

УДК 623.5

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗЛЕТА ОСКОЛКОВ  
ПРИ СРАБАТЫВАНИИ СНАРЯДА НА ТРАЕКТОРИИ  
MATHEMATICAL MODELING OF DISPERSION OF FRAGMENTS BY ACTIVATION  
OF WHIZBANG ON TRAJECTORY**

*Акад. РАРАН А.М. Липанов, И.Г. Русяк, В.А. Тененев, В.Г. Суфиянов*

*Ижевский государственный технический университет имени М.Т. Калашникова*

*A.M. Lipanov, I.G. Rusyak, V.A. Tenenev, V.G. Sufiyanov*

В статье представлена математическая модель разлета осколков после срабатывания снаряда на траектории, которая описывается системой дифференциальных уравнений при заданных значениях начальных скоростей и направлений движения. Начальные скорости движения осколков получены на основе закона сохранения энергии, с учетом скорости движения снаряда в точке подрыва, скорости ветра, а также воздействия ударной волны, образующейся при детонации взрывчатого вещества. На основе теории точечного взрыва проведена оценка влияния ударной волны на движение осколков.

*Ключевые слова:* ударная волна, взрывчатые вещества, математическое моделирование.

The paper presents the mathematical model of scattering of fragments after operation of a shell on a trajectory, which described by system of the differential equations with given initial velocity and direction of movement. The initial velocity of the fragments obtained on the basis of the law of conservation of energy, taking into account the velocity of the projectile at the point of detonation, wind speed, as well as the impact of the shock wave generated by the detonation of explosives. Based on the theory of point explosion assess the impact of the shock on the movement of fragments.

*Keywords:* shock wave, explosives, mathematical modeling.

Определение максимальной скорости при одномерном метании оболочек проводилось в соответствии с работой [1]. Метание оболочки заряда, ее разрушение и разлет осколков происходит за счет энергии, выделяющейся при детонации взрывчатого вещества (ВВ). Если ВВ заключено в оболочку, масса которой существенно превосходит массу ВВ, то при расчете скорости оболочки можно, в первом приближении, пользоваться гипотезой мгновенной детонации, поскольку отражение волн произойдет несколько раз, прежде чем оболочка разрушится и осколки начнут разлетаться.

Максимальную скорость разлета элементов (осколков) оболочки одинаковой толщины для закрытого со всех сторон заряда (например,

шара или длинного цилиндра) можно определить из уравнения

$$mQ = E_c + E_k + E_{\text{п}} + E_{\text{ф}} + \frac{Mu^2}{2}, \quad (1)$$

где  $u$  — максимальная скорость разлета осколков,  $M$  — масса оболочки,  $m$  — масса ВВ,  $Q$  — теплота взрывчатого разложения,  $E_c$  — энергия, которая передается среде, окружающей оболочку,  $E_k$  — кинетическая энергия продуктов детонации (ПД),  $E_{\text{п}}$  — внутренняя потенциальная энергия ПД,  $E_{\text{ф}}$  — энергия формоизменения (затрачивается на пластическую деформацию оболочки и ее разрушение).

Уравнение энергии (1) при взрыве в воздухе перепишем в виде

$$mQ = W\rho_{\text{в}} u^2 \frac{k_{\text{пд}} + 1}{2} \left[ \left( \frac{R}{R_0} \right)^N - 1 \right] + \frac{mu^2}{\psi(n)} +$$

$$+ m \left[ \frac{A}{a_0} \exp\left(-\frac{7a_0}{\rho_0}\right) + \frac{C}{\mu - 1} \left( \frac{7}{\rho_0} \right)^{1-\mu} \right] +$$

$$+ \frac{M}{\rho_M} A_f + \frac{Mu^2}{2}, \quad (2)$$

откуда величина максимальной скорости разлета осколков определится выражением

$$u = \sqrt{\frac{mQ - m \left[ \frac{A}{a_0} \exp\left(-\frac{7a_0}{\rho_0}\right) + \frac{C}{\mu - 1} \left( \frac{7}{\rho_0} \right)^{1-\mu} \right] - \frac{M}{\rho_M} A_f}{W\rho_{\text{в}} \frac{k_{\text{пд}} + 1}{2} \left[ \left( \frac{R}{R_0} \right)^N - 1 \right] + \frac{m}{\psi(n)} + \frac{M}{2}}}, \quad (3)$$

где  $R_0$  — начальный внешний радиус оболочки;  $R$ ,  $W$  — внешний радиус и объем оболочки в момент, соответствующий достижению максимальной скорости разлета осколков, соответственно;  $\rho_M$  — плотность оболочки;  $\rho_0$  — плотность взрывчатого вещества;  $\rho_{\text{в}}$  — плотность невозмущенного воздуха;  $A$ ,  $C$ ,  $a_0$ ,  $\mu$  — эмпирические параметры уравнения изоэнтропы ПД в форме Ми-Грюнайзена [2]  $p = A \exp(-a_0 w) + C w^{-\mu}$ , где  $w = 1/\rho$  — удельный объем ПД;  $k_{\text{пд}}$  — показатель уравнения изоэнтропы ПД (принимался  $k_{\text{пд}} = 3,0$ );  $A_f$  — энергия разрушения единицы объема материала оболочки. Параметр  $N$  и вид функции  $\psi(n)$  зависят от геометрической формы взрыва: для плоской формы взрыва  $N = 1$  и  $\psi(n) = 2(2n + 1)$ , цилиндрической —  $N = 2$  и  $\psi(n) = 2n + 2$ , сферической —  $N = 3$  и  $\psi(n) = 2(2n + 3)/3$ . В расчетах числовой параметр  $n$  принимался равным 1.

Параметры уравнения изоэнтропы для некоторых взрывчатых веществ [1] приведены в табл. 1.

Численные значения энергии разрушения для некоторых материалов приведены в табл. 2.

Полученные значения скорости разлета оболочки являются начальными условиями для дальнейшего расчета движения осколков.

### Методика расчета движения осколков

В работе [3] движение осколка в воздухе рассматривается при следующих допущениях:

- 1) плотность воздуха вдоль траектории постоянна  $\rho = \rho_{\text{в}}$ ;
- 2) влияние силы тяжести пренебрежимо мало;
- 3) коэффициент лобового сопротивления  $c_d$  не зависит от скорости осколка;
- 4) площадь миделя осколка на траектории можно считать равной среднему значению  $\langle s \rangle$ .

Из этих допущений оставим только четвертое. Для коэффициента сопротивления используем аппроксимационную зависимость от скорости движения тела в соответствии с работой [1]:

$$c_d(u) = \begin{cases} 0,5, & u \leq 150 \text{ м/с}; \\ (1,49 + 0,51 \sin(860 - 350 \lg u))^{-1}, & 150 < u \leq 550 \text{ м/с}; \\ 0,865 \left( 1 + \frac{50}{u} \right), & u > 550 \text{ м/с}. \end{cases} \quad (4)$$

Кроме того, в отличие от [3], при расчете траектории движения осколков будем учитывать скорость ветра, скорость снаряда и угловую скорость вращения снаряда в момент взрыва [4, 5].

Уравнения движения осколка в таком случае имеют вид [6]:

Таблица 1  
Параметры уравнения изоэнтропы  
для различных ВВ

ВВ	$\rho_0$ , г/см <sup>3</sup>	$A$ , ГПа	$C$ , $\frac{\text{ГПа} \cdot \text{м}^3 \mu}{\text{кг}^\mu}$	$a_0$ , г/см <sup>3</sup>	$\mu$
Тротил	1,63	521,7	1,762	7,876	1,6
ТГ 50/50	1,67	453,9	1,940	7,281	1,6

Таблица 2  
Энергия разрушения единицы объема материала

Материал	$A_f$ , МПа
Алюминий	68
Алюминиевый сплав	95
Медь	150
Титан	196
Мягкая сталь	200
Латунь	233
Нержавеющая сталь	275

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= -\frac{\Phi c_d (|\mathbf{u} - \mathbf{v}|)}{2m_s^{1/3} \rho_M^{2/3}} \rho |\mathbf{u} - \mathbf{v}| (u_x - v_x), \\ \frac{du_y}{dt} &= -\frac{\Phi c_d (|\mathbf{u} - \mathbf{v}|)}{2m_s^{1/3} \rho_M^{2/3}} \rho |\mathbf{u} - \mathbf{v}| (u_y - v_y) - g, \quad (5) \\ \frac{du_z}{dt} &= -\frac{\Phi c_d (|\mathbf{u} - \mathbf{v}|)}{2m_s^{1/3} \rho_M^{2/3}} \rho |\mathbf{u} - \mathbf{v}| (u_z - v_z), \\ \frac{dx}{dt} &= u_x, \quad \frac{dy}{dt} = u_y, \quad \frac{dz}{dt} = u_z. \end{aligned}$$

Начальные условия при  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} x(0) &= X_k, \quad y(0) = Y_k, \quad z(0) = Z_k, \\ u_x(0) &= (u_{\max} \sin \varphi + \Omega_k R_0 \sin \varphi \cos \Theta_k) \cos \vartheta + V_x, \\ u_y(0) &= u_{\max} \cos \varphi - \Omega_k R_0 \sin \varphi \cos \Theta_k + V_y, \\ u_z(0) &= (u_{\max} \sin \varphi + \Omega_k R_0 \cos \varphi) \sin \vartheta + V_z, \end{aligned}$$

где  $X_k, Y_k, Z_k$  — координаты точки взрыва;  $\varphi, \vartheta$  — сферические координаты, определяющие направление движения осколка в меридиональных и экваториальных плоскостях:  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $\vartheta \in [0, 2\pi]$ ;  $u_{\max}$  — максимальная скорость осколка при разрушении оболочки, определяемая по формуле (3);  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$  — вектор скорости осколков;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\Phi$  — параметр формы осколка;  $\Theta_k = \arctan(V_y/V_x)$  — угол наклона траектории снаряда в точке подрыва;  $\rho$  — плотность воздуха;  $\rho_M, m_s$  — плотность материала и масса осколка, соответственно. Скорость воздуха  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$  определяется скоростью ветра  $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)^T$  и скоростью течения за ударной волной  $v(t, r)$ :

$$\begin{aligned} v_x &= v(t, r) \sqrt{1 - \left(\frac{y - Y_k}{r}\right)^2} \frac{x - X_k}{\sqrt{(x - X_k)^2 + (y - Y_k)^2}} + w_x, \\ v_z &= v(t, r) \sqrt{1 - \left(\frac{y - Y_k}{r}\right)^2} \frac{z - Z_k}{\sqrt{(x - X_k)^2 + (z - Z_k)^2}} + w_z, \\ r &= \sqrt{(x - X_k)^2 + (y - Y_k)^2 + (z - Z_k)^2}. \end{aligned}$$

Расчет движения осколков проводится в стартовой системе координат снаряда, в которой ось  $x$  направлена по дирекционному углу орудия.

## Методика численного решения дифференциальных уравнений

Система обыкновенных дифференциальных уравнений записывается в виде обобщенного уравнения:

$$\frac{dF_i(t)}{dt} = f_i(t, F_1, \dots, F_N), \quad i = 1, \dots, N. \quad (6)$$

В качестве базового метода решения уравнения (5) использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации с заданной величиной шага интегрирования по времени [7, 8]:

$$F_i(t + \Delta t) = F_i(t) + \frac{\Delta t}{6} (k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} k_{1,i} &= f_i(t, F_i(t)), \\ k_{2,i} &= f_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}, F_i(t) + \frac{k_{1,i}}{2} \Delta t\right), \\ k_{3,i} &= f_i\left(t + \frac{\Delta t}{2}, F_i(t) + \frac{k_{2,i}}{2} \Delta t\right), \\ k_{4,i} &= f_i(t + \Delta t, F_i(t) + k_{3,i} \Delta t). \end{aligned}$$

## Течение воздуха за ударной волной

Первая фаза движения осколков после разлета происходит в условиях распространения ударной волны, возникающей при взрыве снаряда. Оценку параметров течения за ударной волной проведем на основе теории точечного взрыва [9]. Система дифференциальных уравнений в сферических координатах имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{k-1}{2} a \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial r} + (N-1) \frac{av}{r} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{2}{k-1} a \frac{\partial a}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{a^2 v}{k-1} \frac{\partial \ln e}{\partial r}, \quad (8) \\ \frac{\partial e}{\partial t} + v \frac{\partial e}{\partial r} &= 0, \end{aligned}$$

где  $a$  — скорость звука;  $e = p/\rho^k$  — энтропия;  $p$  — давление;  $k$  — показатель адиабаты воздуха;  $N = 3$  для сферической системы координат. Решение системы уравнений (8) получено в виде [10]:

$$v = \frac{r}{t} V(\lambda);$$

$$\rho(V) = \rho_B \frac{k+1}{k-1} \left( \frac{\alpha_5 - V}{\alpha_5 - V(1)} \right)^{\alpha_6} \times$$

$$\times \left( \frac{V - \alpha_1}{V(1) - \alpha_1} \right)^{\alpha_7} \left( \frac{V - \alpha_3}{V(1) - \alpha_3} \right)^{\alpha_8};$$

$$\lambda = b \frac{t^2}{r^{N+2}};$$

$$\lambda(V) = \left( \frac{V}{V(1)} \right)^2 \left( \frac{V - \alpha_1}{V(1) - \alpha_1} \right)^{-\alpha_2} \left( \frac{V - \alpha_3}{V(1) - \alpha_3} \right)^{-\alpha_4},$$

где  $b = 1,175 E_c / \rho_B$  — параметр, учитывающий энергию взрыва;

$$\alpha_1 = \frac{2}{k(N+2)}; \quad \alpha_2 = \frac{(k-1)(N+2)}{N+2(k-1)};$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{\frac{k-1}{2}N+1};$$

$$\alpha_4 = \frac{k^2(N^2+4) - k(3N^2-8N+4) + 4N(N-2)}{2(N+2(k-1))} \alpha_3;$$

$$\alpha_5 = \frac{2}{N+2}; \quad \alpha_6 = \frac{2}{k-2}; \quad \alpha_7 = \frac{1-\alpha_5}{\alpha_5(k-2)+1};$$

$$\alpha_8 = \frac{2}{(k-2)\alpha_5+1} \times$$

$$\times \left[ \frac{\alpha_5}{\alpha_5(k-2)+1-k} \left( \frac{k-1}{2} \frac{k}{\alpha_5(k-2)+1} + 1 \right) + \alpha_5 \right].$$

Координата и скорость ударной волны определяются выражениями:

$$r^* = b \frac{1}{N+2} t^{\frac{2}{N+2}}, \quad v^* = \alpha_5 \sqrt{b} (r^*)^{-\frac{N}{2}}. \quad (9)$$

Расчет параметров ударной волны проводится при начальных значениях, соответствующих  $r^* = R$ . Теория точечного взрыва применима при выполнении условия сильной ударной волны  $v^*/a \gg 1$ , когда скорость ударной волны  $v^*$  много больше скорости звука  $a$  в невозмущенном воздухе. Учет противодействия осуществляется с использованием результатов численного решения уравнений газовой динамики (8). С момента времени  $t_p$  результаты численных расчетов  $r^*$ ,  $v^*$  с

учетом противодействия аппроксимируются следующими зависимостями:

$$\left( \frac{r^*}{r_p^*} \right)^{1,69} = 1,69 v_p^* (r_p^*)^{0,69} (t - t_p), \quad \frac{v^*}{v_p^*} = \left( \frac{r_p^*}{r^*} \right)^{0,69},$$

$$t \geq t_p, \quad (10)$$

где

$$r_p^* = \left( \frac{\alpha_5 \sqrt{b}}{v_p^*} \right)^{\frac{2}{N}},$$

$$v_p^* = 2a,$$

$$t_p = \left( \frac{r_p^*}{b \frac{1}{N+2}} \right)^{\frac{N+2}{2}} —$$

точка стыковки автомодельного и не автомодельного режимов.

На рис. 1 показаны результаты расчета изменения скорости ударной волны и скорости течения воздуха за ударной волной с течением времени после срабатывания снаряда массой  $M = 30$  кг с зарядом массой  $m = 5$  кг и теплотой взрывчатого разложения  $Q = 4180000$  Дж/кг.

### Оценка влияния ударной волны

Рассчитаем движение осколков массой  $m_s = 10$  г при взрыве снаряда массой  $M = 30$  кг с зарядом массой  $m = 5$  кг и теплотой взрывчатого разложения  $Q = 4180000$  Дж/кг. Начальные условия:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 20 \text{ м}, \quad z(0) = 0,$$

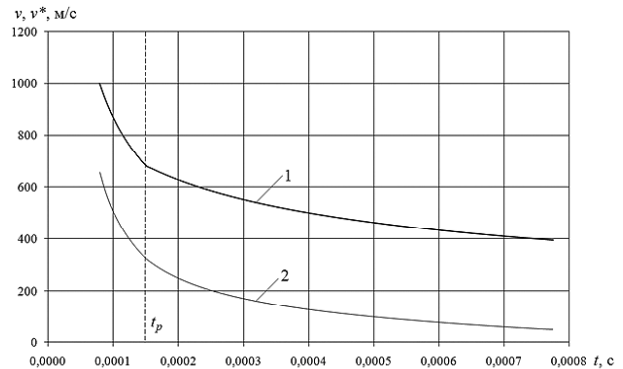


Рис. 1. Графики зависимости изменения скорости ударной волны (1) и скорости течения воздуха (2) за ударной волной от времени

$$V_x = 500 \text{ м/с}, \quad V_y = 0, \quad V_z = 0,$$

$$\Phi = 2, \quad \rho_M = 8900 \text{ кг/м}^3,$$

$$w_x = 0, \quad w_y = 0, \quad w_z = 0,$$

$$\Omega_k = 0, \quad R_0 = 0,076 \text{ м.}$$

Начальное направление движения осколков определяется углами  $\varphi = 135^\circ$ ,  $\vartheta = 0 \div 360^\circ$ . На рис. 2 в плоскости  $(x, z)$  показана граница поражающего действия осколка при  $y = 0$ , кинетическая энергия которого удовлетворяет условию  $m_s |\mathbf{u}|^2 / 2 \leq W_{кр} = 100 \text{ Дж}$ .

Сплошная линия на рис. 2 определяет границу поражающего действия осколка без учета влияния ударной волны, точки отображают расчетные данные с учетом влияния ударной волны. Видим, что рассчитанные границы практически не отличаются друг от друга.

На рис. 3 показано перемещение ударной волны  $r^*(t)$  (кривая 1) и осколка  $r(t)$  (кривая 2).

Как видно из графиков, осколок движется за фронтом ударной волны непродолжительное время  $t \approx 0,00078 \text{ с}$ , затем обгоняет ударную волну. Скорость осколка при этом изменяется незначительно. После обгона ударной волны осколок движется далее в неподвижной среде. При самом сильном влиянии ударной волны ( $\vartheta = 180^\circ$ ) разница в величине скорости всего  $1,5 \text{ м/с}$ . При полете осколка в направлении движения снаряда ( $\vartheta = 0^\circ$ ) его скорость сразу превышает скорость ударной

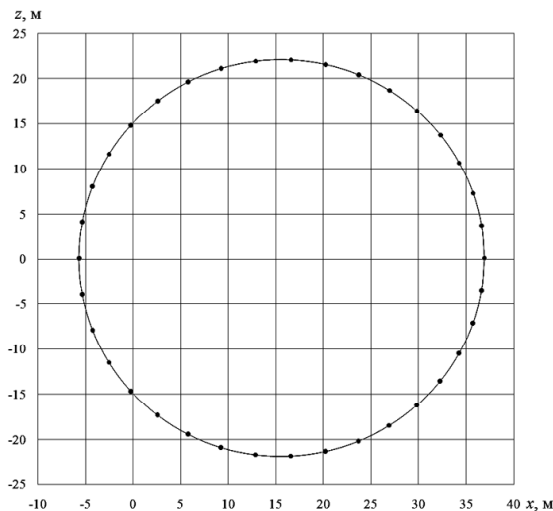


Рис. 2. Граница поражающего действия осколка массой  $m_s = 10 \text{ г}$

волны. Таким образом, осколок подвергается воздействию ударной волны в течение очень малого времени и ее влиянием можно пренебречь.

### Оценка влияния вращения снаряда

Расчет траектории осколка массой  $m_s = 10 \text{ г}$  проводился до выполнения условия:  $y = 0$ . Как и в предыдущем примере, примем  $M = 30 \text{ кг}$ ,  $m = 5 \text{ кг}$ ,  $Q = 4180000 \text{ Дж/кг}$ . Начальные условия:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 20 \text{ м}, \quad z(0) = 0,$$

$$V_x = 500 \text{ м/с}, \quad V_y = -50 \text{ м/с}, \quad V_z = 0,$$

$$\Phi = 2, \quad \rho_M = 8900 \text{ кг/м}^3,$$

$$w_x = 0, \quad w_y = 0, \quad w_z = 10 \text{ м/с}, \quad \Omega_k = 1200 \text{ с}^{-1},$$

$$R_0 = 0,076 \text{ м.}$$

Расчет проводился при изменении  $\varphi = 45^\circ \div 315^\circ$  с шагом  $\Delta\varphi = 5^\circ$  и  $\vartheta = 0 \div 360^\circ$  с шагом  $\Delta\vartheta = 10^\circ$ . Распределение точек падения осколков на плоскости  $(x, z)$  представлено на рис. 4, а — без учета вращения снаряда и на рис. 4, б — с учетом вращения снаряда.

Как видно из рис. 4, вращение снаряда оказывает существенное влияние на разлет осколков, при этом асимметрия поля распределения осколков в плоскости  $(x, z)$ , обусловленная ветром в случае не вращающегося снаряда (рис. 4, а), усиливается вращением снаряда (рис. 4, б). При падении осколков на землю рассчитывалась величина суммарной энергии:

$$E_\Sigma = \sum_i \frac{m_s |\mathbf{u}_i|^2}{2},$$

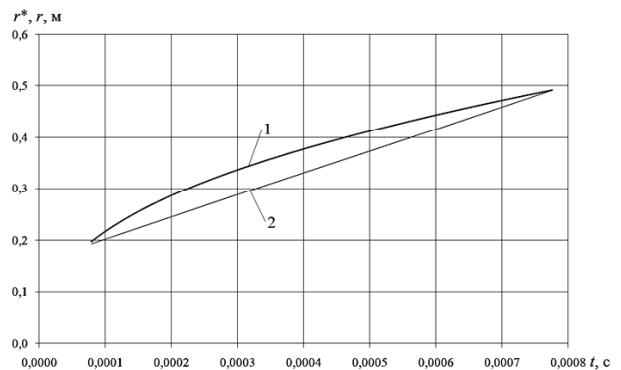


Рис. 3. Координаты ударной волны (1) и осколка (2)

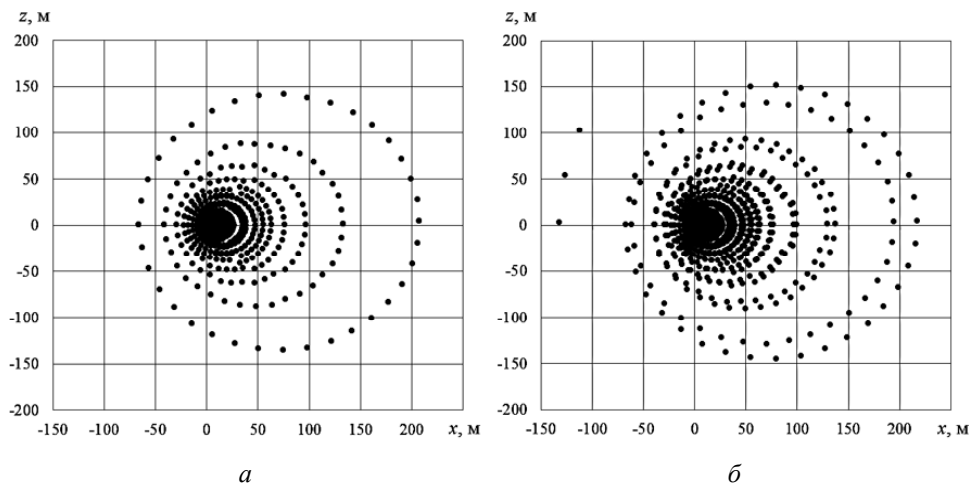


Рис. 4. Распределение осколков в плоскости:  
*а* — без учета вращения снаряда; *б* — с учетом вращения снаряда

где  $E_{\Sigma}$  — суммарная энергия осколков,  $u_i$  — скорость осколка, движущегося по  $i$ -й траектории при его падении на землю.

Без учета вращения было получено  $E_{\Sigma} = 2833409,1$  Дж, с учетом вращения  $E_{\Sigma} = 2853424,8$  Дж. Таким образом, учет вращения снаряда добавляет 0,7% кинетической энергии осколков. Отметим, что учет ударной волны при отсутствии вращения дает приращение суммарной энергии только на 0,08%.

### Выводы

Разработана методика решения задачи разлета осколков. Получены зависимости для начальной скорости разлета осколков. На основе теории точечного взрыва дана оценка влияния ударной волны на движение осколков, которая показывает, что вследствие очень малого времени воздействия ударной волны на осколок ее влиянием можно пренебречь. Показано, что вращение существенным образом влияет на распределение осколков в зоне поражения.

### Литература

1. Физика взрыва / Под ред. Л.П. Орленко. Изд. 3-е, испр. В 2 т. Т. 1. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 832 с.

2. Зубарев В.Н., Евстигнеев А. А. Уравнения состояния продуктов взрыва конденсированных ВВ // ФГВ. Т. 20, № 6. 1984. — С. 114–126.

3. Балаганский И.А., Мерзневский Л.А. Действие средств поражения и боеприпасов. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. — 408 с.

4. Коновалов А. А, Николаев Ю. В. Внешняя баллистика. — М.: ЦНИИ информации, 1979. — 228 с.

5. Липанов А.М., Вагин А.В., Русак И.Г., Суфиянов В.Г. Моделирование различных стадий процесса выстрела и полигонных испытаний артиллерийских систем // Сборник трудов Восьмой всероссийской конференции «Внутрикамерные процессы и горение в установках на твердом топливе и ствольных системах» (ICOC'2014). — Ижевск, 2014. — С. 194–212.

6. Ландау Л.Д. Лифшиц Л.М. Теоретическая физика. В 10 томах. Т. I. Механика. — М.: Наука, 1988. — 288 с.

7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.

8. Verner J.H. Some Runge-Kutta formula pairs. — SIAM J. Numer. Anal. 28. 1991. — pp. 496–511.

9. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Гостехиздат, 1957. — 376 с.

10. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. 2 часть. — М.: Изд-во физико-математической литературы, 1963. — 728 с.