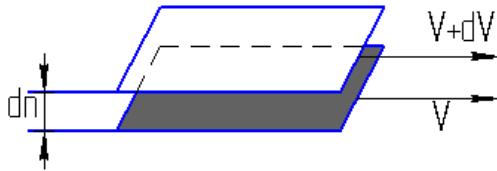


Рис. 2.5. Определение вязкости

Расстояние между площадками  $dn$ . Возникающая между площадками сила вязкости стремится выровнять их скорости. Значение силы вязкости, отнесенные к единице поверхности, или напряжение вязкости  $\tau$ , определяется по формуле Ньютона  $\tau = \mu \frac{dV}{dn}$ , где  $\mu$  – коэффициент вязкости. Таким образом, касательное напряжение, возникающее между двумя близкими площадками в жидкости, прямо пропорционально разности скоростей  $dV$  и обратно пропорционально расстоянию между площадками  $dn$ . Ускорение, приобретаемое частицами жидкости под действием сил вязкости, обратно пропорционально плотности жидкости. Поэтому часто вместо коэффициента вязкости  $\mu$  рассматривают кинематический коэффициент вязкости  $\nu$ , определяемый из выражения  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ ;  $\mu = \frac{\tau dn}{dV}$  (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Среда	$\mu$ , $\text{кг}\cdot\text{м}^2$	$\nu$ , $\text{м}^2\cdot\text{с}^{-1}$
Воздух	$1,82 \cdot 10^{-6}$	$1,45 \cdot 10^{-5}$
Вода	$116 \cdot 10^{-6}$	$0,114 \cdot 10^{-5}$

Размерность коэффициентов  $\mu$  и  $\nu$  определяется исходя из формулы Ньютона.

Хотя коэффициент вязкости для воды значительно больше, чем для воздуха, кинематический коэффициент вязкости больше для воздуха, чем для воды. Следовательно, частицы воздуха приобретают под действием сил вязкости больше ускорения, чем частицы воды, что объясняется малой плотностью воздуха по сравнению с водой.

Коэффициент вязкости  $\mu$  не зависит от давления, но меняется с температурой. С увеличением температуры для газов этот коэффициент возрастает, а для жидкостей уменьшается.

### 2.3.2. ОБРАЗОВАНИЕ ВИХРЕЙ

Если жидкость обтекает тело с некоторой средней скоростью, то непосредственно у поверхности тела жидкость прилипает, так что скорость ее получается равной нулю. Изменение скорости от величины  $V$  до нуля происходит в тонком слое, примыкающем к поверхности тела, и называется пограничным слоем. Различают ламинарное и турбулентное движение жидкости. Ламинарное движение происходит параллельными неперемешивающимися струйками. При турбулентном потоке пограничный слой распадается на мелкие вихри, вызывающие перемешивание жидкости, движение жидкости при этом имеет пульсационный характер. Передача скорости от наружного потока в пограничный слой происходит при турбулентном движении интенсивнее, чем в ламинарном потоке. Этим объясняется характер диаграмм скоростей в пограничном слое для этих двух видов движения (рис. 2.6).

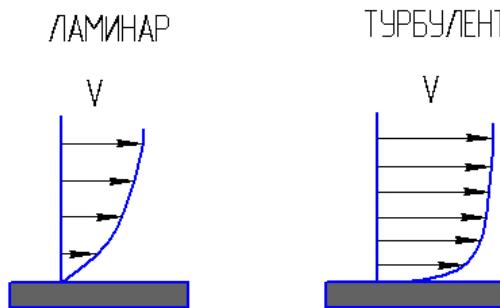


Рис. 2.6. Виды движения жидкостей

Ученый Рейнольдс исследовал условия перехода от ламинарного к турбулентному потоку при движении жидкости в трубе и нашел, что этот переход зависит от величины  $\frac{Vd}{\nu}$ , где  $d$  – диаметр трубы. Эта величина носит название числа Рейнольдса и обозначается  $Re = \frac{Vd}{\nu}$ .

$$Re = \frac{Vd}{\nu}$$

При возрастании числа Рейнольдса до некоторой определенной величины движение жидкости становится турбулентным. Чем меньше скорость снаряда, тем больше относительная сила вязкости в общей величине силы сопротивления воздуха. При сверхзвуковых скоростях снаряда относительное значение силы вязкости не превосходит 5...10 %.

При безотрывном обтекании воздухом поверхности тела сопротивление воздуха незначительно. Если же пограничный слой срывается с поверхности тела, то сопротивление воздуха сильно возрастает. Отрыв пограничного слоя обычно происходит в хвостовой части обтекаемого тела за наибольшим его поперечным сечением.

При этом непосредственно у поверхности тела появляются ветровые потоки воздуха, вызывающие вихреобразования. Так как энергия вращательного движения воздушных масс может быть получена только за счет энергии снаряда, то ясно, что вихреобразование является одним из источников сопротивления воздуха. Для уменьшения вихреобразования необходимо сделать снаряд по возможности более длинной и обтекаемой формы (как это делается для оперенных снарядов). В снарядах к нарезным стволам этого осуществить в полной мере не удается, исходя из центрирования снаряда в канале ствола и вследствие недостаточной устойчивости на полете подобных снарядов.

### 2.3.3. ОБРАЗОВАНИЕ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Всякое бесконечно малое уплотнение воздуха распространяется в пространстве со скоростью звука. Конечные уплотнения воздуха (дульная волна, фронт взрывной волны) распространяются со скоростью, большей скорости звука.

Скорость звука  $a = \sqrt{kgRT}$ , где  $k$  – показатель адиабаты.

Принимая для воздуха  $k = 1,4$ , получим для нормальных условий  $a = \sqrt{1,4 \cdot 9,81 \cdot 2,927 \cdot 288} = 340,2$  м/с.

Рассмотрим поток воздуха, движущийся со скоростью  $V$ , и некоторую неподвижную точку  $M$ , около которой создается небольшое уплотнение воздуха.

Это уплотнение в каждый рассматриваемый момент времени рождает сферическую волну, распространяющуюся со скоростью звука  $a$ . Центр этой волны перемещается вместе с потоком со скоростью  $V$ . За время  $t$ ,  $2t$ ,  $3t$  центры сферических волн переместятся на расстояние

$Vt$ ,  $2Vt$ ,  $3Vt$ , а радиусы сферических волн будут соответственно равны  $at$ ,  $2at$ ,  $3at$ .

При скорости потока, меньшей скорости звука  $V < a$ , получается система волн, показанная на рис. 2.7.

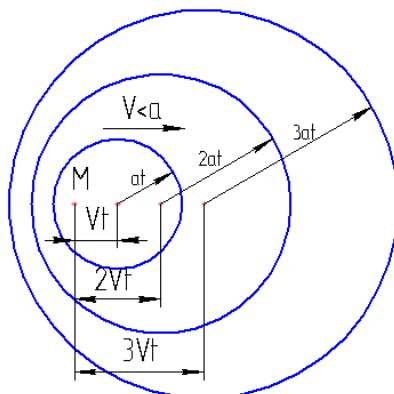


Рис. 2.7. Скорость потока меньше скорости звука

При сверхзвуковом потоке сферические волны располагаются, как показано на рис. 2.8. Огибающая этих волн имеет форму конуса с углом растворения, определяемым из выражения  $\sin \alpha = \frac{a}{V}$ .

Угол  $\alpha$  называется углом Маха, а огибающий конус – волной Маха или баллистической волной.

До сих пор мы рассматривали случай малых уплотнений, образующихся около тела, весьма малых размеров.

При движении снаряда образуется головная баллистическая волна, осевое сечение которой имеет форму, близкую к гиперболе.

Наклон асимптот гиперболы определяется углом Маха.

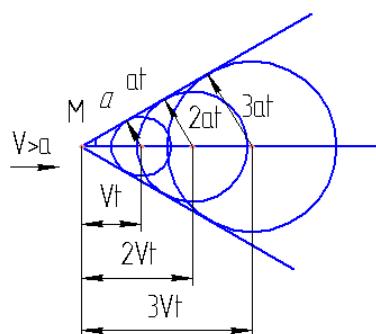


Рис. 2.8. Сверхзвуковой поток

На фронте баллистической волны давление и плотность возрастают скачком. При этом непосредственно у вершины снаряда давление определяется по формуле Рэлея и может достигать 5...8 атм. При скоростях снаряда  $V = 700 \dots 800$  м/с и более  $V = 1500$  м/с величина давления составляет около  $P \approx 25$  атм.

По мере удаления фронта волны от вершины снаряда избыток давления уменьшается, так что в пределе получается бесконечно малое уплотнение, распространяющееся со скоростью звука, а баллистическая волна превращается в звуковую. Помимо головной волны, при полете снаряда со сверхзвуковой скоростью образуются еще хвостовая волна и волны, отходящие от ВП или от места обжима гильзы (для пули). Более слабые волны образуются от шероховатостей поверхности снаряда или пули.

### 2.3.4. ЭФФЕКТ МАГНУСА

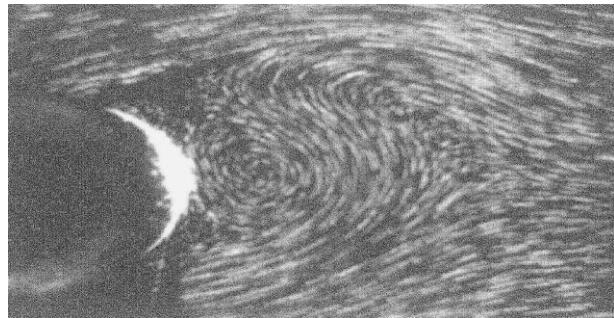
Эффект Магнуса – возникновение подъемной силы, действующей на тело, вращающееся в набегающем на него потоке жидкости или газа.

Вращающийся твердый цилиндр образует в неограниченной массе вязкой жидкости или газа вихревое движение (рис. 2.9, *a, б, в*) с интенсивностью  $J = 2Sw$ , где  $S$  – площадь цилиндра;  $w$  – угловая скорость вращения цилиндра.

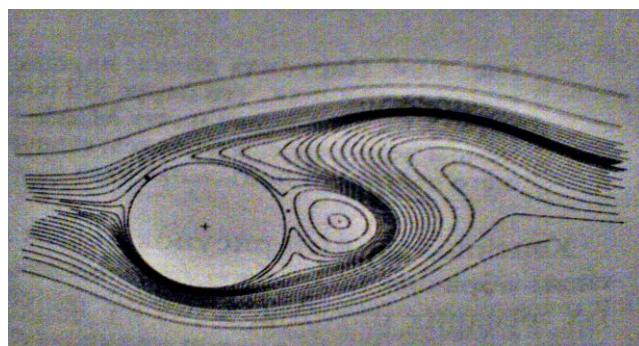
Движущийся поступательно (невращающийся) с относительной скоростью  $V_0$  цилиндр обтекается ламинарным потоком, являющимся невихревым (рис. 2.9, *в, г*).

Если цилиндр вращается и одновременно движется поступательно, то два окружающих его потока наложатся друг на друга и создадут результирующий поток обтекания (рис. 2.9, *г, д*).

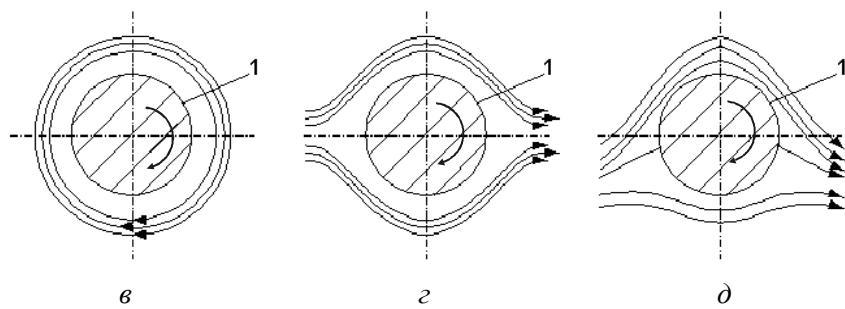
При вращении цилиндра приходит в движение и жидкость. Движение в пограничном слое вихревое; оно слагается из потенциального движения, на которое накладывается вращение. Сверху цилиндра направление потока совпадает с направлением вращения цилиндра, а снизу – противоположно ему. Частицы в пограничном слое сверху цилиндра ускоряются потоком, что препятствует отрыву пограничного слоя. Снизу поток тормозит движение в пограничном слое, что способствует его отрыву. Отрывающиеся части пограничного слоя уносятся потоком в виде вихрей. Вследствие этого вокруг цилиндра возникает циркуляция скорости в том же направлении, в каком вращается цилиндр. Согласно закону Бернулли давление жидкости на верхнюю



*a*



*б*



*Рис. 2.9. Эффект Магнуса 1 – пограничный слой*

*а – «снимок реальной системы»; б – «компьютерное моделирование»;*  
*в, г, д – физическое моделирование эффекта Магнуса 1*

часть цилиндра меньше, чем на нижнюю. Это приводит к возникновению вертикальной силы, называемой подъемной силой. При изменении направления вращения цилиндра на противоположное подъемная сила также меняет направление на противоположное.

В эффекте Магнуса сила  $F_{\text{под}}$  перпендикулярна скорости потока  $V_0$ . Чтобы найти направление этой силы, нужно вектор относительно скорости  $V_0$  повернуть на  $90^\circ$  в сторону, противоположную вращению цилиндра.

Эффект Магнуса можно наблюдать на опыте со скатывающимся по наклонной плоскости легким цилиндром (рис. 2.10).

После скатывания по наклонной плоскости центр масс цилиндра движется не по параболе, как двигалась бы материальная точка, а по кривой, уходящей под наклонную плоскость.

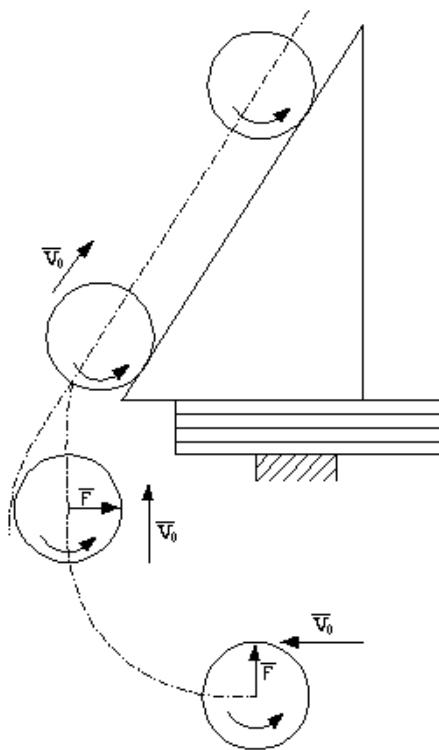


Рис. 2.10. Схема скатывающегося цилиндра

Если заменить вращающийся цилиндр вихрем (вращающимся столбом жидкости) с интенсивностью  $J = 2Sw$ , то сила Магнуса будет такой же. Таким образом, на движущийся вихрь со стороны окружающей жидкости действует сила, перпендикулярная относительной скорости движения  $V_0$  и направленная в сторону, определяемую указанным выше правилом поворота вектора.

В эффекте Магнуса взаимосвязаны: направление и скорость потока, направление и угловая скорость, направление и возникающая сила. Соответственно можно измерять и использовать силу или измерять поток и угловую скорость.

Зависимость результата от воздействия имеет следующий вид (формула Жуковского–Куттса)

$$F_R = J r V_0, \quad (2.17)$$

где  $J$  – интенсивность движения вокруг цилиндра;  $r$  – плотность жидкости;  $V_0$  – относительная скорость потока.

Ограничения на проявления физического эффекта: обеспечение ламинарного течения жидкости (газа) над объектом при подъемной силе, направленной вверх.

Физический эффект проявляется на телах вращения.

**Технические реализации эффекта на примере вращающегося тела вращения в набегающем потоке текучей среды.** Тело вращается на оси, подшипники которой снабжены датчиками радиальной нагрузки для измерения возникающей подъемной силы (рис. 2.11).

Меняя скорость потока и частоту вращения, можно убедиться в справедливости основной формулы из содержательной части.

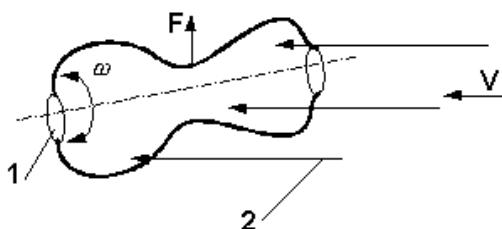


Рис. 2.11. Вращающееся тело вращения в набегающем потоке текучей среды:

1 – вращающееся тело; 2 – набегающий поток;  
 $w$  – частота вращения;  $V$  – скорость частиц в потоке;  
 $F$  – сила Магнуса

**Применение эффекта.** Физический эффект применяется в гидроаэромеханике, в технологических процессах разделения веществ на фракции и т.д.

Эффект Магнуса используется для разделения неоднородных жидкых сред на легкую и тяжелую фракции. Неоднородную жидкую среду, например дрожжевую супензию, подвергают воздействию центробежного и гравитационного полей в тарельчатом сепараторе. В процессе этого воздействия поток разделяемой среды пропускают, например под напором насоса, через сепаратор, имеющий распределительную решетку в виде ряда параллельных трущихся слоев с различными последовательно возрастающими при переходе от одного слоя к другому скоростями.

Различие между скоростями движения соседних слоев создает относительную угловую скорость более 5000 рад/с. В результате частицы высокой фракции приводятся во вращательное движение, поэтому скорость течения пограничного слоя жидкости, обтекающей частицу снизу, замедляется, а сверху – ускоряется. Разность скоростей вызывает разность сил давления, т.е. гидродинамическую подъемную силу, действующую на частицы в поперечном направлении снизу (со стороны приторможенных слоев жидкости) вверх к области повышения скоростей.

Любому играющему в теннис, гольф, крокет или бейсбол, наверняка, более интересны вращающиеся сферы, а не цилиндры; но как ни сложна теория для цилиндров, для сфер она еще сложнее. Конечно, при числах  $Re$  порядка  $2 \cdot 10^5$  и параметре вращения меньше 1 на крутящиеся мячи действуют поперечные силы, знак которых, вообще говоря, совпадает со знаком количественной силы Магнуса; при игре в гольф «резаный» мяч отклоняется вправо, при «крученой» подаче кажется, что в начале своей траектории он не подчиняется силе тяготения, «крученый» теннисный мяч резко ныряет вниз, едва пройдя над сеткой, и т.д. Но природа этих сил детально не изучена. Нет доказательств того, что отклонение мяча для крокета в полете происходит, в первую очередь, благодаря асимметрии обтекания, связанной со швом на его поверхности, и что игроки придают ему вращение, чтобы плоскость шва сохраняла фиксированный угол относительно направления движения, а не для того, чтобы использовать силу Магнуса. По-видимому, значение шва не так велико, хотя бы потому, что на поверхности мяча он проходит по спирали, а не по большому кругу. Все

игроки в крокет, да и бейсболисты тоже уверены, что мячи лучше закручиваются при определенных погодных условиях, в частности при влажной погоде. Физики не могут найти удовлетворительное объяснение этой связи, и поэтому иногда заявляют, что ее все нет.

## 2.4. ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА

Современная гидромеханика не позволяет теоретически подсчитать сопротивление воздуха для снаряда произвольной формы. Приходится базироваться на опытных данных.

Исходя из физических соображений можно утверждать, что сопротивление воздуха для снаряда данной формы зависит от следующих факторов [1, 4, 5]:

- 1) размеров снаряда, характеризующихся при данной форме снаряда его калибром  $d$  ;
- 2) скорости поступательного движения снаряда  $V$  ;
- 3) вязкости воздуха, характеризующейся коэффициентом вязкости  $\mu$  ;
- 4) массовой плотности воздуха  $\rho$  ;
- 5) скорости звука в воздухе  $a$  .

Таким образом, можно написать  $R = f(d, V, \rho, \mu, a)$ , где форма снаряда учитывается видом функции  $f$  .

Если необходимо определить функцию  $f$  из опыта, то придется эти опыты проводить для всевозможных комбинаций значений параметров, от которых функция зависит. Количество требуемых опытов было бы чрезвычайно велико. Посмотрим, нельзя ли уменьшить число независимых переменных, от которых зависит функция сопротивления воздуха.

Уменьшим единицы измерения массы, длины и времени в  $m$ ,  $l$  и  $\tau$  раз. Тогда численные значения величин, входящих в выражение

$$R = f(d, V, \rho, \mu, a), \quad (2.18)$$

увеличатся во столько же раз, соответственно размерностям этих величин.

Таким образом, получим

$$a' = \frac{l}{\tau} a; \quad R' = \frac{ml}{\tau^2} R; \quad d' = ld; \quad V' = \frac{l}{\tau} V; \quad \rho' = \frac{m}{l^3} \rho; \quad \mu' = \frac{m}{l\tau} \mu.$$

Подставляя эти выражения в (2.18), найдем:

$$\frac{ml}{\tau^2} R = f\left(ld; \frac{l}{\tau} V; \frac{m}{l^3} \rho; \frac{m}{l\tau} \mu; \frac{l}{\tau} a\right). \quad (2.19)$$

Так как численные значения  $m$ ,  $l$ , и  $\tau$  могут быть взяты произвольно, то выберем их такими, чтобы получить  $ld = 1$ ;  $\frac{l}{\tau} V = 1$ ;  $\frac{m}{l^3} \rho = 1$ .

Это возможно, если положить  $l = \frac{1}{d}$ ;  $\tau = lV = \frac{V}{d}$ ;  $m = \frac{l^3}{\rho} = \frac{1}{\rho d^3}$ . При

этом получим

$$\frac{\tau^2}{ml} = d^2 \rho V^2; \quad \frac{ml}{\tau} = \frac{1}{\rho V d}; \quad \frac{l}{\tau} = \frac{1}{V}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (2.19), будем иметь

$$R = d^2 \rho V^2 f\left(1, 1, 1, \frac{\mu}{\rho V d}; \frac{a}{V}\right).$$

Заменим квадрат калибра через площадь поперечного сечения  $S = \frac{\pi d^2}{4}$  и подставим  $\frac{\mu}{\rho} = v$ . Кроме того, вместо переменных  $\frac{v}{Vd}$  и  $\frac{a}{V}$  возьмем обратные им величины.

При этом, заменив знак функции  $f$  на  $C_X$ , получим выражение для силы сопротивления воздуха

$$R = S \frac{\rho V^2}{2} C_X \left( \frac{Vd}{v}, \frac{V}{a} \right).$$

В таком случае функция лобового сопротивления  $C_X$ , которая должна быть определена из опыта, зависит только от двух параметров: числа

Рейнольдса  $Re = \frac{Vd}{\nu}$  и числа Маха  $M_a = \frac{V}{a}$ . При тех скоростях, которые применяются в артиллерии, влияние числа Рейнольдса на сопротивление воздуха незначительно и можно написать:

$$R = S \frac{\rho V^2}{2} C_X \left( \frac{V}{a} \right). \quad (2.20)$$

Это и есть общее выражение для силы сопротивления воздуха. Вид функции  $C_X$  зависит от формы снаряда и должен быть определен из опытов для снарядов различной формы.

Для сокращения числа опытов поступают следующим образом. По данным опытов определяют вид функции  $C_X$  для одного какого-нибудь основного снаряда-эталона или же определяют среднюю функцию  $C_X$  для группы снарядов; выбранную таким образом функцию называют законом сопротивления воздуха.

Далее предполагается, что значение функции  $C_X^* \left( \frac{V}{a} \right)$ , отвечающей определенному снаряду, может быть получено из выражения  $C_X^* \left( \frac{V}{a} \right) = i C_X \left( \frac{V}{a} \right)$ , где  $C_X \left( \frac{V}{a} \right)$  отвечает выбранному закону сопротивления воздуха, а  $i$  – постоянное число, называемое коэффициентом формы снаряда. При этом сопротивление воздуха для снаряда произвольной формы получим из выражения

$$R = S \frac{\rho V^2}{2} i C_X \left( \frac{V_0}{a} \right). \quad (2.21)$$

На графике (рис. 2.12) показан вид функции  $C_X$  для снарядов современной формы.

Из выражения  $C_X \left( \frac{V}{a} \right) = \frac{R}{S \frac{\rho V^2}{2}}$

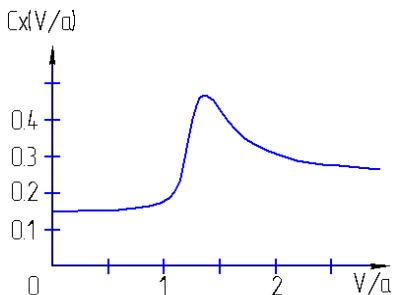


Рис. 2.12. Зависимость коэффициента лобового сопротивления от коэффициента формы снаряда

виден физический смысл функции  $C_X$ , характеризующий отношение силы сопротивления воздуха к скоростному напору, действующему на площадь поперечного сечения снаряда.

## 2.5. УСКОРЕНИЕ СИЛЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА

Ускорение силы сопротивления воздуха находим из выражения

$$j = \frac{gR}{q} = \frac{g}{q} \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho V^2}{2} i C_X \left( \frac{V}{a} \right). \quad (2.22)$$

В баллистике обычно вместо  $C_X \left( \frac{V}{a} \right)$  применяется функция  $F(V)$ , рассчитываемая по выражению

$$F(V) = \frac{\pi}{8000} \Pi_{0N} V^2 Cx \left( \frac{V}{a} \right) = 4,74 \cdot 10^{-4} V^2 Cx \left( \frac{V}{a} \right),$$

где  $\Pi_{0N} = 1,206 \text{ кг/м}^3$  – нормальная плотность воздуха на земле.

Определяя  $C_X \left( \frac{V}{a} \right)$  из последнего выражения и подставляя его в уравнение (2.22), получим после замены  $g\rho = \Pi$ :

$$j = \frac{1}{q} \frac{\pi d^2}{4} \Pi \frac{V^2}{2} i \frac{8000}{\pi \Pi_{0N} V^2} F(V),$$

или

$$j = \frac{id^2}{4} 1000 \frac{\Pi}{\Pi_{0N}} F(V). \quad (2.23)$$

Обозначая  $\frac{\Pi}{\Pi_{0N}} = H(y)$  функцию плотности, изменяющуюся с высотой полета снаряда, и  $C = \frac{id^2}{q} 1000$ , получим окончательно

$$j = CH(y)F(V). \quad (2.24)$$

Величина  $C$  называется баллистическим коэффициентом и является основной баллистической характеристикой снаряда.

При вычислении траектории часто вместо функции  $F(V)$  приходится определять значение функции  $G(V)$ :

$$G(V) = \frac{F(V)}{V} = 4,74 \cdot 10^{-4} V C_X \left( \frac{V}{a} \right).$$

В некоторых случаях, рассматривают еще функцию  $K\left(\frac{V}{a}\right)$ :

$$K\left(\frac{V}{a}\right) = \frac{F(V)}{V^2} = 4,74 \cdot 10^{-4} C_X \left( \frac{V}{a} \right).$$

## 2.6. ОПЫТНОЕ ИЗУЧЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА

Для изучения сопротивления воздуха производится стрельба из орудия при угле возвышения, близком к нулю, и определяются экспериментально скорости снаряда в двух точках траектории, на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  от орудия (рис. 2.13).

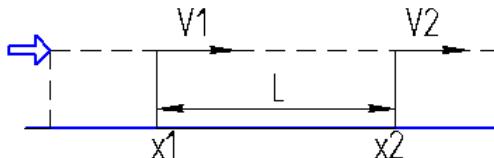


Рис. 2.13. Изучение сопротивления воздуха стрельбой

Составим значение действующих сил. Так как траектория снаряда на коротком участке близка к горизонтальной прямой, то работа силы тяжести может быть принята равной нулю и необходимо учесть только работу силы сопротивления воздуха:

$$\frac{q}{2g} V_2^2 - V_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} R \cos(\widehat{\vec{V}}, \widehat{\vec{R}}) dx = - \int_{x_1}^{x_2} R dx.$$

Вынося  $R$  из-под знака интеграла (принимаем его постоянной величиной), получим:

$$R_{\text{cp}} = \frac{q}{2g} \frac{V_1^2 - V_2^2}{X_2 - X_1} = \frac{q}{2g} \frac{V_1^2 - V_2^2}{L}.$$

Это сопротивление надо отнести к некоторой средней скорости, которую принимаем равной  $V_{\text{cp}} = \frac{V_1 + V_2}{2}$ .

С другой стороны, имеем  $R_{\text{cp}} = S \frac{\rho V_{\text{cp}}^2}{2} C_X \left( \frac{V_{\text{cp}}}{a} \right)$ , где  $\rho$  и  $a$  отвечают условиям опыта, а  $C_X$  – данному снаряду.

Приравнивая правые части выражения  $R_{\text{cp}}$ , будем иметь

$$C_X \left( \frac{V_{\text{cp}}}{a} \right) = \frac{q}{g\rho S} \frac{V_1^2 - V_2^2}{V_{\text{cp}} L}.$$

После подстановки значения  $V_{\text{cp}}$  и замены  $g\rho = \Pi$  получим окончательно:

$$C_X \left( \frac{V_{\text{cp}}}{a} \right) = \frac{4q}{\Pi S L} \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2}. \quad (2.25)$$

Для того чтобы получить функции  $C_X \left( \frac{V}{a} \right)$  для данного снаряда, необходимо проводить опыты при различных скоростях.

## 2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ СНАРЯДА

Опытное определение скорости снаряда было проведено впервые Робинсоном в 1742 году при помощи баллистического маятника [5].

Для определения промежутков времени между моментами прохождения снарядом блокирующих устройств применяют различные хронографы: электромагнитный хронограф без усилителя (Ле-Буланже), электромагнитный хронограф с усилителем, стробоскопический хро-

нограф, электронный хронограф и приборы, основанные на эффекте Доплера.

Хронограф без усилителя системы Ле-Буланже состоит из установленной на чугунном основании колонки, на которой укреплены два электромагнита  $E_1$  и  $E_2$ . К сердечникам электромагнита «подшиваются» два стержня: длинный, называемый хронометром, и короткий – отмечатель.

В цепях обоих электромагнитов, питаемых от аккумуляторов, включены рамы-мишени. Рамы-мишени представляют собой обычные рамы, на которых намотана рядами тонкая проволока. Расстояние между проволоками обычно принимается порядка четверти калибра снаряда. При пролете снаряда через рамы-мишени размыкаются цепи электромагнитов (рис. 2.14).

При пробивании первой рамы прерывается ток в электромагните хронометра и последний начинает падать. При пробивании второй рамы начинает падать отмечатель, который нажимает на тарель  $T$  и освобождает нож  $M$ , под действием пружины ударяющий по движущемуся хронометру и оставляющий на нем метку на некоторой высоте  $h_2$  (рис. 2.15).

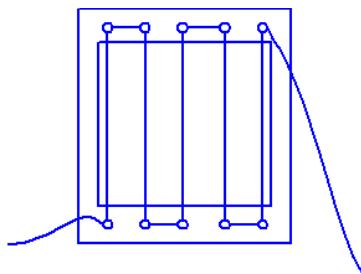


Рис. 2.14. Рама-мишень

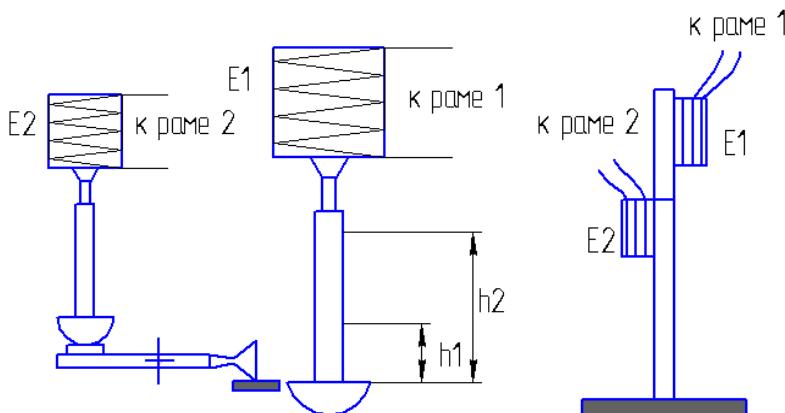


Рис. 2.15. Хронограф системы Ле-Буланже

Пренебрегая сопротивлением воздуха, определим время падения хронометра до получения метки по формуле для свободного падения. Из полученного времени  $t_2$  надо вычесть так называемое время запаздывания, т.е. время от начала падения отмечателя до получения метки на хронометре. Для определения времени запаздывания  $t_1$ , при помощи специального прибора-разобщителя, размыкают одновременно обе цепи. При этом на трубке хронометра получим метку на некоторой высоте  $h_1$ . Время запаздывания определится из выражения

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}.$$

Обычно принимают  $t_1 = 0,15$  с, что отвечает  $g = 9,81$  м/с и  $h_1 = 110,4$  мм. Такая высота метки достигается соответствующим перемещением электромагнита отмечателя по колонке при помощи микрометрического винта.

Время полета снаряда между рамами равно  $t = t_2 - t_1$ , а средняя скорость снаряда  $V_{cp} = \frac{x}{t_2 - t_1}$ , где  $x$  – расстояние между рамами-мишеньями (рис. 2.16). Хронограф Ле-Буланже прост в обращении и обеспечивает высокую точность измерения со срединной ошибкой примерно 0,1 %. Недостатком прибора является то, что он допускает включение не больше двух рам-мишней. Поэтому при изучении сопротивления воздуха необходимо иметь два хронографа Ле-Буланже, включаемых в две независимые пары рам-мишней. Кроме того, хронограф Ле-Буланже обеспечивает хорошую точность только при измерении промежутков времени примерно 0,1 с и не меньше 0,05 с. При меньших промежутках времени точность прибора резко падает. Поэтому приходится расстояние между рамками устанавливать значительно больше (1/10 от начальной скорости) [2, 4, 5].

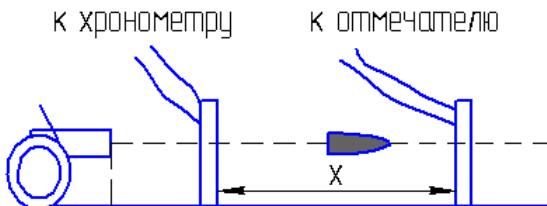


Рис. 2.16. Определение скорости полета

Этими недостатками не обладает искровой хронограф. Барабан *A* приводится во вращение мотором. Число оборотов определяется по тахометру. Рамы-мишени включаются в цепи первичных обмоток индукторов. Вторичные цепи соединены с одной стороны через ось с корпусом барабана и с другой – остриями 1, 2, 3 и 4, подведенными на расстоянии около 1 мм (рис. 2.17).

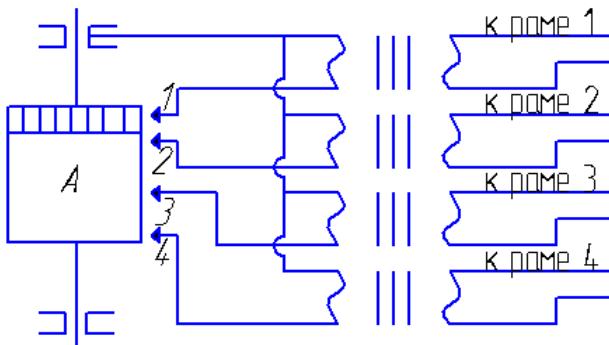


Рис. 2.17. Схема искрового хронографа

При размыкании тока к раме-мишени в соответствующей вторичной цепи индуцируется электродвижущая сила и у острия проскакивает искра, оставляющая след на закопченной поверхности барабана. Положение следов искр определяется специальным измерительным микроскопом. Зная расстояние между следами искр и окружную скорость барабана, можно определить промежутки времени между размыканиями рам-мишней.

Недостатком искрового хронографа является невысокая точность определения числа оборотов барабана (средняя ошибка  $\approx 1\%$ ).

К достоинствам прибора относятся возможность измерения очень малых промежутков времени и возможность включения в прибор большого числа рам-мишней.

Электромагнитный хронограф с усилителем отличается от хронографа без усилителя тем, что катушки его электромагнитов имеют меньшее число витков. Наличие специального усилителя допускает соленоидную блокировку траектории. Вместо рам-мишней в качестве блокирующих устройств используют соленоиды, представляющие собой катушки примерно с 250 витками медного изолированного провода диаметром 0,2...0,5 мм, помещенные в деревянные каркасы.

Для возбуждения ЭДС в обмотке соленоида снаряд перед выстрелом намагничивается. Степень намагничивания устанавливается опытом. Блокируемое расстояние выбирается так же, как и между рамами-мишениями.

Применение электромагнитных хронографов с усилителем позволяет значительно сократить время на проведение стрельбы при сохранении точности измерения скорости.

Стробоскопический хронограф определяет время между импульсами ЭДС, возникающими в соленоидах при прохождении через них намагниченного снаряда. Импульсы от соленоидов передаются на хронограф, регистрируются в нем и после усиления вызывают вспышки неоновой лампы, укрепленной на вращающемся диске. Интервал между вспышками неоновой лампы равен промежутку между импульсами от первого и второго соленоида. В силу стробоскопического эффекта и инерции газа вспышки кажутся неподвижными светящимися пятнами. Зная скорость вращения диска и измерив угол между светящимися пятнами в делениях шкалы диска хронографа, определяют время прохождения снаряда между двумя соленоидами

$$t = \frac{3}{25} \frac{\tau}{n},$$

где  $\tau$  – число делений шкалы диска между световыми пятнами;  $n$  – число оборотов диска.

Расстояние между соленоидами выбирается таким, чтобы время полета снаряда на блокируемом участке было в пределах 10...18 или 21...30 мс.

По точности стробоскопический хронограф равнозначен хронографу Ле-Буланже. Его положительной особенностью является возможность блокировки малых участков траектории (6...10 м), что обеспечивает возможность измерения начальных скоростей снарядов и мин при стрельбе под большими углами возвышения.

Электронный хронограф представляет собой прибор для непосредственного измерения времени полета снаряда на коротких участках траектории. Измерение времени этим прибором основано на принципе отсчета периодов электрических колебаний высокой и калиброванной частоты. Отсчет периодов колебаний производится при помощи радиотехнических схем, использующих свойства электронных ламп. Под действием электрических импульсов, возникающих в блокирующих

устройствах, хронограф автоматически регистрирует время прохождения снарядом блокируемого участка траектории.

Расстояние между блокирующими устройствами должно быть не менее 1/200 ожидаемой скорости снаряда. Электронный хронограф с соленоидной антенной или фотоэлектрической блокировкой характеризуется высокой точностью измерения времени, высоким темпом работы, не требует восстановления блокирующих устройств от выстрела к выстрелу, позволяет блокировать малые участки траектории, что делает его весьма ценным прибором для полигонов и баллистических лабораторий.

Методы измерения скорости, основанные на эффекте Доплера, рассмотрены в работах [9, 10]. Если источник звука и наблюдатель движутся относительно друг друга, частота звука, воспринимаемого наблюдателем, не совпадает с частотой источника звука. Это явление носит название эффекта Доплера (1842 г.)

Звуковые волны распространяются в воздухе (или другой однородной среде) с постоянной скоростью, которая зависит только от свойств среды. Однако длина волны и частота звука могут существенно изменяться при движении источника звука и наблюдателя.

Рассмотрим простой случай, когда скорость источника  $V_i$  и скорость наблюдателя  $V_h$  относительно среды направлены вдоль прямой, которая их соединяет. За положительное направление для  $V_i$  и  $V_h$  можно принять направление от наблюдателя к источнику. Скорость звука  $V$  всегда считается положительной (рис. 2.17, а; 2.17, б).

Период звуковых колебаний, воспринимаемых наблюдателем, обозначен через  $T_h$ . Из рис. 2.17, а следует:

$$V_h T_h + V T_h = \lambda.$$

Принимая во внимание  $T_h = \frac{1}{f_h}$  и  $\lambda = \frac{V}{f_h}$ , получим

$$f_h = \frac{V + V_h}{V} f_i = \left(1 + \frac{V_h}{V}\right) f_i.$$

Если наблюдатель движется в направлении источника  $V_h > 0$ , то  $f_h > f_i$ , если наблюдатель движется от источника  $V_h < 0$ , то  $f_h < f_i$ .

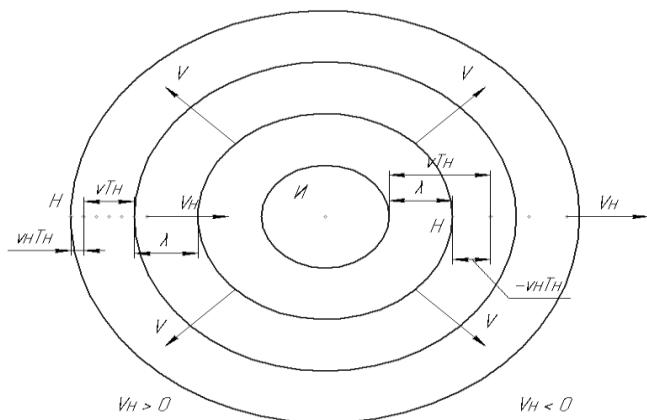


Рис. 2.17 а. Наблюдатель движется, источник неподвижен

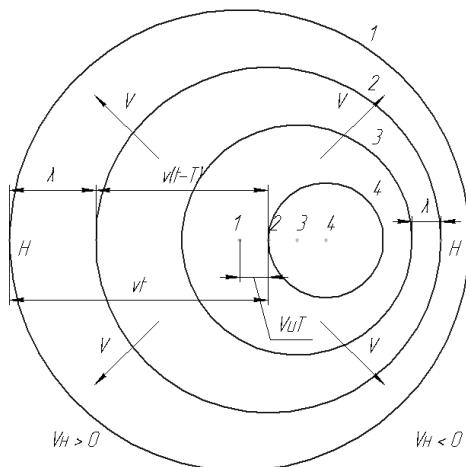


Рис. 2.17 б. Наблюдатель неподвижен, источник звука движется

На рис. 2.17, б наблюдатель неподвижен, а источник звука движется с некоторой скоростью  $V_h$ . В этом случае согласно рис. 2.17, б справедливо соотношение

$$Vt + V_h t = V \cdot t - T + \lambda,$$

где  $T = \frac{1}{f_i}$  и  $\lambda = \frac{V}{f_h}$ .

Отсюда следует:

$$f_h = \frac{V f_i}{V + V_h}.$$

Если источник удаляется от наблюдателя, то  $V_h > 0$  и, следовательно,  $f_h < f_i$ . Если источник приближается к наблюдателю, то  $V_h < 0$  и  $f_h > f_i$ . В общем случае, когда и источник, и наблюдатель движутся со скоростями  $V_i$  и  $V_h$ , формула для эффекта Доплера приобретает вид

$$F_h = \frac{V + V_h}{V + V_i} f_i.$$

Это соотношение выражает связь между  $f_h$  и  $f_i$ . Скорости  $V_i$  и  $V_h$  всегда измеряются относительно воздуха или другой среды, в которой распространяются звуковые волны. Это так называемый нерелятивистский Доплер-эффект.

В случае электромагнитных волн в пустоте (свет, радиоволны) также наблюдается эффект Доплера. Так как для распространения электромагнитных волн не требуется материальная среда, можно рассматривать только относительную скорость  $V$  источника и наблюдателя. Выражение для релятивистского Доплер-эффекта имеет вид

$$f_h = \sqrt{\frac{c - V}{c + V}} f_i,$$

где  $c$  – скорость света. Когда  $V > 0$ , источник удаляется от наблюдателя и  $f_h < f_i$ , в случае  $V < 0$  источник приближается к наблюдателю и  $f_h > f_i$ . Доплер-эффект широко используется в технике для измерения скоростей движущихся объектов. На основании Доплер-эффекта созданы приборы для измерения скорости снаряда в канале ствола, на траектории и у цели. Это приборы «ДС 334», «ДС 324», «ДС 104-304», «ДП 404».

Измеритель перемещения «ДП 404» предназначен для определения и анализа параметров движения артиллерийских снарядов в канале ствола во время выстрела. Измеритель «ДП 404» позволяет получать информацию о текущих значениях перемещения снаряда, скорости, ускорения и давления на дно снаряда.

### **Основные технические характеристики**

Минимальный калибр при использовании радиоблоков с частотой зондирующего сигнала:

10,5 ГГц, мм	23
33 ГГц, мм	7,5
Диапазон скоростей движения снарядов, м/с	10...2000
Погрешность определения перемещения	не более 0,2 %
Погрешность определения текущей скорости в диапазоне скоростей 60...2000 м/с	не более 0,5 %
Погрешность определения текущего ускорения в диапазоне скоростей 60...2000 м/с	не более 5 %

### **Состав**

Радиоблок, фотоотдатчик, тренога, система цифровой регистрации и обработки, персональный компьютер, программное обеспечение.

### **Отличительные особенности**

Бесконтактный всепогодный метод измерений.

Отсутствие требований по дополнительной подготовке испытуемых боеприпасов.

Отсутствие ограничений по ориентации ствола.

Непрерывный контроль перемещения.

Доплеровская полигонная радиолокационная станция ДС 334 предназначена для определения скоростей снарядов любого типа и мин калибром 5,6 мм и выше.

Станция позволяет получать информацию о скорости на любом участке траектории, начальной скорости, средней начальной скорости и срединном отклонении значений начальных скоростей в группе выстрелов, текущих координатах движения снаряда в вертикальной плоскости, скорости и ускорении в функциях времени или дальности, коэффициенте лобового сопротивления, числе Маха и угле наклона вектора скорости к горизонту в функциях времени и дальности.

### **Основные технические характеристики**

Минимальный калибр	5 мм.
Диапазон скоростей	10...3000 м/с.
Дальность действия калибров	60 000...150 000
Погрешность измерения радиальной скорости	0,1 %
Частота зондирующего сигнала	10,5 ГГц
Уровень генерируемой мощности зондирующего сигнала	не менее 400 мВт

### **Состав**

Радиоблок, фотоотдатчик, тренога, система цифровой регистрации и обработки, персональный компьютер, программное обеспечение.

### **Отличительные особенности**

Бесконтактный всепогодный метод измерений.

Отсутствие требований по дополнительной подготовке испытуемых боеприпасов.

Отсутствие ограничений по направлению движения боеприпасов.

Непрерывный контроль скорости.

Возможность селекции испытуемых боеприпасов по скорости.

Встроенные в радиоблок источник питания и имитатор доплеровского сигнала.

Баллистический хронометр Руш-МП предназначен для измерения интервалов времени между двумя однополярными либо двухполярными электрическими импульсами при работе с соленоидными, контактными, фотоэлектронными и другими типами датчиков.

### **Основные технические характеристики**

Относительная погрешность измерения интервалов времени в диапазоне $10^{-3}...10$ с	не более 0,05 %
Дискретность измерения временных интервалов	0,1 мкс
Чувствительность по соленоидному входу, не хуже	0,1 мВ
Напряжение синфазной помехи по соленоидному входу, при котором не происходит запуска хронометра	не менее 5 В
Суммарное сопротивление контактных размыка- телей и соединительных линий, при котором происходит устойчивое срабатывание хронометра	не более 300 Ом

Количество выстрелов при стрельбе очередью      не более 99 шт.  
Режим работы – микропрограммное управление

### **Состав**

Хронометр, комплект кабелей.

### **Отличительные особенности**

Применение современной элементарной базы, микропрограммное управление, возможность расчета и обработки результатов на ПЭВМ.

Наземная стереофотограмметрическая съемка основана на фотографировании объекта фототеодолитом с точек земной поверхности (этот вид съемки часто называют фототеодолитной).

В наземной фотограмметрии применяются три метода обработки снимков: аналитический, графический и графомеханический.

Графический метод основан на решении основных уравнений фотограмметрии посредством графических построений.

В графомеханическом методе одновременно выполняются измерение снимков и составление карты с помощью прибора, снабженного устройствами для наблюдения стереопары и решения основных уравнений стереофотограмметрии.

Остановимся подробнее на аналитическом методе, поскольку именно этот метод мы и будем использовать для определения параметров траекторных движений снаряда.

При обработке снимков аналитическим методом сначала измеряют координаты и параллаксы соответственных точек стереопары, а затем, зная элементы ориентирования снимков, вычисляют координаты точек объекта.

До вычисления координат точек объекта необходимо убедиться в том, что действительные элементы внешнего ориентирования снимков равны заданным. Для этого пользуются контрольными направлениями, измеренными при фотографировании объекта. Если ошибки элементов внешнего ориентирования превышают допустимые пределы, то вводят поправки в измеренные координаты и параллаксы точек стереопары.

Аналитический метод является самым точным методом обработки стереопар, так как он позволяет решить уравнения связи между координатами точки объекта и координатами ее изображений с любой степенью точности. Благодаря этому можно использовать ту точность, с

которой получаются фотографические изображения объекта. Погрешность аналитического метода обусловлена главным образом погрешностью полевых работ, искажениями снимков и ошибками измерения их.

Аналитический метод предусматривает большой объем вычислительных работ, поэтому до внедрения в фотограмметрию ЭВМ он применялся лишь в тех случаях, когда требовалось с высокой точностью остановить координаты небольшого количества точек, например при определении координат ориентиров и целей. Внедрение в фотограмметрию ЭВМ значительно повысило производительность аналитического метода и расширило область его использования.

## 2.8. ЗАКОНЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА

### Закон Майевского–Забудского [2, 5]

Майевский и Забудский по данным русских и крупновских опытов (1869–1879 гг. со снарядами средних калибров длиной 2 клб и с головной частью от 0,9 до 1,1 клб и крупных калибров длиной от 2,8 до 4 клб и с головной частью в 1,3 клб) предложили принять для функции сопротивления воздуха простое выражение  $F \propto V^n = BV^n$ .

Так как оказалось невозможным подобрать постоянные значения  $B$  и  $n$  для всех скоростей, то они разбили весь диапазон скоростей на семь участков и для различных участков приняли различные значения  $B$  и  $n$  (табл. 2.5).

Т а б л и ц а 2.5

V	От	0	240	295	375	419	550	800
	До	240	295	375	419	550	800	1000
n	2		3	5	3	2	1,7	1,55

Значения коэффициента  $B$  подбирались таким образом, чтобы на границах участков функция  $F \propto V^n$  не имела разрывов. Недостатком закона сопротивления воздуха Майевского–Забудского является то, что на стыках участков имеются угловые точки, правда, мало заметные на графике функции  $F \propto V^n$ , а следовательно, и разрывы в производной

$F' V$ . По этой причине закон сопротивления Майевского–Забудского в последнее время не применяется.

### Закон Сиаччи

Сиаччи объединил результаты опытов, проведенных со снарядами старой формы Майевским, Хойелом, Башфортом и фирмой Круппа, в эмпирическую формулу следующего вида:

$$F V = 0,2002V - 48,05\sqrt{(0,1648V - 47,95)^2 + 9,6} + \frac{0,0442V(V - 300)}{371 + \left(\frac{V}{200}\right)^{10}}$$

и вычислил подробные таблицы значений этой функции. Кривая этой функции не имеет угловых точек. Предложенная Сиаччи формула громоздка. Однако необходимо иметь в виду, что в большинстве случаев приходится пользоваться не аналитическим выражением  $F V$ , а численными значениями, приведенными в таблицах.

### Закон Гарнье–Дюпюи (закон 1930 г.)

Этот закон был предложен Гарнье на основании опытов, проведенных Дюпюи в 1921–1923 гг. со снарядами современной формы. Сопротивление воздуха может быть выражено формулой

$$R = A \phi(V) + B \psi(V),$$

где  $A$  и  $B$  зависят от формы снаряда.

Для функций  $\phi(V)$  и  $\psi(V)$  предложены эмпирические формулы, различные для скоростей, больших и меньших скоростей звука, а именно:

- для  $V > a$   $\begin{cases} \phi(V) = V - 170,5 + 0,166 \cdot V - 700 \cdot 10^{-\frac{(V-660)^2}{21000}}, \\ \psi(V) = 1; \end{cases}$
- для  $V < a$   $\begin{cases} \phi(V) = 48,5 + 122 \cdot 10^{-0,017(341-V)}, \\ \psi(V) = 0,347 + 0,653 \cdot 10^{-0,017(341-V)}. \end{cases}$

При  $V = 341$  м/с получается резко выраженная угловая точка на графиках функции  $F V$  и  $C_X \left( \frac{V}{a} \right)$ .

### Закон 1943 г.

В 1943 г. был разработан новый закон сопротивления воздуха, отвечающий дальнобойным снарядам кафедры внешней баллистики Академии. Функции сопротивления выбраны в этом законе таким образом, чтобы при производстве баллистических расчетов для дальнобойных снарядов, а также для пуль и оперенных снарядов (мин) коэффициент формы получился по возможности близким к единице.

В этом законе сопротивления воздуха функция  $F V$  для скоростей, меньших 256 м/с или больших 1410 м/с, может быть выражена одночленом:  $F V = BV^2$ .

Значение коэффициента  $B$  получается для  $V < 256$  м/с:

$$B = 0,7457 \cdot 10^{-4},$$

$$\lg B = 5,5721',$$

$$V > 1410 \text{ м/сек},$$

$$B = 1,2315 \cdot 10^{-4},$$

$$\lg B = \overline{4,0904}.$$

Соотношения между численными значениями функций сопротивления воздуха для различных законов сопротивления воздуха определяются:

а) переходным множителем от закона Сиаччи к закону Майевского–Забудского, который в среднем равен 0,896:  $[F V]_{M-3} = 0,896 [F V]_{\text{Сиаччи}}$ ;

б) множителем для перехода от закона Сиаччи к закону Гарнье–Дюпюи 1930 и 1943 гг. (табл. 2.6).

Т а б л и ц а 2.6

Скорость, м/с		150	250	300	341	400	500	700	1000
Переходный множитель	1930	0,71	0,67	0,55	0,65	0,52	0,46	0,4	0,39
	1943	0,61	0,58	0,48	0,6	0,57	0,5	0,45	0,48

Современные дальнобойные снаряды имеют в среднем коэффициент формы примерно 0,55 к закону Сиаччи; 1,1 – к закону 1930 г. и 1,0 – к закону 1943 г. Значение коэффициентов формы для старых снарядов больше указанных величин на 50...70 %.

## 2.9. ПОКАЗАТЕЛЬ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА

Рассмотрим зависимость между малыми изменениями скорости снаряда и соответствующими изменениями силы сопротивления воздуха. Так как сила сопротивления воздуха пропорциональна функции

$F(V) R = \frac{q}{g} j = \frac{q}{g} C_H(y) F(V)$ , то, логарифмируя и дифференцируя это выражение, получим

$$\frac{dR}{R} = \frac{F'(V)}{F(V)} dV = \frac{VF'(V)dV}{F(V)V}.$$

Заменяя дифференциалы приращениями и обозначив  $n(V) = \frac{VF'(V)}{F(V)}$ , будем иметь  $\frac{\delta R}{R} = n(V) \frac{\delta V}{V}$ .

Таким образом, мы видим, что функция  $n(V)$  характеризует зависимости между малыми относительными изменениями скорости и соответствующими изменениями силы сопротивления воздуха.

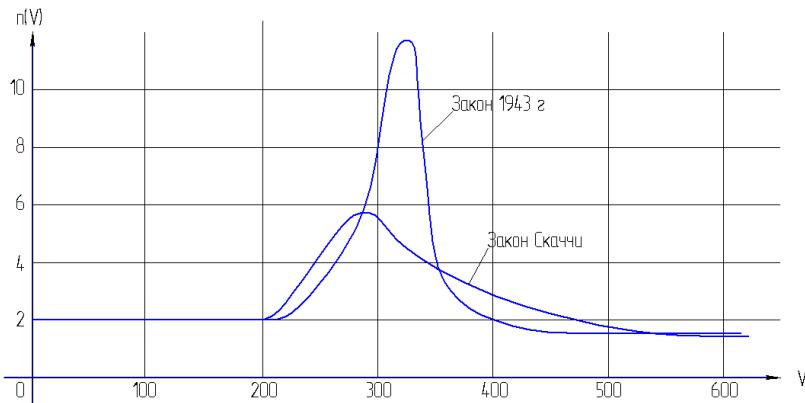


Рис. 2.18. Функция  $n(V)$  показателя сопротивления

Например, для скоростей меньших 250 м/с, для которых  $n=2$ , изменению скорости на 1 % отвечает изменение силы сопротивления воздуха на 2 %.

Функция  $n/V$  носит название *показатель сопротивления*. Это название станет понятным, если положить, что функция  $F/V$  выражается одночленом вида  $F/V = BV^n$ ; в этом случае

$$n/V = \frac{VF'(V)}{F(V)} = \frac{VnBV^{n-1}}{BV^n} = n.$$

Кривые функции  $n/V$  для закона Сиаччи и закона 1943 г. приведены на рис. 2.18.

## 2.10. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ СНАРЯДА

В аэродинамических трубах давление распределяется посредством продувки присоединительных к манометру полых моделей снаряда, на поверхности которых просверливались малые отверстия.

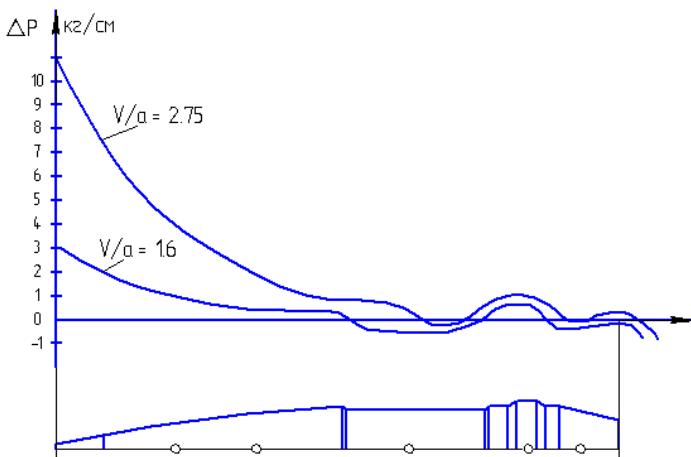


Рис. 2.19. Распределение давления по поверхности снаряда

На рис. 2.19 показано распределение давления по поверхности снаряда. Видно, что непосредственно у вершины снаряда давление может достигать значительной величины (примерно 10 атм) для скорости 940 м/с. Это давление равно расчетному по формуле Рэлея.

По мере удаления от вершины давление быстро падает. В цилиндрической части снаряда давление может получиться даже ниже атмосферного. Значительное повышение давления наблюдается перед пояском, в связи с образованием в этом месте баллистической волны. За поясом давление падает, а непосредственно у дна снаряда имеет сознательное разряжение [1].

## 2.11. БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СНАРЯДОВ

Влияние формы снаряда на сопротивление воздуха характеризуется коэффициентом формы снаряда  $i$ , входящим в выражение для баллистического коэффициента:

$$C = \frac{id^2}{q} 1000,$$

где

$$i = \frac{C_X^* \left( \frac{V}{a} \right)}{C_X \left( \frac{V}{a} \right)} = \frac{F^* \left( \frac{V}{a} \right)}{F \left( \frac{V}{a} \right)}, \quad (2.26)$$

где  $C_X^*$  и  $F^* \left( \frac{V}{a} \right)$  отвечает индивидуальному образцу снаряда, а  $C_X$  и  $F \left( \frac{V}{a} \right)$  – эталону.

Таким образом, коэффициент формы есть отношение функции сопротивления данного снаряда к функции принятого закона сопротивления. Поэтому необходимо знать, что численные значения коэффициента формы зависят от выбранного закона сопротивления воздуха. Коэффициент формы обычно рассматривается как постоянная величина, но, как видно из выражения (2.26), этот коэффициент зависит от скорости. Поэтому, применяя снаряд одной и той же формы в различных диапазонах скоростей, можно получить некоторые расхож-

дения в численных значениях коэффициента формы. По этой причине коэффициент формы  $i$  меняется с изменением угла бросания при одной и той же начальной скорости снаряда, так как при этом меняется диапазон изменения скоростей снарядов вдоль траектории (табл. 2.7).

Т а б л и ц а 2.7

Снаряды	Диапазон начальных $V$ , м/с	$i$
76 мм. Ф-350	500-600	0,55
76 мм. Ф-350	450-650	0,53
107 ОФС-420	580-670	0,47
107 ОФС-420	580-670	0,57
152 ОФ-540	560-680	0,52
152 ОФ-540	300-450	0,54
152-БГ-530	370-500	0,61
152-БГ-530	570-670	0,67

В этой таблице приведены значения коэффициентов формы для штатных снарядов по отношению к закону сопротивления Сиаччи, диапазон углов бросания  $30\dots40^\circ$ .

Оперенные снаряды (мины) обычно продуваются в аэродинамических трубах при дозвуковых скоростях. При этом исходя из выражения  $R = S \frac{\rho V^2}{2} C_X$  определяют для каждого образца мины коэффициент  $C_X$ , который принимают постоянным для скоростей, меньших 250 м/с.

Соотношение между численными значениями аэродинамического коэффициента  $C_X$  и коэффициента формы  $i$  можно найти из следующих соображений. Для скоростей, меньших 250 м/с, принимая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости, имеем:

$$F/V = BV^2, \text{ с другой стороны, } F/V = 4,74 \cdot 10^{-4} V^2 C_X \left( \frac{V}{a} \right), \text{ где}$$

$C_X \left( \frac{V}{a} \right)$  отвечает выбранному закону сопротивления воздуха.

Принимая  $C_X$  постоянным, из сравнения обоих равенств получим

$$C_X = \frac{B}{4,74 \cdot 10^{-4}}.$$

Из выражения для коэффициента формы будем иметь

$$i = \frac{C_X^*}{C_X} = \frac{4,74 \cdot 10^{-4}}{B} C_X^*;$$

обозначая

$$A = \frac{4,74 \cdot 10^{-4}}{B}$$

и, опуская верхний индекс \* у  $C_X^*$ , получим  $i = AC_X$ .

Значения  $B$  и  $A$  для различных законов сопротивления воздуха приведены в табл. 2.8.

Т а б л и ц а 2.8

Закон сопротивления воздуха	$B$	$A$
Сиаччи	$1,212 \cdot 10^{-4}$	3,91
1930 г.	$0,8584 \cdot 10^{-4}$	5,52
1943 г.	$0,7454 \cdot 10^{-4}$	6,36

Численные значения  $C_X$  для штатных оперенных снарядов представлены в табл. 2.9.

Т а б л и ц а 2.9

Мина	$C_X$
82 мм каплеобразная мина	0,150
82 мм большой емкости	0,310
120 мм мина	0,155
82 мм реактивный снаряд	0,315

## 2.12. БАЛЛИСТИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ

Баллистический коэффициент  $C = \frac{id^2}{q} 1000$  является основной характеристикой баллистических качеств снаряда [2, 3, 4]. Ускорение силы сопротивления воздуха  $j = CH(y)F(V)$  пропорционально баллистическому коэффициенту. Следовательно, чем больше баллистический коэффициент, тем быстрее снаряд теряет свою скорость в полете и тем хуже он в баллистическом отношении. Баллистический коэффициент зависит от коэффициента формы, а также от отношения  $\frac{q}{d^2}$ , от-

личающегося постоянным множителем  $\frac{\pi}{4}$  от отношения  $\frac{q}{S}$ , называемого обычно поперечной нагрузкой снаряда. Чем больше поперечная нагрузка снаряда, тем выгоднее снаряд в баллистическом отношении.

Рассмотрим зависимость баллистического коэффициента от калибра для снарядов, подобных по форме. Вес снаряда пропорционален объему или кубу калибра. Весовой характеристикой снаряда принято считать коэффициент веса снаряда  $C_q = q (\text{кг}) / d^2 (\text{дм}^3)$ .

Выражая вес снаряда через коэффициент веса, а калибр в метрах, т. е.  $q = C_q \text{ кг}/\text{дм}^3 \cdot d^3 \text{ м} = 1000C_q d^3$ , и подставляя это значение в

выражение для баллистического коэффициента, получим  $C = \frac{i}{C_q d}$ .

Таким образом, для подобных снарядов баллистический коэффициент обратно пропорционален калибру (табл. 2.10).

Так как баллистический коэффициент зависит от коэффициента формы, то численные значения  $C$  зависят от выбранного закона

Т а б л и ц а 2.10

Тип снаряда	$C_q$
Фугасные, ОФ – пушечные	14
Фугасные, ОФ – гаубичные	12
Бронебойные снаряды обычного типа	15...17
Подкалиберные бронебойные	6...10
Пули	20...30

сопротивления воздуха. Если исходить из закона сопротивления Сиаччи, то получим следующие численные значения баллистического коэффициента (табл. 2.11).

Т а б л и ц а 2.11

Тип снаряда	$C$
400 мм дальнобойный снаряд	0,1
72,2 мм	0,5
7,62 легкая пуля	3,6
Мелкокалиберный 5,6	10,0

### 2.13. НАИВЫГОДНЕЙШАЯ ФОРМА СНАРЯДА

Для уменьшения сопротивления воздуха необходимо заострять головную часть снаряда, а запоясовую – делать в виде усеченного конуса. Чем больше скорость снаряда, тем больше относительная роль сопротивления головной части в общем сопротивлении, тем более заостренной должна быть головная часть снаряда.

Влияние хвостовой части на общее сопротивление воздуха имеет решающее значение для гаубиц и мортир (скорость 100...400 м/с).

На рис. 2.20 видно увеличение длины головной части и общей длины снаряда с повышением начальной скорости, а также уменьшение при этом длины хвостовой части. Пушечные  $AC$  имеют общую длину 5 клб. при длине головной части 2,5...3 клб. Для улучшения обтекания снарядов необходимо избегать устройства значительной площадки в вершине снаряда, а также кольцевых площадок в местах стыка взрывателя или головки с корпусом. Перед такими площадками образуются скачки уплотнений в виде баллистических волн, увеличивающих сопротивление воздуха.

Полное заострение вершины снаряда в условиях колебания его оси может быть источником вихреобразования у вершины. Поэтому целесообразно несколько закруглить вершину снаряда. Радиус закругления определяется из опыта, при этом чем больше скорость снаряда, тем меньшим должен быть радиус закругления.

Форма кривой, которой описана головная часть снаряда, имеет второстепенное значение, а основным фактором, влияющим на сопротивление воздуха, являются относительная высота головной части и способ ее сопряжения с цилиндрической.

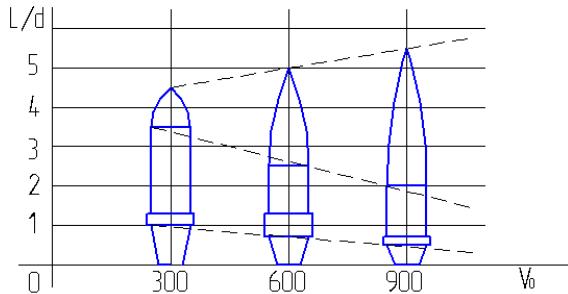


Рис. 2.20. Зависимость между длиной головной части снаряда и скоростью. Наивыгоднейшая форма снаряда при различных скоростях

Обычно делают головную часть снаряда оживальной формы, т.е. за образующую принимают дугу окружности, центр которой находится либо на основании головной части, либо несколько ниже (рис. 2.11).

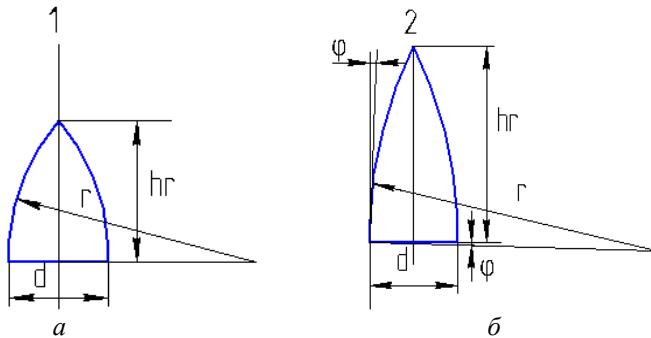


Рис. 2.21. Головная часть снаряда:

*a* – образующая, центр которой находится на основании головной части; *б* – образующая, центр которой находится ниже основания головной части

Донная часть снаряда устраивается в виде усеченного конуса с углом наклона образующей  $\sim 9^\circ$ . Тщательная отделка поверхности снаряда (полировка или окраска) уменьшает сопротивление воздуха на 2...3 %. Вопрос о наивыгоднейшей форме снаряда не может решаться только с позиции аэродинамики. Необходимо учесть назначение снаряда, характер наполнения и обеспечения устойчивости в полете.

### 3. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ

#### Составление дифференциальных уравнений движения центра массы снаряда в воздухе

Движение центра массы в воздухе будем рассматривать при следующих допущениях [2, 3, 4]:

- 1) ось снаряда совпадает с касательной к траектории центра массы снаряда, а сила сопротивления воздуха направлена по касательной в сторону, противоположную направлению скорости;
- 2) движение снаряда происходит на плоской невращающейся земле;
- 3) ускорение силы тяжести постоянно по величине и направлению —  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ;
- 4) метеорологические условия нормальные.

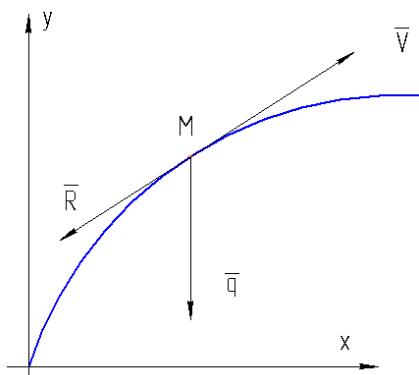


Рис. 3.1. Движение центра снаряда  
в воздухе

Изучение движения снаряда при этих допущениях составляет основную задачу внешней баллистики.

В векторной форме дифференциальное уравнение движения центра массы снаряда напишется в следующем виде (рис. 3.1):

$$\frac{q}{g} \bar{j} = \bar{R} + \bar{g}, \quad (3.1)$$

где  $j$  — ускорение центра массы снаряда, или  $\bar{j} = \frac{g}{q} \bar{R} + \bar{g}$ .

$$\bar{j} = j + \bar{g},$$

где  $j = \frac{g}{q} R = CH(y)F(V)$  – ускорение силы сопротивления воздуха.

Проектируя равенство (3.1) на оси координат, получим:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -CH(y)F(V)\cos\theta, \\ \ddot{y} &= -CH(y)F(V)\sin\theta - g.\end{aligned}$$

Имея в виду, что  $\cos\theta = \frac{\dot{x}}{V}$ ;  $\sin\theta = \frac{\dot{y}}{V}$ ;  $\frac{F(V)}{V} = G(V)$ , запишем окончательно:

$$\left. \begin{aligned}\ddot{x} &= -CH(y)G(V)\dot{x}, \\ \ddot{y} &= -CH(y)G(V)\dot{y} - g,\end{aligned}\right\} \quad (3.2)$$

где  $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ .

Начальные условия:  $t = 0$ ;  $x = 0$ ;  $\dot{x} = V_0 \cos\theta_0$ ;  $y = 0$ ;  $\dot{y} = V_0 \sin\theta_0$ .

Полученная система двух дифференциальных уравнений, каждое второго порядка, эквивалентна системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка. Действительно, положив  $\dot{x} = u$  и  $\dot{y} = w$ , получим систему

$$\left. \begin{aligned}\dot{u} &= -CH(y)G(V)u, \\ \dot{w} &= -CH(y)G(V)w - g, \\ \dot{x} &= u, \\ \dot{y} &= w,\end{aligned}\right\} \quad (3.3)$$

где  $V = \sqrt{u^2 + w^2}$ .

### 3.1. РАЗЛИЧНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Подставляя в первые два уравнения системы (3.3)  $u = V \cos\theta$  и  $w = V \sin\theta$ , получим:

$$\frac{d}{dt}(V \cos\theta) = -CH(y)G(V)V \cos\theta,$$

$$\frac{d}{dt}(V \sin \theta) = -CH(y)G(V) \sin \theta - g,$$

или

$$\cos \theta \frac{dV}{dt} - V \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -CH(y)F(V) \cos \theta,$$

$$\sin \theta \frac{dV}{dt} - V \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = -CH(y)F(V) \sin \theta - g.$$

Умножая обе части первого уравнения на  $\sin \theta$ , а второго – на  $\cos \theta$  и вычитая соответствующие части первого из второго, получим

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{V}. \quad (3.4)$$

Умножая обе части первого уравнения на  $\cos \theta$ , а второго – на  $\sin \theta$  и складывая соответствующие части равенств, будем иметь

$$\frac{dV}{dt} = -CH(y)F(V) - g \sin \theta. \quad (3.5)$$

Уравнения (3.4) и (3.5) нам еще понадобятся в дальнейшем.

### 3.1.1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПРИ АРГУМЕНТЕ $\theta$

Из уравнения (3.4) непосредственно имеем

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{V}{g \cos \theta}.$$

$$\text{Далее } \frac{dU}{d\theta} = \frac{dU}{dt} \frac{dt}{d\theta} = CH(y)G(V)u \frac{V}{g \cos \theta}.$$

Заменяя  $\frac{U}{\cos \theta} = V$  и  $G(V)V = F(V)$ , получим:

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{C}{g} H(y) V F(V),$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{uV}{g \cos \theta} = -\frac{u^2}{g \cos^2 \theta},$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = \operatorname{tg} \theta \left( -\frac{u^2}{g \cos^2 \theta} \right) = -\frac{u^2 \operatorname{tg} \theta}{g \cos^2 \theta}.$$

Окончательно будем иметь при аргументе  $\theta$  следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{C}{g} H(y) V F(V), \\ \frac{dt}{d\theta} &= -\frac{u}{g \cos^2 \theta}, \\ \frac{dx}{d\theta} &= -\frac{u^2}{g \cos^2 \theta}, \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\frac{u^2 \operatorname{tg} \theta}{g \cos^2 \theta}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где  $V = \frac{u}{\cos \theta}$ .

### 3.1.2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПРИ АРГУМЕНТЕ $x$

Имеем

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = -CH(y) G(V) u \frac{1}{u} = -CH(y) G(V).$$

Далее, обозначая  $p = \operatorname{tg} \theta$  и имея в виду третье уравнение из системы (3.6), получим

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left( -\frac{g \cos^2 \theta}{u^2} \right) = \frac{g}{u^2}.$$

Выражения для  $y$  и  $t$  напишутся непосредственно:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta = p; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u}.$$

Окончательно получим следующую систему при аргументе  $x$ :

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= -CH(y)G(V), \\ \frac{dp}{dx} &= -\frac{g}{u^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= p, \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{u},\end{aligned}\tag{3.7}$$

где  $V = u\sqrt{1 + p^2}$ .

### 3.1.3. УРАВНЕНИЕ ГОДОГРАФА

Рассматривая уравнение (3.4), видим, что в нем приходится интегрировать три уравнения совокупно, а именно первое, второе и четвертое.

После интегрирования третье уравнение можно проинтегрировать отдельно. Но при интегрировании первых двух уравнений мы бы имели, учитывая, что  $V = \sqrt{u^2 + w^2}$ , три искомые величины  $u$ ,  $w$ ,  $y$ , которые, естественно, не могут быть получены из двух уравнений. Таким образом, легко показать, что в системе (3.7) совокупными являются три уравнения: первое, второе, третье. Наименьшее число совокупных уравнений мы имеем в системе (3.6), в которой таких только два: первое и четвертое.

Если же пренебречь изменением плотности воздуха с высотой и принять  $H(y) = H(y_{cp})$ , то, включив  $H(y_{cp})$  в баллистический коэффициент, получим первое уравнение системы (3.6) в следующем виде:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{C}{g} VF(V)\tag{3.8}$$

или

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{C}{g} \frac{u}{\cos \theta} F\left(\frac{u}{\cos \theta}\right). \quad (3.8')$$

В этом уравнении одна искомая функция  $u$ , и оно может интегрироваться отдельно, после чего интегрирование остальных уравнений системы (3.6) сводится к квадратурам, т.е. к вычислению определенных интегралов.

Уравнение (3.8) называется уравнением годографа, так как в результате интегрирования его получается зависимость вида  $u = f(\theta)$ , т.е. уравнение годографа скоростей в полярных координатах.

## 3.2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ В ВОЗДУХЕ

**Горизонтальная проекция скорости убывает**

Из уравнения  $\frac{du}{dx} = -CH y G V$ , имея в виду, что  $C, H, y, G, V$  положительны, получим

$$\frac{du}{dx} < 0.$$

Следовательно, горизонтальная проекция скорости  $u$  убывает вдоль траектории.

В безвоздушном пространстве  $u = u_0 = \text{const}$ .

**Нисходящая ветвь круче восходящей**

Из второго уравнения системы (3.7)  $\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{u^2}$ , умножая обе части этого равенства на  $dy$  и имея в виду, что  $\frac{dy}{dx} = p$ , получим  $p dp = -\frac{g}{u^2} dy$ . Рассмотрим две точки траектории  $M_1$  и  $M_2$ , находящиеся на одной высоте (рис. 3.2).

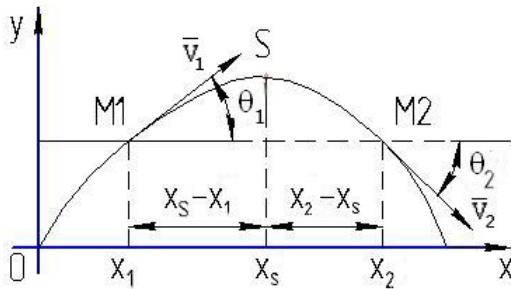


Рис. 3.2. Восходящая и нисходящая ветви траектории в воздухе

Интегрируя последнее равенство дважды: один раз от точки  $M_1$  до вершины и другой раз от вершины до точки  $M_2$ , получим для восходящей ветви:

$$\int_{p_1}^0 pdp = -g \int_y^Y \frac{dy}{u^2}.$$

Для нисходящей ветви:

$$\int_0^{p_2} pdp = -g \int_Y^y \frac{dy}{u^2},$$

или

$$\frac{p_1^2}{2} = g \int_y^Y \frac{dy}{u_B^2} \quad \text{и} \quad \frac{p_2^2}{2} = g \int_Y^y \frac{dy}{u_H^2},$$

где индексы «в» и «н» отмечают значения для восходящей и нисходящей ветвей траектории.

Так как горизонтальная проекция скорости непрерывно убывает вдоль траектории, то, следовательно:

$$u_B > u_H \quad \text{и} \quad \int_y^Y \frac{dy}{u_B^2} < \int_Y^y \frac{dy}{u_H^2}.$$

$p_1^2 < p_2^2$ , откуда  $p_1 < |p_2|$ ;  $\theta_1 < |\theta_2|$ , т.е. нисходящая ветвь круче восходящей. Полагая  $y=0$ , т.е. рассматривая две точки на горизонте орудия, получим  $\theta_1 = \theta_0$ ,  $\theta_2 = \theta_c$   $|\theta_c| > \theta_0$ .

Угол падения больше угла бросания. Таким образом, траектория в воздухе не является симметричной кривой, как это имеет место в безвоздушном пространстве.

### Асимметричность траекторий

Напишем уравнение действующих сил для движения снаряда от точки  $M_1$  до точки  $M_2$ . Известно, что работа силы тяжести не зависит от вида кривой, по которой происходит перемещение. Она равна произведению веса тела на понижение его центра массы. Поэтому работа силы тяжести на участке  $M_1M_2$  находится на одной высоте. Остается учесть только работу силы сопротивления воздуха. Имеем:

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \int_{S_1}^{S_2} R \cos(\widehat{\vec{RV}}) dS = - \int_{S_2}^{S_1} R dS ;$$

$$\cos(\widehat{\vec{RV}}) = -1 ,$$

поскольку сила сопротивления воздуха противоположна направлению скорости. Так как правая часть равенства отрицательна, то отрицательна и левая часть. Следовательно,  $V_1 > V_2$ , что и выражает свойство асимметричности траектории не только по ее форме, но и по распределению скоростей вдоль траектории. Для горизонта орудия имеем  $V_1 = V_0$  и  $V_2 = V_c$ , следовательно,  $V_c < V_0$ . Окончательная скорость меньше начальной  $V_0$ . В безвоздушном пространстве  $V_0 = V_c$ .

### Положение абсциссы вершины

Из уравнения  $\frac{dy}{dx} = p$  имеем  $dx = \frac{dy}{p}$ . Интегрируя это выражение от точки  $M_1$  до вершины и от вершины до  $M_2$ , получим для восходящей ветви  $x_S - x_1 = \int_y^Y \frac{dy}{p_B}$ , для нисходящей ветви –

$$x_2 - x_S = \int_y^y \frac{dy}{p_H} = \int_y^Y \frac{dy}{|p_H|} .$$

Так как  $|p_H| > p_B$ , то  $\int_y^Y \frac{dy}{|p_H|} < \int_y^Y \frac{dy}{p_B}$  откуда  $x_S - x_1 > x_2 - x_S$ .

Применяя полученную зависимость для горизонта орудия, получим  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = X$ , следовательно:  $x_S > X - x_S$  и  $x_S > \frac{X}{2}$ .

Для безвоздушного  $x_S = \frac{X}{2}$ .

### О степени несимметричности траектории в воздухе

Все предыдущие свойства характеризуют несимметричность траектории. Эта несимметричность тем больше, чем больше ускорение силы сопротивления воздуха, т.е. чем меньше калибр и чем большее скорость.

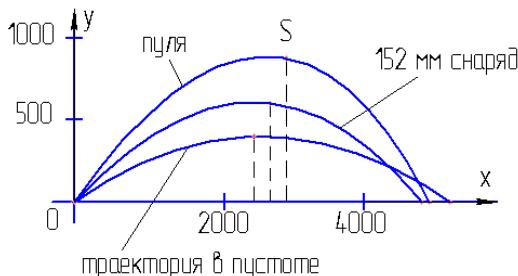


Рис. 3.3. Несимметричность траектории в воздухе

Например, траектория винтовочной пули резко несимметрична, а траектория тяжелого гаубичного снаряда при наименьшем заряде мало отличается от параболы (рис. 3.3, табл. 3.1).

Таблица 3.1

Виды боеприпасов	Калибр, мм	Начальная скорость $V_0$ , м/с	Полная дальность, м	Угол бросания $\theta_0$	Угол падения $\theta_c$
Пуля	7,62	800	4400	$35^\circ$	$64^\circ 23'$
Снаряд	152	227	4400	$35^\circ$	$37^\circ 53'$
Траектория в пустоте	57	214	4400	$35^\circ$	$35^\circ$

## Предельное значение угла наклона касательной к траектории

Имеем  $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{V} = -\frac{g \cos^2 \theta}{u}$ , откуда  $\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{g}{u} dt$ . Интегрируя в пределах от  $t=0$  до  $t=\infty$  и обозначая через  $\theta_{\text{пп}}$  предельное значение угла наклона касательной при  $t \rightarrow \infty$ , получим

$$\int_{\theta_0}^{\theta_{\text{пп}}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = - \int_0^\infty \frac{g}{u} dt;$$

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{пп}} - \operatorname{tg} \theta_0 = - \int_0^\infty \frac{g}{u} dt.$$

Так как  $\int_0^\infty \frac{dt}{u} > \int_0^\infty \frac{dt}{u_0} = \infty$ , а  $\operatorname{tg} \theta_0$  – конечная величина, то очевидно, что

$$\operatorname{tg} \theta_{\text{пп}} = -\infty, \text{ откуда } \theta_{\text{пп}} = -\frac{\pi}{2}.$$

Касательная к траектории стремится в пределе к вертикальному положению. Заметим, что это свойство верно и для траектории в безвоздушном пространстве. Однако указанное значение  $\theta_{\text{пп}} = -\frac{\pi}{2}$  отве-

чает некоторому конечному  $x_{\text{пп}}$ , а в безвоздушном пространстве  $\theta_{\text{пп}}$  отвечает  $x = \infty$ . Действительно, интегрируя уравнение [система (3.6)]

$$dx = -\frac{u^2}{g} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{V^2}{g} d\theta \text{ в пределах от } 0 \text{ до } x_{\text{пп}} \text{ и от } \theta_0 \text{ до } \theta_{\text{пп}} = -\frac{\pi}{2},$$

$$\text{получим: } x_{\text{пп}} = - \int_{\theta_0}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{V^2}{g} d\theta = \frac{V_{\text{cp}}^2}{g} \left( \theta_0 + \frac{\pi}{2} \right).$$

Так как в воздухе скорость не может беспрепятственно расти, то  $V_{\text{cp}}$  – величина конечная. Таким образом, траектория в воздухе имеет вертикальную асимптоту к нисходящей ветви траектории на конечном расстоянии от точки вылета.

### 3.3. ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ СКОРОСТИ ВДОЛЬ ТРАЕКТОРИИ

В безвоздушном пространстве минимум скорости находится в вершине, причем  $V_{\min} = u_0 = V_0 \cos \theta_0$ . За вершиной скорость растет безгранично. Исследуем изменение скорости для траектории в воздухе.

Изменение скорости характеризуется величиной производной  $\frac{dV}{dt}$ .

Ранее мы имели (3.4):  $\frac{dV}{dt} = -CH(y)F(V) - g \sin \theta$ .

Приравнивая касательное ускорение нулю, получим условия минимума или максимума скорости  $g \sin \theta = -CH(y)F(V)$ . Из этого выражения видно, что минимум или максимум скорости может иметь место только там, где  $\sin \theta < 0$ , т.е. на нисходящей ветви траектории, а не в вершине, как это было установлено для траектории в пустоте.

Характер изменения ускорения снаряда показан на рис. 3.4.

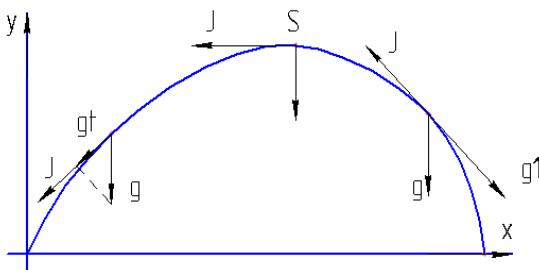


Рис. 3.4. Изменение ускорения снаряда

Касательное ускорение снаряда  $\frac{dV}{dt}$  состоит из ускорения силы сопротивления воздуха  $J = CH(y)F(V)$  и проекции на касательную ускорения силы тяжести  $g_t = g \sin \theta$ .

На восходящей ветви траектории оба вектора  $\vec{J}$  и  $\vec{g}_t$  противоположны направлению скорости. Следовательно, на восходящей ветви скорость снаряда убывает. На нисходящей ветви траектории вектор  $\vec{g}_t$  направлен в сторону движения снаряда, т.е. обратно вектору  $\vec{J}$ . При

этом возрастание или убывание скорости зависит от численного соотношения величин, составляющих ускорение  $J$  и  $g_t$ . Непосредственно за вершиной  $\sin\theta$  – малая величина, и  $|g_t| < J$ ; следовательно, скорость продолжает убывать. В дальнейшем ускорение  $g_t$  возрастает вследствие увеличения  $\sin\theta$ , а  $J$  убывает вследствие уменьшения  $V$  и  $F(V)$ , так что в некоторой точке получим равенство  $|g_t| = J$ . В этой точке будет иметь место минимум скорости, после чего скорость начнет возрастать.

Для случая однородной атмосферы  $H(y) = 1$  доказано существование минимума скорости на нисходящей ветви траектории. После минимума скорость возрастает, стремясь асимптотически к некоторому предельному значению, при котором ускорение силы сопротивления воздуха равно ускорению силы тяжести:

$$CF V_{np} = g.$$

Покажем кривую изменения скорости в этом случае на рис. 3.5.

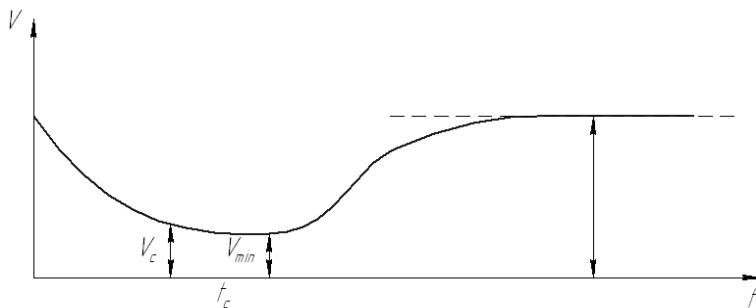


Рис. 3.5. Изменение скорости снаряда в однородной атмосфере

Для случая изменяющейся с высотой плотности воздуха существование минимума или максимума в настоящее время не доказано. Расчеты, однако, показывают, что имеет место сначала минимум скорости. После минимума наступает максимум скорости, а затем скорость убывает, как показано на рис. 3.6.

Минимум и максимум скорости могут иметь место как выше, так и ниже горизонта орудия (в предположении, что полет снаряда ниже

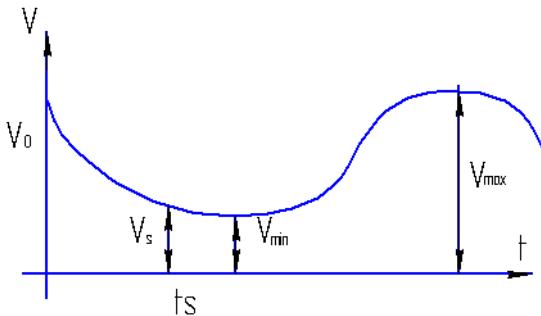


Рис. 3.6. Изменение скорости снаряда для случая переменной плотности

горизонта не ограничен). Для настильных траекторий, отвечающих малым углам бросания и большим начальными скоростям, минимум скорости до точки падения не получается.

Чем меньше скорость снаряда и больше калибр, тем ближе траектория в воздухе к параболе и, следовательно, тем ближе к вершине находится точка минимума скорости.

### 3.4. ИССЛЕДОВАНИЕ КРИВИЗНЫ ТРАЕКТОРИИ

Из определения кривизны имеем

$$\frac{1}{r} = \left| \frac{d\theta}{dS} \right|,$$

где  $r$  – радиус кривизны, а  $\frac{1}{r}$  – кривизна.

Далее  $\left| \frac{d\theta}{dS} \right| = \left| \frac{d\theta}{dt} \right| \frac{dt}{dS} = \frac{g \cos \theta}{V} \frac{1}{V} = \frac{g \cos \theta}{V^2}$ . Следовательно,  $\frac{1}{r} = \frac{g \cos \theta}{V^2}$ .

На восходящей ветви траектории  $\cos \theta$  растет,  $V$  убывает, следовательно, кривизна растет (рис. 3.7).

На нисходящей ветви за точкой  $V_{\min}$  скорость растет, а  $\cos \theta$  уменьшается, следовательно, кривизна убывает. Если до вершины кривизна растет, а за точкой  $V_{\min}$  убывает, то на участке между двумя точками должен иметь место максимум кривизны.

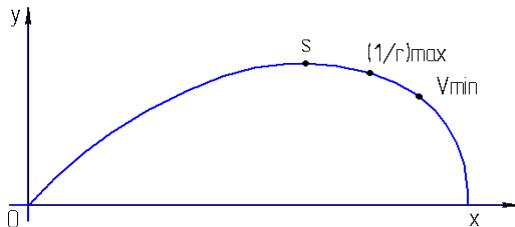


Рис. 3.7. Кривизна траектории

Это показывает, что в пустоте максимум кривизны находится в вершине. Это непосредственно следует из свойств параболы.

### 3.5. ВЫСОТА ТРАЕКТОРИИ

Рассмотрим некоторую траекторию в воздухе, определяемую уравнением  $y = f(x)$ . Построим на полной дальности  $X$  две параболические траектории 1 и 2, из которых одна (1) имеет угол бросания  $\theta_0$ , другая (2) – угол бросания  $\theta_C$ . Начальные скорости, конечно, будут различны для всех трех траекторий (рис. 3.8).

Докажем, что траектория в воздухе от точки вылета до точки падения расположена выше траектории 1 и ниже траектории 2.

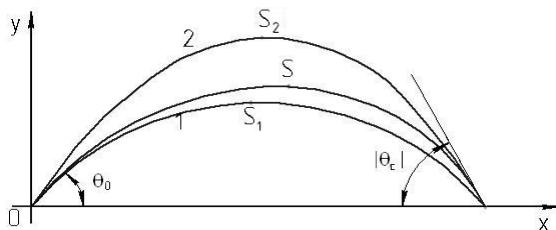


Рис. 3.8. Высота траектории

Напишем уравнение параболы, проходящей через начало координат, в общем виде:

$$y = ax - bx^2 = \varphi(x).$$

Пусть  $y = f(x)$  – уравнение траектории в воздухе. Составим разность  $f(x) - \varphi(x) = F(x)$ . Если кривые  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  пересекаются в  $m$  точках, то уравнение  $F(x) = 0$  будет иметь  $m$  вещественных корней. Согласно теореме Ролля, если уравнение  $F(x) = 0$  имеет  $m$  корней, то  $F'(x) = 0$  имеет, по крайней мере,  $(m - 1)$  корней, а  $F''(x) = 0$ , по крайней мере,  $(m - 2)$  корней. Так как

$$F''(x) = f''(x) - \varphi''(x),$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$f''(x) = \frac{dp}{dx} = -\frac{g}{u^2},$$

$$\varphi'(x) = a - 2bx,$$

$$\varphi''(x) = -2b,$$

то

$$F''(x) = -\frac{g}{u^2} + 2b.$$

Приравнивая  $F''(x)$  нулю, получим  $u = \pm \sqrt{\frac{g}{2b}}$ . Так как  $u$  не может быть отрицательным, то мы должны перед корнем взять знак «+». Таким образом,  $F''(x) = 0$  имеет один корень;  $F'(x) = 0$  – не более двух корней, а  $F(x) = 0$  – не более трех корней, т.е. кривые  $f$  и  $\varphi$  пересекаются не более чем в трех точках.

Так как траектория и парабола 1 касаются в точке вылета, а точка касания эквивалентна двум точкам пересечения, то вместе с точкой падения мы имеем три точки пересечения траектории с параболой 1, и больше точек пересечения или касания быть не может. Так как возле точки падения парабола 1 идет ниже траектории, то она будет ниже на всем участке выше горизонта. Таким же образом парабола 2 расположена выше траектории.

Следствие: рассматривая вопрос в пределах, в которых может находиться высота траектории  $Y$ , и, учитывая, что для параболы  $Y = \frac{X \operatorname{tg} \theta_0}{4}$ , получим  $Y_1 < Y < Y_2$ , или  $\frac{X \operatorname{tg} \theta_0}{4} < Y < \frac{X \operatorname{tg} |\theta_c|}{4}$ .

В некоторых случаях для приближенного определения полной высоты принимают

$$Y = \frac{Y_1 + Y_2}{4}, \quad \text{или} \quad Y = \frac{X}{8} [\operatorname{tg} \theta_0 + \operatorname{tg} |\theta_c|].$$

### 3.6. УГОЛ НАИБОЛЬШЕЙ ДАЛЬНОСТИ

В безвоздушном пространстве угол наибольшей дальности равен  $45^\circ$ . Для траектории в воздухе вопрос об угле наибольшей дальности выявлен по расчетам, и они показывают, что может быть как больше, так и меньше  $45^\circ$  и колеблется в широких пределах от  $25$  до  $60^\circ$ , в зависимости от баллистического коэффициента и начальной скорости.

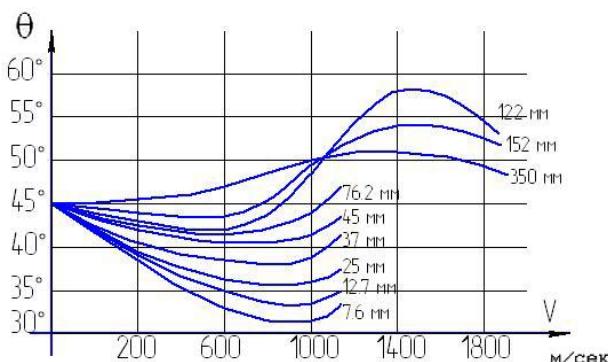


Рис. 3.9. Угол наибольшей дальности для различных калибров

На рис. 3.9 представлены приближенные значения угла наибольшей дальности для снарядов современной формы различных калибров (в миллиметрах) при различных начальных скоростях. Как видно из графиков, когда начальная скорость стремится к нулю, угол наибольшей дальности стремится к  $45^\circ$ . При увеличении скорости угол наибольшей дальности уменьшается, затем, переходя через минимум, увеличивается. Потом достигает максимума и затем убывает.

Для снарядов средних калибров при обычных скоростях, меньших  $800$  м/с, угол наибольшей дальности близок к  $43^\circ$ . Для стрелкового оружия он близок к  $30^\circ$ . Для орудий сверх дальнобойных, стреляющих

на скоростях  $V = 1500$  м/с, угол наибольшей дальности находится в пределах  $50\dots55^\circ$ . Следует заметить, что в диапазоне углов бросания, близких к углу наибольшей дальности, дальность мало чувствительна к изменению угла бросания. Например, при стрельбе пулей при угле бросания  $30^\circ$  получается дальность около 3600 м, а при угле  $20^\circ$  – около 3500 м.

### 3.7. ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛЛИСТИКИ

#### Метод Эйлера [2, 3, 4]

Если принять  $H(y) = H(y_{cp}) = \text{const}$ , то получим уравнение годографа скоростей, которые можно написать в следующем виде:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{C}{g} \frac{u}{\cos\theta} F\left(\frac{u}{\cos\theta}\right).$$

Хотя в этом уравнении только две переменные  $u$  и  $\theta$ , оно не может быть проинтегрировано точно, так как в случае произвольного вида функции  $F$  переменные  $u$  и  $\theta$  не могут быть отделены. Для отделения переменных следует либо принять достаточно простое аналитическое выражение для функции сопротивления воздуха  $F V$ , либо допустить некоторое искажение вида уравнения годографа, при котором переменные отделяются для произвольного вида функции сопротивления. Примером методов первого типа является метод Эйлера–Отто. Ко второму типу относится метод Сиаччи.

#### 3.7.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТРАЕКТОРИИ

Задача точного интегрирования уравнения годографа была решена Эйлером при одночленной зависимости для функции сопротивления вида  $F V = BV^n$ , где  $B$  и  $n$  – постоянные числа. Известно, однако, что эти числа не могут быть приняты постоянными для широкого диапазона скоростей. Поэтому метод Эйлера в общем виде не нашел практического применения.

Рассмотрим метод Эйлера в применении для скоростей, не превышающих 250 м/с. Для этих скоростей закон сопротивления может быть принят одночленным квадратичным при  $n=2$ . Этот случай имеет практическое применение для расчета траекторий при стрельбе из минометов и мортир, а также из гаубиц при соответствующих задачах.

Напишем уравнение годографа в следующем виде:

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{C}{g} H(y_{cp}) VF(V).$$

Примем для функции сопротивления воздуха простое аналитическое выражение  $F(V) = BV^2$  и обозначим  $CH(y_{cp})B = b$ .

При этом уравнение годографа перепишется в следующем виде:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{b}{g} V^3 = \frac{b}{g} \frac{u^3}{\cos^3 \theta},$$

или окончательно

$$\frac{du}{u^3} = \frac{b}{g} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}. \quad (3.9)$$

Переменные в уравнении годографа отделены. Интегрируя полученное равенство от точки вылета до произвольной точки траектории, получим:

$$-\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{2u_0^2} = \frac{b}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}.$$

Обозначив  $\xi(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right]$ , получим

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{u_0^2} - \frac{2b}{g} \xi(\theta) - \xi(\theta_0) = \frac{2b}{g} \left[ \frac{g}{2bu_0^2} + \xi(\theta_0) - \xi(\theta) \right].$$

Обозначая  $\frac{g}{2bu_0^2} + \xi(\theta_0) = \xi(\theta_A)$ , где  $\theta_A$  – постоянное число, зависящее от начальных условий, получим.

$$\frac{1}{u^2} = \frac{2b}{g} \xi(\theta_A) - \xi(\theta), \quad (3.10)$$

$$u^2 = \frac{g}{2b} \frac{1}{\xi(\theta_A) - \xi(\theta)}. \quad (3.11)$$

Таким образом, уравнение годографа проинтегрировано и можно для каждой точки, заданной углом  $\theta$ , определить значения  $u = f(\theta)$ . Значение самой скорости найдется непосредственно из выражения  $V = \frac{u}{\cos \theta}$ . Чтобы определить остальные значения элементов траектории, надо  $u = f(\theta)$  подставить в остальные уравнения системы (3.6):

$$\begin{aligned} dx &= \frac{-u^2}{g} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{1}{2b} \frac{d\theta}{\xi(\theta_A) - \xi(\theta) \cos^2 \theta}, \\ dy &= -\frac{u^2}{g} \frac{\operatorname{tg} \theta d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{\operatorname{tg} \theta}{2b} \frac{d\theta}{\xi(\theta_A) - \xi(\theta) \cos^2 \theta}, \\ dt &= -\frac{u}{g} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{1}{\sqrt{2bg}} \frac{d\theta}{\sqrt{\xi(\theta_A) - \xi(\theta)} \cos^2 \theta}. \end{aligned}$$

Интегрируя в соответствующих пределах, переменив пределы в правых частях равенств и изменив соответственно знаки, получим:

$$x = \frac{1}{2b} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\xi(\theta_A) - \xi(\theta) \cos^2 \theta}, \quad (3.12)$$

$$y = \frac{1}{2b} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{\operatorname{tg} \theta d\theta}{\xi(\theta_A) - \xi(\theta) \cos^2 \theta}, \quad (3.13)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2bg}} \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\xi(\theta_A) - \xi(\theta)} \cos^2 \theta}. \quad (3.14)$$

### 3.7.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ПО ДУГАМ МЕТОДОМ ЭЙЛЕРА

Расчет траекторий проводим по дугам, а не с помощью вычисления квадратур.

Предварительно выведем выражение для длины дуги. Имеем:

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d\theta} = V \left( -\frac{V}{g \cos \theta} \right) = -\frac{u^2}{g \cos^3 \theta}.$$

Но согласно уравнению (3.9)  $\frac{d\theta}{\cos^3 \theta} = \frac{gdu}{bu^3}$ , следовательно,

$$dS = -\frac{u^2}{g} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} = -\frac{1}{b} \frac{du}{u}.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от точки вылета до произвольной точки траектории, получим:

$$S = -\frac{1}{b} \ln \frac{u}{u_0} = \frac{1}{b} \ln \frac{u_0}{u} = \frac{1}{2b} \ln \left( \frac{u_0}{u} \right)^2,$$

или на основании уравнения (3.10)

$$S = -\frac{1}{2b} \ln \left\{ \frac{2bu_0^2}{g} \xi(\theta_A) - \xi(\theta) \right\}. \quad (3.15)$$

Таким образом, для любой точки траектории, заданной углом  $\theta$ , можно вычислить, помимо  $u$  и  $V$ , длину дуги  $S$ . Для вычисления остальных элементов ( $x, y, t$ ) воспользуемся зависимостями

$$dx = \cos \theta dS,$$

$$dy = \sin \theta dS,$$

$$dt = \frac{dS}{V}.$$

Далее разобьем траекторию на дуги точками  $M_1$  и  $M_2 \dots M_k$  таким образом, чтобы в интервале одной дуги  $\cos \theta$  и  $V$  изменились мало.

Для участка дуги, ограниченного точками  $M_k$  и  $M_{k+1}$ , получим (рис. 3.10)

$$\int_{X_k}^{X_{k+1}} dx = \int_{S_k}^{S_{k+1}} \cos \theta dS,$$

$$\int_{Y_k}^{Y_{k+1}} dy = \int_{S_k}^{S_{k+1}} \sin \theta dS,$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} dt = \int_{S_k}^{S_{k+1}} \frac{dS}{V}.$$

Вынеся  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  и  $\frac{1}{V}$  со средними значениями, получим:

$$\Delta X_k = (\cos \theta_{cp})_k \Delta S_k,$$

$$\Delta Y_k = (\sin \theta_{cp})_k \Delta S_k,$$

$$\Delta t_k = \left( \frac{1}{V_{cp}} \right)_k \Delta S_k.$$

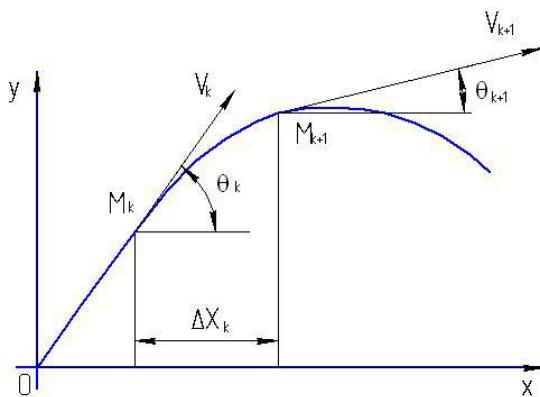


Рис. 3.10. Вычисление траектории по дугам методом Эйлера

Можно принять при выборе точки на траектории:

$$(\cos \theta_{cp})_k = \cos \frac{\theta_k + \theta_{k+1}}{2},$$

$$(\sin \theta_{cp})_k = \sin \frac{\theta_k + \theta_{k+1}}{2},$$

$$(V_{cp})_k = \sin \frac{V_k + V_{k+1}}{2}.$$

Что касается  $\Delta S_k$ , то его нетрудно найти, так как значение длины дуги известно для любой точки траектории из выражения (3.15). Таким образом, для любого участка траектории можно вычислить приращения  $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ . Следовательно, можно подсчитать элементы  $x, y, t$  любой точки траектории суммированием указанных приращений.

### 3.7.3. ТАБЛИЦЫ ОТТО–СИАЧЧИ

Известно, что траектория снаряда определяется тремя параметрами  $C, V_0, \theta_0$ . Поэтому при составлении баллистических таблиц необходимо рассчитать весьма значительное количество траекторий, отвечающих различным комбинациям величин  $C, V_0, \theta_0$ . Роль баллистического коэффициента в рассматриваемом методе играет коэффициент  $b$ . Выпишем выражение для  $u^2$ , разделив предварительно обе части равенства на  $u_0^2$ :

$$\left( \frac{u}{u_0} \right)^2 = \frac{g}{2bu_0^2} \frac{1}{\xi(\theta_A) - \xi(\theta)}.$$

Так как

$$\xi(\theta_A) = \xi(\theta_0) + \frac{g}{2bu_0^2} = \xi(\theta_0) + \frac{g}{2bV_0^2 \cos^2 \theta_0} = \varphi(\theta_0, bV_0^2),$$

то правая часть равенства будет функцией двух параметров  $\theta_0$  и  $bV_0^2$ , а не трех параметров  $\theta_0$  и  $V_0$  и  $b$  в отдельности. Таким образом, если рассматривать различные траектории, отвечающие одному значению  $\theta_0$  и одному начальному значению ускорения силы сопротивления воздуха  $J_0 = bV_0^2$ , то во всех этих траекториях будут одинаковые значения отношения  $\frac{u}{u_0}$  или одинаковые  $\frac{V}{V_0}$ .

Таким же образом из выражения для  $(x, y, t)$  получим:

$$2bx = \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\xi(\theta_A) - \xi(\theta) \cos^2 \theta} = \varphi_1 \quad \theta_0, bV_0^2, \theta ,$$

$$2by = \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{\operatorname{tg} \theta d\theta}{\xi(\theta_A) - \xi(\theta) \cos^2 \theta} = \varphi_2 \quad \theta_0, bV_0^2, \theta ,$$

$$\sqrt{2bg} \cdot t = \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\xi(\theta_A) - \xi(\theta) \cos^2 \theta}} = \varphi_3 \quad \theta_0, bV_0^2, \theta ,$$

т.е. для различных траекторий, соответствующих определенным значениям  $\theta_0$  и  $bV_0^2$ , одинаковым значениям аргумента  $\theta$  отвечают одинаковые значения  $2bx$ ,  $2by$ ,  $\sqrt{2bg} \cdot t$ . Следовательно, для составления баллистических таблиц нужно рассчитать ряд траекторий, отвечающих различным комбинациям двух параметров  $\theta_0$  и  $bV_0^2$ , а не трех, как в общем случае расчета траекторий, таблицы же могут иметь только два входа. Таблицы дают для различных  $\theta_0$  при входном числе  $2bx$  значение величины

$$\frac{bV_0^2}{g}; \quad \frac{V_0^2}{2gX}; \quad \theta_c; \quad \frac{V_c}{V_0}; \quad \frac{T\sqrt{g}}{\sqrt{X}}; \quad \frac{Y}{X}.$$

### 3.7.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ТРАЕКТОРИИ ПО ТАБЛИЦАМ ОТТО–СИАЧЧИ

В таблицы Отто–Сиаччи входит коэффициент  $b$ , играющий роль видоизмененного баллистического коэффициента  $b = CH(y_{cp})B$ .

Численное значение коэффициента  $B$ , входящего в выражение для функции сопротивления  $F(V) = BV^2$ , зависит от выбранного закона сопротивления воздуха. Далее, принимая, как и в параболической теории,  $y_{cp} = \frac{2}{3}Y$ , получим  $H(y_{cp}) = H\left(\frac{2}{3}Y\right)$ . Следовательно, для того чтобы найти  $b$ , надо знать высоту траектории, которая к началу расчета еще не известна. При использовании таблиц в первом приближении принимают  $H(y_{cp}) = 1$  и определяют приближенное значение

$$b_1 = CB = B \frac{id^2}{q} 1000.$$

По этому значению  $b_1$  определяют по таблице приближенные значения  $Y_1$  и  $y_{cp} = \frac{2}{3}Y_1$ ; далее находят коэффициент  $b = b_1 H(y_{cp})$ , пользуясь которыми рассчитывают траекторию.

Таблицы Отто–Сиаччи связывают между собой восемь величин:  $b, \theta_0, V_0, X, [\theta_c], V_c, Y, T$ . Достаточно знать любые три из указанных величин, чтобы по таблицам найти остальные пять величин. Фактически вместо  $b$  задаются баллистический коэффициент  $C$  или величины, входящие в его выражение. Соответственно этому будем иметь четыре типа задач.

Рассмотрим решение одной из задач.

Заданы  $C, \theta_0, V_0$ .

1. Принимая в первом приближении  $H(y_{cp}) = 1$ , вычисляем  $b_1 = CB$ . Численные значения  $B$  принимаются, как указано выше, в зависимости от выбранного закона сопротивления воздуха.

2. Вычисляем  $\frac{b_1 V_0^2}{g}$  и по входным величинам  $\theta_0$  и  $\frac{b_1 V_0^2}{g}$  находим по таблицам значения  $2b_1 X_1$  и  $\frac{Y_1}{X_1}$ .
3. Вычисляем  $Y_1$  и  $y_{\text{cp}} = \frac{2}{3} Y_1$  и по таблицам находим  $H(y_{\text{cp}})$ .
4. Уточняем значения  $b = CBH(y_{\text{cp}})$  и  $\frac{bV_0^2}{g}$ .
5. По входным величинам  $\theta_0$  и  $\frac{bV_0^2}{g}$  по таблицам находим значения величин  $2bX$ ,  $\theta_c$ ,  $\frac{V_c}{V_0}$ ,  $\frac{T\sqrt{g}}{\sqrt{X}}$ ,  $\frac{Y}{X}$ .
6. Вычисляем элементы точки падения и вершины  $X$ ,  $V_c$ ,  $T$ ,  $Y$ .

---

## 4. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА СНАРЯД В ПОЛЕТЕ

---

### 4.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГИРОСКОПОВ

Снаряд при вылете из ствола получает ряд толчков, ударов и воздействий, устраниТЬ которые не удается. Как следствие этого, появляется угол атаки, а значит, и дестабилизирующий момент силы сопротивления воздуха, который вызывает возрастающие отклонения снаряда от траектории с переходом в беспорядочные кувыркания, что дает большие отклонения снаряда от цели.

Для обеспечения правильности полета всем неоперенным изделиям придается быстрое вращение, в результате чего и обеспечивается их устойчивость. Устойчивостью в полете называется свойство снаряда двигаться в воздухе без значительного отклонения его оси от касательной к траектории [2, 4, 10].

Устойчивость вращательного снаряда обеспечивается за счет гирокосмического эффекта. Гирокомпом или волчком называют твердое симметричное тело, быстро вращающееся вокруг своей оси симметрии. Основная теорема гирокомпа: Если ось гирокомпа, быстро вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , поворачивать с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси, составляющей с осью гирокомпа угол  $\theta$ , то появится пара сил с моментом  $M = A\omega\Omega\sin\theta$ , где  $A$  – момент инерции гирокомпа, стремящийся поставить ось гирокомпа параллельно оси поворота так, чтобы оба вращения происходили в одну сторону (рис. 4.1).

Эта пара сил, называемая восстанавливающей, действует на тело, сообщая гирокомпу угловую скорость  $\Omega$ . В векторной форме  $M = A\bar{\omega}\bar{\Omega}$ .

Вращение гирокомпа вокруг оси называется соответственным вращением гирокомпа  $\omega$ , а вращение с угловой скоростью  $\Omega$  называется прецессией. Чтобы сообщить гирокомпу прецессионное движение, нужно приложить в нему пару, противоположную восстанавливающей паре. В случае с артиллерийским снарядом мы имеем такую

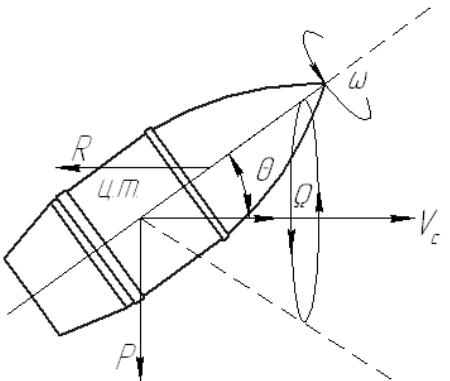


Рис. 4.1. Устойчивость вращательного снаряда на траектории

зависимость – опрокидывающий (дестабилизирующий) момент силы сопротивления воздуха вызывает прецессию снаряда и соответственно появление восстанавливающей пары, направленной противоположно опрокидывающему моменту. При достаточно большом числе оборотов гироскопа (или снаряда) вокруг оси значение восстанавливающего момента тоже велико и при возмущающем воздействии внешних сил положение оси приблизительно сохраняется, давая лишь дополнительное движение оси волчка вокруг первоначального положения – прецессию.

Принято различать сильный и слабый гироскоп. Сильным называется такой гироскоп, у которого при положении некоторой элементарной силы возникающие углы прецессии ограничены по величине.

При выводе аналитических зависимостей, определяющих поступательное и вращательное движение артиллерийского снаряда, примем две системы координат.

1. Прямоугольную систему  $X, Y, Z$ , связанную с точкой вылета снаряда из орудия и направленную таким образом, что плоскость  $XOZ$  будет горизонтальной, а плоскость  $XOY$  лежит в плоскости бросания; при этом ось  $OX$  будет совпадать с направлением стрельбы, а ось  $OY$  направлена вверх.

2. Подвижную систему координат  $(\xi, \eta, \phi)$ , связанную с главными центральными осями инерции снаряда: ось  $O\xi$  по оси симметрии снаряда, а оси  $O\eta$  и  $O\phi$  расположены в экваториальной плоскости снаряда.

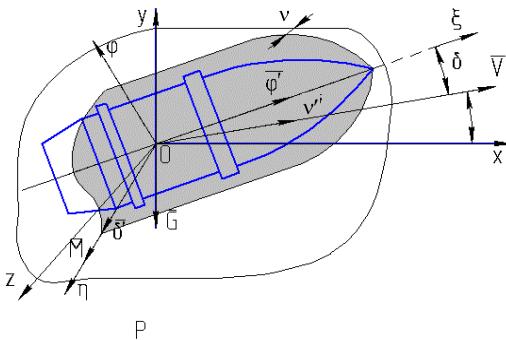


Рис. 4.2. Положение оси снаряда относительно прямоугольной системы координат

Положение оси снаряда относительно прямоугольной системы координат определяется углами нутации  $\delta$  и прецессии  $\nu$ . Третьим параметром, определяющим положение самого снаряда, является угол поворота снаряда относительно оси его симметрии  $\varphi$ . При принятых обозначениях угловые скорости вращения снаряда направлены следующим образом:

- 1) собственного вращения  $\varphi'$  – по оси  $O\xi$ ;
- 2) прецессионного движения  $\nu'$  – по направлению вектора скорости поступательного движения центра инерции снаряда;
- 3) нутационного движения  $\delta'$  – по оси  $O\eta$  (рис. 4.2). Главный вектор мгновенной угловой скорости снаряда по оси его симметрии

$$\bar{\omega} = \bar{\delta}' + \bar{\nu}' + \bar{\varphi}'.$$

Проекция угловой скорости  $\omega$  на координатную ось  $O\xi$

$$\begin{aligned} a = \omega_\xi &= \omega \cos(\omega, \xi) = \nu' \cos(\nu', \xi) + \delta' \cos(\delta', \xi) + \varphi' \cos(\varphi', \xi) = \\ &= \nu' \cos \delta + \delta' \cos \frac{\pi}{2} + \varphi' \cos 0^\circ = \nu' \cos \delta + \varphi'. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подобным образом можно получить и значение проекций угловой скорости ( $\omega$ ) на оси  $O\eta$  и  $O\rho$ , которые соответственно будут равны:

$$b = \omega_\eta = \omega \cos \omega, \eta = \delta', \quad (4.1a)$$

$$c = \omega_{\xi} = \omega \cos \omega, \xi = -v' \sin \delta. \quad (4.16)$$

Кинетическая энергия вращающегося снаряда при равенстве моментов инерции  $B_{\eta} = B_{\xi} = B$  относительно осей  $O\xi$  и  $O\eta$

$$T = \frac{1}{2} [ Aa^2 + B b^2 + c^2 ], \quad (4.2)$$

где  $A$  и  $B$  – осевой и экваториальный моменты инерции снаряда.

Или, учитывая зависимости для  $a$ ,  $b$  и  $c$ ,

$$T = \frac{1}{2} [ A v' \cos \delta + \varphi'^2 + B \delta'^2 + v'^2 \sin^2 \delta ] \dots \quad (4.3)$$

Для составления уравнений, характеризующих вращение снаряда относительно осей, проходящих через центр его инерции, используем уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (4.4)$$

где  $q_i$  – обобщенные координаты, определяющие положение любого твердого тела;  $Q_i$  – обобщенные силы, определяющие элементарную работу.

Для вращающегося артиллерийского снаряда обобщенными координатами будут углы  $\delta$ ,  $v$  и  $\varphi$ , а обобщенными силами – проекции главного момента всех внешних сил на направления угловых скоростей по этим углам. Для угла  $\varphi$

$$Q_{\varphi} = M \cos(M, \varphi') = M \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} = \frac{1}{2} [ 2A(v' \cos \delta + \varphi') ] = A(v' \cos \delta + \varphi').$$

$$\text{Тогда } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi'} \right) = \frac{\partial}{\partial T} A(v' \cos \delta + \varphi') = 0,$$

откуда

$$A(v' \cos \delta + \varphi') = \text{const} \quad \text{или} \quad v' \cos \delta + \varphi' = \text{const}. \quad (4.5)$$

Из последнего выражения следует: если не учитывать потерю скорости снаряда из-за лобового сопротивления и трения воздушного потока относительно его наружной поверхности, то проекция угловой скорости  $\omega$  на ось симметрии снаряда  $O\xi$  на всей траектории остается постоянной и равной  $\omega_0$ . В этом случае уравнение Лагранжа для угла  $v$  запишется в виде

$$Qv = M \cos(M, v) = M \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial v} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial v'} = A\omega_0 \cos \delta + Bv' \sin^2 \delta;$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial v'} \right) = 0.$$

Или после интегрирования:

$$A\omega_0 \cos \delta + Bv' \sin^2 \delta = d_a = \text{const}, \quad (4.6)$$

где  $d_a$  – параметр, определяемый из последнего уравнения при известных условиях.

При  $t = 0$ ,  $\delta' = \delta'_0 = 0$ ,  $v = v_0$ ,  $d_a = A\omega_0$ .

Подставляя  $d_a$  в уравнение (4.16), получим

$$A\omega_0 \cos \delta + Bv' \sin^2 \delta = A\omega_0,$$

или

$$A\omega_0(1 - \cos \delta) = Bv' \sin^2 \delta,$$

так как  $\sin^2 \delta = 1 - \cos^2 \delta$ , то  $v' = \frac{A\omega_0}{B(1 + \cos \delta)}$ .

При малых углах можно принять  $\sin \delta = \delta$ ,  $\cos \delta = 1$ , обозначив

$$\frac{A\omega_0}{2B} = \alpha.$$

В этом случае

$$v' = \frac{A\omega_0}{2B} = \alpha,$$

$$v = v_0 + \alpha t.$$

Таким образом, прецессионное движение снаряда характеризует вращение плоскости, в которой находится главный вектор сопротивления воздуха  $\bar{R}$ , вокруг касательной к траектории с постоянной угловой скоростью

$$\alpha = \frac{A\omega_0}{2B}. \quad (4.6a)$$

Для угла нутации  $\delta$  обобщенной силой  $Q_\delta$  является опрокидывающий момент  $M$ , т.е.

$$Q_\delta = M = \frac{d^2 h}{g} 10^3 i_M \frac{\Pi_0}{\Pi_{0N}} H(y) V^2 K_M \left( \frac{V}{a} \right) \delta = B\beta \sin \delta,$$

а производные энергии вращения снаряда по углу  $\delta$  будут равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \delta} &= \frac{1}{2} \left[ 2A(v' \cos \delta + \phi')v'(-\sin \delta) + B(v'^2 2 \sin \delta \cos \delta) \right] = \\ &= -A\omega_0 v' \sin \delta + Bv'^2 \sin \delta \cos \delta, \\ \frac{\partial T}{\partial \delta'} &= \frac{1}{2} B 2\delta' = B\delta'. \end{aligned}$$

Тогда уравнение Лагранжа по углу  $\delta$  получим в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} B\delta' + A\omega_0 v' \sin \delta - Bv'^2 \sin \delta \cos \delta = B\beta \sin \delta,$$

или

$$B\delta'' + A\omega_0 v' \sin \delta - Bv'^2 \sin \delta \cos \delta = B\beta \sin \delta.$$

Так как  $2\alpha = \frac{A\omega_0}{B}$ , то последнее уравнение примет вид:

$$\delta'' + 2\alpha v' \sin \delta - v'^2 \sin \delta \cos \delta - \beta \sin \delta = 0. \quad (4.7)$$

Так как  $v' = \alpha$ , то для малых углов  $\delta$  уравнение (4.7) запишется в виде

$$\delta'' + (\alpha^2 - \beta)\delta = 0. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) является линейным однородным уравнением второго порядка с переменным коэффициентом  $\beta$ , который определяется из выражения (4.1). В связи с переменным значением  $\beta$  за счет параметров  $H(Y)$ ,  $V^2$ ,  $K_M \left( \frac{V}{a} \right)$  уравнение (4.8) в конечном виде точно не интегрируется.

Принимая для начального участка траектории  $H(Y)$ ,  $V^2 = V_0^2$  и  $K_M \left( \frac{V}{a} \right)$  постоянными, из уравнения (4.8) легко получить величину угла нутации. Уравнение (4.8) характеризует изменение угла нутации в зависимости от времени полета артиллерийского снаряда. Для того чтобы полет снаряда был гироскопически устойчив, необходимо, чтобы коэффициент при угле  $\delta$  в уравнении (4.8) был больше нуля, т.е.  $\alpha^2 - \beta > 0$ . Или  $\alpha^2 > \beta$ .

Учитывая ранее принятые обозначения, данное неравенство можно записать в виде  $v'^2 = \left( \frac{1}{2} \frac{A}{B} \omega_0 \right)^2 > \beta$ .

При  $\alpha^2 - \beta < 0$  артиллерийский снаряд будет гироскопически неустойчив. Обозначим:

$$1 - \frac{\beta}{\alpha^2} = \sigma^2. \quad (4.9)$$

Тогда уравнение (4.8) примет вид

$$\delta'' = \alpha^2 \sigma^2 \delta = 0.$$

Общим решением этого уравнения будет зависимость  $\delta = C_1 e^{i(\alpha\sigma)t} + C_2 e^{-i(\alpha\sigma)t}$ , характеристическое уравнение запишется в виде  $k^2 + \alpha^2\sigma^2 = 0$ .

При  $\sigma^2 > 0$  корни характеристического уравнения  $K_{1,2} = \pm i\alpha\sigma$ . Тогда

$$\delta = C_1 e^{i(\alpha\sigma)t} + C_2 e^{-i(\alpha\sigma)t}.$$

Произвольные постоянные можно получить из начальных условий. При  $t = 0$ ,  $\delta_0 = 0$ ,  $C_1 = -C_2$ . В этом случае

$$\delta = C_1 \left[ e^{(i\alpha\sigma)t} - e^{(-i\alpha\sigma)t} \right], \quad (4.10)$$

$$\delta' = C_1 \left[ (i\alpha\sigma)e^{(i\alpha\sigma)t} + (i\alpha\sigma)e^{(-i\alpha\sigma)t} \right]. \quad (4.11)$$

При  $t = 0$ ,  $\delta' = \delta'_0 = 2C_1 i\alpha\sigma$ , откуда

$$C_1 = \frac{\delta'_0}{2i\alpha\sigma}.$$

Так как

$$e^{(i\alpha\sigma)t} = \cos(\alpha\sigma)t + i \sin(\alpha\sigma)t,$$

$$e^{(-i\alpha\sigma)t} = \cos(\alpha\sigma)t - i \sin(\alpha\sigma)t,$$

$$e^{(i\alpha\sigma)t} - e^{(-i\alpha\sigma)t} = 2i \sin(\alpha\sigma)t,$$

то

$$\delta = \frac{\delta'_0}{\alpha\sigma} \sin(\alpha\sigma)t. \quad (4.12)$$

Если предположить, что величина  $\sigma$  будет меньше нуля, т.е.  $\sigma < 0$ , то, заменяя  $\sigma = i|\sigma|$ , получим вместо уравнения (4.10) следующее выражение:

$$\delta = -C_1 \left[ e^{\alpha(\sigma)t} - e^{-\alpha(\sigma)t} \right].$$

При  $t = 0$   $\delta' = \delta'_0$ . Тогда

$$C = \frac{\delta'_0}{2\alpha|\sigma|},$$

$$\delta = \frac{\delta'_0}{\alpha|\sigma|} \frac{e^{\alpha|\sigma|t} - e^{-\alpha|\sigma|t}}{2} = \frac{\delta'_0}{\alpha|\sigma|} \operatorname{sh}[\alpha|\sigma|]t \dots \quad (4.13)$$

Так как гиперболический синус  $\operatorname{sh}$  – функция неограниченно возрастающая, то в данном случае угол  $\delta$  может принимать значительно большее значение по сравнению с его допустимой величиной, при превышении которой артиллерийский вращающийся снаряд на траектории неустойчив.

При больших углах  $\delta$  уже становятся неверными исходные допущения, а именно  $\sin \delta \neq \delta$  и  $\cos \delta \neq 1$ . В этом случае уравнение (4.13) не может быть использовано для анализа устойчивости полета снаряда. Это уравнение только показывает, что при  $\sigma < 0$  нутационные колебания оси снаряда будут происходить уже не при нормальных периодических колебаниях относительно вектора скорости центра массы снаряда, а с увеличением времени  $t$  они будут возрастать, что в конечном итоге явится причиной неустойчивого полета вращающегося артиллерийского снаряда.

При  $\sigma > 0$ , как это следует из уравнения (4.12), изменение угла нутации  $\delta$  с увеличением времени полета снаряда  $t$  будет совершаться по синусоидальному закону с периодом  $T = \frac{2\pi}{\alpha\sigma}$ . При этом угол  $\delta$  с уменьшением первоначальной амплитуды колебаний оси симметрии снаряда  $a_0 = \frac{\delta'_0}{\alpha\sigma}$  будет принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Затухание колебаний оси снаряда будет еще более интенсивно усиливаться, если при выводе уравнения (4.12) учитывать влияние тушащего момента  $M_t$ . При значительном возрастании продолжительности полета снаряда колебание его оси симметрии будет приближаться к псевдорегулярной прецессии с оптимальным для каждого времени  $t$  и типа снаряда углом нутации  $\delta$ . Прецессионное

движение вращающегося артиллерийского снаряда определяется из следующего равенства:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{A}{B} a'_0 = v' = \frac{1}{2} \frac{A}{B} (v' \cos \delta + \varphi') ,$$

где  $a'_0$  – проекция угловой скорости снаряда в момент вылета его из канала ствола орудия на ось симметрии.

Для упрощения анализа прецессионного движения снаряда рассмотрим идеальный случай вылета его из канала ствола орудия без учета радиальных нагрузок и сил, которые в общем случае будут воздействовать на вращающийся снаряд, т.е. будем считать, что снаряд при вылете не получил боковых ударов. Тогда  $a'_0 = \varphi'_0 = \omega_0$ .

Для калиберных артиллерийских снарядов, длина которых составляет 5...5,6 клб, а длина хода нарезов орудия  $\eta$  равна 20...30 клб, от-

ношение моментов инерции  $\frac{B}{A}$ , при котором будет обеспечиваться гиростатически устойчивый полет, находится обычно в пределах 6...12. В этом случае при малых значениях угла нутации  $\delta$  скорость прецессии  $v'$  по отношению к угловой скорости вращения снаряда  $\omega = \frac{2\pi V}{\eta d}$  будет составлять, примерно  $\frac{1}{24} \dots \frac{1}{12}$ , где  $V$  – скорость поступательного движения центра инерции снаряда. Ориентированные зна-

чения угловых скоростей для некоторых пуль и снарядов изменяются в пределах, указанных в табл. 4.2.

Т а б л и ц а 4.2

Калибр снаряда, мм	7,62	37	76	122	152	20	305
$\omega_0$ , об/мин	$2 \cdot 10^5$	$48 \cdot 10^3$	$22 \cdot 10^3$	15 800	11 000	8000	4000

Окружная скорость вращения любой точки на поверхности снаряда  $W = \omega R = \omega \frac{d}{2}$  или  $W = \frac{\pi V}{\eta}$ .

За один период колебаний оси симметрии вращающегося артиллерийского снаряда  $\left( T = \frac{2\pi}{2\sigma} \right)$  плоскость нутации, в которой расположен вектор сопротивления воздуха  $\bar{R}$ , повернется на угол

$$\Delta v = v' T = \alpha T = \frac{\alpha \pi}{\sigma}.$$

В рассмотренных выше зависимостях предполагалось, что при движении артиллерийского снаряда в воздушной среде скорость его центра инерции на начальном прямолинейном участке траектории есть величина постоянная. В действительности же данная скорость с увеличением времени полета снаряда убывает.

В связи с этим будут уменьшаться также и угловое ускорение опрокидывающего момента силы сопротивления воздуха, и угловая скорость прецессии снаряда.

## 4.2. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА СНАРЯД В ВОЗДУХЕ

При рассмотрении силы сопротивления воздуха и величины ускорения предполагалось, что ось симметрии артиллерийского снаряда совпадает с касательной траектории. При этом допущении сила сопротивления воздуха направлена строго по касательной к траектории центра масс снаряда и противоположно – к скорости снаряда. В общем случае, в результате некоторой технологической асимметрии в расположении (центра) массы снаряда по его объему, несовпадения равнодействующей давления пороховых газов с осью снаряда, наличия зазора между верхним центрирующим утолщением корпуса снаряда (ВЦУ) и полями нарезов канала ствола, мгновенной нагрузки со стороны полей нарезов канала ствола на поверхность ВЦУ при вылете снаряда за дульный срез ствола орудия ось снаряда не совпадает с касательной к траектории и составляет с ней некоторый угол  $\delta$  (рис. 4.2). При этом сила сопротивления воздуха  $R$  с осью снаряда будет составлять угол  $\gamma$ .

Для артиллерийского вращающегося снаряда точка обобщенной силы сопротивления воздуха, т.е. центр давления, находится впереди центра масс снаряда. Наоборот, у невращающихся артиллерийских снарядов точка приложения данной силы по отношению к центру масс

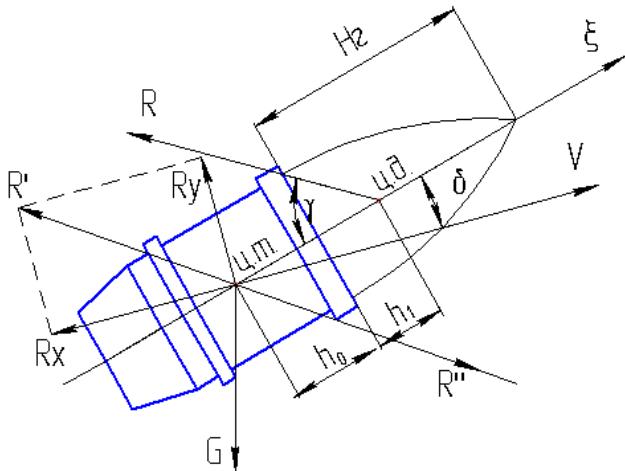


Рис. 4.2. Схема сил, действующих на снаряд в воздухе

снаряда должна быть смешена ближе к оперению. Для того чтобы проанализировать силы, действующие на вращающийся снаряд при наличии угла  $\delta$  между осью симметрии и вектором скорости, приложим к центру массы снаряда пару сил  $\bar{R}'$  и  $\bar{R}''$ , равных по своей величине равнодействующей силе сопротивления воздуха  $\bar{R}$ . Дополнительно силу  $\bar{R}'$  разложим на составляющие по осям скоростной системы координат и обозначим через  $\bar{R}_x$  и  $\bar{R}_y$ . Силу  $\bar{R}_x$  направим по касательной к траектории, а силу  $\bar{R}_y$  – по нормали к вектору скорости центра массы снаряда. Сила  $R_x$  называется силой лобового сопротивления, а сила  $R_y$  – подъемной силой. Во многих курсах внешней баллистики вращающихся снарядов эти силы обозначаются через  $\bar{R}_T$  и  $\bar{R}_N$  соответственно.  $\bar{R}''$  и  $\bar{R}$  образуют пару сил или опрокидывающий момент, который стремится увеличить угол  $\delta$ . Для того чтобы под действием этого момента артиллерийский снаряд на траектории не кувыркался, ему придают соответствующее быстрое вращательное движение. При достаточно малом угле  $\delta$  зависимости лобового сопротивления воздуха

$R_x$ , подъемной силы  $R_y$  и опрокидывающего момента  $M$  записываются в следующем виде:

$$R_x = \frac{d^2}{g} 10^3 i_T \frac{\Pi_0}{\Pi_{0N}} H(y) V^2 K_T \left( \frac{V}{a} \right), \quad (4.14)$$

$$R_y = \frac{dl}{g} 10^3 i_N \frac{\Pi_0}{\Pi_{0N}} H(y) V^2 K_N \left( \frac{V}{a} \right) \delta, \quad (4.15)$$

$$M = \frac{d^2 h}{g} 10^3 i_M \frac{\Pi_0}{\Pi_{0N}} H(y) V^2 K_M \left( \frac{V}{a} \right) \delta, \quad (4.16)$$

где  $l$  – длина снаряда;

$K_T \left( \frac{V}{a} \right)$ ,  $K_N \left( \frac{V}{a} \right)$ ,  $K_M \left( \frac{V}{a} \right)$  – функции сопротивления воздуха, определяемые экспериментально в зависимости от типа снаряда и скорости его полета;

$g$  – ускорение;

$\Pi_0$  – весовая плотность воздуха на уровне моря;

$\Pi_{0N}$  – весовая плотность воздуха при нормальных артиллерийских условиях;

$H(Y)$  – функция, характеризующая изменение плотности воздуха с высотой траектории полета снаряда;

$h$  – некоторая условная величина, равная расстоянию от центра тяжести снаряда до точки приложения силы сопротивления воздуха, т.е.  $h = h_0 + h_1$ ;  $h_0$  – расстояние от центра тяжести снаряда до основания его головной части в клб;

$h_1$  – расстояние от основания головной части снаряда до точки приложения силы сопротивления воздуха.

Значение  $h_1$  в первом приближении можно вычислить по экспериментальным формулам:

а) морского полигона  $h_1 = 0,5H_r - 0,16d$ ;

б) инженера Бурцио  $h_1 = 0,5H_r$ ,

где  $H_r$  – высота головной части снаряда, а  $d$  – его калибр. Расчеты показывают, что  $h_1$ , вычисленные по данным формулам, незначительно отличаются друг от друга (табл. 4.1).

Т а б л и ц а 4.1

Формула	Высота головной части, клб			
	2,0	2,5	3,0	3,5
Полигона	0,98	1,26	1,55	1,84
Бурцио	1,0	1,25	1,5	1,75

Кроме основных сил  $R_x$  и  $R_y$  и момента  $M$ , определяющих поступательное и колебательное движение артиллерийского снаряда, полет снаряда в воздухе зависит также от некоторых дополнительных (второстепенных) сил и моментов этих сил.

**Тушащий момент**, возникающий в результате колебательного движения оси симметрии снаряда относительно экваториальной оси, проходящей через центр его тяжести,

$$D = -\frac{d^3 l}{g} 10^3 i_D \frac{\Pi_0}{\Pi_{0N}} H(y) V K_D \left( \frac{V}{a} \right) \dot{\delta}, \quad (4.17)$$

где  $\dot{\delta}$  – угловая скорость колебаний оси снаряда.

**Сила Магнуса–Жуковского** и момент данной силы, возникающий в результате разности давления воздушной среды на боковую поверхность снаряда при его вращении в воздушном потоке, при наличии угла  $\delta$  между осью симметрии снаряда и вектором скорости его центра тяжести:

$$R_M = \frac{d^2 l}{g} 10^3 i \frac{\Pi_0}{\Pi_{0N}} H(y) V K_{MA} \left( \frac{V}{a} \right) \omega \delta, \quad (4.18)$$

$$M_M = \frac{d^3 l}{g} 10^3 i \frac{\Pi_0}{\Pi_{0N}} H(y) V K_{MA} \left( \frac{V}{a} \right) \omega \delta, \quad (4.19)$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения снаряда относительно оси симметрии.

**Сила трения и момент данной силы**, стремящиеся уменьшить угловую скорость вращения снаряда вокруг оси его симметрии,

$$T = -\frac{d^2 l}{g} 10^3 i_T \frac{\Pi_0}{\Pi_{0N}} H(y) V K_{Tl} \left( \frac{V}{a} \right) \dot{\phi}, \quad (4.20)$$

$$M_T = -\frac{d^3 l}{g} 10^3 i_T \frac{\Pi_0}{\Pi_{0N}} H(y) V K_{T_1} \left( \frac{V}{a} \right) \dot{\omega}. \quad (4.21)$$

В связи со сложностью определения аэродинамических коэффициентов  $K_{MA}$  и  $K_{T_1}$ , а также с малым значением силы  $R_M$  и силы трения  $T$  и их моментов  $M_M$  и  $M_T$  значениями этих сил и моментов при решении внешнебаллистических задач обычно пренебрегают. Для выяснения физической сущности явлений, происходящих при перемещении артиллерийского снаряда в воздушной среде, первоначально рассмотрим наиболее простой случай, а именно примем равномерное движение центра массы снаряда без учета кривизны траектории.

Такое допущение может быть принято для начального участка траектории полета снаряда. Кроме того, предположим, что на артиллерийский вращающийся снаряд действуют только силы  $R_x$  и  $R_y$ , а также опрокидывающий момент  $M$ , который в соответствии с допущением Н.В. Майевского о пропорциональности его синуса угла отклонения оси снаряда относительно вектора скорости можно записать в виде

$$M = B\beta \sin \delta, \quad (4.21a)$$

где  $B$  – экваториальный момент инерции снаряда;  $\beta$  – угловое ускорение опрокидывающего момента при единичном угле  $\delta$ .

$$\beta = \frac{d^2 h}{B g} 10^3 i_M \frac{\Pi_0}{\Pi_{0N}} H(y) V^2 K_M \left( \frac{V}{a} \right). \quad (4.22)$$

На начальном участке траектории и для малых углов  $\delta$  можно принять:

$$\sin \delta \approx \delta; \quad H(y) = 1;$$

$$\beta = \frac{d^2 h}{B g} 10^3 i_M V_0^2 \frac{\Pi_0}{\Pi_{0N}} K_M \left( \frac{V_0}{a} \right).$$

Для нормальных артиллерийских условий  $\Pi_0 = \Pi_{0N}$ ,  $a_0 = a_{0N}$ . Тогда

$$\beta = \frac{d^2 h}{B g} 10^3 i_M V_0^2 K_M \left( \frac{V_0}{a} \right). \quad (4.23)$$

Из зависимостей (4.22) и (4.23) следует, что при принятых допущениях  $\beta$  является величиной постоянной, а вращательное движение артиллерийского снаряда можно рассматривать как вращательное движение тяжелого волчка.

### 4.3. УСЛОВИЯ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛЕТА АРТИЛЛЕРИЙСКОГО СНАРЯДА

#### 4.3.1. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛЕТА СНАРЯДА ПО ФОРМУЛЕ ПРОФЕССОРА И.А. ЗАБУДСКОГО [2, 3, 4]

Условие устойчивости снаряда на начальном (прямолинейном) участке траектории по методу И.А. Забудского записывается в виде следующего неравенства:

$$\alpha^2 > \beta \text{ или } \alpha^2 - \beta^2 > 0, \quad (4.24)$$

где  $\alpha = \frac{1}{2} \frac{A}{B} \omega_0$  – скорость прецессионного движения снаряда;

$\omega_0$  – угловая скорость вращения снаряда в момент вылета его за дульный срез ствола орудия:

$$\omega_0 = \frac{2\pi V_0}{\eta_{ch} d} = \frac{\pi V_0}{\eta_{ch} R};$$

$V_0$  – начальная скорость снаряда;  $\eta_{ch}$  – длина хода нарезов ствола орудия, обеспечивающая устойчивый полет снаряда;  $\beta$  – угловое ускорение опрокидывающего момента при единичном угле нутации ( $\delta$ ), которое профессор И.А. Забудский принял

равным отношению  $\frac{M}{B}$ ;

$B$  – экваториальный момент инерции снаряда;

$M = R_{Thk}R$  – опрокидывающий момент силы сопротивления воздуха;

$R_T$  – сила сопротивления воздуха;

$h_k = \beta_k \frac{h}{R}$  – безразмерный коэффициент, характеризующий положение центра сопротивления воздуха относительно центра тяжести снаряда;

$h = h_0 + h_1$  – расстояние между центром тяжести снаряда и центром сопротивления воздуха;

$h_0$  – удаление центра тяжести снаряда относительно плоскости перехода цилиндрической части корпуса в головную часть, определяемое по чертежу;

$h_1$  – расстояние от плоскости основания головной части снаряда до центра сопротивления воздуха.

Численное значение опытного коэффициента согласования  $\beta_k$  и параметра  $h_1$ , предложенные И.А. Забудским, зависимости от высоты головной части снаряда ( $H_g$ ) приведены в табл. 4.3.

Т а б л и ц а 4.3

Высота головной части $H_g$ , клб	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$h_1$ клб	0,38	0,7	0,99	1,26	1,54	1,84	2,1
$\beta_k$	3,16	6,8	12,2	19	27,2	36,9	49,2

Подставляя значения  $\alpha$  и  $\beta$  в неравенство (4.24), получим

$$A^2 \omega_0^2 > 4R_T h_k RB, \quad (4.25)$$

или  $\frac{A^2 \pi^a V_0^2}{R^2 \eta_{ch}^2} > 4R_T h_k RB$ , откуда

$$\eta_{ch}^2 < \frac{1}{4} \frac{\pi^2 A^2 V_0^2}{R^3 h_k R_T B}. \quad (4.26)$$

Для того чтобы в неравенстве (4.26) исключить  $V_0$  и несколько его упростить, профессор Н.А. Забудский ввел следующие относительные величины:

а) силы сопротивления воздуха  $\left( \frac{\text{кг} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^4} \right)$

$$R_{\text{от}} = \frac{R_T}{\pi R^2 V_0^2};$$

б) относительного веса снаряда  $\left( \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right)$

$$C'_q = \frac{G}{R^3};$$

в) коэффициента инерции снаряда

$$\mu = \frac{Ag}{GR^2}.$$

В этом случае после подстановки и преобразований неравенство (4.26) запишется в виде

$$\eta_{\text{чн}} < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi A C'_q \mu}{g B h_k R_{\text{от}}}}. \quad (4.27)$$

Для более надежного обеспечения гироскопической устойчивости вновь спроектированного снаряда на начальном (прямолинейном) участке траектории необходимо, чтобы расчетная длина хода снарядов  $\eta_{\text{чн}}$  была на два-три калибра больше действительной длины хода нарезов ствола орудия для стрельбы, из которого разрабатывается новый артиллерийский снаряд. Данное завышение иногда называют запасом гироскопической устойчивости снаряда на полет. Зависимость (4.27), предложенная Забудским для оценки гироскопической устойчивости вновь спроектированного снаряда на полете, с теоретической точки зрения не вызывает никаких сомнений и возражений. Однако формула Забудского справедлива лишь для снарядов, длина которых не превышает 3,5 км, а начальные скорости их не выходят за пределы дозвуковых скоростей. Это ограничение вызвано тем, что опрокидывающий момент силы сопротивления воздуха ( $M$ ) не является подобной функци-

цией силы сопротивления  $R_T$ , как это принял Забудский при выводе формулы (4.25). Функция  $K_T\left(\frac{V}{a}\right)$  будет увеличиваться более интенсивно, чем функция  $K_M\left(\frac{V}{a}\right)$ . Данное различие между функциями  $K_M\left(\frac{V}{a}\right)$  и  $K_T\left(\frac{V}{a}\right)$  Забудскому не было известно, поскольку точка приложения силы сопротивления воздуха, а следовательно, и величина  $h_1$  зависят не только от высоты головной части снаряда, как это принимал Забудский, но и от скорости его полета.

Из опытов следует, что с увеличением скорости снаряда величина, характеризующая положение центра сопротивления воздуха относительно основания головной части снаряда, будет также возрастать.

#### 4.3.2. ОЦЕНКА ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛЕТА АРТИЛЛЕРИЙСКОГО СНАРЯДА ПО МЕТОДУ ПРОФЕССОРА С.П. ПЕТРОВИЧА

В связи с изменениями формы артиллерийского снаряда (с более удлиненной головной частью для стрельбы со сверхзвуковыми начальными скоростями) и условий бросания расчет гироскопической устойчивости их на полете по формуле И.А. Забудского по сравнению с опытными данными давал уже весьма значительные ошибки.

Поэтому для оценки гироскопической устойчивости новых типов снарядов профессор С.П. Петрович предложил две более точные инженерные формулы, которые являются дальнейшим уточнением критерия снарядов (4.27), рекомендованного И.А. Забудским. Данная формула записывается в виде

$$\eta_p = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{A^2}{B} \frac{\pi^2 V_0^2}{R^3 m h R_{ot}}} , \quad (4.28)$$

где  $\eta_p$  – расчетная длина хода нарезов ствола орудия, обеспечивающая устойчивый полет снарядов вновь разработанной конструкции;

$m = \frac{R_T^1}{R_T}$  – численный коэффициент, равный отношению составляющий силы лобового сопротивления воздуха к полной ее величине.

Численное значение коэффициента  $m$  мало отличается от единицы. Вторая формула С. Г. Петровича, рекомендованная им в качестве критерия устойчивости артиллерийских снарядов в полете, имеет вид

$$\operatorname{tg} \alpha = 4 \sqrt{\frac{BR^3 m h R_T}{3A^2 V_0}}, \quad (4.29)$$

где  $\operatorname{tg} \alpha$  – тангенс угла наклона нарезов в дульной части канала ствола орудия.

#### 4.3.3. ФОРМУЛА ДЛЯ ОЦЕНКИ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СНАРЯДОВ НА ПОЛЕТЕ, ПРЕДЛОЖЕННАЯ ДЕ СПАРРЭ

Французский математик де Спасси в своих трудах по исследованию вращательного движения артиллерийских снарядов в воздушной среде рекомендует расчетную формулу

$$\operatorname{tg} \alpha = 4 \sqrt{\frac{BR^3 h m R_T}{3A^2 V_0^2}}, \quad (4.29a)$$

где  $m$  – коэффициент, определяемый из опыта.

Легко заметить, что эта формула практически ничем не отличается от зависимости (4.29). Если принять в формуле (4.29a) коэффициент  $m = 0,75$ , то формулы (4.29) и (4.29a) идентичны.

#### 4.3.4. ФОРМУЛА ВАЛЬЕ

Французский артиллерист Валье, анализируя вращательное движение артиллерийского снаряда в воздухе, предложил в качестве критерия устойчивости полета снаряда формулу следующего вида:

$$\operatorname{ctg} \alpha = 0,27 \sqrt{\frac{A^2 \pi}{R^5 B R_{\text{от}} h}}. \quad (4.30)$$

Можно показать, что данная формула приводится к формуле И.А. Забудского (4.27). Так как  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pi}{\eta}$ , то  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\eta}{\pi}$ , а  $\eta = \pi \operatorname{ctg} \alpha$ .

Подставляя значение  $\operatorname{ctg} \alpha$  в формулу (4.30), получим

$$\eta = 0,27\pi \sqrt{\frac{A^2\pi}{R^5BR_{\text{от}}h}} . \quad (4.31)$$

В последней зависимости, как и ранее, заменим осевой момент инерции  $A$  и полукалибр снаряда  $R^3$  через относительные его характеристики, т.е.:

$$A = \mu \frac{GR^2}{g}; \quad R^3 = \frac{G}{C'q} .$$

В этом случае формула (4.31) примет вид

$$\eta = \eta_{\text{чн}} = 0,27\pi \sqrt{\frac{A\mu\pi C'_q}{gBR_{\text{от}}h}} . \quad (4.32)$$

Формула (4.32) отличается от зависимости (4.27), предложенной профессором И.А. Забудским, величиной коэффициента перед квадратным корнем. В формуле (4.32) он равен 0,85, а в зависимости (4.27) – 0,5.

#### 4.3.5. ФОРМУЛА АКАДЕМИКА А.И. КРЫЛОВА

Крылов А.И., подробно анализируя формулу И.А. Забудского, рекомендует для оценки гирокопической устойчивости полета артиллерийского снаряда следующие условия:

$$k^2 l_0^2 - 2l > 0 , \quad (4.33)$$

где

$$k = \frac{A}{B}; \quad l = \frac{4hRR_T}{B}; \quad l_0 = \omega_0 .$$

Если в неравенство (4.33) подставить значение  $k$  и  $l$ , то получим  $A^2\omega_0^2 > 4hRR_{\text{от}}B$ .

Сравнивая последнее неравенство с условием (4.27), которое рекомендовано И.А. Забудским, легко убедиться в их идентичности. Дополнительно исследуя полет артиллерийского снаряда на начальном участке траектории, А.И. Крылов рекомендует для практических расчетов следующие зависимости:

$$\begin{aligned} n^2 &= k^2 \omega_0^2 - 2l, \\ \delta^2 &= \delta_0^2 + \alpha_1^2 (1 - \cos nt), \end{aligned} \quad (4.34)$$

где  $\alpha_1^2 = [l + v'_0^2 - k\omega_0 v'_0] \frac{\delta_0^2}{n^2}$ ;  $\delta$  – угол нутации оси симметрии снаряда;  $v'$  – угол прецессии.

Исследуем данные зависимости и запишем их в несколько другой форме. Из (4.34) следует, что  $\delta^2$  может уменьшаться в пределах:  $\delta_{\min}^2 = \delta_0^2$ ;  $\delta_{\max}^2 = \delta_0^2 + 2\alpha_1^2$ .

Вполне очевидно, что при положительном значении  $v'_0$ , не превышающем  $k\omega_0$ ,  $\alpha_1$  принимает свое наибольшее значение, равное  $\frac{l\delta_0^2}{n^2}$ , при  $v'_0 = 0$ .

Можно подобрать параметр  $n^2$  (или  $A^2\omega_0^2$ ) такой величины, чтобы изменение угла нутации снаряда  $\delta^2$  при максимальном значении  $\alpha_1^2$  имело довольно малые пределы. Например, при ограничении угла  $\delta$  в пределах от  $\delta_0$  до  $2\delta_0$

$$4\delta_0^2 = \delta_0^2 + 2\alpha_1^2, \quad (4.35)$$

откуда  $\alpha_1^2 = \frac{3}{2}\delta_0^2$ .

С другой стороны,  $\alpha_1^2 = \frac{l}{n^2}\delta_0^2$ .

Тогда  $l = \frac{3}{2}n^2 = \frac{3}{2}k^2\omega_0^2 - 2l$ , или  $3k^2\omega_0^2 = 8l$ .

Если в зависимости (4.34) подставить вместо  $k^2\omega_0^2$ ,  $k$  и  $l$  их значения, то получим  $3A^2\omega_0^2 = 16hRR_T B$ , откуда  $A\omega_0 = 2,31\sqrt{hRR_T B}$ .

Анализируя результаты английских опытных стрельб, А.И. Крылов установил, что полет артиллерийского снаряда в воздухе будет правильным и гироскопически устойчивым только тогда, когда угол нутации снаряда  $\delta$  будет изменяться в пределах от  $\delta_0$  до  $4\delta_0$ . При данном условии

$$\alpha_1^2 = \frac{15}{2}; \quad l = \frac{15}{2} k^2\omega_0^2 - 2l ,$$

откуда

$$k^2\omega_0^2 = \frac{32}{15}l \quad \text{или} \quad A\omega_0 = 2,07\sqrt{h^2RR_T B} . \quad (4.35a)$$

Сравнивая условия (4.35a) с условием гироскопической устойчивости снарядов на траектории (4.27), рекомендованным И.А. Забудским, легко заметить, что оба условия полностью совпадают. Заслуга академика А.И. Крылова состоит в том, что он на основе анализа теории вращательного движения снаряда в воздушной среде в дополнение к условиям (4.34) указал пределы изменения угла нутации ( $\delta$ ) для обеспечения хорошей кучности боя артиллерийских снарядов.

#### 4.3.6. ФОРМУЛА ШАРБЕНЬЕ

Французский ученый Шарбене на основе анализа опытных стрельб для оценки гироскопической устойчивости вновь проектируемого полета снаряда предложил следующее равенство:

$$\frac{A_1 \operatorname{tg} \alpha_1}{m_1 d_1 Z_1 i_1} = \frac{A_0 \operatorname{tg} \alpha_0}{m_0 d_0 Z_0 i_0} , \quad (4.36)$$

где  $A_0$  – осевой момент инерции штатного снаряда;

$\alpha_0$  – угол наклона нарезов канала ствола орудия;

$m_0, d_0$  – масса и калибр штатного снаряда;

$Z_0, i_0$  – длина и коэффициент формы штатного снаряда;

$A_1, \alpha_1, m_1, d_1, Z_1, i_1$  – для вновь проектируемого снаряда.

Так как  $\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{\pi}{\eta_i}$ , то

$$\eta_1 = \frac{A_1 m_0 d_0 Z_0 i_0}{A_0 m_1 d_1 Z_1 i_1} \eta_0 = \frac{A_1 G_0 d_0 Z_0 i_0}{A_0 G_1 d_1 Z_1 i_1} \eta_0, \quad (4.37)$$

где  $G_0, G_1$  – вес снаряда.

Недостатком соотношения (4.37) является то, что оно справедливо лишь для двух снарядов с подобными траекториями их полета.

#### 4.3.7. КРИТЕРИЙ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛЕТА АРТИЛЛЕРИЙСКОГО СНАРЯДА, ПРЕДЛОЖЕННЫЙ ПРОФЕССОРОМ Б.Н. ОКУНЕВЫМ

Ранее нами было показано, что при  $\sigma > 0$  артиллерийский снаряд будет обладать гироскопической устойчивостью, а угол нутации  $\delta$  после вылета снаряда за дульный срез ствола орудия с возрастанием времени  $t$  будет изменяться по синусоидальному закону. Причем с увеличением коэффициента  $\sigma$  будет соответственно улучшаться и гироскопическая устойчивость снаряда, т.е. способность его сопротивляться действию внешних сил – выдерживать все более и более сильные удары без нарушения направленности полета. С уменьшением коэффициента  $\sigma$  способность вращающегося артиллерийского снаряда сопротивлению этих сил будет снижаться. Таким образом, коэффициент  $\sigma$  для гироскопически устойчивого снаряда должен находиться в пределах:  $0 \leq \sigma \leq 1$ . Согласно принятому ранее обозначению

$$\sigma^2 = 1 - \frac{\beta}{\alpha^2} \text{ или } \sigma = \sqrt{1 - \frac{\beta}{\alpha^2}}. \quad (4.38)$$

Заменим в последнем выражении  $\alpha$  и  $\beta$  их значениями, т.е.  
 $\alpha = \frac{1}{2} \frac{A}{B} \omega_0$ , а

$$\beta = \frac{d^2 h}{B g} 10^3 i_M \frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} H(y) V^2 K_M \left( \frac{V}{a} \right),$$

где  $\omega_0 = \frac{2\pi V_0}{\eta d}$ .

Кроме этого, осевой момент инерции снаряда  $A$  выразим через относительный вес  $C_q$  и коэффициент инерции  $\mu$ .

$$\text{Так как } \mu = \frac{4Ag}{Gd^2}, \text{ то } A = \frac{\mu Gd^2}{4g}.$$

Учитывая, что вес снаряда  $G = C_q d^3 \cdot 10^3$  кг,

$$A = \frac{\mu C_q \cdot d^5 \cdot 10^3}{4g},$$

где  $C_q$  имеет размерность [кг/дм<sup>3</sup>].

Тогда зависимость (4.38) после преобразований запишется в виде

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{C_q \mu} \frac{B}{A} \left( \frac{h}{d} \right) i_M \frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} H(y) \left( \frac{V}{V_0} \right)^2 \left[ \frac{4}{\pi^2} K_M \left( \frac{V}{a} \right) \right]}. \quad (4.39)$$

Для начального участка траектории, после вылета снаряда за дульный срез орудия, можно принять:  $V = V_0$ ;  $H(y) = 1$ . Для таких допущений коэффициент  $\sigma$ , характеризующий гироскопическую устойчивость полета снаряда, будет максимальным:

$$\sigma_0 = \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{C_q \mu} \frac{B}{A} \left( \frac{h}{d} \right) i_M \frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} \left[ \frac{4}{\pi^2} K_M \left( \frac{V_0}{a} \right) \right]}. \quad (4.40)$$

При проектировании нового образца снаряда к существующему орудию величина коэффициента формы  $i_M$  (или  $i_M = AC_x$ ), как правило, конструктору бывает неизвестна. В этом случае целесообразно применять  $i_M$  равным единице, что несколько увеличит запас гироскопической устойчивости снаряда на траектории, при установлении минимально допустимого значения коэффициента  $\sigma_0 = \sigma_{\text{доп}}$ . Точно так же

примем отношение  $\frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} = 1$ . При данных допущениях будет возрастать коэффициент устойчивости снаряда  $\sigma_{\text{доп}}$ .

В формуле (4.40) примем  $\sigma = \sigma_{\text{доп}}$ , а  $\eta = \eta_{\text{доп}}$ . Тогда

$$\eta_{\text{доп}} = \sqrt{1 - \sigma_{\text{доп}}} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C_q \mu}{\left(\frac{h}{d}\right) \frac{B}{A} K_M \left(\frac{V}{a}\right)}}, \quad (4.41)$$

где  $\eta_{\text{доп}}$  – максимально допустимая длина хода нарезов ствола орудия, обеспечивающая гироскопически устойчивый полет вновь проектируемого снаряда на начальном участке траектории. Отношение  $\left(\frac{h}{d}\right)$  в

формуле (4.41) обозначает расстояние между центром тяжести снаряда и точкой приложения силы сопротивления воздуха, выраженное в калибрах. Это отношение приближенно можно определить:

а) по формуле морского полигона

$$\frac{h}{d} = \frac{h_0}{d} + 0,57 \frac{H_r}{d} - 0,16; \quad (4.42)$$

б) по формуле инженера Бурцио

$$\frac{h}{d} = \frac{h_0}{d} + 0,5 \frac{H_r}{d},$$

где  $\frac{h_0}{d}$  – расстояние от центра тяжести до плоскости перехода головной части снаряда в цилиндрическую в калибрах;  $H_r$  – высота головной части снаряда.

Обозначим

$$\sqrt{1 - \sigma_{\text{доп}}^2} = K. \quad (4.43)$$

Тогда

$$\eta_{\text{доп}} = K \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C_q \mu}{\frac{B}{A} \left(\frac{h}{d}\right) K_M \left(\frac{V}{a}\right)}}. \quad (4.44)$$

Для большей части артиллерийских снарядов, кучность боя которых составляет свыше одной двухсотой,  $\sigma_0 = \sigma_{\text{доп}} \geq 0,6$ . Поэтому в настоящее время при проектировании новых образцов снарядов наи-

меньшее значение  $\sigma_{\text{доп}}$  обычно принимают также равным 0,6. Тогда, принимая  $K = 0,8$ , получим

$$\eta_{\text{доп}} = 0,8 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C_q \mu}{\frac{B h}{A d} K_M \left( \frac{V_0}{a} \right)}}. \quad (4.45)$$

При этом необходимо учитывать, что принимать  $\sigma_{\text{доп}} = 0,6$  можно только в крайнем случае, т.е. тогда, когда у конструктора, разрабатывающего новый вариант артиллерийского снаряда к существующему орудию, отсутствуют другие экспериментальные данные для обоснования значений  $\sigma_{\text{доп}}$  и коэффициента формы  $i_M$  для тех снарядов, которые по конструкции и типу близки ко вновь проектируемому образцу.

При выводе формулы  $\eta_{\text{доп}}$  не учитывались условия полета снаряда в период последействия, когда возможно радиальное асимметричное воздействие пороховых газов на боковую поверхность снаряда, особенно при малых значениях начальной скорости.

При этих условиях запас гироскопической устойчивости вновь проектируемого снаряда конструктор должен несколько увеличить, т.е. принять коэффициент  $K = 0,95$ . В этом случае  $\sigma_{\text{доп}} = 0,3$ , а

$$\eta_{\text{доп}} = 0,95 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{C_q \mu}{\left( \frac{B}{A} \right) \left( \frac{h}{d} \right) i_M K_M \left( \frac{V_0}{a} \right)}}. \quad (4.46)$$

При вычислении  $\eta_{\text{доп}}$  (условной длины хода нарезов орудия) или коэффициента  $\sigma_{\text{доп}}$ , обеспечивающих гироскопически устойчивый полет вновь проектируемого артиллерийского снаряда, величину функции сопротивления воздуха  $K_M \left( \frac{V}{a} \right)$  можно принять из табл. 4.4.

Данная таблица составлена профессором Д.А. Вентцелем на основе опытных стрельб эталонными снарядами, длина которых не превышает 4,5 клб. С увеличением длины снаряда ( $Z$ ) более 4,5 клб функция

$K_M \left( \frac{V}{a} \right)$  для каждого значения скорости полета снаряда ( $V$ ) будет возрастать.

Т а б л и ц а 4.4

$V, \text{ м/с}$	$K_M \left( \frac{V}{a} \right) \cdot 10^{-3}$	$V, \text{ м/с}$	$K_M \left( \frac{V}{a} \right) \cdot 10^{-3}$	$V, \text{ м/с}$	$K_M \left( \frac{V}{a} \right) 10^{-3}$
200	0,97	450	1,39	850	1,31
250	1,0	500	1,38	900	1,31
275	1,05	550	1,37	950	1,31
300	1,13	600	1,35	1000	1,30
325	1,24	650	1,34	1050	1,30
350	1,32	700	1,33	1100	1,30
375	1,36	750	1,33	1150	1,29
400	1,39	800	1,32	1200	1,29

В этом случае при определении  $\eta_{\text{доп}}$  или  $\sigma$  вместо величины  $K_M \left( \frac{V}{a} \right)$  необходимо принять новое значение данной функции  $K'_M \left( \frac{V}{a} \right)$ , которое приближенно может быть вычислено из следующего соотношения:

$$K'_M \left( \frac{V}{a} \right) = K_M \left( \frac{V}{a} \right) \sqrt{\frac{Z}{4,5}}, \quad (4.47)$$

где  $K_M \left( \frac{V}{a} \right)$  определяется по табл. 4.4;  $Z$  – длина снаряда, клб.

Коэффициент гирокопической устойчивости артиллерийского снаряда для участка траектории, соответствующего вершине с координатами  $x_S, y_S$ , будет равен

$$\sigma_S = \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{C_q \mu} \frac{B}{A} \left( \frac{h}{d} \right) i_M \frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} H(y_S) \left( \frac{V_S}{V_0} \right)^2 \left[ \frac{4}{\pi^2} K'_M \left( \frac{V_S}{a} \right) \right]}, \quad (4.48)$$

где  $y_S$  – ординаты вершины траектории;

$V_S$  – скорость снаряда в вершине траектории;

$K'_M \left( \frac{V_S}{a} \right)$  – функция сопротивления воздуха, выбираемая по таблице с учетом поправки на длину снаряда;  
 $\eta$  – длина хода нарезов орудия, для стрельбы из которого проектируется новый вариант снаряда.

Рассмотрим, какие факторы влияют на гироскопическую устойчивость полета артиллерийского снаряда. Из формулы (4.39) и (4.48) для  $\sigma_0$  и  $\sigma_S$  следует, что гироскопическая устойчивость снаряда увеличивается:

1) с увеличением относительного веса  $C_q$  и коэффициента инерции снаряда  $\mu$ ;

2) с уменьшением длины хода нарезов  $\eta$ , т.е. с увеличением крутизны нарезки  $\operatorname{tg} \alpha$ ;

3) с уменьшением отношения экваториального момента инерции снаряда осевому  $\left( \frac{B}{A} \right)$ ;

4) с уменьшением  $\left( \frac{h}{d} \right)$  – расстояния между центром инерции снаряда и центром сопротивления воздуха, выраженного в калибрах;

5) с увеличением коэффициента формы артиллерийского снаряда  $i_m$ ;

6) с уменьшением функции плотности воздуха  $H(y)$  или с увеличением ординаты траектории  $y$ ;

7) с уменьшением плотности воздуха  $\Pi_0$  в точке вылета снаряда из ствола орудия;

8) с уменьшением скорости снаряда  $V$  в рассматриваемой точке траектории к начальной скорости  $V_0$ ;

9) с уменьшением функции  $K_M \left( \frac{V}{a} \right)$ .

Из табл. 4.4 следует, что эта функция меняется медленно, особенно при больших скоростях полета снаряда. Из зависимостей (4.39) и (4.48) следует, что минимальный коэффициент гироскопической устойчивости  $\sigma$  будет соответствовать начальному участку траектории, на кото-

ром скорость снаряда  $V$  и функция  $H(y)$  имеют наибольшие значения, а максимальный – вершине траектории.

Поэтому при анализе вращательного движения снаряда в воздушной среде в первую очередь необходимо обращать внимание на выполнение условий устойчивости на начальном участке траектории, т.е. в момент вылета снаряда из канала ствола орудия.

Из формулы (4.39) видно, что для устойчивых снарядов коэффициент  $\sigma_0$  может меняться в пределах от 0 до 1. При  $\sigma_0 = 0$  снаряд находится на нижнем пределе устойчивости. При  $\sigma = 1$  снаряд обладает усиленной гироскопической устойчивостью. При этом условии ось симметрии снаряда на всей траектории будет оставаться параллельной своему первоначальному положению (рис. 4.4).

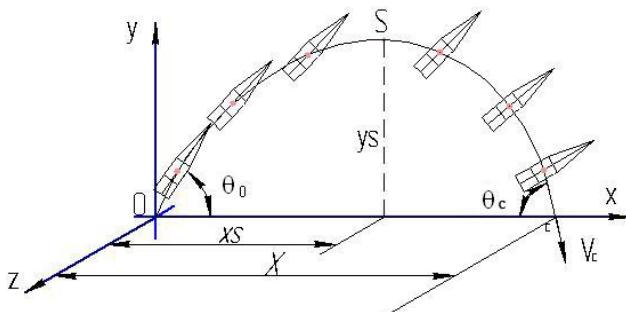


Рис. 4.4. Полет гироскопически перестабилизированного снаряда (при  $\sigma = 1$ )

При  $\sigma = 1$  отношение  $\frac{\beta}{\alpha^2} \rightarrow 0$ . В качестве примера, когда  $\sigma = 1$ , можно рассматривать полет артиллерийского снаряда в безвоздушном пространстве ( $\Pi_0 = 0$ ). Коэффициент гироскопической устойчивости  $\sigma$  будет равен единице и в том случае, когда центр инерции снаряда и центр сопротивления воздуха будут совпадать, т.е. при  $\frac{h}{d} = 0$ .

Из расчетных зависимостей (4.39) и (4.48) следует, что излишняя гироскопическая устойчивость снарядов может уменьшить дальность и кучность их боя и, кроме того, при неправильном падении снарядов может явиться одной из причин, вызывающих отказы в срабатывании элементов детонационной и огневой цели взрывателей или трубок [4].

#### 4.3.8. ФОРМУЛА ПРОФЕССОРА Д.А. ВЕНТЦЕЛЯ

Он предложил в качестве критерия гироскопической устойчивости артиллерийского снаряда величину

$$\frac{\alpha^2}{\beta} \geq 1. \quad (4.49)$$

В этом случае уравнение  $\delta'' + (\alpha^2 - \beta)\delta = 0$ , характеризующее изменение угла нутации  $\delta$  в зависимости от времени полета артиллерийского снаряда, запишется в виде

$$\delta'' + \alpha^2 \sigma_1 \delta = 0, \quad (4.50)$$

где

$$\delta = \frac{\delta'_0}{\alpha \sqrt{\sigma_1}} \sin \alpha \sqrt{\sigma_1} t. \quad (4.51)$$

Если в выражение (4.49) вместо углового ускорения опрокидывающего момента  $\beta$  и квадрата скорости прецессии снаряда  $\alpha^2$  подставить их значения, то после преобразований коэффициент гироскопической устойчивости будет

$$\sigma_1 = \frac{A\pi^2 \mu C q V_0^2}{4 \left( \frac{h}{d} \right) B V^2 \frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} H(y) \eta^2 K_M \left( \frac{V}{a} \right) i_M} > 1. \quad (4.52)$$

Если для момента вылета снаряда из канала ствола орудия принять  $V = V_0$ ;  $H(y) = 1$ ;  $\frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} = 1$ , то

$$\sigma_1 = \frac{A\pi^2 \mu C q}{4 B \left( \frac{h}{d} \right) \eta^2 i_M K_M \left( \frac{V_0}{a} \right)}, \quad (4.53)$$

откуда при  $\sigma_1 = \sigma_{\text{доп}}$

$$\eta = \frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)\left(\frac{h}{d}\right) i_M K_M \left(\frac{V_0}{a}\right) \sigma_{\text{доп}}} . \quad (4.54)$$

Можно доказать, что условия гироскопической устойчивости снарядов (4.49)–(4.54) являются видоизмененным вариантом неравенства, предложенного Н.А. Забудским. Для этого в выражение (4.49) вместо  $\alpha$  и  $\beta$  подставим их значения, тогда

$$\frac{A^2 \pi^2 V_0^2 B 4 g}{B^2 \eta^2 i d^2 \cdot 10^3 H(y) V^2 K_M \left(\frac{V}{a}\right)^4} > 1 . \quad (4.55)$$

Так как  $\tan \alpha = \frac{\pi}{\eta}$ , а  $\omega_0 = \frac{2\pi V_0}{\eta d}$ , то

$$V^2_0 = \frac{\omega_0^2 \eta^2 d^2}{4\pi^2} .$$

В неравенство (4.49) вместо  $V_0^2$  подставим значение, тогда

$$\frac{A^2 \omega_0^2}{4B} \frac{g}{i d^2 h \cdot 10^3 H(y) V^2 K_M \left(\frac{V}{a}\right)} > 1 ,$$

или

$$\frac{A^2 \omega_0^2}{4B h R_{\text{от}}} > 1 ,$$

$$\text{где } R_{\text{от}} = \frac{i d^2 \cdot 10^3 H(y) V^2 K_T \left(\frac{V}{a}\right)}{\pi R^2 g V_0^2} .$$

Поскольку  $(hR)$ , по Забудскому, равно  $(h)$ , по Вентцелю, следовательно, условия гироскопической устойчивости снарядов на начальном участке траектории, предложенные Вентцелем и Забудским, аналогичны. Разница между ними заключается лишь в численном значении силы сопротивления воздуха.

Если Н.А. Забудский эту силу выразил через функцию  $K_T \left( \frac{V}{a} \right)$ , то по условию устойчивости полета снаряда (4.49), предложенному Д.А. Вентцелем, данная сила зависит от функции  $K_M \left( \frac{V}{a} \right)$ . По всем другим параметрам и величинам разницы между формулами нет.

На основе сравнительного анализа рассмотренных расчетных зависимостей и формул, предложенных различными исследователями в качестве критериев гирокопической устойчивости артиллерийского снаряда на траектории, можно сделать некоторые основные выводы.

1. Основной теоретической формулой для оценки гирокопической устойчивости снарядов на траектории является формула Н.А. Забудского, а все остальные зависимости, предложенные многими исследователями, легко приводятся к данной формуле.

2. Из всех рассмотренных аналитических зависимостей, определяющих гирокопическую устойчивость артиллерийского снаряда на начальном участке траектории их полета, для практических расчетов пригодны только две формулы: (4.39) и (4.45), а для анализа гирокопической устойчивости этих снарядов в вершине траектории необходимо использовать формулу (4.48).

Рассмотрим расхождение расчетных величин с опытными данными, получаемыми по разным формулам и критериям, которые характеризуют устойчивость, а следовательно, их кучность боя. В качестве примера в табл. 4.5 приведена расчетная длина хода нарезов ствола 76 мм орудия, обеспечивающая гирокопическую устойчивость оско-лочных снарядов на траектории.

Т а б л и ц а 4.5

Расчетная длина хода нареза $\eta_{ch}$ , клб					$\eta$ орудия, при которой 76 мм ОС обеспечивают хорошую кучность боя
по формуле					
Г.Г. Гобара	Д.А. Вентцеля	С. Кранца	Б.Н. Окунева	Гейденрейхта	15
31,6	31,0	34,2	16	28	

Расчетные коэффициенты  $\sigma_0$  и  $\sigma_1$ , а также величины  $\frac{B\delta}{X}$ , характеризующие гироскопическую устойчивость и кучность боя 76 мм ОФС при стрельбе из орудия с различной длиной хода нарезов;  $\eta$  – расчетные коэффициенты  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  и  $\frac{B\delta}{X}$  приведены в табл. 4.6.

Т а б л и ц а 4.6

$\eta$ , клб	30	25	20	15	10
$\frac{B\delta}{X}$	1/100	1/105	1/120	1/140	1/150
$\sigma_0$	0,25	0,59	0,76	0,875	0,95
$\sigma_1$	1,07	1,54	2,4	4,3	9,6

Из табл. 4.6 следует, что:

- а) коэффициент гироскопической устойчивости  $\sigma_0$  увеличивается одновременно с возрастанием кривизны нарезов ствола орудия;
- б) в некоторых случаях для отдельных типов зарядов  $\sigma_0 < 0,6$  является недостаточным для обеспечения гироскопической устойчивости артиллерийского снаряда на траектории и получения удовлетворительной кучности боя;
- в) с увеличением коэффициента устойчивости  $\sigma_0$ , вычисленного по формуле Б.Н. Окунева, происходит улучшение кучности боя снарядов.

#### 4.4. ПРАВИЛЬНОСТЬ ПОЛЕТА СНАРЯДА В ВОЗДУШНОЙ СРЕДЕ

Гироскопическая устойчивость артиллерийских снарядов на траектории является совершенно необходимым и решающим условием для хорошей кучности их боя.

Однако выполнения одного этого условия недостаточно для полного суждения о характере движения артиллерийского снаряда в воздушной среде, поскольку при анализе гироскопической устойчивости

артиллерийского снаряда делалось допущение об отсутствии влияния угловой скорости понижения касательной к траектории. Так, рассматривался начальный участок полета артиллерийского снаряда, на котором понижение касательной к траектории незначительно и не определяет положение оси снаряда относительно вектора скорости центра его инерции.

При анализе полета артиллерийского снаряда на начальном участке траектории предполагалось, что ось симметрии его совершает нутационные колебания с углом  $\delta$  относительно касательной к траектории – вектора скорости  $\bar{V}$ . На криволинейном участке траектории ось снаряда, описывая циклоидоподобную кривую, совершает колебательные движения уже вокруг некоторой мгновенной оси. Эту ось по предложению французского ученого Эскандера называют динамической осью. Данная ось появляется в результате понижения вектора скорости поступательного движения снаряда на криволинейном участке траектории.

При правой нарезке ствола орудия, если смотреть по направлению стрельбы, динамическая ось относительно вектора скорости центра инерции снаряда будет отклонена вправо на величину динамического угла  $\delta_p$ .

При левой нарезке орудия эта ось по отношению к вектору скорости будет отклонена влево. Таким образом, при движении артиллерийского снаряда на криволинейном участке траектории ось симметрии будет совершать быстрое коническое движение относительно вектора скорости центра инерции снаряда, а последний, в свою очередь, будет медленно вращаться относительно динамической оси.

В общем случае угол  $\delta_p$  будет переменен, минимальное его значение соответствует начальному участку полета снаряда, а максимальное – вершине траектории. С увеличением этого угла снаряд на полете будет испытывать сопротивление воздуха, что приведет к уменьшению дальности снаряда и ухудшению кучности боя.

При значительной гироскопической перестабилизации снаряда динамический угол  $\delta_p$  также будет возрастать.

Таким образом, с одной стороны, артиллерийский снаряд на полете должен быть гироскопически устойчивым, особенно на начальном участке траектории, а с другой стороны – иметь направленный полет, т.е. необходимо, чтобы ось снаряда на всей траектории составляла с

вектором скорости малые углы  $\delta$ , а вектор скорости, в свою очередь, следил бы за изменением динамической оси и составлял с данной осью малые углы  $\delta_p$ .

В общем случае динамический угол

$$\delta_p = \sqrt{\delta_{1p}^2 + \delta_{2p}^2}, \quad (4.56)$$

где  $\delta_{1p}$  – угол между проекциями динамической оси и касательной к траектории (вектором скорости) в вертикальной плоскости;  $\delta_{2p}$  – угол между проекциями динамической оси и касательной к траектории в горизонтальной плоскости.

Плоскость, которая проходит через касательную к траектории и динамическую ось, составляет с вертикальной плоскостью угол  $v_p$ .

Данный угол можно определить из условия

$$\operatorname{tg} v_p = \frac{\delta_{2p}}{\delta_{1p}}.$$

Для определения угла  $\delta_p$  и его составляющих  $\delta_{1p}$  и  $\delta_{2p}$  исследуем вращательное движение оси снаряда, зависящее от касательной к траектории, которое происходит с угловой скоростью  $\dot{\theta}$ . Для этого рассмотрим положение оси снаряда  $O\xi$  относительно вектора угловой скорости  $\bar{\omega}$  и вектора момента количества движения  $\bar{G}_\delta$  (рис. 4.5).

Ранее было показано, что главный вектор угловой скорости  $\bar{\omega}$  при малых значениях угла нутации  $\delta$  в проекциях на главной оси симметрии равен

$$\bar{\omega} = \bar{\delta}' + \bar{v}' + \bar{\phi}',$$

или, учитывая зависимости (4.1), (4.1a) и (4.1б),

$$\bar{\omega} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}.$$

В этом случае вектор количества движения

$$\bar{G}_\delta = B(\bar{c} + \bar{b}) + A\bar{a}.$$

При малых углах нутации  $\delta$  векторы  $\bar{\omega}$  и  $\bar{G}_\delta$  с осью симметрии  $O\xi$  составляют малый угол и лежат в одной плоскости. Для того чтобы обеспечить не только устойчивость, но и правильный полет снаряда

в воздушной среде, необходимо, чтобы его ось симметрии следила за изменением касательной к траектории в любой ее точке. В этом случае ось снаряда будет перемещаться вслед за понижением касательной к траектории с некоторой угловой скоростью, близкой по своей величине к угловой скорости понижения касательной к траектории  $\dot{\theta}$ . Очевидно, что понижение вектора количества движения  $\bar{G}_\delta$  будет также происходить с угловой скоростью  $\dot{\theta}$ .

В процессе этого понижения скорость конца вектора момента количества движения будет равна главному моменту действующих сил  $\bar{M}$ , т.е.

$$\bar{V} = \bar{G}_\delta \dot{\theta} = \bar{M},$$

где

$$\bar{M} = B \bar{\beta} \delta_p. \quad (4.57)$$

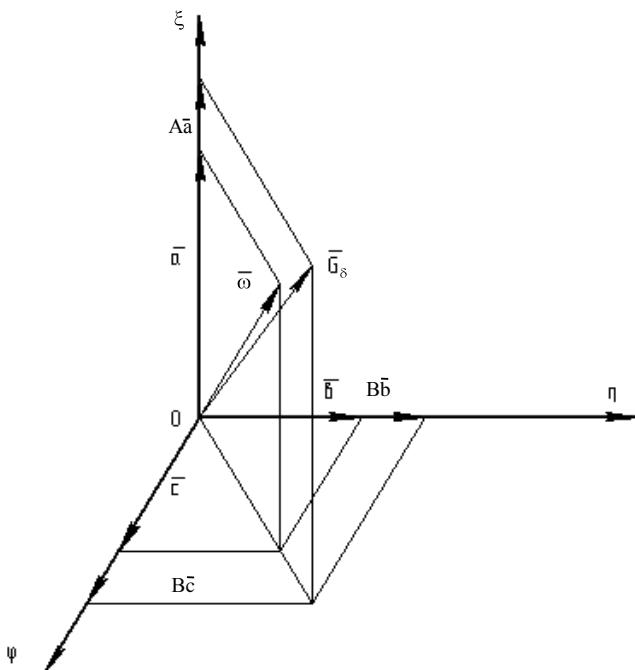


Рис. 4.5. Положение оси снаряда относительно вектора угловой скорости и вектора момента количества движения

При этом длина вектора  $\bar{G}_\delta$  равна

$$\bar{G}_\delta = \frac{A\omega}{\cos(\bar{G}_\delta, \xi)}. \quad (4.58)$$

При малых значениях угла между осью снаряда и вектором момента количества движения  $\cos(G_\delta, \xi) = 1$ . В этом случае  $G_\delta \approx A\omega_0$ , а скорость вектора момента количества движения

$$V = A\omega_0 |\dot{\theta}|, \quad (4.59)$$

тогда

$$\delta_p = \frac{M}{B\beta}.$$

Так как  $M = V = G_\delta |\dot{\theta}| = A\omega_0 |\dot{\theta}|$ , то динамический угол

$$\delta_p = \frac{A\omega_0}{B\beta} |\dot{\theta}|. \quad (4.60)$$

Учитывая, что  $A\omega_0 B^{-1} = 2\alpha$ , а угловая скорость понижения касательной к траектории  $\dot{\theta} = \frac{g \cos \theta}{V}$ ,

$$\delta_p = 2 \frac{\alpha}{\beta} \frac{g \cos \theta}{V}, \quad (4.61)$$

где угловое ускорение опрокидывающего момента

$$\beta = \frac{d^2 h}{Bg} 10^3 i_m \frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} H(y) V^2 K_m \left( \frac{V}{a} \right);$$

$\alpha$  – скорость прецессии снаряда при единичном угле нутации;  
 $\theta$  – угол между вектором скорости центра инерции снаряда и горизонтальной плоскостью, изменяющейся в пределах оси угла бросания  $\theta_0$  до угла встречи  $\theta_c$ ;  
 $g$  – гравитационное ускорение.

Подставим значения  $\alpha$  и  $\beta$ , получим:

$$\delta_p = \frac{\pi g}{2} \frac{\mu C_q d V_0 \cos \theta}{\eta \left( \frac{h}{d} \right) \frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} H(y) i_M V^3 K_M \left( \frac{V}{a} \right)}. \quad (4.62)$$

Исследования показывают, что вертикальная составляющая динамического угла по сравнению с горизонтальной составляющей является величиной малой. Поэтому при дальнейших расчетах без большой погрешности этой составляющей динамического угла можно пренебречь, т.е. считать, что  $\delta_{1p} = \delta_{2p}$ . В этом случае зависимость (4.62) выглядит так:

$$\delta_{2p} = \frac{\pi g}{2} \frac{\mu C_q d V_0 \cos \theta}{\eta \left( \frac{h}{d} \right) \frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} H(y) i_M V^3 K_M \left( \frac{V}{a} \right)}. \quad (4.63)$$

Для конкретного типа снаряда и начальных условий стрельбы значение динамического угла  $\delta_{2p}$  будет изменяться в зависимости от кривизны траектории и механических параметров, которые входят в переменный множитель:

$$\frac{\cos \theta}{\frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} H(y) \left( \frac{V}{V_0} \right) V^2 K_M \left( \frac{V}{a} \right)}. \quad (4.64)$$

На восходящей ветви траектории величина данного множителя будет увеличиваться, а на нисходящей, наоборот, уменьшаться.

Максимальное значение динамического угла  $\delta_{2p}$  соответствует зоне вершины траектории, где угол  $\theta$  близок к нулю, а скорость снаряда будет минимальной. В данном случае минимальными будут и функции  $H(y)$  и  $K_M \left( \frac{V}{a} \right)$ .

Для простоты принимают, что наиболее трудные условия полета артиллерийского снаряда будут в вершине траектории, т.е. тогда, когда вектор скорости центра инерции снаряда  $\bar{V}$  будет параллелен горизонтальной плоскости.

В действительности максимальное значение угла  $\delta_{2p}$  будет соответствовать точке, отвечающей наибольшей кривизне траектории, которая, в свою очередь, расположена между вершиной траектории ( $S$ ) и точкой, отвечающей минимальной скорости снаряда ( $V_{\min}$ ). Точка, где скорость снаряда будет минимальной, расположена на нисходящей ветви траектории. Положение точки относительно вершины траектории зависит от угла бросания  $\theta_0$ . С увеличением данного угла расстояние между этими точками будет сокращаться.

Учитывая незначительное расстояние между этими точками, при определении параметров траектории в вершине обычно принимают данные точки совпадающими.

Особенно сильно динамический угол  $\delta_{2p}$  увеличивается при углах бросания  $\theta_0$  более  $60^\circ$  и при сверхдальнобойной стрельбе, так как при этих условиях скорость снаряда на траектории будет снижаться более интенсивно. Принимая для вершины траектории ( $S$ ) величину динамического угла  $\delta_{2p}$  минимальной, зависимость запишем в виде

$$\delta_{2p} = \delta_{2p_S} = \frac{\pi g}{2} \frac{\mu C_q d V_0 \cos \theta}{\eta \left( \frac{h}{d} \right) \frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} H(y) i_M V^3 K_M \left( \frac{V}{a} \right)}. \quad (4.65)$$

Для обеспечения правильности полета артиллерийского снаряда необходимо и достаточно, чтобы динамический угол в вершине траектории не превышал допустимого значения данного угла, т.е. при расчетах должно быть выполнено условие

$$\delta_{2p_S} \leq [\delta_{2p}], \quad (4.66)$$

где допустимое значение динамического угла

$$[\delta_{2p}] = \delta_M \left( 1 - \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_S}} \right) + \delta_{2p_0} \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_S}}; \quad (4.67)$$

$\delta_M$  – предельное значение угла между вектором скорости и осью снаряда на начальном участке траектории, принимаемое при расчетах  $0,1745$  радиана, что соответствует  $10^\circ$ ;

$\delta_{2p_0}$  – динамический угол в точке вылета снаряда из канала ствола орудия,

$$\delta_{2p_0} = \frac{\pi g}{2} \frac{\mu C_q d V_0 \cos \theta_0}{\eta \left( \frac{h}{d} \right) \frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} H(y) i_M V_0^3 K_M \left( \frac{V_0}{a} \right)}; \quad (4.68)$$

$\sigma_0$  и  $\sigma_S$  – коэффициенты гироскопической устойчивости снаряда в точке вылета и в вершине траектории.

Динамический угол в значительной степени зависит от высоты траектории, отчего условия полета снаряда в зоне вершины траектории при сверх дальней стрельбе являются трудными. Этим в значительной мере объясняется неудовлетворительная кучность боя дальнобойных снарядов.

Чтобы судить о том, как влияет конструкция снаряда на величину угла  $\delta_{2p}$ , рассмотрим соотношение

$$\frac{\mu C_q d V_0}{g \left( \frac{h}{d} \right) i_M}.$$

Из соотношения следует, что для снижения величины динамического угла  $\delta_{2p}$  необходимо:

1) уменьшить калибр, относительный вес и коэффициент инерции снаряда ( $d, C_q, \mu$ );

2) увеличить длину хода нарезов ( $\eta$ ) и уменьшить крутизну нарезов канала ствола орудия;

3) увеличить расстояние между центром тяжести снаряда и центром сопротивления воздуха, выраженное в калибрах, т.е. отношение  $\frac{h}{d}$ .

Из анализа формул (4.55) и (4.58) следует, что одни и те же параметры, входящие в эти формулы, по-разному влияют на гироскопическую устойчивость и правильность полета снаряда на траектории.

Если увеличение осевого момента инерции ( $A$ ) и относительного веса снаряда  $C_q$  приводит к улучшению гироскопической устойчи-

вости его полета на начальном (прямолинейном) участке траектории, так как увеличивается коэффициент  $\sigma_0$ , то в вершине траектории возрастание этих величин ухудшает правильность полета снаряда, поскольку увеличивается динамический угол ( $\delta_{2p}$ ) и уменьшается значение  $[\delta_{2p_S}]$  (допустимое).

Увеличение отношения инерции к осевому  $\left(\frac{B}{A}\right)$  также различно влияет на гироскопическую устойчивость и правильность полета снаряда. На начальном участке траектории увеличение этого отношения  $\left(\frac{B}{A}\right)$  ухудшает правильность полета снаряда, а в зоне вершины траектории, наоборот, приводит к ее улучшению. Исключением является лишь экваториальный момент инерции, который не входит в формулы для  $\delta_{2p_S}$  и  $\delta_{2p_0}$ .

Поэтому, уменьшая величину экваториального момента инерции ( $B$ ), мы тем самым увеличиваем гироскопическую устойчивость снаряда, не ухудшая правильности его полета.

Начальная скорость снаряда ( $V_0$ ) при своем увеличении обязательно повлечет за собой возрастание функции  $K_M\left(\frac{V_0}{a}\right)$ , а так как последняя, приблизительно, пропорциональна кубу скорости  $V_S^3$ , то очевидно, что она будет иметь большее влияние на угол  $\delta_{2p_S}$ , чем  $V_0$ . При рассмотрении конкретного примера по определению  $\delta_{2p_S}$  скорость снаряда  $V_S$ , высота траектории  $y_S$  и функция изменения плотности воздуха  $H(y)$  вычисляются при заданных значениях бросания ( $\theta_0$ ) и горизонтальной дальности стрельбы ( $X$ ).

При конструировании нового образца снаряда его относительный вес ( $C_q$ ), коэффициент инерции ( $\mu$ ) и отношение момента в инерции  $\left(\frac{B}{A}\right)$  могут меняться в очень небольших пределах (при постоянстве калибра снаряда  $\alpha$ ).

В данном случае можно изменить конструкцию, изменяя отношение  $\frac{h}{d}$  за счет применения легкого, тонкостенного баллистического наконечника – это целесообразно тогда, когда одно из условий правильности полета снаряда не выполняется, а по другому условию имеется некоторый запас.

**Например:** для уменьшения динамического узла в вершине траектории  $\delta_{2p_S}$  без изменения коэффициента гирокопической устойчивости  $\sigma_0$  необходимо увеличивать отношение  $\frac{h}{d}$  и уменьшать длину хода нарезов канала ствола ( $\eta$ ). Причем изменение отношения  $\frac{h}{d}$  должно быть выполнено обратно пропорционально квадрату длины хода нарезов ( $\eta^2$ ). В этом случае при постоянстве коэффициентов  $\sigma_0$  и  $\sigma_S$  изменение динамического угла на начальном участке траектории не окажет существенного влияния на допустимую величину траектории  $[\delta_{2p}]$ .

Если при определении на начальном участке траектории коэффициент  $\sigma_0$  получится меньше допустимого значения  $\sigma_{\text{доп}}$ , а в зоне вершины траектории при  $\delta_{2p_S} = [\delta_{2p_S}]$  проектируемый снаряд будет находиться на пределе направленности полета, то, принимая  $\delta_{2p_S} = \text{const}$ , можно изменить величину коэффициента  $\sigma_0$  за счет одновременного изменения двух параметров: увеличения отношения  $\frac{h}{d}$  и уменьшения длины хода нарезов каналов ствола орудия  $\eta_{\text{оп}}$ .

Но изменять эти параметры нужно таким образом, чтобы их произведение было постоянным и равным первоначальному значению, т. е.

$$\left(\frac{h}{d}\right)\eta_{\text{оп}} = \text{const}.$$

Причем увеличение отношения  $\frac{h}{d}$  должно быть принято обратно пропорциональным уменьшению хода нарезов  $\eta_{\text{оп}}^2$ .

На основе анализа кучности боя и расчетных характеристик устойчивости и правильности полета артиллерийского снаряда среднего калибра можно сделать следующие выводы.

1. Угол при вершине, составленный осью снаряда с касательной к траектории, невелик и при стрельбе из пушек с углом возвышения  $40\dots45^\circ$  равен  $3\dots4^\circ$ .

2. Зависимость между величиной динамического угла и величиной рассеивания снарядов выражена очень слабо, чем меньше этот угол ( $\delta_{2ps}$ ), тем менее определенный характер имеет эта зависимость. Данное обстоятельство указывает на то, что угол  $\delta_{2ps} = 2\dots4^\circ$  не является показателем чрезмерной устойчивости снарядов на траектории, а, наоборот, является нормальным для штатных снарядов и поэтому не влияет на понижение кучности их боя.

3. Малое значение динамического угла  $\delta_{2ps}$  для снарядов, которыми производилась стрельба с резко увеличенной крутизной нарезки, указывает на то, что бояться перестабилизации вновь проектируемых снарядов на траектории при уменьшении против существующей расчетной длины хода нарезов  $\eta_{\text{сн}}$  в два-три калибра не следует.

---

## 5. РАСЧЕТ ТРАЕКТОРИИ РЕАКТИВНОГО СНАРЯДА

---

### 5.1. РЕАКТИВНАЯ СИЛА

Реактивный снаряд имеет реактивный двигатель (обычно на твердом топливе – РДТТ), создающий реактивную силу  $\vec{R}$  (рис. 5.1).

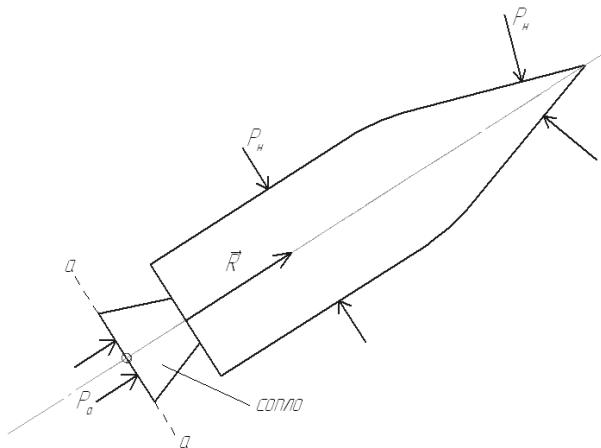


Рис. 5.1. Реактивная сила  $\vec{R}$

Реактивная сила возникает в результате истечения пороховых газов через сопло со скоростью истечения  $\bar{w}_a$ , величина которой для РДТТ равна приблизительно 2000 м/с. Второй важной характеристикой процесса истечения является массовый секундный расход газов через сопло:  $\dot{m} = \left| \frac{dm}{dt} \right|$ . Вследствие истечения газов масса реактивного снаряда

при работающем реактивном двигателе, т.е. на активном участке траектории, будет переменной  $m = m(t)$ . В выходном сечении сопла  $a-a$ , имеющем площадь  $s_a$ , давление пороховых газов  $p_a$  может достигать значений 1,0...1,5 МПа. Вектор реактивной силы  $\bar{R}$  направлен в сторону, обратную направлению вектора скорости истечения  $\bar{w}_a$ , а величина реактивной силы  $R$  равна произведению секундного расхода и скорости истечения газов:

$$R = \dot{m}w_a. \quad (5.1)$$

По своей природе реактивная сила является равнодействующей всех сил давления, действующих на внутреннюю поверхность реактивного двигателя. Величину реактивной силы можно определить экспериментально, если реактивный снаряд закрепить на специальном стенде. При этом на наружную поверхность реактивного снаряда, включающую площадь выходного сечения сопла  $s_a$ , будет действовать равнодействующая сила давления по направлению действия реактивной силы, равная  $s_a(p_a - p_h)$ . Сумма реактивной силы и этой дополнительной силы давления образует силу тяги или тягу реактивного двигателя  $P$ :

$$P = \dot{m}w_a + s_a(p_a - p_h). \quad (5.2)$$

Первое слагаемое в формуле (5.2) является основным и называется динамической составляющей тяги; второе слагаемое для реактивных снарядов составляет 10...15 % от первого и называется статической составляющей тяги. Если вынести за скобки основное слагаемое и ввести обозначение

$$w_e = \bar{w}_a \left[ 1 + \frac{s_a(p_a - p_h)}{\dot{m}w_a} \right],$$

то получим новое выражение для силы тяги, аналогичное выражению (5.1) для реактивной силы:

$$P = \dot{m}w_e. \quad (5.3)$$

Величина  $w_e$  называется эффективной скоростью истечения.

У реактивных снарядов режим работы реактивного двигателя обычно изменяется незначительно, и можно считать, что скорость

истечения  $w_e$  постоянна, а секундный расход  $\dot{m}$  и давление  $p_a$  изменяются пропорционально давлению в камере двигателя, которое в основное время работы двигателя также изменяется незначительно. Поэтому часто силу тяги реактивных снарядов считают постоянной и равной

$$P = \dot{m}gI_1, \quad (5.4)$$

где  $I_1$  – удельный импульс реактивного двигателя, т.е. отношение импульса силы тяги к весу твердого топлива:

$$I_1 = \frac{\dot{m}w_e t_k}{m_{\text{T}} g} = \frac{w_e}{g},$$

где  $m_{\text{T}}$  – масса твердого топлива;  $t_k$  – время работы реактивного двигателя.

Если считать, что на снаряд действует только одна сила тяги  $P$ , то можно получить выражение для максимальной скорости поступательного движения снаряда  $V_{\max}$ :

$$V_{\max} = w_e \ln 1 + m_{\text{T}}/m_{\Pi}, \quad (5.5)$$

в котором  $m_{\Pi} = m_0 - m_{\text{T}}$  – пассивная масса снаряда, а  $m_0$  – его начальная масса.

Формулу (5.5) впервые получил в 1903 году один из основоположников реактивного движения, русский ученый К.Э. Циолковский. Формула показывает, что реактивный принцип движения позволяет достичь любых больших (космических) скоростей за счет увеличения массы топлива и уменьшения пассивной массы снаряда (ракеты).

## 5.2. РАСЧЕТ АКТИВНОГО УЧАСТКА ТРАЕКТОРИИ

Траектория реактивного снаряда (5.2) состоит из активного участка траектории (АУТ) от точки вылета  $O$  до точки  $K$ , где заканчивается горение заряда твердого топлива, и двух пассивных участков траектории: ПУТ1 от точки  $K$  до точки  $C'$ , ордината которой равна ординате  $y_k$ , и ПУТ2 от точки  $C'$  до точки падения  $C$ . Траектория активно-реактивного снаряда имеет еще один пассивный участок ПУТ3 от точ-

ки вылета до точки  $O_1$ , где происходит воспламенение заряда твердого топлива и начинается активный участок траектории (рис. 5.2).

Для расчета активного участка траектории воспользуемся системой уравнений, описывающей поступательное движение снаряда в траекторной системе координат под действием трех сил: силы тяжести  $G = mg$ , силы лобового сопротивления  $R_T = i_a d^2 \cdot 10^3 H_\tau(y) G(V_\tau) V$  и силы тяги  $P = \dot{m} w_e$ :

$$\dot{V} = \frac{P - R_T}{m} - g \sin \theta, \quad \dot{\theta} = -\frac{g \sin \theta}{V}, \quad \dot{y} = V \sin \theta, \quad \dot{x} = V \cos \theta. \quad (5.6)$$

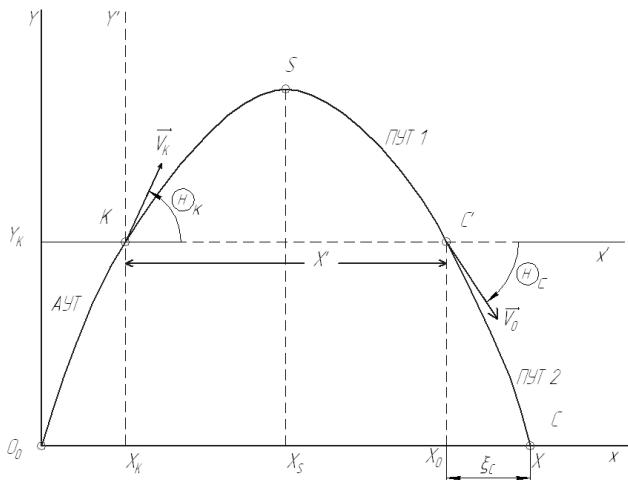


Рис. 5.2. Траектория реактивного снаряда

Коэффициент формы снаряда  $i_a$  на активном участке будет меньше, чем на пассивном:  $i_a \leq 0,75i$ . Переменная масса реактивного снаряда  $m$  выражается формулой

$$m = m_0 - \int_0^t \dot{m}(t) dt. \quad (5.7)$$

При допущениях основной задачи внешней баллистики траектория реактивного снаряда будет плоской, а его боковое отклонение за все время движения равно нулю:  $z \equiv 0$ .

Введем новую переменную  $\mu$ , представляющую собой относительный текущий расход газов:

$$\mu = \int_0^t \dot{m} dt / m_0 \quad (5.8)$$

и изменяющуюся в пределах от 0 до  $\mu_k = m_t / m_0$  в момент  $t = t_k$ . Тогда формула (5.7) примет вид

$$m = m_0(1 - \mu). \quad (5.9)$$

Продифференцируем равенство (5.8) по  $t$   $\frac{d\mu}{dt} = \frac{\dot{m}}{m_0}$ , откуда

$$\frac{dt}{d\mu} = \frac{m_0}{\dot{m}} = k, \quad \text{или} \quad dt = kd\mu. \quad (5.10)$$

С помощью последнего соотношения перейдем в уравнениях (5.6) от аргумента  $t$  к аргументу  $\mu$ , учитывая при этом выражение для  $R_t$ ,  $P$  и формулу (5.9). В результате получим систему уравнений движения реактивного снаряда на активном участке при аргументе  $\mu$ :

$$\frac{dV}{d\mu} = \frac{w_e}{1 - \mu} - \frac{c_a}{1 - \mu} H_\tau(y) G(V_\tau) V - kg \sin \theta, \quad (5.11)$$

$$\frac{d\theta}{d\mu} = \frac{kg \cos \theta}{V}, \quad \frac{dy}{d\mu} = kV \sin \theta, \quad \frac{dx}{d\mu} = kV \cos \theta, \quad \frac{dt}{d\mu} = k,$$

где  $V_\tau = V \sqrt{\tau_{ON}/\tau}$  и  $c_a = (i_a d^2 \cdot 10^3) / \dot{m}$ .

Начальные условия, при которых должна решаться система уравнений (5.11), имеют вид:

- для реактивного снаряда при  $\mu = 0; x = 0; y = 0; V = 0; \theta = \theta_0; t = 0$ ;
- для активно-реактивного снаряда при  $\mu = 0; x = x_1; y = y_1; V = V_1; \theta = \theta_1; t = t_1$ .

Система (5.11) состоит из пяти уравнений, содержит пять искомых величин  $x$ ,  $y$ ,  $V$ ,  $\theta$ ,  $t$  и, следовательно, является полной. Первые три уравнения являются совокупными и должны решаться совместно. Последнее уравнение в общем случае не позволяет найти в явном виде зависимость  $t$  от  $\mu$ . Если принять величину секундного расхода газов

$\dot{m}$  постоянным средним значением  $\dot{m} = m_t / t_k$ , то постоянными оказываются также величины  $c_a$  и  $k$ . В этом случае зависимость  $t$  от  $\mu$  будет явной: для реактивного снаряда  $t = k\mu$ ; для активно-реактивного  $t = k\mu + t_1$ .

Элементы траектории в конце активного участка  $x_k, y_k, V_k, \theta_k$  определяются из условия  $t = t_k$  ( $t = t_k + t_1$ ) или  $\mu = \mu_k$ . Для этого необходимо проинтегрировать систему уравнений (5.11). Без дополнительных упрощений это можно сделать известными методами численного интегрирования и получить в виде таблиц числовые значения элементов траектории для равнотстоящих значений аргумента. Представляют интерес приближенные аналитические методы расчета активного участка траектории, которые позволяют сравнительно простым способом получить элементы траектории в интересующей нас произвольной точке, а также в общей форме исследовать свойства траектории. К таким методам относятся метод Я.М. Шапиро и метод Л.Б. Комарова.

Метод Комарова является обобщенным методом Сиаччи. Особенности его заключаются в следующем. Первое уравнение системы (5.11) заменяется эквивалентным ему уравнением для  $V_x$ :

$$\frac{dV_x}{d\mu} = \left[ \frac{w_e}{1-\mu} - \frac{c_a}{1-\mu} H_\tau(y) G(V_\tau) V \right] \cos \theta.$$

При интегрировании этого уравнения принимается допущение об однородности атмосферы и считается, что величины  $w_e$  и  $c_a$  постоянны. Псевдоскорость представляется равенством  $U = V_x / \cos \theta_{cp}$ , где  $\theta_{cp}$  – угол, составляемый прямой, соединяющей начало и конец активного участка, с осью абсцисс. Вводится также коэффициент  $\beta$  в виде

$$\beta = \frac{c_a}{w_e} H(y_{cp}), \text{ где } y_{cp} – \text{высота середины активного участка.}$$

Система уравнений (5.11) преобразуется к новому аргументу  $U$ . После интегрирования получаются аналитические зависимости от  $U$  элементов активного участка траектории  $\mu, \operatorname{tg} \theta, x, V$ , содержащие квадратуры, для которых составлены таблицы соответственно  $A(U, \beta)$ ,  $B(U, \beta, w_e)$ ,  $C(U, \beta, w_e)$ ,  $D(U, \beta, w_e)$ . Для вычисления элементов траектории в конце активного участка по величине  $\mu_k$  определяют  $U_k$

и далее находят  $V_k, \theta_k, x_k, y_k$ . Поскольку координаты точки  $K$  в начале расчета неизвестны, в первом приближении принимают  $\theta_{cp} = \theta_0$  ( $\theta_{cp} = \theta_1$ ), затем, найдя  $\theta_k$ , уточняют  $\theta_{cp}$  и получают окончательные значения элементов траектории.

### 5.3. РАСЧЕТ ПАССИВНЫХ УЧАСТКОВ ТРАЕКТОРИИ

Первый пассивный участок можно рассматривать как самостоятельную траекторию обычного снаряда, отвечающую начальной скорости  $V_k$  и углу бросания  $\theta_k$ . Поэтому расчет ПУТ1 принципиально не отличается от расчета траектории артиллерийского снаряда методами, описанными ранее. При этом необходимо учесть следующие особенности: масса реактивного снаряда будет равна пассивной массе  $m_{\Pi}$ ; коэффициент формы  $i$  должен определяться для снаряда с неработающим реактивным двигателем после сгорания твердого топлива; плотность воздуха в точке вылета  $K$  и распределения плотности воздуха по высоте отличаются от нормальных. Последнее обстоятельство надо учитывать с помощью приведенного значения баллистического коэффициента  $c^*$ :

$$c^* = c_{\Pi} \left[ b_1 H(y_k) + 0,53 \frac{H}{H} \frac{y_k + Y'}{Y'} \right], \quad (5.12)$$

где  $c_{\Pi}$  – баллистический коэффициент снаряда на участке ПУТ1;  
 $c_{\Pi} = \frac{id^2 \cdot 10^3}{m_{\Pi}}$ ;  $Y'$  – высота траектории на участке ПУТ1;  $b_1$  – коэффициент, который находится из табл. 5.1.

Т а б л и ц а 5.1

$c_{\Pi}$	0,20	0,30	0,40	0,60	0,80
$b_1$	0,435	0,450	0,465	0,475	0,480

В первом приближении до получения величины  $Y'$  принимаем баллистический коэффициент  $c^* = c_{\Pi} H(y_k)$ , потом уточняем его по (5.12) и определяем элементы траектории в точке  $c'$ :  $X', T', V_{c'}, \theta_{c'}$ .

Расчет второго пассивного участка ПУТ2 можно производить с различной степенью приближения. В первом приближении можно считать его прямолинейным, составляющим с осью абсцисс угол  $\theta_{c'}$ , а поступательное движение снаряда – равномерным со скоростью  $V_{c'}$ . Тогда получим в первом приближении очевидные выражения для горизонтального перемещения  $\xi_c$  и времени движения  $\tau_c$  снаряда на втором пассивном участке:

$$\xi_{c,1} = \frac{y}{\operatorname{tg}|\theta_{c'}|}; \quad \tau_{c,1} = \frac{y_k}{V_{c'} \sin|\theta_{c'}|}$$

и элементы траектории реактивного снаряда в точке  $C$ :

$$X = x_k + X' + \xi_{c,1}, \quad T = t_k + T' + \tau_{c,1}, \quad \theta_c = \theta_{c'}, \quad V_c = V_{c'}. \quad (5.13)$$

Для практики последние два равенства являются приемлемыми, а в первых двух целесообразно уточнить величины  $\xi_c$  и  $\tau_c$ , используя разложение ординаты  $y$  в ряд в окрестности точки  $C'$  по степеням величин  $\xi = x - x_{c'}$  и  $\tau = t - t_{c'}$  соответственно. В результате получим:

$$\xi_c = \xi_{c,1} - A_2 \xi_{c,1}^2 + A_3 \xi_{c,1}^3; \quad \tau_c = \tau_{c,1} - B \tau_{c,1}^2,$$

$$\text{где } A_2 = \frac{g}{2V_{c'}^2 \cos^2 \theta_{c'} \operatorname{tg}|\theta_{c'}|}; \quad A_3 = \frac{c_n H(y_k) G(V_{c'}) g}{3V_{c'}^3 \cos^3 \theta_{c'} \operatorname{tg}|\theta_{c'}|};$$

$$B = \frac{g - c_n H(y_k) G(V_{c'}) V_{c'} \sin|\theta_{c'}|}{2V_{c'} \sin|\theta_{c'}|}.$$

Расчет третьего пассивного участка ПТУЗ для активно-реактивного снаряда представляет собой обычное вычисление элементов траектории в произвольной точке; это вычисление производится или с помощью таблиц внешней баллистики, или с помощью метода Сиаччи применительно к зенитной траектории. Элементы траектории в точке  $O_1$  определяются по времени задержки воспламенения заряда твердого топлива  $t_1$ ; в формулах (5.13) для  $X$  и  $T$  появятся дополнительные слагаемые  $x_1$  и  $t_1$  соответственно.

## 6. ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОПЕРЕННОГО СНАРЯДА

### 6.1. ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ОПЕРЕННОГО СНАРЯДА

Оперенные снаряды (артиллерийские мины, авиационные бомбы и др.) снабжаются оперением, расположенным в хвостовой части и предназначенным для стабилизации снаряда в полете (рис. 6.1).

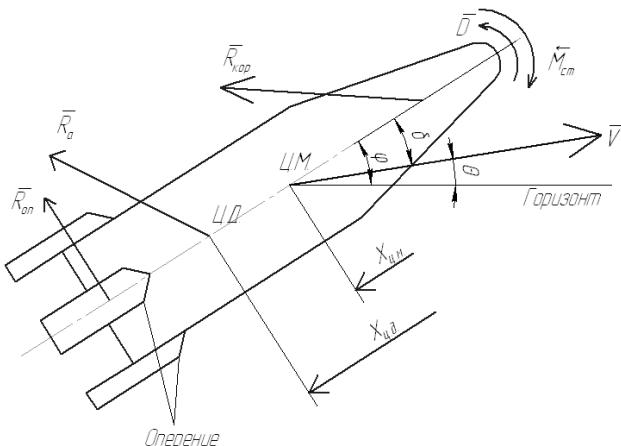


Рис. 6.1. Аэродинамические силы и моменты, действующие на оперенный снаряд

При отклонении оси снаряда от касательной к траектории набегающий поток воздуха будет действовать на перья, расположенные поперек плоскости сопротивления, в результате возникнет аэродинамическая сила  $\bar{R}_{\text{оп}}$ . Кроме нее на снаряд будет действовать сила сопротивления корпуса  $\bar{R}_{\text{кор}}$ , а вместе они образуют полную аэродина-

мическую силу  $\vec{R}_A = \vec{R}_{\text{коп}} + \vec{R}_{\text{оп}}$ , приложенную в центре давления снаряда. Параметры оперения выбираются так, чтобы центр давления оказался дальше от вершины снаряда, чем центр масс снаряда. При этом статический аэродинамический момент будет стабилизирующим моментом  $\bar{M}_{\text{ст}}$ , а кроме того, вследствие колебательного движения снаряда возникнет тушащий (демпфирующий) момент  $\bar{D}$ .

Разложим полную аэродинамическую силу  $\vec{R}_A$  по направлению вектора скорости  $\bar{V}$  (касательной) и по нормали к траектории центра масс снаряда:  $\vec{R}_A = \vec{R}_T + \vec{R}_N$ .

Вследствие большой общей поверхности перьев и дополнительного влияния корпуса величина нормальной составляющей полной аэrodинамической силы  $\vec{R}_N$  будет соизмерима с величиной силы лобового сопротивления. Поэтому ее нельзя не учитывать при составлении дифференциальных уравнений поступательного движения оперенного снаряда. При допущениях основной задачи внешней баллистики система уравнений при аргументе  $t$  поступательного движения оперенного снаряда получит вид

$$\dot{V} = -I_T - g \sin \theta, \quad \dot{\theta} = -\frac{g \sin \theta}{V} + \frac{R_N}{Vq}, \quad \dot{y} = V \sin \theta, \quad \dot{x} = V \cos \theta, \quad (6.1)$$

где  $I_T$  – ускорение силы лобового сопротивления;  $I_T = R_T / q = cH(y)F(V/a)$ .

В дальнейшем будем считать, что скорость снаряда дозвуковая ( $M < 1$ ) и снаряд движется в однородной атмосфере ( $H(y) = \text{const}$ ;  $a = \text{const}$ ). Принимая  $H(y) = H(y_{\text{cp}})$ ;  $a = a_{0N}$ ;  $F(V/a) = B_2 V^2$ , можем записать

$$I_T = bV^2, \quad (6.2)$$

где  $b = cH(y_{\text{cp}})B_2 = cH(y_{\text{cp}})4,736 \cdot 10^{-4} c_{x,0T}$ . Отметим, что зависимость коэффициента лобового сопротивления  $c_x$  от угла атаки  $\delta$  оперенного снаряда более сильная: так, для мин при  $\delta = 10^\circ$   $c_x / c_{x0} = 1,5$ .

Ускорение нормальной аэродинамической силы  $\varepsilon$  для силы  $R_N$  можем представить в виде

$$\varepsilon = \frac{R_N}{q} = \frac{c_{ya}^\delta}{q} \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho V^2}{2} \delta = \gamma V^2 \delta, \quad (6.3)$$

где  $\lambda = \frac{c_{ya}^\delta}{q} \frac{\pi d^2}{8} \rho_{0N} H(y_{cp})$ ;  $c_{ya}^\delta = \left( \frac{\partial c_{ya}}{\partial \delta} \right)_0$ .

Два первых уравнения (6.1) перепишем в соответствии со сделанными допущениями:

$$\dot{V} = -bV^2 - g \sin \theta, \quad \dot{\theta} = -\frac{g \cos \theta}{V} - \gamma V \delta. \quad (6.4)$$

Система двух совокупных обыкновенных дифференциальных уравнений (6.4) вместе с двумя последними уравнениями (6.1) может быть проинтегрирована численным методом при следующих начальных условиях:  $x = 0; y = 0; V = V_0; \theta = \theta_0; t = 0$ . В первом приближении можно положить  $y_{cp} = 0; H(y_{cp}) = 1$ , а после окончания процесса интегрирования, определив высоту траектории  $Y$ , можно найти  $y_{cp} = \frac{2}{3}Y$  и повторить процесс интегрирования.

Траектория оперенного снаряда, как и артиллерийского, в рамках допущений основной задачи внешней баллистики является плоской кривой и располагается в плоскости бросания. Появление во втором уравнении системы (6.4) дополнительного слагаемого ( $\gamma V \delta$ ) может привести в случае больших положительных углов атаки  $\delta$  не к уменьшению, а к увеличению угла  $\theta$ , если  $\dot{\theta}$  будет больше нуля. При постоянном положительном угле атаки, при прочих равных условиях оперенный снаряд полетит дальше артиллерийского. При колебательном движении оперенного снаряда траектория его центра масс будет волнистой.

## 6.2. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ОПЕРЕННОГО СНАРЯДА

Из опыта известно, что в большинстве случаев колебания оперенного снаряда будут плоскими и будут протекать в плоскости бросания. При таком допущении уравнение колебательного движения при действии на снаряд стабилизирующего момента  $\vec{M}_{\text{ст}}$  и тушащего момента  $\vec{D}$  запишется в виде

$$B\ddot{\phi} = M_{\text{ст}} + D, \quad (6.5)$$

где  $B$  – экваториальный момент инерции снаряда;  $\phi$  – угол между осью снаряда и горизонтом (см. рис. 6.1),

$$\phi = \theta + \delta. \quad (6.6)$$

Воспользуемся аэродинамической формой записи выражений для моментов  $M_{\text{ст}}$  и  $D$ :

$$M_{\text{ст}} = -m_z^\delta \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho V^2}{2} L \delta = -B\alpha V^2 \delta; \quad (6.7)$$

$$D = -m_z^{\bar{\phi}} \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho V}{2} L^2 \dot{\phi} = -B\beta V \dot{\phi}, \quad (6.8)$$

где  $m_z^\delta$  и  $m_z^{\bar{\phi}}$  – аэродинамические коэффициенты;  $\alpha$  и  $\beta$  – величины, определяемые из равенств (6.7) и (6.8):

$$\alpha = \frac{m_z^\delta}{B} \frac{\pi d^2}{8} \rho_{0N} H(y_{\text{cp}}) L;$$

$$\beta = \frac{m_z^{\bar{\phi}}}{B} \frac{\pi d^2}{8} \rho_{0N} H(y_{\text{cp}}) L^2.$$

Подставляя правые части (6.7) и (6.8) в уравнение (6.5) и сокращая на  $B$ , найдем  $\ddot{\phi} = -\alpha V^2 \delta - \beta V \dot{\phi}$ . Заменяя  $\phi$  по формуле (6.6), получим

$$\ddot{\delta} + \beta V \dot{\delta} + \alpha V^2 \delta = -\ddot{\theta} - \beta V \dot{\theta}. \quad (6.9)$$

Исключим в (6.9)  $\dot{\theta}$  и  $\ddot{\theta}$  с помощью уравнений (6.4), предварительно найдя вторую производную по времени  $\ddot{\theta}$ . В результате получим

$$\ddot{\delta} + (\beta + \gamma)V\dot{\delta} + [\alpha + (\alpha - \gamma(b - \beta))V^2]\delta = g \cos \theta(b + \beta + 2g \sin \theta / V^2).$$

Пренебрегая малой по сравнению с  $\alpha$  величиной  $\gamma(b - \beta)$ , окончательно запишем:

$$\ddot{\delta} + (\beta + \gamma)V\dot{\delta} + \alpha V^2\delta = g \cos \theta(b + \beta + 2g \sin \theta / V^2). \quad (6.10)$$

Уравнение (6.10) аналогично  $\ddot{z} - 2i\alpha\dot{z} - \beta z = 2i\alpha\dot{\theta} - \ddot{\theta}$ , описывающему движение оси артиллерийского снаряда относительно его центра масс. Общий интеграл неоднородного уравнения (6.10) будет складываться из общего интеграла однородного уравнения  $\delta_c$  и частного интеграла неоднородного уравнения  $\delta_p$ :  $\delta = \delta_c + \delta_p$ .

Проинтегрируем уравнение (6.10) на начальном участке траектории, полагая  $V = \text{const}$ ,  $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ , при характерных для оперенных снарядов начальных условиях: при  $t = 0$   $\delta = 0$ ,  $\dot{\delta} = \dot{\delta}_0$ . Приближенное решение будет иметь вид

$$\delta_c = \frac{\dot{\delta}_0}{V\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{\beta+\gamma}{2}Vt} \sin(V\sqrt{\alpha} \cdot t). \quad (6.11)$$

Следовательно, на начальном участке траектории оперенный снаряд совершает затухающие гармонические колебания (рис. 6.2) с периодом  $T_\delta = \frac{2\pi}{V\sqrt{\alpha}}$  и логарифмическим декрементом затухания  $\varepsilon = \frac{\beta+\gamma}{2}V \frac{T_\delta}{2} = \frac{\pi(\beta+\gamma)}{2\sqrt{\alpha}}$ , который характеризует уменьшение амплитуды колебаний за полупериод  $a_{t+T_\delta/2} / a_t = e^{-\varepsilon}$ .

Расчеты показывают, что колебания оперенного снаряда быстро затухают; так, для мин за полупериод амплитуда колебаний уменьшается в среднем на 15 %.

На траектории будет действовать возмущающий фактор – кривизна траектории, вызывающая дополнительное, вынужденное движение оси

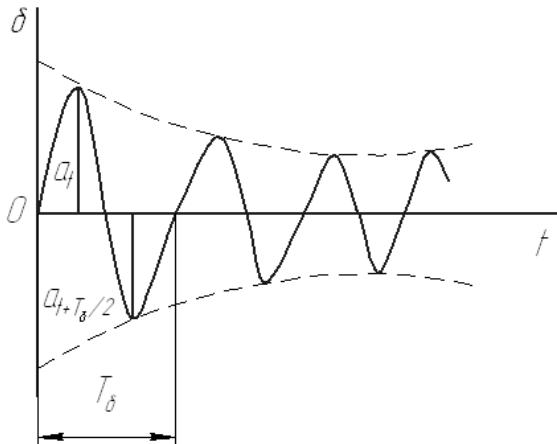


Рис. 6.2. Зависимость  $\delta$  от  $t$

снаряда  $\delta_p(t)$ . Как и в случае артиллерийского снаряда, можно ввести ось динамического равновесия, движение которой будет непериодическим. Колебательное движение оси оперенного снаряда на траектории будет проходить не вокруг касательной к траектории, а вокруг оси динамического равновесия, составляющей с касательной положительный угол  $\delta_p$ . Поскольку колебательное движение оперенных снарядов плоское, деривации у них не будет.

Более детальное рассмотрение движения оперенных снарядов относительно центра масс с учетом общих начальных условий показывает, что движение их оси может протекать в плоскости, слегка наклоненной в ту или другую сторону от плоскости бросания, а проекция оси снаряда на плоскость изображения (точка  $B_1$ ) будет описывать кривую типа удлиненного эллипса.

### 6.3. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОПЕРЕННОГО СНАРЯДА

Для того чтобы движение любого снаряда было устойчивым, а рассеивание траекторий небольшим, необходимо снаряд стабилизировать, т.е. ограничить максимальное значение угла атаки  $\delta_{\max}$  на траектории.

Значит, условие устойчивости оперенного снаряда в общем виде записывается следующим образом:  $\delta_{\max} \leq \delta_{\text{доп}}$ .

Стабилизация оперенных снарядов осуществляется за счет оперения, благодаря которому при отклонении оси снаряда от траектории возникает стабилизирующий момент, стремящийся уменьшить угол атаки  $\delta$ . Аэродинамический момент будет стабилизирующим, если центр давления окажется дальше от вершины, чем центр масс снаряда, т.е. справедливо неравенство  $x_{ц,д} > x_{ц,м}$ . В этом случае снаряд называется статически устойчивым, а аэродинамический коэффициент  $m_z^\delta$  будет отрицательным. Очевидно, чем больше будет расстояние между центром давления и центром масс снаряда, тем больше стабилизирующий момент  $M_{\text{ст}} \approx R_N(x_{ц,д} - x_{ц,м})$  и тем более устойчив в полете оперенный снаряд. Основной характеристикой устойчивости оперенных снарядов является коэффициент запаса устойчивости  $\xi_{\text{уст}}$ :

$$\xi_{\text{уст}} = m_z^\delta / c_{ya}^\delta = \frac{x_{ц,д} - x_{ц,м}}{L} 100 \% . \quad (6.12)$$

Обычно величина  $\xi_{\text{уст}}$  выбирается в пределах 10...15 %.

Дополнительной характеристикой устойчивости оперенных снарядов может быть длина дуги траектории  $\lambda$ , отвечающая периоду колебаний снаряда  $T_\delta$ :

$$\lambda = T_\delta V = 2\pi / \sqrt{\alpha} . \quad (6.13)$$

Эта величина не зависит от скорости снаряда, а определяется его аэrodинамическими и массовыми характеристиками. Чем меньше длина дуги  $\lambda$ , тем более устойчив снаряд, так как  $\lambda$  можно уменьшить только за счет увеличения коэффициента  $\alpha$ , а это вызывает уменьшение максимального угла атаки на начальном участке траектории при одном и том же толчке снаряда  $\dot{\delta}_0$ :

$$\delta_{\max} = \frac{\dot{\delta}_0}{V\sqrt{\alpha}} . \quad (6.14)$$

Из выражения для  $\alpha$  видно, что выгодно иметь более мощное оперение (больше коэффициент  $m_z^\delta$ ), большую длину  $L$  и меньший эква-

ториальный момент инерции  $B$ . Однако при этом следует учитывать, что с уменьшением  $B$  возрастают начальный толчок  $\dot{\delta}_0$  и максимальный угол атаки  $\delta_{\max}$ .

Как отмечалось, колебания оси оперенного снаряда, вызванные начальным толчком при выстреле, быстро затухают и на траектории можно пренебречь свободным движением снаряда, считая  $\dot{\delta}_c = 0$ . Тогда угол атаки  $\delta$  будет равен углу  $\delta_p$ , который также должен быть ограничен. Поскольку изменение угла  $\delta_p$  за счет понижения касательной происходит медленно, можно положить в уравнении (6.10)  $\dot{\delta} = 0$  и  $\ddot{\delta} = 0$  и получить выражение для угла  $\delta_p$ :

$$\delta_p = \frac{g \cos \theta}{\alpha V^2} \left( b + \beta + \frac{2g \sin \theta}{V^2} \right). \quad (6.15)$$

На восходящей ветви траектории угол  $\delta_p$  возрастает за счет уменьшения скорости  $V$  и увеличения  $\cos \theta$ , а на нисходящей быстро убывает, так как  $\cos \theta$  стремится к нулю. Максимального значения угол  $\delta_p$  достигает перед вершиной траектории, и его можно определить по формуле (6.15), если подставить элементы траектории для вершины:

$$\delta_{p \max} = \frac{g(b + \beta)}{\alpha V_S^2}. \quad (6.16)$$

Из выражения для  $\delta_{p \max}$  видно, что выгодно уменьшать коэффициент  $b$  или баллистический коэффициент  $c$  и коэффициент  $\beta$ , увеличивать  $\alpha$ . Однако при увеличении  $\alpha$  коэффициент  $\beta$  будет уменьшаться, что указывает на противоречивость требований и необходимость поиска компромиссных решений.

В заключение отметим, что при очень больших углах бросания ( $\theta_0 > 80^\circ$ ) скорость мины в вершине  $V_S$  может понизиться до 10 м/с, а угол  $\delta_{p \max}$  станет значительным и движение у вершины неустойчивым, хотя в дальнейшем полет мины стабилизируется.

---

## **7. ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО СНАРЯДА**

---

### **7.1. УПРАВЛЯЮЩИЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ**

Управляемые снаряды позволяют существенно повысить вероятность попадания в неподвижную цель и успешно проводить стрельбы (пуски) по подвижным целям и с подвижных носителей. Управляемые снаряды, совершающие полет в воздухе, как правило, являются реактивными и крылатыми. К таким снарядам относятся противотанковые управляемые ракеты (ПТУР), зенитные управляемые ракеты (ЗУР) и другие.

Под управлением полетом снаряда понимают изменение величины и направления вектора скорости его центра масс для обеспечения оптимальных условий достижения цели и встречи с ней. Одновременно решается задача стабилизации снаряда при воздействии на него случайных возмущений. Управление полетом осуществляется системой управления, приборы которой располагаются или только на борту снаряда (автономное управление), или частично на борту, а частично на пункте управления на Земле (командное управление).

Для управления полетом снаряд снабжается органами управления (рулями), которые отклоняются от нейтрального положения на некоторый угол с помощью привода рулей – исполнительного устройства системы управления. Рули по принципу действия могут быть аэродинамическими и газодинамическими, причем первые используются только при движении снаряда в плотных слоях атмосферы, а вторые – и в космическом пространстве. С помощью рулей создаются управляющие силы и моменты.

Рассмотрим движение в плоскости бросания управляемого реактивного снаряда с аэродинамическими рулями, расположенными в хвостовой части снаряда (рис. 7.1). Положение оси снаряда в земной системе координат определяется углом тангажа  $\delta$ , а направление полета – вектором скорости центра масс  $\vec{V}$ , т.е. углом наклона траекто-

рии  $\theta$ . Если между осью снаряда и вектором скорости  $\vec{V}$  будет угол атаки  $\alpha$ , то возникнут приложенные в центре масс снаряда и направленные по нормали к траектории нормальная аэродинамическая сила  $\bar{R}_N$  и нормальная составляющая силы тяги реактивного двигателя  $\bar{P}_N$ , а также стабилизирующий аэродинамический момент  $\bar{M}_z$  относительно центра масс снаряда.

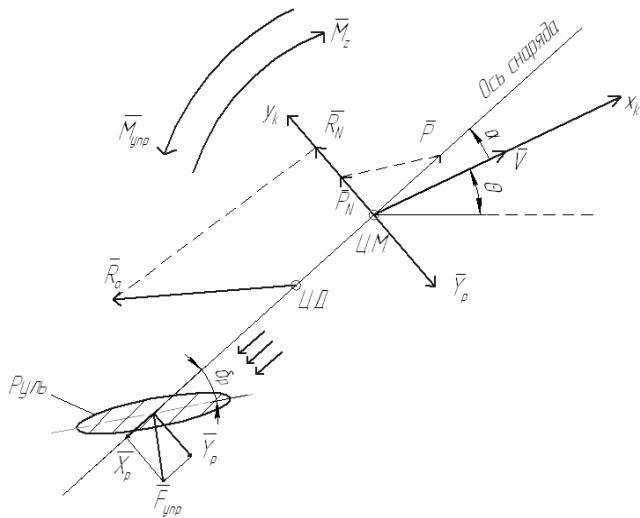


Рис. 7.1. Управляющие силы и момент

Когда руль поворачивается на угол  $\delta_p$  относительно продольной оси снаряда, изменяется угол атаки руля набегающим потоком, в результате чего на руль будет действовать аэродинамическая сила  $\bar{F}_{\text{упр}}$ , называемая управляющей. Эту силу раскладывают на составляющие по осям связанной системы координат  $\bar{X}_p$  и  $\bar{Y}_p$ , причем сила  $\bar{X}_p$  будет уменьшать силу тяги  $\bar{P}$ , а сила  $\bar{Y}_p$  будет создавать относительно центра масс снаряда аэродинамический момент  $\bar{M}_{\text{упр}}$ , называемый управляющим моментом. Роль управляющего момента заключается в изменении угла атаки  $\alpha$ , что приведет к изменению величин нормаль-

ных сил  $\vec{R}_N$  и  $\vec{P}_N$  и к изменению направления полета снаряда в соответствии с предусмотренным законом управления.

Чтобы снаряд был стабилизирован в полете, необходимо соблюдать равенство  $M_z + M_{\text{упр}} = 0$ , что достигается соответствующим изменением угла  $\delta_p$  и, следовательно, угла атаки  $\alpha$ . Угол атаки  $\alpha_\delta$ , отвечающий равенству стабилизирующего и управляющего моментов, называется балансировочным углом, а зависимость  $\alpha_\delta = f(\delta_p)$  – балансировочной зависимостью.

В общем случае пространственного движения управляемого снаряда будут три составляющие управляющей силы  $\vec{F}_{\text{упр}}$ : продольная  $X_p$ , нормальная  $Y_p$  и поперечная  $Z_p$ , которые определяются равенствами

$$\begin{aligned} X_p &= S_p \frac{\rho V^2}{2} c_{xp} + c_{xp}^{\delta_B} \delta_B + c_{xp}^{\delta_H} \delta_H , \\ Y_p &= S_p \frac{\rho V^2}{2} c_{yp}^{\delta_B} \delta_B , \\ Z_p &= S_p \frac{\rho V^2}{2} c_{zp}^{\delta_H} \delta_H , \end{aligned} \quad (7.1)$$

где  $S_p$  – характерная площадь рулей;  $c_{xp}, c_{xp}^{\delta_B}, c_{xp}^{\delta_H}, c_{yp}^{\delta_B}, c_{zp}^{\delta_H}$  – аэродинамические коэффициенты рулей;  $\delta_B$  и  $\delta_H$  – углы отклонения руля высоты и руля направления соответственно.

Нормальная и поперечная составляющие управляющей силы создают две составляющие управляющего момента  $\vec{M}_{\text{упр}}$ :

$$\begin{aligned} M_{pY} &= S_M \frac{\rho V^2}{2} L m_{pY}^{\delta_H} \delta_H + m_{pY}^{\bar{\delta}_H} \bar{\delta}_H , \\ M_{pZ} &= S_M \frac{\rho V^2}{2} L m_{pZ}^{\delta_B} \delta_B + m_{pZ}^{\bar{\delta}_B} \bar{\delta}_B , \end{aligned} \quad (7.2)$$

где  $S_M$  – площадь миделева сечения снаряда;  $m_{pY}^{\delta_h}, m_{pY}^{\dot{\delta}_h}, m_{pZ}^{\delta_b}, m_{pZ}^{\dot{\delta}_b}$  – аэродинамические коэффициенты рулей;  $\bar{\delta}_b$  и  $\bar{\delta}_h$  – приведенные угловые скорости вращения рулей:  $\bar{\delta}_b = \dot{\delta}_b L / V$ ,  $\bar{\delta}_h = \dot{\delta}_h L / V$ .

Газодинамические рули располагаются за срезом сопла реактивного двигателя и работают аналогично аэродинамическим, изменения величину и направление силы тяги реактивного двигателя. Функции рулей могут выполнять также поворотное крыло, поворотное сопло, поворотный реактивный двигатель.

Управляемые снаряды обладают дополнительным качеством – управляемостью, под которой понимают способность снаряда отзываться на действие органов управления соответствующими изменениями параметров его движения вокруг центра масс (углов атаки, тангажа и др.). Управляемость зависит, во-первых, от эффективности органов управления, которая определяется приращением управляющего момента при отклонении органа управления от его нейтрального положения, а во-вторых, от статической устойчивости снаряда. В рассмотренном случае (рис. 7.1) управляемость характеризуется коэффициентом  $m_Z^{\delta_p} = \frac{\partial m_Z}{\partial \delta_p}$ , а статическая устойчивость – аналогичным ко-

эффективентом  $m_Z^\alpha = \frac{\partial m_Z}{\partial \alpha}$  аэродинамического момента  $M_z$ . Очевидно, чем больше коэффициент статической устойчивости  $m_Z^\alpha$  или коэффициент запаса устойчивости  $\xi_{уст}$ , тем хуже снаряд отзывается на отклонение органов управления и тем хуже его управляемость. Чем больше коэффициент управляемости  $m_Z^{\delta_p}$ , тем лучше при прочих равных условиях управляемость снаряда.

## 7.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО СНАРЯДА

Поскольку управление полетом управляемого снаряда осуществляется его вращением вокруг центра масс, при вычислении траектории необходимо одновременно интегрировать дифференциальные уравнения

ния поступательного и вращательного движений. Эти уравнения должны включать управляющие силы и моменты, а также связи, накладываемые на движение снаряда системой управления.

Система управления обеспечивает движение центра масс снаряда по желаемой траектории, которая называется опорной. Фактическое движение будет происходить вокруг опорной траектории, а его элементы должны измеряться чувствительными устройствами (датчиками). Система управления полетом работает по принципу следящих систем, основанному на сравнении задаваемого и действительного значений управляемого параметра. Если существует разница между ними, то возникает сигнал, который после преобразования и усиления действует на соответствующий руль до тех пор, пока сигнал рассогласования не станет равным нулю.

Управляемый полет снаряда проходит по определенному закону, который или задается в виде программы, или формируется в процессе полета. В первом случае задается закон изменения какого-либо одного или нескольких элементов движения, например угла наклона оси снаряда к горизонту (угла тангажа). Полет по программе обычно осуществляется при неподвижном носителе и неподвижной цели, а траектория полета называется программной траекторией. Во втором случае, когда перемещаются носитель и цель, система управления устанавливает связь между элементами движения снаряда и цели, обеспечивающую выведение снаряда к цели и встречу с ней, а траектория полета называется траекторией наведения.

Рассмотрим продольное движение управляемого снаряда при управлении по углу тангажа (см. рис. 7.1). Будем считать, что сила тяги направлена по оси снаряда, и все силы, приложенные к нему, действуют в плоскости бросания. Очевидно, траектория центра масс снаряда будет плоской кривой.

Запишем уравнения поступательного движения снаряда в проекциях на оси траекторной системы координат под действием силы тяжести  $m\vec{g}$ , силы тяги  $\vec{P}$ , статической аэродинамической силы  $\vec{R}_A$  и управляющей силы  $\vec{F}_{\text{упр}}$ :

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= P \cos \alpha - R_T - mg \sin \theta - X_p \cos \alpha + Y_p \sin \alpha; \\ mV\dot{\theta} &= P \sin \alpha + R_N - mg \cos \theta - X_p \sin \alpha - Y_p \cos \alpha, \end{aligned} \quad (7.3)$$

где  $m$  – переменная масса снаряда:

$$m = m_0 - \int_0^t \dot{m}(t) dt . \quad (7.4)$$

Уравнение вращательного движения снаряда относительно его центра масс под действием стабилизирующего момента  $\vec{M}_Z$  и управляемого момента  $\vec{M}_{\text{упр}}$  имеет вид

$$B\ddot{\vartheta} = M_Z - M_{\text{упр}} , \quad (7.5)$$

где  $B$  – экваториальный момент инерции снаряда, который может изменяться в полете.

К уравнениям (7.3)–(7.5) следует присоединить два кинематических уравнения:

$$\dot{x} = V \cos \theta; \quad \dot{y} = V \sin \theta. \quad (7.6)$$

Для учета работы системы управления необходимо добавить уравнения управления. При управлении по углу тангенса уравнение управления может задаваться в виде программной зависимости  $\vartheta = \theta + \alpha = \vartheta_{\text{пр}}(t)$  и в виде закона управления, определяющего угол отклонения руля высоты  $\delta_v$  при изменении угла тангенса  $\vartheta$ , угловой скорости  $\dot{\vartheta}$  и углового ускорения  $\ddot{\vartheta}$ :

$$\delta_v = k_0 \Delta \vartheta + k_1 \dot{\vartheta} + k_2 \ddot{\vartheta} , \quad (7.7)$$

где  $\Delta \vartheta = \vartheta - \vartheta_{\text{пр}}$  – отклонение измеренного угла от программного его значения  $\vartheta_{\text{пр}}$ ;  $k_0, k_1, k_2$  – коэффициенты уравнения управления.

Система (15.3)–(15.7) состоит из семи уравнений и включает восемь величин, характеризующих движение снаряда в плоскости бросания. Уравнения могут быть проинтегрированы, если будут известны программа угла тангенса  $\vartheta_{\text{пр}}(t)$ , функция сопротивления воздуха  $c_x(M)$ , секундный расход газов  $\dot{m}(t)$ , коэффициенты в уравнении управления и начальные условия полета. В результате решения получим элементы движения управляемого снаряда  $V(t), \theta(t), x(t), y(t), \alpha(t), m(t), \delta_v(t)$  и, следовательно, опорную траекторию. При заданном

управлении можно получить большое количество опорных траекторий, из которых выбирают оптимальную.

В общем случае пространственного движения управляемого снаряда число уравнений будет равно 17, а решение полной системы уравнений является весьма трудоемким процессом.

### 7.3. НАВЕДЕНИЕ СНАРЯДА НА ЦЕЛЬ

Если цель перемещается (маневрирует), то для попадания в нее необходимо связать движение снаряда с движением цели. Такой метод управления называется наведением снаряда на цель. Для этого используются или системы телеконтроля, или системы самонаведения, осуществляющие слежение за движением как снаряда, так и цели, в результате чего определяется их взаимное расположение в пространстве. В системах телеконтроля слежение за снарядом и целью осуществляется с Земли и управляющие сигналы в виде команд передаются на снаряд с Земли. В общем случае линии визирования снаряда и цели не совпадают. Если же они будут совпадать, т.е. при сближении с целью снаряд будет находиться на одной прямой с целью и станцией наведения, такой метод наведения будет называться методом совмещения или методом наведения по трехточечной кривой.

В системах самонаведения определение элементов движения снаряда, слежение за целью и формирование управляющих сигналов осуществляются на борту снаряда. Методы самонаведения различаются по параметрам, на которые накладываются ограничения:

- 1) на положение продольной оси снаряда относительно линии визирования «снаряд–цель»;
- 2) на положение вектора скорости центра масс снаряда относительно линии визирования;
- 3) на положение самой линии визирования в пространстве.

Траектория движения управляемого снаряда представляет собой сложную пространственную кривую, состоящую из трех участков (рис. 7.2): стартового участка I, участка вывода на опорную траекторию II, участка наведения III. На участке I обычно работает стартовый реактивный двигатель, а полет снаряда неуправляемый или по заданной программе. Конечной целью является достижение заданной точки и заданных параметров движения, например маршевой скорости. На участке II происходят переходные процессы управления (снаряд захва-

тывается лучом), наведения и достижения параметров опорной траектории наведения. Участок III является основным; на нем достигаются сближение и встреча снаряда с целью.

Расчет траектории на участках I и II производится с помощью обычной системы дифференциальных уравнений движения снаряда (с учетом управления). Вид траектории на участке III зависит от выбранного метода наведения, который определяет кинематику движения снаряда относительно цели, поэтому траектория наведения на участке III называется кинематической. На рис. 7.3 показана в горизонтальной плоскости траектория наведения управляемого снаряда по методу совмещения. Следует отметить, что в рассматриваемом случае вектор скорости центра масс направлен постоянно в упреждающую точку под некоторым углом упреждения.

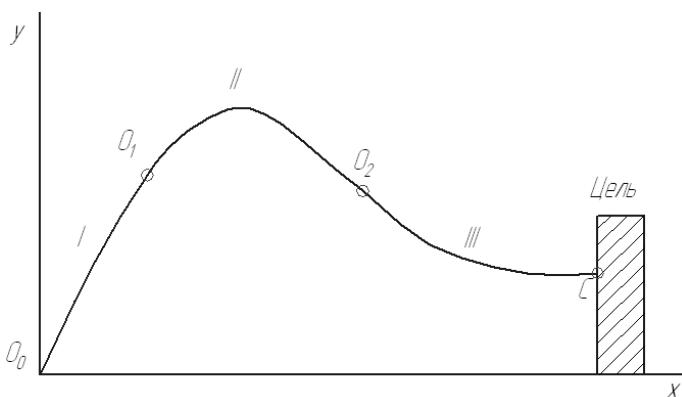


Рис. 7.2. Траектория управляемого снаряда

Возможность снаряда выполнять намеченную траекторию определяется его маневренностью и допускаемыми (располагаемыми) перегрузками. Под перегрузкой или коэффициентом перегрузки  $\bar{n}$  понимают отношение главного вектора  $\vec{R}$  сил, действующих на снаряд (кроме гравитационных и инерционных сил), к модулю силы тяжести  $mg$ :

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}}{mg} = \frac{\vec{R}_A + \vec{P}}{mg}. \quad (7.8)$$

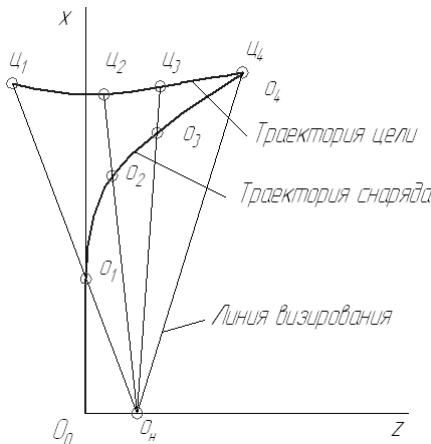


Рис. 7.3. Схема наведения по методу совмещения:

$O_0$  – точка старта;  $O_h$  – станция наведения

Как видим, коэффициент перегрузки является величиной векторной и может быть разложен на составляющие по осям выбранной системы координат, обычно по осям траекторийной системы координат:

$$n_{X_k} = \frac{P_T - R_T}{mg}; \quad n_{Y_k} = \frac{P_N + R_N}{mg}; \quad n_{Z_k} = \frac{P_Z + R_Z}{mg}. \quad (7.9)$$

Величины нормальной перегрузки  $n_{Y_k}$  и боковой перегрузки  $n_{Z_k}$  связаны с соответствующими радиусами кривизны траектории  $r_{Y_k}$  и  $r_{Z_k}$ : чем меньше радиус кривизны, тем больше перегрузка,

$$n_{Y_k} = \frac{1}{Y_{y_k}} \frac{V^2}{g} + \cos \theta; \quad n_{Z_k} = \frac{1}{r_{Z_k}} \frac{V^2 \cos \theta}{g}.$$

Опорную траекторию наведения и алгоритм управления выбирают с учетом потребных перегрузок  $n_i^{\text{потреб}}$ , которые не должны превышать располагаемые перегрузки  $n_i^{\text{расп}}$ , отвечающие максимальным отклонениям органов управления  $\delta_P^{\max}$ :  $n_{Y_k}^{\text{потреб}} + n_{Y_k}^{\text{зап}} \leq n_{Y_k}^{\text{расп}}$ , где  $n_{Y_k}^{\text{зап}}$  – коэффициент запаса перегрузки.

## 8. ДОННОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Эта часть аэродинамического сопротивления обусловлена понижением среднего давления на данной торцевой поверхности летящего тела или снаряда по сравнению с давлением в атмосфере  $P_\infty$  на высоте полета.

Обтекающий снаряд наружный поток интенсивно перемешивается с воздухом, находящимся в застойной зоне за дном тела, увлекая и описывая часть воздуха из застойной зоны. Так как новые пророги воздуха в застойную зону не поступают, в ней возникает разрежение ( $P\sigma < P_\infty$ ), что приводит к появлению силы донного сопротивления.  $X\sigma = (P_\infty - P\sigma)S\sigma$ , где  $S\sigma$  – площадь проекции донной поверхности на направление, нормальное оси снаряда.

Сила донного сопротивления действует против направления скорости тела. Возникновение донного сопротивления объясняется не обратимыми превращениями части образований за дном снаряда вихрей, а в сверхзвуковом потоке – хвостовых ударных волн. Отсасывающее

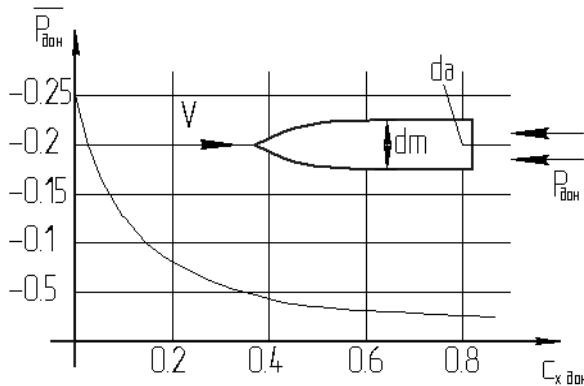
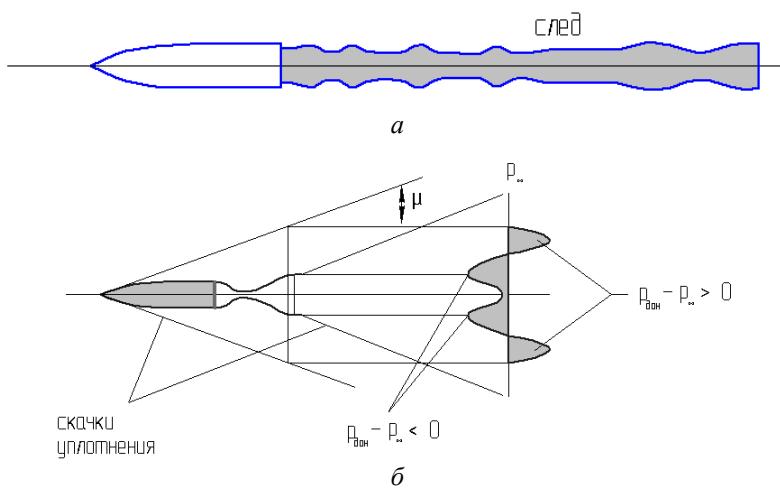


Рис. 8.1. Зависимость запоясовой части снаряда от скорости полета

действие наружного потока зависит от толщины пограничного слоя на боковой поверхности тела перед донным срезом, от формы головной части и главным образом от формы кормовой части снаряда, от скорости полета и в меньшей степени от угла атаки (рис. 8.1).



*Рис. 8.2* Аэродинамический след за снарядом при дозвуковых скоростях движения (*a*) и аэродинамический след и скачки уплотнения при движении снаряда со скоростью, соответствующей числу  $M = 22$  (*б*)

Экспериментальные данные изменения коэффициента донного давления в зависимости от коэффициента сопротивления головной части, отнесенного к данному срезу при дозвуковых скоростях полета (рис. 8.2).

---

## 9. ИЗМЕРЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СНАРЯДА

---

Полярным моментом инерции называется момент инерции снаряда относительно оси его симметрии (продольной оси), а экваториальным моментом инерции – момент инерции относительно оси, перпендикулярной оси симметрии и проходящей через центр масс снаряда.

Положение центра масс обычно определяется посредством уравновешивания снаряда на трехгранной призме или на тросе. После уравновешивания снаряда измеряется расстояние от его донного среза до центра масс с помощью мерной ленты и линейки.

Определение моментов инерции снарядов производится методом откачки их на трехнитяном подвесе.

Подвес состоит из стальной шайбы, укрепленной на специальной фермовой конструкции либо на потолочной балке здания, к которой на трех нитях подвешена стальная кольцевая обойма. Нити закреплены в шайбе болтами по окружности  $120^\circ$ . Нижние концы нитей проходят через отверстие в обойме и закрепляются винтами с гайками, с помощью которых регулируется длина нитей. В зависимости от калибра снаряда длина нити может быть от 3 до 8 метров.

Для определения полярного момента инерции снаряд устанавливают в обойму головной частью вниз и закрепляют с помощью переходного кольца, соответствующего калибру снаряда.

На наружной поверхности обоймы имеется указатель для регистрации угла поворота обоймы от положения равновесия по лимбу, установленному на стойке вблизи обоймы.

Для определения экваториального момента инерции снаряд помещают в специальную муфту так, чтобы его центр масс был совмещен с указателем, имеющимся на муфте. Муфту со снарядом закрепляют в центре тарели обоймы.

Перед откачкой производят горизонтизацию обоймы с закрепленным в ней снарядом и замеряют длину нитей. Откачка заключается в определении периода свободных кривильных колебаний обоймы со снарядом с помощью секундомера.

Теория многонитяного подвеса дает следующую формулу для периода свободных крутильных колебаний с бесконечно малой амплитудой:

$$T = \sqrt{\frac{I}{MR^2} \int_{-\varphi_0}^{+\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}},$$

где  $T$  – период колебаний;

$I$  – момент инерции колеблющейся системы;

$l$  – длина нитей подвеса;

$M$  – масса колеблющейся системы;

$R$  – радиус окружности закрепления нитей подвеса;

$\varphi$  – угловое перемещение колеблющейся системы;

$\varphi_0$  – начальное отклонение.

Применительно к рассматриваемому методу эту формулу можно упростить и ввести поправку на приведение экспериментально определенного периода колебаний к периоду колебаний с бесконечно малой амплитудой. Для удобства расчетов начальное угловое отклонение колеблющейся системы можно взять равным  $22,5^\circ$ .

Приближенная формула для периода колебаний имеет вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MR^2}}.$$

Отсюда

$$I = \frac{R^2}{4\pi^2 l} MT^2 = KMT^2,$$

где  $K$  – постоянная подвеса.

Практически снаряд откачивают следующим образом. Обойму со снарядом поворачивают на угол  $22,5^\circ$  и отпускают. С помощью секундомера определяют время десяти полных колебаний обоймы со снарядом и находят значение периода колебаний. Откачку повторяют пять раз. По значениям  $M$ ,  $K$  и  $T$  рассчитывают момент инерции колеблющейся системы, представляющий собой сумму моментов инерции деталей подвеса и закрепленного в нем снаряда.

Для нахождения момента инерции снаряда отдельно определяют откачкой момент инерции деталей подвеса с эталоном. В качестве эталона обычно используют стальной цилиндр, теоретические моменты которого известны. Моменты инерции снаряда методом откачки определяют с погрешностью порядка 0,5...1 %.

## 9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИСБАЛАНСА МАСС СНАРЯДА

Снаряд считается динамически неуравновешенным, если его ось центрования, проходящая через центры окружностей центрующих утолщений, не совпадает с главной осью инерции, т.е. имеется угловой перекос главной оси инерции относительно оси центрования.

Динамическая неуравновешенность снаряда выражается через дисбалансы, определяемые с помощью специальной балансировочной машины. Дисбаланс – это произведение приведенной смещенной массы снаряда в плоскости уравновешивания на расстояние ее от центра масс до оси вращения. Приведенной смещенной массой называют такую сосредоточенную массу, которая вызывает при вращении такую же центробежную силу, что и смещенная.

Динамически неуравновешенный снаряд можно уравновесить с помощью двух грузов, размещенных в двух плоскостях по обе стороны центра масс, при этом масса уравновешивающих грузов должна равняться смещенной массе, а сами грузы должны находиться с противоположной стороны смещенной массы. При такой схеме определение динамической неуравновешенности снаряда сводится к нахождению величины и мест расположения уравновешивающих грузов.

Для определения эксцентриситета центра масс снаряда можно использовать сравнительно простой метод качения снаряда на параллельных призмах. На цилиндрическую часть снаряда надевают резиновое кольцо, после чего снаряд кладут центрующими утолщениями на две параллельные призмы и слегка толкают. После того как снаряд остановится, его положение будет соответствовать расположению центра масс в вертикальной плоскости, проходящей через ось симметрии и ниже этой оси. Это положение фиксируют отметкой на донном срезе снаряда. Затем снаряд поворачивают на  $90^\circ$  и уравновешивают в этом положении подобранным цилиндрическим грузом, вкладываемым под резиновое кольцо.

Эксцентриситет определяется по формуле

$$x = \frac{m}{q} \frac{D + d}{2},$$

где  $x$  – эксцентриситет центра масс снаряда;

$q$  – масса снаряда;

$m$  – масса;

$D$  – диаметр цилиндрической части снаряда;

$d$  – диаметр уравновешивающего груза.

## 9.2. ПОВЕДЕНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СНАРЯДА НА ТРАЕКТОРИИ

Рассмотрим механизм появления прецессионного движения снаряда (рис. 9.1). Из основной теоремы гиростата следует, что он изменяет положение своей оси, двигаясь всегда под прямым углом к направлению действия внешней силы и в сторону своего вращения. В начале движения ось снаряда отходит от траектории (т.е. траектория опускается, а ось сохраняет направление бросания из ствола), результирующая сила сопротивления воздуха давит на снаряд снизу, и он по закону гиростата поворачивается в сторону вправо.

Далее голова снаряда поворачивается вверх, и таким образом цикл повторяется, т. е. голова снаряда описывает круг около траектории,

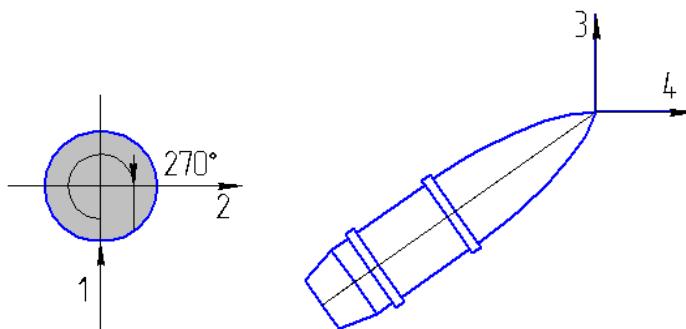
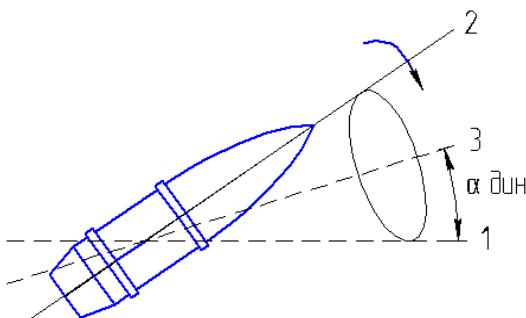


Рис. 9.1. Схема появления прецессионного движения снаряда:

1 – направление толчка; 2 – отклонение головы; 3 – действие силы сопротивления воздуха; 4 – поворот головы

а ось снаряда – коническую поверхность. Линия, около которой происходит это прецессионное движение, называется динамической осью (рис. 9.2).



*Рис. 9.2. Гирокоротический эффект.*

Углом нутации называется угол  $\alpha$  – отклонение оси снаряда от траектории.

Таким образом, снаряд одновременно участвует в трех движениях: прецессии; нутации; собственном вращении.

### 9.3. РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ И ПРАВИЛЬНОСТИ ПОЛЕТА СНАРЯДА

Математически условие гирокоротической устойчивости (условия сильного гироскопа) записывается:  $\sigma = 1 - \frac{\beta^2}{2} > 0$ , где  $\beta$  – угловое ускорение, опрокидывающего (дестабилизирующего) момента силы сопротивления воздуха при едином угле нутации;  $\alpha$  – угловая скорость прецессионного движения;  $\sigma$  – коэффициент устойчивости (рис. 9.3).

Результаты практики показывают, что при малых  $\sigma$  (близких к нулю) снаряд получает значительные недопустимые отклонения от траектории и имеет недостаточную гирокоротическую устойчивость. Значения  $\sigma = 1$  или близкие к ней соответствуют тому, что ось снаряда во время всего полета будет сохранять свое первоначальное положение. При этом будут возникать недопустимо большие углы атаки и будет завышена гирокоротическая устойчивость (перестабилизация).

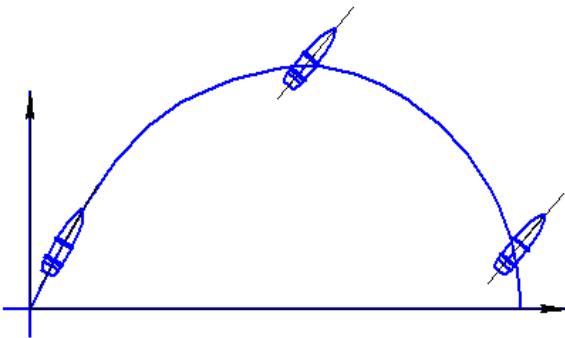


Рис. 9.3. Движение перестабилизированного снаряда

Анализируя расчетные зависимости, можно установить, что  $\sigma = 1$  при следующих условиях:

- собственная угловая скорость вращения снаряда стремится к бесконечности;
- плотность воздуха стремится к нулю.

При совпадении центра тяжести и центра давления, т.е.  $h = 0$ ,  $\alpha = \frac{cW_0}{\alpha A}$ , где  $A$  – экваториальный момент инерции,  $W_0$  – начальная угловая скорость вращения снаряда.

Следует отметить, что затухание собственного вращения снаряда происходит медленно и можно полагать  $\alpha = \text{const}$ ,

$$\beta = \frac{d^2 h}{gA} 10^3 H(y) V^2 K_M \left( \frac{V}{a} \right).$$

Наибольшее значение  $\beta$  будет в начальный момент, когда  $\sigma$  имеет наименьшее значение. Одновременно здесь наблюдаются и наибольшие возмущения движению снаряда (толчка схода и т.д.), и, удовлетворив требованиям устойчивости в начальный момент, мы обеспечим его для всей траектории, т.е.

$$\sigma_0^2 = 1 - \frac{p_0}{\alpha_2} > 0, \text{ где } \beta_0 = \frac{d^2 h}{gA} 10^3 V_0^2 K_M \left( \frac{V}{a} \right),$$

$$H(y) = 1 \text{ для } f = 0.$$

Из внутренней баллистики

$$W_0 = \frac{2\pi V_0}{\eta d},$$

где  $\eta$  — длина хода нареза в калибрах;  $d$  — калибр.

Тогда  $\alpha = \frac{cW_0}{2A} = \frac{\pi V_0 c}{A \eta d}.$

Применимельно к зависимостям курса проектирования снарядов:

$$\sigma = \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{\mu Cg} \frac{A}{C} \frac{h}{d} \frac{4}{\pi^2} k_M \left( \frac{V}{a} \right)},$$

где  $\mu$  — коэффициент осевого момента инерции (в среднем 0,4);  $C_q$  — относительный вес снаряда  $C_q = \left( \frac{q}{d^3} \right)$ .

Функция момента  $k_M \left( \frac{V}{a} \right)$  получена Вентцелем в результате обра-

ботки данных по опытным стрельбам 76 мм снарядом с длиной корпуса 4,5 клб. Стрельба велась по карточным щитам. Угол нутации в момент пробития определяется по эллиптичности отверстия. Функция изменяется слабо. Так,  $10^3 k_M$  составляет для скоростей от 0 до 200 м/с — 0,97; для 300 м/с — 1,13; 400 м/с — 1,39; 600 м/с — 1,35; 800 м/с — 1,32; 1100 м/с — 1,30.

Плечо опрокидывающего момента находится по зависимости  $h = Z_0 + Z_1$ , где  $Z_1$  — расстояние от центра тяжести до основания оживала;  $Z_0$  — расстояние от центра давления до основания оживала;  $Z_1$  определяется весовыми расчетами;  $Z_0 = 0,57$ ;  $H = 0,16$  клб для оживальной формы головной части. Оптимальной величиной  $\sigma$  считается 0,66 (максимум 0,80); нижний предел 0,30...0,40. При таких значениях  $\sigma$  быстро затухают начальные колебания и снаряд удовлетворительно следует за траекторией. Исходя из нужд практики и с учетом дополнительных опытов формула Вентцеля была преобразована и уточнена Перминым.

Необходимая крутизна нарезки орудия, требуемая для снаряда:

$$\eta_{\text{чн}} = 0,95 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{A}{C} \frac{\mu C g}{\frac{h}{d} k_M \left( \frac{V}{a} \right)}},$$

где  $\eta_{\text{чн}} \left( \frac{V}{a} \right)$  – функция Вентцеля, учитывающая фактическую длину снаряда  $k'_M \left( \frac{V}{a} \right) = k_M \left( \frac{V}{a} \right) \sqrt{\frac{4}{4,5}}$ ;

$\eta$  – длина данного снаряда в калибрах. Устойчивость считается обеспеченной, если  $\eta$  на два-три клб больше  $\eta_{\text{ср}}$ , т.е. фактическая ствольная нарезка круче требуемой, поскольку в расчетах устойчивости не учтены многие реальные факторы (точными стрельбами).

Вторым показателем правильности полета служит угол отклонения динамической оси на криволинейном участке траектории:

$$\alpha g = \frac{\pi g}{2} \frac{\mu G g V^2 d}{\eta_{\text{ср}}} \frac{\cos \theta}{H(y) V^3 k_M \left( \frac{V}{a} \right)}.$$

Чем меньше этот угол, тем лучше снаряд следит за траекторией, тем однообразнее ее полет и лучше кучность. Последний член в формуле показывает, что наибольших отклонений снаряда от оси касательной и траектории следует ожидать в вершине траектории, где  $\cos \theta$  максимальен и равен 1,  $H(y)$  – минимальная и мы имеем

$$\alpha g S = \frac{\pi g}{2} \frac{\mu G g V_0 d}{\eta_{\text{ср}} \frac{h}{d} H(y) V_S^3 k_M \left( \frac{V}{a} \right)},$$

где при  $\alpha g S$  меньше  $6^\circ$  полет снаряда оценивается как правильный.

Следует отметить, что оба показателя устойчивости являются противоречивыми, так как для уменьшения  $\alpha g S$  необходимо увеличивать  $\eta_{\text{ср}}$ , что снижает  $\sigma_0$ , и на практике часто приходится подбирать компромиссный вариант или несколько менять конструктивные характеристики снаряда (в первую очередь длину).

---

## 10. БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ СБОРНИКИ И ТАБЛИЦЫ

---

### 10.1. ПОНЯТИЕ О ЧИСЛЕННОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ

Ранее было показано, что уравнения движения снаряда в воздухе прямо не интегрируются и все полученные решения основываются на тех или иных упрощениях, снижающих точность расчетов. Такие упрощенные методы оправдывают себя на первом этапе разработки и проектирования снаряда, когда решаются задачи оценки тактических возможностей изделия и ошибка в определении максимальной дальности на 50...100 м несущественна. Для следующего этапа разработки, когда составляются таблицы стрельбы, трудоемкость метода и расчета и сложность вычисления имеют значительно меньшее значение.

Наиболее широко в артиллерийской практике применяется универсальный метод численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения, основанный на использовании конечных разностей. Наименьшие затраты времени дает система дифференциальных уравнений при аргументе  $x$ .

Траектория делится по оси на участки длиной 200...500 м (рис. 65). Для расчета каждого такого участка вычисляются с помощью арифметических действий или записывается из таблиц около 60 численных значений. Расчеты дают значения  $V, \Theta, t, Y$  для каждого участка. Данные для конца первого участка служат начальными для второго и т. д. Понятно, что расчет заканчивается в точке, когда  $Y_i$  становится равным нулю или отрицательным.

### 10.2. БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Все аналитические и численные методы расчета траекторий громоздки для целей практики, когда, например, производится выбор оптимальных параметров изделия и необходим расчет десятков и даже сотен различных вариантов.

Кроме того, в связи с невозможностью точно учесть все факторы абсолютно достоверных характеристик траектории или снаряда без какого-либо количества отстрелов при помощи даже самой точной методики получить нельзя.

В большинстве практически встречающихся случаев целесообразно использовать заранее составленные таблицы, содержащие основные элементы траекторий.

Параболическая теория дает, что все основные параметры траектории зависят только от начальной скорости  $V_0$  и угла бросания  $\Theta_0$ .

В реальных условиях очень сильно сказывается сопротивление воздуха. Наиболее полно влияние этого сопротивления выражается в величине баллистического коэффициента  $c$ , характеризующего снаряд и траекторию и способность снаряда терять поступательную скорость на полете:

$$c = \frac{id^2}{q} 10^3 \frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}}.$$

Здесь второй член зависит от  $\Theta_0$  и  $V_0$ , третий член – от  $V_0$ . Следовательно,  $\Theta_0$ ,  $V_0$  и  $c$  должны однозначно определить все остальные параметры траектории.

Наиболее применимым у нас сборником являются таблицы 1943 года, составленные при соответствующем законе и дающие все элементы траектории ( $V_c$ ,  $\Theta_c$ ,  $X$ ,  $Y$ ,  $T$ ) в зависимости от  $V_0$ ,  $\Theta_0$  и  $c$ . В приложении приведена таблица дальностей из таблиц 1943 года при угле бросания  $45^\circ$ .

Поскольку таблицы составлены с определенным шагом, а значения  $V_0$ ,  $\Theta_0$  и  $c$  часто не совпадают с табличными, приходится прибегать к интерполяции. Интерполяция чаще всего линейная, при которой полагают, что изменение функции пропорционально приращению аргумента.

Если заданное значение аргумента  $Z$  лежит между помещенными в таблице значениями  $Z_0$  и  $Z_1 = Z_0 + h$ , где  $h$  – шаг таблиц, которым соответствуют значения функции

$$X_0 = f(Z_0),$$

$$X_1 = f(Z_1) = f(Z_0) + \Delta,$$

где  $\Delta$  – шаг функции, соответствующий шагу аргумента, то математически

$$f(Z) = X = f(Z_0) + \frac{Z - Z_0}{h} + \Delta.$$

Рассмотрим пример нахождения максимальной дальности стрельбы с использованием таблиц 1943 года.

Дано: калибр снаряда  $d = 0,107$  м;

вес снаряда  $q = 17,04$  кг;

коэффициент формы  $i_{43} = 1,10$ ;

начальная скорость  $V_0 = 715$  м/с;

условия стрельбы – нормальные, то

$$c = \frac{id^2}{q} 10^3 \frac{\Pi_0}{\Pi_{ON}} = \frac{1,10 \cdot 1,107^2}{17,04} 10^3 \cdot 1 = 0,733.$$

Поскольку и скорость, и баллистический коэффициент не совпадают с табличными значениями, приходится производить двойную интерполяцию. Первую интерполяцию производим по скорости, а вторую – по баллистическому коэффициенту, а результаты сводим в табл. 10.1 ( $\Theta_0 = 45^\circ$ ).

Таблица 10.1

$V_0$	$c$		
	700	715	750
0,70	15 700	16 022	16 764
0,73		15 599	
0,75	15085	15 381	16 073

$$X_1 = 15700 + \frac{16764 - 15700}{50} 15 = 16022,$$

$$X_2 = 15085 + \frac{16073 - 15085}{50} 15 = 15381,$$

$$X = 16022 - \frac{16022 - 15381}{0,050} 0,033,$$

$$X = 15599.$$

### 10.3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПОПРАВОК

Теория поправок позволяет получить методы расчета изменения основных параметров траектории при незначительных изменениях исходных данных посредством определения поправок и обойтись без вторичного решения основной задачи внешней баллистики при изменившихся исходных данных.

Теория поправок важна и потому, что все баллистические сборники и таблицы стрельбы составлены только для нормальных условий и решение задач расчета траекторий в условиях, отличных от нормальных, например, при другой температуре или другом атмосферном давлении, находится с помощью поправок.

Основными параметрами в теории поправок называют:  $c$  – баллистический коэффициент;  $V_0$  – начальную скорость;  $\Theta_0$  – угол бросания, а через  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  обозначают другие факторы, от которых зависят элементы траекторий и которые не учтены при решении основной задачи внешней баллистики.

Наибольший интерес для практики представляют поправки к полной горизонтальной дальности. Полагая дальность как функцию основных и вспомогательных параметров, имеем

$$X = f(c_1, V_0, \Theta_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n).$$

Рассмотрим малое изменение параметров в частных производных:

$$\delta X = \frac{dX}{dc} \delta c + \frac{dX}{dV_0} \delta V_0 + \frac{dX}{d\Theta_0} \delta \Theta_0 + \frac{dX}{d\alpha_1} \delta \alpha_1 + \dots$$

Частные производные по соответствующему параметру называются поправочными коэффициентами. Определив их (в числе других способов с помощью баллистических таблиц) и зная отклонение условий от нормальных, можно вычислить  $\delta X$ .

Пример 1. В случае изменения только начальной скорости имеем

$$\delta X = \frac{dX}{dV_0} \delta V_0$$

и при  $\delta V_0 = 1$  м/с изменение дальности равно баллистическому коэффициенту. Из примера, рассмотренного в этой главе, имеем

$$X'(c = 0,70, \quad \Theta_0 = 45^\circ, \quad V_0 = 700 \text{ м/с}) = 15\ 700;$$

$$X_2(c = 0,70, \quad \Theta_0 = 45^\circ, \quad V_0 = 750 \text{ м/с}) = 16\ 764;$$

$$\frac{dX}{dV_0} = \frac{\Delta X}{\Delta V_0} = \frac{X_2 - X_1}{\Delta V_0} = \frac{16\ 764 - 15\ 700}{50} = 21,3 \text{ м},$$

т. е. при изменении скорости в данных условиях на 1 м/с дальность изменяется на 21,3 м.

П р и м е р 2. Найти поправочный коэффициент при изменении веса снаряда на  $\delta q$  ( $q$  – неосновной параметр, и его нужно выразить через  $c$ ):

$$c = \frac{id^2}{q} 10^3.$$

Логарифмируем по натуральному логарифму:

$$\ln c = \ln i + 2 \ln d + \ln 10^3 - \ln q.$$

Дифференцируем:

$$\frac{dc}{c} = -\frac{dq}{q}$$

и переходим к малым приращениям:

$$\delta c = -\frac{\delta q}{q} c.$$

Следует учесть, что от изменения веса изменяется начальная скорость снаряда. Из внутренней баллистики известно:

$$\delta X = \left| \frac{dX}{dc} \right| \delta c + \left| \frac{dX}{dV_0} \right| \delta V_0.$$

Первый поправочный коэффициент отрицательный, поскольку при увеличении  $c$  дальность падает, а поправочный коэффициент при  $V_0$

положительный, так как при увеличении  $V_0$  дальность растет. Окончательно с учетом знаков получаем:

$$\delta X = \frac{dX}{dc} \frac{\delta q}{q} c - 0,4 \frac{dX}{dV_0} \frac{\delta q}{q} V_0.$$

Малые изменения веса слабо влияют на дальность из-за наличия положительной и отрицательной поправок.

Вращение отечественных снарядов происходит слева вверх направо. В соответствии с этим динамическая ось смешена вправо от плоскости бросания, что дает отклонение снарядов в эту же сторону. Это отклонение снарядов вправо от линии бросания называется деривацией. Эмпирическая зависимость для деривации имеет следующий вид:

$$Z = k_{z1} \frac{X \operatorname{tg} \Theta_0}{\eta},$$

где  $k_{z1}$  – коэффициент (находится опытным путем по результатам отстрелов).

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дмитриевский А.А. Движение ракет (Введение в теорию полета ракет) / А.А. Дмитриевский и др. – М.: Воениздат, 1968.
2. Шапиро Я.М. Внешняя баллистика / Я.М. Шапиро. – М.: Оборонгиз, 1946.
3. Шапиро И.И. Расчет траекторий баллистических снарядов по данным радиолокационных наблюдений / И.И. Шапиро. – М.: ИЛ, 1961.
4. Вентцель Д.А. Внешняя баллистика / Д.А. Вентцель, Я.М. Шапиро. – М.: Оборонгиз, 1939.
5. Майевский Н.В. Курс внешней баллистики / Н.В. Майевский. – Санкт-Петербург, 1870.
6. Фабер Т.Е. Гидроаэродинамика. Постмаркет / Т.Е. Фабер. – М., 2001.
7. Абгарян К.А. Динамика ракет / К.А. Абгарян, И.М. Рапопорт. – М.: Машиностроение, 1969.
8. Вентцель Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1964.
9. Локк А.С. Управление снарядами / А.С. Локк. – М.: ГИТТЛ, 1957.
10. Чурбанов Е.В. Краткий курс баллистики БГТУ «ВОЕНМЕХ» / Е.В. Чурбанов. – СПб.: Изд-во БГТУ, 2006. – 291 с.
11. Физический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. Предмет и задачи внешней баллистики. История развития.....	3
<b>1. Параболическая теория .....</b>	<b>6</b>
1.1. Движение центра массы снаряда в пустоте параболическая теория	6
1.2. Исследование уравнения траектории .....	8
1.3. Элементы траектории в произвольной ее точке .....	9
1.4. Исследование семейства траекторий с одинаковой начальной скоростью.....	11
1.5. Зависимость угла прицеливания от угла места цели при постоян- ной наклонной дальности .....	15
1.6. Относительное время пребывания снаряда в слое .....	18
1.7. Средняя высота траектории .....	20
1.8. Поправочные формулы, отвечающие малым изменениям пара- метров $V_0$ и $\theta_0$ .....	21
1.9. Применение параболической теории .....	22
<b>2. Движение снаряда в воздушном пространстве .....</b>	<b>24</b>
2.1. Сопротивление воздуха .....	24
2.2. Некоторые теоретические зависимости для идеальных газов .....	25
2.2.1. Теория Ньютона .....	25
2.2.2. Уравнение Бернулли .....	26
2.2.3. Теория плоского скачка давления.....	29
2.2.4. Динамический адиабатический закон. Формула Гюгоно .....	35
2.2.5. Давление в вершине снаряда. Формула Рэля .....	36
2.3. Физические факторы, определяющие сопротивление воздуха ар- тиллерийским снарядом.....	39
2.3.1. Вязкость .....	39
2.3.2. Образование вихрей .....	41
2.3.3. Образование баллистической волны .....	42
2.3.4. Эффект Магнуса .....	44
2.4. Общее выражение для силы сопротивления воздуха .....	49
2.5. Ускорение силы сопротивления воздуха .....	52
2.6. Опытное изучение сопротивления воздуха .....	53
2.7. Определение скорости снаряда.....	54
2.8. Законы сопротивления воздуха .....	65
2.9. Показатель сопротивления воздуха.....	68

2.10. Распределение давления на поверхности снаряда .....	69
2.11. Баллистические характеристики снарядов .....	70
2.12. Баллистический коэффициент .....	73
2.13. Наивыгоднейшая форма снаряда.....	74
<b>3. Основная задача внешней баллистики.....</b>	<b>76</b>
3.1. Различные системы дифференциальных уравнений.....	77
3.1.1. Система уравнений при аргументе $\theta$ .....	78
3.1.2. Система уравнений при аргументе $x$ .....	79
3.1.3. Уравнение годографа .....	80
3.2. Общие свойства траекторий в воздухе.....	81
3.3. Исследования изменения скорости вдоль траектории.....	86
3.4. Исследование кривизны траектории .....	88
3.5. Высота траектории.....	89
3.6. Угол наибольшей дальности .....	91
3.7. Приближенные аналитические методы решения основной задачи внешней баллистики .....	92
3.7.1. Определение элементов траектории.....	92
3.7.2. Вычисление траекторий по дугам методом Эйлера.....	95
3.7.3. Таблицы Отто–Сиаччи.....	97
3.7.4. Определение элементов траектории по таблицам Отто–Сиаччи	99
<b>4. Силы, действующие на снаряд в полете.....</b>	<b>101</b>
4.1. Элементы теории гироскопов .....	101
4.2. Силы, действующие на снаряд в воздухе.....	111
4.3. Условия гироскопической устойчивости полета артиллерийского снаряда .....	116
4.3.1. Оценка устойчивости полета снаряда по формуле профессора И.А. Забудского .....	116
4.3.2. Оценка гироскопической устойчивости полета артиллерийского снаряда по методу профессора С.П. Петровича.....	119
4.3.3. Формула для оценки гироскопической устойчивости снарядов на полете, предложенная де Спэррэ .....	120
4.3.4. Формула Валье .....	120
4.3.5. Формула академика А.И. Крылова .....	121
4.3.6. Формула Шарбене .....	123
4.3.7. Критерий гироскопической устойчивости полета артиллерийского снаряда, предложенный профессором Б.Н. Окуневым ....	124
4.3.8. Формула профессора Д.А. Вентцеля .....	131
4.4. Правильность полета снаряда в воздушной среде .....	134

<b>5. Расчет траектории реактивного снаряда .....</b>	145
5.1. Реактивная сила.....	145
5.2. Расчет активного участка траектории .....	147
5.3. Расчет пассивных участков траектории .....	151
<b>6. Особенности движения оперенного снаряда.....</b>	153
6.1. Поступательное движение оперенного снаряда .....	153
6.2. Колебательное движение оперенного снаряда .....	156
6.3. Условия устойчивости оперенного снаряда .....	158
<b>7. Особенности движения управляемого снаряда.....</b>	161
7.1. Управляющие силы и моменты .....	161
7.2. Уравнения движения управляемого снаряда .....	164
7.3. Наведение снаряда на цель.....	167
<b>8. Донное сопротивление .....</b>	170
<b>9. Измерение параметров снаряда .....</b>	172
9.1. Определение дисбаланса масс снаряда .....	174
9.2. Поведение вращающегося снаряда на траектории.....	175
9.3. Расчет устойчивости и правильности полета снаряда .....	176
<b>10. Баллистические сборники и таблицы.....</b>	180
10.1. Понятие о численном интегрировании .....	180
10.2. Баллистические таблицы .....	180
10.3. Основные понятия теории поправок .....	183
Библиографический список .....	185

**Гуськов Анатолий Васильевич  
 Милевский Константин Евгеньевич  
 Сотенко Андрей Владимирович**

### ВНЕШНЯЯ БАЛЛИСТИКА

#### Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*  
 Выпускающий редактор *И.П. Брованова*  
 Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*  
 Компьютерная верстка *В.Ф. Ноздрева*

Подписано в печать 17.06.2010. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 100 экз.  
 Уч.-изд. л. 10,92. Печ. л. 11,75. Изд. № 376. Заказ № . Цена договорная

Отпечатано в типографии  
 Новосибирского государственного технического университета  
 630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20