

Профессор ШАПИРО Я. М.  
Доктор технических наук

Б 644

Ш 23

# ВНЕШНЯЯ БАЛИСТИКА

стр. 54 (6)

Опечатки				
Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть	По чьей вине
29	5 снизу	$\frac{\kappa p}{\rho} = \alpha^2$	$\frac{\kappa p}{\rho} = \alpha^2$	корр.
78	3 "	$(\Theta)_b$	$(\Theta)_b$	тип.
226	8 "	$-v^2 e^{i\gamma} +$	$-v^2 e^{i\gamma} +$	корр.
283	2 сверху	$r_Y$	$r_Y$	корр.

Я. М. Шапиро, Внешняя баллистика,

Зак. 727.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ОБОРОННОЙ  
ПРОМЫШЛЕННОСТИ  
Москва 1946

## ВВЕДЕНИЕ

### § 1. Предмет внешней баллистики

Настоящая книга является учебником по внешней баллистике, предназначенным для слушателей Артиллерийской Академии КА и студентов технических вузов.

В книге дается систематическое изложение всех вопросов внешней баллистики, с которыми встречаются артиллерийские инженеры, работники заводов, полигонов и научно-исследовательских институтов.

Баллистика — наука о движении снаряда. По характеру сил, действующих на снаряд в различные периоды его движения, баллистику разделяют на два основных раздела: внутреннюю баллистику и внешнюю баллистику.

Внутренняя баллистика изучает движение снаряда в канале ствола под действием давления пороховых газов. Внешняя баллистика изучает движение снаряда в воздухе под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха.

При вылете снаряда из канала ствола пороховые газы, вырываясь вслед за снарядом, имеют вначале скорость большую, чем скорость снаряда. Поэтому, ударяя о дно снаряда, газы увеличивают его скорость в течение некоторого времени, а сами опережают снаряд. Изучение движения газов в этом периоде, называемом периодом последействия газов, составляет предмет промежуточной баллистики, рассматриваемой обычно как раздел внутренней баллистики.

Период последействия газов мало изучен как теоретически, так и экспериментально. Установлено, что увеличение скорости в этом периоде незначительно. Поэтому во внешней баллистике полагают, что снаряд с момента вылета из канала ствола не подвергается действию пороховых газов, но при этом принимают начальную скорость несколько большей фактической скорости снаряда у дула. Начальную скорость определяют поовым опытным стрельбам так, чтобы в конце участка последействия газов вычисленная скорость снаряда равнялась фактической (глава IX). Таким образом последействие газов учитывают косвенно.

Задача о движении снаряда в воздухе сводится к интегрированию системы шести совокупных дифференциальных уравнений: трех уравнений движения центра массы снаряда и трех уравнений вращения снаряда около его центра массы. Однако в таком виде изучение движения снаряда встречает большие трудности.

Так как для решения большинства практических задач вполне достаточно знать поступательное движение снаряда, то сначала изучают движение центра массы снаряда без учета вращательного его движения. При этом полагают ось снаряда совпадающей с касательной к траектории центра массы снаряда и, кроме того, принимают нормальными метеорологические и баллистические условия. Интегрирование уравнений движения центра массы снаряда при указанных допущениях является основной задачей внешней баллистики.

Вращательное движение снаряда изучается по отношению к центру массы снаряда, движение которого определяется основной задачей внешней баллистики.

Учет влияния на полет снаряда аномальных метеорологических и баллистических условий стрельбы составляет содержание теории поправок.

Редактор С. Г. Боженцов.

Техн. ред. И. М. Зудакин

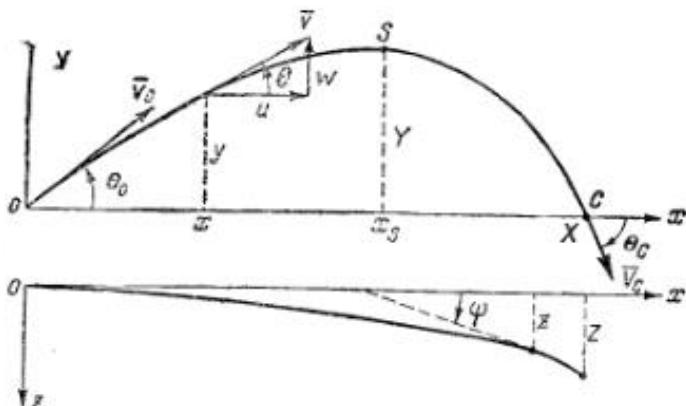
Г806877. Попд. в печать 6/VII 1946 г. Тираж 4000. Печ. л. 29½ + 1 вкл.  
Уч.-изд. л. 33,2. Тип. зн. в печ. л. 43 000. Цена в пер. 30 р. Зэк. 727/4007.

Набрано в 1-ой Образцовой типографии треста «Полиграфкнига» Огиза  
при Совете Министров РСФСР. Москва, Валовая, 28.

Отпечатано в типографии Оборонизда.

## § 2. Основные обозначения и определения

Положение снаряда определяется относительно правой системы прямоугольных координат. Начало координат полагают совпадающим с точкой вылета снаряда (черт. 1).



Черт. 1

Плоскость  $x_0y$  — вертикальная плоскость, проходящая через вектор начальной скорости снаряда (плоскость бросания).

Плоскость  $x_0z$  — плоскость горизонта в начале координат. Ось  $oz$  считают направленной вправо от плоскости бросания, если смотреть по направлению стрельбы.

Обозначения элементов траектории следующие:

$x, y, z$  — координаты центра массы снаряда;

$s$  — длина дуги траектории;

$t$  — время полета;

$\theta$  — угол наклона к горизонту касательной к траектории;

$v$  — скорость снаряда;

$u, w$  — горизонтальная и вертикальная проекции скорости.

Значения элементов траектории в точке вылета отмечаются индексом 0; например:  $v_0, \theta_0$ .

Значения элементов траектории в вершине отмечаются индексом  $s$ ; например:  $v_s, x_s$ .

Значения элементов траектории в точке падения отмечаются индексом  $c$ ; например:  $v_c, \theta_c$ .

Некоторым наиболее важным элементам дают особые обозначения и названия; например:

полная горизонтальная дальность  $X = x_c$ ;

полное время полета  $T = t_c$ ;

высота траектории  $Y = y_s$ ;

боковое отклонение в точке падения  $Z = z_c$ ;

угол бросания  $\theta_0$ ;

угол падения  $\theta_c$ ;

окончательная скорость  $v_c$ .

Угол  $\theta$  положителен на восходящей и отрицателен на нисходящей ветви траектории.

Вес снаряда —  $q$ .

Калибр снаряда —  $d$ .

Система единиц — килограмм (кг), метр (м), секунда (сек.).

## Глава I

### ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА МАССЫ СНАРЯДА В ПУСТОТЕ (ПАРАБОЛИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ)

Движущийся в воздухе снаряд подвержен действию двух сил: силы тяжести и силы сопротивления воздуха. Обычно сила сопротивления воздуха больше силы тяжести. В некоторых случаях, например, при стрельбе снарядом крупного калибра с малой начальной скоростью или при полете снаряда в разреженных слоях атмосферы, сила сопротивления воздуха может быть значительно меньше силы тяжести.

В настоящей главе рассматриваются законы движения снаряда в пустоте, т. е. при сопротивлении воздуха, равном нулю. Эти законы являются предельными по отношению к законам движения снаряда в воздухе при сопротивлении воздуха, стремящемся к нулю. Некоторые зависимости, выводимые в параболической теории, могут быть в первом приближении распространены на траекторию движения снаряда в воздухе.

#### § 3. Сила тяжести. Ускорение Корiolisса

Земля представляет собой сплюснутый сфероид, средний радиус которого равен  $R = 6,371 \cdot 10^6 \text{ м} = 6371 \text{ км}$ . При решении основной задачи внешней баллистики пренебрегают кривизной земли и определяют дальность на плоскости горизонта орудия, которая несколько отличается от дальности на поверхности земли. Для дальностей, меньших 50 км, эта разница пренебрежимо мала.

Земля, вращаясь вокруг своей оси, делает один оборот за звездные сутки, равные 23 часам, 56 минутам, 4 секундам или 86164 сек. Угловая скорость вращения земли равна соответственно

$$\Omega = \frac{2\pi}{86164} = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}^{-1}$$

Ускорение силы тяжести  $\bar{g}$  складывается из ускорения силы притяжения земли  $\bar{G}$ , направленного к центру земли, и центростремительного ускорения  $R \cos \lambda \Omega^2$ , направленного перпендикулярно оси земного шара, как показано на черт. 2;  $\lambda$  — географическая широта места.

Таким образом имеем

$$\bar{g} = \bar{G} + R \Omega^2 \cos \lambda$$

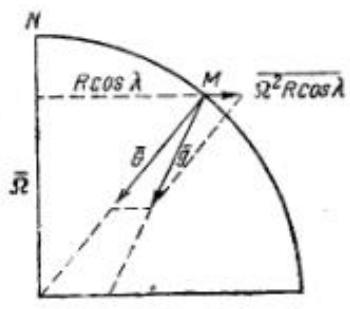
Из треугольника, составленного указанными векторами, имеем

$$g^2 = G^2 - 2G\Omega^2 R \cos^2 \lambda + \Omega^4 R^2 \cos^2 \lambda,$$

$$g = G \left[ 1 - 2 \frac{\Omega^2 R}{G} \cos^2 \lambda + \left( \frac{\Omega^2 R}{G} \right)^2 \cos^2 \lambda \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Оценим максимальное значение величины центростремительного ускорения  $\Omega^2 R \cos \lambda$ . Принимая  $\lambda = 0$ , получим

$$\Omega^2 R = (7,292 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 6,371 \cdot 10^6 = 0,034 \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$$



Черт. 2

Отношение этой величины к ускорению силы притяжения земли  $G$  получается порядка

$$\frac{\Omega^2 R}{G} = \frac{0,034}{9,81} = 0,0035.$$

Таким образом центробежное ускорение от вращения земли имеет максимальную величину порядка  $0,35\%$  по отношению к ускорению силы притяжения земли. Разлагая по биному выражение (1) и пренебрегая квадратами малой по сравнению с единицей величины  $\frac{\Omega^2 R}{G}$ , получим

$$g = G - \Omega^2 R \cos^2 \lambda. \quad (2)$$

На экваторе  $\lambda = 0$ ;  $g = G - \Omega^2 R$ . На полюсе, где  $g = G$ , ускорение силы тяжести имеет наибольшее значение. Наибольшее изменение ускорения силы тяжести по формуле (2) получается равным  $\Omega^2 R = 0,034$ . В действительности это изменение больше и составляет величину порядка  $0,052$ . Разница объясняется влиянием сплюснутости земли, вызывающей возрастание притяжения при перемещении от экватора к полюсу.

Зависимость ускорения силы тяжести от широты показана в табл. 1.

Таблица 1

$\lambda$	$0^\circ$	$20^\circ$	$40^\circ$	$60^\circ$	$80^\circ$	$90^\circ$
$g$	9,780	9,786	9,801	9,819	9,830	9,832

Ускорение силы тяжести обратно пропорционально квадрату расстояния снаряда до центра земли. Поэтому, рассматривая некоторое превышение снаряда над горизонтом  $y$ , найдем

$$g_y = g_0 \frac{R^2}{(R+y)^2} = g_0 \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-2}.$$

Разлагая последнее выражение по биному и пренебрегая малыми величинами порядка  $\left(\frac{y}{R}\right)^2$ , получим  $g_y = g_0 \left(1 - 2\frac{y}{R}\right)$ .

Рассматривая очень большие дальности (порядка 200 км), при которых высота траектории может достигать 60 км, получим

$$2\frac{y}{R} = 2\frac{60}{6371} = 0,019;$$

таким образом максимальное изменение силы тяжести не превышает  $2\%$ .

Траекторию снаряда рассматривают в системе координат связанной с горизонтом точки вылета. При этом (черт. 3) направление ускорения силы тяжести будет изменяться вдоль траектории. Горизонтальная составляющая ускорения силы тяжести будет наибольшей в точке падения  $C$ .

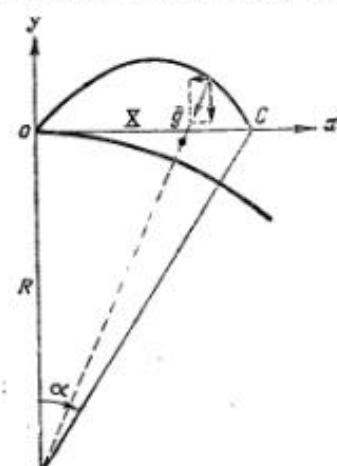
При горизонтальной дальности порядка  $X = 200$  км отношение составляющих  $g_x$  и  $g_y$  получим из выражения

$$\frac{g_x}{g_y} = \tan \alpha = \frac{200}{6371} = 0,0314,$$

$$\alpha = 1^\circ 48'.$$

Черт. 3

Так как изменение силы тяжести по величине и направлению в зависимости от рассмотренных факторов мало, то оно не учитывается при решении основной задачи внешней баллистики. При этом  $g$  принимается равным  $9,81$  м/сек $^2$ .



Для больших дальностей влияние изменения ускорения силы тяжести может быть учтено методами, рассматриваемыми в теории поправок (см. главу VII).

При изучении движения снаряда на вращающейся земле необходимо еще учесть силу инерции Кориолиса. Ускорение Кориолиса

$$j_c = 2\Omega v \sin(\bar{v}, \bar{\Omega}).$$

Наибольшая величина этого ускорения (при скорости снаряда  $v = 1000$  м/сек)

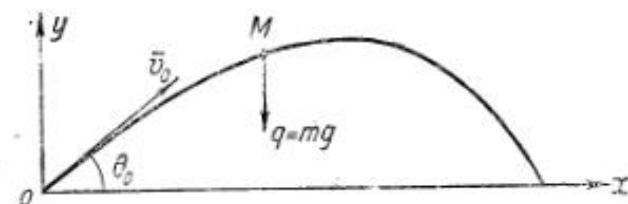
$$2\Omega v = 2 \cdot 7,292 \cdot 10^{-5} \cdot 10^3 = 0,146,$$

что составляет  $1,5\%$  от величины ускорения силы тяжести. Ускорение Кориолиса не учитывается при решении основной задачи внешней баллистики. Для больших дальностей, порядка 50 км, влияние этого фактора учитывается методами, рассматриваемыми в теории поправок (см. главу VII).

#### § 4. Составление и интегрирование дифференциальных уравнений движения

Рассмотрим некоторую точку траектории  $M$  (черт. 4). Учитывая единственную силу  $q = mg$ , действующую на снаряд, получим следующую систему дифференциальных уравнений движения:

$$m\ddot{x} = 0; m\ddot{y} = -q = -mg$$



Черт. 4

или после сокращения на  $m$

$$\ddot{x} = 0; \ddot{y} = -g.$$

Начальные условия: при  $t = 0$ ;  $x = 0$  и  $y = 0$ .

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta_0; \dot{y} = v_0 \sin \theta_0.$$

Так как вес снаряда не входит ни в дифференциальные уравнения, ни в начальные условия, то получим непосредственно следующий вывод:

Движение центра массы снаряда в пустоте не зависит от его веса.

Интегрируя систему (3) первый раз, получим

$$\dot{x} = C_1; \dot{y} = -gt + C_2.$$

Из начальных условий находим

$$C_1 = v_0 \cos \theta_0; C_2 = v_0 \sin \theta_0$$

и первые интегралы системы (3) получим в следующем виде:

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta_0; \dot{y} = v_0 \sin \theta_0 - gt. \quad (4)$$

Имея в виду, что  $\dot{x} = u$  (горизонтальной проекции скорости), получим из первого уравнения системы (4) следующий вывод:

При движении в пустоте горизонтальная проекция скорости остается постоянной вдоль траектории.

Интегрируя систему (4), получим

$$x = v_0 \cos \theta_0 t + C_3; y = v_0 \sin \theta_0 t - \frac{gt^2}{2} + C_4.$$

Из начальных условий находим  $C_3 = C_4 = 0$  и окончательно

$$\left. \begin{aligned} x &= v_0 \cos \theta_0 t, \\ y &= v_0 \sin \theta_0 t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Исключая переменную  $t$  из (5), получим уравнение траектории

$$y = x \tan \theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}. \quad (6)$$

### § 5. Исследование уравнения траектории

Уравнение траектории (6) есть уравнение кривой второго порядка, общий вид которого

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Вычислим дискриминант  $B^2 - AC$  для уравнения траектории. В данном случае  $B$  и  $C$  равны нулю, так как уравнение траектории не содержит членов с произведением  $xy$  или с  $y^2$ ; следовательно,

$$B^2 - AC = 0.$$

Известно, что если дискриминант  $B^2 - AC$  равен нулю, то кривая второго порядка является параболой. Следовательно, *траектория в пустоте есть парабола*.

Перепишем уравнение (6) в следующем виде:

$$y = ax - bx^2. \quad (7)$$

Приравнивая  $y$  нулю,

$$ax - bx^2 = x(a - bx) = 0,$$

наайдем

$$x_1 = 0; \quad x_2 = \frac{a}{b}.$$

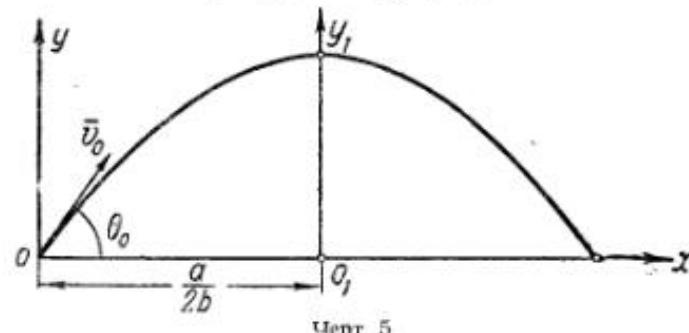
Первое решение отвечает точке вылета, второе — точке падения. Полная горизонтальная дальность равна

$$X = x_2 = \frac{a}{b}.$$

Перенесем начало координат вдоль оси  $x$  на расстояние половины полной дальности.

Переходя от старых координат к новым (черт. 5)

$$y = y_1; \quad x = \frac{a}{2b} + x_1$$



Черт. 5

и подставляя их значения в уравнение (7), получим

$$y_1 = a\left(\frac{a}{2b} + x_1\right) - b\left(\frac{a}{2b} + x_1\right)^2$$

или окончательно

$$y_1 = \frac{a^3}{4b} - bx_1^2.$$

Это уравнение параболы, в котором отсутствуют нечетные степени  $x$ . Следовательно, новая ось  $y$  является осью симметрии параболы, так как двум произвольным значениям  $x = +k$  и  $x = -k$  отвечает одно и то же значение  $y$ . Получаем следующий вывод:

*Траектория в пустоте имеет вертикальную ось симметрии, отстоящую от точки вылета на расстоянии половины полной дальности.*

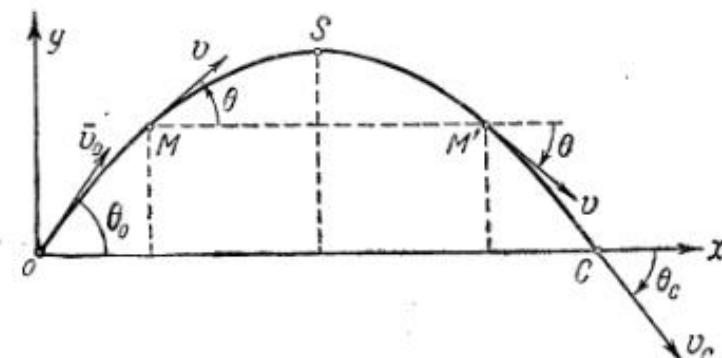
### § 6. Элементы траектории в произвольной ее точке

Элементы траектории  $x$  и  $y$  были получены непосредственно при интегрировании дифференциальных уравнений движения. Найдем выражения для величины и направления вектора скорости.

#### Скорость снаряда

Для определения скорости снаряда в произвольной точке траектории составим уравнение живых сил (черт. 6):

$$\frac{qv^2}{2g} - \frac{qv_0^2}{2g} = -mgy,$$



Черт. 6

откуда

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy}. \quad (8)$$

Из уравнения (8) непосредственно получим следующие два свойства:

1. Скорости в двух точках траектории, находящихся на одной высоте, равны.

Следствие: окончательная скорость равна начальной.

2. Скорость снаряда убывает с высотой. Минимальная скорость снаряда имеет место в вершине.

#### Угол наклона касательной

Дифференцируя уравнение траекторий (6) и имея в виду, что  $\frac{dy}{dx} = \tan \theta$ , получим выражение

$$\tan \theta = \tan \theta_0 - \frac{gx}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0}. \quad (9)$$

Согласно принятому положительному направлению отсчета углов  $\theta$  против часовой стрелки от горизонта к касательной, этот угол полу-

жителен на восходящей ветви траектории и отрицателен на нисходящей.

Ранее мы видели, что траектория имеет вертикальную ось симметрии. Следовательно, в двух точках траектории, находящихся на одной высоте, углы наклона касательной по абсолютной величине должны быть равны. Отсюда частное следствие:

*Угол падения по абсолютной величине равен углу бросания.*

### § 7. Элементы точки падения и вершины

Из уравнения траектории (6), полагая  $y=0$ , получим для точки падения:

$$X = \frac{2v_0^2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} \theta_0}{g}$$

или окончательно

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}. \quad (10)$$

Из выражения (5) для  $x$  имеем

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta_0}.$$

Подставляя значение  $x=X$  из выражения (10), получим после очевидных преобразований

$$T = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}. \quad (11)$$

Ранее мы имели

$$v_c = v_0; \quad |\theta_c| = \theta_0. \quad (12)$$

Для вершины траектории имеем

$$x_s = \frac{X}{2} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{2g}.$$

Подставляя значение  $x_s$  в уравнение траектории (6), получим после простейших преобразований

$$Y = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}. \quad (13)$$

Последнее выражение может быть приведено к следующему виду.

$$Y = \frac{X \operatorname{tg} \theta_0}{4}, \quad (13')$$

в чем легко убедиться путем подстановки значения  $X$  из выражения (10).

Для времени полета имеем

$$t_s = \frac{x_s}{v_0 \cos \theta_0} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{2g v_0 \cos \theta_0}$$

или окончательно

$$t_s = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} = \frac{T}{2}. \quad (14)$$

### § 8. Исследование семейства траекторий с одинаковой начальной скоростью

#### 1. Угол наибольшей дальности

Из выражения (10) для полной горизонтальной дальности

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

следует непосредственно, что наибольшая дальность отвечает углу бросания, при котором  $\sin 2\theta_0 = 1$ , т. е.  $\theta_0 = 45^\circ$ . При этом

$$X_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

При угле бросания  $\theta_0 = 90^\circ - a$  получим

$$X = \frac{v_0^2}{g} \sin 2(90^\circ - a) = \frac{v_0^2}{g} \sin (180^\circ - 2a) = \frac{v_0^2 \sin 2a}{g}.$$

Таким образом одну и ту же полную дальность мы можем получить при двух различных углах бросания:  $a$  и  $90^\circ - a$ .

#### 2. Огибающая семейства траекторий. Парабола безопасности

Напишем уравнение семейства траекторий, отвечающих различным углам бросания, в следующем виде:

$$y = xp_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 - p_0^2), \quad (15)$$

где  $p_0 = \operatorname{tg} \theta_0$  — параметр семейства кривых.

Для отыскания огибающей семейства кривых необходимо продифференцировать уравнение семейства по параметру и из полученного уравнения и уравнения семейства исключить параметр. Дифференцируя уравнение (15) по параметру  $p_0$ , получим

$$0 = x - \frac{gx^2}{v_0^2} p_0; \quad p_0 = \frac{v_0^2}{gx}.$$

Подставляя значение  $p_0$  в (15), получаем уравнение огибающей

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (16)$$

В этом уравнении отсутствуют нечетные степени  $x$ . Следовательно, ось  $y$  является осью симметрии параболы, определяемой уравнением (16).

Решая уравнение (15) относительно  $p_0 = \operatorname{tg} \theta_0$ , получим

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} p_0^2 - xp_0 + \frac{gx^2}{2v_0^2} + y = 0,$$

$$p_0 = \frac{v_0^2}{gx^2} \left[ x \pm \sqrt{x^2 - \frac{2gx^2}{v_0^2} \left( \frac{gx^2}{2v_0^2} + y \right)} \right]$$

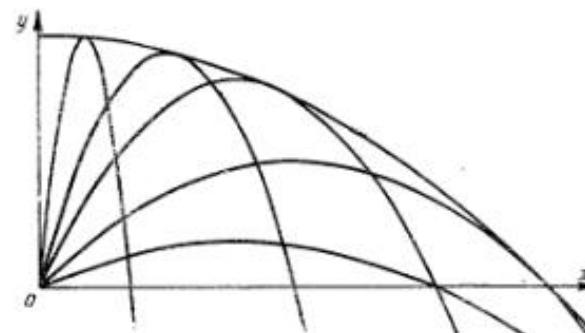
или окончательно

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{v_0^2}{gx} \left[ 1 \pm \sqrt{\frac{2g}{v_0^2} \left( \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - y \right)} \right]. \quad (17)$$

Для точек, находящихся на огибающей (черт. 7), выражение в круглых скобках на основании уравнения (16) обращается в нуль. При этом из уравнения (17) получаем единственное значение  $\theta_0$ .

Для точек, находящихся внутри огибающей, имеем

$$y < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$



Черт. 7

При этом получаем два решения для  $\theta_0$ .

Для точек, находящихся вне огибающей, получаем мнимое решение. В результате получаем следующий вывод:

*Любая точка внутри огибающей может быть поражена при двух установках угла бросания. Точка, находящаяся на огибающей, может быть поражена при одной установке угла бросания. Ни одна точка вне огибающей не может быть поражена.*

Огибающая семейства траекторий носит название параболы безопасности. Смысл этого названия ясен из указанных выше свойств огибающей.

### 3. Закон понижений. Построение изохрон

Из уравнения траектории (6)

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0},$$

подставляя во втором слагаемом правой части  $x = v_0 \cos \theta_0 t$ , получим

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$x \operatorname{tg} \theta_0 - y = \frac{gt^2}{2}. \quad (18)$$

Черт. 8

Из черт. 8 видно, что

$$x \operatorname{tg} \theta_0 - y = AB - MB = AM.$$

Назовем отрезок  $AM$  понижением под линией выстрела, а отрезок  $OA$  — удалением вдоль линии выстрела и найдем значения этих величин.

Из выражения (18) видно, что понижение под линией выстрела зависит только от времени полета и не зависит от угла бросания.

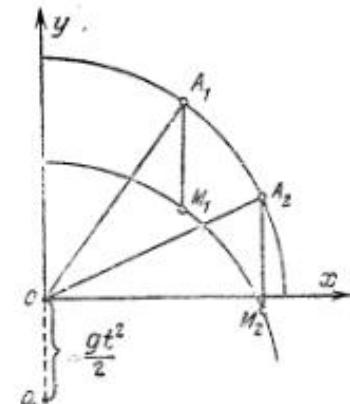
Удаление вдоль линии выстрела также зависит только от времени полета, так как

$$OA = \frac{x}{\cos \theta_0} = \frac{v_0 \cos \theta_0 t}{\cos \theta_0} = v_0 t.$$

Таким образом получаем следующий вывод:

Для различных траекторий, отвечающих одной и той же начальной скорости, равным временам полета соответствуют равные понижения под линией выстрела и равные удаления вдоль линии выстрела.

На этом основании можно построить так называемые изохроны или кривые равных времен полета (черт. 9). Чтобы построить изохрону, отвечающую некоторому времени  $t_1$ , надо построить окружность с радиусом, равным  $v_0 t_1$ , и с центром в точке с координатами  $x = 0$ ;  $y = -\frac{gt_1^2}{2}$ . Действительно, изохона получается путем понижения всех точек окружности равных удалений  $v_0 t_1$  на величину  $\frac{gt_1^2}{2}$ .



Черт. 9

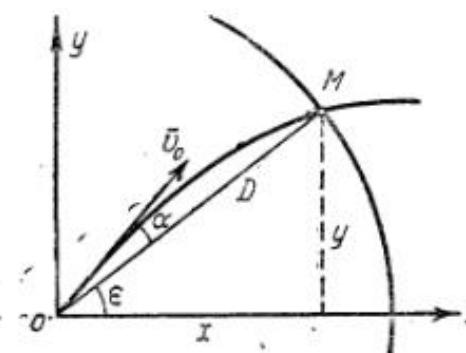
### § 9. Зависимость угла прицеливания от угла места цели при постоянной наклонной дальности

Рассмотрим случай, когда цель  $M$  может занимать различные положения на окружности, отвечающей некоторой наклонной дальности  $D$  (черт. 10). При этом имеем зависимость

$$\theta_0 = \alpha + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — угол места цели, образованный линией цели и горизонтом орудия, а  $\alpha$  — угол прицеливания, составленный линией цели и линией выстрела.

Исследуем характер изменения угла прицеливания  $\alpha$  в зависимости от изменения угла места цели  $\varepsilon$  для заданной наклонной дальности  $D$ , т. е. для случая, когда цель перемещается по окружности радиуса  $D$ .



Черт. 10

Из уравнения траектории (6)

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0},$$

подставляя  $x = D \cos \varepsilon$ ;  $y = D \sin \varepsilon$ ;  $\theta_0 = \alpha + \varepsilon$ , получим после сокращения на  $D$

$$\sin \varepsilon = \cos \varepsilon \operatorname{tg} (\alpha + \varepsilon) - \frac{g D \cos^2 \varepsilon}{2v_0^2 \cos^2 (\alpha + \varepsilon)},$$

$$D = \frac{2v_0^2 \cos^2 (\alpha + \varepsilon)}{g \cos^2 \varepsilon} [\cos \varepsilon \operatorname{tg} (\alpha + \varepsilon) - \sin \varepsilon] =$$

$$= \frac{2v_0^2 \cos (\alpha + \varepsilon)}{g \cos^2 \varepsilon} [\cos \varepsilon \sin (\alpha + \varepsilon) - \sin \varepsilon \cos (\alpha + \varepsilon)]$$

или окончательно

$$D = \frac{2v_0^2 \cos (\alpha + \varepsilon) \sin \varepsilon}{g \cos^2 \varepsilon}. \quad (19)$$

Если задать постоянное значение наклонной дальности  $D$ , то уравнение (19) будет выражать зависимость между углом прицеливания и углом места цели при данном значении наклонной дальности.

Решим уравнение (19) относительно  $\alpha$ , для чего преобразуем числитель второго множителя правой части уравнения:

$$\begin{aligned} 2\sin \alpha \cos(\alpha + \varepsilon) &= 2\sin \alpha (\cos \alpha \cos \varepsilon - \sin \alpha \sin \varepsilon) = \\ &= \sin 2\alpha \cos \varepsilon - 2\sin^2 \alpha \sin \varepsilon = \sin 2\alpha \cos \varepsilon - (1 - \cos 2\alpha) \sin \varepsilon = \\ &= \sin 2\alpha \cos \varepsilon + \cos 2\alpha \sin \varepsilon - \sin \varepsilon = \sin(2\alpha + \varepsilon) - \sin \varepsilon. \end{aligned}$$

Подставляя уравнение (19), получим

$$\sin(2\alpha + \varepsilon) = \frac{gD}{v_0^2} \cos^2 \varepsilon + \sin \varepsilon. \quad (20)$$

Задаваясь определенными значениями  $D$  и  $\varepsilon$ , можно вычислить  $2\alpha + \varepsilon$ , а затем и угол  $\alpha$ .

Дальности траекторий в пустоте, в том числе и наклонные дальности, обычно значительно превышают соответствующие дальности в воздухе. Поэтому, имея в виду применение полученных зависимостей, хотя бы в первом приближении, для траекторий в воздухе, необходимо из (20) исключить наклонную дальность  $D$ .

Вместо наклонной дальности  $D$  за исходную величину примем тот угол прицеливания  $\alpha_0$ , который отвечал бы данной дальности, если бы цель была на горизонте.

Для цели на горизонте  $\varepsilon = 0$ ;  $\theta_0 = \alpha = \alpha_0$ . Применяя равенство (20) к этому частному случаю, получим

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{gD}{v_0^2} = \frac{gX}{v_0^2}.$$

Рассматривая теперь для той же наклонной дальности случай, когда  $\varepsilon = 0$ , и подставляя значение  $\frac{gD}{v_0^2} = \sin 2\alpha_0$  в уравнение (20), получим

$$\boxed{\sin(2\alpha + \varepsilon) = \sin 2\alpha_0 \cos^2 \varepsilon + \sin \varepsilon.} \quad (21)$$

В последнем виде это выражение известно под названием формулы Лендера.

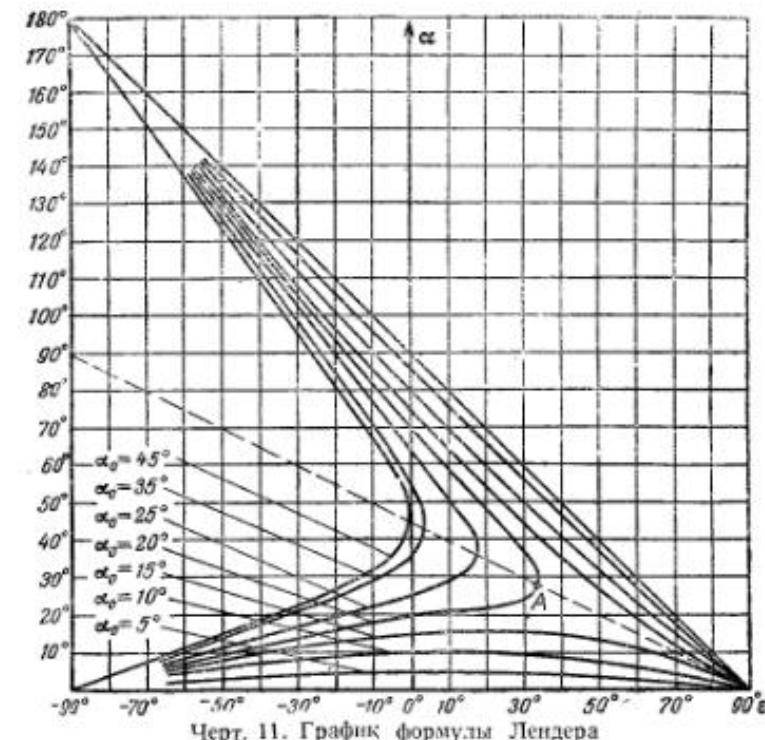
Зависимость (21) может быть выражена интересным графиком (черт. 11), изображающим семейство кривых зависимости  $\alpha$  от  $\varepsilon$  для различных значений  $\alpha_0$ .

Применение графика разберем на следующем примере.

Пусть при цели на горизонте установка угла прицеливания  $\alpha_0 = 20^\circ$ ; требуется определить угол прицеливания, если при той же наклонной дальности угол места цели равен  $25^\circ$ .

Проводим через точку на оси абсцисс, отвечающую  $\varepsilon = 25^\circ$ , прямую, параллельную оси ординат. Эта прямая пересечется с кривой, отвечающей  $\alpha_0 = 20^\circ$ , в двух точках. Этим двум точкам отвечают значения  $\alpha = 22^\circ$  и  $\alpha = 43^\circ$ , и, следовательно, цель может быть поражена при любом из двух указанных углов прицеливания.

Из черт. 11 видно, что только дальности, отвечающие  $\alpha_0 \leq 15^\circ$ , поражаются при любых значениях  $\varepsilon$ , от  $-90^\circ$  до  $+90^\circ$ , так как дальность, отвечающая  $\alpha_0 \leq 15^\circ$ , равна  $\frac{v_0^2}{2g}$ , т. е. высоте параболы безопасности (черт. 12). Остальные дальности поражаются не при всех значениях угла места цели. Например, дальность, которая при цели на горизонте отвечает  $\alpha_0 = 20^\circ$ , не поражается при углах  $\varepsilon > \varepsilon_{np} = 33^\circ 40'$ .

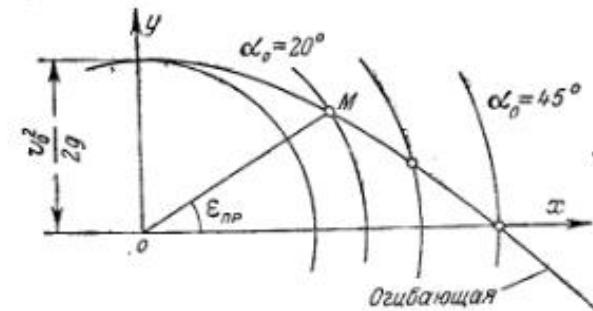


Черт. 11. График формулы Лендера

Этому предельному значению угла места цели отвечает на черт. 11 точка  $A$ , а на черт. 12 — точка  $M$ .

Кривая при  $\alpha_0 = 45^\circ$  может отвечать только значениям  $\varepsilon \leq 0$ ; это значит, что дальность, отвечающая на горизонте углу прицеливания  $\alpha_0 = 45^\circ$ , не поражаема при цели выше горизонта.

Формула Лендера может быть упрощена для малых углов прицеливания, если принять косинусы углов  $\alpha$ ,  $\alpha_0$ ,  $2\alpha$  и  $2\alpha_0$  равными единице.



Черт. 12

Действительно, из уравнения (21) имеем

$$\sin 2\alpha \cos \varepsilon + \sin \varepsilon \cos 2\alpha = \sin 2\alpha_0 \cos^2 \varepsilon + \sin \varepsilon.$$

Полагая  $\cos 2\alpha = 1$ , получим

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \sin 2\alpha_0 \cos \varepsilon, \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha &= 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos \varepsilon \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$\boxed{\sin \alpha = \sin \alpha_0 \cos \varepsilon.} \quad (21a)$$

Формула (21а) применяется при разработке автоматических прицелов.

#### Пример.

При цели на горизонте некоторая дальность поражается при установке угла прицеливания  $\alpha_0 = 27^\circ 30'$ . Требуется определить значение угла прицеливания для той же наклонной дальности, но при угле места цели  $\varepsilon = 4^\circ 12'$ .

Вычислим правую часть уравнения (21):

$$\sin 2\alpha_0 \cos^2 \varepsilon + \sin \varepsilon = \sin 55^\circ \cos^2 4^\circ 12' + \sin 4^\circ 12' = \\ = 0,8192 \cdot 0,9973^2 + 0,0732 = 0,8879.$$

Таким образом имеем

$$\sin(2\alpha + \varepsilon) = 0,8879.$$

По таблице синусов находим угол  $2\alpha + \varepsilon$ , который равен  $62^\circ 37'$  или  $180^\circ - 62^\circ 37' = 117^\circ 23'$ . Соответственно получим два значения угла прицеливания, при которых цель поражается:

$$\alpha_1 = \frac{62^\circ 37' - 4^\circ 12'}{2} = 29^\circ 12',$$

$$\alpha_2 = \frac{117^\circ 23' - 4^\circ 12'}{2} = 56^\circ 36'.$$

#### § 10. Относительное время пребывания снаряда в слое

Напишем формулы для полного времени полета и для высоты траектории:

$$T = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g},$$

$$Y = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}.$$

Возведя обе части первого равенства в квадрат и разделив почленно первое на второе, получим

$$\frac{T^2}{Y} = \frac{8}{g},$$

$$T = \sqrt{\frac{8}{g} Y}. \quad (22)$$

Рассмотрим участок траектории, расположенный выше  $y_i$  (черт. 13); этот участок мы можем рассматривать как самостоятельную траекторию с точкой вылета  $M_i$  и точкой падения  $M'_i$ . Высота этой траектории равна  $Y - y_i$ . Применяя формулу (22), получим

$$T_i = \sqrt{\frac{8}{g} (Y - y_i)}. \quad (23)$$

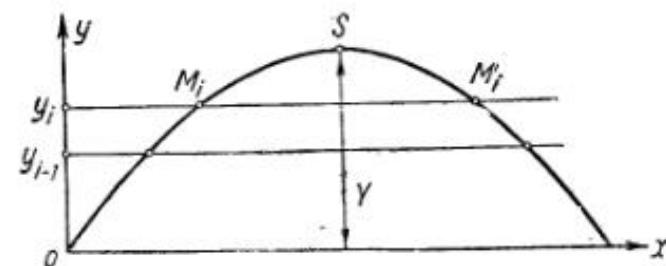
Разделив почленно (23) на (22), получим

$$\frac{T_i}{T} = \sqrt{\frac{Y - y_i}{Y}}.$$

Относительное время пребывания снаряда в  $i$ -м слое, ограниченном высотами, отвечающими ординатам  $y_{i-1}$  и  $y_i$ , найдем как разность

между относительными временами для слоя выше  $y_{i-1}$  и для слоя выше  $y_i$  (черт. 13):

$$\frac{T_{i-1} - T_i}{T} = \sqrt{\frac{Y - y_{i-1}}{Y}} - \sqrt{\frac{Y - y_i}{Y}}.$$



Черт. 13

Если траекторию разбить по высоте на  $n$  равных слоев, то для  $i$ -го слоя, отвечающего значениям ординат  $y_{i-1}$  и  $y_i$ , получим

$$\frac{y_{i-1}}{Y} = \frac{i-1}{n}; \quad \frac{y_i}{Y} = \frac{i}{n}.$$

Обозначая через  $t_i$  время пребывания снаряда в  $i$ -м слое, найдем

$$\frac{t_i}{T} = \sqrt{\frac{Y - y_{i-1}}{Y}} - \sqrt{\frac{Y - y_i}{Y}} = \sqrt{1 - \frac{i-1}{n}} - \sqrt{1 - \frac{i}{n}}$$

или окончательно

$$\boxed{\frac{t_i}{T} = \frac{\sqrt{n-i+1} - \sqrt{n-i}}{\sqrt{n}}.} \quad (24)$$

Формула (24) применяется обычно для приближенного определения весов слоев при подсчете баллистического ветра или баллистического изменения температуры (§ 109).

Значения относительных времен  $\frac{t_i}{T}$  для числа слоев от двух до пяти приведены в табл. 2.

Таблица 2

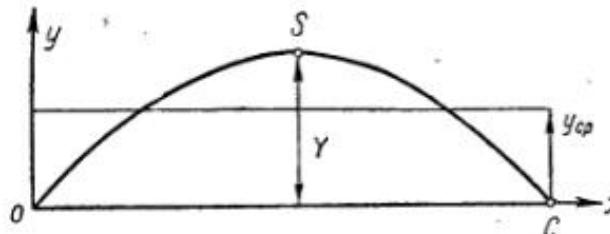
$i \backslash n$	2	3	4	5
1	0,29	0,18	0,13	0,11
2	0,71	0,24	0,16	0,12
3	—	0,58	0,21	0,14
4	—	—	0,50	0,19
5	—	—	—	0,44

Из этой таблицы видно, что относительное время пребывания снаряда в самом верхнем слое значительно превышает соответствующие времена для нижних слоев; например, для случая четырех слоев мы имеем, что в верхнем, четвертом слое снаряд находится столько же времени, сколько в первых трех, вместе взятых; это объясняется большей длиной участка траектории и меньшей скоростью снаряда в верхнем слое.

### § 11. Средняя высота траектории

Рассмотрим площадь  $OSCO$ , ограниченную траекторией и осью абсцисс (черт. 14). Она равна  $\int_0^X y dx$ . Вынесем у средним значением из под знака интеграла:

$$\int_0^X y dx = y_{cp} X.$$



Черт. 14

Легко видеть, что  $y_{cp}$  — это высота прямоугольника, основание которого  $X$ , а площадь равновелика площади  $OSCO$ . Вычислим величину  $y_{cp}$ :

$$y_{cp} = \frac{1}{X} \int_0^X y dx = \frac{1}{X} \int_0^X \left( x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \right) dx = \frac{1}{X} \left( \frac{X^2}{2} \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \frac{X^3}{3} \right) = \\ = \frac{X \operatorname{tg} \theta_0}{4} \left( 2 - \frac{2gX}{3v_0^2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} \theta_0} \right) = \frac{X \operatorname{tg} \theta_0}{4} \left( 2 - \frac{2g}{3v_0^2 \cos^2 \theta_0} \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \right) = \frac{X \operatorname{tg} \theta_0}{4} \frac{2}{3}.$$

Окончательно получаем

$$y_{cp} = \frac{2}{3} Y.$$

Последняя формула применяется обычно для определения средней вдоль траектории плотности воздуха (которая принимается равной плотности на высоте  $y_{cp} = \frac{2}{3} Y$ ).

### § 12. Поправочные формулы, отвечающие малым изменениям параметров $v_0$ и $\theta_0$

Элементы траектории в безвоздушном пространстве зависят от двух параметров:  $v_0$  и  $\theta_0$ . Рассмотрим малые изменения этих параметров  $\delta v_0$  и  $\delta \theta_0$  и определим отвечающие им изменения элементов точки падения и вершины.

Логарифмируя и дифференцируя выражение для полной дальности

$$X = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g},$$

получим

$$\frac{dX}{X} = 2 \frac{\delta v_0}{v_0} + \frac{2\delta\theta_0}{\operatorname{tg} 2\theta_0}.$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости относительно  $\delta v_0$  и  $\delta \theta_0$  и заменяя дифференциалы приращениями, получим

$$\frac{\delta X}{X} = 2 \frac{\delta v_0}{v_0} + 2 \frac{\delta\theta_0}{\operatorname{tg} 2\theta_0}.$$

Рассматривая изменение только начальной скорости, найдем

$$\frac{\delta X}{X} = 2 \frac{\delta v_0}{v_0}.$$

Таким образом изменение начальной скорости на  $1\%$  вызывает изменение полной горизонтальной дальности на  $2\%$ .

Рассматривая изменение только угла бросания, получим

$$\frac{\delta X}{X} = \frac{2 \delta \theta_0}{\operatorname{tg} 2\theta_0}.$$

Из этого выражения видно, что относительное изменение дальности, отвечающее некоторому отклонению  $\delta \theta_0$  в угле бросания, сильно растет, когда угол бросания стремится к нулю, а при угле бросания, близком к  $45^\circ$ , само изменение дальности стремится к нулю. Следовательно, при малых углах бросания следует всемерно избегать ошибок вертикальной наводки, так как они вызывают значительные ошибки в дальности. С другой стороны, при углах бросания, близких к  $45^\circ$ , эти ошибки мало влияют на дальность.

Для остальных элементов точки падения и вершины аналогично получим

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta v_0}{v_0} + \frac{\delta \theta_0}{\operatorname{tg} \theta_0},$$

$$\delta \theta_c = -\delta \theta_0,$$

$$\delta v_c = \delta v_0,$$

$$\frac{\delta Y}{Y} = 2 \frac{\delta v_0}{v_0} + 2 \frac{\delta \theta_0}{\operatorname{tg} \theta_0}.$$

Эти формулы, выведенные для безвоздушного пространства, могут быть для грубых прикладок применены и для траектории в воздухе.

### § 13. Применение параболической теории

Элементы траектории в воздухе значительно отличаются от элементов траектории в безвоздушном пространстве. Эта разница тем больше, чем больше скорость снаряда и чем меньше его калибр.

Сказанное видно из табл. 3.

Таблица 3

Снаряд	$v_0$	$\theta_0$	Дальность		Отношение $\frac{X_p}{X_B}$
			в пустоте $X_p$	в воздухе $X_B$	
7,62-мм пуля	800	$15^\circ$	32 700	3 970	8,2
76,2-мм снаряд	680	$40^\circ$	47 800	13 200	3,6
122-мм снаряд	230	$40^\circ$	5 300	4 200	1,3
82-мм мина	60	$45^\circ$	367	350	1,05

Таким образом только при начальных скоростях, меньших 50 м/сек, можно непосредственно применять формулы параболической теории для вычисления элементов траектории в воздухе. В частности, можно применять параболическую теорию для расчета траектории ручных гранат или бутылок с горючим составом, применяемых для борьбы с танками.

Наряду с этим некоторые общие зависимости, выводимые в параболической теории, дают удовлетворительные результаты для траекторий в воздухе даже при больших начальных скоростях. Таковы, например, выражения для относительного времени пребывания снаряда и для средней высоты траектории, которые нашли широкое применение на практике и для траектории в воздухе.

## Глава II СОПРОТИВЛЕНИЕ ВОЗДУХА

Изучение сопротивления воздуха полету артиллерийского снаряда имеет весьма важное значение для задач внешней баллистики. В большинстве случаев, встречающихся в практике артиллерийской стрельбы, сила сопротивления воздуха значительно превышает вес снаряда. Это видно из табл. 4.

Таблица 4

Снаряд	Скорость $v$ , м/сек	Сила сопротивления воздуха $R$ , кг	Вес снаряда $q$ , кг	$\frac{R}{q}$
152-мм дальнобойная граната	700	205	50	4,1
	500	110		2,2
	250	10		0,2
7,62-мм дальнобойная граната	700	53	6,5	8,2
	500	29		4,5
	250	2,6		0,4
7,62-мм тяжелая пуля	700	0,46	0,011	42
	500	0,25		23
	250	0,023		2,1

Только при скорости снаряда порядка 50 м/сек и меньше можно для снарядов средних и крупных калибров пренебрегать силой сопротивления воздуха.

При решении основной задачи внешней баллистики предполагается, что ось снаряда совпадает с касательной к траектории. При этом сила сопротивления воздуха направлена строго обратно касательной, т. е. имеет место только лобовое сопротивление воздуха (которое и рассматривается в настоящей главе). Подъемная (боковая) сила и опрокидывающий момент от сопротивления воздуха появляются, когда ось снаряда составляет некоторый угол с касательной. Эти вопросы будут рассмотрены в главе VIII в связи с изучением вращательного движения снаряда.

Сопротивление воздуха зависит от состояния атмосферы (температура воздуха, барометрическое давление); поэтому в настоящей главе рассматриваются и некоторые вопросы из аэрометрии.

### НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

#### § 14. Теория Ньютона

Ньютон (1642—1727) рассматривал воздух состоящим как бы из отдельных упругих частиц-шариков. При движении в воздухе твердое тело ударяет по этим частицам и сообщает им определенную скорость.

Кинетическая энергия, сообщаемая этим частицам, получается за счет энергии движущегося тела, что и определяет сопротивление воздуха движению твердого тела.

Пусть (черт. 15) некоторая пластинка, площадь которой равна  $s$ , движется по направлению своей нормали со скоростью  $v$ . За промежуток времени  $dt$  пластинка пройдет расстояние  $vdt$  и описывает объем  $s v dt$ . Масса всех частиц, с которыми столкнется пластинка, равна  $\rho s v dt$ , где  $\rho$  — массовая плотность воздуха.

Рассмотрим взаимодействие пластинки с отдельной частицей воздуха. Для этого обратим движение, т. е. будем рассматривать пластинку неподвижной, а некоторую частицу движущейся по нормали к пластинке со скоростью  $v$ . После удара о пластинку абсолютно упругая частица изменит направление своей скорости на обратное, сохранив абсолютную величину скорости. Приращение количества движения частицы равно  $mv - (-mv) = 2mv$ . Приращение количества движения всех частиц, которые столкнутся с пластинкой за время  $dt$ , будет  $2\rho s v^2 dt$ .

Составляем уравнение количества движения

$$2\rho s v^2 dt = R dt$$

или после сокращения на  $dt$

$$R = 2\rho s v^2.$$

Если рассматривать частицы воздуха как абсолютно неупругие шарики, то, учитывая, что после удара скорость обратится в нуль, получим соответственно

$$R = \rho s v^2.$$

В общем же случае можно формулу Ньютона записать в следующем виде:

$$R = k s p v^2,$$

где  $1 < k < 2$ .

Для пластинки, движущейся под углом  $\alpha$  к нормали, Ньютон получил выражение

$$R = k s p v^2 \cos^2 \alpha, \quad (1)$$

а для тела произвольной формы

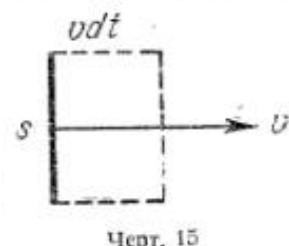
$$R = \lambda s p v^2, \quad (2)$$

где  $\lambda$  — коэффициент, зависящий от формы передней части поверхности тела, а  $s$  — площадь наибольшего поперечного сечения тела.

Выводы теории Ньютона о пропорциональности сопротивления воздуха площади поперечного сечения тела и плотности являются в основном правильными. Что же касается остальных выводов теории Ньютона, то они не оправдываются результатами опытов, а именно:

1. Коэффициент  $k$  значительно меньше величины, полученной Ньютоном.
2. Сопротивление воздуха пропорционально  $v^2$  только для определенных скоростей (меньших 250 м/сек).
3. В формуле (1)  $\cos \alpha$  должен входить в первой степени, а не во второй.
4. Сопротивление воздуха зависит от формы всего тела, а не только передней его части.

Основная причина неудовлетворительности теории Ньютона заключается в том, что в ней не учитывается взаимодействие частиц воздуха,



Черт. 15

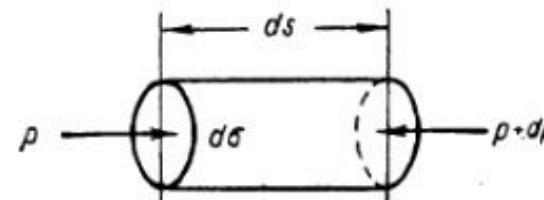
характер обтекания тела воздухом, а также уплотнения и разрежения, получающиеся в различных частях поверхности тела.

В теории Ньютона воздух рассматривается состоящим как бы из отдельных взаимно не связанных частиц, каждая из которых взаимодействует с твердым телом независимо от других частиц.

### § 15. Уравнение Бернулли

Рассмотрим установившееся движение идеального газа.

Выделим (черт. 16) вдоль линии тока элемент струи длиной  $ds$  и сечения  $d\sigma$  и напишем уравнение движения этого элемента. Масса элемента равна  $\rho d\sigma ds$ . Давление слева равно  $p$ , а справа —  $(p+dp)$ .



Черт. 16

Уравнение движения напишем в следующем виде:

$$\rho d\sigma ds \frac{dv}{dt} = [p - (p + dp)] d\sigma.$$

Так как  $\frac{ds}{dt} = v$ , то

$$vdv = -\frac{dp}{\rho}.$$

Интегрируя в пределах от начальной до произвольной точки струи, получим

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = -\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}. \quad (3)$$

Для небольших скоростей газа можно, пренебрегая его сжимаемостью, положить  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ . В этом случае

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = -\frac{1}{\rho} (p - p_0)$$

или

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} = \text{const}. \quad (4)$$

Из этого выражения видно, что при увеличении скорости вдоль струи давление падает.

Если струя встречает препятствие, нормальное к направлению струи, то скорость обращается в нуль. При этом получим

$$\frac{\rho v_0^2}{2} = p - p_0 = \Delta p. \quad (5)$$

Таким образом добавочное давление, получающееся при ударе струи о преграду, равно  $\frac{\rho v_0^2}{2}$ ; величина эта носит название «скоростного напора».

Сравнивая выражение (5) с формулой (1) теории Ньютона, мы видим, что коэффициент  $k$  получается по Бернулли, равным  $\frac{1}{2}$  вместо  $1-2$  по Ньютону.

Если учесть сжимаемость воздуха и рассматривать адиабатическую зависимость между плотностью и давлением

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa}; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{1}{\kappa}},$$

получим

$$-\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0^{-\frac{1}{\kappa}}}{\rho_0} \int_{p_0}^p p^{-\frac{1}{\kappa}} dp = \frac{k}{k-1} \frac{p_0^{-\frac{1}{\kappa}}}{\rho_0} \left( p_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - p^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right) = \\ = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right].$$

Уравнение Бернулли примет следующий вид:

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right].$$

В случае удара струи о нормальное препятствие получим  $v=0$ ; отсюда

$$\frac{v_0^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right].$$

Введя выражение для скорости звука в начальной точке струи

$$a_0 = \sqrt{\frac{\kappa p_0}{\rho_0}},$$

получим

$$\left( \frac{v_0}{a_0} \right)^2 = \frac{2}{k-1} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right], \\ \frac{p}{p_0} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} \left( \frac{v_0}{a_0} \right)^2 \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (6)$$

Если скорость струи  $v_0$  мала по сравнению со скоростью звука  $a_0$ , то, разлагая выражение в квадратных скобках по биному, получим после очевидных преобразований:

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{k}{2} \left( \frac{v_0}{a_0} \right)^2 + \frac{k}{8} \left( \frac{v_0}{a_0} \right)^4 + \dots = 1 + \frac{k}{2} \left( \frac{v_0}{a_0} \right)^2 \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{v_0}{a_0} \right)^2 + \dots \right]$$

Имея в виду, что

$$\frac{k}{2} \left( \frac{v_0}{a_0} \right)^2 = \frac{k v_0^2}{2} \frac{p_0}{k p_0} = \frac{1}{p_0} \frac{p_0 v_0^2}{2},$$

получим

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \frac{1}{p_0} \frac{p_0 v_0^2}{2} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{v_0}{a_0} \right)^2 + \dots \right]$$

или окончательно

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{\rho_0 v_0^2}{2} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{v_0}{a_0} \right)^2 \right]. \quad (7)$$

Сравнивая полученное уравнение с выражением (5), мы видим, что второе слагаемое в скобках представляет собой поправку на сжимаемость. При  $v_0 = 70 \text{ м/сек}$  получим  $1 + \frac{1}{4} \left( \frac{v_0}{a_0} \right)^2 = 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{70}{340} \right)^2 = 1,01$ , т. е. учет сжимаемости дает поправку в  $1\%$ . При  $v_0 = 150 \text{ м/сек}$  поправка получается уже равной  $5\%$ .

Уравнение Бернулли позволяет вычислить избыточное давление потока на небольшую площадку, нормальную к направлению потока. Расчеты по формуле Бернулли хорошо согласуются с опытом.

Уравнение Бернулли нельзя применять при скорости потока большей, чем скорость звука, так как при этом в потоке появляются скачки давления и нарушается непрерывность изменения основных характеристик потока: давления, плотности и температуры. Этот случай будет рассмотрен в следующем параграфе.

#### Пример.

Подсчитать добавочное давление на мембрану взрывателя при скорости снаряда, равной  $250 \text{ м/сек}$ . Метеорологические условия нормальные. Нормальная весовая плотность воздуха равна  $1,206 \text{ кг/м}^3$ . Массовая плотность  $\rho = \frac{1,206}{9,81} = 0,123$ .

Скоростной напор равняется

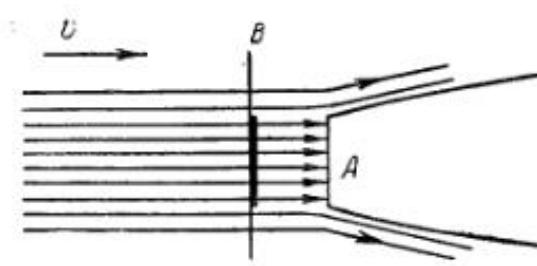
$$\frac{\rho v^2}{2} = \frac{0,123 \cdot 250^2}{2} = 3840 \text{ кг/м}^2 = 0,384 \text{ кг/см}^2.$$

С учетом поправки на сжимаемость получим

$$\Delta p = 0,384 \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{250}{340} \right)^2 \right] = 0,436 \text{ кг/см}^2.$$

#### § 16. Теория плоского скачка давления

Формулы предыдущего параграфа могут быть применены только для дозвуковых скоростей потока. Если струя газа, ударяющая о препятствие, имеет скорость, большую скорости звука, то на некотором расстоянии впереди препятствия появляется ударная волна, на поверхности которой давление, температура и плотность резко возрастают скачком, а скорость потока падает. При этом имеет место как бы разрыв непрерывности изменения указанных характеристик потока.



Черт. 17

Толщина переходного слоя, в котором происходит изменение давления в потоке, весьма мала и находится в пределах  $10^{-5}$ — $10^{-6} \text{ мм}$ .

В случае обтекания снаряда сверхзвуковым потоком плоский прямой скачок получается только непосредственно впереди вершины снаряда или взрывателя, а далее с боков будет иметь место косой скачок.

Выведем основные зависимости теории плоского прямого скачка давления. Рассмотрим небольшую плоскую площадку вершины снаряда, о которую ударяет сверхзвуковая струя воздуха.

Впереди площадки  $A$  (черт. 17) образуется ударная стоячая волна  $B$  или фронт скачка. Перед скачком имеем следующие характеристики потока: скорость потока  $v$ , давление  $p$ , плотность  $\rho$ , температура  $T$ .

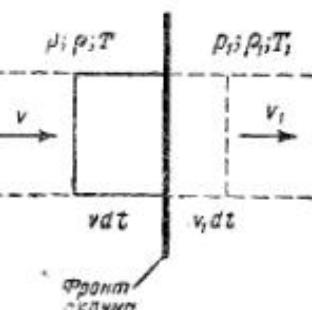
Характеристики потока непосредственно за скачком обозначим  $v_1$ ,  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $T_1$ .

Рассмотрим в момент  $t$  элемент струи, имеющий основание, равное единице поверхности, и высоту  $v dt$ , причем передняя граница элемента непосредственно примыкает к фронту скачка (черт. 18). В момент  $t + dt$  весь элемент пройдет через фронт скачка.

При этом передняя граница элемента переместится на величину  $v_1 dt$ , а задняя — на  $v dt$  и совпадет с фронтом волны.

Будем искать зависимости между характеристиками потока до скачка  $v$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  и после скачка  $v_1$ ,  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $T_1$ , полагая первые известными. Для этого требуется составить четыре уравнения; воспользуемся следующими:

- 1) уравнение сохранения массы элемента при прохождении через фронт скачка,
- 2) уравнение количества движения,
- 3) уравнение энергии,
- 4) уравнение состояния газа.



Черт. 18

#### Уравнение сохранения массы

До прохода элемента через скачок имеем массу  $\rho v dt$ , а после прохода элемента —  $\rho_1 v_1 dt$ .

Приравнивая эти величины и обозначая  $\Delta v = v - v_1$ , где  $\Delta v$  — величина скачка скорости, получим

$$\boxed{\rho_1 = \frac{\rho v}{v - \Delta v}} \quad (8)$$

#### Уравнение количества движения

Количество движения элемента до скачка

$$\rho v dt \cdot v,$$

а после скачка

$$\rho v dt \cdot (v - \Delta v).$$

Импульс силы на переднюю границу элемента равен  $-p_1 dt$ , а на заднюю  $p dt$ .

Уравнение количества движения после сокращения на  $dt$  получим в следующем виде:

$$\rho v (v - \Delta v) - \rho v^2 = p - p_1$$

или окончательно

$$\boxed{p_1 - p = \rho v \Delta v.} \quad (9)$$

#### Уравнение энергии

Кинетическая энергия элемента до прохода через скачок равна

$$\frac{\rho v dt}{2} v^2,$$

а после прохода через скачок

$$\frac{\rho v dt}{2} (v - \Delta v)^2.$$

Внутренняя энергия элемента получится соответственно до скачка

$$g \rho v dt \frac{C_v T}{A},$$

после скачка

$$g \rho v dt \frac{C_v T_1}{A},$$

где  $g \rho v dt$  — вес элемента и  $\frac{1}{A}$  — механический эквивалент тепла.

Работа давления, действующего на переднюю границу объема, равна

$$-p_1(v - \Delta v) dt,$$

а на заднюю

$$p v dt.$$

Уравнение энергии после сокращения на  $dt$  получим в следующем виде:

$$\rho v \left[ \frac{(v - \Delta v)^2}{2} - \frac{v^2}{2} + \frac{g C_v}{A} (T_1 - T) \right] = p v - p_1(v - \Delta v).$$

Разделив обе части равенства на  $\rho v$ , получим после некоторых преобразований

$$-\Delta v \left( v - \frac{\Delta v}{2} \right) + \frac{g C_v}{A} (T_1 - T) = \frac{p}{\rho} - p_1 \frac{v - \Delta v}{\rho v}. \quad (10)$$

На основании уравнения (8) имеем  $\frac{v - \Delta v}{\rho v} = \frac{1}{p_1}$  и из уравнения состояния газа получим

$$\frac{p}{\rho} - \frac{p_1}{\rho_1} = g R T - g R T_1 = -g R (T_1 - T).$$

Подставляя эти значения в уравнение (10), получим

$$g \left( \frac{C_v}{A} + R \right) (T_1 - T) = \Delta v \left( v - \frac{\Delta v}{2} \right).$$

Из термодинамики известно, что  $C_p - C_v = AR$ , откуда  $\frac{C_v}{A} + R = \frac{C_p}{A}$ . Окончательно получим уравнение энергии в следующем виде:

$$T_1 - T = \frac{A \Delta v}{g C_p} \left( v - \frac{\Delta v}{2} \right). \quad (11)$$

В уравнениях (8), (9) и (11) остается одна неизвестная величина  $\Delta v$ ; для определения ее воспользуемся уравнением состояния газа.

#### Уравнение состояния газа

Имеем

$$p_1 - p = g \rho_1 R T_1 - g \rho R T.$$

На основании уравнения (9) получим

$$\rho v \Delta v = g \rho_1 R T_1 - g \rho R T;$$

подставляя сюда значения  $\rho_1$  и  $T_1$  из уравнений (8) и (11), получим

$$\begin{aligned} \rho v \Delta v &= g R \frac{\rho v}{v - \Delta v} \left[ T + \frac{A \Delta v}{g C_p} \left( v - \frac{\Delta v}{2} \right) \right] - g R \rho T = \\ &= g R \rho T \left( \frac{v}{v - \Delta v} - 1 \right) + \frac{AR \rho v \Delta v}{C_p (v - \Delta v)} \left( v - \frac{\Delta v}{2} \right) \end{aligned}$$

или

$$v \Delta v = g R T \frac{\Delta v}{v - \Delta v} + \frac{AR}{C_p} \frac{v \Delta v}{v - \Delta v} \left( v - \frac{\Delta v}{2} \right). \quad (12)$$

Далее, из выражения для скорости звука

$$a = \sqrt{k g R T}$$

имеем

$$g R T = \frac{a^2}{k}$$

и, кроме того,

$$\frac{AR}{C_p} = \frac{C_p - C_v}{C_p} = 1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}.$$

Из уравнения (12) после сокращения на  $\Delta v$  получим

$$v = \frac{a^2}{k(v - \Delta v)} + \frac{k-1}{k} \frac{v}{v - \Delta v} \left( v - \frac{\Delta v}{2} \right),$$

$$v(v - \Delta v) = \frac{a^2}{k} + \frac{k-1}{k} v \left( v - \frac{\Delta v}{2} \right).$$

После очевидных преобразований получим

$$\boxed{\Delta v = \frac{2v}{k+1} \left( 1 - \frac{a^2}{v^2} \right)}. \quad (13)$$

Определив  $\Delta v$  и подставив в уравнения (8), (9) и (11), получим характеристики потока за скачком.

Для сокращения письма обозначим  $\frac{a}{v} = \alpha$ .

Из уравнения (8) получим

$$\rho_1 = \frac{\rho v}{v - \frac{2v}{k+1}(1-\alpha^2)} = \frac{\rho}{1 - \frac{2}{k+1} + \frac{2\alpha^2}{k+1}}$$

или окончательно

$$\boxed{\rho_1 = \rho \frac{k+1}{k-1+2\alpha^2}}. \quad (14)$$

Из уравнения (9) получим

$$p_1 = p + \rho v \frac{2v}{k+1} (1-\alpha^2) = p \left[ 1 + \frac{\rho}{p} \frac{2v^2}{k+1} (1-\alpha^2) \right].$$

Заменив  $\frac{\rho}{p} = g R T = \frac{a^2}{k}$ , получим

$$\begin{aligned} p_1 &= p \left[ 1 + \frac{2k}{k+1} \frac{v^2}{\alpha^2} (1-\alpha^2) \right] = p \left( 1 + \frac{2k}{k+1} \frac{1-\alpha^2}{\alpha^2} \right) = \\ &= p \left[ 1 - \frac{2k}{k+1} + \frac{2k}{(k+1)\alpha^2} \right] \end{aligned}$$

или окончательно

$$\boxed{p_1 = p \left[ \frac{2k}{(k+1)\alpha^2} - \frac{k-1}{k+1} \right]}. \quad (15)$$

Определим еще скорость потока за скачком:

$$v_1 = v - \Delta v = v \left[ 1 - \frac{2}{k+1} (1 - x^2) \right]$$

или окончательно

$$v_1 = \frac{p}{k+1} (k - 1 + 2x^2). \quad (16)$$

Пользуясь полученными зависимостями, можно определить характеристики потока за скачком, а следовательно, и скачки: давления  $\Delta p = p_1 - p$ , температуры  $\Delta T = T_1 - T$  и скорости  $\Delta v = v - v_1$ . Если начальная скорость потока равна скорости звука, то  $x = 1$  и из уравнений (14)–(16) получим, что  $\rho_1 = \rho$ ;  $p_1 = p$  и  $v_1 = v$ , т. е. скачок не имеет места.

Также не будет скачка, если начальная скорость потока меньше скорости звука. В этом случае, исходя из выведенных зависимостей, мы получили бы скачок разрежения, существование которого, однако, противоречит второму началу термодинамики<sup>1</sup>.

Численные значения  $\Delta v$ ,  $\Delta p$  и  $\Delta T$  в зависимости от скорости потока перед скачком показаны в табл. 5.

Таблица 5

$v, м/сек$	$\Delta v$	$\Delta p, кг/см^2$	$\Delta T^\circ$
340	0	0	0
400	93	0,47	33
500	224	1,39	87
600	338	2,6	146
800	544	5,4	288
1000	734	9,2	465
1500	1181	22,2	1075
2000	1611	40,3	1925
2500	2035	63,6	3020
3000	2460	92,3	4350
4000	3300	165	7750

Заслуживает внимания чрезвычайно большое повышение температуры за скачком при скорости потока, превышающей 2000 м/сек. Этим, возможно, объясняется «бронепрокидающее» действие кумулятивных снарядов, так как скорость частиц газов, выходящих из кумулятивной выемки, весьма велика.

### § 17. Динамический адиабатический закон. Формула Гюгоньо

При адиабатическом процессе соотношение между давлением и плотностью определяется зависимостью

$$\frac{p_1}{\rho_1^k} = \frac{p}{\rho^k}.$$

При наличии скачка процесс получается отличным от адиабатического, несмотря на отсутствие теплообмена с окружающей средой. Действительно, определим из уравнения (14) и подставим в уравнение (15)  $x^2 = \frac{\rho_1}{\rho}$ . При этом для упрощения письма обозначим  $b = \frac{\rho_1}{\rho}$ .

<sup>1</sup>Ф. И. Франкль, С. А. Христианович и Р. Н. Алексеева, Основы газовой динамики, стр. 29. Труды ЦАГИ, вып. 364.

Получим

$$\frac{k+1}{k-1+2x^2} = b,$$

откуда

$$x^2 = \frac{k+1}{2b} - \frac{k-1}{2} = \frac{k+1-(k-1)b}{2b},$$

$$\frac{2k}{x^2} - (k-1) = \frac{4kb}{(k+1)-(k-1)b} - (k-1) = \frac{4kb-(k^2-1)+(k-1)^2b}{k+1-(k-1)b} = \frac{(k+1)^2b-(k^2-1)}{k+1-(k-1)b}.$$

Подставляя полученное значение в уравнение (15), найдем после сокращения на  $(k+1)$  и подстановки  $b = \frac{\rho_1}{\rho}$ ,

$$\frac{p_1}{p} = \frac{(k+1)^2 - k+1}{k+1 - (k-1)^2}. \quad (17)$$

Формула (17), полученная Гюгоньо, носит название динамического адиабатического закона. При наличии скачка давления нельзя применять обычную адиабатическую зависимость между давлением и плотностью. По этой же причине нельзя в данном случае применять уравнения (6) или (7), выведенные для обычного адиабатического процесса.

### § 18. Давление в вершине снаряда. Формула Релея

После прохождения струи через скачок для участка от внутренней стороны скачка и до вершины снаряда можно применить обычное уравнение Бернулли. Обозначая через  $p_v$  давление у вершины снаряда, воспользуемся уравнением (6), заменив в нем  $p$  через  $p_v$ , а  $p_0$ ,  $v_0$  и  $a_0$  через  $p_1$ ,  $v_1$  и  $a_1$  соответственно. Таким образом получим

$$\frac{p_v}{p_1} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} \left( \frac{v_1}{a_1} \right)^2 \right]^{\frac{k}{k-1}}.$$

Подставляя  $a^2 = \frac{kp_1}{\rho_1}$ , получим

$$\frac{p_v}{p_1} = \left( 1 + \frac{k-1}{2k} \frac{\rho_1 v_1^2}{p_1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (18)$$

Подставим значения  $p_1$ ,  $\rho_1$  и  $v_1$  из уравнений (14)–(16). Получим

$$\frac{\rho_1 v_1^2}{p_1} = \frac{k-1}{k-1+2x^2(k+1)^2} \frac{v^2(k-1+2x^2)^2}{p} \frac{\rho v^2}{2k-(k-1)x^2} \frac{(k-1+2x^2)x^2}{2k-(k-1)x^2}.$$

Так как  $\frac{kp}{\rho} = x^2$ , то  $\frac{\rho v^2}{2} = k \frac{v^2}{a^2} = \frac{k}{x^2}$ ,

откуда

$$\frac{\rho_1 v_1^2}{p_1} = \frac{k(k-1+2x^2)}{2k-(k-1)x^2};$$

$$1 + \frac{k-1}{2k} \frac{\rho_1 v_1^2}{p_1} = 1 + \frac{\frac{k-1}{2} + x^2}{\frac{k-1}{2} - x^2} = \frac{\frac{k-1}{2} + \frac{k-1}{2}}{\frac{k-1}{2} - x^2} = \frac{(k+1)^2}{2(k-1)} \frac{1}{\frac{2k}{k-1} - x^2} =$$

$$= \frac{k+1}{2x^2} \frac{1}{\frac{2k}{(k+1)x^2} - \frac{k-1}{k+1}}.$$

Подставляя в уравнение (18) полученное выражение, а также значение  $p_1$  из уравнения (15), получим

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{p} &= \left[ \frac{2k}{(k+1)a^2} - \frac{k-1}{k+1} \right] \left( \frac{k+1}{2a^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{1}{\left[ \frac{2k}{(k+1)a^2} - \frac{k-1}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}}} = \\ &= \left( \frac{k+1}{2a^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{1}{\left[ \frac{2k}{(k+1)a^2} - \frac{k-1}{k+1} \right]^{\frac{k}{k-1}}} = \\ &= \left( \frac{k+1}{2a^2} \right)^{\frac{k}{k-1}} \frac{1}{\left( \frac{k-1}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \left[ \frac{2k}{(k-1)a^2} - 1 \right]^{\frac{k}{k-1}}}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $a = \frac{v}{v}$ , получим после простейших преобразований формулу Релея

$$\frac{p_0}{p} = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \left( \frac{2}{k-1} \right)^{\frac{1}{k-1}} \frac{\left( \frac{v}{a} \right)^{\frac{2k}{k-1}}}{\left[ \frac{2k}{k-1} \left( \frac{v}{a} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{k-1}}}. \quad (19)$$

Для воздуха, принимая  $k = 1,4$ , получим

$$\frac{p_0}{p} = \frac{166,7 \left( \frac{v}{a} \right)^7}{\left[ 7 \left( \frac{v}{a} \right)^2 - 1 \right]^{2,5}}. \quad (19')$$

Таким образом при движении снаряда со скоростью, большей скорости звука, давление на небольшой площадке вершины снаряда вычисляется по формуле (19) или (19').

При движении снаряда со скоростью, меньшей скорости звука, это давление может быть вычислено, исходя из уравнения Бернулли по формуле (6).

При  $v = a$  обе формулы дают одинаковый результат:

$$\frac{p_0}{p} = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k}{k-1}}.$$

Численные значения избыточного давления  $p_0 - p$  ( $\text{кг}/\text{см}^2$ ) для нормальных условий даны в табл. 6.

Таблица 6

$v$	$p_0 - p$	$v$	$p_0 - p$
0	0	800	6,70
100	0,06	900	8,65
200	0,27	1000	10,8
300	0,67	1100	13,2
400	1,35	1200	15,8
500	2,34	1300	18,6
600	3,56	1400	21,6
700	5,02	1500	24,9

## § 19. Теоретические исследования сопротивления воздуха

Приведенные в предыдущих параграфах зависимости позволяют вычислить давление непосредственно у вершины. Что касается изучения суммарного сопротивления воздуха при обтекании тела, то эта задача теоретически не решена даже для случая идеальной жидкости.

Исследуя случай установившегося движения тела в идеальной несжимаемой жидкости, Даламбер нашел, что при условии безотрывного обтекания тела не будет испытывать никакого сопротивления. При отсутствии вязкости реакция жидкости на тело сводится только к силам, нормальным к его поверхности. Так как давление в потоке несжимаемой жидкости зависит от свободного сечения струи, то на основании уравнения Бернулли найдем, что избыток давления в головной части снаряда компенсируется избытком давления в хвостовой части. Этот вывод носит название парадокса Даламбера. В действительности, вследствие наличия вязкости, даже при сравнительно малых скоростях движения и полном обтекании, тело испытывает сопротивление в своем движении.

Вопрос о сопротивлении воздуха при сверхзвуковой скорости потока теоретически решен только для отдельных частных случаев.

Помимо случая прямого скачка уплотнения, для которого получено решение Релеем, теоретически исследован еще случай косого скачка, для которого дано решение Меера. Это решение позволяет подсчитать сопротивление воздуха при сверхзвуковом потоке для клина или для двухмерного контура, напоминающего продольное сечение снаряда. Решение Меера для клина было обобщено Буземаном для конуса (1929 г.). Наибольшие достижения в этой области получены Франклем (ЦАГИ), который нашел решение для тела вращения с любой выпуклой образующей. Это решение применимо, однако, только в случае, когда скорость потока больше скорости звука вдоль всего профиля снаряда. В действительности же при прохождении струи газов через скачок появляются дозвуковые скорости. Кроме того, задача сильно усложняется при учете вязкости и вихреобразования. Таким образом задача о теоретическом изучении сопротивления воздуха для тела произвольной формы не решена.

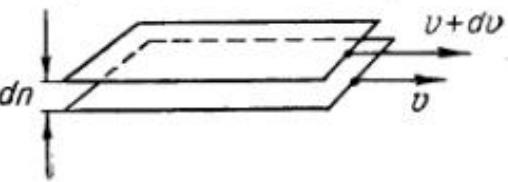
В настоящее время сопротивление воздуха полету снарядов изучается в основном по данным опытных стрельб и аэродинамических продувок. Теоретические же исследования обеспечивают только рациональную организацию и обработку опытов.

## ФИЗИЧЕСКИЕ ФАКТОРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ВОЗДУХА АРТИЛЛЕРИЙСКИМ СНАРЯДАМ

Три основных фактора определяют сопротивление воздуха полету снаряда: вязкость или внутреннее трение в жидкости, образование вихрей при обтекании снаряда и образование баллистической волны при сверхзвуковой скорости снаряда.

### § 20. Вязкость. Образование вихрей

Все реальные жидкости и газы обладают вязкостью. Рассмотрим в жидкости две площадки, движущиеся, как указано на черт. 19, со скоростями  $v$  и  $v + dv$ . Расстояние между площадками равно  $dn$ . Возникающая между площадками сила вязкости стремится выровнять их скорости.



Черт. 19

Величина силы вязкости, отнесенная к единице поверхности, или напряжение вязкости  $\tau$ , определяется по формуле Ньютона

$$\tau = \mu \frac{dv}{dn},$$

где  $\mu$  — коэффициент вязкости.

Таким образом касательное напряжение, возникающее между двумя близкими площадками в жидкости, прямо пропорционально разности скоростей  $dv$  и обратно пропорционально расстоянию между площадками  $dn$ .

Ускорение, приобретаемое частицами жидкости под действием сил вязкости, обратно пропорционально плотности жидкости. Поэтому часто вместо коэффициента вязкости  $\mu$  рассматривают кинематический коэффициент вязкости  $\nu$ , определяемый из выражения

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Размерность коэффициентов  $\mu$  и  $\nu$  определяется, исходя из формулы Ньютона

$$\mu = \frac{\tau \cdot dn}{dv}.$$

При физической системе единиц имеем размерность

$$[\mu] = \frac{с\cdot см\cdot сек^{-2}\cdot см^{-1}\cdot см}{см\cdot сек^{-1}} = с\cdot см^{-1}\cdot сек^{-1},$$

$$[\nu] = \frac{с\cdot см^{-1}\cdot сек^{-1}}{с\cdot см^{-3}} = см^2\cdot сек^{-1}.$$

При технической системе единиц получаем соответственно размерности

$$[\mu] = кг\cdot м^{-2}\cdot сек; [\nu] = м^2\cdot сек^{-1}.$$

Приведем значения  $\mu$  и  $\nu$  для воздуха и воды при нормальных условиях:

	$\mu$ $кг\cdot м^{-2}\cdot сек$	$\nu$ $м^2\cdot сек^{-1}$
Воздух . . . . .	$1,82 \cdot 10^{-5}$	$1,45 \cdot 10^{-5}$
Вода . . . . .	$116 \cdot 10^{-5}$	$0,114 \cdot 10^{-5}$

Хотя коэффициент вязкости для воды значительно больше, чем для воздуха, кинематический коэффициент вязкости больше для воздуха, чем для воды. Следовательно, частицы воздуха приобретают под действием сил вязкости большие ускорения, чем частицы воды, что объясняется малой плотностью воздуха по сравнению с водой.

Коэффициент вязкости  $\mu$  не зависит от давления, но меняется с температурой. С увеличением температуры для газов этот коэффициент возрастает, а для жидкостей уменьшается.

Если жидкость обтекает тело с некоторой средней скоростью  $v$ , то непосредственно у поверхности тела жидкость прилипает, так что скорость ее получается равной нулю. Изменение скорости от величины  $v$  до нуля происходит в тонком слое, примыкающем к поверхности тела и называемом пограничным слоем. Различают ламинарное и турбулентное движение жидкости. Ламинарное движение происходит параллельными неперемешивающимися струйками. При турбулентном потоке пограничный слой распадается на мелкие вихри, вызывающие перемешивание жидкости; движение жидкости носит при этом пульсационный характер.

Передача скорости от наружного потока в пограничный слой происходит при турбулентном движении интенсивнее, чем в ламинарном потоке. Этим объясняется характер диаграмм скоростей в пограничном слое для этих двух видов движения (черт. 20).

При ламинарном потоке сопротивление жидкости пропорционально первой степени скорости, при турбулентном — второй и большей степеням скорости.

Английский ученый Рейнольдс исследовал условия перехода от ламинарного к турбулентному потоку при движении жидкости в трубе и нашел, что этот переход зависит от величины  $\frac{vd}{\nu}$ , где  $d$  — диаметр трубы. Эта величина носит название числа Рейнольдса и обозначается

$$Re = \frac{vd}{\nu}.$$

При возрастании числа Рейнольдса до некоторой определенной величины движение жидкости становится турбулентным.

Чем меньше скорость снаряда, тем больше относительная величина силы вязкости в общей величине силы сопротивления воздуха. При сверхзвуковых скоростях снаряда относительная величина силы вязкости не превосходит  $5\text{--}10\%$ .

При безотрывном обтекании воздухом поверхности тела сопротивление воздуха незначительно. Если же пограничный слой срывается с поверхности тела, то сопротивление воздуха сильно возрастает. Отрыв пограничного слоя обычно происходит в хвостовой части обтекаемого тела за наибольшим его поперечным сечением. При этом непосредственно у поверхности тела появляются встречные потоки жидкости, вызывающие вихреобразование. Так как энергия вращательного движения воздушных масс может быть получена только за счет энергии снаряда, то ясно, что вихреобразование является одним из источников сопротивления воздуха. Для уменьшения вихреобразования необходимо сделать хвостовую часть снаряда возможно более длинной и обтекаемой формы (как это делается для оперенных снарядов.) В нарезных снарядах этого осуществить в полной мере не удается по мотивам производственного порядка и вследствие недостаточной устойчивости на полете подобных снарядов.

## § 21. Образование баллистической волны

Всякое бесконечно малое уплотнение воздуха распространяется в пространстве со скоростью звука. Конечные уплотнения воздуха (длинная волна, фронт взрывной волны) распространяются со скоростью, большей скорости звука.

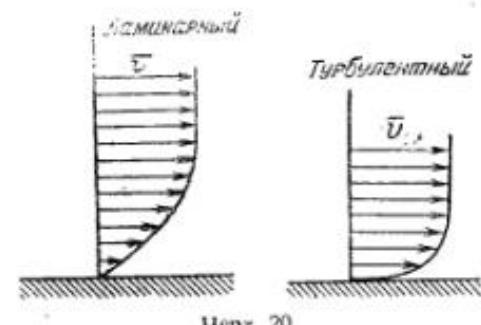
Скорость звука

$$a = \sqrt{kRT},$$

где  $k$  — показатель адиабаты.

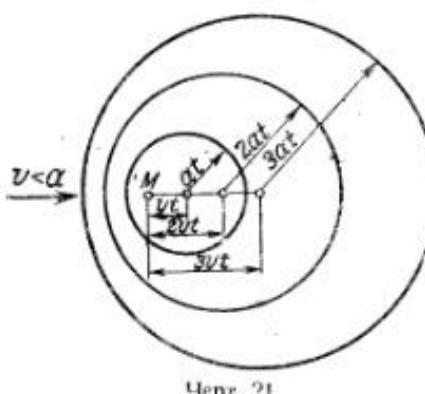
Принимая для воздуха  $k = 1,4$ , получим для нормальных условий

$$a = \sqrt{1,4 \cdot 9,81 \cdot 29,27 \cdot 288} = 340,2 \text{ м/сек.}$$



Черт. 20

Рассмотрим поток воздуха, движущийся со скоростью  $v$ , и некоторую неподвижную точку  $M$ , около которой создается небольшое уплотнение воздуха. Это уплотнение в каждый рассматриваемый момент времени порождает сферическую волну, распространяющуюся со скоростью звука  $a$ . Центр этой волны перемещается вместе с потоком со скоростью  $v$ . За время  $t, 2t, 3t$  сек. центры сферических волн перемещаются на расстояния  $vt, 2vt, 3vt$ , а радиусы сферических волн будут соответственно равны  $at, 2at, 3at$ .



Черт. 21

При скорости потока, меньшей скорости звука,  $v < a$ , получается система волн, показанная на черт. 21. При сверхзвуковом потоке сферические волны располагаются, как показано на черт. 22. Огибающая этих

волн имеет форму конуса с углом растворения, определяемым из выражения

$$\sin \alpha = \frac{a}{v}.$$

Угол  $\alpha$  называется углом Маха, а огибающий конус — волной Маха или баллистической волной.

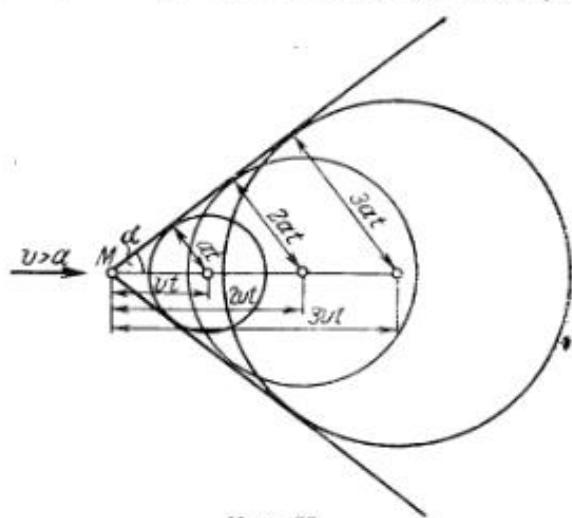
До сих пор мы рассматривали случай малых уплотнений, образующихся около тела, весьма малых размеров. При движении снаряда образуется головная баллистическая волна, осевое сечение которой имеет форму, близкую к гиперболе. Наклон асимптот гиперболы определяется углом Маха.

На фронте баллистической волны давление и плотность возрастают скачком. При этом непосредственно у вершины снаряда давление определяется по формуле Рейля (19) и может достигать 5—8 атм при современных скоростях снарядов, как это видно из табл. 6.

По мере удаления вдоль волны от вершины снаряда избыток давления уменьшается, так что в пределе получается бесконечно малое уплотнение, распространяющееся со скоростью звука, а баллистическая волна превращается в звуковую волну.

Помимо головной волны, при полете снаряда со сверхзвуковой скоростью образуются еще хвостовая волна и волны, отходящие от ведущего пояска или от места обжима дульца гильзы (для пули). Более слабые волны образуются от шероховатостей поверхности снаряда или пули.

Фотографии баллистических волн приведены в § 26.



Черт. 22.

## § 22. Общее выражение для силы сопротивления воздуха

Современная гидромеханика не позволяет теоретически подсчитать сопротивление воздуха для снаряда произвольной формы. Приходится в основном базироваться на данных опыта. Можно, однако, вывести общее выражение для силы сопротивления воздуха, позволяющее свести количество опытов к минимуму. Исходя из физических соображений, приведенных выше, можно утверждать, что сопротивление воздуха для снаряда данной формы зависит от следующих факторов:

- 1) размеров снаряда, характеризующихся при данной форме снаряда его калибром  $d$ ;
- 2) скорости поступательного движения снаряда  $v$ ;
- 3) вязкости воздуха, характеризующейся коэффициентом вязкости  $\mu$ ;
- 4) массовой плотности воздуха  $\rho$ ;
- 5) скорости звука в воздухе  $a$ .

Таким образом можно написать

$$R = f(d, v, \rho, \mu, a), \quad (20)$$

где форма снаряда учитывается видом функции  $f$ .

Если необходимо определить функцию  $f$  из опыта, то придется эти опыты проводить для всевозможных комбинаций значений параметров, от которых функция зависит. Количество требуемых опытов было бы чрезмерно велико. Посмотрим, нельзя ли уменьшить число независимых переменных, от которых зависит функция сопротивления воздуха.

Уменьшим единицы измерения массы, длины и времени в  $m, l$  и  $t$  раз. Тогда численные значения величин, входящих в выражение (20), увеличиваются во столько же раз, соответственно размерностям этих величин.

Таким образом получим

$$R' = \frac{ml}{\tau^2} R; \quad d' = ld; \quad v' = \frac{l}{\tau} v; \\ \rho' = \frac{m}{l^2} \rho; \quad \mu' = \frac{m}{l^2} \mu; \quad a' = \frac{l}{\tau} a.$$

Подставляя эти величины в уравнение (20), получим

$$\frac{ml}{\tau^2} R = f(l d, \frac{l}{\tau} v, \frac{m}{l^2} \rho, \frac{m}{l^2} \mu, \frac{l}{\tau} a). \quad (21)$$

Так как численные значения  $m, l, \tau$  могут быть взяты произвольными, то выберем их такими, чтобы получить

$$ld = 1; \quad \frac{l}{\tau} v = 1; \quad \frac{m}{l^2} \rho = 1.$$

Это возможно, если положить

$$l = \frac{1}{d}; \quad \tau = lv = \frac{v}{d}; \quad m = \frac{p}{\rho} = \frac{1}{\rho d^2}.$$

При этом получим

$$\frac{\tau^2}{ml} = d^2 \rho v^2; \quad \frac{ml}{\tau} = \frac{1}{\rho v d}; \quad \frac{l}{\tau} = \frac{1}{v}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (21), получим

$$R = d^2 \rho v^2 f(1, 1, 1, \frac{p}{\rho v d}, \frac{a}{v}).$$

Заменим квадрат калибра через площадь поперечного сечения

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \text{ и подставим } \frac{p}{\rho} = \gamma. \text{ Кроме того, вместо переменных } \frac{p}{\rho v d} \text{ и } \frac{a}{v}$$

возьмем обратные им величины. При этом, заменив знак функции  $f$  на  $c_x$ , получим выражение для силы сопротивления воздуха в следующем виде<sup>1</sup>:

$$R = S \frac{\rho v^2}{2} c_x \left( \frac{v d}{a}, \frac{v}{a} \right).$$

Функция лобового сопротивления  $c_x$ , которая должна быть определена из опыта, зависит только от двух параметров: числа Рейнольдса  $Re = \frac{v d}{\nu}$  и числа Маха  $Ma = \frac{v}{a}$ .

При тех скоростях, которые применяются в артиллерии, влияние числа Рейнольдса на сопротивление воздуха незначительно, и можно написать

$$\boxed{R = S \frac{\rho v^2}{2} c_x \left( \frac{v}{a} \right)}. \quad (22)$$

Это и есть общее выражение для силы сопротивления воздуха.

Вид функции  $c_x$  зависит от формы снаряда и должен быть определен из опытов для снарядов различной формы.

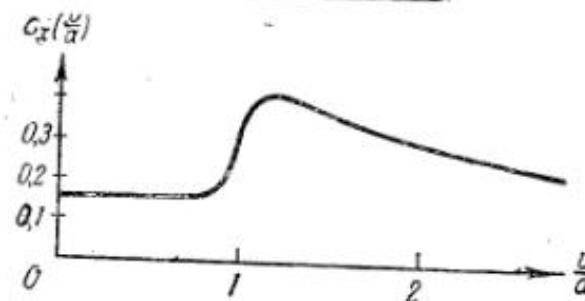
Для сокращения числа опытов поступают следующим образом. По данным опытов определяют вид функции  $c_x$  для одного какого-либо основного снаряда-эталона или же определяют среднюю функцию  $c_x$  для группы снарядов. Выбранную таким образом функцию называют законом сопротивления воздуха.

Далее предполагается, что значение функции  $c_x \left( \frac{v}{a} \right)$ , отвечающей определенному снаряду, может быть получено из выражения

$$c_x \left( \frac{v}{a} \right) = i c_x \left( \frac{v}{a} \right),$$

где  $c_x \left( \frac{v}{a} \right)$  отвечает выбранному закону сопротивления воздуха, а  $i$  — постоянное число, называемое коэффициентом формы снаряда. При этом сопротивление воздуха для снаряда произвольной формы получим из выражения

$$\boxed{R = S \frac{\rho v^2}{2} i c_x \left( \frac{v}{a} \right)}. \quad (23)$$



Черт. 23

На черт. 23 показан вид функции  $c_x$  для снарядов современной формы.

<sup>1</sup> Обычно в учебниках по внешней баллистике эта функция обозначается  $k \left( \frac{v}{a} \right)$ . Мы приняли обозначение  $c_x \left( \frac{v}{a} \right)$ , общепринятое в аэродинамике.

Из выражения

$$c_x \left( \frac{v}{a} \right) = \frac{R}{S \frac{\rho v^2}{2}}$$

виден физический смысл функции  $c_x$ , характеризующей сопротивление воздуха к скоростному напору, действующему на площадь поперечного сечения снаряда.

### § 23. Ускорение силы сопротивления воздуха

Ускорение силы сопротивления воздуха определяется из выражения

$$J = \frac{g R}{q} = \frac{g}{q} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \frac{\rho v^2}{2} i c_x \left( \frac{v}{a} \right). \quad (24)$$

В баллистике обычно вместо  $c_x \left( \frac{v}{a} \right)$  применяется функция  $F(v)$ , определяемая из выражения

$$F(v) = \frac{\pi}{8000} \Pi_{0N} v^2 c_x \left( \frac{v}{a} \right) = 4,74 \cdot 10^{-4} v^2 c_x \left( \frac{v}{a} \right),$$

где  $\Pi_{0N} = 1,206 \text{ кг/м}^3$  — нормальная плотность воздуха на земле.

Определяя  $c_x \left( \frac{v}{a} \right)$  из последнего выражения и подставляя его в уравнение (24), получим после замены  $g \rho = \Pi$

$$J = \frac{1}{q} \frac{\pi d^2}{4} \Pi \frac{v^2}{2} i \frac{8000}{\pi \Pi_{0N} v^2} F(v)$$

или

$$J = \frac{id^2}{q} \cdot 1000 \frac{\Pi}{\Pi_{0N}} F(v). \quad (25)$$

Обозначая  $\frac{\Pi}{\Pi_{0N}} = H(y)$  функцию плотности, изменяющуюся с высотой полета снаряда, и

$$c = \frac{id^2}{q} \cdot 1000,$$

получим окончательно

$$\boxed{J = c H(y) F(v)}. \quad (26)$$

Величина  $c$ , называемая баллистическим коэффициентом, является основной баллистической характеристикой снаряда (§ 39).

При вычислении траектории часто вместо функции  $F(v)$  приходится определять значения функции  $G(v)$ , определяемой из выражения

$$G(v) = \frac{F(v)}{v} = 4,74 \cdot 10^{-4} v \cdot c_x \left( \frac{v}{a} \right).$$

В некоторых случаях рассматривают еще функцию  $K \left( \frac{v}{a} \right)$ , определяемую из выражения

$$K \left( \frac{v}{a} \right) = \frac{F(v)}{v^2} = 4,74 \cdot 10^{-4} c_x \left( \frac{v}{a} \right).$$

## ОПЫТНОЕ ИЗУЧЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА

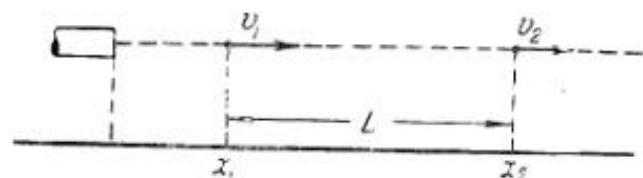
### § 24. Изучение сопротивления воздуха стрельбой

Для изучения сопротивления воздуха производится стрельба из орудия при угле возвышения, близком к нулю, и определяются экспериментально скорости снаряда в двух точках траектории на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  от орудия.

Составим уравнение живых сил (черт. 24).

Так как траектория снаряда на коротком участке близка к горизонтальной прямой, то работа силы тяжести может быть принята равной нулю, и необходимо учесть только работу силы сопротивления воздуха; получим

$$\frac{q}{2g} (v_2^2 - v_1^2) = \int_{x_1}^{x_2} R \cos(\vec{v}, \vec{R}) dx = - \int_{x_1}^{x_2} R dx.$$



Черт. 24

Вынося  $R$  средним значением из-под знака интеграла, получим

$$R_{cp} = \frac{q}{2g} \frac{v_1^2 - v_2^2}{x_2 - x_1} = \frac{q}{2g} \frac{v_1^2 - v_2^2}{L}.$$

Это сопротивление надо отнести к некоторой средней скорости, которую принимаем равной

$$v_{cp} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

С другой стороны, имеем

$$R_{cp} = S \frac{\rho v_{cp}^2}{2} c_x \left( \frac{v_{cp}}{a} \right),$$

где  $\rho$  и  $a$  отвечают условиям опыта, а  $c_x$  — данному снаряду. Приравнивая правые части выражений для  $R_{cp}$ , получим

$$c_x \left( \frac{v_{cp}}{a} \right) = \frac{q}{g \rho S} \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_{cp}}.$$

После подстановки значения  $v_{cp}$  и замены  $g\rho = \Pi$  получим окончательно

$$c_x \left( \frac{v_{cp}}{a} \right) = \Pi S L \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}. \quad (27)$$

Для того чтобы получить вид функции  $c_x \left( \frac{v}{a} \right)$  для данного снаряда, необходимо проводить опыты при различных скоростях.

### § 25. Определение скорости снаряда

Из предыдущего параграфа видно, что для определения сопротивления воздуха необходимо определить скорость снаряда в двух точках траектории. Опытное определение скорости снаряда было впервые произведено Робинсоном в 1742 г. при помощи баллистического маятника. Этим же прибором пользовались многие исследователи до второй половины XIX века. В настоящее время для определения скорости снаряда пользуются преимущественно хронографом системы Ле-Буланже, изобретенным в 1864 г.

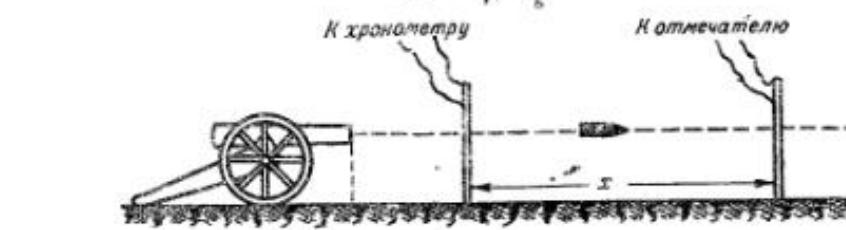
Прибор (черт. 25) состоит из установленной на чугунном основании колонки, на которой укреплены два электромагнита  $E_1$  и  $E_2$ . К сердечникам электромагнита подвешиваются два стержня: длинный, называемый хронометром, и короткий — отмечатель.

В цепях обоих электромагнитов, питаемых от аккумуляторов, включены рамы-мишени. Рамы-мишени представляют собой обыкновенные рамы, на которых намотана рядами тонкая проволока. Расстояние между проволоками обычно принимается порядка четверти калибра снаряда. При пролете снаряда через рамы-мишени размыкаются цепи электромагнитов (черт. 26).

При пробивании первой рамы прерывается ток в электромагните хронометра и последний начинает падать. При пробивании второй рамы начинает падать отмечатель, который нажимает на тарель  $T$  и освобождает нож  $M$ , под действием пружины ударающий по движущемуся хронометру и оставляющий на нем метку на некоторой высоте  $h_2$  (черт. 25).

Пренебрегая сопротивлением воздуха, определим время падения хронометра до получения метки по формуле для свободного падения

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}.$$



Черт. 27

Из полученного времени  $t_2$  надо вычесть так называемое время запаздывания, т. е. время от начала падения отмечателя до получения

метки на хронометре. Для определения времени запаздывания  $t_1$ , размыкают одновременно при помощи специального прибора, разобщителя, обе цепи. При этом на трубке хронометра получим метку на некоторой высоте  $h_1$ . Время запаздывания определится из выражения

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}.$$

Обычно принимают  $t_1 = 0,15$  сек., что отвечает  $g = 9,81$  м/сек и  $h_1 = 110,4$  мм. Такая высота метки достигается путем соответствующего перемещения электромагнита стечателя по колонке при помощи микрометрического винта.

Время полета снаряда между рамами равно

$$t = t_2 - t_1,$$

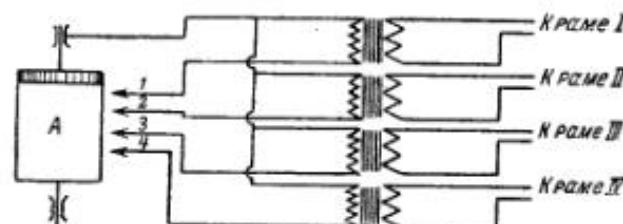
а средняя скорость снаряда получается равной

$$v_{cp} = \frac{x}{t_2 - t_1},$$

где  $x$  — расстояние между рамами-мишнями.

Хронограф Ле-Буланже прост в обращении и обеспечивает высокую точность измерения со срединной ошибкой порядка 0,1%. Недостатком прибора является то, что он допускает включение не больше двух рам-мишней. Поэтому при изучении сопротивления воздуха необходимо иметь два хронографа Ле-Буланже, включаемые в две независимые пары рам-мишней. Кроме того, хронограф Ле-Буланже обеспечивает хорошую точность только при измерении промежутков времени порядка 0,1 сек. и не меньше 0,05 сек. При меньших промежутках времени точность прибора резко падает. Поэтому приходится расстояние между рамами устанавливать сравнительно большим ( $\frac{1}{10}$  от начальной скорости).

Этими недостатками не обладает так называемый искровой хронограф. На черт. 28 показана схема искрового хронографа. Барабан А приводится во вращение мотором. Число сбортов определяется по та-



Черт. 28

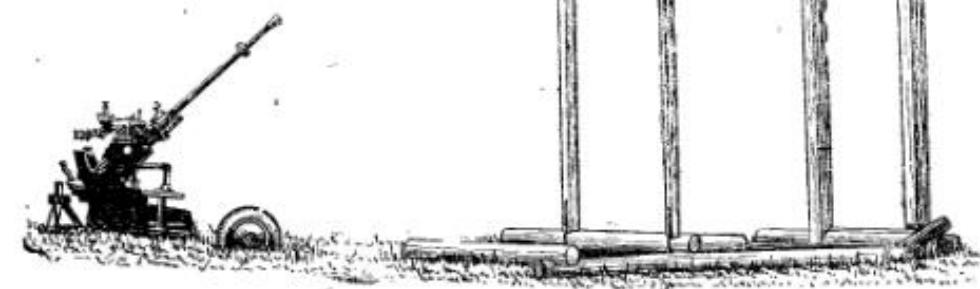
хометру. Рамы-мишени включаются в цепи первичных обмоток индукторов. Вторичные цепи соединены с одной стороны через ось с корпусом барабана и с другой с остриями 1, 2, 3..., подведенными к поверхности барабана на расстоянии порядка 1 мм. При размыкании тока в раме-мишени в соответствующей вторичной цепи индуцируется электродвижущая сила, и у острия просякаивает искра, оставляющая след на закопченной поверхности барабана. Положение следов искр определяется специальным измерительным микроскопом. Зная расстояние между следами искр и окружную скорость барабана, можно определить промежутки времени между размыканиями рам-мишней.

Недостатками искрового хронографа являются невысокая точность определения числа оборотов барабана (срединная ошибка порядка 1%) и недостаточная устойчивость электрической схемы прибора.

К достоинствам прибора относятся: возможность измерения очень малых промежутков времени и возможность включения в прибор большого числа рам-мишней.

В последнее время получили широкое применение хронографы соленоидного типа. В соленоидном хронографе рамы-мишени заменены двумя катушками-соленоидами, устанавливаемыми одна от другой на расстоянии порядка 5—10 м. При прохождении снаряда через соленоиды, в последних индуцируются токи, которые после усиления попадают в осциллограф. Регистрация моментов прохождения снарядов через соленоиды производится фотозаписью на вращающемся барабане. Масштаб времени получается также фотографической записью от камертона или от неоновой лампы.

Основное достоинство соленоидного хронографа заключается в том, что он допускает стрельбу при любых углах возвышения орудия и при сравнительно небольшой длине бло-



Черт. 29

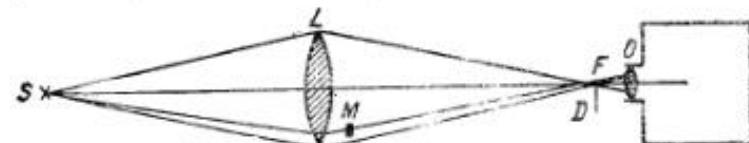
кирующего устройства (черт. 29). Прибор не требует перемотки рам после каждого выстрела, как в хронографах других типов. При этом соленоидный хронограф допускает совмещение стрельб для определения скорости снаряда со стрельбами на дальность при различных углах возвышения.

## § 26. Оптические методы изучения сопротивления воздуха

Оптические методы изучения сопротивления воздуха являются преимущественно качественными методами. Они позволяют получить фотографию баллистических волн и завихрений при полете снаряда и выявить общую картину распределения уплотнений воздуха вокруг снаряда.

Существуют два основных оптических метода изучения сопротивления воздуха: шлирный и теневой.

Сущность шлирного метода (или метода Теллера) состоит в следующем (черт. 30). Пучок лучей от точечного источника света  $S$  проходит через линзу  $L$ , собирается в фокусе  $F$  и, попадая в фотоаппарат, дает на матовом стекле изображение светлого круга. Если в фокусе  $F$  перекрыть лучи шторкой  $D$ , то освещение на матовом стекле исчезнет.

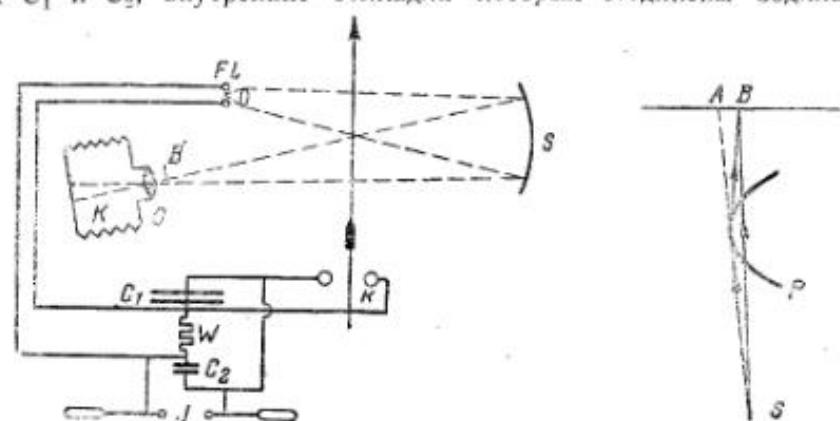


Черт. 30

Если в точке  $M$  находится местное сгущение воздуха, то луч, проходящий через эту точку, преломится и, пройдя выше фокуса, попадет в аппарат  $O$ . На матовом стекле точка  $M$  получится в виде светлого пятна.

Метод шлир позволяет обнаружить весьма малые уплотнения.

При фотографировании пули на полете обычно применяется схема Людвига Маха (черт. 31). Она состоит из вогнутого зеркала  $S$ , камеры  $K$  с объективом  $O$ , диафрагмой  $B$ , искрового осветительного промежутка  $F$  с собирающей линзой  $L$ , спускового искрового промежутка  $k$ , источника высокого напряжения и двух конденсаторов или лейденских банок  $C_1$  и  $C_2$ , внутренние обкладки которых соединены водяным со-



Черт. 31. Схема установки Маха

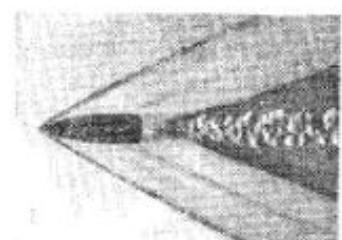
противлением  $W$ . Шторка  $B$ , снабженная микрометрическим винтом, устанавливается таким образом, чтобы большая часть лучей от искрового промежутка перехватывалась ею.

Лейденские банки заряжаются до напряжения порядка 100 000 вольт, причем потенциалы внутренних обкладок выравниваются через водяное сопротивление. При выстреле пороховые газы ионизируют спусковой искровой промежуток и вызывают разряд лейденской банки  $C_1$ . Между внутренними обкладками лейденских банок образуется разность потенциалов, которая не успевает выравняться через водяное сопротивление, вследствие чего проскаивает искра в осветительном промежутке  $F$ , электроды которого связаны с внутренними обкладками обеих банок. Экспозиция получается порядка  $10^{-6}$  сек. поэтому, несмотря на большую скорость пули, снимок получается резким.

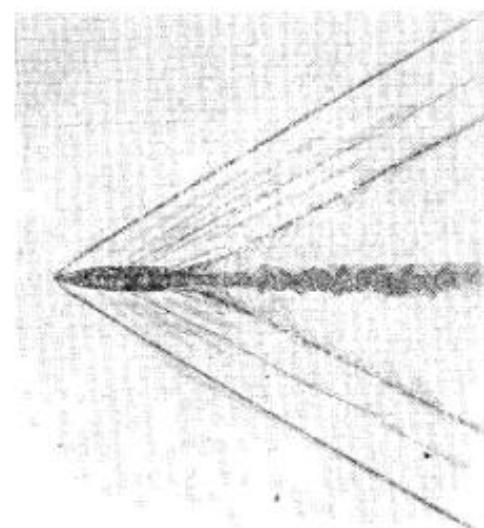
Теневой метод не требует фотоаппарата. Схема теневого метода заключается в следующем (черт. 32). Пусть  $S$  — точечный источник света

и  $P$  — фронт волны уплотнения. Луч, касательный к этой поверхности, преломится и отклонится в точке  $B$  так, что область  $AB$  на экране окажется затемненной. Таким методом можно получить непосредственно на пластиинке без фотоаппарата снимок волны и завихрений, получающихся при полете снаряда. Электрическая схема установки остается при теневом методе такой же, как и в шлирном методе.

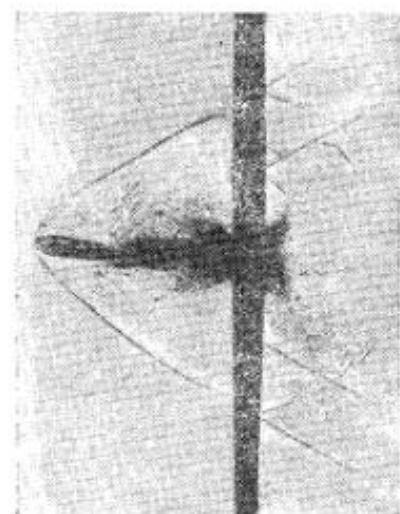
Теневой метод дает резкое изображение фронта волны или границы областей с разным давлением, но не дает картины непрерывного изменения плотности. В шлирном методе непрерывное изменение плотности изображается соответствующим непрерывным изменением степени затемненности снимка. На фотографии 33 показан шлирный снимок, а на фотографии 34 — теневой снимок. Фотография 35 дает снимок момента пробивания пулей листа фанеры.



Черт. 33



Черт. 34



Черт. 35

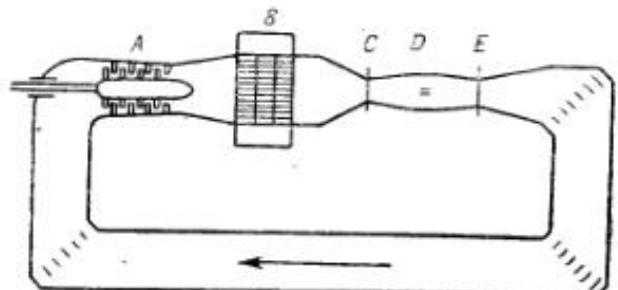
## § 27. Изучение сопротивления воздуха в аэродинамических трубах

Основным методом изучения сопротивления воздуха артиллерийским снарядам является метод стрельбы с определением скорости снаряда в двух точках траектории. Однако, чем меньше скорость снаряда, тем менее эффективен этот метод. При небольших скоростях снаряда сопротивление воздуха (а следовательно, и падение скорости снаряда) мало, поэтому точность опытов по определению сопротивления воздуха получается незначительной. Увеличивать же расстояние между точками, в которых определяется скорость, можно только до известных пределов (400—500 м), так как при большем расстоянии трудно попасть в рамы-мишени.

Аэродинамические трубы представляют собой весьма эффективное средство для изучения сопротивления воздуха, особенно при дозвуковых скоростях. Аэродинамические характеристики оперенных снарядов, рассчитанных для стрельбы при дозвуковых скоростях, определяются в обычных аэродинамических трубах. При этом снаряды всех калибров могут продуваться в натуральную величину.

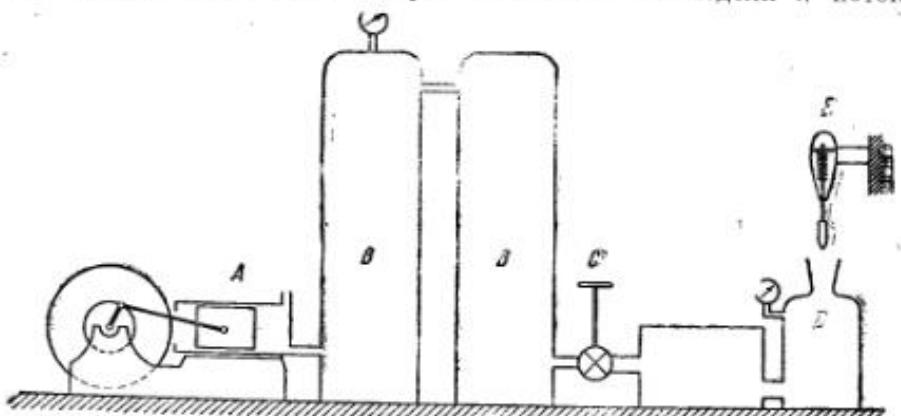
Начиная с 1917 г., в различных странах появились аэродинамические трубы, рассчитанные на сверхзвуковую скорость потока воздуха. Для поддержания постоянного сверхзвукового потока требуется большая мощность компрессоров; поэтому подобные трубы имеют сравнительную небольшую площадь сечения рабочей части.

На черт. 36 показана схема трубы, построенной проф. Аккеретом в Цюрихе, с площадью рабочего сечения  $40 \times 40 \text{ см}^2$ . Постоянный сверх-



Черт. 36

звуковой поток поддерживается компрессором *A*, вращаемым электромотором в 900 л. с. Предварительно из трубы откачивается часть воздуха для уменьшения требуемой мощности мотора. Нагнетаемый воздух проходит через направляющую решетку *B* в расструб сопла *CD*, в котором расширяется, приобретая сверхзвуковую скорость. Испытуемое тело устанавливается в рабочей части трубы *D* и присоединяется к специальным аэродинамическим весам, позволяющим измерять силу сопротивления воздуха при различных углах наклона оси модели к потоку.



Черт. 37

Пройдя рабочую часть, воздух поступает в диффузор *E*, в котором теряется его скорость и повышается давление, и далее движется по замкнутой трубе с направляющими лопатками и попадает снова в компрессор.

На черт. 37 показана схема аэродинамической трубы баллистической лаборатории Артиллерийской академии КА. Компрессор *A* нагнетает воздух в резервуары *B*, рассчитанные на давление порядка  $250 \text{ кг}/\text{см}^2$ . Посредством редуктора *C* воздух из резервуаров выпускается в ресивер, в котором поток выравнивается и далее через сопло *D* направляется на испытуемую модель. Редуктор позволяет поддерживать перед соплом постоянное давление до 15—20 атм, что обеспечивает скорость потока до трех скоростей звука. Сила сопротивления воздуха определяется при помощи динамометра, помещенного в обойме *E*.

В аэродинамических трубах можно определять не только суммарное сопротивление модели, но и распределение давления по поверхности снаряда. Для этого нужно в стенке полой модели просверлить отверстия в тех местах, в которых желательно определить давление, а внутреннюю полость модели соединить с манометром.

### § 28. Опыты по изучению сопротивления воздуха артиллерийским снарядам

Опыты с круглыми пулями впервые проводил Робинс в Англии в 1742 г. при помощи баллистического маятника. В 1790 г. тем же методом производил опыты Хеттон с шаровыми артиллерийскими снарядами.

При переходе к нарезной артиллерии, в шестидесятых годах прошлого столетия, во многих странах были поставлены опыты по определению сопротивления воздуха при помощи электрических хронографов. В России опыты производил Майевский в 1869 г. со снарядами длиной в 2 калибра и с головными частями от 0,9 до 1,1 калибра. В Англии проводились опыты Башфортом в 1866—1870 гг. со снарядами длиной в 2,54 калибра и с головной частью в 1,12 калибра.

Во Франции опыты проводились в 1873 г. Гаврской комиссией со снарядами разных калибров и разной формы головной части.

В Голландии опыты производил Хойель в 1884 г. со снарядами длиной от 2,5 до 4 калибров с головными частями в 1,3 калибра.

В Германии опыты производились фирмой Круппа с 1879 по 1896 г. со снарядами длиной от 2,8 до 4 калибров и с головной частью в 1,3 калибра.

После первой империалистической войны в большинстве стран перешли к снарядам новой формы, имеющим заостренную головную часть и хвостовую часть в виде усеченного конуса при общей длине снаряда порядка 5 калибров. В связи с этим выявилась необходимость в изучении сопротивления воздуха снарядам новой формы. В 1921—1923 гг. во Франции большие опыты проводил Дюпон со снарядами различных калибров как старой, так и новой формы. В США в 1923 г. были поставлены опыты со снарядами новой формы.

Перед Отечественной войной опыты с современными дальнобойными снарядами проводились у нас на АНИОП.

Опыты с пулями производились в 1912 г. в Германии Беккером и Кранцем. У нас опыты с пулями проводились в 1932 г. проф. Вентцелем и перед Отечественной войной — НИИ в Томске.

Сопротивление воздуха на оперенные снаряды изучалось у нас в аэродинамических трубах (ЦАГИ и ЛГУ).

### § 29. Результаты опытов. Законы сопротивления воздуха

В результате проведенных опытов многими авторами предлагались различные эмпирические формулы, выражающие зависимость сопротивления воздуха от скорости снаряда. Эти формулы обычно называют законами сопротивления воздуха; мы рассмотрим здесь только те из них, которые имеют или имели применение в нашей стране.

#### Закон Майевского—Забудского

Майевский и Забудский, по данным русских и Крупповских опытов, предложили принять для функции сопротивления воздуха простое выражение

$$F(v) = Bv^n$$

Так как оказалось невозможным подобрать постоянные значения *B* и *n* для всех скоростей, то они разбили весь диапазон скоростей на семь участков и для различных участков приняли различные значения *B* и *n*:

<i>v</i>	От 0	240	295	375	419	550	800
До	240	295	375	419	550	800	1000
<i>n</i>	2	3	5	3	2	1,70	1,55

Значения коэффициента *B* подбирались таким образом, чтобы на границах участков функция  $F(v)$  не имела разрывов.

Недостатком закона сопротивления воздуха Майевского—Забудского является то, что на стыках участков имеются угловые точки, правда, мало заметные на графике функции  $F(v)$ , а следовательно, и разрывы в производной  $F'(v)$ . По этой причине закон сопротивления воздуха Майевского—Забудского в последнее время у нас не применяется.

#### Закон Сиаччи

Сиаччи объединил результаты опытов, проведенных со снарядами старой формы Майевским, Хойелом, Башфортом и фирмой Крупса, в эмпирическую формулу следующего вида:

$$F(v) = 0,2002 v - 48,05 \sqrt{(0,1648 v - 47,95)^2 + 9,6} + \frac{0,0442 v (v - 300)}{371 + \left(\frac{v}{200}\right)^{10}}$$

и вычислил подробные таблицы значений этой функции. Кривая этой функции не имеет угловых точек.

Предложенная Сиаччи формула, конечно, громоздка. Однако необходимо иметь в виду, что в большинстве случаев приходится пользоваться не аналитическим выражением функции  $F(v)$ , а ее численными значениями, приведенными в таблицах. Закон Сиаччи широко используется в нашей стране. Применяя его для дальнобойных снарядов, принимают коэффициент формы порядка 0,5—0,6, так как современные снаряды испытывают сопротивление воздуха почти в два раза меньшее, чем снаряды старой формы. Подробные таблицы функций сопротивления воздуха для закона Сиаччи приведены в ч. III курса<sup>1</sup> «Внешняя баллистика» Вентцеля и Шапиро. Кривые функций  $F(v)$  и  $c_x \left( \frac{v}{a} \right)$  для закона Сиаччи показаны на черт. 38 и 39.

#### Закон Гарнье-Дюпон (закон 1930 г.)

Этот закон предложен Гарнье на основании опытов, проведенных Дюпон в 1921—1923 гг. со снарядами современной формы. Сопротивление воздуха может быть выражено формулой

$$R = A [\varphi(v) + B \psi(v)],$$

где *A* и *B* зависят от формы снаряда.

Для функций  $\varphi(v)$  и  $\psi(v)$  предложены эмпирические формулы, различные для скоростей, больших и меньших скорости звука, а именно:

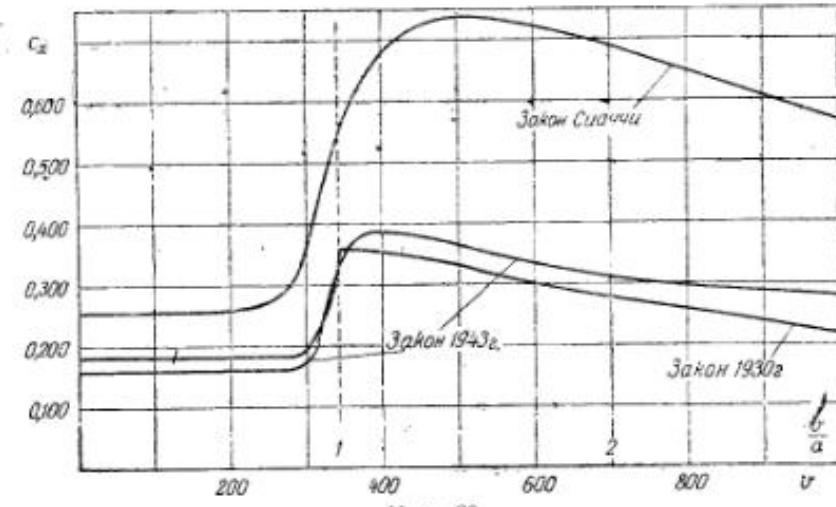
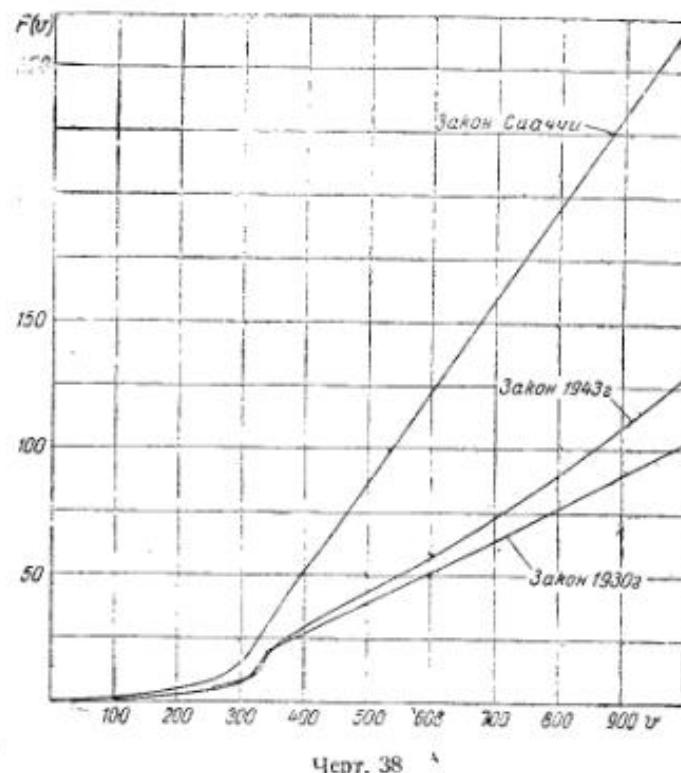
$$\text{для } v > a \begin{cases} \varphi(v) = v - 170,5 + 0,166(v - 700) \cdot 10^{-\frac{(v-660)^2}{21000}}, \\ \psi(v) = 1; \end{cases}$$

$$\text{для } v < a \begin{cases} \varphi(v) = 48,5 + 122 \cdot 10^{-0,017(341-v)}, \\ \psi(v) = 0,347 + 0,653 \cdot 10^{-0,017(341-v)}. \end{cases}$$

При  $v = 341$  м/сек получается резко выраженная угловая точка на графиках функций  $F(v)$  и  $c_x \left( \frac{v}{a} \right)$ .

<sup>1</sup> В дальнейшем для краткости будем эту книгу называть «часть III».

При составлении баллистических таблиц АНИИ в 1930 г. был принят закон Гарнье-Дюпон для дальнобойного снаряда типа Куард; при этом участок кривой, примыкающий к угловой точке, был несколько сглажен. В таком виде эта функция сопротивления под названием «закон 1930 г.» помещена в «Баллистических таблицах АНИИ», ч. I, 1933 г.



Закон 1943 г.

В 1943 г. по предложению Артиллерийского комитета ГАУ кафедрой внешней баллистики Академии был разработан новый закон сопротивления воздуха, отвечающий нашим дальнобойным снарядам. Этот закон был получен на основании обработки специальных стрельб

с дальнобойными снарядами и пулями для изучения сопротивления, а также на основании обработки данных таблиц стрельбы для определения коэффициента формы наших штатных дальнобойных снарядов.

Функции сопротивления выбраны в этом законе такими, чтобы при производстве баллистических расчетов для дальнобойных снарядов, а также для пуль и оперенных снарядов (мин) коэффициент формы получился по возможности близким к единице.

В этом законе сопротивления воздуха функция  $F(v)$  для скоростей, меньших 256 м/сек или больших 1410 м/сек, может быть выражена одночленом

$$F(v) = B v^2.$$

Значения коэффициента  $B$  получаются:  
для  $v < 256$  м/сек

$$B = 0,7454 \cdot 10^{-4}; \quad \lg B = 5,8724;$$

для  $v > 1410$  м/сек

$$B = 1,2315 \cdot 10^{-4}; \quad \lg B = 4,0904.$$

Таблицы значений функций сопротивления воздуха для закона 1943 г. даны в табл. I приложения к настоящей книге. Кривые функций сопротивления воздуха для этого закона показаны на черт. 38 и 39.

**Соотношения между численными значениями функций сопротивления воздуха для различных законов сопротивления воздуха**

Переходный множитель от закона Сиаччи к закону Майевского—Забудского в среднем равен 0,896, так что

$$[F(v)]_{\text{М-З}} = 0,896 [F(v)]_{\text{Сиаччи}}.$$

Для перехода от закона Сиаччи к закону Гарнье-Дюпон и к закону 1943 г. можно пользоваться табл. 7.

Таблица 7

Скорость, м/сек	150	250	300	341	400	500	700	1000
Переходный множитель к закону Гарнье-Дюпон	0,71	0,67	0,55	0,65	0,52	0,46	0,40	0,39
1943 г.	0,61	0,58	0,48	0,60	0,57	0,50	0,45	0,48

Современные дальнобойные снаряды имеют в среднем коэффициент формы порядка 0,55 к закону Сиаччи, 1,1—к закону Гарнье-Дюпон и 1,0—к закону 1943 г. Значения коэффициентов формы для старых снарядов больше указанных величин на 50—70%.

### § 30. Показатель сопротивления воздуха

Рассмотрим зависимость между малыми изменениями скорости снаряда и соответствующими изменениями силы сопротивления воздуха. Так как сила сопротивления воздуха пропорциональна функции  $F(v)$ :

$$R = \frac{q}{g} J = \frac{q}{g} c H(y) F(v),$$

то, логарифмируя и дифференцируя это выражение и полагая переменными величины  $R$  и  $v$ , получим

$$\frac{dR}{R} = \frac{F(v)}{F(v)} dv = \frac{v F'(v) dv}{F(v) v}.$$

Заменяя дифференциалы приращениями и обозначая

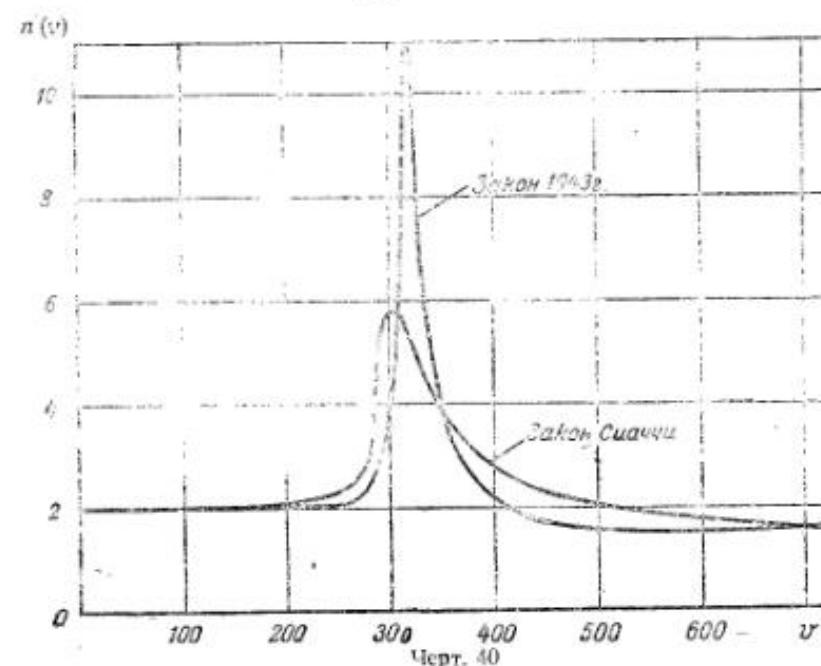
$$n(v) = \frac{v F'(v)}{F(v)}, \quad (28)$$

получим

$$\frac{dR}{R} = n(v) \frac{dv}{v}.$$

Таким образом мы видим, что функция  $n(v)$  характеризует зависимость между малыми относительными изменениями скорости и соответствующими изменениями силы сопротивления воздуха. Например, для скоростей, меньших 250 м/сек, для которых  $n=2$ , изменению скорости на 1% отвечает изменение силы сопротивления воздуха на 2%. Функция  $n(v)$  носит название показателя сопротивления. Это название станет понятным, если положить, что функция  $F(v)$  выражается одночленом вида  $F(v)=Bv^n$ . В этом случае

$$n(v) = \frac{v F'(v)}{F(v)} = \frac{v n B v^{n-1}}{B v^n} = n.$$



Кривые функции  $n(v)$  для закона Сиаччи и закона 1943 г. приведены на черт. 40.

Интересно отметить, что для закона Майевского—Забудского кривая функции  $n(v)$  состоит из семи горизонтальных отрезков прямых и имеет разрывы на стыках участков, для которых приняты постоянные значения показателя  $n$ .

### § 31. Распределение давления по поверхности снаряда

Распределение давления по поверхности снаряда изучалось различными методами. Бурцио (Италия) закреплял полную модель снаряда на конце быстровращающейся лопасти. При длине плеча 2,5 м была получена скорость модели до 360 м/сек. В различных точках профиля модели просверливались малые отверстия, а внутренняя полость модели присоединялась к манометру. Таким путем определялось распределение давления по поверхности модели.

В Англии Берстоу, Фоулер и Хартри проводили опыты следующим образом. Пороховая дистанционная трубка помещалась под полым колпаком в головной части снаряда. В различных точках поверхности колпака просверливались отверстия. Горение трубки происходило при том давлении, которое имело место у отверстия. Зная зависимость скорости горения трубки от давления, можно, засекая время горения трубки при полете снаряда, определить давление у отверстий. Меняя положение отверстий, можно определить таким образом распределение давления на головной части снаряда.

С появлением аэродинамических сверхзвуковых труб стало возможным определять распределение давления путем продувки присоединенных к манометру полых моделей снаряда, на поверхности которых просверливались малые отверстия.

На черт. 41 показано распределение давления по поверхности снаряда. Из чертежа видно, что непосредственно у вершины снаряда давление может достигать значительных величин, порядка 10 атм для

скорости 940 м/сек. Это давление равно расчетному по формуле Релея. По мере удаления от вершины давление быстро падает. В цилиндрической части снаряда давление может получиться даже ниже атмосферного. Значительное повышение давления имеет место перед пояском в связи с образованием в этом месте баллистической волны. За пояском давление падает, а непосредственно у дна снаряда имеет место значительное разрежение.

#### УЧЕТ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ

Из выражения для ускорения силы сопротивления воздуха

$$J = cH(y)F(v),$$

где

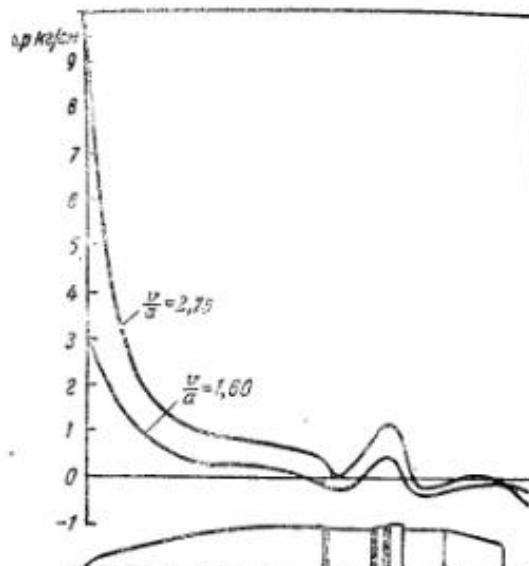
$$H(y) = \frac{\Pi}{\Pi_{0N}}$$

$$F(v) = 4,74 \cdot 10^{-4} v^2 c_s \left( \frac{v}{a} \right)^2,$$

видно, что метеорологические факторы влияют на сопротивление воздуха двояко: через плотность воздуха  $\Pi$  и через скорость звука  $a$ , зависящую от температуры воздуха:

$$a = \sqrt{kgRT}.$$

Рассмотрим зависимость между метеорологическими факторами и их изменение с высотой.



Черт. 41

#### § 32. Зависимость между метеорологическими элементами

В баллистике учитываются следующие метеорологические элементы:

- 1) барометрическое давление  $h$  в мм рт. ст.;
- 2) температура воздуха  $T^\circ$  или абсолютная температура  $T$ ;
- 3) влажность  $e$  в мм рт. ст.;
- 4) плотность воздуха (весовая)  $\Pi$  в  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;
- 5) ветер  $W$ .

Зависимость между метеорологическими элементами для сухого воздуха определяется уравнением состояния газа

$$\rho v = RT,$$

где  $\rho$  — давление в  $\text{кг}/\text{м}^3$ ,  $v$  — удельный объем в  $\text{м}^3/\text{кг}$ .

Переходя к обозначениям, принятым в баллистике, получим

$$\rho = h \frac{10333}{760}; \quad v = \frac{1}{\Pi};$$

здесь  $\frac{10333}{760} = 13,6$  — переходный множитель от мм ртутного столба к  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Окончательно получим

$$13,6 h \frac{1}{\Pi} = RT,$$

откуда

$$\Pi = 13,6 \frac{h}{RT}.$$

В случае влажного воздуха на основании закона Дальтона получим

$$h = h_1 + e,$$

где  $h_1$  — парциальное давление, отвечающее сухому воздуху, и  $e$  — парциальное давление водяных паров.

При этом вес доли сухого воздуха  $\Pi_1$ , содержащегося в 1  $\text{м}^3$ , получится из выражения

$$\Pi_1 = 13,6 \frac{h_1}{RT} = 13,6 \frac{h - e}{RT}.$$

Вес водяных паров  $\Pi_2$  в 1  $\text{м}^3$  найдем из аналогичного выражения с учетом того, что при одинаковых давлении и температуре плотность водяных паров составляет 5,8 плотности сухого воздуха. Таким образом

$$\Pi_2 = \frac{5}{8} \cdot 13,6 \frac{e}{RT}.$$

Вес 1  $\text{м}^3$  влажного воздуха равен

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = \frac{13,6}{RT} \left( h - \frac{3}{8} e \right).$$

Окончательно для влажного воздуха имеем

$$\boxed{\Pi = 13,6 \frac{h}{RT} \left( 1 - \frac{3}{8} \frac{e}{h} \right)}.$$

Так как влияние водяных паров на плотность незначительно, то удобно ввести в эту формулу так называемую виртуальную температуру  $\tau$ , определяемую из выражения

$$\tau = \frac{T}{1 - \frac{3}{8} \frac{e}{h}}.$$

При этих условиях получим

$$\Pi = 13,6 \frac{h}{Rz} \quad (29)$$

Легко видеть, что виртуальная температура — это такая температура, которую имел бы сухой воздух с той же плотностью  $\Pi$  и тем же давлением  $h$ , что и влажный воздух.

Разница между  $T$  и  $\tau$  незначительна — порядка  $0,3^\circ$ .

Нормальными метеорологическими условиями у земли приняты:

$$h_{0N} = 750 \text{ мм}; \quad t_{0N} = 15^\circ\text{C}; \quad \epsilon_{0N} = 6,35 \text{ мм},$$

что отвечает относительной влажности  $50\%$ .

При этих условиях

$$\tau_{0N} = \frac{288}{1 - \frac{3}{8} \frac{6,35}{750}} = 288,9,$$

$$\Pi_{0N} = 13,6 \frac{750}{29,27 \cdot 288,9} = 1,206 \text{ кг/м}^3.$$

Для нормальных условий предполагается отсутствие ветра на всех высотах.

### § 33. Уравнение вертикального равновесия атмосферы

Современная метеорология базируется на гипотезе о вертикальном равновесии атмосферы, заключающейся в предположении, что вес некоторого столба воздуха уравновешивается разностью давлений на верхнее и нижнее его сечения.

Выделим (черт. 42) на высоте  $y$  слой воздуха с площадью основания  $s$  и высотой  $dy$ . Бес данного объема воздуха равен  $\Pi s dy$ . Сила давления на нижнее сечение равна  $13,6 h s$ , а на верхнее сечение  $13,6(h + dh)s$ .

Приравнивая нулью сумму проекций всех сил на ось  $y$ , получим

$$13,6 h s - 13,6(h + dh)s - \Pi s dy = 0,$$

откуда

$$13,6 dh = -\Pi dy.$$

Подставляя значение  $\Pi$  из уравнения (29), получим

$$\frac{dh}{h} = -\frac{1}{Rz} \frac{dy}{\tau}.$$

Интегрируя это уравнение слева от  $h_0$  до  $h$ , а справа от 0 до  $y$ , получим

$$\ln \frac{h}{h_0} = -\frac{1}{Rz} \int_0^y \frac{dy}{\tau}.$$

или окончательно

$$h = h_0 e^{-\frac{1}{Rz} \int_0^y \frac{dy}{\tau}} \quad (30)$$

Для вычисления интеграла в уравнении (30) необходимо знать зависимость  $\tau = f(y)$ . Если эта зависимость известна и известно давление на земле, то можно вычислить давление на некоторой высоте  $y$ . Зная  $h$  и  $\tau$ , можно подсчитать плотность  $\Pi$  из выражения (29). Таким образом основным метеорологическим элементом, закон изменения которого с высотой определяет характер изменения с высотой других элементов, является температура.

Заметим, что подсчеты по формуле (30) дают вполне надежные результаты, правильность которых подтверждалась специальными наблюдениями, произведенными при подъеме стратостатов.

### § 34. Нормальный закон изменения температуры с высотой

Характер изменения температуры с высотой зависит от общего состояния погоды и является, строго говоря, различным не только для различных сезонов года, но и для каждого дня и даже часа.

Так как баллистические расчеты производятся для некоторых средних, принимаемых за нормальные, метеорологических условий, то необходимо условиться о принятии какой-то функции  $\tau(y)$  в качестве среднего нормального закона изменения температуры с высотой.

В настоящее время у нас принят следующий закон изменения температуры с высотой, предложенный проф. Вентцелем на основании обработки результатов многократного зондирования атмосферы различными аэрологическими станциями.

1. Для высот до 9300 м принимается зависимость

$$\tau = \tau_{0N} - Gy,$$

где  $\tau_{0N} = 288,9$ , а  $G$  — постоянный градиент, равный 0,006328. Таким образом для высоты до 9300 м принимается убывание температуры с высотой по линейному закону  $-0,6328^\circ$  на каждые 100 м.

2. Для высот от 9300 до 12000 м градиент убывает линейно от 0,006328 до нуля так, что получается изменение температуры по кривой второго порядка:

$$\tau = 230,0 - 0,006328(y - 9300) + 1,172 \cdot 10^{-6}(y - 9300)^2.$$

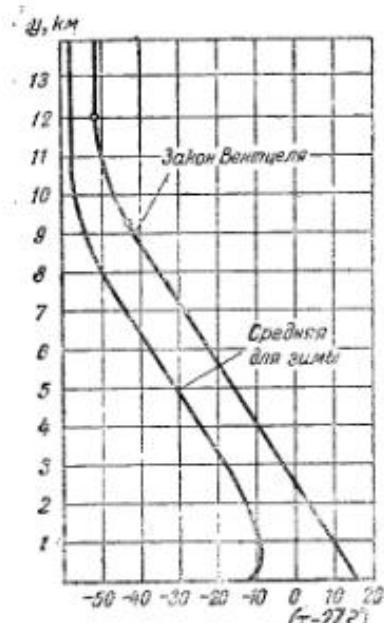
3. Для высот, больших 1200 м, температура принимается постоянной и равной  $\tau = 221,5$ .

В заключение следует заметить, что предложенный проф. Вентцелем закон изменения температуры отвечает среднелетним условиям. Для зимних условий получается другой средний ход изменения температуры, особенно для высот до 1—2 км. На этих высотах зимой обычно имеют место инверсии, когда температура с высотой сначала возрастает, а затем начинает убывать. Эти инверсии бывают особенно сильными в Сибири, на Дальнем Востоке и вообще в местах с резко выраженным континентальным климатом (черт. 44). Наблюдались случаи, когда у поверхности земли температура воздуха была минус  $40^\circ$ , а на высоте 1 км — порядка минус  $20^\circ$ . Слабые инверсии, при которых температура с высотой повышается на 2—3° до высот в 200—300 м, наблюдаются и летом на рассвете после относительно холодной ночи.

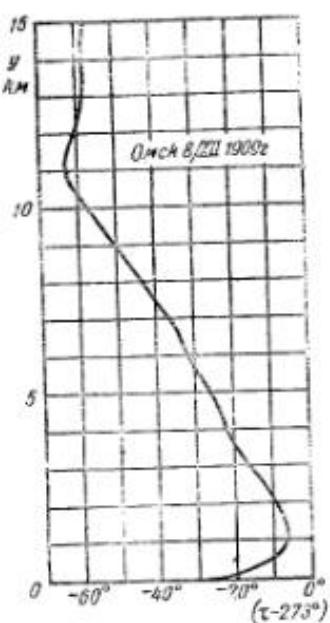
### § 35. Изменение давления и плотности с высотой

Из выражений (29) и (30) имеем

$$\Pi = 13,6 \cdot \frac{h_0}{Rz} e^{-\frac{1}{Rz} \int_0^y \frac{dy}{\tau}}.$$



Черт. 43



Черт. 44

Отнеся эту плотность к плотности воздуха у земли, получим

$$\frac{\Pi}{\Pi_0} = \frac{z_0}{z} e^{-\frac{1}{R} \int_{z_0}^z \frac{dy}{y}}. \quad (31)$$

Рассматривая нормальные метеорологические условия ( $z_0 = z_{0N}$ , и исходя из закона температур Вентцеля для высот до 9300 м, получим

$$\tau = \tau_0 - Gy, \quad (32)$$

$$d\tau = -Gdy,$$

$$-\frac{1}{R} \int_{z_0}^z \frac{dy}{y} = \frac{1}{RG} \int_{\tau_0}^{\tau} dz = \frac{1}{RG} \cdot \ln \frac{\tau}{\tau_0},$$

$$e^{-\frac{1}{R} \int_{z_0}^z \frac{dy}{y}} = \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{\frac{1}{RG}}.$$

Подставляя полученные значения в выражения (30) и (31), найдем для нормальных условий ( $\tau_0 = \tau_{0N}$ )

$$h = h_0 \left( \frac{\tau}{\tau_{0N}} \right)^{\frac{1}{RG}},$$

$$H(y) = \left( \frac{\tau}{\tau_{0N}} \right)^{\frac{1}{RG}-1},$$

где  $\tau$  определяется по формуле (32) для  $G = 0,006328$ . Исходя из этих зависимостей, вычислены таблицы значений  $\tau$ ,  $h$  и  $H(y)$ , которые применяются при баллистических расчетах (ч. III, табл. 8, 9, 10, 15, 16).

Для высот, больших 9300 м, значения  $\int_{z_0}^z \frac{dy}{y}$  вычислены методом численного интегрирования.

### § 36. Ветер

В балistique для нормальных метеорологических условий предполагается отсутствие ветра. Влияние ветра учитывается при вычислении поправок. Определенного закона изменения скорости и направления ветра с высотой указать нельзя. Известно лишь, что в большинстве случаев скорость ветра с высотой возрастает.

Зависимость ветра от времени весьма сложна вследствие его прерывистости. Колебания скорости ветра около среднего ее значения могут доходить до 100% величины скорости. Так как, однако, период колебания не превышает нескольких секунд, то среднее значение скорости ветра мало меняется за время полета снаряда. Поэтому при обычных дальностяхвойской артиллерии можно принять, что за время стрельбы скорость ветра имеет некоторую постоянную среднюю величину.

### § 37. Зависимость сопротивления воздуха от скорости звука

Из выражений для функции сопротивления

$$F(v) = 4,74 \cdot 10^{-4} v^2 c_x \left( \frac{v}{a} \right)$$

или

$$G(v) = 4,74 \cdot 10^{-4} v c_x \left( \frac{v}{a} \right)$$

видно, что эти функции зависят от двух переменных  $v$  и  $a$ , и, следовательно, таблицы этих функций должны иметь два входа  $v$  и  $a$ . Покажем, что при расчетах можно ограничиться таблицами с одним входом, вычисленными для нормальной скорости звука на земле  $a_{0N}$ .

Действительно, пусть требуется определить по этим таблицам значение функции  $G(v, a)$  для скорости звука  $a$ , отличной от нормальной. Подберем скорость  $v_z$ , чтобы удовлетворить равенству

$$\frac{v}{a} = \frac{v_z}{a_{0N}}.$$

Таким образом, учитывая, что  $a = \sqrt{kgR\tau}$ , получим

$$v_z = v \frac{a_{0N}}{a} = v \sqrt{\frac{a_{0N}}{\tau}}. \quad (33)$$

Подставляя (33) в выражение для функции  $G$ , получим

$$G(v, a) = 4,74 \cdot 10^{-4} v c_x \left( \frac{v}{a} \right) = 4,74 \cdot 10^{-4} v c_x \left( \frac{v_z}{a_{0N}} \right) =$$

$$= 4,74 \cdot 10^{-4} \frac{a}{a_{0N}} v \frac{a_{0N}}{a} c_x \left( \frac{v_z}{a_{0N}} \right)$$

и окончательно

$$G(v, a) = 4,74 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{a}{a_{0N}}} v_z c_x \left( \frac{v_z}{a_{0N}} \right).$$

Если бы скорость снаряда равнялась  $v_z$  и скорость звука была нормальной  $a_{0N}$ , то мы имели бы

$$G(v_z, a_{0N}) = 4,74 \cdot 10^{-4} v_z c_x \left( \frac{v_z}{a_{0N}} \right).$$

Из сравнения последних двух равенств получим

$$G(v, a) = \sqrt{\frac{a}{a_{0N}}} G(v_z, a_{0N}).$$

Для функции  $F(v, a)$  можно получить аналогично

$$F(v, a) = \sqrt{\frac{v}{v_{0N}}} F(v_z, a_{0N}).$$

Таким образом, имея таблицы функции  $G$ , вычисленные для нормальной скорости звука (т. е. для нормальной температуры), и желая вычислить значения этой функции для какой-то скорости звука  $a$ , отличной от нормальной, необходимо входным числом в таблицу взять величину  $v_z = v \sqrt{\frac{v_{0N}}{a}}$ , определить соответствующее значение функции и полученный результат умножить на  $\sqrt{\frac{v}{v_{0N}}}$ .

На практике при производстве баллистических расчетов приходится вычислять произведение

$$H(y)G(v, a),$$

при этом имеем

$$H(y)G(v, a) = H(y) \sqrt{\frac{v}{v_{0N}}} G(v_z, a_{0N}).$$

Так как  $v_z$  является функцией высоты, то можно, обозначая  $H_z(y) = H(y) \sqrt{\frac{v}{v_{0N}}}$ , вычислить таблицу этой функции и в расчетах исходить из зависимости

$$H(y)G(v, a) = H_z(y)G(v_z). \quad (34)$$

В правой части постоянное число  $a_{0N}$  опущено под знаком функции  $G$ .

Для функции  $F(v, a)$  получаем аналогично

$$H(y)F(v, a) = H(y) \sqrt{\frac{v}{v_{0N}}} F(v_z).$$

Учитывая, что

$$H(y) = \frac{H}{H_{0N}} = \frac{h}{h_{0N}} \frac{v_{0N}}{v},$$

получим окончательно

$$H(y)F(v, a) = \frac{h}{h_{0N}} F(v_z). \quad (35)$$

Выражение для ускорения силы сопротивления воздуха при этом имеет следующий вид:

$$\boxed{J = \frac{h}{h_{0N}} F(v_z)} \quad (36)$$

или

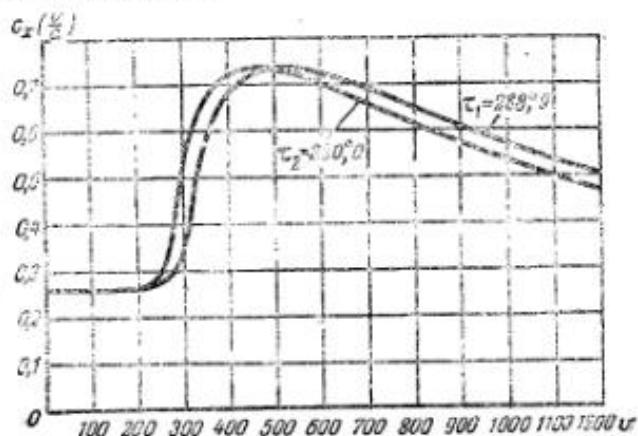
$$\boxed{J = c H_z(y) v G(v_z)}, \quad (37)$$

где

$$v_z = v \sqrt{\frac{v_{0N}}{a}}.$$

Посмотрим, в каких случаях неучет изменения скорости звука приводит к наибольшим ошибкам. Рассмотрим две кривые  $c_x \left( \frac{v}{a} \right)$ , отвечающие двум различным скоростям звука.

Имея кривую  $c_x$  для скорости звука  $a_1$ , можем построить кривую  $c_x$  для скорости звука  $a_2$ , помножив все абсциссы первой кривой на отношение  $\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{v_2}{v_1}}$ . На черт. 44а показаны две кривые  $c_x \left( \frac{v}{a} \right)$  для закона Сиаччи, отвечающие температурам  $\tau_1 = \tau_{0N} = 288,9^\circ$  и  $\tau_2 = 230^\circ$ . Из чертежа видно, что наибольшие ошибки получаются при скоростях в диапазоне 250—400 м/сек.



Черт. 44а

В заключение заметим, что влияние скорости звука на сопротивление воздуха начали учитывать в баллистике только после первой мировой войны в результате исследований французских баллистиков Дарье и Ланжевена. Поэтому во всех методах расчета траекторий, которые были разработаны до этого времени, выражение для ускорения силы сопротивления воздуха пишется без учета скорости звука, т. е. в следующем виде:

$$J = c H(y) F(v). \quad (38)$$

### БАЛИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СНАРЯДОВ

#### § 38. Коэффициент формы снаряда

Влияние формы снаряда на сопротивление воздуха характеризуется коэффициентом формы снаряда  $i$ , входящим в выражение для баллистического коэффициента:

$$c = \frac{id^2}{q} 1000.$$

Напомним, что

$$i = \frac{c_x^* \left( \frac{v}{a} \right)}{c_x \left( \frac{v}{a} \right)} = \frac{F^* \left( \frac{v}{a} \right)}{F \left( \frac{v}{a} \right)}, \quad (39)$$

где  $c_x^*$  и  $F^*$  отвечают индивидуальному образцу снаряда, а  $c_x$  и  $F$  — эталону.

Таким образом коэффициент формы есть соотношение функций сопротивления данного снаряда к функции принятого закона сопротивления. Поэтому необходимо помнить, что численные значения коэффициента формы зависят от выбранного закона сопротивления воздуха. Например, современные дальнобойные снаряды имеют коэффициент формы 0,5—0,6 по отношению к закону Сиаччи и 0,9—1,1 — к закону Гарнье.

Хотя коэффициент формы обычно рассматривается как постоянная величина, но, как видно из выражения (39), этот коэффициент, строго говоря, зависит от скорости. Поэтому, применяя снаряд одной и той же формы в различных диапазонах скоростей, мы можем получить некоторые расхождения в численных значениях коэффициента формы. По этой же причине коэффициент формы при одной и той же начальной скорости снаряда меняется с изменением угла бросания, так как при этом меняется диапазон изменения скоростей снарядов вдоль траектории.

В табл. 8 приведены значения коэффициентов формы для наших штатных снарядов по отношению к закону сопротивления Сиаччи. Диапазон углов бросания 30°—40°.

Таблица 8

Снаряды	Диапазон начальных скоростей	Коэффициент формы
<b>Дальнобойные</b>		
76-мм фугасная граната Ф-350 . . . . .	500—600	0,55
76-мм осколочно-фугасная граната ОФ-350 . . . . .	450—650	0,53
107-мм осколочно-фугасная граната ОФ-420с . . . . .	580—670	0,47
107-мм фугасная граната Ф-420у . . . . .	580—670	0,57
122-мм осколочно-фугасная граната ОФ-462г . . . . .	400—500	0,57
152-мм осколочно-фугасная граната ОФ-540 . . . . .	560—680	0,52
152-мм осколочно-фугасная граната ОФ-540 . . . . .	300—450	0,54
152-мм бетонобойный снаряд Г-530 . . . . .	370—500	0,61
152-мм бетонобойный снаряд Г-530 . . . . .	570—670	0,57
<b>Старой формы</b>		
76-мм фугасная граната Ф-354 . . . . .	650	0,89
76-мм шрапнель с 22-сек. трубкой Ш-354 . . . . .	620	0,86
76-мм шрапнель с трубкой Т-6 Ш-354 . . . . .	620	0,79
107-мм фугасная граната Ф-422 . . . . .	580—670	0,73
107-мм шрапнель с 45-сек. трубкой Ш-422 . . . . .	665	0,81
107-мм шрапнель с трубкой Т-6 . . . . .	665	0,72
152-мм фугасная граната Ф-542 Ш . . . . .	350—550	0,82
152-мм фугасная граната Ф-542 . . . . .	570—670	0,68
152-мм фугасная граната Ф-542 . . . . .	300—400	0,77
203-мм фугасная граната Ф-621 . . . . .	300—500	0,82

Таким образом значения коэффициента формы получаются в среднем порядка 0,55 для дальнобойных снарядов и 0,80 для снарядов старой формы.

Значения коэффициентов формы по отношению к другим законам сопротивления могут быть получены, исходя из переходных множителей, указанных в § 29.

Значения коэффициента формы для пуль приведены в табл. 9.

Таблица 9

Пуля	Коэффициент формы
7,62-мм легкая пуля обр. 1908/30 г. . . . .	0,61
7,62-мм тяжелая пуля обр. 1930 г. . . . .	0,51
12,7-мм бронебойная пуля Б-30 . . . . .	0,48

Инженер-полковником Чернозубовым предложена формула, позволяющая вычислять значения коэффициента формы для пуль по отношению

к закону Сиаччи в зависимости от их конструктивных характеристик и от дальности.

Формула имеет следующий вид:

$$i = \frac{0,3}{\sqrt{0,5 + 10d}} \left( 1,23 - 0,15 \frac{d}{d'} \right) + \frac{h}{1 + 4h^2} \frac{12850 + K}{4200} - \frac{500}{1200 + v_0} \left[ 1 - \left( \frac{d'}{d} \right)^2 \right],$$

где  $d$  — калибр оружия в дм;

$h$  — высота оживала в калибрах;

$d'$  — диаметр донного среза пули.

Значение  $K$  принимается в зависимости от дальности:  
если

$$X < 1800 \left( \frac{d}{0,0762} \right)^2, \text{ то принимается } K = X;$$

если

$$X > 1800 \left( \frac{d}{0,0762} \right)^2, \text{ то принимается } K = 1800 \left( \frac{d}{0,0762} \right)^2.$$

Аналогичные формулы предложены различными авторами и для артиллерийских снарядов, однако эти формулы не дают удовлетворительного согласования с результатами опытов.

Оперенные снаряды (мины) обычно продуваются в аэродинамических трубах при дозвуковых скоростях. При этом, исходя из выражения  $R = S \frac{c_x v^2}{2}$ , определяется для каждого образца мины коэффициент  $c_x$ , который принимается постоянным для скоростей, меньших 250 м/сек.

Соотношения между численными значениями аэродинамического коэффициента  $c_x$  и коэффициента формы  $i$  можно найти из следующих соображений. Для скоростей, меньших 250 м/сек, принимая сопротивление воздуха пропорциональным квадрату скорости, имеем

$$F(v) = Bv^2.$$

С другой стороны (§ 23),

$$F(v) = 4,74 \cdot 10^{-4} v^2 c_x \left( \frac{v}{a} \right),$$

где  $c_x \left( \frac{v}{a} \right)$  отвечает выбранному закону сопротивления воздуха.

Принимая  $c_x$  постоянным, из сравнения обоих равенств получим

$$c_x = \frac{B}{4,74 \cdot 10^{-4}}.$$

Из выражения для коэффициента формы получим

$$i = \frac{c_x^*}{c_x} = \frac{4,74 \cdot 10^{-4}}{B} \cdot c_x^*.$$

Обозначая  $\frac{4,74 \cdot 10^{-4}}{B} = A$  и опуская знак  $*$  у  $c_x$ , получим

$$i = Ac_x.$$

Значения  $B$  и  $A$  для различных законов сопротивления воздуха приведены в табл. 10.

Таблица 10

Законы сопротивления воздуха	$B$	$A$
Сиаччи . . . . .	$1,212 \cdot 10^{-4}$	3,91
Гарнье-Дюпюи . . . . .	$0,8584 \cdot 10^{-4}$	5,52
Закон 1943 г. . . . .	$0,7454 \cdot 10^{-4}$	6,36

Примечание к табл. 10. В законе Сиаччи величина  $B = \frac{F(v)}{v^2}$  не остается постоянной при скоростях, меньших 250 м/сек, хотя меняется незначительно. Указанное численное значение коэффициента  $B = 1,212 \cdot 10^{-4}$  получено, исходя из значений функции  $F(v)$  при  $v = 100$  м/сек.

Численные значения  $c_x$  для наших штатных оперенных снарядов указаны в табл. 11.

Таблица 11

Мина	$c_x$
82-мм каплеобразная мина . . . . .	0,150
82-мм мина большой емкости . . . . .	0,310
120-мм мина . . . . .	0,155
82-мм реактивный снаряд . . . . .	0,315

### § 39. Баллистический коэффициент

Баллистический коэффициент

$$c = \frac{id^2}{q} 1000$$

является основной характеристикой баллистических качеств снаряда. Ускорение силы сопротивления воздуха

$$J = cH(y)F(v)$$

пропорционально баллистическому коэффициенту. Следовательно, чем больше баллистический коэффициент, тем быстрее снаряд теряет свою скорость в полете и тем хуже он в баллистическом отношении. Кроме коэффициента формы  $i$ , значения которого рассмотрены в предыдущем параграфе, баллистический коэффициент зависит еще от отношения  $\frac{q}{d^2}$ , отличающегося постоянным множителем  $\frac{\pi}{4}$  от отношения  $\frac{q}{S}$ , называемого обычно поперечной нагрузкой снаряда. Чем больше поперечная нагрузка снаряда, тем выгоднее снаряд в баллистическом отношении.

Рассмотрим зависимость баллистического коэффициента от калибра для снарядов, подобных по форме. Вес снаряда пропорционален объему или кубу калибра. Весовой характеристикой снаряда принято считать коэффициент веса снаряда

$$C_q = \frac{q_{\text{кг}}}{d^3 \rho_m},$$

т. е. отношение веса снаряда в кг к кубу калибра, выраженного в дм. Выражая вес снаряда через коэффициент веса, а калибр в м, т. е.

$$q = C_q d^3 \rho_m = 1000 C_q d^3,$$

и подставляя это значение в выражение для баллистического коэффициента, получим

$$c = \frac{i}{C_q d}.$$

Таким образом для подобных снарядов **баллистический коэффициент обратно пропорционален калибру**.

Значения коэффициента веса  $C_q$  для основных типов снарядов даны в табл. 12.

Таблица 12

Тип снаряда	$C_q$
Фугасные и осколочно-фугасные гранаты пушечные . . . . .	~ 14
То же гаубичные . . . . .	~ 12
Бронебойные снаряды обычного типа . . . . .	15–17
Подкалиберные бронебойные снаряды . . . . .	6–10
Пули . . . . .	20–30

Так как баллистический коэффициент зависит от коэффициента формы, то численные значения баллистического коэффициента зависят от выбранного закона сопротивления воздуха.

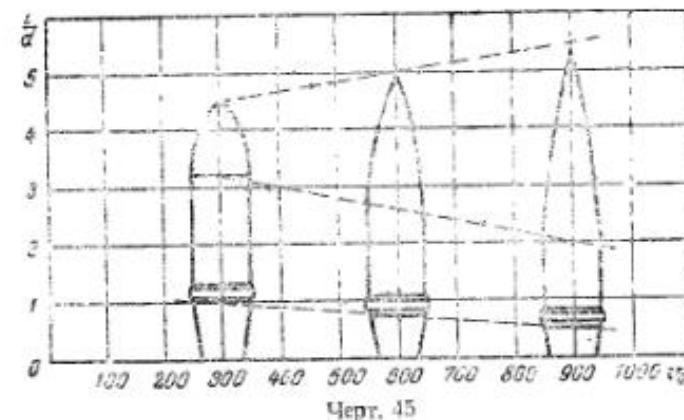
Если исходить из закона сопротивления Сиаччи, то получим следующие численные значения баллистического коэффициента:

$$\begin{aligned} 400-\text{мм дальнобойный снаряд} & . . . . . 0,1 \\ 76,2-\text{мм дальнобойный снаряд} & . . . . . 0,5 \\ 7,62-\text{мм легкая пуля} & . . . . . 3,6 \\ \text{Мелкокалиберная пуля} & . . . . . 10,0 \end{aligned}$$

Таким образом можно считать, что баллистический коэффициент для всевозможных снарядов и пуль меняется в пределах 0,1–10,0.

### § 40. Наилучшая форма снаряда

Для уменьшения сопротивления воздуха необходимо заострять головную часть снаряда, а запасовую часть делать в виде усеченного конуса. Чем больше скорость снаряда, тем большее относительная



роль сопротивления головной части в общем сопротивлении, тем более заостренной должна быть головная часть снаряда.

Влияние хвостовой части на общее сопротивление воздуха имеет решающее значение для гаубиц и мортир (скорость 100–400 м/сек).

Современные формы артиллерийских снарядов показаны схематически на черт. 45, на котором размеры снарядов даны в калибрах. На

чертеже видно увеличение длины головной части и общей длины снаряда с увеличением начальной скорости, а также уменьшение при этом длины хвостовой части. Современные пущечные снаряды имеют общую длину порядка 5 калибров при длине головной части ~ 2,5—3 калибров.

Для улучшения обтекания снарядов необходимо избегать устройства значительной площадки в вершине снаряда, а также кольцевых площадок в местах стыка взрывателя или головки с корпусом. Перед такими площадками образуются скачки уплотнений в виде баллистических волн, увеличивающих сопротивление воздуха.

Полное заострение вершины снаряда в условиях колебания оси снаряда может быть источником вихреобразования у вершины. Поэтому целесообразно несколько закруглить вершину снаряда. Радиус закругления определяется из опыта, при этом, чем больше скорость снаряда, тем меньшим должен быть радиус закругления.

Форма кривой, которой описана головная часть снаряда, имеет второстепенное значение, а основным фактором, влияющим на сопротивление воздуха, является относительная высота головной части и способ ее сопряжения с цилиндрической частью. Обычно делают головную часть снаряда оживальной формы, т.е. за образующую принимают дугу окружности, центр которой находится либо на основании головной части, либо несколько ниже (черт. 46).

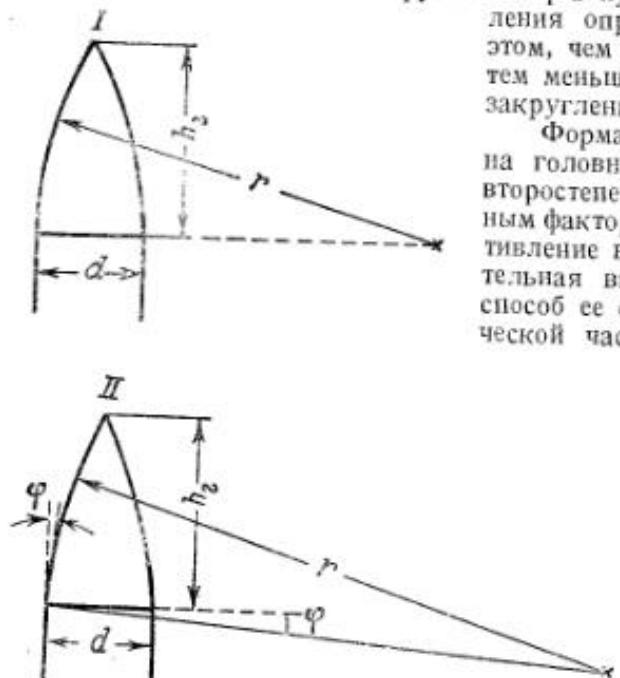
Донная часть снаряда устраивается в виде усеченного конуса с углом наклона образующей ~ 9°. Тщательная отделка поверхности снаряда (полировка или окраска) уменьшает сопротивление воздуха на 2—3%.

Вопрос о наивыгоднейшей форме снаряда не может решаться соображениями одной только аэrodинамики. Необходимо еще учесть назначение снаряда, характер его наполнения и обеспечение устойчивости снаряда в полете. Например, сильно заостренный снаряд длиной в 7—8 калибров был бы выгодным в аэродинамическом отношении, но его трудно сделать устойчивым в полете.

#### § 41. Пример вычисления сопротивления воздуха по таблицам

Требуется вычислить сопротивление воздуха на 76,2-мм снаряд для следующих условий:

$d = 0,0762 \text{ м}$ ;  $i = 0,6$  к закону сопротивления воздуха Сиаччи;  
 $q = 6,5 \text{ кг}$ ;  $v = 700 \text{ м/сек}$ ;  $y = 820 \text{ м}$ .



Черт. 46

Расчет ведем по формуле

$$J = c H_i(y) v G(v_i),$$

где

$$c = \frac{id^2}{q} = 1000;$$

$$v_i = v \sqrt{\frac{v_{0N}}{z}};$$

$$R = \frac{q}{g} J.$$

Значения  $H_i(y)$  и  $\sqrt{\frac{v_{0N}}{z}}$  определяются по табл. 7, а значения  $\lg G(v_i)$  — по табл. I части III. Входным числом в табл. I берем  $\lg v_i$ .

$\lg 1000 i$	2,7782	
$2 \lg d$	3,7640	2,8820
$-\lg q$	1,1871	0,8129
$\cdot \lg c$	1,7293	
$c$	0,5362	
$\lg v$	2,8451	
$\lg \sqrt{\frac{v_{0N}}{z}}$	0,0039	
$\lg v_i$	2,8490	
$\lg c$	1,7293	
$\lg H_i(y)$	1,9614	
$\lg v$	2,8451	
$\lg G(v_i)$	1,3602	
$\lg J$	1,8060	
$\lg q$	0,8129	0,9917
$-\lg g$	1,0083	
$\lg R$	1,7172	
$R$	52,14	

Окончательно получаем

$$J = 78,7 \text{ м/сек},$$

$$R = 52,14 \text{ кг},$$

$$\frac{R}{q} = \frac{52,14}{6,5} = 8,03.$$

Сила сопротивления воздуха в данном случае в 8 раз больше веса снаряда.

### Глава III

#### ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ВНЕШНЕЙ БАЛИСТИКИ

##### § 42. Составление дифференциальных уравнений движения центра массы снаряда в воздухе

Движение центра массы снаряда в воздухе будем рассматривать при следующих допущениях:

1. Ось снаряда совпадает с касательной к траектории центра массы снаряда, а сила сопротивления воздуха направлена по касательной в сторону, противоположную направлению скорости.

2. Движение снаряда происходит на плоской невращающейся земле.

3. Ускорение силы тяжести постоянно по величине и направлению и равно  $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$ .

4. Метеорологические условия нормальные.

Изучение движения снаряда при этих допущениях составляет основную задачу внешней баллистики.

В векториальной форме дифференциальное уравнение движения центра массы снаряда напишется в следующем виде (черт. 47):

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{R} + \vec{g},$$

где  $\vec{J}$  — ускорение центра массы снаряда,

или

$$\vec{J} = \frac{g}{q} \vec{R} + \vec{g},$$

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{g},$$

(1)

где  $J_1 = \frac{g}{q} R = c H(y) F(v)$  — ускорение силы сопротивления воздуха.

Проектируя равенство (1) на оси координат, получим

$$\ddot{x} = -c H(y) F(v) \cos \theta,$$

$$\ddot{y} = -c H(y) F(v) \sin \theta - g.$$

Имея в виду, что

$$\cos \theta = \frac{\dot{x}}{v}; \quad \sin \theta = \frac{\dot{y}}{v}$$

и

$$\frac{F(v)}{v} = G(v),$$

получим окончательно

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -c H(y) G(v) \dot{x}, \\ \ddot{y} &= -c H(y) G(v) \dot{y} - g. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Начальные условия:

$$t = 0; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad \dot{x} = v_0 \cos \theta_0; \quad \dot{y} = v_0 \sin \theta_0.$$

Полученная система двух дифференциальных уравнений, каждое второго порядка, эквивалентна системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка. Действительно, положив  $\dot{x} = u$  и  $\dot{y} = w$ , получим систему

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{u} &= -c H(y) G(v) u, \\ \dot{w} &= -c H(y) G(v) w - g, \\ x &= u, \\ y &= w, \end{aligned}} \quad (t)$$

где

$$v = \sqrt{u^2 + w^2}.$$

#### § 43. Различные системы дифференциальных уравнений

Подставляя в первые два уравнения системы (t)

$$\begin{aligned} u &= v \cos \theta, \\ w &= v \sin \theta, \end{aligned}$$

получим

$$\frac{du}{dt} = -c H(y) G(v) v \cos \theta,$$

$$\frac{dw}{dt} = -c H(y) G(v) v \sin \theta - g$$

или

$$\cos \theta \frac{dv}{dt} - v \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -c H(y) F(v) \cos \theta,$$

$$\sin \theta \frac{dv}{dt} + v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = -c H(y) F(v) \sin \theta - g.$$

Умножая обе части первого уравнения на  $\sin \theta$ , а второго на  $\cos \theta$  и вычитая соответствующие части первого из второго, получим

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{v}. \quad (3)$$

Умножая обе части первого уравнения на  $\cos \theta$  и второго на  $\sin \theta$  и складывая соответствующие части равенств, получим

$$\frac{dv}{dt} = -c H(y) F(v) - g \sin \theta. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) нам понадобятся в дальнейшем.

### 1. Система уравнений при аргументе $\theta$

Из уравнения (3) непосредственно имеем

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{v}{g \cos \theta}.$$

Далее

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{d\theta} = c H(y) G(v) u \frac{v}{g \cos \theta}.$$

Заменяя  $\frac{u}{\cos \theta} = v$  и  $G(v)v = F(v)$ , получим

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{c}{g} H(y) v F(v).$$

Далее

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\theta} = -\frac{uv}{g \cos \theta} = -\frac{u^2}{g \cos^2 \theta},$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = \operatorname{tg} \theta \left( -\frac{u^2}{g \cos^2 \theta} \right) = -\frac{u^2 \operatorname{tg} \theta}{g \cos^2 \theta}.$$

Окончательно получим при аргументе  $\theta$  следующую систему:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{c}{g} H(y) v F(v), \\ \frac{dt}{d\theta} &= -\frac{u}{g \cos^2 \theta}, \\ \frac{dx}{d\theta} &= -\frac{u^2}{g \cos^2 \theta}, \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\frac{u^2 \operatorname{tg} \theta}{g \cos^2 \theta}, \end{aligned}} \quad (6)$$

где

$$v = \frac{u}{\cos \theta}.$$

### 2. Система уравнений при аргументе $x$

Имеем

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{dx} = -c H(y) G(v) u \frac{1}{u} = -c H(y) G(v).$$

Далее, обозначая  $p = \operatorname{tg} \theta$  и имея в виду третье уравнение системы  $\theta$ , получим

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \left( -\frac{g \cos^2 \theta}{u^2} \right) = -\frac{g}{u^2}.$$

Выражения для  $u$  и  $t$  напишутся непосредственно:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta = p; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{u}.$$

Окончательно получим следующую систему при аргументе  $x$ :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -c H(y) G(v), \\ \frac{dp}{dx} &= -\frac{g}{u^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= p, \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{u}, \end{aligned}} \quad (x)$$

где

$$v = u \sqrt{1 + p^2}.$$

Во всех приведенных выше системах при учете изменения скорости звука с высотой надо вместо  $H(y)G(v)$  писать  $H_v(y)G(v_v)$ , а вместо

$$H(y)F(v) \quad \text{писать} \quad \frac{h}{h_{0,N}} F(v_v), \quad \text{где} \quad v_v = v \sqrt{\frac{z_0}{z}},$$

### 3. Уравнение годографа

Рассматривая систему (t), мы видим, что в ней приходится интегрировать три уравнения совокупно, а именно: первое, второе и четвертое. После того как эти уравнения будут проинтегрированы, третье уравнение можно интегрировать отдельно. Действительно, если бы мы захотели проинтегрировать отдельно первые два уравнения, то в них мы имели бы, учитывая, что  $v = \sqrt{u^2 + w^2}$ , три искомых функции  $u$ ,  $w$ ,  $y$ , которые, естественно, не могут быть получены из двух уравнений.

Таким же образом легко показать, что в системе (x) совокупными являются также три уравнения: первое, второе и третье. Наименьшее число совокупных уравнений мы имеем в системе  $\theta$ , в которой совокупными являются только два уравнения: первое и четвертое. Если же пренебречь изменением плотности воздуха с высотой и принять  $H(y) = -H(y_{cr})$ , то, включив  $H(y_{cr})$  в баллистический коэффициент, получим первое уравнение системы  $\theta$  в следующем виде:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{c}{g} v F(v) \quad (5)$$

или

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{c}{g} \frac{u}{\cos \theta} F\left(\frac{u}{\cos \theta}\right). \quad (5')$$

В этом уравнении одна искомая функция  $u$ , и оно может интегрироваться отдельно, после чего интегрирование остальных уравнений системы  $\theta$  сводится к квадратурам, т. е. к вычислению определенных интегралов.

Уравнение (5) называется уравнением годографа, так как в результате интегрирования его получается зависимость вида  $v = j(\theta)$ , т. е. уравнение годографа скоростей в полярных координатах.

Большинство баллистиков и математиков, занимавшихся решением основной задачи внешней баллистики, начинали с попыток интегрировать уравнение годографа; поэтому уравнение годографа имеет особенное значение в баллистике.

### ОБЩИЕ СВОЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ В ВОЗДУХЕ

Дифференциальные уравнения движения центра массы снаряда в воздухе не интегрируются точно в аналитическом виде. Приближенные и численные методы решения этой задачи будут рассмотрены ниже. Можно, однако, найти некоторые общие свойства траекторий в воздухе, не прибегая к интегрированию уравнений движения, а исходя из исследования самых дифференциальных уравнений движения.

Некоторые из этих свойств приводятся ниже.

#### § 44. Горизонтальная проекция скорости убывает

Из уравнения

$$\frac{du}{dx} = -c H(y) G(v),$$

имея в виду, что  $c, H(y)$  и  $G(v)$  положительны, получим

$$\frac{du}{dx} < 0.$$

Следовательно, горизонтальная проекция скорости и убывает вдоль траекторий.

Ранее мы видели, что в безвоздушном пространстве  $u = u_0 = \text{const}$ .

#### § 45. Нисходящая ветвь круче восходящей

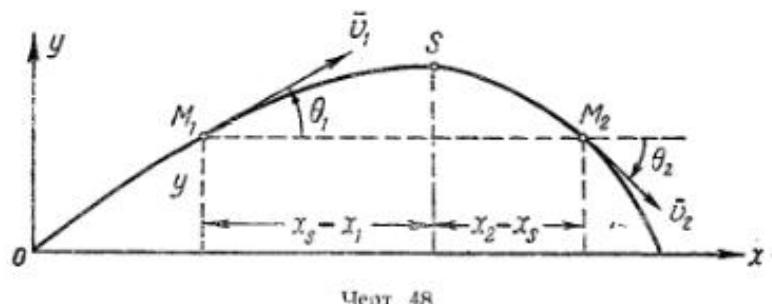
Из второго уравнения системы х

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{g}{u^2};$$

умножая обе части этого равенства на  $dy$  и имея в виду, что  $\frac{dy}{dx} = p$ , получим

$$pdःp = -\frac{g}{u^2} dy.$$

Рассмотрим две точки траектории  $M_1$  и  $M_2$  (черт. 48), находящиеся на одной высоте.



Черт. 48

Интегрируя последнее равенство дважды: один раз от точки  $M_1$  до вершины и другой раз от вершины до точки  $M_2$ , получим для восходящей ветви

$$\int_{p_1}^0 pdःp = -g \int_{y_1}^y \frac{dy}{u^2},$$

для нисходящей ветви

$$\int_0^{p_2} pdःp = -g \int_y^{y_2} \frac{dy}{u^2},$$

или

$$\frac{p_1^2}{2} = g \int_{y_1}^y \frac{dy}{u^2}, \quad \text{и} \quad \frac{p_2^2}{2} = g \int_y^{y_2} \frac{dy}{u^2},$$

где индексы  $(v)$  и  $(n)$  отмечают значения  $u$  для восходящей и нисходящей ветвей траекторий.

Так как горизонтальная проекция скорости непрерывно убывает вдоль траектории, то  $u_v > u_n$  и

$$\int_y^y \frac{dy}{u_v^2} < \int_y^y \frac{dy}{u_n^2}.$$

Следовательно,  $p_1^2 < p_2^2$ , откуда

$$p_1 < |p_2|; \quad \theta_1 < |\theta_2|,$$

т. е. нисходящая ветвь круче восходящей.

Полагая  $y = 0$ , т. е. рассматривая две точки на горизонте орудия, получим  $\theta_1 = \theta_0$ ;  $\theta_2 = \theta_c$ ;  $|\theta_c| > \theta_0$ .

Угол падения больше угла бросания.

Таким образом траектория в воздухе не является симметричной кривой, как это имеет место в безвоздушном пространстве.

#### § 46. Асимметричность скорости

Напишем уравнение живых сил для движения снаряда от точки  $M_1$  до точки  $M_2$  (черт. 48).

Известно, что работа силы тяжести не зависит от вида кривой, по которой происходит перемещение; она равна произведению веса тела на понижение его центра массы.

Поэтому работа силы тяжести на участке  $M_1M_2$  равна нулю, так как точки  $M_1$  и  $M_2$  находятся на одной высоте. Остается учсть только работу силы сопротивления воздуха. Имеем

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{s_1}^{s_2} R \cos(\hat{R}, \vec{v}) ds = - \int_{s_1}^{s_2} R ds;$$

$\cos(\hat{R}, \vec{v}) = -1$ , так как сила сопротивления воздуха противоположна направлению скорости. Так как правая часть последнего равенства отрицательна, то отрицательна и левая часть равенства. Следовательно,  $v_1 > v_2$ , что и выражает свойство асимметричности траектории не только по ее форме, но и по распределению скоростей вдоль траектории.

Для горизонта орудия имеем  $v_1 = v_0$  и  $v_2 = v_c$ ; следовательно,  $v_c < v_0$ .  
Окончательная скорость меньше начальной скорости.

Ранее мы видели, что в безвоздушном пространстве эти скорости равны.

#### § 47. Положение абсциссы вершины

Из уравнения  $\frac{dy}{dx} = p$  имеем

$$dx = \frac{dy}{p}.$$

Интегрируя это выражение от точки  $M_1$  до вершины и от вершины до точки  $M_2$ , получим для восходящей ветви

$$x_s - x_1 = \int_{y_1}^y \frac{dy}{p_v},$$

для нисходящей ветви

$$x_2 - x_s = \int_y^{y_2} \frac{dy}{p_n} = \int_y^{y_2} \frac{dy}{|p_n|}.$$

Так как  $|p_u| > p_n$ , то

$$\frac{\int dy}{y} \frac{dy}{|p_u|} < \frac{\int dy}{y} \frac{dy}{p_n},$$

откуда

$$x_s - x_1 > x_2 - x_s.$$

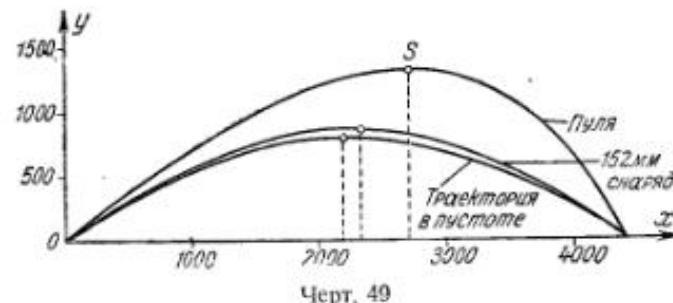
Применяя полученную зависимость для горизонта орудия, получим  $x_1 = 0$  и  $x_2 = X$ . Следовательно,

$$x_s > X - x_s \text{ и } x_s > \frac{X}{2}.$$

Для безвоздушного пространства мы имели  $x_s = \frac{X}{2}$ .

#### О степени несимметричности траектории в воздухе

Все изложенные в § 44—47 свойства характеризуют несимметричность траектории в воздухе. Эта несимметричность тем больше, чем больше ускорение силы сопротивления воздуха, т. е. чем меньше калибр



Черт. 49

и чем больше начальная скорость. Например, траектория винтовочной пули резко несимметрична, а траектория тяжелого гаубичного снаряда при наименьшем заряде мало отличается от параболы. На черт. 49 показаны три траектории, отвечающие одной и той же полной дальности. Характеристики этих траекторий указаны в табл. 13.

Таблица 13

	Калибр, мм	Начальная скорость м/сек	Полная дальность, м	Угол бросания	Угол падения
Пуля . . . . .	7,62	800	4400	35°	64°23'
152-мм снаряд .	150	227	4400	35°	37°53'
Траектория в пустоте (парабола)		214	4400	35°	35°

#### § 48. Предельное значение угла наклона касательной к траектории

Имеем

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{g \cos \theta}{v} = -\frac{g \cos^2 \theta}{u},$$

откуда

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{g}{u} dt.$$

Интегрируя в пределах от  $t=0$  до  $t=\infty$  и обозначая через  $\theta_{np}$  предельное значение угла наклона касательной при  $t \rightarrow \infty$ , получим

$$\int_{\theta_0}^{\theta_{np}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = - \int_0^{\infty} \frac{g}{u} dt,$$

$$\operatorname{tg} \theta_{np} - \operatorname{tg} \theta_0 = - \int_0^{\infty} \frac{g}{u} dt.$$

Так как

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{u} > \int_0^{\infty} \frac{dt}{u_0} = \infty,$$

а  $\operatorname{tg} \theta_0$  — конечная величина, то очевидно, что  $\operatorname{tg} \theta_{np} = -\infty$ , откуда  $\theta_{np} = -\frac{\pi}{2}$ .

Касательная к траектории стремится в пределе к вертикальному положению. Заметим, что это свойство верно и для траектории в безвоздушном пространстве.

Однако для траектории в воздухе указанное значение  $\theta_{np} = -\frac{\pi}{2}$  отвечает некоторому конечному  $x_{np}$ , а в безвоздушном пространстве  $\theta_{np}$  отвечает  $x = \infty$ . Действительно, интегрируя уравнение (система 6)

$$dx = -\frac{u^2}{g} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{u^2}{g} d\theta$$

в пределах от 0 до  $x_{np}$  и от  $\theta_0$  до  $\theta_{np} = -\frac{\pi}{2}$ , получим

$$x_{np} = -\int_{\theta_0}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{u^2}{g} d\theta = \frac{u^2 \theta_0}{g} \left( \theta_0 + \frac{\pi}{2} \right).$$

Так как в воздухе скорость не может беспрепятственно расти, то  $v_{ep}$  — величина конечная. Таким образом *траектория в воздухе имеет вертикальную асимптоту к нисходящей ветви траектории на конечном расстоянии от точки вылета*.

#### § 49. Исследование изменения скорости вдоль траектории

В безвоздушном пространстве минимум скорости находится в вершине, причем  $v_{min} = u_0 = v_0 \cos \theta_0$ . За вершиной скорость растет безгранично. Исследуем изменение скорости для траектории в воздухе.

Изменение величины скорости характеризуется величиной производной  $\frac{dv}{dt}$ . Ранее мы имели (4):

$$\frac{dv}{dt} = -cH(y)F(v) - g \sin \theta.$$

Приравнивая касательное ускорение нулю, получим условие минимума или максимума скорости

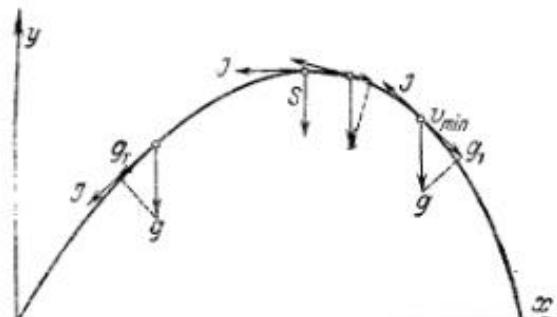
$$g \sin \theta = -cH(y)F(v).$$

Из этого выражения видно, что минимум или максимум скорости может иметь место только там, где  $\sin \theta < 0$ , т. е. на нисходящей

ветви траектории, а не в вершине, как это было установлено для траектории в пустоте.

Характер изменения ускорения снаряда показан на черт. 50.

Касательное ускорение снаряда  $\frac{dv}{dt}$  состоит из ускорения силы сопротивления воздуха  $J = cH(y)F(v)$  и проекции на касательную

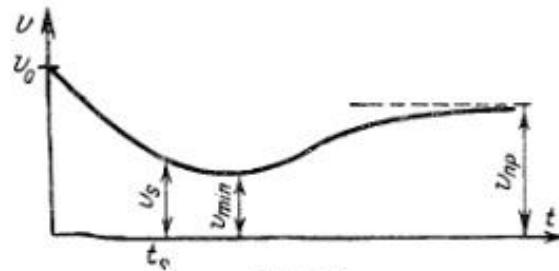


Черт. 50

ускорения силы тяжести  $g_t = g \sin \theta$ . На восходящей ветви траектории оба вектора  $J$  и  $g_t$  противоположны направлению скорости. Следовательно, на восходящей ветви скорость убывает. В вершине снаряда  $g_t = 0$ , но остается ускорение  $J$ , уменьшающее скорость снаряда. На нисходящей ветви траектории вектор  $g_t$  направлен в сторону движения снаряда, т. е. обратно вектору  $J$ . При этом возрастание или убывание скорости зависит от численного соотношения величин, составляющих ускорения  $J$  и  $g_t$ . Непосредственно за вершиной  $\sin \theta$  — малая величина, и  $|g_t| < J$ ; следовательно, скорость продолжает убывать. В дальнейшем ускорение  $g_t$  возрастает вследствие увеличения  $\sin \theta$ , а  $J$  убывает вследствие уменьшения  $v$  и  $F(v)$ , так что в некоторой точке получим равенство  $|g_t| = J$ . В этой точке будет иметь место минимум скорости, после чего скорость начнет возрастать.

Приведенные выше рассуждения не являются строгим доказательством существования минимума скорости на траектории.

Для случая однородной атмосферы ( $H(y) = 1$ ) болгарский ученый Стоянов доказал существование минимума скорости на нисходящей



Черт. 51

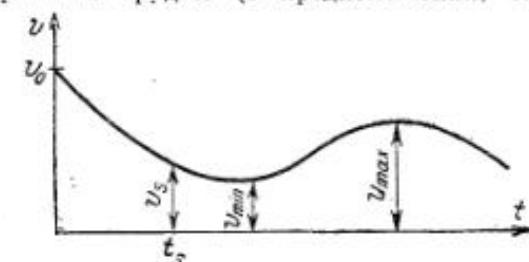
ветви траектории. После минимума скорость возрастает, стремясь асимптотически к некоторому предельному значению, при котором ускорение силы сопротивления воздуха равно ускорению силы тяжести:

$$cF(v_{np}) = g.$$

Кривая изменения скорости в этом случае показана на черт. 51. Для случая переменной с высотой плотности воздуха существование минимума или максимума в настоящее время не доказано. Расчеты, однако, показывают, что в этом случае на нисходящей ветви имеет

место сначала минимум скорости. После минимума наступает максимум скорости, а затем скорость убывает, как показано на черт. 52.

Минимум и максимум скорости могут иметь место как выше, так и ниже горизонта орудия (в предположении, что полет снаряда



Черт. 52

ниже горизонта не ограничен). Для настильных траекторий, отвечающих малым углам бросания и большим начальными скоростям, минимум скорости до точки падения не получается.

Чем меньше скорость снаряда и больше калибр, тем ближе траектория в воздухе к параболе и, следовательно, тем ближе к вершине находится точка минимума скорости.

### § 50. Исследование кривизны траектории

Из определения кривизны имеем  $\frac{1}{r} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$ , где  $r$  — радиус кривизны, а  $\frac{1}{r}$  — кривизна.

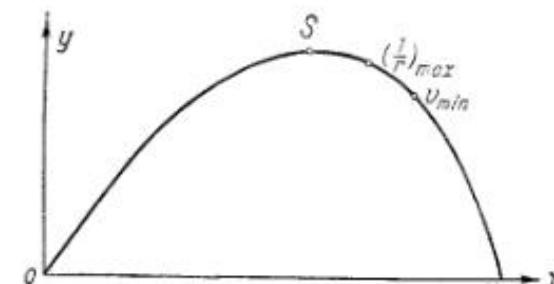
Далее

$$\left| \frac{d\theta}{ds} \right| = \left| \frac{d\theta}{dt} \right| \frac{dt}{ds} = \frac{g \cos \theta}{v} \frac{1}{v} = \frac{g \cos \theta}{v^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{r} = \frac{g \cos \theta}{v^2}.$$

На восходящей ветви траектории  $\cos \theta$  растет,  $v$  убывает, — следовательно, кривизна растет (черт. 53). На нисходящей ветви за точкой  $v_{min}$  скорость растет,  $\cos \theta$  уменьшается, — следовательно, кривизна



Черт. 53

убывает. Если до вершины кривизна растет, а за точкой  $v_{min}$  убывает, то на участке между этими двумя точками должен иметь место максимум кривизны (черт. 53).

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что в пустоте максимум кривизны находится в вершине. Это непосредственно следует и из свойств параболы.

### § 51. Высота траектории

Рассмотрим некоторую траекторию в воздухе, определяемую уравнением  $y=f(x)$ . Построим (черт. 54) на полной дальности  $X$  две параболические траектории 1 и 2, из которых одна (1) имеет угол бросания  $\theta_0$ , другая (2)—угол бросания  $\theta_c$ . Начальные скорости, конечно, будут различны для всех трех траекторий. Докажем, что траектория в воздухе от точки вылета до точки падения расположена выше траектории 1 и ниже траектории 2.

Напишем уравнение параболы, проходящей через начало координат, в общем виде:

$$y=ax-bx^2=\varphi(x).$$

Пусть  $y=f(x)$ —уравнение траектории в воздухе. Составим разность  $f(x)-\varphi(x)=F(x)$ . Если кривые  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  пересекаются в  $m$  точках, то уравнение  $F(x)=0$  будет иметь  $m$  вещественных корней.

Согласно теореме Ролля, если уравнение  $F(x)=0$  имеет  $m$  корней, то  $F'(x)=0$  имеет по крайней мере  $(m-1)$  корней, а  $F''(x)=0$  по крайней мере  $(m-2)$  корней.

Так как

$$F''(x)=f''(x)-\varphi''(x)$$

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=p; \quad f''(x)=\frac{dp}{dx}=-\frac{g}{u^2};$$

$$\varphi'(x)=a-2bx; \quad \varphi''(x)=-2b,$$

то

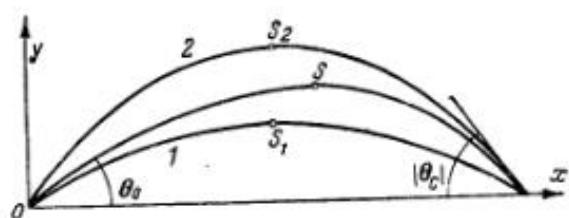
$$F''(x)=-\frac{g}{u^2}+2b.$$

Приравнивая  $F''(x)$  нулю, получим

$$u=\pm\sqrt{\frac{g}{2b}}.$$

Так как  $u$  не может быть отрицательным, то мы должны перед корнем взять знак  $+$ . Таким образом  $F''(x)=0$  имеет один корень,  $F'(x)=0$ —не более двух корней, а  $F(x)=0$ —не более трех корней, т. е. кривые  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  пересекаются не более чем в трех точках.

Так как траектория и парабола 1 касаются в точке вылета, а точка касания эквивалентна двум точкам пересечения, то вместе с точкой падения мы имеем три точки пересечения траектории с параболой 1, и больше точек пересечения или касания быть не может. Так



Черт. 54

как возле точки падения парабола 1 идет ниже траектории, то она пойдет ниже ее на всем участке выше горизонта. Таким же образом можно доказать, что парабола 2 расположена выше траектории.

### Следствие.

Рассматривая вопрос о пределах, в которых может находиться высота траектории  $Y$ , и учитывая, что для параболы  $Y=\frac{X \operatorname{tg} \theta_0}{4}$ , получим

$$Y_1 < Y < Y_2$$

или

$$\frac{X \operatorname{tg} \theta_0}{4} < Y < \frac{X \operatorname{tg} |\theta_c|}{4}.$$

В некоторых случаях для приближенного определения полной высоты принимают

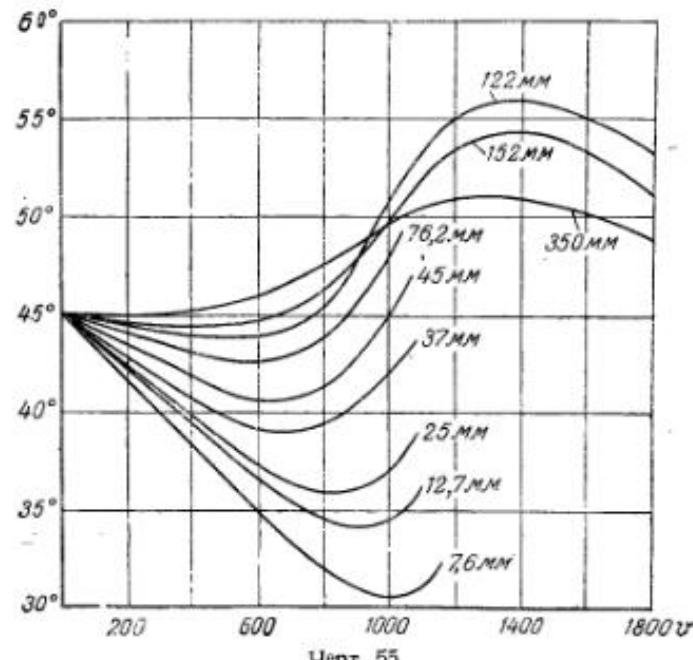
$$Y = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$

или

$$Y = \frac{X}{8} [\operatorname{tg} \theta_0 + \operatorname{tg} |\theta_c|].$$

### § 52. Угол наибольшей дальности

В безвоздушном пространстве угол наибольшей дальности равен  $45^\circ$ . Для траектории в воздухе вопрос об угле наибольшей дальности теоретически мало исследован. Однако расчеты показывают, что в воздухе угол наибольшей дальности может быть больше и меньше  $45^\circ$  и колеблется в широких пределах от  $25^\circ$  до  $60^\circ$ , в зависимости от ба-



Черт. 55

листического коэффициента и начальной скорости. На черт. 55 даны приближенные значения угла наибольшей дальности для снарядов современной формы различных калибров (в мм) при различных начальных скоростях.

Как видно из чертежа, когда начальная скорость стремится к нулю, угол наибольшей дальности стремится к  $45^\circ$ . При увеличении скорости угол наибольшей дальности уменьшается, переходя через минимум, затем увеличивается, достигает максимума и снова убывает.

Для снарядов средних калибров при обычных скоростях, меньших 800 м/сек, угол наибольшей дальности близок к  $43^\circ$ . С уменьшением калибра угол наибольшей дальности уменьшается. Для стрелкового оружия он близок к  $30^\circ$ . Для орудий сверх дальнобойных, стреляющих при начальных скоростях порядка 1500 м/сек, угол наибольшей дальности находится в пределах  $50^\circ$ — $55^\circ$ .

Следует заметить, что в диапазоне углов бросания, близких к углу наибольшей дальности, дальность мало чувствительна к изменению угла бросания. Например, при стрельбе пулей при угле бросания  $30^\circ$  получается дальность около 3600 м, а при угле бросания  $20^\circ$ —около 3500 м.

## Глава IV

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛИСТИКИ

#### Метод Эйлера

Если принять  $H(y) = H(y_{cp}) = \text{const}$ , то получаем уравнение годографа скоростей, которое можно написать в следующем виде:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{c}{g} \frac{u}{\cos \theta} F\left(\frac{u}{\cos \theta}\right).$$

Хотя в этом уравнении только две переменных  $u$  и  $\theta$ , оно не может быть проинтегрировано точно, так как в случае произвольного вида функции  $F$  переменные  $u$  и  $\theta$  не могут быть отделены. Для отделения переменных следует либо принять достаточно простое аналитическое выражение для функции сопротивления воздуха  $F(v)$ , либо допустить некоторое искажение вида уравнения годографа, при котором переменные отделяются для произвольного вида функции сопротивления. Примером методов первого типа является метод Эйлера-Отто. Ко второму типу относится метод Сиаччи. Оба метода, имеющие широкое практическое применение, излагаются ниже.

#### § 53. Метод Эйлера интегрирования уравнения годографа. Определение элементов траектории

Задача точного интегрирования уравнения годографа была решена Эйлером при одночленной зависимости для функции сопротивления вида  $Fv = Bv^n$ , где  $B$  и  $n$ —постоянные числа. Известно, однако, что эти числа не могут быть приняты постоянными для широкого диапазона скоростей. Поэтому метод Эйлера в общем виде не нашел практического применения. Ниже излагается метод Эйлера в применении к скоростям, не превышающим 250 м/сек. Для этих скоростей закон сопротивления может быть принят одночленным квадратичным при  $n=2$ . Этот случай имеет практическое применение для расчета траекторий при стрельбе из минометов и мортир, а также из гаубиц при соответствующих зарядах.

Напишем уравнение годографа в следующем виде:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{c}{g} H(y_{cp}) v F(v).$$

Примем для функции сопротивления воздуха простое аналитическое выражение  $F(v) = Bv^2$  и обозначим

$$c H(y_{cp}) B = b.$$

При этом уравнение годографа перепишется в следующем виде:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{b}{g} v^3 = \frac{b}{g} \frac{u^3}{\cos^3 \theta}$$

или окончательно

$$\frac{du}{u^3} = \frac{b}{g} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}. \quad (1)$$

Переменные в уравнении годографа отделены. Интегрируя получено равенство от точки вылета до произвольной точки траектории, получим

$$-\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{2u_0^2} = \frac{b}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}.$$

Обозначив

$$\xi(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

получим

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{u_0^2} - \frac{2b}{g} [\xi(\theta) - \xi(\theta_0)] = \frac{2b}{g} \left[ \frac{g}{2bu_0^2} + \xi(\theta_0) - \xi(\theta) \right].$$

Обозначив

$$\frac{g}{2bu_0^2} + \xi(\theta_0) = \xi(\theta_A),$$

где  $\theta_A$  — постоянное число, зависящее от начальных условий, получим

$$\frac{1}{u^2} = \frac{2b}{g} [\xi(\theta_A) - \xi(\theta)], \quad (2)$$

$$u^2 = \frac{g}{2b} \frac{1}{[\xi(\theta_A) - \xi(\theta)]}. \quad (3)$$

Таким образом уравнение годографа проинтегрировано, и можно для каждой точки, заданной углом  $\theta$ , определить значение  $u = f(\theta)$ . Значение самой скорости найдется непосредственно из выражения  $v = \frac{u}{\cos \theta}$ . Чтобы определить остальные элементы траектории, надо  $u = f(\theta)$  подставить в остальные уравнения системы (6):

$$dx = -\frac{u^2}{g \cos^2 \theta} d\theta = -\frac{1}{2b} \frac{d\theta}{[\xi(\theta_A) - \xi(\theta)] \cos^2 \theta},$$

$$dy = -\frac{u^2}{g \cos^2 \theta} \operatorname{tg} \theta d\theta = -\frac{\operatorname{tg} \theta}{2b} \frac{d\theta}{[\xi(\theta_A) - \xi(\theta)] \cos^2 \theta},$$

$$dt = -\frac{u}{g \cos^2 \theta} d\theta = -\frac{1}{V 2bg} \frac{d\theta}{[\xi(\theta_A) - \xi(\theta)] \cos^2 \theta}.$$

Интегрируя в соответствующих пределах, переменив пределы в правых частях равенств и изменив соответственно знаки, получим

$$x = \frac{1}{2b} \int_{\theta_0}^{\theta_A} \frac{d\theta}{[\xi(\theta_A) - \xi(\theta)] \cos^2 \theta}, \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{2b} \int_{\theta_0}^{\theta_A} \frac{\operatorname{tg} \theta d\theta}{[\xi(\theta_A) - \xi(\theta)] \cos^2 \theta}, \quad (5)$$

$$t = \frac{1}{V 2bg} \int_{\theta_0}^{\theta_A} \frac{d\theta}{[\xi(\theta_A) - \xi(\theta)] \cos^2 \theta}. \quad (6)$$

Эти интегралы не могут быть взяты в конечном виде, но могут быть вычислены с требуемой степенью точности одним из методов вычисления квадратур.

#### § 54. Вычисления траектории по дугам методом Эйлера

Для того чтобы избежать трудоемких операций по вычислению квадратур, можно вести расчет траекторий по дугам. Предварительно выведем выражение для длины дуги.

Имеем

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{d\theta} = v \left( -\frac{v}{g \cos \theta} \right) = -\frac{u^2}{g \cos \theta}.$$

Но согласно уравнению (1)

$$\frac{d\theta}{\cos \theta} = \frac{g du}{bu^3},$$

следовательно,

$$ds = -\frac{u^2}{g} \frac{d\theta}{\cos \theta} = -\frac{1}{b} \frac{du}{u}.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от точки вылета до произвольной точки траектории, получим

$$s = -\frac{1}{b} \ln \frac{u}{u_0} = \frac{1}{b} \ln \frac{u_0}{u} = \frac{1}{2b} \ln \left( \frac{u_0}{u} \right)^2$$

или на основании уравнения (2)

$$s = \frac{1}{2b} \ln \left\{ \frac{2bu_0^2}{g} [\xi(\theta_A) - \xi(\theta)] \right\}. \quad (7)$$

Таким образом для любой точки траектории, заданной углом  $\theta$ , можно вычислить, помимо  $u$  и  $v$ , длину дуги  $s$ . Для вычисления остальных элементов ( $x$ ,  $y$ ,  $t$ ) воспользуемся зависимостями

$$dx = \cos \theta ds,$$

$$dy = \sin \theta ds,$$

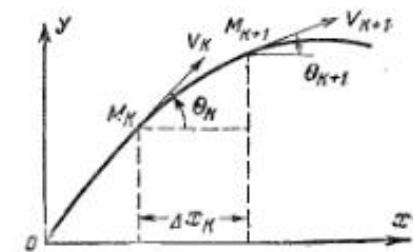
$$dt = \frac{ds}{v}.$$

Далее разобьем траекторию на дуги точками  $M_1, M_2, \dots, M_k$  таким образом, чтобы в интервале одной дуги  $\cos \theta$  и  $v$  изменились мало. Для участка дуги, ограниченного точками  $M_k$  и  $M_{k+1}$ , получим

$$\int_{\tilde{x}_k}^{x_{k+1}} dx = \int_{\tilde{x}_k}^{x_{k+1}} \cos \theta ds,$$

$$\int_{\tilde{y}_k}^{y_{k+1}} dy = \int_{\tilde{y}_k}^{y_{k+1}} \sin \theta ds,$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} dt = \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{ds}{v}.$$



Черт. 56

Вынося  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$  и  $\frac{1}{g}$  средними значениями, получим

$$\Delta x_k = (\cos \theta_{cp})_k \Delta s_k,$$

$$\Delta y_k = (\sin \theta_{cp})_k \Delta s_k,$$

$$\Delta t_k = \left( \frac{1}{v_{cp}} \right)_k \Delta s_k.$$

При указанном выше способе выбора точек на траектории можно принять

$$(\cos \theta_{cp})_k = \cos \frac{\theta_k + \theta_{k+1}}{2},$$

$$(\sin \theta_{cp})_k = \sin \frac{\theta_k + \theta_{k+1}}{2},$$

$$(v_{cp})_k = \frac{v_k + v_{k+1}}{2}.$$

Что касается  $\Delta s_k$ , то его нетрудно найти, так как значение длины дуги известно для любой точки траектории из выражения (7).

Таким образом для любого участка дуги траектории можно вычислить приращения  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$ . Следовательно, можно подсчитать элементы  $x$ ,  $y$ ,  $t$  любой точки траектории суммированием указанных приращений.

### § 55. Таблицы Отто-Сиаччи

Известно, что траектория снаряда определяется тремя параметрами  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ . Поэтому при составлении баллистических таблиц необходимо рассчитать весьма значительное количество траекторий, отвечающих различным комбинациям величин  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ . Роль баллистического коэффициента в рассматриваемом методе играет коэффициент  $b$ . Выпишем выражение для  $u^2$ , разделив предварительно обе части равенства на  $u_0^2$ :

$$\left( \frac{u}{u_0} \right)^2 = \frac{g}{2bu_0^2} \cdot \frac{1}{\xi(\theta_A) - \xi(\theta)}.$$

Так как

$$\xi(\theta_A) = \xi(\theta_0) + \frac{g}{2bu_0^2} = \xi(\theta_0) + \frac{g}{2bv_0^2 \cos^2 \theta_0} = \varphi(\theta_0, bv_0^2),$$

то правая часть равенства будет функцией двух параметров  $\theta_0$  и  $bv_0^2$ , а не трех параметров  $\theta_0$ ,  $v_0$  и  $b$  в отдельности. Таким образом, если рассматривать различные траектории, отвечающие одному значению  $\theta_0$  и одному начальному значению ускорения силы сопротивления воздуха  $J_0 = bv_0^2$ , то во всех этих траекториях одинаковым значениям аргумента  $\theta$  будут отвечать одинаковые отношения  $\frac{u}{u_0}$  или одинаковые  $\frac{v}{v_0}$ .

Таким же образом из выражений для  $x$ ,  $y$ ,  $t$  получим

$$2bx = \int \frac{d\theta}{[\xi(\theta_A) - \xi(\theta)] \cos^2 \theta} = \varphi_1(\theta_0, bv_0^2, \theta),$$

$$2by = \int \frac{\operatorname{tg} \theta d\theta}{[\xi(\theta_A) - \xi(\theta)] \cos^2 \theta} = \varphi_2(\theta_0, bv_0^2, \theta),$$

$$\sqrt{2bg} t = \int \frac{d\theta}{V[\xi(\theta_A) - \xi(\theta)] \cos^2 \theta} = \varphi_3(\theta_0, bv_0^2, \theta),$$

т.е. для различных траекторий, соответствующих определенным значениям  $\theta_0$  и  $bv_0^2$ , одинаковым значениям аргумента  $\theta$  отвечают одинаковые значения  $2bx$ ,  $2by$  и  $\sqrt{2bg} t$ .

Следовательно, для составления баллистических таблиц нужно рассчитать ряд траекторий, отвечающих различным комбинациям двух параметров  $\theta_0$  и  $bv_0^2$ , а не трех, как в общем случае расчета траекторий; таблицы же могут иметь только два входа.

Таблицы значений величин  $2bx$ ,  $2by$ ,  $\sqrt{2bg} t$  были вычислены Отто (таблицы первого рода) для углов бросания  $\theta_0$  от  $30^\circ$  до  $75^\circ$  и дополнены для меньших углов бросания Лардильоном и Шеве. Эти таблицы имели два входа:  $\theta_0$  и  $\theta_A$ .

При помощи указанных таблиц Сиаччи составил таблицы второго рода, значительно облегчающие производство баллистических расчетов; они помещены в части III под названием таблиц Отто-Сиаччи.

Таблицы дают для различных  $\theta_0$  при входном числе  $2bX$  значения величин

$$\frac{bv_0^2}{g}; \quad \frac{v_0^2}{2gX}; \quad |\theta_A|; \quad \frac{v_c}{v_0}; \quad \frac{T\sqrt{g}}{VX}; \quad \frac{Y}{X}.$$

### § 56. Определение элементов траектории по таблицам Отто-Сиаччи

В таблицы Отто-Сиаччи входит коэффициент  $b$ , играющий роль видоизмененного баллистического коэффициента

$$b = cH(y_{cp})B.$$

Численное значение коэффициента  $B$ , входящего в выражение для упаковки сопротивления

$$F(v) = Bv^3,$$

зависит от выбранного закона сопротивления воздуха. Можно принять (см. § 38) следующие значения коэффициента  $B$  для применяемых у нас законов сопротивления воздуха (табл. 14):

Таблица 14

Закон сопротивления воздуха	$B$	$\lg B$
Сиаччи . . . . .	$1,212 \cdot 10^{-4}$	4,0832
Гарнье (1930 г.) . . . . .	$0,8584 \cdot 10^{-4}$	5,9337
1943 г. . . . .	$0,7454 \cdot 10^{-4}$	5,8724

Далее, принимая, как и в параболической теории,  $y_{cp} = \frac{2}{3}Y$ , получим

$$H(y_{cp}) = H\left(\frac{2}{3}Y\right).$$

Следовательно, для того чтобы найти значение  $b$ , надо знать высоту траектории, которая к началу расчета еще неизвестна. При использовании таблицами в первом приближении принимают  $H(y_{cp}) = 1$  и определяют приближенное значение

$$b_1 = cB = B \frac{id^2}{q} \cdot 1000.$$

По этому значению  $b_1$  определяют по таблице приближенные значения  $Y_1$  и  $y_{cp} = \frac{2}{3}Y_1$ ; далее определяют коэффициент  $b = b_1 H(y_{cp})$ , пользуясь которым и рассчитывают траекторию.

Таблицы Отто-Сиаччи связывают между собой восемь величин:  $b$ ,  $\theta_0$ ,  $v_0$ ,  $X$ ,  $[b_c]$ ,  $v_c$ ,  $Y$ ,  $T$ . Достаточно знать любые три из указанных величин, чтобы по таблицам найти остальные пять величин.

На практике обычно приходится решать задачу определения элементов траектории, если известны три величины из четырех:  $b$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ ,  $X$ . Фактически вместо  $b$  обычно задается баллистический коэффициент  $c$  или величины, входящие в его выражение. Соответственно этому мы будем иметь четыре типа задач, схемы решения которых мы рассмотрим ниже.

### I. Заданы $c$ , $v_0$ , $\theta_0$ .

1. Принимая в первом приближении  $H(y_{cp})=1$ , вычисляем  $b_1=cB$ . Численные значения  $B$  принимаются, как указано выше, в зависимости от выбранного закона сопротивления воздуха.

2. Вычисляем  $\frac{b_1 v_0^2}{g}$  и по входным величинам  $\theta_0$  и  $\frac{b_1 v_0^2}{g}$  находим по таблицам значения  $2b_1 X_1$  и  $\frac{Y_1}{X_1}$ .

3. Вычисляем  $Y_1$  и  $y_{cp} = \frac{2}{3} Y_1$ , и по табл. 8 или 9 части III находим  $H(y_{cp})$ .

4. Уточняем значения  $b=cBH(y_{cp})$  и  $\frac{b v_0^2}{g}$ .

5. По входным величинам  $\theta_0$  и  $\frac{b v_0^2}{g}$  по таблицам находим значения величин

$$2bX, \quad \theta_c, \quad \frac{v_c}{v_0}, \quad \frac{T\sqrt{\frac{g}{X}}}{\sqrt{X}}, \quad \frac{Y}{X}.$$

6. Вычисляем элементы точки падения и вершины

$$X, \quad v_c, \quad T, \quad Y.$$

### II. Заданы $\theta_0$ , $v_0$ , $X$ .

1. Вычисляем  $\frac{v_0^2}{2gX}$ .

2. Входим в таблицы значениями  $\theta_0$  и  $\frac{v_0^2}{2gX}$  и определяем значения величин

$$2bX, \quad \theta_c, \quad \frac{v_c}{v_0}, \quad \frac{T\sqrt{\frac{g}{X}}}{\sqrt{X}}, \quad \frac{Y}{X}.$$

3. Вычисляем значения

$$b, \quad v_c, \quad T, \quad Y_c.$$

4. Если требуется определить значения баллистического коэффициента  $c$  или коэффициента формы  $i$ , то необходимо еще подсчитать  $y_{cp} = \frac{2}{3} Y$  и определить  $H(y_{cp})$  по табл. 8 или 9 части III; после этого имеем

$$c = \frac{b}{H(y_{cp})B}; \quad i = \frac{cq}{1000d^2}.$$

### III. Заданы $c$ , $\theta_0$ , $X$ .

1. Вычисляем приближенное значение  $b_1=cB$  и  $2b_1 X$ .

2. По величинам  $\theta_0$  и  $2b_1 X$  входим в таблицы и согласно схеме задачи I определяем  $y_{cp}$ ,  $H(y_{cp})$  и уточняем значения  $b$  и  $2bX$ .

3. По величинам  $\theta_0$  и  $2bX$  входим в таблицы и определяем величины

$$\frac{b v_0^2}{g}, \quad \theta_c, \quad \frac{v_c}{v_0}, \quad \frac{T\sqrt{\frac{g}{X}}}{\sqrt{X}}, \quad \frac{Y}{X}.$$

### 4. Подсчитываем значения

$$v_c, \quad T, \quad Y.$$

### IV. Заданы $c$ , $v_0$ , $X$ .

Решение этой задачи затрудняется тем, что, не имея значения  $\theta_0$ , мы не знаем, какой таблицей надо пользоваться. Расчет ведется следующим образом:

1. Исходя из приближенного значения  $b_1=cB$ , вычисляем  $2b_1 X$  и  $\frac{b_1 v_0^2}{g}$ .

2. Ищем среди таблиц такую, в которой найденные значения  $2b_1 X$  и  $\frac{b_1 v_0^2}{g}$  соответствуют друг другу. Точного соответствия мы не добьемся, но найдем две соседние таблицы, для которых заданному  $2b_1 X$  отвечает в одной таблице величина  $\frac{b_1 v_0^2}{g}$  больше вычисленной, а в другой — наоборот.

3. Интерполируя между указанными значениями таблиц, находим угол бросания, а также  $Y_1$ ,  $y_{cp}$  и  $H(y_{cp})$ .

4. Уточняем значения  $b$ ,  $2bX$ ,  $\frac{b v_0^2}{g}$  и повторяем расчеты, указанные в п. 2.

5. Интерполированием находим

$$\theta_0, \quad \theta_c, \quad \frac{Y}{X}, \quad \frac{v_c}{v_0}, \quad \frac{T\sqrt{\frac{g}{X}}}{\sqrt{X}}.$$

### 6. Подсчитываем значения

$$Y, \quad v_c, \quad T.$$

### § 57. Пример. Заданы $c$ , $v_0$ , и $\theta_0$

Исходные данные:

Калибр . . . . .	$d = 0,122 \text{ м}$
Начальная скорость . . . . .	$v_0 = 183 \text{ м/сек}$
Угол бросания . . . . .	$\theta_0 = 40^\circ$
Вес снаряда . . . . .	$q = 22 \text{ кг}$
Коэффициент формы к закону сопротивления воздуха Сиаччи	$i = 0,645$

В первом приближении принимаем  $H(y)=1$ . При этом

$$b_1 = cB = \frac{id^2}{q} \cdot 1000 \left( \overline{4,0832} \right) \frac{id^2}{q}.$$

$b_1 = (\overline{4,0832}) \frac{id^2}{q}$	$\frac{b_1 v_0^2}{g}$		
	$\lg d$	$\overline{1,0864}$	$\lg v_0$
1,3424	$2\lg d$	$\overline{2,1728}$	$2\lg v_0$
	$\lg i$	$\overline{1,8096}$	$\lg b_1$
	$-\lg q$	$\overline{2,6576}$	$-\lg q$
		$\overline{1,0832}$	$\lg \frac{b_1 v_0^2}{g}$
			$\overline{1,2565}$
	$\lg b_1$	$\overline{5,7232}$	$\frac{b_1 v_0^2}{g}$
			$\overline{0,1805}$
	$b_1$	$0,5286 \cdot 10^{-4}$	

В таблице части III, озаглавленной  $\theta_0 = 40^\circ$ , в столбце  $\frac{bv_0^2}{g}$  находим ближайшие значения

$$0,171 < 0,1805 < 0,204.$$

$$\text{Интерполирующий множитель } \xi = \frac{0,1805 - 0,171}{0,204 - 0,171} = 0,288.$$

Интерполируя по таблице, находим

$$2bX = 0,3144; \quad \frac{Y}{X} = 0,222;$$

$$X_1 = \frac{0,3144}{2 \cdot 0,529 \cdot 10^{-4}} = 2970 \text{ м}; \quad Y_1 = 0,222 \cdot 2970 = 660 \text{ м};$$

$$y_{\text{ср}} = \frac{2}{3} \cdot 660 = 440.$$

По табл. 8 части III находим для  $y = 440$

$$\lg H(y) = 1,9815.$$

Уточняем значения  $b$  и  $\frac{bv_0^2}{g}$ :

$\lg b_1$	5,7232	$\lg \frac{bv_0^2}{g}$	1,2565
$\lg H(y_{\text{ср}})$	1,9815	$\lg H(y_{\text{ср}})$	1,9815
$\lg b$	5,7047	$\lg \frac{bv_0^2}{g}$	1,2380
$b$	$0,5066 \cdot 10^{-4}$	$\frac{bv_0^2}{g}$	0,1730

Входим в таблицы Отто-Сиаччи по значениям  $\theta_0 = 40^\circ$  и  $\frac{bv_0^2}{g} = 0,173$ .

Интерполирующий множитель

$$\xi = \frac{0,173 - 0,171}{0,204 - 0,173} = \frac{2}{33} = 0,06.$$

Находим значения

$$2bX, \theta_e, \frac{v_e}{v_0}, \frac{T\sqrt{g}}{\sqrt{X}}$$

$2bX$	$\frac{bv_0^2}{g}$	$ \theta_e $	$\frac{v_e}{v_0}$	$\frac{T\sqrt{g}}{\sqrt{X}}$	$\frac{Y}{X}$
0,30	0,171	$43^\circ 3'$	0,885	1,329	0,221
0,303	0,173	$43^\circ 5'$	0,884	1,329	0,221
0,35	0,204	$43^\circ 34'$	0,867	1,335	0,223

Вычисляем значения  $X, v_e, T, Y$ :

$X = \frac{0,303}{2b}$	$\lg 0,303$	1,4814
	$-\lg 2$	1,6990
	$-\lg b$	4,2953
$\lg X$	3,4757	
$X$	2990	
$v_e = 0,884 v_0$	$\lg 0,884$	1,9465
	$\lg v_0$	2,2625
	$\lg v_e$	2,2090
$v_e$	161,8	
$T = \frac{1,329 \sqrt{X}}{\sqrt{g}}$	$\lg 1,329$	0,1235
	$\frac{1}{2} \lg X$	1,7378
	$-\frac{1}{2} \lg g$	1,5042
$\lg T$	1,3655	
$T$	23,20	
$Y = 0,221 X$	$\lg 0,221$	1,3444
	$\lg X$	3,4757
	$\lg Y$	2,8201
$Y$	660,9	

Учитывая, что точность таблиц Отто-Сиаччи соответствует трем значащим цифрам, получим окончательно:

$$X = 2990 \text{ м}; \quad v_e = 162 \text{ м/сек}; \quad T = 23,2 \text{ сек}; \quad \theta_e = 43^\circ 5'; \quad Y = 661 \text{ м}.$$

Расчеты по таблицам Отто-Сиаччи можно вести, пользуясь 25-см логарифмической линейкой.

### § 58. Пример. Заданы $b, v_0$ и $X$

Так как последовательное уточнение величины  $b$  при задании баллистического коэффициента рассмотрено в предыдущем параграфе, то в данном примере зададим сразу точную величину  $b$ . Исходные данные:

$$d = 0,152 \text{ м}; \quad b = 0,642 \cdot 10^{-4}; \quad v_0 = 226 \text{ м/сек}; \quad X = 4050 \text{ м}.$$

Вычисляем  $2bX$  и  $\frac{bv_0^2}{g}$ :

$2bX$	$\frac{bv_0^2}{g}$
$\lg 2$	0,3010
$\lg b$	5,8075
$\lg X$	3,6075
$\lg 2bX$	1,7160
$2bX$	0,520

Ищем среди таблиц такую, в которой величине  $2bX = 0,520$  отвечало бы  $\frac{bv_0^2}{g} = 0,334$ . Точного соответствия мы не найдем, но возьмем две соседние таблицы, для которых при  $2bX = 0,520$  в одной  $\frac{bv_0^2}{g} > 0,334$ , а в другой — наоборот.

Для  $\theta_0 = 35^\circ$  значению  $2bX = 0,520$  отвечает  $\frac{bv_0^2}{g} = 0,338$ ;

Для  $\theta_0 = 40^\circ \rightarrow 2bX = 0,520 \rightarrow \frac{bv_0^2}{g} = 0,324$ .

Интерполирующий множитель

$$\xi = \frac{0,334 - 0,338}{0,324 - 0,338} = 0,286.$$

$$\theta_0 = 35^\circ + 0,286 \cdot 5^\circ = 36,43^\circ = 36^\circ 26'.$$

Для нахождения остальных элементов выписываем из таблиц  $\theta_0 = 35^\circ$  и  $\theta_0 = 40^\circ$  значения элементов, отвечающих  $2bX = 0,520$ , и интерполируем полученные величины для  $\theta_0 = 36^\circ 26'$ :

$\theta_0$	$2bX$	$ \theta_c $	$\frac{v_c}{v_0}$	$\frac{TV}{VX}$	$\frac{Y}{X}$
$35^\circ$	0,52	$40^\circ 2'$	0,807	1,237	0,192
$36^\circ 26'$	0,52	$41^\circ 32'$	0,809	1,270	0,203
$40^\circ$	0,52	$45^\circ 18'$	0,813	1,354	0,230

$$v_c = 0,809 \cdot 226 = 183; \quad \frac{1,270 \sqrt{4050}}{\sqrt{9,81}} = 25,8; \quad Y = 0,203 \cdot 4050 = 822.$$

#### МЕТОД СИАЧЧИ

##### § 59. Интегрирование уравнения годографа

Изложенный в предыдущем разделе метод Эйлера-Отто дает решение основной задачи внешней баллистики для любых углов бросания, но для ограниченной области скоростей ( $v < 250$  м/сек). Метод Сиаччи, излагаемый ниже, дает решение для любых скоростей, но для ограниченной области углов бросания. Первоначально этот метод был разработан для прицельной стрельбы, т. е. для углов бросания до  $10-15^\circ$ ; в дальнейшем он был приспособлен и для больших углов бросания. Однако точность метода убывает с увеличением угла бросания.

Для отделения переменных в уравнении годографа

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{c}{g} H(y) v F(v)$$

Сиаччи предложил следующую подстановку:

$$H(y) F(v) \approx \beta F(U) \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos \theta}. \quad (8)$$

В этом выражении под знаком функции  $F$  вместо скорости  $v$  стоит новая переменная

$$U = \frac{v \cos \theta}{\cos \theta_0} = \frac{u}{\cos \theta_0},$$

которую Сиаччи назвал псевдоскоростью;  $\beta$  — некоторый численный множитель.

Смысл подстановки Сиаччи заключается в следующем. В случае прицельной стрельбы  $\cos \theta$  мало меняется вдоль траектории. Например, полагая  $\theta_0 = 15^\circ$ ;  $|\theta_c| = 20^\circ$ ; получим, что отношение  $\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}$  принимает крайние значения 1,035 в вершине и 0,973 в точке падения, т. е. отличается от единицы не более чем на  $3,5\%$ . При этом на большей части траектории имеем

$$|\theta| < \theta_0; \cos \theta > \cos \theta_0; U = \frac{v \cos \theta}{\cos \theta_0} > v; F(U) > F(v).$$

Следовательно, заменяя  $F(v)$  через  $F(U)$ , мы для большей части траектории заменяем функцию сопротивления величиной несколько большей. Для компенсации ошибки умножаем  $F(U)$  на величину  $\frac{\cos^2 \theta_0}{\cos \theta}$ , меньшую единицы. Компенсация при помощи множителя  $\frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}$ ,

обратного множителю  $\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}$  под знаком функции  $F$ , была бы недостаточна, так как функция сопротивления растет относительно быстрее аргумента.

При малых углах бросания, порядка  $5-10^\circ$ , обычно принимают  $\beta = 1$ . При больших углах бросания приходится пользоваться коэффициентом  $\beta$  как добавочным множителем, компенсирующим все неточности метода, в том числе ошибки от неучета изменения функции  $H(y)$ . Численные значения коэффициента  $\beta$  определяются по специальным таблицам (см. § 63).

Введя подстановку Сиаччи и заменяя в уравнении годографа

$$u = U \cos \theta_0; \quad v = \frac{U \cos \theta_0}{\cos \theta},$$

получим

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{c}{g} \cdot \frac{U \cos \theta_0}{\cos \theta} F(U) \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos \theta}.$$

Вынося  $\cos \theta_0$  из-под знака дифференциала, обозначая  $c\beta = c'$  и отделяя переменные, получим

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{g}{c' \cos^2 \theta_0} \frac{dU}{UF(U)}. \quad (9)$$

Интегрируя в пределах от точки вылета до произвольной точки траектории, получим

$$\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{g}{c' \cos^2 \theta_0} \int_{v_0}^U \frac{dU}{UF(U)}. \quad (10)$$

Для нижнего предела имеем  $U_0 = v_0$ .

Обозначим

$$J(U) = A - \int_B^U \frac{2gdU}{UF(U)},$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные числа. При этом получим

$$J(v_0) = A - \int_B^{v_0} \frac{2gdU}{UF(U)}.$$

Следовательно,

$$J(U) - J(v_0) = - \int_{v_0}^U \frac{2g dU}{UF(U)} + \int_{v_0}^U \frac{2g dU}{UF(U)} = - \left( \int_{v_0}^U \frac{2g dU}{UF(U)} + \int_{v_0}^U \frac{2g dU}{UF(U)} \right)$$

или окончательно

$$J(U) - J(v_0) = - \int_{v_0}^U \frac{2g dU}{UF(U)}.$$

Подставляя это значение в выражение (10), получим окончательно

$$\boxed{\tg \theta = \tg \theta_0 - \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} [J(U) - J(v_0)]}. \quad (11)$$

Таким образом уравнение гидографа проинтегрировано ценой некоторого его искажения и понижения точности самого дифференциального уравнения.

Функция  $J(U)$  и ряд других функций, приводимых далее, называются «основными функциями Сиаччи». Таблицы значений этих функций для закона сопротивления воздуха Сиаччи даны под № 21 в части III\*. В этих таблицах принято  $A=0,1$  и  $B=1500$ . Численные значения этих величин выбраны по соображениям удобства пользования таблицами.

### § 60. Определение элементов траектории

Из второго уравнения системы (6) имеем

$$dt = - \frac{u}{g} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}.$$

Подставляя  $u = U \cos \theta_0$  и  $\frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$  из выражения (9), получим

$$dt = - \frac{1}{c' \cos \theta_0} \frac{dU}{F(U)}.$$

Интегрируя в соответствующих пределах, получим

$$t = - \frac{1}{c' \cos \theta_0} \int_{v_0}^U \frac{dU}{F(U)}.$$

Введя обозначение

$$T(U) = 1,000 - \int_{1500}^U \frac{dU}{F(U)},$$

получим аналогично предыдущему

$$\boxed{t = \frac{1}{c' \cos \theta_0} [T(U) - T(v_0)]}. \quad (12)$$

Из третьего уравнения системы (6) имеем

$$dx = - \frac{u^2}{g} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}. \quad (13)$$

\* Таблицы основных функций Сиаччи для закона сопротивления воздуха Гарнье (закон 1930 г.) даны в «Баллистических таблицах АНИИ», ч. I, изд. 1933 г.

Подставляя значения  $u = U \cos \theta_0$  и  $\frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$  из выражения (9), получим

$$dx = - \frac{1}{c'} \frac{U dU}{F(U)}.$$

Интегрируя в соответствующих пределах, получим

$$x = - \frac{1}{c'} \int_{v_0}^U \frac{U dU}{F(U)}.$$

Введя обозначение

$$D(U) = 1000 - \int_{1500}^U \frac{U dU}{F(U)},$$

получим

$$\boxed{x = \frac{1}{c'} [D(U) - D(v_0)]}. \quad (14)$$

Для определения ординаты траекторий  $y$  будем исходить из выражения

$$dy = \tg \theta dx.$$

Подставляя  $\tg \theta$  из выражения (11), получим

$$dy = \tg \theta_0 dx - \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} [J(U) - J(v_0)] dx.$$

Интегрируем в соответствующих пределах

$$y = x \tg \theta_0 - \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} \left[ \int_0^x J'(U) dx - J(v_0)x \right].$$

Подставляя значение  $dx$  из выражения (13), получим

$$y = x \tg \theta_0 - \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} \left[ - \frac{1}{c'} \int_{v_0}^U \frac{J(U) U dU}{F(U)} - J(v_0)x \right].$$

Введя обозначение

$$A(U) = 100,0 - \int_{1500}^U \frac{J(U) U dU}{F(U)},$$

найдем

$$y = x \tg \theta_0 - \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} \left\{ \frac{1}{c'} [A(U) - A(v_0)] - J(v_0)x \right\}$$

или

$$y = x \tg \theta_0 - \frac{x}{2c' \cos^2 \theta_0} \left[ \frac{A(U) - A(v_0)}{c' x} - J(v_0) \right]. \quad (15)$$

Подставляя согласно (14)  $c' x = D(U) - D(v_0)$ , получим окончательно

$$\boxed{y = x \tg \theta_0 - \frac{x}{2c' \cos^2 \theta_0} \left[ \frac{A(U) - A(v_0)}{D(U) - D(v_0)} - J(v_0) \right]}. \quad (16)$$

Формулы (11), (12), (14) и (16) позволяют вычислить значения элементов  $\theta$ ,  $x$ ,  $t$ ,  $y$  для любой точки траектории в функции псевдоскорости  $U$ .

### § 61. Определение элементов точки падения и вершины

#### Элементы точки падения

Так как в уравнениях метода Сиаччи независимой переменной является псевдоскорость  $U$ , то для определения элементов траектории в точке падения необходимо знать значение псевдоскорости в точке падения  $U_c$  и подставить его в уравнения (11), (12), (14) и (16).

Для точки падения известно значение ординаты  $y_e = 0$ ; подставляя его в уравнение (16) и заменяя  $x = X$ ;  $U = U_e$ , получим

$$0 = X \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{X}{2c' \cos^2 \theta_0} \left[ \frac{A(U_e) - A(v_0)}{D(U_e) - D(v_0)} - J(v_0) \right]$$

или

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} \left[ \frac{A(U_e) - A(v_0)}{D(U_e) - D(v_0)} - J(v_0) \right]. \quad (17)$$

В дальнейшем для краткости будем писать  $A_e$ ,  $A_0$ ,  $D_e$ ,  $D_0$  вместо  $A(U_e)$ ,  $A(v_0)$ ,  $D(U_e)$ ,  $D(v_0)$ . Заменяя  $2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} \theta_0 = \sin 2\theta_0$ , получим окончательно

$$\boxed{\sin 2\theta_0 = \frac{1}{c'} \left( \frac{A_e - A_0}{D_e - D_0} - J_0 \right)}. \quad (18)$$

Из уравнения (18) можно определить  $U_e$ . Подставляя значение  $U_e$  в уравнения (11), (12) и (14), получим

$$\boxed{X = \frac{1}{c'} (D_e - D_0)}, \quad (19)$$

$$\boxed{T = \frac{1}{c' \cos \theta_0} (T_e - T_0)}, \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} \theta_e = \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} (J_e - J_0).$$

Последнее выражение можно, пользуясь зависимостью (17), привести к следующему виду:

$$\boxed{\operatorname{tg} \theta_e = \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} \left( \frac{A_e - A_0}{D_e - D_0} - J_e \right)}. \quad (21)$$

Для окончательной скорости в точке падения получим непосредственно

$$v_e = \frac{U_e \cos \theta_0}{\cos \theta_e}. \quad (22)$$

#### Элементы вершины

Для определения элементов вершины необходимо знать значения  $U_s$  в вершине. В вершине траектории имеем  $\theta_s = 0$ . Подставив  $\operatorname{tg} \theta_s = 0$  в выражение (11), получим

$$0 = \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} (J_s - J_0), \quad (23)$$

откуда

$$J_s = c' \sin 2\theta_0 + J_0.$$

Зная функцию  $J_s = J(U_s)$ , можем найти по таблице аргумент  $U_s$  и функции Сиаччи  $D(U_s)$ ,  $T(U_s)$ ,  $T(U_s)$ .

Элементы вершины найдем из выражений

$$x_s = \frac{1}{c'} (D_s - D_0), \quad (24)$$

$$t_s = \frac{1}{c' \cos \theta_0} (T_s - T_0), \quad (25)$$

$$Y = x_s \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{x_s}{2c' \cos^2 \theta_0} \left( \frac{A_s - A_0}{D_s - D_0} - J_0 \right).$$

Последнее выражение можно на основании уравнения (23) переписать в следующем виде:

$$Y = \frac{x_s}{2c' \cos^2 \theta_0} \left( J_s - \frac{A_s - A_0}{D_s - D_0} \right). \quad (26)$$

### § 62. Вспомогательные функции Сиаччи

Рассмотрим выражение (18):

$$\sin 2\theta_0 = \frac{1}{c'} \left( \frac{A_e - A_0}{D_e - D_0} - J_0 \right).$$

Для определения элементов точки падения необходимо найти  $U_e$  из этого уравнения путем последовательных приближений, так как  $U_e$  входит под знаком двух функций  $A(U_e)$  и  $D(U_e)$ . Посмотрим, нельзя ли избежать этой кропотливой операции и упростить вычисления элементов точки падения.

Выражение в квадратных скобках зависит от  $U_e$  и  $v_0$ .

С другой стороны, из выражения (19) имеем

$$D(U_e) = c' X + D(v_0), \quad (27)$$

т. е.  $U_e$  является функцией двух переменных  $c' X$  и  $v_0$ ; следовательно, и выражение

$$\frac{A_e - A_0}{D_e - D_0} - J_0$$

является функцией этих же двух переменных. Обозначая

$$f_0(c' X, v_0) = \frac{A_e - A_0}{D_e - D_0} - J_0,$$

получим

$$\boxed{c' \sin 2\theta_0 = f_0(c' X, v_0)}. \quad (28)$$

Зная  $\theta_0$  и  $c'$ , можно вычислить  $f_0$ , затем в табл. 22 части III по значению функции  $f_0$  и одного из аргументов  $v_0$  определить другой аргумент  $c' X$ . Подобным образом можно ввести некоторые другие функции от  $c' X$  и  $v_0$ , облегчающие расчет элементов траектории. Например, умножая обе части последнего равенства на  $\frac{v_0}{c' X}$ , получим

$$\frac{v_0 \sin 2\theta_0}{X} = \frac{v_0}{c' X} f_0(c' X, v_0) = f_1(c' X, v_0).$$

Для вычисления элементов точки падения и вершины можно использовать следующие функции от  $c'X$  и  $v_0$ , которые носят названия вспомогательных функций Сиаччи:

$$\left| \begin{array}{l} f_0 = c' \sin 2\theta_0, \\ f_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{X}, \\ f_2 = \frac{\operatorname{tg} |\theta_0|}{\operatorname{tg} \theta_0}, \\ f_3 = \frac{v_0 \sin \theta_0}{T}, \\ f_4 = \frac{v_0}{U_c} = \frac{v_0}{U_c} = \frac{v_0 \cos \theta_0}{v_c \cos \theta_c}, \\ f_5 = \frac{x_s}{X}, \\ f_6 = \frac{Y}{X \operatorname{tg} \theta_0}. \end{array} \right.$$

Можно показать, что все эти функции зависят от  $c'X$  и  $v_0$ . Для при мера рассмотрим выражение для  $f_5$ :

$$\frac{v_0 \sin \theta_0}{T} = \frac{v_0 \sin \theta_0}{\frac{1}{c' \cos \theta_0} [T(U_c) - T(v_0)]} = \frac{v_0 c' \sin 2\theta_0}{2(T_c - T_0)} = \frac{v_0 f_0(c'X, v_0)}{2(T_c - T_0)}. \quad (29)$$

Так как  $U_c$  является функцией от  $c'X$  и  $v_0$ , то и полученное выражение зависит от  $c'X$  и  $v_0$ .

Таблицы функций  $f_0 - f_6$  даны в части III за № 22—28.

Заметим в заключение, что в таблицах функции  $f_0 - f_6$  вместо аргумента  $c'X$  указан аргумент  $c'x$ , так как эти функции применимы и для определения элементов произвольной точки траектории.

Действительно, определяя  $U$  из выражения

$$D(U) = c'x + D(v_0)$$

и подставляя его в выражение

$$\frac{A(U) - A(v_0)}{D(U) - D(v_0)} - J(v_0) = f_0(c'x, v_0),$$

мы можем уравнение для ординаты траектории (16) переписать в следующем виде:

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{x}{2c' \cos^2 \theta_0} f_0(c'x, v_0). \quad (30)$$

Отсюда

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 \left[ 1 - \frac{f_0(c'x, v_0)}{c' \sin 2\theta_0} \right]$$

или окончательно

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 \left[ 1 - \frac{f_0(c'x, v_0)}{f_0(c'X, v_0)} \right]. \quad (31)$$

Зная исходные параметры  $c'$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$  и задаваясь различными значениями абсциссы  $x$ , можно вычислить соответствующие значения ординаты  $y$ , т. е. построить траекторию снаряда.

### § 63. Применение метода Сиаччи для навесной стрельбы

Как мы видели ранее (§ 59), метод Сиаччи основан на допущении, что  $\cos \theta$  мало меняется вдоль траектории и величина  $\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}$  близка к единице. Кроме того, в методе Сиаччи не учитывается изменение плотности воздуха с высотой. Поэтому ошибки метода Сиаччи увеличиваются с увеличением угла бросания. С другой стороны, простота и удобство практического применения метода Сиаччи делает естественным стремление расширить его применение для большего диапазона углов бросания путем введения соответствующего коэффициента, компенсирующего получающиеся ошибки. Подобный коэффициент  $\beta$  и введен Сиаччи. Этот коэффициент должен был компенсировать не только ошибку от изменения  $\cos \theta$ , но и ошибку, происходящую от неучета изменения плотности воздуха с высотой.

Сиаччи составил таблицы, дополненные в дальнейшем Бруно, дающие значения  $\beta$  в зависимости от  $X$  и  $\theta_0$  для углов бросания до  $70^\circ$  и для дальностей до 35 км.

Следует заметить, что для компенсации ошибок при расчете всех элементов траектории одного коэффициента  $\beta$  недостаточно. Необходимо иметь столько различных коэффициентов, сколько элементов траектории требуется определить, а именно:  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ,  $\beta_\theta$ ,  $\beta_t$ . Если, подобрав величину  $\beta_x$ , хорошо согласующую дальность, вычислить при этом коэффициенте значения  $\theta$ ,  $t$  и  $y$ , то эти элементы будут определены менее точно. Для углов бросания порядка  $20-40^\circ$  ошибки доходят до  $3-5\%$  от величины определяемого элемента.

Сиаччи рекомендовал, однако, в первом приближении все эти коэффициенты заменить одним так называемым главным значением  $\beta$  ( $\beta$  principle). Для определения этого главного значения  $\beta$  Сиаччи, рассматривая малые значения баллистического коэффициента, разложил  $\beta$  по степеням  $cH(y)$  в ряд вида

$$\beta = \beta_0 + [cH(y)]\beta_1 + [cH(y)]^2\beta_2 + \dots$$

и получил первый член ряда в следующем виде:

$$\beta_0 = \frac{3}{2F(V_0) \sin 2\theta_0} \int_0^{\theta_0} F\left(\frac{V_0 \cos \theta_0}{\cos \theta}\right) \left(1 + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \theta_0}\right) \left[1 - 2Y\left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \theta_0}\right)\right] \frac{d\theta}{\cos \theta}. \quad (32)$$

В этом выражении  $V_0 = \sqrt{\frac{gX}{\sin 2\theta_0}}$  — та начальная скорость, которая в пустоте даст ту же полную дальность  $X$  при угле бросания  $\theta_0$ ;  $Y$  — полная высота траектории, получаемая из выражения  $Y = \frac{X \operatorname{tg} \theta_0}{4}$ ;  $a$  — численный коэффициент, равный 0,000085.

По этой формуле Сиаччи вычислил таблицы значений  $\beta$  для углов бросания до  $45^\circ$ . Эти таблицы были продолжены Бруно для углов бросания до  $70^\circ$ .

Многие итальянские артиллеристы, последователи Сиаччи, пытались вычислить второй член ряда, и когда после длительных трудов эта задача была решена в 1925 г. Кавалли, то формула для  $\beta$  получилась настолько сложной (формула в виде квадратур занимает около полутора страниц), что даже последователи Сиаччи не отважились по ней производить вычисления. Так как, однако, недостаточная точность значений  $\beta$ , полученных из зависимости (32), в особенности для больших углов бросания, была очевидной, то Бруно, отказавшись от поисков членов разложения, вычислил новую таблицу  $\beta$  на основании расчета большого числа траекторий по точкам. Таблица при этом получилась с тремя входами.

Такой подход к вычислению  $\beta$  является, конечно, более правильным. Однако выбор входных величин и расположение таблиц, вычисленных применительно к принятым в Италии методам вычислений, нельзя признать удобным. Приведенная в ч. III таблица значений  $\beta$  (табл. 31), вычисленная автором, составлена на основании расчетов траекторий по методу численного интегрирования, принятому у нас в качестве основного метода вычисления траекторий. Входными величинами в таблицах являются  $c$ ,  $v_0$  и  $\theta_0$ . Таблицы рассчитаны для  $c \leq 1$ , т. е. для артиллерии средних и крупных калибров. При производстве баллистических расчетов для артиллерии мелких калибров и стрелкового оружия можно пользоваться табл. 30 с двумя входами, вычисленной Сиаччи и Бруно по формуле (32).

#### § 64. Применение метода Сиаччи для зенитной стрельбы

Зенитная стрельба характеризуется большими начальными скоростями порядка 800—900 м/сек и большими углами бросания. Расчеты элементов траектории ведутся только для восходящей ветви, так как вероятность поражения цели на нисходящей ветви траектории весьма мала.

Вследствие большой начальной скорости снаряда кривизна траектории на большей части восходящей ветви траектории невелика, так что  $\cos \theta$  медленно изменяется вдоль траектории. Это позволяет применить метод Сиаччи и для расчетов зенитной стрельбы.

Так как в данном случае отношение  $\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}$  близко к единице, то можно под знаком функции  $F(v)$  заменить скорость  $v$  псевдоскоростью  $U = \frac{v \cos \theta}{\cos \theta_0}$ . При этом мы берем под знаком функции  $F$  завышенное значение аргумента и для компенсации необходимо умножить  $F(U)$  на некоторый коэффициент, меньший единицы. Однако в данном случае принять компенсирующий множитель вида  $\frac{\cos^2 \theta_0}{\cos \theta}$  нельзя, так как  $\cos \theta_0$  значительно отличается от единицы. Например, пусть на рассматриваемом участке траектории угол  $\theta$  меняется от  $70^\circ$  до  $65^\circ$ . При этом отношение  $\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}$  меняется от единицы до 1,23 и среднее значение этой величины равно 1,12. Таким образом, заменяя под знаком функции  $F$  скорость  $v$  псевдоскоростью  $U$ , мы увеличиваем аргумент в среднем на  $12^\circ$ .

В то же время отношение  $\frac{\cos^2 \theta_0}{\cos \theta}$  меняется от 0,342 до 0,276 и среднее значение этой величины равно 0,31. При этом компенсирующий множитель уменьшает значение функции более чем в три раза. Ясно, что такой компенсирующий множитель применять нельзя. Специальные исследования<sup>1</sup> показывают, что в применении к зенитной стрельбе подстановка Сиаччи должна иметь следующий вид:

$$H(y)F(v) \approx H(y_{cp})F(U) \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta}, \quad (33)$$

где

$$y_{cp} = \frac{1}{2}y.$$

Эта подстановка позволяет отделить переменные в уравнении графа и получить формулы для элементов траектории, аналогичные

<sup>1</sup> Майор Обэт, Некоторые вопросы методики составления таблиц стрельбы зенитной артиллерии, 1941.

формулам (11)—(16). При этом нет надобности выводить заново все эти формулы. Действительно, новая подстановка получается из обычной подстановки Сиаччи (8), если принять значение

$$\beta = \frac{H(y_{cp})}{\cos \theta_0}.$$

Следовательно, выражения для элементов траектории в случае зенитной стрельбы получаются из формул (10)—(16) путем замены  $c' = c_p^2 = \frac{cH(y_{cp})}{\cos \theta_0}$ .

Обозначая  $c_1 = cH(y_{cp})$ , получим следующие зависимости:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{1}{2c_1 \cos \theta_0} [J(U) - J(v_0)], \quad (34)$$

$$x = \frac{\cos \theta_0}{c_1} [D(U) - D(v_0)], \quad (35)$$

$$t = \frac{1}{c_1} [T(U) - T(v_0)], \quad (36)$$

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{x}{2c_1 \cos \theta_0} \left[ \frac{A(U) - A(v_0)}{D(U) - D(v_0)} - J(v_0) \right], \quad (37)$$

В выражения для  $x$ ,  $y$  и  $t$  можно ввести вспомогательные функции Сиаччи.

Обозначим  $\frac{x}{\cos \theta_0} = \xi$ . Тогда из выражения

$$D(U) = c_1 \xi + D(v_0)$$

следует, что псевдоскорость  $U$ , а следовательно, и все функции от нее могут быть выражены как функции от  $c_1 \xi$  и  $v_0$ . При этом в соответствии с выводами § 62 получим

$$\begin{aligned} \frac{A(U) - A(v_0)}{D(U) - D(v_0)} - J(v_0) &= f_0(c_1 \xi, v_0), \\ \frac{v_0 f_0(c_1 \xi, v_0)}{2[T(U) - T(v_0)]} &= f_3(c_1 \xi, v_0). \end{aligned}$$

Подставляем эти выражения в формулы для  $y$  и  $t$ :

$$y = \xi \sin \theta_0 - \frac{\xi}{2c_1} f_0(c_1 \xi, v_0), \quad (38)$$

$$t = \frac{v_0 f_0(c_1 \xi, v_0)}{2c_1 f_3(c_1 \xi, v_0)}, \quad (39)$$

$$x = \xi \cos \theta_0, \quad (40)$$

$$c_1 = c H\left(\frac{1}{2}y\right). \quad (41)$$

Полученные формулы удобно применять для практических расчетов при вычислении элементов траектории для зенитной стрельбы. Следует при этом учесть, что для вычисления  $c_1 = cH(y_{cp})$ , где  $y_{cp} = \frac{1}{2}y$ , необходимо в самом начале расчета знать значение  $y$ , которое может быть определено только в результате расчетов. Поэтому расчет элементов некоторой точки траектории производится в два приема. В первом приближении принимают  $H(y_{cp}) = 1$ ;  $c_1 = c$  и вычисляют приближенные значения  $y$  и  $y_{cp}$ . Затем вычисляют  $c_1 = cH(y_{cp})$  и производят окончательный расчет элементов траектории по формулам.

Точность приведенных формул характеризуется данными сравнительных расчетов, проведенных изложенным методом и методом численного интегрирования (глава V).

В табл. 15 даны значения ординат, вычисленные указанными двумя методами для 85-мм зенитной пушки при угле бросания  $\theta_0 = 72^\circ$ . Индекс с отвечает изложенному методу, индекс ч—методу численного интегрирования.

Таблица 15

$x$	$y_c$	$y_{\text{ч}}$	$\Delta$
172	525	527	-2
352	1073	1072	+1
545	1649	1646	+3
751	2255	2252	+3
974	2897	2896	+1
1217	3581	3574	+7
1487	4311	4300	+11
1788	5095	5066	+29

Численный пример расчета траектории для зенитной стрельбы приведен в § 70.

### § 65. Расчет коротких настильных траекторий (стрельба по танкам)

Траектории при стрельбе по танкам характеризуются большими начальными скоростями, порядка 900 м/сек и более, малыми углами прицеливания ( $< 0,5^\circ$ ) и малыми дальностями ( $< 1500$  м).

При этих условиях решение задачи по методу Сиаччи упрощается тем, что можно с достаточной степенью точности принять

$$U = \frac{v \cos \theta}{\cos \theta_0} = v,$$

так как для угла  $\theta_0 = 0,5^\circ$  имеем  $\cos \theta = 0,99996$ .

Кроме того, очевидно, что в данном случае можно принять  $\beta = 1$ ;  $c' = c$ .

При этом наиболее важный для практики вопрос об изменении скорости снаряда в зависимости от дальности до цели решается весьма просто по формуле

$$x = \frac{1}{c} [D(v) - D(v_0)]$$

или

$$D(v) = cx + D(v_0). \quad (42)$$

Зная значения  $v_0$  и  $c$  и задаваясь различными дальностями, вычисляем  $D(v)$ , а затем по табл. 21 части III находим скорость  $v$ .

Угол бросания вычисляется по формуле

$$\sin 2\theta_0 = \frac{1}{c} \left[ \frac{A(v) - A(v_0)}{D(v) - D(v_0)} - J(v_0) \right], \quad (43)$$

а ординаты траектории и время полета по формулам

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{x}{2c} \left[ \frac{A(v) - A(v_0)}{D(v) - D(v_0)} - J(v_0) \right], \quad (44)$$

$$t = \frac{1}{c} [T(U) - T(v_0)]. \quad (45)$$

Эти формулы отличаются от обычных формул метода Сиаччи тем, что в них принято  $\cos \theta_0 = 1$ .

Применять вспомогательные функции Сиаччи в данном случае не следует, так как при очень малых дальностях они не обеспечивают необходимой точности расчетов.

Так как расчеты значений  $\theta_0$  и  $u$  при помощи основных функций Сиаччи являются несколько громоздкими, то укажем другой метод, более простой и не уступающий методу Сиаччи в точности.

Рассмотрим понижение снаряда под линией выстрела при условии  $\theta_0 = 0$ . Пусть  $y = f(x)$  — уравнение траектории. Разложим  $f(x)$  в ряд Маклорена

$$y = f(x) = f(0) - x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{6} [f'''(x)]_{\text{ср}}.$$

В данном случае имеем

$$f(0) = y_0 = 0; \quad f'(0) = y'_0 = \operatorname{tg} \theta_0 = 0,$$

$$f''(x) = p_x' = -\frac{g}{u^2}; \quad f''(0) = -\frac{g}{v_0^2};$$

$$f'''(x) = p_x'' = \left( -\frac{g}{u^2} \right)'_x = \frac{2g}{u^3} u_x = -\frac{2g}{u^3} c H(y) G(v),$$

$$[f'''(x)]_{\text{ср}} = -\frac{2g}{v_{\text{ср}}^3} c G(v_{\text{ср}}).$$

Подставляя значения  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ ,  $[f'''(x)]_{\text{ср}}$  в выражение для  $y$ , получим

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{gx^3}{3v_{\text{ср}}^3} c G(v_{\text{ср}}).$$

Обозначая в дальнейшем абсолютную величину понижения буквой  $\tau = |y|$ , найдем

$$\tau = \frac{gx^2}{2v_0^2} + \frac{gx^3}{3v_{\text{ср}}^3} c G(v_{\text{ср}}), \quad (46)$$

где

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

При этом предполагается, что скорость  $v$  для рассматриваемой точки вычислена по формуле (42).

Угол бросания  $\theta_0$ , отвечающий некоторой дальности  $X$ , легко определить, исходя из начала жесткости траектории, по формуле  $\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\eta}{X}$  или окончательно

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{gX}{2v_0^2} + \frac{gX^2}{3v_{\text{ср}}^3} c G(v_{\text{ср}}). \quad (47)$$

Ординаты точек траектории найдем из выражения  $y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \tau$  или окончательно

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{gx^3}{3v_{\text{ср}}^3} c G(v_{\text{ср}}). \quad (48)$$

Время полета может быть вычислено по формуле

$$t = \frac{x}{v_{\text{ср}}},$$

$$\text{где } v_{\text{ср}} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

Скорость  $v$  удобнее всего вычислить по формуле (42).

Пример расчета траектории для стрельбы по танкам приведен в § 69 (пример 1).

### § 66. Схема решения задач при помощи вспомогательных функций Сиаччи

Рассмотрим сначала случай малых углов бросания, когда можно принять  $\beta = 1$  и  $c' = c$ . Для вычисления элементов точки падения и вершины необходимо знать любые три из следующих четырех параметров:  $c, v_0, \theta_0, X$ . В соответствии с этим возможны четыре схемы, которые мы и рассмотрим.

#### I. Заданы $c, v_0, \theta_0$ .

1. Вычисляем  $c \sin 2\theta_0 = f_0$ .
2. Входим в табл. 22 части III значениями  $v_0$  и  $f_0$  и определяем  $cX$ . Делением на  $c$  определяем дальность.
3. По входным величинам  $cX$  и  $v_0$  определяем по табл. 24—28 части III значения функций  $f_2 — f_6$ .
4. Вычисляем элементы точки падения и вершины по формулам

$$\operatorname{tg} |\theta_d| = f_2 \operatorname{tg} \theta_0,$$

$$T = \frac{v_0 \sin \theta_0}{f_2},$$

$$v_c = \frac{v_0 \cos \theta_0}{f_2 \cos \theta_c},$$

$$x_s = f_5 X,$$

$$Y = f_6 X \operatorname{tg} \theta_0.$$

#### II. Заданы $c, v_0, X$ .

1. Вычисляем произведение  $cX$ .
2. По входным величинам  $cX$  и  $v_0$  определяем функции  $f_0, f_2 — f_6$ .
3. Вычисляем  $\theta_0$  по формуле  $\sin 2\theta_0 = \frac{f_0}{c}$ .
4. Вычисляем элементы траектории по предыдущей схеме.

#### III. Заданы $c, \theta_0, X$ .

1. Вычисляем произведение  $cX$ .
2. Вычисляем  $c \sin 2\theta_0 = f_0$ .
3. Входим в табл. 22 части III значениями  $cX$  и  $f_0$  и определяем  $v_0$ .
4. Далее — согласно пп. 3—4 схемы I.

#### IV. Заданы $v_0, \theta_0, X$ .

1. Вычисляем  $\frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{X} = f_1$ .
2. Входим в табл. 23 части III значениями  $f_1$  и  $v_0$  и определяем  $cX$ . Делением на  $X$  определяем  $c$ .
3. Если требуется, то по величине  $c$  вычисляем коэффициент формы  $i$ .
4. Далее — согласно пп. 3—4 схемы I.

Из рассмотренных схем видно, что расчеты начинаются во всех случаях с использования таблиц функции  $f_0$  или  $f_1$ , в зависимости от того, какие параметры заданы. Входными величинами при этом являются либо оба аргумента  $cX$  и  $v_0$ , либо функция и один из аргументов.

Если углы бросания не очень малы, то необходимо определить значения  $\beta$  по табл. 30 или 31 части III. При этом в некоторых случаях

приходится вести расчет двумя сближениями. В других же случаях расчет  $\beta$  связан только с одной лишней вычислительной операцией.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пусть заданы  $c, v_0, \theta_0$  и требуется учесть  $\beta$  по табл. 31 части III. Так как входными величинами в табл. 31 являются те же параметры  $c, v_0, \theta_0$ , то расчет начинаем с определения  $\beta$  и вычисления  $c' = c\beta$ . Далее расчет ведется по схеме I, исходя из величины  $c'$  вместо  $c$ .

Если же заданы  $c, \theta_0, X$  и требуется определить  $\beta$  по табл. 31, то расчет приходится вести двумя сближениями. Вначале, принимая  $c' \approx c$ , ведем расчет по пп. 1—3 схемы III и определяем  $v_0$ . Далее по  $c, v_0, \theta_0$  определяем  $\beta$  и вычисляем  $c' = c\beta$ . После этого расчет повторяется по схеме III.

Заметим, что в рассмотренном случае задания  $c, \theta_0, X$ , если определять  $\beta$  по табл. 30 части III, то сближений не потребуется, так как входными величинами в табл. 30 являются параметры  $\theta_0$  и  $X$ .

В некоторых случаях требуется не только знать элементы точки падения и вершины, но еще построить всю траекторию. Расчеты проводятся по формуле (31):

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 \left[ 1 - \frac{f_0(c'x, v_0)}{f_0(c'X, v_0)} \right].$$

При этом, для того чтобы избежать интерполяции по величине  $c'x$ , целесообразно задаваться значениями  $c'x$ , кратными 500 (см. § 67, пример 2).

### § 67. Примеры решения задач при помощи вспомогательных функций Сиаччи

#### Пример 1. Заданы $c, v_0, \theta_0$

Исходные данные:

Калибр . . . . .	$d = 0,107 \text{ м}$
Вес снаряда . . . . .	$q = 17,04 \text{ кг}$
Коэффициент формы к закону Сиаччи . . . . .	$i = 0,525$
Начальная скорость . . . . .	$v_0 = 562 \text{ м/сек}$
Угол бросания . . . . .	$\theta_0 = 10^\circ 19'$

Вычисляем баллистический коэффициент

$$c = \frac{id^2}{q} \cdot 1000.$$

$\lg d$	7,6294	
$2 \lg d$	7,0588	
$\lg 1000 i$	2,7202	
$-\lg q$	7,7636	1,2314
$\lg c$	7,5476	
$c$	0,3529	

По табл. 31 части III по входным величинам  $c, v_0, \theta_0$  определяем значение  $\beta$ .

Интерполирующие множители

$$\xi_c = 0,53; \quad \xi_{v_0} = 0,62; \quad \xi_{\theta_0} = \frac{27}{300} = 0,063.$$

$\theta_0$	$c$	0,3	0,3529	0,4
	$v_0$			
$10^\circ$	500	0,976	0,982	0,988
	562	0,968	0,979	0,985
	600		0,977	
$10^\circ 19'$	562		0,955	0,960
$15^\circ$	500	0,950	0,954	0,959
	562	0,948	0,954	0,959
	600			

Получаем  $\beta = 0,977$ .

Вычисляем  $c' = c\beta$  и  $f_0 = c' \sin 2\theta_0$ .

$\lg c$	1,5476
$\lg \beta$	1,9899
$\lg c'$	1,5375
$\lg \sin 2\theta_0$	1,5470
$\lg f_0$	1,0845
$f_0$	0,1214

По табл. 22 части III по  $v_0 = 562$  и  $f_0 = 0,1214$  определяем  $c'X$ .

$v_0$	600	562	550
$c'X$			
2000	0,0905	0,1026	0,1064
2227		0,1214	
2500	0,128	0,144	0,149

Получаем  $c'X = 2227$ ,  $X = 6462 \text{ м}$ .

$\lg c'X$	3,3478
$-\lg c'$	0,4625
$\lg X$	3,8103
$X$	6462

Далее по значениям  $c'X = 2227$  и  $v_0 = 562$  определим функции  $f_2 - f_5$ . В табл. 24—28 части III даны логарифмы этих функций.

Интерполирующие множители:  $\xi_{v_0} = 0,24$ ;  $\xi_{c'X} = 0,454$ .

Расчет удобно вести в приводимом ниже бланке и в следующей последовательности:

1. Выписывают опорные данные из таблиц для функций  $f_2 - f_5$ .
2. На логарифмической линейке устанавливается значение  $\xi_{v_0} = 0,24$  и производится интерполяция по скорости для всех функций  $f_2 - f_5$ .
3. Аналогичным образом производится интерполяция по  $c'X$ .

$c'X$	$v_0$	600	562	550
$\lg f_2$	2000	0,181	0,173	0,170
	2227		0,182	
	2500	0,205	0,192	0,188
$\lg f_3$	2000	0,758	0,758	0,758
	2227		0,768	
	2500	0,780	0,779	0,779
$\lg f_4$	2000	0,273	0,262	0,258
	2227		0,278	
	2500	0,313	0,297	0,292
$\lg f_5$	2000	1,7426	1,7404	1,7397
	2227		1,7425	
	2500	1,7483	1,7451	1,7441
$\lg f_6$	2000	1,4938	1,4905	1,4894
	2227		1,4973	
	2500	1,5104	1,5055	1,5039

По значениям  $f_2 - f_6$  находим элементы точки падения и вершины:

$\tg \theta_c = f_2 \tg \theta_0$	$\lg f_2$	0,1820
	$\lg \tg \theta_0$	1,2601
	$\lg \tg \theta_c$	1,4421
	$\theta_c$	$15^\circ 28'$
$T = \frac{v_0 \sin \theta_0}{f_3}$	$\lg v_0$	2,7497
	$\lg \sin \theta_0$	1,2531
	$-\lg f_3$	1,2320
	$\lg T$	1,2348
	$T$	17,17
	$\lg v_0$	2,7497
	$\lg \cos \theta_3$	1,9929
	$-\lg f_4$	1,7220
	$-\lg \cos \theta_c$	0,0160
	$\lg v_c$	2,4806
	$v_c$	302,4
	$\lg f_5$	1,7425
	$\lg X$	3,8103
$x_s = f_5 X$	$\lg x_s$	3,5528
	$x_s$	3572
	$\lg f_6$	1,4973
	$\lg X$	3,8103
	$\lg \tg \theta_0$	1,2601
	$\lg Y$	2,5677
	$Y$	369,6

Окончательно получим

$$X = 6462 \text{ м}; \theta_c = 15^\circ 28'; T = 17,17 \text{ сек.}; \\ v_e = 302,4 \text{ м/сек}; x_s = 3572 \text{ м}; Y = 370 \text{ м}.$$

### Пример 2. Построение траектории по данным предыдущего примера.

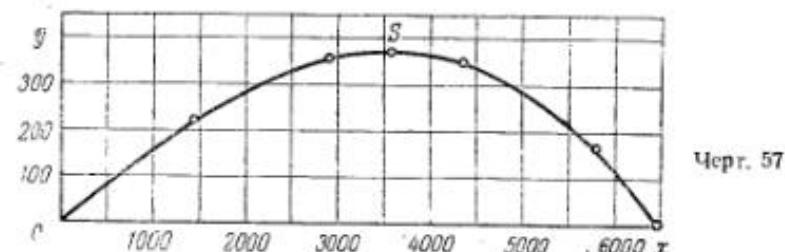
Расчет ведем по формуле (31):

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 \left[ 1 - \frac{f_0(c'x, v_0)}{f_0(c'X, v_0)} \right].$$

Для построения траектории достаточно иметь, кроме элементов точки падения и вершины, еще ординаты двух точек на восходящей и двух точек на нисходящей ветвях. Для точки падения мы имели  $c'X = 2227$ . Для построения траектории задаемся  $c'x = 500; 1000; 1500; 2000$ . Так как функция  $f_0$  дается в таблице с тремя значащими цифрами, то расчет можно вести при помощи логарифмической линейки по следующей схеме, исходя из значений  $v_0 = 562 \text{ м/сек}$  и  $\operatorname{tg} \theta_0 = 0,1820$ .

$c'x$	500	1000	1500	2000
$c'$	0,3447	0,3447	0,3447	0,3447
$x$	1450	2900	4350	5800
$f_0(c'x, v_0)$	0,0176	0,0308	0,0579	0,1026
$f_0(c'X, v_0)$	0,1214	0,1214	0,1214	0,1214
$\frac{f_0(c'x, v_0)}{f_0(c'X, v_0)}$	0,145	0,328	0,559	0,845
$1 - \frac{f_0(c'x, v_0)}{f_0(c'X, v_0)}$	0,855	0,672	0,441	0,155
$x$	1450	2900	4350	5800
$\operatorname{tg} \theta_0$	0,1820	0,1820	0,1820	0,1820
$y$	226	335	349	164

Результаты расчетов показаны на графике черт. 57, на котором для наглядности масштабы ординат и абсцисс взяты различными.



Черт. 57

### Пример 3. Условия примера 1 при задании $c, v_0, X$ .

Заданы  $c = 0,3529$ ;  $v_0 = 562$ ;  $X = 6462$ ; требуется определить угол бросания  $\theta_0$ .

Расчет необходимо начать с определения  $\beta$  по табл. 31 части III, но, не зная угла бросания  $\theta_0$ , мы не можем определить  $\beta$ .

Полагая в первом приближении  $\beta = 1$  и  $c' = c$ , вычисляем  $cX$ .

По табл. 22 части III по входным числам  $cX = 2280$  и  $v_0 = 562$  находим приближенное значение  $(f_0)_{\text{пр}}$ .

$\lg c$	1,5476
$\lg X$	3,8103
$\lg cX$	3,3579
$cX$	2280

$c'X$	$v_0$	600	562	550
2000		0,0905	0,1026	0,1064
2280			0,126	
2500		0,128	0,144	0,140

Определяем приближенное значение угла бросания  $(\theta_0)_{\text{пр}}$ :

$(\sin 2\theta_0)_{\text{пр}} = \frac{(f_0)_{\text{пр}}}{c}$	$\lg (f_0)_{\text{пр}}$	1,1004
	$-\lg c$	0,4524
	$\lg (\sin 2\theta_0)_{\text{пр}}$	1,5528
	$(\theta_0)_{\text{пр}}$	$10^\circ 28'$

Далее, зная  $c, v_0$  и приближенное значение  $\theta_0$ , можно найти  $\beta$  по табл. 31 части III. Путем интерполяции по значениям  $c = 0,3529$ ;  $v_0 = 562$ ;  $\theta_0 = 10^\circ 28'$  найдем  $\beta = 0,977$ .

Вычисляем  $c'$  и  $c'X$ :

$c'X = c^2X$	$\lg c$	1,5476
	$\lg \beta$	1,9899
	$\lg c'$	1,5375
	$\lg X$	3,8103
	$\lg c'X$	3,3478
	$c'X$	2227

Уточняем значения  $f_0$  и  $\theta_0$ :

$c'X$	$v_0$	562
2000		0,1026
2227		0,1214
2500		0,144
$\lg f_0$		1,0842
$-\lg c'$		0,4625
$\lg \sin 2\theta_0$		1,5467
$\theta_0$		$10^\circ 19'$

Окончательно получаем  $\theta_0 = 10^\circ 19'$ .

## § 68. Схема решения задач при помощи основных функций Сиаччи

При употреблении таблиц вспомогательных функций Сиаччи мы получаем быстрое решение задачи определения элементов точки падения и вершины по трем из четырех величин:  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ ,  $X$ . Однако в отношении точности вспомогательные функции несколько уступают основным функциям Сиаччи. Объясняется это следующим. Основные функции Сиаччи, зависящие от одного аргумента, даны в таблице через достаточно мелкий шаг аргумента. При этих условиях линейная интерполяция, базирующаяся на линейной зависимости между изменениями функции и аргумента, не приводит к каким-либо существенным погрешностям. Вспомогательные же функции Сиаччи, зависящие от двух аргументов  $c'X$  и  $v_0$ , даны в таблицах при сравнительно значительных шагах аргументов. Поэтому линейная интерполяция по двум входам в некоторых случаях является источником погрешностей, которые не могут считаться пренебрежимыми. Это имеет место главным образом при малых значениях  $c'X$ . В этих случаях прибегают к расчетам при помощи основных функций Сиаччи. При вычислении и построении траекторий стрелкового оружия, а также в расчетах по противотанковой стрельбе (небольшие дальности и настильные траектории) удобно применять основные функции Сиаччи.

Расчеты при помощи основных функций начинаются с использования следующих зависимостей:

$$c' \sin 2\theta_0 = \frac{A_c - A_0}{D_c - D_0} - J_0, \quad (49)$$

$$c'X = D_c - D_0. \quad (50)$$

При этом следует различать два основных случая:

### I. Заданы $c'$ , $X$ , $v_0$ .

Расчет ведется по следующей схеме:

1. По табл. 21 части III определяются  $D(v_0)$  и другие функции от  $v_0$ .
2. Вычисляется  $c'X$ .
3. Вычисляется  $D(U_e) = c'X + D(v_0)$ .
4. По табл. 21 части III по величине  $D(U_e)$  определяется  $U_e$  и все остальные функции.
5. Вычисляются все элементы точки падения и вершины по формулам § 61.

### II. Заданы $\theta_0$ и любые два параметра из $c'$ , $x$ , $v_0$ .

В этом случае для определения значения  $U_e$  приходится использовать уравнение (49) или совместно уравнения (49) и (50). Так как, однако, уравнение (49) содержит аргумент  $U_e$  под знаком двух функций  $A(U_e)$  и  $D(U_e)$ , то приходится определять  $U_e$  методом прицедок. При этом подбирается такое значение  $U_e$ , чтобы после определения из табл. 21 части III значений  $D(U_e)$  и  $A(U_e)$  правая и левая части равенства (49) были равны друг другу.

Для того чтобы уменьшить количество прицедок при определении  $U_e$  из уравнения (49), предварительно определяют приближенно дальность  $X$  при помощи вспомогательных функций Сиаччи. Затем из уравнения (50) находят  $D(U_e)$ :

$$D(U_e) = c'X + D(v_0).$$

По величине  $D(U_e)$  определяют значение  $A(U_e)$  и подставляют его в (49). Если при этом уравнение (49) не удовлетворяется, то несколько изменяют  $D(U_e)$  так, чтобы правая и левая части равенства были разны друг другу. Техника расчета показана в примере 2 следующего параграфа.

## § 69. Примеры решения задач при помощи основных функций Сиаччи

**Пример 1.** Расчет элементов траектории для стрельбы по танкам из 45-мм пушки. Снаряд подкалиберный.

Заданы  $d = 0,045$  м;  $i = 0,651$ ;  $q = 0,98$  кг;  $v_0 = 1200$  м/сек. Требуется определить окончательные скорости и установки прицела для стрельбы на дальности 500 и 1000 м.

Вычисляем баллистический коэффициент

$$c = \frac{id^2}{q} \cdot 1000.$$

По табл. 21 части III находим  $D(v_0) = D(1200) = 2022$ .

Так как траектории в данном случае очень настильные, то можно принять

$$\frac{\cos \theta_e}{\cos \theta_0} = 1; U_e = v_0; \hat{r} = 1.$$

Далее определяем  $D(v_e) = cX + D(v_0)$  и по табл. 21 ч. III  $v_e$ :

	500	1000
$cX$	672,5	1345
$D(v_e)$	2022	2022
$D(v_e)$	2694,5	3367
По табл. 21 $v_e$	1013,3	837,6

Угол бросания определяем по формуле

$$\sin 2\theta_0 = \frac{1}{c} \left( \frac{A_c - A_0}{D_c - D_0} - J_0 \right) = \frac{1}{c} \left( \frac{A_c - A_0}{cX} - J_0 \right).$$

	500	1000
$cX$	672,5	1345
$\lg(cX)$	2,8277	3,1287
$D_c$	2694,5	3367
$A_c$	285,68	372,65
$A_0$	207,48	207,48
$A_c - A_0$	78,20	165,17
$\lg(A_c - A_0)$	1,8932	2,2179
$- \lg cX$	3,1723	4,8713
$\lg \frac{A_c - A_0}{cX}$	1,0655	1,0802
$A_c - A_0$	0,1162	0,1228
$cX$	-0,1112	-0,1112
$J_0$	0,0050	0,0116
$\Sigma$	0,0050	0,0116
$\lg \Sigma$	3,6990	2,0645
$- \lg c$	1,8712	1,8712
$\lg \sin 2\theta_0$	3,5702	3,9357
$\theta_0$	0,6,4'	0,14,8'

Углы бросания получаются очень малыми. Так как  $\cos 15' = 0,99999$ , то сделанное выше допущение  $(\frac{\cos \theta_e}{\cos \theta_0} = 1)$  вполне приемлемо.

Для сравнения проведем расчет углов бросания по формуле (47), исходя из скоростей, вычисленных выше по методу Сиаччи. При этом для  $x=500$  имеем  $v_{cp}=1106$  и для  $x=1000$   $v_{cp}=1019$ .

	X	500	1000
	$\lg v_{cp}$	3,0438	3,0082
$A = \frac{gX}{2v_0^2}$	$\lg(0,5g)$ $\lg X$ $-2\lg v_0$	0,6906 2,6990 7,8416	Значение A удваивается
	$\lg A$ $A$	3,2312 0,001703	0,003406
$B = \frac{gX^2}{3v^2} cG(v_{cp})$	$\lg\left(\frac{1}{3}g\right)$ $2\lg X$ $-3\lg v_{cp}$ $\lg c$ По табл. 1 $\lg G(v_{cp})$	0,5145 5,3980 10,8686 0,1288 1,4412	0,5145 6,0000 10,9754 0,1288 1,4327
	$\lg B$ $B$	4,3541 0,000226	3,0514 0,001126
$\tan \theta_0 = A + B$	$\tan \theta_0$ $\theta_0$	0,001929 0°6'6"	0,004532 0°15'5"

Пример 2. Расчет элементов траектории пули.

Исходные данные:  $v_0=875$  м/сек;  $\theta_0=19^{\circ}0'$ ;  $c'=3,629$ .

Предварительно необходимо вычислить приближенное значение  $c'X$  при помощи вспомогательных функций Сиаччи. Имеем

$$f_0 = c' \sin 2\theta_0 = 3,629 \cdot \sin 38^{\circ} = 2,235.$$

По табл. 22 части III по значениям  $f_0=2,235$  и  $v_0=875$  находим  $c'X_{np}=12870$ . Далее вычисляем приближенное значение  $D_c$

$$(D_c)_{np} = c'X_{np} + D_0.$$

По табл. 21 части III определим предварительно  $D_0$ , при этом одновременно находим и остальные функции для  $v_0=875$ , которые нам понадобятся в дальнейшем.

D	J	A	T	$v_0$
3210	0,13341	351,38	2,917	877,3
3219	0,13364	352,61	2,928	875,0
3220	0,13366	352,71	2,929	874,8

Интерполирующий множитель

$$\xi = \frac{875,0 - 877,3}{874,8 - 877,3} = 0,92,$$

$$(D_c)_{np} = 12870 + 3219 = 16089,$$

$$c' \sin 2\theta_0 + J_0 = f_0 + J_0 = 2,235 + 0,13364 = 2,369.$$

Уравнение (49) принимает следующий вид:

$$\frac{A_c - 352,61}{D_c - 3219} = 2,369.$$

В дальнейшем будем обозначать буквой  $\Lambda$  левую часть последнего равенства. Из этого уравнения необходимо попытками найти  $U_c$  или  $D_c$ . За исходное берем  $(D_c)_{np} = 16089$ .

Дальнейший расчет удобно вести следующим образом. Вместо найденного  $(D_c)_{np}$  выбираем по табл. 21 части III два ближайшие значения функции  $D$  (16080 и 16090) и ведем расчет по следующей схеме.

	16 080	16 090
$D_c - D_0$	12 861	12 871
$A_c - A_0$	30 706	30 794
$A_c - A_0$	353	353
$A_c - A_0$	30 353	30 441
$\lg(A_c - A_0)$	4,4822	4,4835
$-\lg(D_c - D_0)$	5,8907	5,8904
$\lg \Lambda$	0,3729	0,3739
$\Lambda$	2,359	2,365

Вместо правильного значения левой части  $\Lambda = 2,369$  для  $D_c = 16080$  мы получили  $\Lambda = 2,359$ , а для  $D_c = 16090 \Lambda = 2,365$ . Таким образом изменению  $D_c$  на 10 единиц отвечает изменение  $\Lambda$  на 0,006; поэтому необходимо еще увеличить  $D_c$  на  $10 \cdot \frac{4}{6} = 7$  единиц; получаем  $D_c = 16097$  и по табл. 21 части III находим все функции для точки падения:  $D_c = 16097$ ;  $J_c = 8,774$ ;  $A_c = 30855$ ;  $T_c = 70,206$ ;  $U_c = 93,5$ .

Теперь находим все элементы точки падения.

$D_c$	16097
$D_0$	3219
$D_c - D_0$	12878
$\lg(D_c - D_0)$	4,1099
$-\lg c'$	1,4401
$\lg X$	3,5500
$X$	3548
$T_c$	70,206
$T_0$	2,928
$T_c - T_0$	67,278
$\lg(T_c - T_0)$	1,8279
$-\lg c'$	1,4401
$-\lg \cos \theta_0$	0,0243
$\lg T$	1,2923
$T$	19,6

$A_c$	30855
$A_0$	353
$A_c - A_0$	30502
$\lg(A_c - A_0)$	4,4843
$-\lg(D_c - D_0)$	5,8901
$\lg \frac{A_c - A_0}{D_c - D_0}$	0,3744
$J_c$	8,774
$A_c - A_0$	2,368
$D_c - D_0$	
$J_c - \frac{A_c - A_0}{D_c - D_0}$	6,406
$\lg \left( J_c - \frac{A_c - A_0}{D_c - D_0} \right)$	0,8066
$-\lg c$	1,4401
$-\lg 2$	1,6990
$-2\lg \cos \theta_0$	0,0486
$\lg \tan \theta_c$	1,9943
$\theta_c$	44°38'

Определяем элементы вершины. Имеем

$$J(U_s) = c' \sin 2\theta_0 + J(v_0).$$

Правая часть этого равенства была нами вычислена выше:

$$c' \sin 2\theta_0 + J_0 = 2,369 = J_s.$$

Из таблицы основных функций Сиаччи по входной величине  $J(U_s)$  находим остальные функции:

$$D_s = 11260; A_s = 6860; T_s = 31,017; U_s = 167,0.$$

$D_s$	11260
$D_0$	3219
$D_s - D_0$	8041
$\lg(D_s - D_0)$	3,954
$- \lg c'$	1,4401
$\lg x_s$	3,3455
$x_s$	2216
$T_s$	31,017
$T_0$	2,928
$T_s - T_0$	28,090
$\lg(T_s - T_0)$	1,4489
$- \lg c'$	1,4401
$- \lg \cos \theta_0$	0,0243
$\lg t_s$	0,9130
$t_s$	8,18

$\lg U_s$	2,2251
$\lg \cos \theta_0$	1,9757
$\lg v_s$	2,2008
$v_s$	158,8

Окончательно получим:

$$\begin{aligned} X &= 3548 \text{ м}; & T &= 19,6 \text{ сек.}; & |\theta_c| &= 44^\circ 38'; \\ v &= 124,3 \text{ м/сек}; & x_s &= 2216 \text{ м}; & t_s &= 8,18 \text{ сек.} \\ Y &= 532,5 \text{ м}; & v_s &= 158,8 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

### § 70. Пример применения метода Сиаччи для зенитной стрельбы

Требуется построить траекторию зенитного снаряда для условий:  
 $d = 0,085 \text{ м}; v_0 = 800 \text{ м/сек}; c = 0,4433; \theta_0 = 72^\circ$ .

Расчет ведем при помощи функций Сиаччи по формулам (38) — (41):

$$y = \frac{\xi}{2} \sin \theta_0 - \frac{\xi f_0}{2c_1},$$

$$t = \frac{v_0 f_0}{2c_1 j_s},$$

где

$$x = \frac{\xi}{2} \cos \theta_0, \text{ и } c_1 = c H(y_{cp}) = c H\left(\frac{1}{2} y\right).$$

Функции  $f_0$  и  $f_3$  определяем по входным числам  $c_1 \xi$  и  $v_0$ .

Для удобства расчетов задаем точки траектории величиной  $c_1 \xi$ , — это позволит свести к минимуму количество вычислительных операций. При этом заметим, что  $\xi = \frac{x}{\cos \theta_0}$  — величина, близкая к наклонной дальности. Значения  $c_1 \xi$  задаем через 500, что освобождает нас от интерполяции при вычислении  $f_0$  и  $f_3$ .

Ниже приводится расчет зенитной траектории. Величины, получающиеся в первом приближении без учета  $H(y_{cp})$ , отмечены чертой сверху. В бланке для сокращения письма обозначено  $A = \frac{\xi}{2} \sin \theta_0$  и  $B = \frac{\xi f_0}{2c_1}$ .

$A_s$	6860
$A_s - A_0$	333
$A_s - A_0$	6507
$\lg(A_s - A_0)$	3,8134
$-\lg(D_s - D_0)$	1,0046
$\lg \frac{A_s - A_0}{D_s - D_0}$	1,9080
$J_s$	2,369
$\frac{A_s - A_0}{D_s - D_0}$	0,809
$J_s - \frac{A_s - A_0}{D_s - D_0}$	1,560
$\lg(J_s - \frac{A_s - A_0}{D_s - D_0})$	0,1931
$\lg x_s$	3,3455
$-\lg 2$	1,6900
$-\lg c'$	1,4401
$-2 \lg \cos \theta_0$	0,0486
$\lg Y$	2,7263
$Y$	532,5

Задаем величиной	$c_1 \xi$	1000	1500	2000
Oпределяем приближенное значение $y$				
$\lg c_1 \xi$	3,0000	3,1761	3,3010	
$-\lg c$	0,3533	0,3533	0,3533	
$\lg \frac{\xi}{2}$	3,3533	3,5294	3,6543	
$\lg \sin \theta_0$	1,9782	1,9782	1,9782	
$\lg \bar{A}$	3,3315	3,5076	3,6325	
$\bar{A}$	2145	3218	4290	
По табл. 22 части III $j_s$	0,0192	0,0327	0,0500	
$\lg j_s$	2,2833	2,5145	2,6990	
$\lg \frac{\xi}{2}$	3,3533	3,5294	3,6543	
$-\lg 2$	1,6900	1,6900	1,6900	
$-\lg c$	0,3533	0,3533	0,3533	
$\lg \bar{B}$	1,6889	2,0962	2,4056	
$\bar{B}$	48,85	124,8	254,5	
$\bar{y} = \bar{A} - \bar{B}$	2096	3093	4036	
$y_{cp} = \frac{1}{2} y$	1048	1546	2018	
По табл. 8 части III $H(y_{cp})$	1,9556	1,9342	1,9136	
$\lg H(y_{cp})$	3,3533	3,5294	3,6543	
$-\lg H(y_{cp})$	0,0444	0,0658	0,0864	
$\lg \frac{\xi}{2}$	3,3533	3,5294	3,6543	
$\lg \cos \theta_0$	1,4900	1,4900	1,4900	
$\lg x$	2,8877	3,0852	3,2307	
$x$	773,9	1217	1701	

Вычисляем значение ординаты $y$	$\lg \bar{A}$	3,3315	3,5076	3,6326
	$-\lg H(y_{ep})$	0,0444	0,0658	0,0864
$A = \frac{\bar{A}}{H(y_{ep})}$	$\lg A$	3,3759	3,5734	3,7189
	$A$	2376	3744	5235
$B = \frac{\bar{B}}{[H(y_{ep})]^2}$	$\lg B$	1,6889	2,0962	2,4056
	$-2 \lg H(y_{ep})$	0,0888	0,1316	0,1728
$y = A - B$	$\lg B$	1,7777	2,2278	2,5784
	$B$	50,94	169,0	378,7
		2316	3575	4856

Вычисляем время полета $t$	$\lg v_0$	2,9031	2,9031	2,9031
	$\lg f_0$	2,2833	2,5145	2,6990
$t = \frac{v_0 f_0}{2 c_1 f_0}$	$-\lg 2$	1,6990	1,6990	1,6990
	$-\lg e$	0,3533	0,3533	0,3533
Потабл. 25 ч. III	$-\lg H(y_{ep})$	0,0444	0,0658	0,0864
	$-\lg f_a$	1,2840	1,2680	1,2490
	$\lg t$	0,5671	0,8037	0,9898
	$t$	3,69	6,36	9,77

Окончательно получим следующий результат для трех точек:

x	y	t
774	2316	3,69
1217	3575	6,36
1701	4856	9,77

Биссинг

## Глава V

### РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ВНЕШНЕЙ БАЛИСТИКИ ПО МЕТОДУ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

#### § 71. Введение

Дифференциальные уравнения движения снаряда не интегрируются точно в аналитическом виде. Предложено немалое число приближенных методов решения основной задачи внешней баллистики. Среди этих методов наибольшее распространение получили метод Эйлера-Отто и метод Сиаччи, изложенные в предыдущей главе. Общий для этих двух методов является то, что они позволяют вычислить сразу элементы точки падения и вершины, не прибегая к вычислению элементов траектории для промежуточных точек. В этом их достоинство. Однако эти методы, как, впрочем, и все другие приближенные методы обладают рядом существенных недостатков, а именно:

1. Каждый из этих методов в отдельности и оба метода вместе не дают решения основной задачи, пригодного для всех случаев, встречающихся в практике артиллерийской стрельбы. Метод Эйлера-Отто применим только для скоростей, меньших 250 м/сек, или для очень больших скоростей, порядка 1500 м/сек, так как он базируется на квадратичном законе сопротивления воздуха  $F(v) = B v^2$ , который верен только для указанных скоростей. При этом метод Эйлера-Отто не ограничен в отношении углов бросания. Метод Сиаччи применим для любых скоростей, так как в нем функция сопротивления не ограничена никакими условиями. Наряду с этим, по самому характеру допущений, на котором он базируется, метод Сиаччи предназначен для прицельной стрельбы, т. е. для малых углов бросания. Введение коэффициента  $\beta$  не решает в полной мере задачу применения метода Сиаччи для навесной стрельбы, так как точность метода убывает с увеличением угла бросания.

Кроме того, для составления таблиц  $\beta$  необходимо использовать другие, более точные методы вычисления траекторий.

Таким образом ни один из указанных методов не дает вполне удовлетворительного решения для случая навесной стрельбы при больших начальных скоростях. С этим в известной мере можно было мириться до первой мировой войны, когда пушки использовались в основном при углах бросания, не превосходящих  $20^\circ$ , а навесный огонь велся исключительно гаубицами и мортирами при малых начальных скоростях. В настоящее же время, когда вся артиллерия ведет огонь на предельных дальностях, необходимо иметь метод, позволяющий рассчитать элементы траектории с достаточной точностью для любых условий стрельбы.

2. Методы Эйлера-Отто и Сиаччи являются приближенными методами и степень точности их не может быть ни изменена, ни сокращена в процессе расчетов. В обоих методах не учитывается изменение плотности воздуха с высотой. Поэтому эти методы мало пригодны для статистических баллистических расчетов, в которых требуется высокая степень

точности, как, например, составление таблиц стрельбы или обработка результатов исследовательских баллистических стрельб.

В связи с новыми задачами, поставленными перед внешней баллистикой, появилась необходимость в таком общем методе решения основной задачи внешней баллистики, который был бы применим для любых условий стрельбы и обеспечивал любую степень математической точности вычислений<sup>1</sup>.

Было предложено значительное количество методов, решающих эту задачу. Важнейшие из этих методов следующие:

1. Гаврский метод, разработанный в 1887 г. во Франции «Гаврской комиссией».
2. Метод Г. Н. М., разработанный во время войны 1914—1918 гг. во Франции тремя авторами (Garnier, Haag, Marcus).
3. Вариант применения метода Сиаччи к расчету траектории по участкам.
4. Метод последовательных интегрирований Пикара.
5. Метод Рунге-Кута.
6. Метод Адамса-Штермера, применяемый с 1918 г. у нас и в США.

Общий для всех этих методов является то, что они дают решение основной задачи внешней баллистики для небольшого участка траектории, а элементы траектории в произвольной ее точке определяются путем суммирования результатов решений для отдельных участков. Таким образом все эти методы могут быть названы методами решения задачи внешней баллистики «по дугам».

Из перечисленных методов первые три разработаны специально для решения основной задачи внешней баллистики; последние же три являются общими методами, пригодными для решения любого обыкновенного дифференциального уравнения или системы уравнений.

Применяемый у нас метод Адамса-Штермера численного интегрирования дифференциальных уравнений предложен английским астрономом Адамсом в 1883 г. в применении к задачам астрономии. Норвежский ученик Штермер усовершенствовал этот метод применительно к дифференциальным уравнениям второго порядка.

У нас этот метод был предложен для решения основной задачи внешней баллистики академиком А. Н. Крыловым в 1918 г. В США этот же метод был предложен для решения задач внешней баллистики профессором Мультеном.

В настоящее время метод численного интегрирования является у нас основным при решении основной задачи внешней баллистики. Математическими основами метода численного интегрирования являются элементы исчисления конечных разностей и теория интерполяции. Эти вопросы в объеме, необходимом для решения задач внешней баллистики, излагаются ниже.

### § 72. Конечные разности и их свойства

Положим, что некоторая функция  $y=f(x)$  задана таблицей для значений аргумента, изменяющихся через постоянный шаг  $h$ .

Выражение

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

будем называть конечной разностью первого порядка от функции  $f(x)$  или, коротко, первой разностью функции  $f(x)$ .

Первую разность от первой разности

$$\Delta^2 y = \Delta^2 f(x) = \Delta [\Delta f(x)]$$

<sup>1</sup> Следует различать математическую точность какого-либо решения и практическую точность. Последняя в существенной мере зависит от точности функций, входящих в дифференциальные уравнения. Для задач внешней баллистики важное значение имеет точное знание сопротивления воздуха или функции сопротивления воздуха  $F(v)$ .

будем называть конечной разностью второго порядка или второй разностью функции  $f(x)$ . Конечная разность  $m$ -го порядка определяется из выражения

$$\Delta^m y = \Delta^m f(x) = \Delta [\Delta^{m-1} f(x)].$$

В дальнейшем будем принимать какое-то табличное значение аргумента за исходное и обозначать его  $x_n$ . Следующие за ним значения аргументов будем обозначать  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ , а предшествующие ему значения аргументов —  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$

Произвольное значение аргумента будем обозначать  $x_{n+k}$ . Число  $k$  будем называть индексом, а число  $(n+k)$  — номером аргумента.

Соответствующие значения функции будем отмечать тем же номером, как и аргумент, например,  $y_n, y_{n+1}, y_{n+2}$ .

При этом конечные разности будем писать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Delta y_n &= y_{n+1} - y_n, \\ \Delta y_{n+1} &= y_{n+2} - y_{n+1}, \\ \Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1} - \Delta y_n, \\ \Delta^2 y_{n+1} &= \Delta y_{n+2} - \Delta y_{n+1}, \\ \Delta^3 y_n &= \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n\end{aligned}$$

и т. д.

Конечные разности будем располагать в таблице следующего вида (табл. 16):

Таблица 16

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$x_{n-3}$	$y_{n-3}$	$\Delta y_{n-3}$	$\Delta^2 y_{n-3}$	$\Delta^3 y_{n-3}$
$x_{n-2}$	$y_{n-2}$	$\Delta y_{n-2}$	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-2}$
$x_{n-1}$	$y_{n-1}$	$\Delta y_{n-1}$	$\Delta^2 y_{n-1}$	$\Delta^3 y_{n-1}$
$x_n$	$y_n$	$\Delta y_n$	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$
$x_{n+1}$	$y_{n+1}$	$\Delta y_{n+1}$	$\Delta^2 y_{n+1}$	
$x_{n+2}$	$y_{n+2}$	$\Delta y_{n+2}$		
$x_{n+3}$	$y_{n+3}$			

Чтобы составить таблицу конечных разностей, надо из каждого значения функции вычесть ему предшествующее и полученную разность записать правее вычитаемого в одной строке с ним.

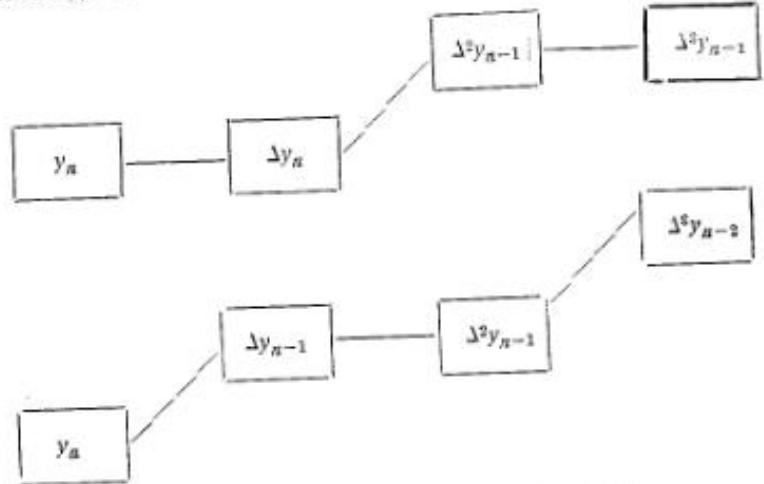
Например, для функции  $y=x^3-5x$  получим таблицу конечных разностей следующего вида (табл. 17):

Таблица 17

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	0	-4	6	6
1	-4	+2	12	6
2	-2	+14	18	
3	12	+32		
4	44			

Числа, стоящие в таблице разностей, будем называть элементами. Последовательными элементами по отношению к данному будем называть элементы соседнего справа столбца, зависящие от данного. Например, по отношению к элементу  $\Delta y_n$  последовательными элементами являются  $\Delta^2 y_n$  и  $\Delta^3 y_{n+1}$ , но не элемент  $\Delta^2 y_{n+1}$ .

Строка последовательных элементов содержит по одному элементу из каждого столбца, причем каждый элемент строки имеет такой же номер, как соседний слева элемент, или на единицу меньше. Например, строками последовательных элементов являются следующие строки:



Рассмотрим основные свойства конечных разностей:

1. Постоянный множитель можно вынести из-под знака конечной разности.

Действительно, исходя из определения конечной разности, имеем

$$\Delta [cf(x)] = cf(x+h) - cf(x) = c[f(x+h) - f(x)] = c\Delta f(x).$$

2. Конечная разность суммы двух функций равняется сумме конечных разностей этих функций.

Имеем

$$\Delta[f(x) + \varphi(x)] = [f(x+h) + \varphi(x+h)] - [f(x) + \varphi(x)] = [f(x+h) - f(x)] + [\varphi(x+h) - \varphi(x)] = \Delta f(x) + \Delta \varphi(x).$$

3. Конечная разность от целого многочлена  $m$ -й степени есть многочлен  $(m-1)$ -й степени.

Имеем многочлен  $m$ -й степени

$$P_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Составим конечную разность этого многочлена

$$\begin{aligned} \Delta P_m(x) &= P_m(x+h) - P_m(x) = [a_m(x+h)^m + a_{m-1}(x+h)^{m-1} + \dots + \\ &+ a_1(x+h) + a_0] - [a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0]. \end{aligned}$$

Так как

$$a_m(x+h)^m = a_m(x^m + mx^{m-1}h + \dots),$$

то легко видеть, что в выражении для  $\Delta P_m(x)$  член со старшей степенью  $a_m x^m$  сократится и мы получим многочлен  $(m-1)$ -й степени.

Применяя указанное свойство ко второй разности, получим, что вторая разность от многочлена  $m$ -й степени есть многочлен  $(m-2)$ -й степени.

Аналогично получим, что  $m$ -я разность от многочлена  $m$ -й степени есть многочлен нулевой степени, т. е. постоянное число, и  $(m+1)$ -я разность равна нулю. Например, для функции  $y = x^3 - 4x^2 + 5$  получим следующую таблицу разностей (табл. 18).

Таблица 18

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	5	-3	-2	6
1	2	-5	4	6
2	-3	-1	10	6
3	-4	9	16	
4	5	25		
5	30			

В данном случае разности четвертого и выше порядков равны нулю. Если функция  $y = f(x)$  не является целым многочленом, то указанное свойство не имеет места, однако при тех интервалах аргументов, которые обычно применяются при табличном задании функций, разности четвертого и выше порядков пренебрежимо малы.

### § 73. Интерполяция. Интерполирующая функция

Пусть некоторая функция  $y = f(x)$  задана таблично для значений аргумента через некоторый интервал  $h$ . Задача интерполяции заключается в отыскании промежуточных значений функции для значений аргумента, не содержащихся в таблице.

Простейший способ интерполяции заключается в составлении пропорции

$$\frac{y - y_n}{\Delta y_n} = \frac{x - x_n}{h}$$

или

$$y = y_n + \frac{x - x_n}{h} \Delta y_n;$$

где  $x_n$  — ближайшее меньшее значение аргумента, а  $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ .

Подобное интерполяирование называют линейным, так как оно равнозначно замене на участке интерполяции кривой действительной функции прямой, проходящей через концы участка.

Ошибка от линейного интерполяирования будет тем меньшей, чем меньше интервал помещаемых в таблице величин. Обычно интервал аргумента в таблицах выбирается таким, чтобы ошибки от линейного интерполяирования были пренебрежимо малы. Однако это не всегда возможно. Например, если функция  $y = f(x)$  определяется экспериментально путем постановки трудоемких и дорогостоящих опытов, то число полученных опытных точек будет ограниченным и интервал табличных значений этой функции будет сравнительно большим. При этих условиях линейное интерполяирование приводит к существенным погрешностям. В подобных случаях интерполяция производится при помощи специальных функций, называемых интерполирующими функциями.

Пусть  $y = f(x)$  — функция, заданная таблично для  $m+1$  значений аргумента

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_m,$$

Будем называть интерполирующей по отношению к функции  $y=f(x)$  такую функцию  $F(x)$ , которая удовлетворяет следующим двум условиям (черт. 58):

1. Кривая функции  $F(x)$  должна проходить через все заданные точки, т. е. должны иметь место зависимости

$$F(x_i) = f(x_i)$$

для  $i=0; 1; 2; \dots; m$ .

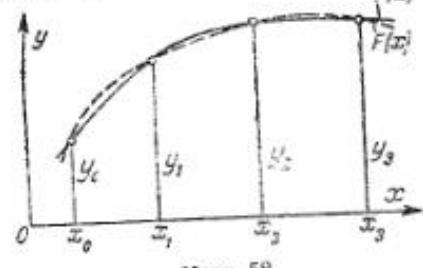
В промежутках между этими точками кривые  $f(x)$  и  $F(x)$  могут естественно, расходиться.

2. Функция  $F(x)$  должна выражаться многочленом степени не выше  $m$ -й, т. е. степень многочлена должна быть на единицу меньше числа заданных точек.

Первое условие не нуждается в пояснениях.

Второе условие выражает требование, чтобы кривая интерполирующей функции была возможно более плавной и имела минимальное количество точек перегиба. Действительно, в случае двух заданных точек целесообразно провести через эти точки прямую; в случае задания трех точек естественно провести через них кривую второго порядка и т. д.; это выражается вторым условием.

Если удастся подобрать такую функцию  $F(x)$ , которая удовлетворяет поставленным двум условиям, то ее и будем применять для отыскания промежуточных значений функции  $f(x)$ , принимая  $F(x) \approx f(x)$ .



#### § 74. Интерполирующая функция Лагранжа

Лагранж предложил следующую формулу в качестве интерполирующей функции:

$$F(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_m)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_m)} y_1 + \cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\cdots(x_m-x_{m-1})} y_m.$$

Нетрудно подметить порядок составления функции Лагранжа. Эта функция состоит из  $(m+1)$  слагаемых, каждое из которых имеет множителем одно из заданных значений функции. Коэффициент при  $y_i$  представляет собой дробь, имеющую в числителе и знаменателе по  $m$  множителей. Числитель имеет вид произведения

$$(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_i),$$

в котором пропущен множитель  $x-x_i$ .

Например, в первом слагаемом пропущен множитель  $(x-x_0)$ , во втором — множитель  $(x-x_1)$  и т. д.

Знаменатель дроби получается в результате подстановки в числитель значения  $x=x_i$ .

Легко видеть, что функция Лагранжа удовлетворяет условиям, предъявляемым к интерполирующей функции. Действительно, числитель каждой дроби состоит из  $m$  множителей вида  $(x-x_i)$ , т. е. является многочленом  $m$ -й степени, а знаменатель — постоянное число. Следовательно, функция Лагранжа является многочленом  $m$ -й степени.

Далее при подстановке в формулу Лагранжа  $x=x_0$  первая дробь обращается в единицу, а остальные в нули. При этом получаем  $F(x_0)=y_0$ .

Аналогично получаем  $F(x_i)=y_i$  для  $i=1; 2; \dots; m$ , т. е. кривая функции Лагранжа проходит через все заданные точки.

Заметим в заключение, что для применения интерполирующей функции Лагранжа не обязательно постоянство шага аргумента для заданных значений функции.

**Пример.** Составим интерполирующую функцию, отвечающую следующим значениям заданных точек (см. табл. 18):

x	0	1	3	5
y	5	2	-4	30

Имеем

$$F(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(0-1)(0-3)(0-5)} 5 + \frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{(1-0)(1-3)(1-5)} 2 + \frac{(x-0)(x-1)(x-5)}{(3-0)(3-1)(3-5)} (-4) + \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(5-0)(5-1)(5-3)} 30.$$

После простейших преобразований получим

$$F(x) = x^3 - 4x^2 - 5.$$

#### § 75. Единственность интерполирующей функции

Докажем, что существует только одна интерполирующая функция, отвечающая заданным значениям функции. Пусть  $f(x)$  — действительная функция, а  $F(x)$  — интерполирующая, причем согласно условию для интерполирующей функции должно соблюдаться условие

$$F(x_i) = f(x_i) \quad (1)$$

для значений

$$i=0; 1; 2; \dots; m.$$

Предположим, что нам удалось подобрать еще одну интерполирующую функцию  $\varphi(x)$ , удовлетворяющую тем же условиям. При этом будем иметь аналогично

$$\varphi(x_i) = f(x_i) \quad (2)$$

для

$$i=0; 1; 2; \dots; m.$$

Сравнивая последние равенства, получим

$$\varphi(x_i) - F(x_i) = 0 \quad (3)$$

для

$$i=0; 1; 2; \dots; m.$$

Составим новую функцию

$$\phi(x) = \varphi(x) - F(x)$$

и исследуем свойства этой функции.

Так как  $\varphi(x)$  и  $F(x)$  являются многочленами  $m$ -й степени, то и  $\phi(x)$  будет многочленом степени не выше  $m$ -й. С другой стороны, из выражения (3) следует, что функция  $\phi(x)$  обращается в нуль при  $m+1$  значении аргумента:  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_m$ , т. е. имеет  $m+1$  корень. Но так как многочлен  $m$ -й степени не может иметь больше  $m$  корней, то мы пришли к противоречию. Следовательно, исходные наши предпосылки незерны, и другой интерполирующей функции не может быть или же должно иметь место тождественное равенство

$$\varphi(x) \equiv F(x).$$

### § 76. Составление интерполирующей функции при постоянном шаге аргумента

Интерполирующая функция Лагранжа может быть применена при постоянном или переменном шаге аргумента, однако ее применение связано с громоздкими вычислениями. В случае постоянного шага можно получить интерполирующие функции в более удобном для расчетов виде, используя таблицу конечных разностей.

Пусть требуется интерполированием определить некоторое значение функции  $y$ , отвечающее аргументу  $x$ . Выберем нумерацию элементов в таблице разностей таким образом, чтобы

$$x_n < x < x_{n+1}.$$

Далее, за аргумент вместо  $x$  примем переменную  $\xi$ :

$$\xi = \frac{x - x_n}{h}, \quad (4)$$

являющуюся интерполирующим множителем при линейном интерполяции.

Придавая аргументу  $x$  последовательные значения  $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$  и т. д., получим

$$\xi_n = \frac{x_n - x_n}{h} = 0,$$

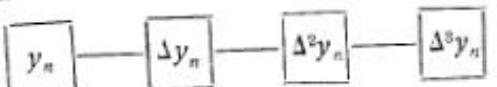
$$\xi_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x_n}{h} = 1,$$

$$\xi_{n+2} = \frac{x_{n+2} - x_n}{h} = 2,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\xi_{n+k} = \frac{x_{n+k} - x_n}{h} = k.$$

Таким образом при изменении  $x$  на один шаг  $\xi$  меняется на единицу. Выберем в таблице разностей горизонтальную строку последовательных элементов



и составим функцию следующего вида:

$$F(x) = y_n + \frac{\xi}{1!} \Delta y_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2!} \Delta^2 y_n + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{3!} \Delta^3 y_n. \quad (5)$$

Докажем, что эта функция является интерполирующей для заданных значений функции  $y_n - y_{n+3}$ . Из таблицы разностей

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$x_n$	$y_n$	$\Delta y_n$	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$
$x_{n+1}$	$y_{n+1}$	$\Delta y_{n+1}$	$\Delta^2 y_{n+1}$	
$x_{n+2}$	$y_{n+2}$	$\Delta y_{n+2}$		
$x_{n+3}$	$y_{n+3}$			

ясно, что задание горизонтальной строки  $y_n, \Delta y_n, \Delta^2 y_n, \Delta^3 y_n$  равносильно заданию четырех значений функции  $y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}$ . Действительно, имея заданной горизонтальной строку, мы можем написать

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_n + \Delta^3 y_n &= \Delta^2 y_{n+1}, \\ \Delta y_n + \Delta^2 y_n &= \Delta y_{n+1}.\end{aligned}$$

Производя аналогичным образом суммирование, можно справа налево заполнить всю таблицу конечных разностей и получить значения функции  $y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3}$ .

Функция (5) является многочленом третьей степени относительно  $\xi$ , а следовательно, и относительно  $x$ .

Покажем, что кривая функции (5) проходит через четыре заданные точки. Действительно, подставляя в выражение функции (5) значения

$$x = x_n \text{ и } \xi_n = 0,$$

получим

$$F(x_n) = y_n.$$

Подставляя сюда

$$x = x_{n+1}, \xi_{n+1} = 1,$$

получим

$$F(x_{n+1}) = y_n + \Delta y_n = y_{n+1}.$$

При

$$x = x_{n+2}, \xi_{n+2} = 2$$

получим

$$F(x_{n+2}) = y_n + 2 \Delta y_n + \Delta^2 y_n = (y_n + \Delta y_n) + (\Delta y_n + \Delta^2 y_n) = y_{n+1} + \Delta y_{n+1} = y_{n+2}.$$

При

$$x = x_{n+3}, \xi_{n+3} = 3$$

получим

$$\begin{aligned}F(x_{n+3}) &= y_n + 3 \Delta y_n + 3 \Delta^2 y_n + \Delta^3 y_n = (y_n + \Delta y_n) + 2(\Delta y_n + \Delta^2 y_n) + \\ &+ (\Delta^2 y_n + \Delta^3 y_n) = y_{n+1} + 2 \Delta y_{n+1} + \Delta^2 y_{n+1} = (y_{n+1} + \Delta y_{n+1}) + \\ &+ (\Delta y_{n+1} + \Delta^2 y_{n+1}) = y_{n+2} + \Delta y_{n+2} = y_{n+3},\end{aligned}$$

**Пример 1.** Требуется составить интерполирующую функцию для следующих значений функции (см. табл. 18):

$x$	0	1	2	3
$y$	5	2	-3	-4

Составляем таблицу конечных разностей

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	5	-3	-2	6
1	2	-5	+4	
2	-3	-1		
3	-4			

Принимаем  $x_n = 0$ ; при этом, так как  $h = 1$ , получим

$$\xi = \frac{x - x_n}{h} = x.$$

Составляем интерполирующую функцию (5) по элементам горизонтальной строки

$$5; -3; -2; 6.$$

Получим

$$F(x) = 5 + \frac{x}{1}(-3) + \frac{x(x-1)}{2}(-2) + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \cdot 6.$$

После соответствующих преобразований получим

$$F(x) = x^3 - 4x^2 + 5.$$

**Пример 2.** По данным опытных стрельб получены следующие значения полных горизонтальных дальностей для различных углов бросания:

$\theta_0$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
X	6427	9360	11200	12000

Требуется определить значение X для  $\theta_0 = 15^\circ$ . Составляем таблицу разностей

$\theta_0$	X	$\Delta X$	$\Delta^2 X$	$\Delta^3 X$
$10^\circ$	6427	2933	-1093	53
$20^\circ$	9360	1840	-1040	
$30^\circ$	11200	800		
$40^\circ$	12000			

Составляем интерполирующую функцию по элементам горизонтальной строки

$$F(\theta_0) = 6427 + \xi \cdot 2933 + \frac{\xi(\xi-1)}{2} (-1093) + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{6} \cdot 53.$$

Для значения  $\theta_0 = 15^\circ$  имеем

$$\xi = \frac{\theta_0 - \theta_0}{h} = \frac{15 - 10}{10} = 0,5.$$

Принимая  $X_{15^\circ} = F(15^\circ)$ , получим

$$X_{15^\circ} = 6427 + 0,5 \cdot 2933 + \frac{0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,5}{2} \cdot 1093 + \frac{0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,5 \cdot 2,5}{6} \cdot 53 = 6427 + 1466 + 136 + 3 = 8033 \text{ м.}$$

Заметим, что при линейном интерполировании мы получили бы

$$X_{15^\circ} = 6427 + 1466 = 7893 \text{ м.}$$

### S 77. Интерполирующие функции, отвечающие различным строкам последовательных элементов

Интерполирующие функции можно составить, исходя из любой строки последовательных элементов, а не только из горизонтальной строки. При этом необходимо иметь в виду, что различные строки базируются на различных заданных значениях функции. Например, если горизонтальная строка базируется на значениях функции

$$y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+3},$$

то из таблицы разностей

x	y	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$x_{n-3}$	$y_{n-3}$	$\Delta y_{n-3}$	$\Delta^2 y_{n-3}$	$\Delta^3 y_{n-3}$
$x_{n-2}$	$y_{n-2}$	$\Delta y_{n-2}$	$\Delta^2 y_{n-2}$	
$x_{n-1}$	$y_{n-1}$	$\Delta y_{n-1}$	$\Delta^2 y_{n-1}$	
$x_n$	$y_n$			

видно, что наклонная строка  $y_n, \Delta y_{n-1}, \Delta^2 y_{n-2}, \Delta^3 y_{n-3}$  базируется на значениях функции

$$y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3}.$$

Для различных строк получаем следующие интерполирующие функции:

Интерполирующая функция	Символ строки
Горизонтальная строка $y = y_n + \xi \Delta y_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2} \Delta^2 y_n + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{6} \Delta^3 y_n$	○—○—○—○
Наклонная строка $y = y_n + \xi \Delta y_{n-1} + \frac{(\xi+1)\xi}{2} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{(\xi+2)(\xi+1)\xi}{6} \Delta^3 y_{n-3}$	○—○○—○○—○
Ломаная строка $y = y_n + \xi \Delta y_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2} \Delta^2 y_{n-1} + \frac{(\xi+1)\xi(\xi-1)}{6} \Delta^3 y_{n-1}$	○—○○—○—○○—○
Ломаная строка $y = y_n + \xi \Delta y_{n-1} + \frac{(\xi+1)\xi}{2} \Delta^2 y_{n-1} + \frac{(\xi+1)\xi(\xi-1)}{6} \Delta^3 y_{n-2}$	○○—○○—○—○○—○

Нетрудно заметить следующее правило составления интерполирующих функций:

1. Интерполирующая функция состоит из ряда слагаемых, каждое из которых содержит множителем по одному элементу строки разностей.

Каждый элемент, начиная со второго, умножается на некоторую дробь.

2. Знаменателем дроби является факториал, порядок которого равен порядку разности  $\Delta^m y$  соответствующего элемента.

3. Числитель дроби состоит из ряда множителей вида  $(\xi + i)$ . Число множителей равно порядку разности  $\Delta^m y$  соответствующего элемента. Каждый последующий множитель на единицу меньше предыдущего.

4. Первый множитель числителя равен  $(\xi - k)$ , где  $k$  — индекс элемента предыдущего слагаемого.

Например, в третьем слагаемом формулы наклонной строки элемент  $\Delta^2 y_{n-2}$  имеет индекс  $k = -2$ . При этом числитель в следующем слагаемом начинается с множителя  $(\xi - k) = (\xi + 2)$ , а далее идут множители, уменьшающиеся на единицу ( $\xi + 1$ ) и  $\xi$ .

Аналогично тому, как это сделано для формулы горизонтальной строки, можно доказать, что функции, составленные по указанному правилу, являются интерполирующими.

Помимо интерполирующих функций, приведенных в таблице, можно составить и другие формулы, получающиеся путем комбинирования основных функций. К подобным функциям относится формула Бесселя для интерполяции на середину

$$y_{\frac{n}{2}} = \frac{y_n + y_{n+1}}{2} - \frac{1}{16}(\Delta^2 y_n + \Delta^2 y_{n+1}) + \frac{1}{86}(\Delta^4 y_{n-1} + \Delta^4 y_{n+2}).$$

Отбрасывая в последней формуле члены с четвертыми разностями

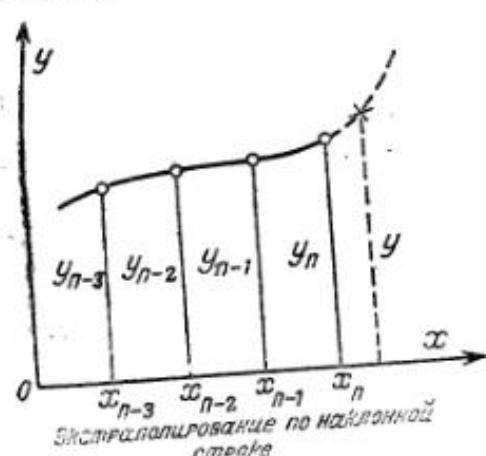
$$y_{\frac{n}{2}} = \frac{y_n + y_{n+1}}{2} - \frac{1}{16}(\Delta^2 y_n + \Delta^2 y_{n+1}), \quad (6)$$

получаем точность формулы до третьих разностей включительно, хотя эти разности в формулу явно и не входят.

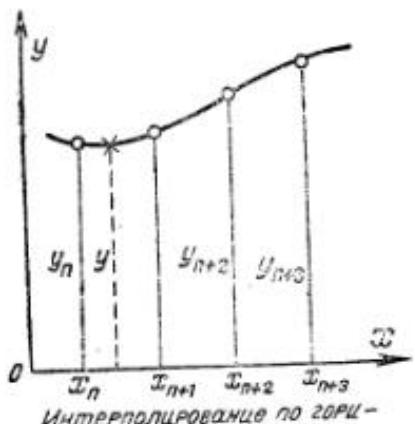
Точность различных интерполирующих функций примерно одинакова, за исключением формулы наклонной строки, являющейся по существу экстраполяционной и поэтому менее точной формулой. Действительно, формула наклонной строки базируется на элементах

$$y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n-3},$$

в то время как интерполяция ведется для интервала аргумента  $x_n - x_{n+1}$  (черт. 59). При этом искомая точка  $(x, y)$  находится вне интервала заданных точек.



Черт. 59



Черт. 60

При интерполяции же по формулам горизонтальной или ломаной строки искомая точка находится внутри интервала заданных точек, как это показано на черт. 60 для горизонтальной строки.

*Пример.*

Имеется таблица тангенсов для значений углов через  $10'$ . Требуется определить значение  $\operatorname{tg} 88^{\circ}35'$ .

Составим таблицу разностей

$\theta$	$y = \operatorname{tg} \theta$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$88^{\circ}00'$	28,64	2,60	0,53	0,16
$10'$	31,24	3,13	0,69	0,26
$20'$	34,37	3,82	0,95	0,42
$30'$	38,19	4,77	1,37	0,68
$40'$	42,96	6,14	2,05	
$50'$	49,10	8,19		
$89^{\circ}00'$	57,29			

Так как интерполяция ведется в интервале углов  $88^{\circ}30'$  и  $88^{\circ}40'$ , то за  $n$ -е значение аргумента принимаем  $\theta_n = 88^{\circ}30'$ . При этом получаем

$$\xi = \frac{\theta - \theta_n}{h} = \frac{88^{\circ}35' - 88^{\circ}30'}{10'} = 0,5.$$

По формуле горизонтальной строки получаем для угла  $\theta = 88^{\circ}35'$

$$\operatorname{tg} \theta = 38,19 + 0,5 \cdot 4,77 + \frac{0,5(-0,5)}{2} \cdot 1,37 + \frac{0,5(-0,5)(-1,5)}{6} \cdot 0,68 = \\ = 38,19 + 2,38 - 0,17_1 + 0,04_2 = 40,45.$$

По формуле для наклонной строки получаем

$$\operatorname{tg} \theta = 38,19 + 0,5 \cdot 3,82 + \frac{1,5 \cdot 0,5}{2} \cdot 0,69 + \frac{2,5 \cdot 1,5 \cdot 0,5}{6} \cdot 0,16 = \\ = 38,19 + 1,91 + 0,25_0 + 0,05 = 40,41.$$

При линейной интерполяции получаем

$$\operatorname{tg} \theta = 38,19 + 2,38 = 40,57.$$

По таблицам тригонометрических функций находим непосредственно

$$\operatorname{tg} 88^{\circ}35' = 40,44.$$

### § 78. Обратное интерполярование

Задача обратного интерполярования заключается в отыскании значения аргумента, отвечающего некоторому промежуточному значению функции, заданной таблично.

При линейном интерпользовании обратное интерполовование не вызывает никаких затруднений и базируется на той же пропорции

$$\frac{y - y_n}{\Delta y_n} = \frac{x - x_n}{h},$$

из которой получаем

$$x = x_n + \frac{y - y_n}{\Delta y_n} h.$$

При использовании интерполирующих функций, например, формулы горизонтальной строки

$$y = y_n + \xi \Delta y_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2} \Delta^2 y_n + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{6} \cdot \Delta^3 y_n, \quad (7)$$

необходимо из этой формулы определить значение  $\xi$ , а затем найти  $x$  из выражения

$$x = x_n + \xi h.$$

Для того чтобы избежать решения уравнения третьей степени при определении  $\xi$ , можно воспользоваться методом последовательных приближений, заключающимся в следующем.

Из выражения (7) определяем величину  $\xi$ , входящую во второе слагаемое правой части. Получим

$$\xi = \frac{y - y_n}{\Delta y_n} - \frac{\xi(\xi-1)}{2} \frac{\Delta^2 y_n}{\Delta y_n} - \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{6} \frac{\Delta^3 y_n}{\Delta y_n}. \quad (8)$$

В первом приближении отбрасываем последние слагаемые правой части

$$\xi_1 = \frac{y - y_n}{\Delta y_n}.$$

Во втором приближении подставляем в правую часть равенства (8) значение  $\xi_1$  из первого приближения

$$\xi_2 = \frac{y - y_n}{\Delta y_n} - \frac{\xi_1(\xi_1-1)}{2} \frac{\Delta^2 y_n}{\Delta y_n} - \frac{\xi_1(\xi_1-1)(\xi_1-2)}{6} \frac{\Delta^3 y_n}{\Delta y_n}.$$

Аналогичным образом можно получить третье приближение, подставляя  $\xi_2$  в правую часть равенства (8). На практике обычно ограничиваются вторым приближением, принимая  $\xi = \xi_2$ , после чего определяют  $x$  из выражения  $x = x_n + \xi h$ .

**Пример.** Исходя из таблицы тангенсов, приведенной в предыдущем параграфе, определить арг  $\arctg 29,75$ .

Значение  $\arctg 29,75$  в таблице отвечает значению угла  $\theta$  между  $88^\circ 00'$  и  $88^\circ 10'$ . Принимаем  $\theta_n = 88^\circ 00'$ . Получим

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{29,75 - 28,64}{2,60} = 0,427, \\ \xi_2 &= 0,427 - \frac{0,427(-0,573)}{2} \frac{0,53}{2,60} - \frac{0,427(-0,573)(-1,573)}{6} \cdot \frac{0,16}{2,60} = \\ &= 0,427 + 0,025 - 0,004 = 0,448, \\ &= 88^\circ 00' + 0,448 \cdot 10' = 88^\circ 4,4'. \end{aligned}$$

### § 79. Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования заключается в отыскании производных от функций, заданных таблично.

Так как аналитический вид функции  $y = f(x)$  неизвестен, то заменяем ее интерполирующей функцией  $Y = F(x)$  и дифференцируем последнюю.

Выпишем формулу горизонтальной строки

$$\begin{aligned} y &= y_n + \xi \Delta y_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2} \Delta^2 y_n + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{6} \cdot \Delta^3 y_n = \\ &= y_n + \xi \Delta y_n + \frac{1}{2} (\xi^2 - \xi) \Delta^2 y_n + \frac{1}{6} (\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) \Delta^3 y_n. \end{aligned}$$

Имея в виду, что

$$\xi = \frac{x - x_n}{h},$$

$$y'_x = y'_\xi \xi'_x = y'_\xi \frac{1}{h},$$

и дифференцируя интерполирующую функцию, получим

$$y'_x = \frac{1}{h} [\Delta y_n + \frac{1}{2} (2\xi - 1) \Delta^2 y_n + \frac{1}{6} (3\xi^2 - 6\xi + 2) \Delta^3 y_n]. \quad (9)$$

Если требуется найти значение производной для одной из точек, заданных в таблице, то, приняв соответствующее значение аргумента за  $x_n$ , получим соответствующее значение  $\xi = \xi_n = 0$  и из выражения (9) найдем

$$y'_n = \frac{1}{h} \left( \Delta y_n - \frac{1}{2} \Delta^2 y_n + \frac{1}{3} \Delta^3 y_n \right). \quad (10)$$

Если дифференцировать формулу первой линейной строки

$$y = y_n + \xi \Delta y_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2} \Delta^2 y_{n-1} + \frac{(\xi+1)\xi(\xi-1)}{6} \Delta^3 y_{n-1},$$

то аналогично получим

$$y'_n = \frac{1}{h} \left( \Delta y_n - \frac{1}{2} \Delta^2 y_{n-1} - \frac{1}{6} \Delta^3 y_{n-1} \right). \quad (11)$$

Если учитывать только разности второго порядка, то из выражения (11) найдем

$$y'_n = \frac{1}{h} \left( \Delta y_n - \frac{1}{2} \Delta^2 y_{n-1} \right) = \frac{1}{h} \left[ \Delta y_n - \frac{1}{2} (\Delta y_n - \Delta y_{n-1}) \right]$$

или

$$y'_n = \frac{\Delta y_n + \Delta y_{n-1}}{2h}. \quad (12)$$

Учитывая, что  $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$  и  $\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$ , можно выражение (12) переписать еще в следующем виде:

$$y'_n = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}. \quad (13)$$

Для вычисления второй производной  $y''_x$  достаточно проинтегрировать выражение (9)

$$y''_x = \frac{1}{h^2} [\Delta^2 y_n + (\xi-1) \Delta^3 y_n]$$

или, подставляя  $x = x_n$  и  $\xi_n = 0$ , получим

$$y''_n = \frac{1}{h^2} [\Delta^2 y_n - \Delta^3 y_n].$$

С чисто принципиальной точки зрения можно численным дифференцированием определять производные и более высоких порядков. Следует, однако, иметь в виду, что численное дифференцирование — это операция, по существу своему менее точная, чем интерполяция. Двукратное дифференцирование еще более понижает точность результата. При дальнейшем дифференцировании ошибки вычисления могут превосходить величину самой производной. На практике даже вторую производную редко удается численным дифференцированием получить с удовлетворительной точностью.

**Пример.** Заданы точки траектории

x	2000	2500	3000	3500	4000
y	1548	1884	2195	2479	2733

Требуется определить угол наклона касательной в точке траектории, отвечающей  $x = 2500$ .

Так как  $\tan \theta = y'_n$ , то задача сводится к нахождению производной методом численного дифференцирования.

Составим таблицу разностей

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2000	1548	336	-25	-2
2500	1884	311	-27	-3
3000	2195	284	-30	
3500	2479	254		
4000	2733			

Принимая  $x_n = 2500$ , получим по формуле (10)

$$y'_n = \frac{1}{500} \left( 311 + \frac{1}{2} 27 - \frac{1}{3} 3 \right) = 0,647,$$

$$\theta = 32^\circ 54';$$

по формуле (11)

$$y'_n = \frac{1}{500} \left( 311 + \frac{1}{2} 25 + \frac{1}{6} 2 \right) = 0,647_6,$$

$$\theta = 32^\circ 56';$$

по формуле (13)

$$y'_n = \frac{2195 - 1548}{2 \cdot 500} = 0,647,$$

$$\theta = 32^\circ 54'.$$

### § 80. Численное интегрирование функций

Задача численного интегрирования функций заключается в вычислении определенного интеграла функции, заданной таблично.

Так как аналитический вид действительной функции  $y = f(x)$  неизвестен, то заменяют ее интерполирующей функцией  $Y = F(x)$ .

Пусть требуется вычислить определенный интеграл в пределах  $x_n$ ,  $x_{n+1}$ . Обозначим

$$\Delta J_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y dx,$$

Для горизонтальной строки имеем

$$y = y_n + \xi \Delta y_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2} \Delta^2 y_n + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{6} \Delta^3 y_n.$$

Так как независимой переменной в этой формуле является  $\xi$ , то надо произвести соответствующую замену переменных в определенном интеграле

$$x = x_n + \xi h; \quad dx = h d\xi;$$

при этом

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y dx = h \int_0^1 y d\xi,$$

Подставляя значение  $y$  из интерполирующей функции, получим

$$\Delta J_n = h \int_0^1 \left[ y_n + \xi \Delta y_n + \frac{1}{2} (\xi^2 - \xi) \Delta^2 y_n + \frac{1}{6} (\xi^3 - 3\xi^2 + 2\xi) \Delta^3 y_n \right] d\xi =$$

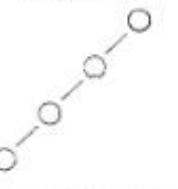
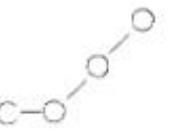
$$= h \left[ y_n + \frac{\xi^2}{2} \Delta y_n + \frac{1}{2} \left( \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi^2}{2} \right) \Delta^2 y_n + \frac{1}{6} \left( \frac{\xi^4}{4} - \xi^3 + \frac{\xi^2}{2} \right) \Delta^3 y_n \right]_0^1.$$

Подставляя значение верхнего предела  $\xi = 1$ , получим окончательно:

$$\Delta J_n = h \left( y_n + \frac{1}{2} \Delta y_n - \frac{1}{12} \Delta^2 y_n + \frac{1}{24} \Delta^3 y_n \right).$$

Применяя интерполирующие функции для различных строк, получим различные формулы численного интегрирования. Наиболее употребительные формулы приведены в табл. 19.

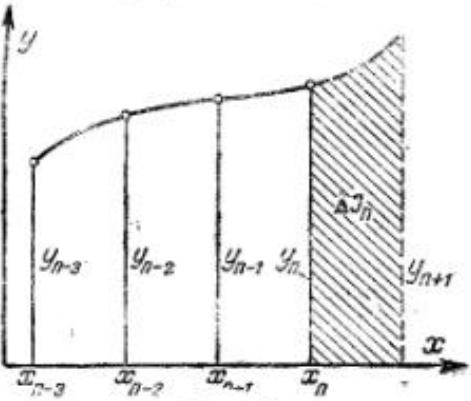
Таблица 19

Наименование и символ строки	Формула численного интегрирования функций
Горизонтальная ○—○—○—○	$\Delta J_n = h \left( y_n + \frac{1}{2} \Delta y_n - \frac{1}{12} \Delta^2 y_n + \frac{1}{24} \Delta^3 y_n \right)$
Наклонная 	$\Delta J_n = h \left( y_n + \frac{1}{2} \Delta y_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 y_{n-3} \right)$
Ломаная 	$\Delta J_n = h \left( y_n + \frac{1}{2} \Delta y_n - \frac{1}{12} \Delta^2 y_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 y_{n-2} \right)$

Из этих формул наименее точной является формула наклонной (экстраполационной) строки. Действительно, применяя эту формулу, мы интегрируем в пределах от  $x_n$  до  $x_{n+1}$ , не имея значений функции  $y_{n+1}$ , а базируясь лишь на характере кривой для значений  $x \leq x_n$  (черт. 61).

В остальных двух формулах используется значение  $y_{n+1}$ , так как  $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ .

Меньшая точность формулы наклонной строки видна из рассмотрения коэффициентов при различиях различных порядков. В формулах горизонтальной и ломаной строк эти коэффициенты быстро убывают с увеличением порядка разностей, так что во многих случаях можно даже не учитывать разность третьего порядка (коэффициент  $\frac{1}{24}$ ). Для четвертой разности коэффициент получается рав-



Черт. 61

ним  $\frac{19}{720} \approx \frac{1}{38}$ . В формуле для наклонной строки коэффициенты медленно убывают, так что даже для четвертой, неучитываемой обычно, разности этот коэффициент равен  $\frac{251}{720} \approx 0,35$  (вместо  $\frac{3}{8} = 0,375$  для третьей разности). Поэтому во всех случаях, где это возможно, следует избегать применения формулы наклонной строки или же выбирать интервал интегрирования  $x_{n+1} - x_n = h$  настолько малым, чтобы уже третья разность мало влияла на результат вычисления.

**Пример.** Не имея таблиц логарифмов, вычислить логарифмы чисел 1,1; 1,2; 1,3.

Известно, что

$$\ln x = \int_1^x \frac{dx}{x},$$

$$\lg x = \ln x / \ln e = 0,4343 \ln x = \int_1^x \frac{0,4343}{x} dx.$$

Таким образом

$$\lg 1,1 = \int_1^{1,1} \frac{0,4343}{x} dx,$$

$$\lg 1,2 = \lg 1,1 + \int_{1,1}^{1,2} \frac{0,4343}{x} dx,$$

$$\lg 1,3 = \lg 1,2 + \int_{1,2}^{1,3} \frac{0,4343}{x} dx.$$

Обозначим

$$y = \frac{0,4343}{x}$$

и составим таблицу конечных разностей

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1,0	0,4343	-0,0395	0,0066	-0,0015
1,1	0,3948	-0,329	51	
1,2	0,3619	-0,278		
1,3	0,3341			

По формуле горизонтальной строки, принимая  $x_n = 1,0$ , найдем

$$\begin{aligned} \int_1^{1,1} y dx &= 0,1 \left( 0,4343 - \frac{1}{2} 0,0395 - \frac{1}{12} 0,0066 - \frac{1}{24} 0,0015 \right) = \\ &= 0,1 (0,4343 - 0,01975 - 0,00055 - 0,00000) = 0,04139. \end{aligned}$$

Принимая  $x_n = 1,1$ , получим<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \int_1^{1,2} y dx &= 0,1 \left( 0,3948 - \frac{1}{2} 0,0329 - \frac{1}{12} 0,0051 - \frac{1}{24} 0,0015 \right) = \\ &= 0,1 (0,3948 - 0,01645 - 0,00042 - 0,00000) = 0,03779. \end{aligned}$$

<sup>1</sup> В данном случае используется строка элементов вида

По формуле для ломаной строки, принимая  $x_n = 1,2$ , найдем

$$\begin{aligned} \int_1^{1,3} y dx &= 0,1 \left( 0,3619 - \frac{1}{2} 0,0278 - \frac{1}{12} 0,0051 + \frac{1}{24} 0,0015 \right) = \\ &= 0,1 (0,3619 - 0,0139 - 0,00042 + 0,00000) = 0,03476. \end{aligned}$$

Значения логарифмов получим соответственно

$$\lg 1,1 = 0,04139;$$

$$\lg 1,2 = 0,04139 + 0,03779 = 0,07918;$$

$$\lg 1,3 = 0,07918 + 0,03476 = 0,11394,$$

что совпадает со значениями этих величин по пятизначным таблицам логарифмов.

Из приведенного примера видно, что численное интегрирование является операцией более точной, чем интерполяция. Действительно, имея значение подинтегральной функции с четырьмя значащими цифрами, мы получили значение интеграла с точностью, отвечающей пяти значащим цифрам.

### S 81. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

Приведенные в предыдущем параграфе формулы численного интегрирования позволяют вычислить приращение определенного интеграла, если заданы численные значения функции для значений аргумента, изменяющихся через постоянный шаг  $h$ . Очевидно, что эти формулы можно применить и для того случая, когда вместо функции  $u$  заданы значения производной  $y'_x$ . Выпишем формулу для горизонтальной строки

$$\Delta J_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y dx = h \left( y_n + \frac{1}{2} \Delta y_n - \frac{1}{12} \Delta^2 y_n + \frac{1}{24} \Delta^3 y_n \right).$$

Подставляя вместо  $y$  значения  $y'_x$  и учитывая, что

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'_x dx = \int_{y_n}^{y_{n+1}} dy = y_{n+1} - y_n = \Delta y_n,$$

получим для горизонтальной строки

$$\Delta y_n = h \left( y'_n + \frac{1}{2} \Delta y'_n - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_n + \frac{1}{24} \Delta^3 y'_n \right), \quad (14)$$

для наклонной строки

$$\Delta y_n = h \left( y'_n + \frac{1}{2} \Delta y'_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 y'_{n-3} \right), \quad (15)$$

для ломаной строки

$$\Delta y_n = h \left( y'_n + \frac{1}{2} \Delta y'_n - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 y'_{n-2} \right). \quad (16)$$

Полученные формулы могут быть использованы для численного интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка.

Предположим, что требуется проинтегрировать уравнение

$$y'_x = f(x, y) \quad (17)$$

при начальных условиях  $x = x_0$  и  $y = y_0$ .

Предположим, что нам каким-то образом удалось найти еще три значения функции  $y_1, y_2, y_3$ , отвечающие соответствующим значениям аргумента  $x_1, x_2, x_3$ , изменяющимся через постоянный шаг. (В дальнейшем мы покажем, как эти три значения функции определяются.) Имея четыре значения функции, отвечающие соответствующим значениям аргумента, и подставляя эти значения в правую часть дифференциального уравнения (17), вычислим значения производной  $y'_0, y'_1, y'_2, y'_3$ .

Выписываем полученные значения производных в бланк следующего вида (до черты) и составляем таблицу конечных разностей производной (до черты):

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$y'$	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	$\Delta^3 y'$
0	$x_0$	$y_0$		$y'_0$	$\Delta y'_0$	$\Delta^2 y'_0$	$\Delta^3 y'_0$
1	$x_1$	$y_1$		$y'_1$	$\Delta y'_1$	$\Delta^2 y'_1$	$\Delta^3 y'_1$
2	$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$	$y'_2$	$\Delta y'_2$	$\Delta^2 y'_2$	
3	$x_3$	$y_3$		$y'_3$	$\Delta y'_3$		
4	$x_4$	$y_4$		$y'_4$			

Далее, имея наклонную строку производной и ее разностей, мы можем определить  $\Delta y_3$  по формуле для наклонной строки (15)

$$\Delta y_3 = h \left( y'_3 + \frac{1}{2} \Delta y'_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_1 + \frac{3}{8} \Delta^3 y'_0 \right)$$

и подсчитать

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3.$$

Имея  $x_4$  и  $y_4$ , можно определить  $y'_4 = f(x_4, y_4)$ .

Вписав значение  $y'_4$  в бланк и заполнив разности  $\Delta y'_3, \Delta^2 y'_2, \Delta^3 y'_1$ , получим новую наклонную строку, пользуясь которой можно определить  $\Delta y_4$  по формуле (15) и  $y_5 = y_4 + \Delta y_4$ .

Продолжая таким образом процесс вычислений и наращивая все новые строки разностей, мы можем вычислить столько значений функции, сколько требуется.

Следует иметь в виду, что расчеты по методу численного интегрирования производятся обычно без учета четвертых разностей. Поэтому необходимо выбрать интервал аргумента  $h$  таким, чтобы уже разности третьего порядка мало влияли на результаты вычислений.

С другой стороны, в приведенной схеме численного интегрирования нам приходится все время пользоваться формулой наклонной строки. Медленное убывание коэффициентов в этой формуле ведет к необходимости применения малых интервалов аргумента, что увеличивает объем вычислений. Чтобы избежать этого, можно рекомендовать в первом приближении вычислять разности  $\Delta y_n$  по наклонной строке, а затем, нарастив новую строку разностей, пересчитать эту же величину по формуле для ломаной строки. Например, для вычисления  $y_4$  техника расчета получится следующей.

По формуле наклонной строки вычисляем

$$\Delta y_3 = h \left( y'_3 + \frac{1}{2} \Delta y'_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_1 + \frac{3}{8} \Delta^3 y'_0 \right)$$

и определяем

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3,$$

$$y'_4 = f(x_4, y_4).$$

Далее наращиваем новую строку разностей производной

$$y'_4, \Delta y'_3, \Delta^2 y'_2, \Delta^3 y'_1.$$

Теперь имеется возможность вычисленную ранее величину  $\Delta y_3$  пересчитать по формуле для ломаной строки

$$\Delta y_3 = h \left( y'_3 + \frac{1}{2} \Delta y'_2 - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_1 - \frac{1}{24} \Delta^3 y'_0 \right).$$

и уточнить значение

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3.$$

## § 82. Нахождение исходных данных для начала интегрирования

Для того чтобы можно было вести расчет по схеме, указанной в предыдущем параграфе, необходимо знать четыре исходных значения функции. Однако обычно задается только одно начальное значение функции и необходимо каким-то путем определить остальные три значения. Для этого можно применить один из следующих двух методов.

### Метод разложения функции в ряд Тейлора

Исходные значения функции определяются путем разложения  $y$  в ряд по степеням  $(x - x_0)$

$$y = y_0 + (x - x_0)y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2} y''_0 + \frac{(x - x_0)^3}{6} y'''_0 + \dots$$

Значения  $x_0$  и  $y_0$  заданы начальными условиями. Значение  $y'_0$  получается путем подстановки  $x_0$  и  $y_0$  в дифференциальное уравнение

$$y'_x = f(x, y).$$

Для определения  $y''_0, y'''_0, \dots$  необходимо продифференцировать несколько раз последнее уравнение и в полученный результат подставить значения  $x_0, y_0$ .

Подобный метод вычисления исходных значений функции целесообразно применять в тех случаях, когда функция  $f(x, y)$  допускает получение производных несложного аналитического вида или когда расчеты упрощаются применением специальных таблиц.

### Метод последовательных сближений

В начале интегрирования мы располагаем только значениями  $y_0$  и  $y'_0$ :

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$y'$	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	$\Delta^3 y'$
0	$x_0$	$y_0$			$y'_0$		

Для вычисления  $\Delta y_0$  мы имеем только одно слагаемое в формуле численного интегрирования

$$\Delta y_0 = hy'_0.$$

Полученное выражение дает, конечно, весьма неточное значение  $\Delta y_0$ ; сущность метода последовательных сближений заключается в уточнении результата при помощи ряда повторных расчетов.

Исходя из полученного приближенного значения  $\Delta y_0$ , определяем

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

и вычисляем значение производной

$$y'_1 = f(x_1, y_1),$$

после чего бланк расчета получит следующий вид:

	<i>n</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	$\Delta y$	<i>y'</i>	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	$\Delta^3 y'$
Первое сближение	0	$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$y'_0$	$\Delta y'_0$		
	1	$x_1$	$y_1$		$y'_1$			
Начало второго сближения	0	$x_0$	$y_0$		$y'_0$			

На этом первое сближение заканчиваем и начинаем второе сближение с того, что вписываем начальные условия в нулевую строку. Далее, пользуясь элементами, полученными в первом сближении, вычисляем значения  $\Delta y_0$  и  $\Delta y_1$  по двухчленным формулам

$$\Delta y_0 = h(y'_0 + \frac{1}{2} \Delta y'_0),$$

$$\Delta y_1 = h(y'_1 + \frac{1}{2} \Delta y'_0).$$

Полученные значения  $\Delta y_0$  и  $\Delta y_1$  записываем в бланк и вычисляем

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1.$$

Подставляя значения  $y_1$  и  $y_2$  в дифференциальное уравнение, определяем  $y'_1$  и  $y'_2$ , которые записываем в бланк и заполняем таблицу разностей, после чего бланк расчета получит следующий вид:

	<i>n</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	$\Delta y$	<i>y'</i>	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	$\Delta^3 y'$
Первое сближение	0	$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$y'_0$	$\Delta y'_0$		
	1	$x_1$	$y_1$		$y'_1$			
Второе сближение	0	$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$y'_0$	$\Delta y'_0$	$\Delta^2 y'_0$	
	1	$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$y'_1$	$\Delta y'_1$		
	2	$x_2$	$y_2$		$y'_2$			
Начало третьего сближения	0	$x_0$	$y_0$		$y'_0$			

На этом заканчиваем второе сближение и начинаем третье сближение с того, что вписываем начальные условия в нулевую строку.

Далее, пользуясь элементами второго сближения, вычисляем  $\Delta y_0$ ,  $\Delta y_1$ ,  $\Delta y_2$ .

По горизонтальной строке

$$\Delta y_0 = h(y'_0 + \frac{1}{2} \Delta y'_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_0).$$

По ломаной строке

$$\Delta y_1 = h(y'_1 + \frac{1}{2} \Delta y'_1 - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_0).$$

По наклонной строке

$$\Delta y_2 = h(y'_2 + \frac{1}{2} \Delta y'_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_0).$$

Далее вычисляем  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ , а также значения производной  $y'_1$ ,  $y'_2$ ,  $y'_3$  и, вписав в бланк, заполняем разности; после этого бланк расчета примет следующий вид:

<i>n</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	$\Delta y$	<i>y'</i>	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	$\Delta^3 y'$
I	0	$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$y'_0$	$\Delta y'_0$	
	1	$x_1$	$y_1$		$y'_1$		
II	0	$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$y'_0$	$\Delta y'_0$	$\Delta^2 y'_0$
	1	$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$y'_1$	$\Delta y'_1$	
	2	$x_2$	$y_2$		$y'_2$		
III	0	$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0$	$y'_0$	$\Delta y'_0$	$\Delta^2 y'_0$
	1	$x_1$	$y_1$	$\Delta y_1$	$y'_1$	$\Delta y'_1$	$\Delta^2 y'_1$
	2	$x_2$	$y_2$	$\Delta y_2$	$y'_2$	$\Delta y'_2$	$\Delta^2 y'_2$
III	3	$x_3$	$y_3$		$y'_3$		$\Delta^3 y'_3$

На этом заканчивается третье сближение, которое обычно является последним. Далее расчет ведется, как указано в предыдущем параграфе.

### § 83. Пример на численное интегрирование дифференциального уравнения первого порядка

Пусть требуется численно проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'_x = 2x + y$$

при начальных условиях  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 0.1$ .

Шаг аргумента принимаем равным 0.1.

Чтобы облегчить усвоение последовательности расчетов, будем в каждом сближении нумеровать операции. Числа, помещаемые в основном бланке расчетов, будем снабжать в правом верхнем углу цифрами, указывающими номер операции.

#### Первое сближение

Предварительно вписываем в нулевую строку значения  $x_0 = 0$ ;  $y_0 = 0.1$ .

1. Вычисляем

$$y'_0 = 2x_0 + y_0 = 0.100.$$

2. Вычисляем

$$\Delta y_0 = hy'_0 = 0.1 \cdot 0.1 = 0.010,$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0.1 + 0.010 = 0.110.$$

3. Вычисляем

$$y'_1 = 2x_1 + y_1 = 0.2 + 0.110 = 0.310,$$

$$\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0 = 0.310 - 0.100 = 0.210.$$

<i>n</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	$\Delta y$	<i>y'</i>	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	$\Delta^3 y'$
I	0	0	0.100	0.100 <sup>[2]</sup>	0.100 <sup>[1]</sup>	0.210 <sup>[3]</sup>	
	1	0.1	0.110 <sup>[2]</sup>		0.310 <sup>[3]</sup>		

**Второе сближение**

Предварительно вписываем в бланк  $x_0=0$ ;  $y_0=0,1$ ;  $y'_0=0,1$ .

1. Вычисляем

$$\Delta y_0 = h \left( y'_0 + \frac{1}{2} \Delta y'_0 \right) = 0,1 \left( 0,100 + \frac{1}{2} \cdot 0,210 \right) = 0,020,$$

$$\Delta y_1 = h \left( y'_1 + \frac{1}{2} \Delta y'_1 \right) = 0,1 \left( 0,310 + \frac{1}{2} \cdot 0,210 \right) = 0,042.$$

2. Вычисляем

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0,100 + 0,020 = 0,120,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0,120 + 0,042 = 0,162.$$

3. Вычисляем

$$y'_1 = 2x_1 + y_1 = 0,2 + 0,120 = 0,320,$$

$$y'_2 = 2x_2 + y_2 = 0,4 + 0,162 = 0,562.$$

Заполняем таблицу разностей

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$y'$	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	$\Delta^3 y'$
I							
II	0	0,100	0,020 <sup>11</sup>	0,100	0,220 <sup>31</sup>	0,022 <sup>11</sup>	
	1	0,1	0,120 <sup>21</sup>	0,042 <sup>11</sup>	0,320 <sup>31</sup>	0,242 <sup>31</sup>	
	2	0,2	0,162 <sup>21</sup>	0,562 <sup>31</sup>			

**Третье сближение**

Вписываем в бланк начальные условия  $x_0=0$ ;  $y_0=0,1$ ;  $y'_0=0,1$ .

1. Вычисляем

$$\Delta y_0 = h \left( y'_0 + \frac{1}{2} \Delta y'_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_0 \right) = 0,1 \left( 0,100 + \frac{1}{2} \cdot 0,220 - \frac{1}{12} \cdot 0,022 \right) = 0,021,$$

$$\Delta y_1 = h \left( y'_1 + \frac{1}{2} \Delta y'_1 - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_1 \right) = 0,1 \left( 0,320 + \frac{1}{2} \cdot 0,242 - \frac{1}{12} \cdot 0,022 \right) = 0,044,$$

$$\Delta y_2 = h \left( y'_2 + \frac{1}{2} \Delta y'_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_1 \right) = 0,1 \left( 0,562 + \frac{1}{2} \cdot 0,242 + \frac{5}{12} \cdot 0,022 \right) = 0,069.$$

2. Вычисляем

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0,100 + 0,021 = 0,121,$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0,121 + 0,044 = 0,165,$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = 0,165 + 0,069 = 0,234.$$

3. Вычисляем

$$y'_1 = 2x_1 + y_1 = 0,2 + 0,121 = 0,321,$$

$$y'_2 = 2x_2 + y_2 = 0,4 + 0,165 = 0,565,$$

$$y'_3 = 2x_3 + y_3 = 0,6 + 0,234 = 0,834.$$

**Заполняем таблицу разностей (до черты)**

	$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$y'$	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$	$\Delta^3 y'$
I								
II	0	0	0,100	0,021 <sup>11</sup>	0,100	0,221 <sup>31</sup>	0,023 <sup>11</sup>	0,002 <sup>31</sup>
	1	0,1	0,121 <sup>21</sup>	44 <sup>11</sup>	0,321 <sup>31</sup>	0,244 <sup>31</sup>	25 <sup>11</sup>	4 <sup>31</sup>
III	2	0,2	0,165 <sup>21</sup>	69 <sup>11</sup>	0,565 <sup>31</sup>	0,269 <sup>31</sup>	29 <sup>11</sup>	2
	3	0,3	0,234 <sup>21</sup>	98 <sup>11</sup>	0,834 <sup>31</sup>	0,298 <sup>31</sup>	31	4
	4	0,4	0,332 <sup>21</sup>	0,129	1,132 <sup>31</sup>	0,329	35	
	5	0,5	0,451	0,164	1,461	0,364		
	6	0,6	0,625		1,825			

На этом считаем сближение законченным и ведем основной расчет путем постепенного наращивания строчек, например:

$$4. \quad \Delta y_3 = h \left( y'_3 + \frac{1}{2} \Delta y'_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_1 + \frac{3}{8} \Delta^3 y'_0 \right) = \\ = 0,1 (0,834 + 0,134_5 + 0,010_4 + 0,000_3) = 0,098.$$

$$5. \quad y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 0,234 + 0,098 = 0,332.$$

$$6. \quad y'_4 = 2x_4 + y_4 = 0,8 + 0,332 = 1,132.$$

В процессе вычислений целесообразно значения  $\Delta y_n$ , вычисляемые по формуле наклонной строки, проверять по формуле для ломаной строки.

Вспомогательные расчеты удобно вести в специальном бланке следующего типа:

**Вспомогательный бланк**

$n$	...	3	4	5
$y'_n$		0,834	1,132	1,461
$\frac{1}{2} \Delta y'_{n-1}$		134 <sub>5</sub>	0,149	0,164 <sub>3</sub>
$\frac{5}{12} \Delta^2 y'_{n-2}$		10 <sub>4</sub>	12 <sub>1</sub>	13
$\frac{3}{8} \Delta^3 y'_{n-3}$		0 <sub>7</sub>	1 <sub>6</sub>	0 <sub>7</sub>
$\Sigma$		0,979 <sub>5</sub>	1,294	1,639
* $\Delta y_n = h \Sigma$		0,098	0,129	0,164
$2x_{n+1}$		0,800	1,000	1,200
$y_{n+1}$		0,332	0,461	0,625
* $y'_n + 1 = \Sigma$		1,132	1,461	1,825
$y'_n$		0,834	1,132	1,461
$\frac{1}{2} \Delta y'_n$		149	164 <sub>5</sub>	0,182
$-\frac{1}{12} \Delta^2 y'_{n-1}$		-2 <sub>4</sub>	-2 <sub>6</sub>	-3
* $\Delta y_n = h \Sigma$		0,981	1,294	1,640
		0,098	0,129	0,164

Звездочкой отмечены данные вспомогательного бланка, которые должны быть перенесены в основной бланк.

В последних пяти строчках даны поверочные расчеты для  $\Delta u_n$  по ломаной строке; исправлений в величинах  $\Delta u_n$  внести не пришлось.

В рассмотренном примере для определения добавочных трех исходных значений функции мы воспользовались методом последовательных сближений. Определим эти же исходные величины методом разложения функции в ряд Тейлора.

Имеем

$$\begin{aligned} y'_x &= 2x + y; & y'_0 &= 0 + 0,1 = 0,1; \\ y''_x &= 2 + y'_x = 2 + 2x + y; & y''_0 &= 2 + 0,1 = 2,1; \\ y'''_x &= 2 + y'_x - y''_x = 2 + 2x + y; & y'''_0 &= 2,1; \\ y^{IV}_x &= y''_x = 2 + 2x + y; & y^{IV}_0 &= 2,1. \end{aligned}$$

Напишем формулу Тейлора

$$y = y_0 + xy'_0 + \frac{x^2}{2}y''_0 + \frac{x^3}{6}y'''_0 + \frac{x^4}{24}y^{IV}_0$$

или

$$y = 0,1 + 0,1x + \frac{2,1}{2}x^2 + \frac{2,1}{6}x^3 + \frac{2,1}{24}x^4.$$

Вычисляем значения  $y_1$ ,  $y_2$ , и  $y_3$ .

$$\begin{aligned} y_1 &= 0,1 + 0,1 \cdot 0,1 + \frac{2,1}{2}0,01 + \frac{2,1}{6}0,001 + \frac{2,1}{24}0,0001 = \\ &= 0,1 + 0,01 + 0,0105 + 0,0004 + 0 = 0,1209 \approx 0,121. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 0,1 + 0,1 \cdot 0,2 + \frac{2,1}{2}0,04 + \frac{2,1}{6}0,008 + \frac{2,1}{24}0,0016 = \\ &= 0,1 + 0,02 + 0,042 + 0,0028 + 0,0001 = 0,1649 \approx 0,165. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= 0,1 + 0,1 \cdot 0,3 + \frac{2,1}{2}0,09 + \frac{2,1}{6}0,027 + \frac{2,1}{24}0,0081 = \\ &= 0,1 + 0,03 + 0,0945 + 0,0094 + 0,0007 = 0,2346 \approx 0,235. \end{aligned}$$

Из полученных значений функций только  $y_3$  отличается от полученной ранее величины 0,234 на одну единицу последнего знака (точнее на 0,6 единицы последнего знака).

#### § 84. Вычисление траекторий по методу численного интегрирования

Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений первого порядка ничем принципиально не отличается от численного интегрирования одного дифференциального уравнения первого порядка. Техника расчетов будет рассмотрена на примере вычисления траектории. При интегрировании уравнений высших порядков удобно последние свести к системе уравнений первого порядка.

В § 43 были рассмотрены системы дифференциальных уравнений при различных аргументах. Любая из этих систем может быть проинтегрирована по методу численного интегрирования. Ни одна из этих систем не дает каких-либо преимуществ в отношении точности расчетов. Однако в отношении затраты труда при расчетах и количества вычислительных операций наиболее целесообразно интегрировать систему при аргументе  $x$ . При расчете траекторий для зенитной стрельбы часто применяется система при аргументе  $t$ .

Ниже будет рассмотрен подробно пример вычисления траектории по методу численного интегрирования при аргументе  $x$ . Усвоивший мето-

дику расчетов при этом аргументе может легко применить эту методику и для любого другого аргумента.

Система дифференциальных уравнений при аргументе  $x$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -cH_z(y) G(v_z) = -E, \\ \frac{dp}{dx} &= -\frac{g}{u^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= p, \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{u}, \end{aligned}$$

где

$$v_z = u\sqrt{1+p^2} \quad \sqrt{\frac{cH_z}{E}}.$$

Начальные условия

при  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $t = 0$

$$p = p_0 = \tan \theta_0; \quad u = u_0 = v_0 \cos \theta_0.$$

В приведенной системе дифференциальных уравнений первые три уравнения являются совокупными. При численном интегрировании этих уравнений наращивание строк производится параллельно для всех трех уравнений. Только после определения значений всех трех функций  $u$ ,  $p$ ,  $y$  для  $n$ -й строки можно продолжать интегрирование для  $(n+1)$ -й строки. Интегрирование четвертого уравнения можно произвести отдельно после того, как первые три уравнения будут проинтегрированы. В отношении техники расчетов интегрирование уравнения для времени ничем не отличается от вычисления определенного интеграла. При этом нет необходимости применять метод последовательных сближений для начала расчетов, так как исходные значения  $t'_x = \frac{1}{u}$  будут известны в результате интегрирования первого уравнения.

Точность расчетов в существенной мере зависит от выбранного шага аргумента. Чем меньше этот шаг, тем точность расчетов выше; однако при этом увеличивается число строк в расчетном бланке или, как говорят, число рассчитываемых точек. Шаг аргумента необходимо выбрать таким, чтобы трети разности производных мало влияли на приращения функций. При аргументе  $x$  необходимо, чтобы слагаемое

$$h \cdot \frac{1}{24} \Delta^3 u'$$

в выражении для  $\Delta u$  имело величину порядка нескольких единиц последнего знака. При вычислении траекторий для средних калибров чаще всего шаг дальности можно принять равным 500 м. Для стрелкового оружия шаг аргумента обычно принимается 100—200 м.

В отношении числа значащих цифр при вычислении элементов траектории можно рекомендовать следующее.

Ординаты  $y$  вычислять с точностью до 0,1 м или 1 м. Первое число отвечает настильным траекториям.

Время  $t$  вычислять с точностью до 0,01 сек.

Горизонтальную проекцию скорости вычислять с точностью до 0,1 м/сек. В случае больших углов бросания и малых начальных скоростей точность расчета должна быть повышена до 0,01 м/сек.

Точность вычисления производных  $u'_x$ ,  $y'_x = p$ ,  $t'_x$  зависит от выбранного шага. Число значащих цифр после запятой выбирается таким,

Основной бланк расчета

$$H^*(\Omega) = -E$$

二

1

11

10

1

— 7 —

10

100

1

1

1

11

4

1

1

10

1

1

1

1

1

9

### **Вспомогательный бланк расчета**

$$1) \quad {}^1/\pm \Delta u_n'; \quad 2) -{}^1/\pm \Delta u_n'; \quad 3) -{}^1/\pm \Delta u_{n-1}'$$

чтобы обеспечить необходимую точность вычисления соответствующих функций. Например, принимая точность вычисления  $y$  до 0,1 м и шаг аргумента равным 500 м, необходимо вычислять производную  $y'_x = p$  с точностью до 0,0001. При этом, вычисляя  $\Delta y$  по соответствующим формулам и умножая значения производной на  $h = 500$ , мы получим точность расчетов

$$\delta(\Delta y) = 500 \cdot 0,0001 = 0,05 \text{ м},$$

т. е. некоторый запас точности против требуемой (0,1 м).

Вычисление  $y'_x$  с точностью до одной единицы третьего знака не обеспечило бы в данном случае необходимой точности вычисления ординаты  $y$ .

При вычислении траектории по аргументу  $x$  применяются следующие вспомогательные таблицы, помещенные в части III.

1. Табл. 1  $\lg G(v_0)$ . Аргументом в этой таблице принят  $\lg v_0$ .

2. Табл. 5  $\frac{g}{u^2}$ .

3. Табл. 6  $\frac{1}{u}$ .

4. Табл. 7  $\lg H_z(y)$  и  $\sqrt{\frac{v_0^2 N}{z}}$ .

5. Табл. 17  $\lg \sqrt{1 + p^2}$ .

6. Табл. 42 логарифмов и антилогарифмов.

Расчет траектории ведется в двух бланках: основном и вспомогательном. Основной бланк приведен на стр. 138.

Графы, которые при сближениях не заполняются, в бланке заштрихованы.

Вспомогательный бланк приведен на стр. 139.

Заполнение одного столбца во вспомогательном бланке позволяет нарастить одну строку в основном бланке. Звездочка слева в бланке означает, что необходимо полученную величину перенести в основной бланк. Слева в бланке указаны также номера таблиц части III, применяемых для заполнения соответствующего элемента в бланке.

Значение  $\Delta u$ , вычисляемое сначала по формуле для наклонной строки, проверяется затем по формуле для ломаной строки. Первый расчет ( $\Delta u_n^l$ ) приведен в верхней части бланка; второй расчет ( $\Delta u_n^{ll}$ ) — в нижней части бланка.

### § 85. Пример вычисления траектории по методу численного интегрирования при аргументе $x$

Требуется вычислить элементы траектории для следующих условий:

Орудие . . . . .	122-мм пушка
Начальная скорость . . . . .	$v_0 = 605 \text{ м/сек}$
Угол бросания . . . . .	$\theta_0 = 5^\circ 10'$
Калибр . . . . .	$d = 0,122 \text{ м}$
Вес снаряда . . . . .	$q = 23,45 \text{ кг}$
Коэффициент формы (для закона Сиаччи) . . . . .	$l = 0,504$

Вычисляем значения баллистического коэффициента и начальные значения  $u$  и  $u'_x$ .

$\lg d$	1,0864
$2 \lg d$	2,1728
$\lg 1000 l$	2,7024
$-\lg q$	2,6299
$\lg c$	1,5051
$\lg G(v_0)$	1,3153
$\lg E_0$	2,8204
$u'_0 = -E_0$	0,06613
$\lg v_0$	2,7818
$\lg \cos \theta_0$	1,9982
$\lg u_0$	2,7800
$u_0$	602,6

$$C = \frac{ld^2}{q} 1000$$

$$C = 0,320$$

Кроме того, находим по табл. 5 ч. III значение  $p'_0 = -\frac{g}{u_0^2} = -0,01270$  и по таблице тангенсов — значение  $p_0 = 0,0904$ .

Начальные значения элементов траектории вписываем в бланк

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$p$	$\Delta p$	$\Delta^2 p$	$p'$	$\Delta p'$	$\Delta^2 p'$	$u$	$\Delta u$	$u'$	$\Delta u'$	$\Delta^2 u'$
0	0	0		0,0904			-0,01270			602,6		-0,0661		
1														

Начинаем первое сближение. Расчеты ведем, пользуясь нулевым столбцом вспомогательного бланка. Вычисляем  $\Delta u_0 = hu_0'$ .

$n$	Первое сближение	
	0	
$u'_0$	-0,0661	
$\frac{1}{2} \Delta u'_0$		
$\frac{5}{12} \Delta^2 u'_0$		
$\frac{5}{8} \Delta^3 u'_0$		
$\Sigma$	-0,0661	
*	$\Delta u_0' = h\Sigma$	-33,0

Полученное значение  $\Delta u_0$  переносим в основной бланк и вычисляем  $u_1 = u_0 + \Delta u_0 = 602,6 - 33,0 = 569,6$ .

По полученному  $u_1$  определяем по табл. 5 ч. III значение  $p'_1 = -0,01302$  и составляем разность  $\Delta p'_0$ .

К этому этапу основной бланк имеет следующий вид:

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$p$	$\Delta p$	$\Delta^2 p$	$p'$	$\Delta p'$	$\Delta^2 p'$	$u$	$\Delta u$	$u'$	$\Delta u'$	$\Delta^2 u'$
0	0	0	0,0904		-0,0270	-32	602,6	-33,0	-0,0661					
1	500				-302		569,6							

Вычисляем  $\Delta p_0$  по формуле

$$\Delta p_0 = h \left( p'_0 + \frac{1}{2} \Delta p'_{00} \right).$$

Расчет ведем во вспомогательном бланке

	$p_n$	-0,0270
	$\frac{1}{2} \Delta p_n$	-16
	$-\frac{1}{12} \Delta^2 p_{n-1}$	
	$\Sigma$	-0,04286
*	$\Delta p_n = n\Sigma$	-0,0143

Полученное значение  $\Delta p_0 = -0,0143$  переносим в основной бланк и вычисляем  $p_1 = p_0 + \Delta p_0 = 0,0904 - 0,0143 = 0,0761$ , после чего основной бланк примет следующий вид:

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$p$	$\Delta p$	$\Delta^2 p$	$p'$	$\Delta p'$	$\Delta^2 p'$	$u$	$\Delta u$	$u'$	$\Delta u'$	$\Delta^2 u'$
0	0	0	0,0904	-143	-0,0270	-32	602,6	-33,0	-0,0661					
1	500			761	-302		569,6							

Вычисляем  $\Delta y_0$  по формуле

$$\Delta y_0 = h \left( p_0 + \frac{1}{2} \Delta p_0 \right).$$

	$p_n$	0,0904
	$\frac{1}{2} \Delta p_n$	-71,5
	$-\frac{1}{12} \Delta^2 p_{n-1}$	
	$\Sigma$	0,08325
*	$\Delta y_n = n\Sigma$	41,6

Полученное значение  $\Delta y_0 = 41,6$  переносим в основной бланк и вычисляем  $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 41,6 = 41,6$ , после чего основной бланк примет следующий вид:

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$p$	$\Delta p$	$\Delta^2 p$	$p'$	$\Delta p'$	$\Delta^2 p'$	$u$	$\Delta u$	$u'$	$\Delta u'$	$\Delta^2 u'$
0	0	0	41,6	0,0904	-143	-0,0270	-32	602,6	-33,0	-0,0661				
1	500	41,6		761	-302		569,6							

Имея значения  $u_1$ ,  $p_1$  и  $y_1$ , вычисляем

$$v_{\tau 1} = u_1 \sqrt{1 + p_1^2} \sqrt{\frac{z_0 N}{v_{\tau 1}}}, \quad u'_1 = -c H_{\tau 1}(y_1) G(v_{\tau 1}).$$

17	$\lg u_{n+1}$	2,7556
7	$\lg V \sqrt{1 + p_{n+1}^2}$	0,0013
	$\lg V \sqrt{z_0 N / v_{n+1}}$	0,0002
1	$\lg v_{\tau}$	2,7571
7	$\lg G(v_{\tau})_{n+1}$	1,2957
	$\lg H_{\tau}(y_{n+1})$	1,9980
	$\lg c$	1,5051
*	$\Sigma = \lg E_{n+1}$	2,7988
*	$u'_{n+1} = -E_{n+1}$	-0,0629

Полученное значение  $u'_{n+1} = -0,0629$  переносим в основной бланк и вычисляем разность  $\Delta u'_{n+1}$ , после чего основной бланк примет следующий вид:

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$p$	$\Delta p$	$\Delta^2 p$	$p'$	$\Delta p'$	$\Delta^2 p'$	$u$	$\Delta u$	$u'$	$\Delta u'$	$\Delta^2 u'$
0	0	0	41,6	0,0904	-143	-0,0270	-32	602,6	-33,0	-0,0661	32			
1	500	41,6		761	-302		569,6							

На этом первое сближение закончено.

Второе сближение начинаем с заполнения начальных значений элементов; затем вычисляем  $\Delta u_0$  и  $\Delta u_1$  по формулам

$$\Delta u_0 = h \left[ u'_0 + \frac{1}{2} \Delta u'_0 \right],$$

$$\Delta u_1 = h \left[ u'_1 + \frac{1}{2} \Delta u'_1 \right].$$

n		Первое сближение		Второе сближение	
		0	0	1	
$u'_n$		-0,0661	-661	-629	
$\frac{1}{2} \Delta u'_{n-1}$			16	16	
$\frac{5}{12} \Delta^2 u'_{n-2}$					
$\frac{3}{5} \Delta^3 u'_{n-3}$					
$\Sigma$		-0,0661	-645	-613	
$\Delta u_n^1 = h\Sigma$		-33,0	-32,2	-30,6	

Значения  $\Delta u_0$  и  $\Delta u_1$  переносим в основной бланк и вычисляем  $u_1 = 602,6 - 32,2 = 570,4$ ;  $u_2 = 570,4 - 30,6 = 539,8$ .

Пользуясь этими значениями, находим по табл. 5 ч. III  $p' = 0,01302$ ;  $p'_1 = 0,01337$  и заполняем разности; после этого основной бланк будет иметь следующий вид:

n	x	y	2y	p	$\Delta p$	$\Delta p'$	$p'$	$\Delta p''$	$p''$	$\Delta u$	$u$	$\Delta u'$	$\Delta u''$	$\Delta u'''$
0	0	0	41,6	0,0904	-143	-0,01270	-32	602,6	-33,0	-0,0661	32			
1	500	41,6		761		-302	569,6		-629					
0	0	0		904		-270	-32	602,6	-32,2	-661				
1	500				-302	-35	570,4	-30,6						
2	1000				-337	539,8								

Вычисляем значения  $\Delta p_0$  и  $\Delta p_1$  по формулам

$$\Delta p_0 = h \left( p'_0 + \frac{1}{2} \Delta p'_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 p'_0 \right),$$

$$\Delta p_1 = h \left( p'_1 + \frac{1}{2} \Delta p'_1 - \frac{1}{12} \Delta^2 p'_1 \right).$$

n	0	0	1
$p'_n$	-0,01270	-270	-302
$\frac{1}{2} \Delta p'_n$	-16	-16	-17
$-\frac{1}{12} \Delta^2 p'_{n-1}$	0 <sub>2</sub>	0 <sub>2</sub>	
$\Sigma$	-0,01286	-286	-319 <sub>2</sub>
$\Delta p_n = h\Sigma$	-0,0143	-143	-160

Переносим  $\Delta p_0$  и  $\Delta p_1$  в основной бланк, вычисляем  $p_1$  и  $p_2$  и заполнением разности, после чего основной бланк получает следующий вид:

r	x	y	2y	p	$\Delta p$	$\Delta p'$	$p'$	$\Delta p''$	$p''$	$\Delta u$	$u$	$\Delta u'$	$\Delta u''$	$\Delta u'''$
0	0	0	41,6	0,0904	-143	-0,01270	-32	602,6	-33,0	-0,0661	32			
1	500	41,6		761		-302	569,6		-629					
0	0	0		904	-143	-17	-270	-32	602,6	-32,2	-661			
1	500				-302	-35	570,4	-30,6						
2	1000				-337	539,8								

Вычисляем  $\Delta y_0$  и  $\Delta y_1$  по формулам

$$\Delta y_0 = h \left( p_0 + \frac{1}{2} \Delta p_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 p_0 \right),$$

$$\Delta y_1 = h \left( p_1 + \frac{1}{2} \Delta p_1 - \frac{1}{12} \Delta^2 p_1 \right).$$

$n$	0	0	1
$p_n$	0,0904	904	761
$\frac{1}{2} \Delta p_n$	-71 <sub>5</sub>	-71 <sub>5</sub>	-80
$-\frac{1}{12} \Delta^2 p_{n+1}$		1 <sub>4</sub>	1 <sub>4</sub>
$\Sigma$	0,0832 <sub>5</sub>	834	682
* $\Delta y_n = h\Sigma$	41,6	41,7	34,1

Перенесим  $\Delta y_0$  и  $\Delta y_1$  в основной бланк и вычисляем  $y_1$  и  $y_2$ , после чего основной бланк примет следующий вид:

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$p$	$\Delta p$	$\Delta^2 p$	$p'$	$\Delta p'$	$\Delta^2 p'$	$u$	$\Delta u$	$u'$	$\Delta u'$	$\Delta^2 u'$
0	0	41,6	0,0904	-143		-0,0270	-32		602,6	-33,0	-0,0661	32		
1	500	41,6		761			-302			569,6		-629		
0	0	41,7	904	-143	-17	-270	-32	-3	602,6	-32,2	-661	31	1	
1	500	41,7	34,1	761	-160	-302	-35	-35	570,4	-30,6	-630	32		
2	1000	75,8		601			-337			539,8		-598		

Имея значения  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$ , вычисляем  $u'_1$  и  $u'_2$ :

$n$	0	0	1
$\lg u_{n+1}$	2,7556	7532	7322
$\lg \frac{1 + p_{n+1}^2}{1 + p_n^2}$	0,0013	13	8
$\lg \sqrt{\tau_{0N}/\tau_{n+1}}$	0,0002	2	4
$\lg v_n$	2,7571	7577	7334
$\lg (v_n)_{n+1}$	1,2957	2962	2749
$\lg H_n (v_{n+1})$	1,9980	9980	9915
$\lg c$	1,5051	5051	5051
$\Sigma = \lg E_{n+1}$	2,7988	7993	7765
* $w'_{n+1} = -E_{n+1}$	-0,629	-629	-598

Полученные значения  $u'_1 = -E_1$  и  $u'_2 = -E_2$  переносим в основной бланк и заполняем разности; после этого основной бланк примет следующий вид:

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$p$	$\Delta p$	$\Delta^2 p$	$p'$	$\Delta p'$	$\Delta^2 p'$	$u$	$\Delta u$	$u'$	$\Delta u'$	$\Delta^2 u'$
0	0	0	41,6	0,0904	-143		-0,0270	-32		602,6	-33,0	-0,0661	32	
1	500	41,6		761			-302			569,6		-629		
0	0	0	41,7	904	-143	-17	-270	-32	-3	602,6	-32,2	-661	31	1
1	500	41,7	34,1	761	-160	-302	-35	-35	570,4	-30,6	-630	32		
2	1000	75,8		601			-337			539,8		-598		

На этом второе сближение закончено.

Третье сближение, после заполнения в бланке данных начальных условий, начинаем с вычисления  $\Delta u_0$ ,  $\Delta u_1$ ,  $\Delta u_2$ :

$$\Delta u_0 = h \left( u'_0 + \frac{1}{2} \Delta u'_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 u'_0 \right),$$

$$\Delta u_1 = h \left( u'_1 + \frac{1}{2} \Delta u'_1 - \frac{1}{12} \Delta^2 u'_1 \right),$$

$$\Delta u_2 = h \left( u'_2 + \frac{1}{2} \Delta u'_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 u'_2 \right).$$

$n$	Первое сближение	Второе сближение		Третье сближение		
		0	1	0	1	2
$u'_n$	-0,0661			-661	-629	-630
$\frac{1}{2} \Delta u'_{n-1}$			16	16	15 <sub>4</sub>	16
$\frac{5}{12} \Delta^2 u'_{n-2}$					-0 <sub>1</sub>	-0 <sub>1</sub>
$\frac{5}{12} \Delta^3 u'_{n-3}$					0 <sub>3</sub>	
$\Sigma$	-0,0661		-645	-613	-646	-614
* $\Delta u'_n = h\Sigma$	-33,0		-32,2	-30,6	-32,3	-30,7
						-29,1

Переносим в основной бланк значения  $\Delta u_0$ ,  $\Delta u_1$  и  $\Delta u_2$  и вычисляем  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$ . По табл. 5 ч. III находим значения  $p'_1$ ,  $p'_2$  и  $p'_3$ , вписываем

их в основной бланк и составляем разности. После этого основной бланк получит следующий вид:

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$p$	$\Delta p$	$\Delta^2 p$	$p'$	$\Delta p'$	$\Delta^2 p'$	$u$	$\Delta u$	$u'$	$\Delta u'$	$\Delta^2 u'$
0	0	0	41,6	0,0904	-143	-0,0270	-32	602,6	-33,0	-0,0661	32			
1	500	41,6		761		-302		569,6		-629				
0	0	0	41,7	904	-143 -17	-270	-32	-3	602,6	-32,2	-661	31	1	
1	500	41,7	34,1	761	-160	-302	-35	570,4	-30,6	-630	32			
2	1000	75,8		601		-337		539,8		-598				
0	0	0		904		-270	-32	-3	602,6	-32,3	-661			
1	500					-302	-35	-4	570,3	-30,7				
2	1000					-337	-39	539,6	-29,1					
3	1500					-376		510,5						

Вычисляем значения  $\Delta p_0$ ,  $\Delta p_1$  и  $\Delta p_2$  по формулам

$$\Delta p_0 = h \left( p'_0 + \frac{1}{2} \Delta p'_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 p'_0 \right),$$

$$\Delta p_1 = h \left( p'_1 + \frac{1}{2} \Delta p'_1 - \frac{1}{12} \Delta^2 p'_1 \right),$$

$$\Delta p_2 = h \left( p'_2 + \frac{1}{2} \Delta p'_2 - \frac{1}{12} \Delta^2 p'_2 \right).$$

$n$	0	0	1	0	1	2
$p'_n$	-0,0270	-270	-302	-270	-302	-337
$\frac{1}{2} \Delta p'_n$	-15	-15	-17 <sub>5</sub>	-16	-17 <sub>5</sub>	-19 <sub>5</sub>
$-\frac{1}{12} \Delta^2 p'_{n-1}$	0 <sub>2</sub>	0 <sub>2</sub>	0 <sub>2</sub>	0 <sub>2</sub>	0 <sub>2</sub>	0 <sub>2</sub>
$\Sigma$	-0,0286	-286	-319	-285	-319 <sub>5</sub>	-356
*	$\Delta p_n = h \Sigma$	-0,0143	-143	-160	-143	-160

Переносим  $\Delta p_0$ ,  $\Delta p_1$  и  $\Delta p_2$  в основной бланк и вычисляем значения  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $\Delta^2 p_1$ ,  $\Delta^2 p_2$ .

После этого основной бланк примет следующий вид:

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$p$	$\Delta p$	$\Delta^2 p$	$p'$	$\Delta p'$	$\Delta^2 p'$	$u$	$\Delta u$	$u'$	$\Delta u'$	$\Delta^2 u'$
0	0	0	41,6	0,0904	-143	-0,0270	-32	602,6	-33,0	-0,0661	32			
1	500	41,6		761		-302		569,6		-629				
0	0	0	41,7	904	-143 -17	-270	-32	-3	602,6	-32,2	-661	31	1	
1	500	41,7	34,0	761	-160	-302	-35	570,4	-30,6	-630	32			
2	1000	75,7		601		-337		539,8		-598				
0	0	0		904		-270	-32	-3	602,6	-32,3	-661			
1	500					-302	-35	-4	570,3	-30,7				
2	1000					-337	-39	539,6	-29,1					
3	1500					-376		510,5						

Вычисляем значения  $\Delta y_0$ ,  $\Delta y_1$ ,  $\Delta y_2$  по формулам

$$\Delta y_0 = h \left( p_0 + \frac{1}{2} \Delta p_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 p_0 \right),$$

$$\Delta y_1 = h \left( p_1 + \frac{1}{2} \Delta p_1 - \frac{1}{12} \Delta^2 p_0 \right),$$

$$\Delta y_2 = h \left( p_2 + \frac{1}{2} \Delta p_2 - \frac{1}{12} \Delta^2 p_1 \right).$$

$n$	0	0	1	0	1	2
$p_n$	0,0904	904	761	904	761	601
$\frac{1}{2} \Delta p_n$	-71 <sub>5</sub>	-71 <sub>5</sub>	-80	-71 <sub>5</sub>	-80	-89
$-\frac{1}{12} \Delta^2 p_{n-1}$	1 <sub>2</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>2</sub>	1 <sub>2</sub>
$\Sigma$	0,0832 <sub>5</sub>	834	680	834	682	513 <sub>5</sub>
*	$\Delta p_n = h \Sigma$	41,6	41,7	34,0	41,7	34,1

Переносим  $\Delta y_0$ ,  $\Delta y_1$ ,  $\Delta y_2$  в основной бланк и вычисляем  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$ ; после этого основной бланк получит следующий вид:

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$p$	$\Delta p$	$p'$	$\Delta p'$	$u$	$\Delta u$	$u'$	$\Delta u'$	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
0	0	0	41,6	0,0904	-143		-0,0270	-32	602,6	-33,0	-0,0661	32	
1	500	41,6	761		-302			569,6		-629			
0	0	0	41,7	904	-143	-17	-270	-32	3 602,6	-32,2	-661	31	1
1	500	41,7	34,1	761	-160		-302	-35	570,4	-30,6	-630	32	
2	1000	75,8	601		-337			539,8		-598			
0	0	0	41,7	904	-143	-17	-270	-32	3 602,6	-32,3	-661		
1	500	41,7	34,1	761	-160	-18	-302	-35	4 570,3	-30,7			
2	1000	75,8	25,7	601	-178		-337	-39	539,6	-29,1			
3	1500	101,5	423		-376			510,5					

Далее вычисляем  $u'_1$ ,  $u'_2$ ,  $u'_3$ :

	$n$	0	0	1	0	1	2
17	$\lg u_{n+1}$	2,7536	7562	7322	7561	7321	7080
7	$\lg \sqrt{1 + p^2_{n+1}}$	0,0013	13	8	13	8	3
	$\lg \sqrt{\tau_{nN} \tau_{n+1}}$	0,0002	2	4	2	4	5
	$\lg v_n$	2,7571	7577	7334	7576	7333	7088
7	$\lg G(v_n)_{n+1}$	1,2957	2962	2749	2961	2748	2512
	$\lg H_n(v_{n+1})$	1,9980	9980	9965	9980	9965	9952
	$\lg c$	1,5051	5051	5051	5051	5051	5051
*	$\Sigma = \lg E_{n+1}$	2,7988	7993	7765	7992	7764	7515
	$u'_{n+1} = -E_{n+1}$	-0,0629	-630	-598	-630	-598	-564

Полученные значения  $u'_1 = -E_1$ ;  $u'_2 = -E_2$ ;  $u'_3 = -E_3$  переносим в основной бланк и заполняем разности.

$n$	$x$	$y$	$\Delta y$	$p$	$\Delta p$	$p'$	$\Delta p'$	$u$	$\Delta u$	$u'$	$\Delta u'$	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
0	0	0	41,6	0,0904	-143		-0,0270	-32	602,6	-33,0	-0,0661	32	
1	500	41,6	761		-302			569,6		-629			
0	0	0	41,7	904	-143	-17	-270	-32	3 602,6	-32,2	-661	31	1
1	500	41,7	34,1	761	-160		-302	-35	570,4	-30,6	-630	32	
2	1000	75,8	601		-337			539,8		-598			
0	0	0	41,7	904	-143	-17	-270	-32	3 602,6	-32,3	-661	31	1
1	500	41,7	34,1	761	-160	-18	-302	-35	4 570,3	-30,7	-630	32	2
2	1000	75,8	25,7	601	-178		-337	-39	539,6	-29,1	-598	34	
3	1500	101,5	423		-376			510,5		-564			

Теперь произведем поверочный расчет величин  $\Delta u_0$ ,  $\Delta u_1$ ,  $\Delta u_2$  (внизу вспомогательного бланка).

$n$	0	0	1	0	1	2
$u'_{n+1}$						
$1/2 \Delta u'_{n+1}$						
$-1/12 \Delta^2 u'_{n+1}$						
$\Sigma$						
$\Delta u''_{n+1} = h \Sigma$						

В данном случае поверка показала совпадение полученных величин с результатами первых расчетов. На этом третье и последнее сближение закончено. После этого переходим к типовому расчету, заключающемуся в последовательном наращивании столбцов во вспомогательном бланке и строк в основном бланке.

Вычисляем  $\Delta u_3$  по формуле наклонной строки

$$\Delta u_3 = h(u'_3 + \frac{1}{2} \Delta u'_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 u'_1 + \frac{3}{8} \Delta^3 u'_0).$$

Дальнейшие расчеты показаны в столбце 3 вспомогательного бланка.

n	Первое сближение	Второе сближение			Третье сближение			3
		0	0	1	0	1	2	
$u_n$	-0,0661	-661	-629	-661	-630	-598	-564	
$\frac{1}{2}\Delta u_{n-1}$		16	16	15 <sub>3</sub>	16	16	17	
$\frac{5}{12}\Delta^2 u_{n-2}$				-0 <sub>1</sub>	-0 <sub>1</sub>	0 <sub>3</sub>	0 <sub>3</sub>	
$\frac{3}{8}\Delta^3 u_{n-3}$								0 <sub>4</sub>
$\Sigma$	-0,0661	-645	-613	-646	-614	-582	-546	
$\Delta u_n^I = h\Sigma$	-33,0	-32,2	-30,6	-32,3	-30,7	-29,1	-27,3	
<b>*5</b> $p_{n+1}$ Вписать $p_{n+1}$ в основной бланк и заполнить разности								
$p_n$	-0,0276	-276	-302	-270	-302	-337	-376	
$\frac{1}{2}\Delta p_n$	-16	-16	-17 <sub>3</sub>	-16	-17 <sub>3</sub>	-19 <sub>3</sub>	-22 <sub>3</sub>	
$-\frac{1}{12}\Delta^2 p_{n-1}$		0 <sub>2</sub>	0 <sub>2</sub>	0 <sub>2</sub>	0 <sub>2</sub>	0 <sub>3</sub>	0 <sub>3</sub>	
$\Sigma$	0,01286	-286	-319	-286	-319 <sub>3</sub>	-356	-398	
$\Delta p_n = h\Sigma$	-0,0143	-143	-160	-143	-160	-173	-199	
$p_n$	0,0904	904	761	904	761	601	423	
$\frac{1}{2}\Delta p_n$	-71 <sub>3</sub>	-71 <sub>3</sub>	-80	-71 <sub>3</sub>	-80	-89	-99 <sub>3</sub>	
$-\frac{1}{12}\Delta^2 p_{n-1}$		1 <sub>4</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>3</sub>	1 <sub>7</sub>	
$\Sigma$	0,0832 <sub>5</sub>	834	680	834	682	513 <sub>3</sub>	325 <sub>2</sub>	
$\Delta y_n = h\Sigma$	41,6	41,7	34,0	41,7	34,1	25,7	16,3	
$\lg u_{n+1}$	2,7556	7562	7822	7561	7821	7080	6841	
17 $\lg \sqrt{1 + p_{n-1}^2}$	0,0013	13	8	13	8	3	1	
7 $\lg V \sqrt{\gamma_0 \gamma_{n-1}}$	0,0002	2	4	2	4	5	6	
$\lg v_r$	2,7571	7577	7384	7576	7383	7088	6848	
1 $\lg G(v_r)_{n+1}$	1,2957	2962	2749	2961	2748	2512	2255	
7 $\lg H_r(y_{n+1})$	1,9080	9080	9965	9080	9965	9952	9945	
$\lg c$	1,5051	5051	5051	5051	5051	5051	5051	
$\Sigma = \lg E_{n+1}$	2,7988	7993	7765	7992	7764	7515	7251	
* $u_{n+1} = -E_{n+1}$	-0,0629	-630	-598	-650	-598	-554	-531	
$u_n$					-661	-630	-598	-564
$\frac{1}{2}\Delta u_n$					15 <sub>3</sub>	16	17	16 <sub>2</sub>
$-\frac{1}{12}\Delta^2 u_{n-1}$					-0 <sub>1</sub>	-0 <sub>1</sub>	-0 <sub>2</sub>	0 <sub>1</sub>
$\Sigma$					-645 <sub>3</sub>	-614	-581 <sub>2</sub>	-547 <sub>4</sub>
* $\Delta u_n^{II} = h\Sigma$					-32,3	-30,7	-29,1	-27,4

Переносим значение  $\Delta u_3$  в бланк, вычисляем  $u_4$ , по табл. 5 ч. III находим  $p'_4$  и заполняем разности. Вычисляем  $\Delta p_3$ ,  $p_4$ ,  $\Delta^2 p_2$ ,  $\Delta y_3$ ,  $y_4$ . Затем вычисляем  $u'_4$  и переносим в основной бланк; заполняем разности. Значение  $\Delta u_3$ , полученное ранее по формуле наклонной строки, пересчитываем по формуле для ломаной строки

$$\Delta u_3 = h \left( u'_3 + \frac{1}{2} \Delta u'_3 - \frac{1}{12} \Delta u'_2 \right).$$

В данном случае вместо величины  $\Delta u_3 = -27,3$  по наклонной строке мы получили по ломаной строке  $\Delta u_3 = -27,4$ . Исправляем в основном бланке  $u_4 = 483,1$ . На этом процесс вычисления для одного интервала считается законченным и весь расчет начинается заново.

Дальнейшие расчеты видны в бланке расчета, приведенного в конце настоящего параграфа.

Окончив интегрирование первых трех совокупных дифференциальных уравнений, переходим к интегрированию последнего уравнения  $t'_x = \frac{1}{u}$ . Так как значения  $u$  уже известны, то нет надобности в производстве сближений. Величины  $t'_x = \frac{1}{u}$  находятся по табл. 6 ч. III сразу для всех значений аргумента. Затем заполняются разности  $\Delta t'_x$ ,  $\Delta^2 t'_x$  и вычисляются приращения по формулам ломаной строки внизу во вспомогательном бланке. Значения  $\Delta t'$  переносятся в основной бланк и вычисляются значения  $t$ .

Значения элементов в траектории в точке падения и вершине вычисляются по формуле обратного интерполяирования для ломаной строки

$$\hat{z}_1 = \frac{y - y_n}{\Delta y_n},$$

$$\hat{z}_2 = \hat{z}_1 = \hat{z}_1 (1 - \hat{z}_1) \frac{\Delta y_{n-1}}{2 \Delta y_n},$$

где  $y$  — произвольная функция.

При интерполяции для точки падения принимаем  $y_n$  — последнее положительное значение срдинаты; так как  $y_c = 0$ , то  $\hat{z}_1 = -\frac{y_n}{\Delta y_n}$ .

При интерполяции для вершины принимаем  $p_n$  — последнее положительное значение  $p$ ; так как  $p_c = 0$ , то  $\hat{z}_1 = -\frac{p_n}{\Delta p_n}$ .

Остальные расчеты видны в бланке вычисления траекторий (см. вкладной лист).

### § 86. Баллистические сборники (таблицы)

Метод численного интегрирования обеспечивает наибольшую точность вычисления элементов траектории. Однако этот метод является и наиболее трудоемким. Для того чтобы облегчить инженерам-практикам вычисление элементов траектории с достаточной для практики точностью, составляются специальные баллистические сборники (таблицы). Эти сборники содержат основные элементы траектории, полученные на основании расчетов траектории по методу численного интегрирования. У нас в СССР изданы следующие сборники:

#### БАЛЛИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ АНИИ

Баллистические таблицы вычислены при законе сопротивления воздуха Гарнье-Дюпон (закон 1930 г.). В таблицах даны значения элементов траектории  $X$ ,  $T$ ,  $v_r$ ,  $b_r$ ,  $Y$  в зависимости от входных параметров  $c$ ,  $v_0$ ,  $b_0$ . Таблицы состоят из четырех частей.

Часть I содержит значения указанных элементов траектории для скоростей от 75 до 450 м/сек через каждые 5 м/сек. Углы бросания взяты от 5° до 75° через 5°, а баллистические коэффициенты — от 0,0 до 4,0.

Часть II содержит значения элементов траектории для скоростей от 450 до 1080 м/сек.

Часть III содержит значения элементов траектории для «сверхдальной стрельбы», т. е. для скоростей от 1050 до 1900 м/сек. Углы бросания взяты от 45 до 55° через 1°, а баллистические коэффициенты — от 0,0 до 0,5.

Часть IV содержит элементы траектории для зенитной стрельбы. В этих таблицах даны значения  $x$ ,  $y$ ,  $v$  для различных точек траектории, задаваемых временем полета  $t$ . Входными величинами в этих таблицах являются  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ ,  $t$ . Таблицы вычислены для начальных скоростей от 720 до 1080 м/сек. для баллистических коэффициентов от 0,6 до 6,0 и для углов бросания от 30 до 90°. Время полета изменяется через 2 сек.

### БАЛИСТИЧЕСКИЙ СБОРНИК АРТИЛЛЕРИЙСКОЙ АКАДЕМИИ

Баллистический сборник вычислен при законе сопротивления воздуха Сиаччи. В таблицах сборника даны значения следующих величин:  $\lg X$ ,  $\lg T$ ,  $\lg c$ ,  $\lg Y$  и  $\lg v$ . Элементы траектории даны для углов бросания 2°, 5° и далее через 5° до 70°. Значения начальных скоростей взяты от 200 до 1000 м/сек через 50 м/сек, а значения баллистических коэффициентов — от 0,1 до 1,0 через 0,05. В приложении (табл. VIII) приведены таблицы баллистического сборника Артиллерийской академии.

Приведем пример определения элементов траектории при помощи баллистического сборника Академии.

Исходные данные:

Калибр . . . . .	$d = 0,107 \text{ м}$
Вес снаряда . . . . .	$q = 17,04 \text{ кг}$
Коэффициент формы к закону	
Сиаччи . . . . .	$i = 0,525$
Начальная скорость . . . . .	$v_0 = 562 \text{ м/сек}$
Угол бросания . . . . .	$\theta_0 = 10^{\circ}30'$

Вычислим баллистический коэффициент.

Элементы траектории определяем тройным интерполярованием.

Интерполирующие множители

$$\xi_v = \frac{562 - 550}{50} = 0,24,$$

$$\xi_c = \frac{0,3529 - 0,3500}{0,05} = 0,058,$$

$$\xi_{\theta} = \frac{10^{\circ}30' - 10^{\circ}00'}{5^\circ} = 0,10.$$

$\lg d$	1,0294
$2 \lg d$	2,0588
$\lg 1000 i$	2,7202
$-\lg q$	2,7686
$\lg c$	1,5476
$c$	0,3529

Первое интерполирование производим по скорости, второе — по баллистическому коэффициенту и третье — по углу бросания. Расчет удобно вести в бланке (табл. 20).

**БЛАНК ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ  
ПО МЕТОДУ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ**

Исходные данные в числовом виде

$\lg d$	1,0894
$\frac{2 \lg d}{\lg 1000 t - \lg q}$	2,1728 2,7024 2,6299
$\lg c / \lg G(v_0)$	1,5051 1,7153
$u'_0 = -E_0$	2,8204 -0,00013
$\lg v_0 / \lg \cos \theta_0$	2,7818 1,9982
$r_s = \lg \frac{u_0}{v_0}$	2,7800 0,0904 -0,04270

(Основной и вспомогательный бланки расчета — на обороте)

**Интерполирование для точки падения и вершины**

Элементы траектории в точке падения

$\xi_1 = -\frac{y_n}{\Delta y_n} = -\frac{15,1}{-67,5} = 0,224$
$\xi_2 = \xi_1 + (1 - \xi_1) \frac{\Delta^2 y_{n-1}}{2 \Delta y_n} = 0,224 + 0,224 \cdot 0,776 = -2 \cdot 67,5 = 0,247$
$X = x_n + \xi h = 4500 + 0,247 \cdot 500 = 4624$
$T = t_n + \xi \Delta t_n - \xi(1 - \xi) \frac{\Delta^2 t_{n-1}}{2} = 9,64 + 0,247 \cdot 1,38 - 0,247 \cdot 0,753 \frac{0,07}{2} = 9,98$
$p_e = p_n + \xi \Delta p_n - \xi(1 - \xi) \frac{\Delta^2 p_{n-1}}{2} = -0,1167 + 0,247(-0,0373) - 0,247 \cdot 0,753 \frac{-0,0034}{2} = 0,1256$
$u_0 = u_n + \xi \Delta u_n - \xi(1 - \xi) \frac{\Delta^2 u_{n-1}}{2} = 371,6 + 0,247(-17,2) - 0,247 \cdot 0,753 \frac{1,7}{2} = 367,2$

Элементы траектории в вершине

$\xi_1 = -\frac{p_n}{\Delta p_n} = -\frac{0,0002}{-0,0248} = 0,008$
$\xi_2 = \xi_1 + \xi_1(1 - \xi_1) \frac{\Delta^2 p_{n-1}}{2 \Delta p_n} = 0,008 + 0,008 \cdot 0,992 \frac{-0,0026}{-2 \cdot 0,0248} = 0,0084$
$X = x_n + \xi h = 2500 + 0,0084 \cdot 500 = 2504$
$T = t_n + \xi \Delta t_n - \xi(1 - \xi) \frac{\Delta^2 t_{n-1}}{2} = 123,5 + 0,0084(-6,0) - 0,0084 \cdot 0,9916 \frac{-11,7}{2} = 123,5$
$v_e = 709,1 \text{ м/сек}$

Элементы траектории в вершине

$\frac{y_n}{\Delta y_n}$	15,1
$\Delta p_n$	0,0002
$\Delta p_n$	-0,0248
$\Delta^2 p_{n-1}$	-0,0026
$x_n$	4500
$t_n$	9,64
$\Delta t_n$	1,38
$\Delta t_{n-1}$	0,07
$p_n$	-0,1167
$\Delta p_n$	-0,0373
$\Delta^2 p_{n-1}$	-0,0034
$u_n$	371,6
$\Delta u_n$	-17,2
$\Delta^2 u_{n-1}$	1,7

Окончательные результаты

$X = 4624 \text{ м}$
$T = 9,98 \text{ сек}$
$v_e = 709,1 \text{ м/сек}$
$\theta_e = 123,5 \text{ м/сек}$
$x_s = 2504 \text{ м}$

ИТОВЫЙ БЛАНК ИЗЧЕРКАН

Банкнота  $P_{n+1}$  включает в себя  $n$  единиц памяти.

n	Приращение цифрование	Второе сопре- жение		Третье сопро- жение		Четвертое сопро- жение		Пятое сопро- жение		Шестое сопро- жение		Седьмое сопро- жение		Восьмое сопро- жение		Девятое сопро- жение		Десятое сопро- жение		
		0	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10						
0	$\Delta t_n^0$	-0,0001	-0,011	-0,029	-0,041	-0,060	-0,084	-0,114	-0,147	-0,181	-0,217	-0,253	-0,290	-0,325	-0,351					
1	$\Delta t_n^1$	1/12 $\Delta t_{n-1}^0$	16	16	15 <sub>3</sub>	16	16	17	16 <sub>1</sub>	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	
2	$\Delta t_n^2$	1/12 $\Delta^2 t_{n-2}^0$			-0 <sub>2</sub>	-0 <sub>1</sub>	0 <sub>2</sub>	0 <sub>3</sub>	-0 <sub>4</sub>	0 <sub>5</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	$\Delta t_n^3$	1/12 $\Delta^3 t_{n-3}^0$						0 <sub>6</sub>	-0 <sub>7</sub>	0 <sub>8</sub>	-0 <sub>9</sub>	0	0	0	0	0	0	0	0	
4	$\Sigma$	-0,0061	-645	-613	-645	-614	-582	-546	-516	-478 <sub>0</sub>	-446	-412	-378	-344						
*	$\Delta t_n^4$	-23,0	-32,2	-30,0	-32,2	-30,7	-29,1	-27,3	-25,8	-23,9	-22,3	-20,6	-18,9	-17,2						
*5	$P'_{n+1}$																			
	$P'_n$	-0,00270	-210	-302	-270	-302	-337	-370	-421	-460	-522	-581	-644	-711						
	$\Delta p_n^1$	-16	-16	-17 <sub>2</sub>	-16	-17 <sub>4</sub>	-16 <sub>2</sub>	-22 <sub>3</sub>	-24	-26 <sub>5</sub>	-25 <sub>1</sub>	-31 <sub>6</sub>	-33 <sub>5</sub>	-35						
	$\Delta p_n^2$	0 <sub>2</sub>	0 <sub>2</sub>	0 <sub>1</sub>	0 <sub>3</sub>	0 <sub>5</sub>	0 <sub>6</sub>	0 <sub>5</sub>	0 <sub>4</sub>	0 <sub>3</sub>	0 <sub>2</sub>	0 <sub>1</sub>	0 <sub>1</sub>	0 <sub>1</sub>						
	$\Sigma$	-0,00286	-286	-319	-286	-319 <sub>0</sub>	-356	-388	-414 <sub>2</sub>	-445 <sub>1</sub>	-551	-612	-674 <sub>2</sub>	-746						
*	$\Delta p_n^3$	-0,0143	-143	-160	-143	-160	-178	-199	-222	-248	-276	-306	-339	-373						
	$P'_n$	0,00014	664	761	694	761	601	423	224	2	-246	-522	-828	-1167						
	$\Delta p_n^4$	-75 <sub>1</sub>	-71 <sub>2</sub>	-80	-71 <sub>3</sub>	-80	-89	-90 <sub>4</sub>	-111	-124	-138	-153	-169 <sub>4</sub>	-180 <sub>3</sub>						
	$\Delta p_n^5$	1 <sub>4</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>4</sub>	1 <sub>5</sub>	1 <sub>7</sub>	1 <sub>4</sub>	2 <sub>3</sub>	2 <sub>4</sub>	2 <sub>7</sub>	2 <sub>7</sub>	2 <sub>8</sub>							
	$\Sigma$	0,0002 <sub>3</sub>	834	982	834	682	513 <sub>5</sub>	325 <sub>3</sub>	114 <sub>9</sub>	-120	-382	-672	-994 <sub>8</sub>	-1350 <sub>7</sub>						
	$\Delta p_n^6$	41,6	41,7	34,1	41,7	34,1	25,7	15,3	5,7	-5,0	-19,1	-33,6	-49,7	-67,5						
	$\Delta p_n^7$	2,7579	7562	7522	7561	7124	7080	6841	1,46242	-1,46242	-61986	-8916	-5701							
	$\Delta p_n^8$	0,0013	43	8	13	8	3	1	0	1	0	15	20							
17	$\lg V'$	1/1 - $p'^{n+1}_n$	0,0002	2	4	2	4	5	6	6	6	5	3	1						
T	$\lg V'$	1/2 $t_{n+1}^0$	2,7571	7577	7534	7576	7533	7688	6948	6608	6377	6150	5934	5731						
1	$\lg G$	( $t_{n+1}^0$ ) <sup>1/2</sup>	1,2057	2612	2749	2891	2748	2512	2285	1900	1660	1317	9941	6534						
0	$\lg H_n$	( $y_{n+1}^0$ ) <sup>1/2</sup>	1,9080	9890	9895	9980	9945	9952	10015	9942	9945	9954	9970	9993						
	$\lg c$	T <sub>15051</sub>	5051	5051	5051	5051	5051	5051	5051	5051	5051	5051	5051	5051						
	$\Sigma$	$\lg E_{n+1}$	2,7088	7603	7705	7992	7764	7515	7251	6952	6656	6322	5912	5575						
*	$H'_{n+1}$	- $E_{n+1}$	-0,0620	-630	-598	-630	-598	-564	-531	-497	-463	-429	-395	-361						
	$\Delta t_n^9$	1/12 $\Delta t_{n-1}^0$			15 <sub>3</sub>	16	17	16 <sub>5</sub>	17	17	17	17	17							
	$\Sigma$	-1/12 $\Delta y'_{n-1}$			-661	-630	-598	-564	-531	-497	-463	-429	-395	-361						
*	$\Delta y_n^{10}$	$H\Sigma$			-645 <sub>1</sub>	-614	-581 <sub>4</sub>	-547 <sub>1</sub>	-514	-480	-446	-412	-378							
0	$I_n^1$	$I_n^1$			4 <sub>4</sub>	5	5 <sub>4</sub>	5 <sub>5</sub>	6	6	6	6	6 <sub>4</sub>	6 <sub>5</sub>						
	$\Sigma$	-1/12 $\Delta t_{n-1}^0$			0,00106	175	185	190	207	210	231	243	256	269						
*	$\Delta t_n^{11}$	$H\Sigma$			0,85	0,90	0,95	1,01	1,07	1,12	1,18	1,25	1,31	1,38						

Таблица 20

$\theta_c$		$10^\circ$			$10^\circ 30'$		$15^\circ$		
	$v_0$	550	562	600	562	550	562	600	
	$c$								
$\lg X$	0,35	3,7940	3,8047	3,8385		3,9045	3,9137	3,9430	
	0,3529		3,8036		<b>3,8145</b>		3,9124		
	0,40	3,7745	3,7846	3,8165		3,8830	3,8918	3,9195	
$\lg T$	0,35	1,2155	1,2221	1,2430		1,3635	1,3695	1,3885	
	0,3529		1,2216		<b>1,2365</b>		1,3689		
	0,40	1,2075	1,2139	1,2340		1,3540	1,3596	1,3775	
$ \theta_c $	0,35	$14^\circ 42'$	$14^\circ 53'$	$15^\circ 28'$		$22^\circ 24'$	$22^\circ 40'$	$23^\circ 32'$	
	0,3529		$14^\circ 54'$		<b><math>15^\circ 41'</math></b>		$22^\circ 41'$		
	0,40	$14^\circ 56'$	$15^\circ 08'$	$15^\circ 44'$		$22^\circ 38'$	$22^\circ 54'$	$23^\circ 44'$	
$\lg Y$	0,35	2,532	2,546	2,589		2,836	2,849	2,889	
	0,3529		2,545		<b>2,575</b>		2,848		
	0,40	2,518	2,531	2,573		2,820	2,832	2,870	
$\lg v_c$	0,35	2,481	2,482	2,485		2,458	2,458	2,460	
	0,3549		2,481		<b>2,479</b>		2,457		
	0,40	2,467	2,468	2,470		2,444	2,445	2,447	

Переходя от логарифмов к числам, получим

$$X = 6525 \text{ м};$$

$$T = 17,25 \text{ сек.};$$

$$|\theta_c| = 15^\circ 41'.$$

$$Y = 376 \text{ м};$$

$$v_c = 301 \text{ м/сек.}$$

## Глава VI

### РАСЧЕТ ШКАЛЫ ДИСТАНЦИОННОЙ ТРУБКИ

Для получения воздушных разрывов в определенных точках траектории применяются дистанционные трубы: механические или пороховые. Механические трубы снабжены часовым механизмом, позволяющим установить трубку на разрыв в заданный момент времени полета снаряда. Таким образом установка механической трубы производится по шкале времени. В пороховых трубах момент разрыва определяется установкой определенной длины дистанционного порохового состава. Время горения дистанционного состава, помимо сорта пороха и установленной длины дистанционного состава, зависит еще от его температуры и давления среды, в которой горает дистанционный состав.

Давление в трубке определяется не только барометрическим давлением на высоте полета снаряда, но и добавочным давлением, вызываемым сопротивлением воздуха. Давление в трубке зависит, помимо скорости поступательного движения снаряда, от формы и размеров отверстий для выхода газов и угловой скорости снаряда. Расчет шкалы дистанционной трубы требует учета влияния этих факторов.

#### § 67. Зависимость скорости горения дистанционного состава от давления, при котором происходит горение

Опыты по изучению горения трубочного состава в покое при различных условиях производил впервые Митчел (Англия) в 1855 г., сжигая трубы в Гималаях на различных высотах<sup>1</sup>. Эти опыты были вскоре повторены Франкленом путем сжигания трубок в сосудах с вакуумом. В 1862 г. Дюфур производил опыты по сжиганию дистанционных составов на различных высотах в Альпах. Все эти опыты проводились при давлении, изменяющемся в пределах 750—550 мм рт. ст.

Если выразить зависимость изменения времени горения от изменения давления в мм рт. ст. в виде

$$\frac{t}{t_0} = A \delta h,$$

то получим следующие значения коэффициента  $A$ : по опытам Митчела 0,0014—0,0016, опытам Франклена 0,0011 и Дюфура 0,00104—0,00108.

Опыты по изучению горения трубочного состава в покое производил также С. Роберт в 1865 г., сжигая в горах на различных высотах порох, запрессованный в свинцовых цилиндрических трубках. Давление при этом менялось от нормального до 530 мм рт. ст. В 1891 г. швейцарскими артиллеристами производились опыты сжигания в горах дистанционных трубок при различных установках. В 1893 г. аналогичные опыты производил на Памире полковник Булатов. Все эти опыты проводились с невращающимися трубками.

<sup>1</sup> «Артиллерийский журнал», часть 8, 1865.

В 1920 г. опубликованы опыты английских баллистиков Берстоу, Фоулера и Хартри<sup>1</sup> по изучению распределения давления на головную часть снаряда, движущегося при больших скоростях (см. § 31).

В связи с изучением этого вопроса были организованы лабораторные испытания скорости горения вращающихся трубок при давлениях от 0,4 до 3,3 ат и скорости вращения 11 700 об/мин. Аналогичные опыты проводились у нас инженер-полковником Левковичем (1932 г.).

При обработке результатов опытов обычно принимают зависимость скорости горения от давления в следующем виде:

$$\frac{U}{U_{0N}} = \left( \frac{h_m}{h_{0N}} \right)^{\nu}, \quad (1)$$

где  $U$  — скорость горения дистанционного состава;  
 $h_m$  — давление в трубке, при котором состав сгорает;  
 $h_{0N}$  — нормальное давление у поверхности земли.

С. Роберт принимает на основании своих опытов  $\nu = \frac{2}{3}$ .

В. Трофимов на основании обработки опытов различных авторов предлагает принять  $\nu = \frac{3}{4}$ .

Гарье принимает для французских трубок  $\nu = 0,57$ .

Однако анализ многочисленных опытов показывает, что для широкого диапазона изменения давления нельзя принять какое-либо постоянное значение показателя  $\nu$ . Формула (1) ни при каком постоянном  $\nu$  не может выражать достаточно точно характер зависимости скорости горения дистанционного состава от давления. Это следует хотя бы из того установленного опытом факта, что при понижении давления ниже определенного предела (примерно 0,1—0,2 ат) горение дистанционного состава прекращается. Таким образом скорость горения обращается в нуль не при давлении, равном нулю, как это следует из выражения (1), а при некотором предельном давлении, которое можно принять равным в среднем 0,15 ат. Выражая зависимость скорости горения дистанционного состава от давления в общем виде

$$\frac{U}{U_{0N}} = \phi(r),$$

где

$$r = \frac{h_m}{h_{0N}},$$

получим по результатам различных опытов следующие (табл. 21) значения функции  $\phi(r)$ :

Таблица 21

$r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0	0	0,210	0,385	0,566	0,603	0,690	0,772	0,851	0,927
1,0	1,000	1,070	1,136	1,198	1,255	1,308	1,356	1,399	1,438	1,473
2,0	1,505	1,535	1,563	1,589	1,613	1,636	1,659	1,682	1,705	1,727
3,0	1,748	1,768	1,787	1,804	1,819	1,833	1,847	1,861	1,875	1,889
4,0	1,90	1,92	1,93	1,94	1,95	1,96	1,97	1,98	1,99	2,00
5,0	2,01	2,02	2,03	2,04	2,05	2,06	2,07	2,08	2,09	2,10
6,0	2,11	2,12	2,13	2,13	2,14	2,15	2,16	2,17	2,18	2,18
7,0	2,19	2,20	2,21	2,21	2,22	2,22	2,22	2,23	2,23	2,24

<sup>1</sup> Bairstow, Fowler, Hartree, Distribution of pressures on the head of the shell, moving with high velocity. «Proceeding of the Royal society» № A-684, 1920.

На черт. 62 показаны графики зависимости скорости горения дистанционного состава от давления.

Кривая 1 отвечает формуле (1) при  $\gamma=0,7$ , кривая 2 — опытным данным, приведенным в табл. 21.

Сравнивая кривые, мы видим, что формула (1) при постоянном  $\gamma=0,7$  дает удовлетворительную точность только для давлений от 0,4 до 1,5 atm. Для больших и меньших давлений точность получается недостаточной. В дальнейшем мы будем принимать зависимость  $\phi(r)=r^\gamma$  только для трубок наземной артиллерии, для которых давление под колпаком не является чрезмерно большим.

Если рассматривать показатель  $\gamma$  как переменную величину, то по опытным данным получается уменьшение этого показателя с увеличением давления.

Следует отметить, что для давлений порядка 500 atm по данным опытов в манометрической бомбе показатель  $\gamma$  получается порядка 0,3.

Из выражения (!), логарифмируя и дифференцируя обе части равенства и рассматривая переменными величины  $h_m$  и  $U$ , получим

$$\frac{dU}{U} = \gamma \frac{dh_m}{h_m}.$$

Заменив дифференциалы приращениями и принимая  $\gamma=0,7$ , найдем

$$\frac{U}{U_0} = 0,7 \frac{dh_m}{h_m}.$$

Таким образом для небольших отклонений давления от нормального увеличение давления на 1% вызывает увеличение скорости горения дистанционного состава на 0,7%.

### § 88. Зависимость скорости горения дистанционного состава от его температуры

Опыты по изучению зависимости скорости горения дистанционного состава от температуры сравнительно немногочисленны. Все опыты по сжиганию трубок в горах при различных давлениях, проведенные в прошлом столетии, производились без учета влияния изменения температуры.

Будем выражать зависимость скорости горения дистанционного состава от давления и температуры состава в следующем общем виде:

$$\frac{U}{U_{0,N}} = \phi(r) \alpha(t_m), \quad (2)$$

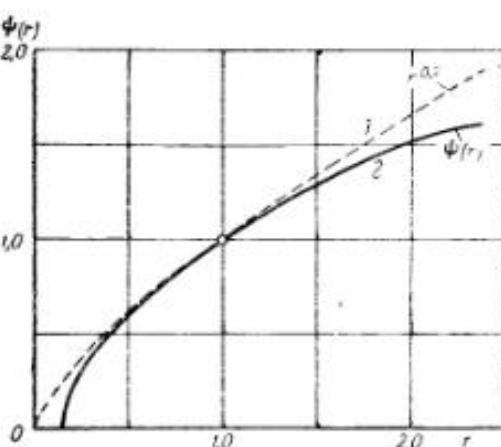
где  $t_m$  — температура трубы.

Французский баллистик Гарнье<sup>1</sup> приводит следующее выражение для функции  $\alpha(t_m)$

$$\alpha = \left( \frac{T}{T_{0,N}} \right)^\lambda, \quad (3)$$

где  $T$  — абсолютная температура состава и  $\lambda=0,2$ .

<sup>1</sup> Garnier, Calcul des tables et abaques de tir, «Mem. de l'artil. frans.», 1929.



Черт. 62

Опыты, проведенные у нас полковником Михайловым и некоторыми другими авторами, дают следующую зависимость скорости горения от температуры:

$$\alpha(t_m) = 1 + 0,0007(t_m - 15^\circ). \quad (4)$$

Из этого выражения видно, что изменение температуры состава на  $10^\circ$  изменяет скорость горения на  $0,7\%$ .

Численные значения функции  $\alpha(t_m)$ , получающиеся по формулам (3) и (4), отличаются незначительно друг от друга. Однако формула (4) более удобна для практического применения.

Следует заметить, что действительную температуру дистанционного состава при полете снаряда определить трудно, так как трубка, с одной стороны, нагревается горящими газами, а с другой — охлаждается при полете снаряда вследствие обтекания снаряда воздухом. Поэтому изменение скорости горения дистанционного состава можно учесть только в зависимости от температуры трубы перед выстрелом, а не от температуры трубы в полете. Это обстоятельство не должно, однако, приводить к значительным ошибкам, так как при проведении опытов, на основании которых получена формула (4), также измерялась лишь температура трубы перед началом ее горения.

### § 89. Добавочное давление в дистанционной трубке

При полете снаряда к атмосферному давлению добавляется некоторое давление, вызываемое сопротивлением воздуха. Добавочное давление в трубке будет близко к добавочному давлению у отверстий для выхода газов. Естественно, что оно будет в значительной мере зависеть от расположения и размеров этих отверстий.

Зависимость добавочного давления от скорости снаряда может быть определена либо путем сбушки трубы в аэродинамической трубе, либо на основании опытного исследования времени горения трубок при различных скоростях снарядов. Добавочное давление  $h_R$  для большинства конструкций трубок можно принять пропорциональным ускорению силы сопротивления воздуха (§ 37, формула 36):

$$J = c \frac{h}{h_{0,N}} F(v),$$

поэтому

$$h_p = \mu h F(v), \quad (5)$$

где  $\mu$  — некоторый коэффициент, зависящий от конструкции трубы и, в первую очередь, от расположения и размеров отверстий для выхода газов в дистанционной трубке.

Если обратиться к графику распределения давления по поверхности снаряда (§ 31), то станет очевидным, что добавочное давление в трубке должно быть тем большим, чем ближе к вершине снаряда располагаются отверстия для выхода газов. В некоторых конструкциях трубок эти отверстия перекрыты «грибком». Очевидно, что чем больше этот «грибок» по своим размерам, тем добавочное давление будет меньше.

Размеры и число выходных отверстий также должны влиять на давление в трубке. Если сделать выходные отверстия слишком малыми, то истечение газов будет затруднено и вследствие этого создастся добавочное давление от пероходовых газов.

Приведем полученные опытом значения коэффициента  $\mu$  для некоторых конструкций трубок, предназначенных для стрельбы по наземным целям (табл. 22 и черт. 63).

Таблица 22

Образец трубы	22° трубка	45° трубка	Трубка Т-6
Схема расположения отверстий для выхода газов			
Значение коэффициента $\mu$	0,0160	0,0050	0,0060

Черт. 63

На эти значения  $\mu$  надо смотреть как на осредненные величины, так как допущение о пропорциональности добавочного давления функции  $F(v_z)$  не вполне оправдывается опытом, а коэффициент  $\mu$  несколько меняется с изменением скорости.

Большее значение коэффициента  $\mu$  в 22° трубке по сравнению с 45° трубкой объясняется меньшим размером грибка, перекрывающего отверстия для выхода газов, в 22° трубке.

В трубке Т-6 имеется одно отверстие в вершине снаряда диаметром 1,5 мм и четыре боковых отверстия диаметром по 2 мм, отстоящие от вершины снаряда на 70 мм. Ввиду того что площадь боковых отверстий ( $12,5 \text{ mm}^2$ ) значительно превышает площадь осевого отверстия ( $1,7 \text{ mm}^2$ ), давление под колпаком дистанционной трубы мало отличается от давления у боковых отверстий и сравнительно невелико (так как боковые отверстия достаточно удалены от вершины).

В табл. 23 приведены численные значения добавочного давления, выраженного в атмосферах, для указанных конструкций трубок.

Таблица 23

Образец трубы	$\frac{\sigma}{\sigma_0}$	300	500	700
22° трубка . . . . .	0,25	1,39	2,56	—
45° трубка . . . . .	0,08	0,44	0,80	—
Трубка Т-6 . . . . .	0,00	0,52	0,96	—

Из табл. 23 видно, что добавочное давление по своей средней величине сравнимо с атмосферным давлением и им нельзя ни в коем случае пренебречь.

Зенитная трубка ТЗУГ по форме колпака отличается от трубы Т-6 размерами отверстий. В трубке ТЗУГ диаметр осевого отверстия равен 5 мм, а диаметр боковых отверстий 1 мм. Так как при этом площадь осевого отверстия в шесть с лишним раз превышает площадь боковых отверстий, то давление под колпаком получается близким к давлению в вершине снаряда, определяемому по формуле Релея (см. § 18). Давление под колпаком трубы ТЗУГ при вылете доходит до 7 ат (см. § 95).

Первый ученый, указавший на необходимость учета добавочного давления в дистанционных трубках и разработавший метод учета этого давления, был русский артиллерист Василий Михайлович Трофимов. Его труд<sup>1</sup> «О зависимости горения дистанционных трубок от условий стрельбы» является, пожалуй, лучшей работой по этому вопросу во всей мировой литературе.

Отметим еще один фактор, влияющий на давление в дистанционной трубке, — это вращательное движение снаряда.

Вращение снаряда ускоряет выход газов и способствует понижению давления. Это подтверждается сравнительными опытами сжигания трубок в покое и при вращении на ротационной машине. Влияние вращательного движения на изменение давления в трубке будет различным для различных конструкций трубок. Можно считать, что в среднем давление в трубке понижается вследствие вращения снаряда на 3—5%.

### § 90. Общее выражение для установки трубы

Общее выражение для скорости горения дистанционного состава напишем в следующем виде:

$$\frac{U}{U_{0N}} = \phi(r) \alpha(t_m), \quad (6)$$

где функции  $\phi(r)$  и  $\alpha(t_m)$  определяются, как указано в § 87 и 88, а

$$r = \frac{h_m}{h_{0N}} = \frac{h + h_R}{h_{0N}} = \frac{h}{h_{0N}} + \mu \frac{h}{h_{0N}} F(v_z)$$

или окончательно

$$r = \frac{h}{h_{0N}} [1 + \mu F(v_z)].$$

Длина  $l$  дистанционного состава, который горит за время  $t$  полета снаряда, может быть определена из выражения  $\frac{dt}{dt} = U$ , откуда

$$l = \int_0^t U dt = U_{0N} \int_0^t \phi(r) \alpha(t_m) dt.$$

В § 88 указывалось, что изменение температурных условий горения дистанционного состава при полете снаряда не может быть учтено со сколько-нибудь удовлетворительной точностью. Поэтому целесообразно в явном виде учитывать лишь влияние начальной температуры дистанционного состава, а для учета влияния изменения температуры с высотой ввести некоторый коэффициент согласования  $k$ :

$$\alpha(t_m) = k \alpha(t_{m0}),$$

где  $t_{m0}$  — температура трубы перед выстрелом.

Таким образом

$$l = k \alpha(t_{m0}) U_{0N} \int_0^t \phi(r) dt.$$

Вводя обозначение

$$\frac{l}{U_{0N}} = n,$$

где

$n$  — время горения дистанционного состава длины  $l$  в нормальных условиях, и опуская аргумент  $t_{m0}$  под знаком функции  $\alpha$ , получим окончательно

<sup>1</sup> «Артиллерийский журнал», № 5—7, 1899.

$$n = k \alpha \int_0^t \psi(r) dt, \quad (7)$$

где

$n$  — время горения в покое при нормальных условиях дистанционного состава длины  $l$ , горящего в полете  $t$  сек.;

$k$  — коэффициент согласования, учитывающий изменение температуры трубы с высотой и некоторые неточности теории, как, например, неучет влияния вращения трубы; этот коэффициент определяется по данным опытных стрельб (см. § 150);

$\alpha$  — множитель, учитывающий влияние начальной температуры трубы на скорость горения дистанционного состава, определяемый по формуле

$$\alpha = 1 + 0,0007(t_{m0} - 15);$$

$\psi(r)$  — функция, учитывающая зависимость скорости горения дистанционного состава от суммарного давления (атмосферного и добавочного) в дистанционной трубке, определяемая по табл. 21 или приближенно из выражения  $\psi(r) = r^{0.7}$ ;

$r$  — суммарное давление в трубке, отнесенное к величине  $h_{0N} = 750$  мм, определяемое из выражения

$$r = \frac{h}{h_{0N}} = \frac{h}{h_{0N}} [1 + \mu F(v_t)];$$

$\mu$  — коэффициент динамического давления, зависящий от конструкции трубы;

$$v_t = v \sqrt{\frac{c_{0N}}{r}}.$$

Величины  $\frac{h}{h_{0N}}$  и  $\frac{c_{0N}}{r}$  для нормальных условий являются известными функциями высоты и могут быть определены по табл. 11 и 16 ч. III. Поэтому, если траектория полета снаряда рассчитана, и для каждого момента времени  $t$  известны значения  $v_t$  и  $y$ , то значения интеграла в выражении (7) могут быть вычислены обычными методами численного интегрирования.

Если расчет траектории производится при аргументе  $x$ , то выражение (7) легко преобразовать для этого аргумента, учитывая, что  $dt = \frac{dx}{u}$ . При этом получим

$$n = k \alpha \int_0^x \frac{\psi(r)}{u} dx. \quad (8)$$

Далее, принимая зависимость

$$\psi(r) = r^\alpha = \left[ \frac{h}{h_{0N}} (1 + \mu F(v_t)) \right]^\alpha,$$

получим

$$n = k \alpha \int_0^x \left( \frac{h}{h_{0N}} \right)^\alpha \left[ 1 + \mu F(v_t) \right]^\alpha dt \quad (9)$$

или

$$n = k \alpha \int_0^x \left( \frac{h}{h_{0N}} \right)^\alpha \left[ 1 + \mu F(v_t) \right]^\alpha \frac{dx}{u}. \quad (10)$$

Иногда дистанционные трубы градуируются непосредственно в секундах горения в покое, т. е. в величинах  $n$ . Чаще же трубы градуируются в некоторых условных делениях установки трубы  $N$ .

Для того чтобы можно было перейти от подсчитанных величин  $n$  к установкам трубы  $N$ , необходимо сжигать трубы в покое при различных установках трубы  $N$  и определять время горения  $n$ . Полученный таким образом график зависимости  $n = f(N)$  позволит перейти от вычисленных значений  $n$  к установкам трубы в тех делениях, которые на ней насечены.

### § 91. Вычисление установки трубы по средней скорости полета снаряда

Точное вычисление интеграла в выражении (9) возможно только одним из численных методов. Излагаемый в настоящем параграфе приближенный метод позволяет упростить вычисление установки трубы. Так же, как это принято во всех приближенных методах вычисления траекторий, мы не будем учитывать влияния скорости звука на сопротивление воздуха.

Исходя из допущения, что добавочное давление пропорционально ускорению силы сопротивления воздуха

$$J = cH(y)F(v) = c \frac{h}{h_{0N}} \frac{c_{0N}}{r} F(v),$$

получим

$$h_R = \mu h \frac{c_{0N}}{r} F(v).$$

Таким образом, если не учитывать влияния изменения скорости звука, то надо в полученных ранее зависимостях заменить  $F(v_t)$  на  $\frac{c_{0N}}{r} F(v)$ .

Обозначим  $\mu' = \frac{c_{0N}}{r} \mu$ . Кроме того, вынесем  $\left( \frac{h}{h_{0N}} \right)^\alpha$  средним значением из-под знака интеграла и обозначим

$$\alpha_1 = \alpha \left( \frac{h_{cp}}{h_{0N}} \right)^\alpha.$$

При этом из общего выражения для установки трубы получим

$$n = k \alpha_1 \int_0^T [1 + \mu' F(v)]^\alpha dt. \quad (11)$$

Вынося выражение  $[1 + \mu' F(v)]^\alpha$  средним значением из-под знака интеграла и интегрируя от точки вылета до точки падения, получим

$$n_c = k \alpha_1 [1 + \mu' F(v_{cp})]^\alpha T. \quad (12)$$

Величину  $F(v_{cp})$  будем определять, исходя из выражения

$$\int_0^T F(v) dt = F(v_{cp}) T,$$

откуда

$$F(v_{cp}) = \frac{1}{T} \int_0^T F(v) dt.$$

Для вычисления  $\int_0^T F(v) dt$  будем исходить из известного уравнения

$$\frac{dv}{dt} = -cH(y)F(v) - g \sin \theta,$$

откуда

$$\int_{v_0}^{v_e} dv = -c \int_0^T H(y)F(v) dt - g \int_0^T \sin \theta dt,$$

$$cH(y_{cp}) \int_0^T F(v) dt = v_0 - v_e - g \int_0^T \sin \theta dt.$$

Таким образом получим

$$F(v_{cp}) = \frac{1}{T} \int_0^T F(v) dt = \frac{v_0 - v_e}{cH(y_{cp}) T} - \frac{g}{cH(y_{cp}) T} \int_0^T \sin \theta dt. \quad (13)$$

Далее, учитывая, что

$$\sin \theta dt = \frac{dy}{v},$$

получим

$$-\int_0^T \sin \theta dt = -\int_0^T \frac{y' dt}{v} = -\int_0^Y \frac{dy}{v_u} - \int_Y^0 \frac{dy}{v_n} = \int_0^Y \left( \frac{1}{v_u} - \frac{1}{v_n} \right) dy,$$

где  $v_u$  и  $v_n$  — скорости, отвечающие для одной и той же высоты восходящей и нисходящей ветвям траектории.

Рассмотрим величину

$$\Phi = \frac{1}{v_u} - \frac{1}{v_n}.$$

Эта величина будет наибольшей для  $y=0$ :

$$\Phi_0 = \frac{1}{v_e} - \frac{1}{v_0}$$

и равна нулю для  $y=Y$ , так как в вершине скорости  $v_u$  и  $v_n$  совпадают и  $\Phi_s=0$ .

Вынося  $\frac{1}{v_u} - \frac{1}{v_n}$  из-под знака интеграла средним значением

$$\Phi_{cp} = \frac{\Phi_0 + \Phi_s}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_e} - \frac{1}{v_0} \right) = \frac{v_0 - v_e}{2v_e v_0},$$

получим

$$-\int_0^T \sin \theta dt = \frac{v_0 - v_e}{2v_e v_0} Y.$$

Подставляя это значение в выражение (13), получим

$$\boxed{F(v_{cp}) = \frac{v_0 - v_e}{cH(y_{cp}) T} \left( 1 + \frac{gY}{2v_e v_0} \right)}, \quad (14)$$

где  $y_{cp}$  принимается, как обычно, равным  $\frac{2}{3}Y$ . Зная  $F(v_{cp})$ , можно определить установку трубы  $n_c$  по формуле (12).

Для облегчения расчетов в приложении (табл. IV) даны значения функции

$$S(v, \mu') = [1 + \mu' F(v)]^n,$$

вычисленные для  $\mu'=0,7$ .

Для облегчения расчетов упростим также выражение для  $x_1$ :

$$x_1 = \left( \frac{h_{cp}}{h_{0N}} \right)^n x = \left( \frac{h_0}{h_{0N}} \right)^n \left( \frac{h_{cp}}{h_0} \right)^n x.$$

Первый множитель этого выражения учитывает отклонение барометрического давления от нормального, а второй — изменение барометрического давления с высотой. Чтобы избежать необходимости возвышать в степень  $\mu'=0,7$ , можно внести следующие преобразования:

$$\left( \frac{h_0}{h_{0N}} \right)^n = \left( \frac{h_0}{750} \right)^n = \left( 1 + \frac{h_0 - 750}{750} \right)^n.$$

Разлагая последнее выражение в биномиальный ряд и пренебрегая малыми величинами высших порядков относительно  $\frac{h_0 - 750}{750}$ , получим для  $\mu'=0,7$

$$\left( \frac{h_0}{750} \right)^{0,7} = 1 + 0,7 \frac{h_0 - 750}{750} = 1 + 0,00093 (h_0 - 750)$$

или после округления

$$\left( \frac{h_0}{750} \right)^{0,7} = 1 + 0,001 (h_0 - 750).$$

Что касается величины  $\frac{h_{cp}}{h_0}$ , то она должна вычисляться для  $y_{cp} = \frac{2}{3}Y$ .

Если построить график зависимости  $\left( \frac{h_{cp}}{h_0} \right)^{0,7}$  от  $Y$ , то легко убедиться, что кривая, выражющая эту зависимость, очень близка к прямой, отвечающей зависимости

$$\left( \frac{h_{cp}}{h_0} \right)^{0,7} = 1 - 0,000053 Y.$$

Для обычных высот траектории дистанционных снарядов, при стрельбе по наземным целям, ошибка от применения последней зависимости не превосходит  $0,1^\circ$ .

Окончательно, подставляя  $x = 1 + 0,0007(t_{m0} - 15^\circ)$ , получим

$$x_1 = [1 + 0,0007(t_{m0} - 15^\circ)] \cdot [1 + 0,001(h_0 - 750)] \cdot (1 - 0,000053 Y). \quad (15)$$

## § 92. Приведение разрыва к нормальному интервалу

Найденное из выражения (12) значение  $n_c$  отвечает получению центра группирования разрывов на горизонте орудия. Для получения нормальной высоты разрывов надо уменьшить установку трубы на некоторую величину  $\delta n_{np}$ , отвечающую разности  $\delta t_p$ , т. е. времени полета снаряда от наивыгоднейшей точки разрыва до горизонта.

Обозначая нормальный интервал разрыва через  $I_p$ , получим

$$\delta t_p = \frac{I_p}{v_e \cos \theta_e}.$$

Далее из выражения (11)

$$dn = k x_1 [1 + \mu' F(v)]^n dt = k x_1 S(v, \mu') dt. \quad (16)$$

Подставляя в (16)  $v=v_e$  и  $dt=dt_p$  и заменяя дифференциалы приращениями, получим

$$\delta n_p = k x_1 S(v_e) dt_p = \frac{k x_1 S(v_e) I_p}{v_e \cos \theta_e}.$$

Обычно  $I_p$  принимается равным  $\sim 85$  м. При этом  $\delta n_p$  получается порядка 0,2—0,4 сек. Так как множители  $k$  и  $\alpha$  обычно близки к единице, а величину  $\delta n_p$  достаточно вычислять с небольшой относительной точностью, то можно в выражение (16) положить  $k \alpha_1 = 1$ ; получим окончательно

$$\delta n_p = \frac{I_p S(v_c)}{v_c \cos \theta_c}. \quad (17)$$

Установку трубы для нормального разрыва определим из выражения

$$n = n_c - \delta n_p. \quad (18)$$

Практические приемы вычисления установки трубы разберем на следующем примере.

### § 93. Пример вычисления установки трубы для стрельбы по наземным целям

Исходные данные:

Калибр . . . . .	$d = 0,0762$ м
Начальная скорость . . . . .	$v_0 = 624$ м/сек
Угол бросания . . . . .	$\theta_0 = 6^{\circ}18'$
Баллистический коэффициент . . . . .	$c = 0,756$
Полная горизонтальная дальность . . . . .	$X = 4000$ м
Высота траектории . . . . .	$Y = 145$ м
Угол падения . . . . .	$\theta_e = 10^{\circ}16'$
Окончательная скорость . . . . .	$v_e = 276$ м/сек
Полное время полета . . . . .	$T = 10,7$ сек.
Нормальный интервал разрыва . . . . .	$I_p = 85$ м

$$\mu = 0,0160; k = 0,99.$$

Метеорологические условия нормальные.

Все расчеты ведем на 25-см логарифмической линейке.

$$\text{Определяем } y_{cp} = \frac{2}{3} Y = \frac{2}{3} 145 = 97.$$

По табл. 9 части III находим  $H(97) = 0,990$ .

Вычисляем  $F(v_{cp})$  по формуле (14):

$$F(v_{cp}) = \frac{624 - 276}{0,756 \cdot 0,990 \cdot 10,7} \left[ 1 + \frac{9,81 \cdot 145}{2 \cdot 624 \cdot 276} \right] = 43,5 (1 + 0,00041) = 43,5.$$

По табл. 3 части III находим по величине  $F(v_{cp}) = 43,5$

$$v_{cp} = 377,6.$$

По таблице функции  $S(v, \mu')$  (приложение, табл. IV) для  $v = 377,6$  и  $\mu' = 0,0160$  находим

$$S(v_{cp}) = 1,45.$$

Вычисляем значение  $\alpha_1$  по формуле (15), учитывая, что  $h_0 = h_{0,Y} = 750$  и  $t_{n,0} = 15^\circ$ ; получим

$$\alpha_1 = 1 - 0,000053 Y = 1 - 0,000053 \cdot 145 = 0,992.$$

Вычисляем  $n_c$  по формуле (12):

$$n_c = k \alpha_1 S(v_{cp}) T = 0,99 \cdot 0,992 \cdot 1,45 \cdot 10,7 = 15,25 \text{ сек.}$$

Определяем по табл. IV  $S(v_e) = S(276) = 1,11$  и вычисляем  $\delta n_p$  по формуле (17):

$$\delta n_p = \frac{I_p S(v_e)}{v_e \cos \theta_e} = \frac{85 \cdot 1,11}{276 \cdot 0,986} = 0,35.$$

Вычисляем установку трубы для нормального разрыва

$$n = n_c - \delta n_p = 15,25 - 0,35 = 14,90 \text{ сек.}$$

Для вычисления установки трубы  $N$  в тех делениях, в которых насечена трубка, надо знать по данным скжигания трубок в покое зависимость между  $n$  и  $N$ . По графику для 22" трубы это отвечает  $N = 91$  делению трубы.

### § 94. Метод Трофимова<sup>1</sup>. Вычисление установки трубы для прицельной стрельбы

Будем исходить из выражения

$$n = k \alpha_1 \int_0^U \left[ 1 + \mu \frac{\tau_{0N}}{\tau} F(v) \right]^{\nu} dt. \quad (18')$$

Рассматривая случай прицельной стрельбы, применим подстановку Сиаччи в следующем виде:

$$F(v) = F(U) \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos \theta},$$

где

$$U = \frac{v \cos \theta}{\cos \theta_0}.$$

Выражение для  $dt$  также напишем, исходя из метода Сиаччи

$$dt = - \frac{1}{c' \cos \theta_0} \frac{dU}{F(U)}.$$

Подставляя это значение в выражение (18'), получим

$$n = - \frac{k \alpha_1}{c' \cos \theta_0} \int_{v_0}^U \left[ 1 + \mu \frac{\tau_{0N}}{\tau} \cdot \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos \theta} F(U) \right]^{\nu} \frac{dU}{F(U)}.$$

Обозначим

$$\mu' = \mu \frac{\tau_{0N}}{\tau} \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos \theta} = \mu \frac{\tau_{0N}}{\tau_0} \frac{\cos^2 \theta_0}{\cos \theta}.$$

Рассматривая выражение

$$\frac{\tau_0 \cos^2 \theta_0}{\tau \cos \theta},$$

видим, что на восходящей ветви траектории первый множитель растет, второй убывает, а на нисходящей ветви — наоборот. Таким образом изменения этих множителей вдоль траектории частично компенсируются. Рассматривая случай прицельной стрельбы, когда  $\cos \theta$  и  $\tau$  меняются мало, можно принять

$$\frac{\tau_0 \cos^2 \theta_0}{\tau \cos \theta} \approx 1; \quad \mu' = \mu \frac{\tau_{0N}}{\tau_0},$$

откуда

$$n = - \frac{k \alpha_1}{c' \cos \theta_0} \int_{v_0}^U \left[ 1 + \mu' F(U) \right]^{\nu} \frac{dU}{F(U)}. \quad (19)$$

Обозначим

$$N(U, \mu') = - \int_{v_0}^U \left[ 1 + \mu' F(U) \right]^{\nu} \frac{dU}{F(U)}$$

<sup>1</sup> Метод Трофимова переработан автором применительно к новым образцам трубок. См. Шапиро Я. М., Расчет шкалы дистанционной трубы, «Известия Артиллерийской академии», т. XXX.

и из выражения (19) найдем

$$n = \frac{kx_1}{c' \cos \theta_0} [N(U, \mu) - N(v_0, \mu')]$$

или для точки падения

$$n_e = \frac{kx_1}{c' \cos \theta_0} [N(U_e, \mu) - N(v_0, \mu')] \quad (20)$$

Таблицы  $N(U, \mu')$  для значений  $U$  от 200 до 800 м/сек,  $\mu'$  — от 0,0030 до 0,0180 и  $\nu = 0,7$ , вычисленные для закона сопротивления воздуха Сиаччи, помещены в табл. II приложения.

В виде примера решим по методу Трофимова задачу, рассмотренную в § 93.

Предварительно подсчитаем  $c' = c_0^2$ . По табл. 31 части III находим  $\beta = 1,013$ , откуда

$$c' = c_0^2 = 0,755 \cdot 1,013 = 0,766.$$

Далее вычисляем  $U_e$ :

$$U_e = \frac{v_0 \cos \theta_0}{\cos \theta_e} = \frac{276 \cos 10^\circ 16'}{\cos 6^\circ 18'} = 273,2.$$

По табл. II приложения для  $\mu' = 0,0160$  находим

$$N(U_e, \mu') = 14,36; \quad N(v_0, \mu') = 2,66.$$

Ранее мы имели  $k = 0,99$  и  $\alpha_1 = 0,992$ .  
Вычисляем  $n_e$ :

$$n_e = \frac{kx_1}{c' \cos \theta_0} [N(U_e, \mu') - N(v_0, \mu')] = \frac{0,99 \cdot 0,992}{0,766 \cdot \cos 6^\circ 18'} [14,36 - 2,66] = 15,10 \text{ сек.}$$

Ранее, в § 93, мы получили  $n_e = 15,25$ .

### § 95. Расчет установки трубы для зенитной стрельбы

В условиях стрельбы зенитной артиллерии требуется знать установки трубы для любой точки траектории и для углов бросания до  $80-85^\circ$ . При больших начальных скоростях и больших высотах траектории зенитной артиллерии давление в дистанционной трубке меняется в широких пределах. Для трубы типа ТЗУГ давление в трубке в момент вылета снаряда получается порядка 7 ат, а на высоте 9000 м давление в трубке меньше 0,5 ат. При этих условиях применять приближенную зависимость

$$\psi(r) = r^2$$

нельзя (см. § 87).

В трубке ТЗУГ давление под колпаком на несколько процентов меньше давления в вершине снаряда, определяемого по формуле Релея (§ 18). Суммарное давление в трубке может быть определено из выражения

$$r = \frac{h_m}{h_{0,N}} = \frac{h}{h_{0,N}} \sigma(v_r), \quad (21)$$

где  $\sigma(v_r)$  — функция, определяемая из опыта и значения которой даны в табл. 24.

Таблица 24

$v_r$	00	10	20	30	40	50	60	70	80	90	$\sigma(v_r)$
100	1,00	1,12	1,13	1,15	1,17	1,19	1,22	1,24	1,27	1,30	
200	1,33	1,36	1,39	1,43	1,47	1,51	1,55	1,59	1,63	1,67	
300	1,72	1,76	1,81	1,85	1,90	1,95	2,01	2,06	2,12	2,17	
400	2,23	2,29	2,35	2,41	2,48	2,55	2,62	2,70	2,78	2,86	
500	2,95	3,04	3,14	3,24	3,34	3,45	3,56	3,68	3,80	3,92	
600	4,05	4,18	4,31	4,45	4,58	4,71	4,84	4,98	5,11	5,25	
700	5,39	5,53	5,67	5,81	5,93	6,10	6,25	6,40	6,55	6,70	
800	6,85	7,00	7,16	7,31	7,47	7,62	7,77	7,93	8,08	8,24	

Так как расчет основных элементов траектории для зенитной стрельбы производится обычно методом численного интегрирования, то и расчет установки трубы следует производить тем же методом.

При этом интегрируется численно уравнение

$$n = ka \int_0^t \psi(r) dt \quad (22)$$

при аргументе  $t$  или

$$n = ka \int_0^x \frac{\psi(r)}{u} dx \quad (23)$$

при аргументе  $x$ , где

$$r = \frac{h}{h_{0,N}} \sigma(v_r) = B(y) \sigma(v_r). \quad (24)$$

Значения  $\psi(r)$  определяются по табл. 21, а значения  $B(y)$  — по табл. VI приложения.

Заметим, что вид функции  $\sigma(v_r)$  зависит от конструкции трубы, но не зависит от типа и калибра снаряда или от применяемого закона сопротивления воздуха.

В виде примера приведем расчет установки трубы для небольшого участка траектории при стрельбе из 85-мм пушки.

Исходные данные:

$$c = 0,4433; \quad v_0 = 800 \text{ м/сек}; \quad \theta_0 = 48^\circ.$$

Предварительно необходимо вычислить элементы траектории по методу численного интегрирования.

Результаты даны в следующей таблице:

$x$	$y$	$v_r$	$t$	$n$
0	0	800,0	0	535,3
250	276,6	759,5	0,48	508,9
500	550,8	720,7	0,98	484,0
750	822,4	684,2	1,51	460,5
1000	1091,1	649,5	2,07	438,4
1250	1356,6	616,5	2,65	417,7
1500	1618,6	585,2	3,26	398,3

Уравнение (23) перепишем в виде

$$n_x = ka \int_0^x \frac{\psi(r)}{u} dr \quad (25)$$

и будем интегрировать при начальных условиях  $x=0$  и  $n=0$ ; кроме того, примем  $k=1$  и  $\alpha=1$ .

Предварительно необходимо вычислить значения  $r$ ,  $\frac{\phi(r)}{u}$ .

Расчеты приведены ниже во вспомогательном бланке. Их можно вести при помощи 25-см логарифмической линейки. Результаты интегрирования уравнения (25) даны в основном бланке.

Вспомогательный бланк

	0	1	2	3	4	5	6
$B(y)$	1,000	0,967	0,936	0,907	0,878	0,850	0,823
$\alpha(v_0)$	6,85	6,24	5,68	5,17	4,70	4,26	3,86
$r$	6,85	6,04	5,31	4,69	4,13	3,62	3,18
$\frac{\phi(r)}{u}$	2,18	2,11	2,04	1,98	1,92	1,850	1,783
$n'_x$	535	509	484	460	438	418	398
$n'_x$	0,00407	415	422	431	438	443	448

Основной бланк

$x$	$n$	$\Delta n$	$n'_x$	$\Delta n'_x$	$\Delta^2 n'_x$
0	0	1,03	0,00407	8	-1
250	1,03	1,05	415	7	2
500	2,08	1,07	422	9	-2
750	3,15	1,09	431	7	-2
1000	4,24	1,10	438	5	0
1250	5,34	1,11	443	5	
1500	6,45		448		

Для того чтобы от величин  $n$  перейти к делениям  $N$  трубы, необходимо воспользоваться данными скжигания трубы в покое.

Эти данные для трубы ТЗУГ таковы:

$N$	30	50	75	100	125	165
$n$	5,96	10,17	15,26	20,39	25,50	33,52

Для  $n=6,45$  получим  $N=32,3$ .

### § 96. Приближенный метод вычисления установки трубы для зенитной стрельбы<sup>1</sup>

В § 64 рассмотрено применение метода Сиаччи для вычисления элементов траектории при зенитной стрельбе. Этот метод можно распространить и на вычисление установки трубы.

За исходное уравнение примем

$$n = k \alpha \int_0^t \frac{\phi(r)}{u} dt,$$

<sup>1</sup> Метод разработан майором Обэт в диссертации «Некоторые вопросы методики составления таблиц стрельбы зенитной артиллерии».

где

$$r = \frac{h}{h_{0N}} \alpha(v_0).$$

Вынесем из-под знака функции  $\phi(r)$  величину  $(\frac{h}{h_{0N}})^{0.7}$ , так что

$$\phi(r) = \left(\frac{h}{h_{0N}}\right)^{0.7} \phi[\alpha(v_0)] = \left(\frac{h}{h_{0N}}\right)^{0.7} \Phi(v_0).$$

Такая операция вполне точна, если исходить из зависимости  $\phi(r) = r^{0.7}$ . Для зенитных трубок эта зависимость приводит к некоторым погрешностям, которые надо как-то компенсировать. Кроме того, заменим под знаком функции  $\Phi(v_0)$  величину  $v_0$  через псевдоскорость  $U$ :

$$U = \frac{v \cos \theta}{\cos \theta_0}.$$

При этом получим следующую подстановку:

$$\phi(r) \approx \gamma \left(\frac{h_{ep}}{h_{0N}}\right)^{0.7} \Phi(U), \quad (26)$$

где  $\gamma$  — некоторый компенсирующий множитель. Кроме того, согласно § 64, заменим

$$dt = -\frac{1}{cH(y_{ep})} \frac{dU}{F(U)}.$$

Тогда выражение для установки трубы примет следующий вид:

$$n = -\frac{k z_1 \gamma}{cH(y_{ep})} \int_{v_0}^U \frac{\Phi(U)}{F(U)} dU, \quad (27)$$

где

$$z_1 = \alpha \left(\frac{h_{ep}}{h_{0N}}\right)^{0.7}.$$

Введем новую функцию

$$L(U) = A - \int_{900}^U \frac{\Phi(U)}{F(U)} dU,$$

где  $A=1,00$ .

Тогда выражение для установки трубы перепишем в следующем виде:

$$n = \frac{k z_1 \gamma}{cH(y_{ep})} [L(U) - L(v_0)]. \quad (28)$$

Значения функции  $L(U)$  даны в приложении (табл. VII).

Для компенсирующего множителя  $\gamma$  можно принять следующее выражение:

$$\gamma = \left(\frac{\cos \varepsilon}{\cos \theta_0}\right)^{1.7},$$

где  $\varepsilon$  — угол места цели, определяемый из выражения  $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{y}{x}$ . Такое значение компенсирующего множителя получено путем сравнения большого числа расчетов данным методом и методом численного интегрирования.

## Глава VII ТЕОРИЯ ПОПРАВОК

### § 97. Введение

При решении основной задачи внешней баллистики делается ряд допущений, которые не отвечают действительным условиям стрельбы.

Основная задача внешней баллистики решается для каких-то основных (или табличных) значений баллистических параметров  $v_0$ ,  $\theta_0$ ,  $c$  и для нормальных метеорологических условий. В действительности же приходится, как правило, вести стрельбу при условиях, отличающихся от табличных, и при состоянии атмосферы, отличном от принятого за нормальное. При решении основной задачи внешней баллистики движение снаряда рассматривалось в неподвижной атмосфере. В действительности же всегда имеется в наличии ветер, вследствие чего скорость центра массы снаряда относительно воздуха не совпадает с его скоростью относительно земли.

До сих пор мы не учитывали влияния на полет снаряда формы земли и вращения земли. При обычном вычислении траектории мы определяем дальность до точки падения на горизонте точки вылета, тогда как дальность на криволинейной поверхности земли больше. Кроме того, мы принимали ускорение силы тяжести постоянным по величине и направлению. В действительности это ускорение меняется как с широтой места, так и с высотой. Не учитывалась также сила инерции Кориолиса, связанная с вращением земли.

Мы перечислили те факторы, которые не учитывались при решении основной задачи внешней баллистики. Легко видеть, что учет некоторых факторов, как, например, влияния вращения земли или влияния переменного ветра и др., требует преобразования дифференциальных уравнений движения центра массы снаряда. При этом необходимо, вместо обычных дифференциальных уравнений движения снаряда, составить и интегрировать новые уравнения, учитывающие указанные факторы.

Если же требуется определить элементы траектории для случая, когда начальная скорость или вес снаряда отличны от табличных, то, очевидно, нет надобности в преобразовании дифференциальных уравнений движения, так как можно обычные уравнения интегрировать при измененных значениях начальной скорости и баллистического коэффициента.

В большинстве случаев, встречающихся в практике артиллерийской стрельбы, приходится иметь дело с небольшими отклонениями параметров стрельбы от табличных, например, с изменениями начальной скорости или веса снаряда на  $2-3\%$ . Отвечающие этим отклонениям малые изменения элементов траектории будем называть поправками.

При решении основной задачи внешней баллистики основными параметрами, вполне определяющими элементы траектории, являются баллистический коэффициент  $c$ , начальная скорость  $v_0$  и угол бросания  $\theta_0$ . Мы можем, следовательно, рассматривать элементы основных траекторий как функции этих трех основных параметров. Если же принять

во внимание факторы, не учитываемые при решении основной задачи внешней баллистики, то элементы траектории будут зависеть еще от ряда параметров, которые мы в общем виде обозначим через  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Нас будет интересовать в первую очередь вопрос о поправках для важнейшего элемента траектории — полной горизонтальной дальности  $X$ . Согласно сказанному выше мы можем написать

$$X = f(c, v_0, \theta_0, a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Рассмотрим малые изменения параметров

$$\delta c, \delta v_0, \delta \theta_0, \delta a_1, \dots, \delta a_n$$

и соответствующее им изменение дальности  $\delta X$ .

Разлагая приращение  $\delta X$  в ряд, считая изменения параметров величинами первого порядка малости и пренебрегая их квадратами, мы можем принять  $\delta X = dX$ , откуда

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial c} \delta c + \frac{\partial X}{\partial v_0} \delta v_0 + \frac{\partial X}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 + \dots + \frac{\partial X}{\partial a_n} \delta a_n. \quad (1)$$

Частные производные  $\frac{\partial X}{\partial c}, \frac{\partial X}{\partial v_0}, \dots$  носят название поправочных коэффициентов для полной дальности. Чтобы выяснить реальный смысл этих поправочных коэффициентов, рассмотрим частный случай изменения только одного параметра, например  $v_0$ . Из последнего равенства получим

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial v_0} \delta v_0.$$

Рассматривая случай изменения начальной скорости на 1 м/сек, найдем

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial v_0}.$$

Таким образом мы видим, что поправочный коэффициент численно равен изменению дальности, отвечающему изменению параметра на одну единицу. Следует, однако, заметить, что не всегда допустимо считать единичное изменение параметра настолько малым, чтобы можно было пользоваться формулой для  $\delta X$ . Так, например, изменение угла бросания на одну единицу — один радиан, равный  $57,3^\circ$ , не может считаться малой величиной.

### § 98. Вычисление основных поправочных коэффициентов по методу разностей

Будем исходить из наличия баллистического сборника, в котором приведены значения элементов траектории, отвечающие значениям  $c, v_0, \theta_0$ , изменяющимся через определенные интервалы.

В этом случае основные поправочные коэффициенты

$$\frac{\partial X}{\partial c}, \frac{\partial X}{\partial v_0}, \frac{\partial X}{\partial \theta_0}$$

могут быть вычислены, исходя из конечных разностей полной дальности, отвечающих соответствующим изменениям аргументов.

Для этого применим формулы численного дифференцирования с учетом разностей до второго порядка включительно. Наиболее удобно в данном случае применить формулу (12) § 79

$$y_x' = \frac{y_n + y_{n-1}}{2h}$$

или тождественную ей формулу

$$y_x' = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}. \quad (2)$$

Обозначая через  $h_c$ ,  $h_i$ ,  $h_v$  табличные интервалы баллистического коэффициента, угла бросания и начальной скорости, получим

$$\frac{\partial X}{\partial c} = \frac{X_{(c+h_c)} - X_{(c-h_c)}}{2h_c}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_0} = \frac{X_{(\theta_0+h_i)} - X_{(\theta_0-h_i)}}{2h_i}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial X}{\partial v_0} = \frac{X_{(v_0+h_v)} - X_{(v_0-h_v)}}{2h_v}, \quad (5)$$

где  $X_{(c+h_c)}$  — значение полной дальности, отвечающее значениям параметров  $c+h_c$ ,  $v_0$  и  $\theta_0$ ;

$X_{(v_0-h_v)}$  — значение полной дальности, отвечающее значениям параметров  $c$ ,  $v_0-h_v$ ,  $\theta_0$  и т. д.

В виде примера вычислим основные поправочные коэффициенты при помощи баллистического сборника Академии для значений  $\theta_0=20^\circ$ ;  $c=0,6$ ;  $v_0=500$  м/сек. Для таблиц этого сборника имеем  $h_c=0,05$ ;  $h_i=50$ ;  $h_v=5^\circ$ .

Интервал угла бросания пересчитаем в радианах

$$h_i = 5 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{36}.$$

По таблицам баллистического сборника находим

$c$	$v_0$	$\theta_0$	$\lg X$	$X$	Разность
0,6	500+50	$20^\circ$	3,8860	7691	
0,6	500-50	$20^\circ$	3,8200	6607	1084
0,6+0,05	500	$20^\circ$	3,8415	6942	
0,6-0,05	500	$20^\circ$	3,8690	7396	-454
0,6	500	$20^\circ+5^\circ$	3,9045	8026	
0,6	500	$20^\circ-5^\circ$	3,7805	6033	1993

Получаем следующие значения поправочных коэффициентов по формулам (3) — (5):

$$\frac{\partial X}{\partial c} = -\frac{454}{2 \cdot 0,05} = -4540,$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_0} = \frac{1993}{2 \cdot \frac{\pi}{36}} = 11430,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v_0} = \frac{1084}{2 \cdot 50} = 10,84.$$

Пользуясь этими поправочными коэффициентами, можно вычислить непосредственно поправки на изменение трех основных параметров. Например, поправка в дальности при изменении баллистического коэффициента на  $2^\circ$  получится следующим образом:

$$\frac{\partial c}{c} = 0,02; \quad \delta c = 0,02 \cdot 0,6 = 0,012;$$

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial c} \delta c = -4540 \cdot 0,012 = -54,5 \text{ м.}$$

Таким образом в рассматриваемом примере увеличение баллистического коэффициента на  $2^\circ$  уменьшает дальность на 54,5 м.

В настоящем параграфе было показано, каким образом можно, пользуясь баллистическим сборником, определить три основных поправочных коэффициента

$$\frac{\partial X}{\partial c}, \quad \frac{\partial X}{\partial \theta_0}, \quad \frac{\partial X}{\partial v_0}.$$

Ниже будет показано, как, зная эти основные поправочные коэффициенты, можно вычислить поправочные коэффициенты, отвечающие изменению барометрического давления и температуры воздуха, а также продольному постоянному ветру.

### § 99. Формула Ланжевена

Формула Ланжевена позволяет установить зависимость между элементами двух траекторий, отвечающих различным значениям температуры и давления в точке вылета.

Выпишем первое уравнение системы (x)

$$\frac{du}{dx} = -c H_z(y) G(v), \quad (6)$$

где

$$H_z(y) = \sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}} H(y) = \sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}} \frac{h}{h_{0N}} \frac{\tau_{0N}}{\tau} = \frac{h}{h_{0N}} \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}} = \frac{h_0}{h_{0N}} \frac{h}{h_0} \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}.$$

Обозначая

$$a = \sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}}; \quad c^* = c \frac{h_0}{h_{0N}}; \quad \lambda = \frac{h}{h_0},$$

получим систему дифференциальных уравнений при аргументе  $x$  в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -c^* \frac{\lambda}{a} G(v), \\ \frac{dp}{dx} &= -\frac{g}{u^2}, \\ \frac{dy}{dx} &= p, \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{u}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Введем, согласно Ланжевену, новые переменные  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\sigma$ ,  $u_*$ , определяемые следующими зависимостями:

$$dx = a^2 d\xi; \quad dy = a^2 d\eta; \quad dt = ad\sigma; \quad u = au_*.$$

При этом нетрудно видеть, что  $v_* = u_* \sqrt{1 + p^2}$ .

Выражая в системе (7) старые переменные через новые, получим

$$\begin{aligned} \frac{d(\sigma u_*)}{a^2 d\xi} &= -c^* \frac{\lambda}{a} G(v_*), \\ \frac{dp}{a^2 d\xi} &= -\frac{g}{a^2 u_*^2}, \\ \frac{a^2 d\eta}{a^2 d\xi} &= p, \\ \frac{ad\sigma}{a^2 d\xi} &= \frac{1}{a u_*}. \end{aligned}$$

После соответствующих сокращений получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{d(\alpha u_\tau)}{d\xi} &= -c^* \chi G(v_\tau), \\ \frac{dp}{d\xi} &= -\frac{g}{u_\tau^2}, \\ \frac{d\eta}{d\xi} &= p, \\ \frac{dz}{d\xi} &= \frac{1}{u_\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где

$$v_\tau = u_\tau \sqrt{1 + p^2}.$$

Начальные условия при  $\xi = 0$ ;  $\eta = 0$ ;  $z = 0$

$$p = p_0; \quad u_\tau = u_{\tau 0} = u_0 \sqrt{\frac{\tau_0 N}{\tau_0}}.$$

В системе (8), помимо независимой переменной  $\xi$  и четырех искомых функций  $u_\tau$ ,  $p$ ,  $\eta$  и  $z$  (по числу дифференциальных уравнений), входят еще две переменные  $\alpha$  и  $\chi$ . Для того чтобы эту систему можно было интегрировать, необходимо выразить  $\alpha$  и  $\chi$  через остальные переменные.

Мы имели (§ 33) при гипотезе о вертикальном равновесии атмосферы

$$\frac{dh}{h} = -\frac{1}{R} \frac{dy}{z}.$$

Но из выражения  $\alpha = \sqrt{\frac{z}{\tau_0 N}}$  следует, что  $z = \alpha^2 \tau_0 N$ . Следовательно,

$$\frac{dh}{h} = -\frac{dy}{R \alpha^2 \tau_0 N} = -\frac{d\eta}{R \tau_0 N}.$$

Интегрируя в соответствующих пределах, получим

$$\frac{h}{h_0} = e^{-\frac{1}{R \tau_0 N} \eta} = \chi. \quad (9)$$

Преобразуем левую часть первого уравнения системы (8)

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d(\alpha u_\tau)}{d\xi} = \frac{1}{\alpha} \left( \alpha \frac{du_\tau}{d\xi} + u_\tau \frac{d\alpha}{d\xi} \right) = \frac{du_\tau}{d\xi} + \frac{u_\tau}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\xi}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{d\xi} &= \frac{d}{d\xi} \ln \alpha = \frac{d}{d\xi} \ln \sqrt{\frac{z}{\tau_0 N}} = \frac{1}{2} \frac{dz}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{d\eta dy}{d\xi} = \frac{1}{2} \frac{d\eta}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \tau_0 N} \frac{d\eta}{dy} \frac{dy}{d\xi} = \\ &= \frac{1}{2 \tau_0 N} \frac{d\eta}{dy} p. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d(\alpha u_\tau)}{d\xi} = \frac{du_\tau}{d\xi} + \frac{p u_\tau}{2 \tau_0 N} \frac{d\eta}{dy}. \quad (10)$$

Подставляя выражения (9) и (10) в первое уравнение системы (8), получим систему Ланжевена в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_\tau}{d\xi} &= -c^* e^{-\frac{\eta}{R \tau_0 N}} G(v_\tau) - \frac{p u_\tau}{2 \tau_0 N} \frac{d\eta}{dy}, \\ \frac{dp}{d\xi} &= -\frac{g}{u_\tau^2}, \\ \frac{d\eta}{d\xi} &= p, \\ \frac{dz}{d\xi} &= \frac{1}{u_\tau}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Теперь в этой системе отсутствуют переменные  $\chi$  и  $\alpha$  и, хотя появилась новая переменная  $\frac{d\eta}{dy}$ , мы знаем, что эта величина — температурный градиент, принимаемый постоянным для высот траекторий до 9300 м.

Таким образом в системе (11) число искомых функций равно числу дифференциальных уравнений.

Решение системы (11) зависит от начальных условий  $u_{\tau 0}$  и  $p_0$  и от параметра  $c^*$ , входящего в первое уравнение системы (11). Учитывая, что  $u_{\tau 0} = \frac{v_{\tau 0}}{\cos \theta_0}$  и  $p_0 = \operatorname{tg} \theta_0$ , приходим к следующему выводу.

Если обычные элементы траектории являются определенными при задании  $c$ ,  $v_{\tau 0}$  и  $\theta_0$ , то траектория в переменных Ланжевена определена, если заданы следующие три параметра:

$$c^* = c \frac{h_0}{h_{\tau 0}}, \quad v_{\tau 0} = v_0 \sqrt{\frac{\tau_0 N}{\tau_0}} \text{ и } \theta_0.$$

Рассмотрим выражение для горизонтальной дальности. Из подстановки Ланжевена  $dx = \alpha^2 d\xi$  имеем

$$x = \int_0^\xi \alpha^2 d\xi = \int_0^\xi \frac{\tau}{\tau_0 N} d\xi = \frac{\tau_0}{\tau_0 N} \int_0^\xi \frac{\tau}{\tau_0} d\xi.$$

С другой стороны, мы имели (§ 35)

$$\frac{h}{h_0} = \left( \frac{z}{\tau_0} \right)^{\frac{1}{RG}}; \quad (12)$$

таким образом отношение температур  $\frac{\tau}{\tau_0}$  есть вполне определенная функция от отношения давления  $\frac{h}{h_0}$ .

С другой стороны, мы имели выше (9)

$$\frac{h}{h_0} = e^{-R \frac{1}{\tau_0 N} \eta},$$

т. е. что отношение давлений есть определенная функция от переменной  $\eta$ . Окончательно получим, что  $\frac{\tau}{\tau_0} = f(\eta)$ , и выражение для горизонтальной дальности можно написать в следующем виде:

$$x = \frac{\tau_0}{\tau_0 N} \int_0^\xi f(\eta) d\xi. \quad (13)$$

Если система (11) проинтегрирована, то  $\eta$  будет известной функцией от  $\xi$ , от начальных условий  $(\theta_0$  и  $v_{\tau 0})$  и от параметра  $c^*$ . Интеграл выражения (13) будет зависеть от тех же величин.

Исходя из указанных соображений и применения выражение (13) для точки падения, получим

$$X = \frac{\tau_0}{\tau_0 N} \Phi(c^*, v_{\tau 0}, \theta_0). \quad (14)$$

Если рассматривать случай нормальных метеорологических условий у земли, то получим  $\tau_0 = \tau_{0N}$ ;  $h_0 = h_{0N}$ ;  $v_{\tau 0} = v_0$ ;  $c^* = c$ , откуда

$$X_N = \Phi(c, v_0, \theta_0). \quad (15)$$

Если имеется баллистический сборник, вычисленный для нормальных условий и для различных значений  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ , то этим самым мы имеем табличное задание функции  $\Phi$ . Если требуется вычислить дальность при давлении и температуре у земли, отличных от нормальных, то, как следует из выражения (14), необходимо поступить следующим образом.

1. Вычислить приведенный баллистический коэффициент

$$c^* = c \frac{h_0}{h_{0N}}$$

и приведенную начальную скорость

$$v_{\tau_0} = v_0 \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}}.$$

2. По входным величинам  $c^*$ ,  $v_{\tau_0}$  и  $\theta_0$  определить из сборника соответствующую этим параметрам полную дальность.

3. Полученный результат, умноженный на отношение  $\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}$ , даст полную дальность, отвечающую указанным значениям  $h_0$  и  $\tau_0$ .

Заметим, что полученные выводы верны в том случае, если с изменением давления и температуры у земли сохраняется зависимость (12), т. е. остается неизменным характер изменения метеорологических элементов с высотой.

### § 100. Поправочные коэффициенты при изменении давления и температуры

Применяя выражение (14) для случая нормальной температуры  $\tau_0 = \tau_{0N}$  и рассматривая  $v_0$  и  $\theta_0$  неизменными, получим

$$X = \Phi(c^*),$$

где

$$c^* = c \frac{h_0}{h_{0N}}.$$

В случае изменения только баллистического коэффициента получим

$$\delta X_c = \Phi'(c^*) \delta c^* = \Phi'(c^*) \frac{h_0}{h_{0N}} \delta c,$$

откуда

$$\frac{\partial X}{\partial c} = \Phi'(c^*) \frac{h_0}{h_{0N}}. \quad (16)$$

В случае изменения только барометрического давления получим

$$\delta X_h = \Phi'(c^*) \frac{c}{h_{0N}} \delta h_0 = \Phi'(c^*) \frac{h_0}{h_{0N} h_0} c \delta h_0.$$

На основании выражения (16)

$$\delta X_h = \frac{\partial X}{\partial c} \frac{c}{h_0} \delta h_0.$$

Окончательно получим поправочный коэффициент для давления в следующем виде:

$$\boxed{\frac{\partial X}{\partial h_0} = \frac{\partial X}{\partial c} \frac{c}{h_0}.} \quad (17)$$

(Следует иметь в виду, что  $\frac{\partial X}{\partial c}$  и  $\frac{\partial X}{\partial h_0}$  по существу отрицательны.)

Таким образом поправочный коэффициент для барометрического давления выражается через поправочный коэффициент для баллистического коэффициента.

Аналогичным образом покажем, что поправочный коэффициент для температуры воздуха выражается через поправочный коэффициент для начальной скорости. Действительно, рассматривая  $c^*$  и  $\theta_0$  неизменными, получим

$$X = \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} \Phi(v_{\tau_0}), \quad (18)$$

где

$$v_{\tau_0} = v_0 \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}}.$$

В случае изменения только начальной скорости, логарифмируя и дифференцируя выражение (18), получим

$$\frac{\delta X_v}{X} = \frac{\Phi'(v_{\tau_0})}{\Phi(v_{\tau_0})} \delta v_{\tau_0} = \frac{\Phi'}{\Phi} \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}} \delta v_0$$

или окончательно

$$\delta X_v = \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}} X \frac{\Phi'}{\Phi} \delta v_0,$$

откуда

$$\frac{\partial X}{\partial v_0} = X \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}} \frac{\Phi'}{\Phi}. \quad (19)$$

В случае изменения только температуры воздуха, логарифмируя и дифференцируя выражение (18), получим

$$\frac{\delta X_\tau}{X} = \frac{\delta \tau_0}{\tau_0} + \frac{\Phi'(v_{\tau_0})}{\Phi(v_{\tau_0})} \delta v_{\tau_0} = \frac{\delta \tau_0}{\tau_0} - \frac{\Phi' v_0 \sqrt{\tau_{0N}}}{\Phi 2 \tau_0 \sqrt{\tau_0}} \delta \tau_0,$$

откуда

$$\delta X_\tau = \left( X - \frac{\Phi'}{\Phi} X \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}} \frac{v_0}{2} \right) \frac{\delta \tau_0}{\tau_0}.$$

Подставляя формулу (19) в последнее выражение, получим

$$\delta X_\tau = \left( X - \frac{v_0}{2} \frac{\partial X}{\partial v_0} \right) \frac{\delta \tau_0}{\tau_0}.$$

Окончательно поправочный коэффициент для температуры воздуха можно написать в следующем виде:

$$\boxed{\frac{\partial X}{\partial \tau_0} = \frac{1}{\tau_0} \left( X - \frac{v_0}{2} \frac{\partial X}{\partial v_0} \right).} \quad (20)$$

### § 101. Поправочный коэффициент при изменении веса снаряда

Из выражения для баллистического коэффициента

$$c = \frac{id^2}{q} 1000,$$

рассматривая изменение только веса снаряда, получим

$$\frac{\delta c}{c} = -\frac{\delta q}{q}; \quad \delta c = -\frac{c}{q} \delta q.$$

Подставляя значение  $\delta c$  в выражение для  $\delta X$ , найдем

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial c} \delta c = -\frac{\partial X}{\partial c} \frac{c}{q} \delta q.$$

Учитывая, что  $\frac{\partial X}{\partial c} < 0$ , получим

$$\delta X = \left| \frac{\partial X}{\partial c} \right| \frac{c}{q} \delta q. \quad (21)$$

Формулу (21) можно применить только в том случае, если изменение веса снаряда не вызвало изменения начальной скорости снаряда. Практически такое положение возможно, если мы для более тяжелого снаряда увеличим вес заряда так, чтобы его начальная скорость оставалась равной табличной.

На практике, однако, так не делается, так как навеска зарядов не подгоняется для каждого снаряда в отдельности. Поэтому изменение веса снаряда влияет на дальность: 1) через изменение баллистического коэффициента и 2) через изменение начальной скорости. Во внутренней баллистике принимается следующая приближенная зависимость между изменением веса снаряда и изменением начальной скорости:

$$\frac{\delta v_0}{v_0} = -0.4 \frac{\delta q}{q}.$$

Этому изменению начальной скорости отвечает следующее изменение дальности:

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial v_0} \delta v_0 = -\frac{\partial X}{\partial v_0} 0.4 \frac{v_0}{q} \delta q. \quad (22)$$

Суммарное изменение дальности вследствие изменения веса снаряда найдем сложением правых частей равенств (21) и (22)

$$\delta X_q = \left( c \left| \frac{\partial X}{\partial c} \right| - 0.4 v_0 \frac{\partial X}{\partial v_0} \right) \frac{\delta q}{q}. \quad (23)$$

Выражение для поправочного коэффициента получим в следующем виде:

$$\boxed{\frac{\delta X}{\delta q} = \frac{1}{q} \left( c \left| \frac{\partial X}{\partial c} \right| - 0.4 v_0 \frac{\partial X}{\partial v_0} \right).} \quad (24)$$

Рассматривая полученное выражение, мы видим, что первое слагаемое, зависящее от баллистического коэффициента, является положительным, а второе, зависящее от изменения начальной скорости, отрицательным. Таким образом увеличение веса снаряда, с одной стороны, уменьшает баллистический коэффициент (т. е. ускорение силы сопротивления воздуха), что вызывает увеличение дальности, а с другой — уменьшает начальную скорость, что вызывает уменьшение дальности. Суммарное влияние этих двух факторов может оказаться в увеличении или в уменьшении дальности, в зависимости от того, какое из двух слагаемых формулы (24) будет больше по абсолютной величине.

Чем больше калибр снаряда и меньше начальная скорость и угол бросания, т. е. чем ближе траектория по своему характеру к параболической траектории, тем меньше относительная величина первого слагаемого формулы (24) по отношению ко второму слагаемому.

### § 102. Изменение дальности вследствие постоянного продольного ветра

При изучении влияния ветра на полет снаряда приходится различать скорость снаряда относительно земли — абсолютную скорость — и скорость снаряда относительно подвижной атмосферы — относитель-

ную скорость. Сопротивление воздуха зависит от скорости снаряда относительно атмосферы, т. е. от относительной скорости снаряда.

Рассмотрим влияние постоянного продольного ветра  $W_x$ . Для этого применим принадлежащий Диодону прием изучения движения снаряда относительно подвижной системы координат. Пусть наблюдатель на подвижной платформе движется со скоростью ветра  $W_x$  в направлении ветра. Выстрел же производится с неподвижного относительно земли орудия. Заметим, что для подвижного наблюдателя ветер не существует, и он может изучать движение снаряда относительно платформы, как при отсутствии ветра. Пусть дальность, полученная подвижным наблюдателем, равняется  $X_r$ . Чтобы получить дальность относительно земли, необходимо к дальности  $X_r$  добавить величину перемещения платформы (или атмосферы) за время полета снаряда, т. е. величину  $W_x T$ :

$$X_w = X_r + W_x T,$$

где  $X_w$  — дальность относительно земли при ветре.

Интересующее нас изменение дальности

$$\delta X = X_w - X,$$

или

$$\delta X = W_x T + X_r - X, \quad (25)$$

где  $X$  — дальность относительно земли при отсутствии ветра.

В выражении (25) неизвестным является  $X_r$ , для определения которого необходимо изучить движение снаряда относительно атмосферы. При этом абсолютным мы будем считать движение снаряда относительно земли, относительным — движение снаряда относительно атмосферы и переносным — движение атмосферы.

В момент выстрела (черт. 64) скорость абсолютного движения  $v_a = v_0$ , скорость относительного движения  $v_r = v_0$ , и скорость переносного движения  $v_e = W_x$ ; следовательно, мы можем написать

$$\overline{v}_0 = \overline{v}_{0r} + \overline{W}_x,$$

откуда

$$\overline{v}_{0r} = \overline{v}_0 - \overline{W}_x. \quad (26)$$

Таким образом для изучения движения снаряда относительно атмосферы достаточно вместо вектора  $\overline{v}_0$  рассматривать вектор  $\overline{v}_{0r}$ , отличающийся от первого величиной и направлением. Для определения  $X_r$  можно рассчитать траекторию обычными методами, приняв вместо табличных  $v_0$  и  $\theta_0$  значения  $v_{0r}$  и  $\theta_{0r}$ , отвечающие относительному движению. Для определения  $v_{0r}$  и  $\theta_{0r}$  спроектируем равенство (26) на оси  $ox$  и  $oy$ :

$$(v_{0r})_x = v_0 \cos \theta_0 - W_x,$$

$$(v_{0r})_y = v_0 \sin \theta_0,$$

откуда

$$v_{0r} = \sqrt{(v_0 \cos \theta_0 - W_x)^2 + v_0^2 \sin^2 \theta_0} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 \cos \theta_0 W_x + W_x^2},$$

$$\operatorname{tg} \theta_{0r} = \frac{v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta_0 - W_x} = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{1 - \frac{W_x}{v_0 \cos \theta_0}}.$$

До сих пор мы не делали никаких допущений о величине  $W_x$ . Формулы для  $v_{0r}$  и  $\theta_{0r}$  можно значительно упростить, если считать отношение скорости ветра к скорости снаряда величиной первого порядка малости и пренебречь по сравнению с единицей членами, содержащими  $\frac{W_x}{v_0}$  в степени выше первой. В этом случае получим

$$v_{0r} = v_0 \sqrt{1 - 2 \frac{W_x}{v_0} \cos \theta_0} = v_0 \left(1 - 2 \frac{W_x}{v_0} \cos \theta_0\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Разлагая  $v_{0r}$  в биноминальный ряд и отбрасывая величины порядка малости выше первой, получим

$$v_{0r} = v_0 \left(1 - \frac{W_x}{\cos \theta_0}\right) = v_0 - W_x \cos \theta_0,$$

откуда

$$\delta v_{0r} = v_{0r} - v_0 = -W_x \cos \theta_0. \quad (27)$$

Далее

$$\operatorname{tg} \theta_{0r} = \operatorname{tg} \theta_0 \left(1 - \frac{W_x}{v_0 \cos \theta_0}\right)^{-1}.$$

Разлагая  $\operatorname{tg} \theta_{0r}$  в биноминальный ряд, получим с точностью до малых величин первого порядка малости

$$\operatorname{tg} \theta_{0r} = \operatorname{tg} \theta_0 \left(1 + \frac{W_x}{v_0 \cos \theta_0}\right) = \operatorname{tg} \theta_0 + \frac{W_x \sin \theta_0}{v_0 \cos^2 \theta_0},$$

откуда

$$\delta \operatorname{tg} \theta_{0r} = \operatorname{tg} \theta_{0r} - \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{W_x \sin \theta_0}{v_0 \cos^2 \theta_0}.$$

Заменив в левой части равенства  $\delta \operatorname{tg} \theta_{0r} = \frac{\delta \theta_0}{\cos^2 \theta_0}$ , получим

$$\delta \theta_0 = \frac{W_x \sin \theta_0}{v_0}. \quad (28)$$

Таким образом мы нашли, что  $v_{0r}$  и  $\theta_{0r}$  отличаются от табличных значений  $v_0$  и  $\theta_0$  на малые величины  $\delta v_{0r}$  и  $\delta \theta_{0r}$ , определяемые формулами (27) и (28). Поэтому нет надобности заново производить расчет траектории, а можно ввести поправки к дальности на изменение угла бросания  $\delta \theta_0$  и начальной скорости  $\delta v_{0r}$ :

$$X_r - X = \frac{\partial X}{\partial v_0} \delta v_{0r} + \frac{\partial X}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 = -\frac{\partial X}{\partial v_0} W_x \cos \theta_0 + \frac{\partial X}{\partial \theta_0} W_x \frac{\sin \theta_0}{v_0}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (25), получим окончательно

$$\delta X = W_x \left(T - \frac{\partial X}{\partial v_0} \cos \theta_0 + \frac{\partial X}{\partial \theta_0} \frac{\sin \theta_0}{v_0}\right). \quad (29)$$

Таким образом, если известны поправочные коэффициенты  $\frac{\partial X}{\partial v_0}$  и  $\frac{\partial X}{\partial \theta_0}$ , отвечающие изменению начальной скорости и угла бросания, то можно определить изменение полной дальности вследствие постоянного продольного ветра.

Заметим, что формулу (29) можно применить и для произвольной точки траектории, заменив  $X$  и  $T$  на  $x$  и  $t$ . Кроме того, чтобы построить траекторию, отвечающую постоянному продольному ветру  $W_x$ , доста-

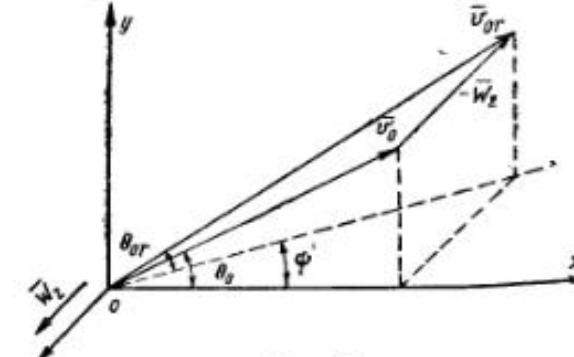
точно рассчитать обычным путем траекторию при значениях  $v_{0r}$  и  $\theta_{0r}$ , указанных выше, и все точки этой траектории переместить в направлении ветра на величину  $W_x t$ .

### § 103. Боковое отклонение снаряда вследствие постоянного бокового ветра

Рассмотрим влияние постоянного бокового ветра, дующего вправо, т. е. в направлении оси  $oz$ . Применяя рассуждения предыдущего параграфа, введем в рассмотрение наблюдателя, движущегося со скоростью  $W_z$  в направлении оси  $oz$ . Для такого наблюдателя ветер не существует, и изучение движения снаряда в системе координат, связанной с наблюдателем, может производиться обычными методами. Необходимо только вместо начальной скорости  $v_0$  абсолютного движения исходить из начальной скорости  $v_{0r}$  относительного движения

$$\vec{v}_{0r} = \vec{v}_0 - \vec{W}_z.$$

На черт. 65 вектор  $\vec{v}_{0r}$  построен добавлением вектора  $-\vec{W}_z$  к вектору начальной скорости.



Черт. 65

Проектируя последнее равенство на оси координат, получим

$$(v_{0r})_x = v_0 \cos \theta_{0r},$$

$$(v_{0r})_y = v_0 \sin \theta_{0r},$$

$$(v_{0r})_z = -W_z,$$

откуда

$$v_{0r} = \sqrt{v_0^2 \cos^2 \theta_{0r} + v_0^2 \sin^2 \theta_{0r} + W_z^2} = \sqrt{v_0^2 + W_z^2} = v_0 \sqrt{1 + \left(\frac{W_z}{v_0}\right)^2},$$

$$\operatorname{tg} \theta_{0r} = \frac{v_0 \sin \theta_{0r}}{v_0 \cos \theta_{0r} + W_z} = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{1 + \left(\frac{W_z}{v_0 \cos \theta_0}\right)^2}.$$

Если пренебречь квадратами величины  $\frac{W_z}{v_0}$  по сравнению с единицей, то получим

$$v_{0r} \approx v_0; \quad \theta_{0r} \approx \theta_0,$$

откуда  $X_r \approx X$ . Однако плоскость бросания в относительном движении не совпадает с плоскостью  $xy$ , а составляет с ней угол  $\phi$ , определяемый из выражения

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{W_z}{v_0 \cos \theta_0}.$$

Боковое отклонение в относительном движении определим из выражения

$$Z_r = X \operatorname{tg} \phi = -\frac{X W_z}{v_0 \cos \theta_0}.$$

Так как за время полета снаряда подвижная система координат переместится в направлении оси  $oz$  на величину  $W_z T$ , то боковое отклонение в абсолютном движении получится из выражения

$$Z = Z_r + W_z T = -\frac{X W_z}{v_0 \cos \theta_0} + W_z T.$$

Окончательно получим поправочную формулу для бокового ветра в следующем виде:

$$Z = W_z \left( T - \frac{X}{v_0 \cos \theta_0} \right). \quad (30)$$

Заметим, что формулу (30) можно применять не только для точки падения, но и для произвольной точки траектории. В последнем случае необходимо заменить  $T$ ,  $X$ ,  $Z$  на  $t$ ,  $x$ ,  $z$ .

#### § 104. Таблицы поправок Артиллерийской академии

В § 98 было показано, что при наличии баллистического сборника, содержащего значения дальности для различных значений  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ , можно вычислить основные поправочные коэффициенты  $\frac{\partial X}{\partial c}$ ,  $\frac{\partial X}{\partial v_0}$ ,  $\frac{\partial X}{\partial \theta_0}$ . Из § 99—102 мы видели, что поправочные коэффициенты для давления, температуры и продольного ветра выражаются через указанные три основные поправочные коэффициента.

Используя указанные приемы, можно составить таблицы поправочных коэффициентов, которые позволяют свести вычисление поправок к простой операции интерполирования по входным величинам  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ .

Подобные таблицы<sup>1</sup>, вычисленные в Артиллерийской академии, помещены в части III. В этих таблицах даются значения следующих поправок.

Табл. 32,  $Q_c = \frac{\partial X}{\partial c}$  — изменение полной дальности вследствие изменения температуры воздуха на  $1^\circ$ .

Табл. 33,  $Q_{v_0} = \frac{\partial X}{\partial v_0}$  — изменение полной дальности вследствие изменения начальной скорости на 1 м/сек.

Табл. 34,  $Q_{\theta_0} = \frac{\partial X}{\partial \theta_0} \cdot \frac{c}{100}$  — изменение полной дальности вследствие изменения баллистического коэффициента или барометрического давления на  $10\%$ .

Табл. 35,  $Q_{w_x}$  — изменение полной дальности вследствие продольного ветра в 1 м/сек.

Табл. 36,  $Q_{w_z}$  — боковое отклонение снаряда вследствие бокового ветра в 1 м/сек.

Эти таблицы позволяют непосредственно вычислить все поправки, значения которых помещены в таблицах стрельбы.

При вычислении поправки на вес снаряда необходимо учесть влияние изменения веса снаряда на дальность через изменение баллисти-

<sup>1</sup> Эти таблицы были вычислены более сложным методом численного интегрирования особых дифференциальных уравнений поправок, однако принципиальная точность этого метода такая же, как и точность методов, изложенных в § 98—102.

ческого коэффициента и начальной скорости (§ 101). При этом на основании формулы (23)

$$\Delta X_q = \left( 100 Q_{\frac{c}{c}} - 0,4 v_0 Q_{v_0} \right) \frac{\partial q}{q}.$$

Применение таблиц Артиллерийской академии разберем на следующем примере.

Пример. Для исходных условий  $c = 0,728$ ;  $\theta_0 = 10^\circ 08'$ ;  $v_0 = 588$  м/сек. Требуется вычислить изменение дальности, отвечающее

- увеличению температуры воздуха на  $10^\circ$ ,
- увеличению начальной скорости на  $10\%$ ,
- увеличению барометрического давления на 10 мм,
- увеличению веса снаряда  $\frac{2}{3} 10\%$ ,

д) продольному ветру в 10 м/сек, а также боковое отклонение, отвечающее боковому ветру в 10 м/сек.

Весь расчет сводится к трехкратному интерполированию.

Вычисления удобно вести по следующей схеме, пользуясь логарифмической линейкой.

Интерполирующие множители:  $\xi_c = 0,28$ ;  $\xi_{v_0} = 0,88$ ;  $\xi_{\theta_0} = 0,03$ .

	$\theta_0 = 10^\circ$			$\theta_0 = 10^\circ 08'$		$\theta_0 = 15^\circ$		
$v_0$	$c$	0,7	0,728	0,8	0,728	0,7	0,728	0,8
$Q_c$	500	8,5	8,5	8,5	10,0	12,0	11,9	11,8
	588		9,9			14,1	13,7	
	600	10,1	10,1	10,0		14,0	14,0	13,9
$Q_{v_0}$	500	8,2	8,0	7,4	7,6	9,2	8,9	8,3
	588		7,6			8,5	8,3	
	600	7,7	7,5	6,9		8,2	7,5	
$Q_{\frac{c}{c}}$	500	14,8	14,8	14,7	20,2	21,1	21,0	20,9
	588		20,0			28,6	28,3	27,6
	600	20,9	20,7	20,3				
$Q_{w_x}$	500	11,2	11,2	11,2	12,7	17,4	17,4	17,4
	588		12,5			19,1	18,8	
	600	12,7	12,7	12,7		19,0	19,0	18,9
$Q_{w_z}$	500	4,6	4,6	4,7	6,2	7,5	7,6	7,7
	588		6,1			9,8	9,5	
	600	6,3	6,3	6,4		9,8	9,8	9,9

Окончательно получаем

$$Q_c = 10,0; Q_{v_0} = 7,6; Q_{\frac{c}{c}} = 20,2; Q_{w_x} = 12,7; Q_{w_z} = 6,2.$$

а) При увеличении температуры воздуха на  $10^\circ$

$$\Delta X_c = Q_c \Delta t = 10,0 \cdot 10 = 100 \text{ м.}$$

б) При увеличении начальной скорости на  $10\%$

$$\Delta X_{v_0} = Q_{v_0} \Delta v_0 = 7,6 \cdot 5,82 = 45 \text{ м.}$$

в) При увеличении барометрического давления на 10 мм

$$\Delta X_h = -Q_{\frac{c}{c}} \frac{100}{h_0} \frac{\partial h_0}{h_0} = -20,2 \cdot 100 \frac{10}{750} = -27 \text{ м.}$$

г) При увеличении веса снаряда на  $\frac{2}{3} \%$

$$\delta X_g = \left( 100Q_{\frac{v_0}{c}} - 0,4v_0Q_{v_0} \right) \frac{\delta g}{g} = (100 \cdot 20,2 - 0,4 \cdot 588 \cdot 7,6) \frac{2}{3} 0,01 = 1,6 \text{ м.}$$

д) При продольном ветре в 10 м/сек

$$\delta X_w = Q_{w_x} W_x = 12,7 \cdot 10 = 127 \text{ м.}$$

е) При боковом ветре в 10 м/сек

$$Z = Q_{w_z} W_z = 6,2 \cdot 10 = 62 \text{ м.}$$

### § 105. Приближенные поправочные формулы применительно к методу Сиаччи

Выпишем основные формулы метода Сиаччи, связывающие полную дальность  $X$  с основными параметрами  $c'$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ ,

$$\sin 2\theta_0 = \frac{1}{c'} \left[ \frac{A(U_c) - A(v_0)}{D(U_c) - D(v_0)} - I(v_0) \right], \quad (31)$$

$$X = \frac{1}{c'} \left[ D(U_c) - D(v_0) \right]. \quad (32)$$

Подставляя выражение (32) в (31) и применяя для обозначения  $D_c$ ,  $A_c$ ,  $D_0$ ,... вместо  $D(U_c)$ ,  $A(U_c)$ ,  $D(v_0)$ ,..., получим

$$c' \sin 2\theta_0 = \frac{A_c - A_0}{c' X} - I_0$$

или

$$c' X (c' \sin 2\theta_0 + I_0) = A_c - A_0. \quad (33)$$

Последнее равенство непосредственно связывает горизонтальную дальность  $X$  с параметрами  $c'$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ . Для того чтобы найти  $\delta X$  в зависимости от  $\delta c$ ,  $\delta v_0$ ,  $\delta\theta_0$ , продифференцируем последнее равенство, считая переменными  $X$ ,  $c'$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$  и  $U_c$  (от  $U_c$  постараемся в дальнейшем освободиться):

$$c' X d(c' \sin 2\theta_0 + I_0) + (c' \sin 2\theta_0 + I_0) d(c' X) = dA_c - dA_0.$$

Вспомним, что

$$dI = -\frac{2gdU}{UF(U)},$$

$$dD = -\frac{UdU}{F(U)},$$

$$dA = -\frac{I(U)UdU}{F(U)} = I(U)dD(U).$$

Таким образом получим

$$c' X d(c' \sin 2\theta_0 + I_0) + (c' \sin 2\theta_0 + I_0) d(c' X) = I_c dD_c - I_0 dD_0.$$

Нам желательно избежать величин  $D_c$  и  $I_c$ .

Для этого, дифференцируя выражение

$$c' X = D_c - D_0;$$

найдем

$$d(c' X) = dD_c - dD_0,$$

$$dD_c = d(c' X) + dD_0,$$

откуда

$$c' X d(c' \sin 2\theta_0 + I_0) + (c' \sin 2\theta_0 + I_0) d(c' X) = I_c d(c' X) + I_c dD_0 - I_0 dD_0$$

186

или после некоторого преобразования

$$c' X d(c' \sin 2\theta_0 + I_0) + [c' \sin 2\theta_0 - (I_c - I_0)] d(c' X) = (I_c - I_0) dD_0. \quad (34)$$

Для того чтобы избавиться от  $I_c$ , используем выражения для  $\operatorname{tg} \theta_c$ :

$$\operatorname{tg} \theta_c = \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} (I_c - I_0),$$

откуда, учитывая, что  $\operatorname{tg} \theta_c = -\operatorname{tg} |\theta_c|$ , получим

$$I_c - I_0 = 2c' \cos^2 \theta_0 (\operatorname{tg} \theta_0 + \operatorname{tg} |\theta_c|) = c' \sin 2\theta_0 + 2c' \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c| \quad (35)$$

и

$$c' \sin 2\theta_0 - (I_c - I_0) = -2c' \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c|. \quad (36)$$

Подставляя выражение (35) в правую часть равенства (34), а выражение (36) в левую часть того же равенства и сокращая на  $c'$ , получим

$$X d(c' \sin 2\theta_0 + I_0) - 2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c| d(c' X) = (\sin 2\theta_0 + 2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c|) dD_0.$$

Теперь в нашем равенстве остались только величины  $X$ ,  $c'$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$  и  $|θ_c|$ , известные нам для основной траектории, и мы можем приступить к непосредственному дифференцированию:

$$X \sin 2\theta_0 dc' + 2c' X \cos 2\theta_0 d\theta_0 + X dI_0 - 2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c| X d c' - 2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c| c' dX = dD_0 (\sin 2\theta_0 + 2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c|).$$

Имея в виду, что

$$dI_0 = -\frac{2gdv_0}{v_0 F(v_0)}, \quad dD_0 = -\frac{v_0 dv_0}{F(v_0)},$$

получим

$$X \sin 2\theta_0 dc' + 2c' X \cos 2\theta_0 d\theta_0 - 2gX \frac{dv_0}{v_0 F(v_0)} - 2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c| X d c' - 2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c| c' dX = -(\sin 2\theta_0 + 2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c|) \frac{v_0 dv_0}{F(v_0)}.$$

Отделяя  $dX$  в левой части равенства и объединяя члены, имеющие множителями дифференциалы соответствующих параметров, получим

$$dX = \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c|} \left[ X (\sin 2\theta_0 - 2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c|) dc' + 2c' X \cos 2\theta_0 d\theta_0 + \left( \sin 2\theta_0 + 2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c| - \frac{2gX}{v_0^2} \right) \frac{v_0 dv_0}{F(v_0)} \right].$$

Учитывая, что  $\frac{\sin 2\theta_0}{2 \cos^2 \theta_0} = \operatorname{tg} \theta_0$ , обозначая  $\frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\operatorname{tg} |\theta_c|} = \gamma$  и заменяя дифференциалы приращениями, получим окончательно

$$\delta X = -(1 - \gamma) X \frac{\delta c'}{c'} + \frac{X \cos 2\theta_0}{\cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c|} \delta \theta_0 + \frac{v_0}{c' F(v_0)} \left( 1 + \gamma - \frac{gX}{v_0^2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c|} \right) \delta v_0.$$

Так как  $c' = c^3$ , то, считая  $\beta$  неизменным, получим  $\frac{\delta c'}{c'} = \frac{\delta c}{c}$ .

Сравнивая полученное выражение для  $\delta X$  с общим выражением

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial c} \delta c + \frac{\partial X}{\partial v_0} \delta v_0 + \frac{\partial X}{\partial \theta_0},$$

187

получим следующие значения поправочных коэффициентов:

$$\frac{\partial X}{\partial c} = -(1-\gamma) \frac{X}{c}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial X}{\partial v_0} = \frac{1}{c' G(v_0)} \left( 1 + \gamma - \frac{gX}{v_0^2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c|} \right), \quad (38)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_0} = \frac{X \cos 2\theta_0}{\cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c|}. \quad (39)$$

Формулу (38) можно упростить, если использовать выражение для функции  $f_{v_0}(c'X, v_0)$

$$f_{v_0}(c'X, v_0) = \frac{v_0}{X c' G(v_0)} \left( 1 + \gamma - \frac{gX}{v_0^2 \cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c|} \right).$$

При этом получим

$$\frac{\partial X}{\partial v_0} = \frac{X}{v_0} f_{v_0}(c'X, v_0). \quad (40)$$

Значения функции  $f_{v_0}$  даны в табл. 29 части III.

Зная основные поправочные коэффициенты  $\frac{\partial X}{\partial c}$ ;  $\frac{\partial X}{\partial v_0}$  и  $\frac{\partial X}{\partial \theta_0}$ , можно определить остальные поправочные коэффициенты. На основании выражения (17)

$$\frac{\partial X}{\partial h_0} = \frac{\partial X}{\partial c} \frac{c}{h_0} = -(1-\gamma) \frac{X}{h_0},$$

Из выражения (20) получим

$$\frac{\partial X}{\partial z_0} = \frac{1}{z_0} \left( X - \frac{v_0}{2} \frac{\partial X}{\partial v_0} \right) = \frac{X}{z_0} \left( 1 - \frac{1}{2} f_{v_0} \right).$$

Из выражения (24) получим

$$\frac{\partial X}{\partial q} = \frac{X}{q} \left( 1 - \gamma - 0.4 f_{v_0} \right).$$

Поправочные формулы метода Сиаччи удобно переписать в относительных величинах (табл. 25).

Таблица 25

Учитываемый фактор	Поправочная формула
Баллистический коэффициент . . . . .	$\frac{\delta X}{X} = -(1-\gamma) \frac{\delta c}{c}$
Барометрическое давление . . . . .	$\frac{\delta X}{X} = -(1-\gamma) \frac{\delta h_0}{h_0}$
Начальная скорость . . . . .	$\frac{\delta X}{X} = f_{v_0} \frac{\delta v_0}{v_0}$
Температура воздуха . . . . .	$\frac{\delta X}{X} = (1 - \frac{1}{2} f_{v_0}) \frac{\delta z_0}{z_0}$
Вес снаряда . . . . .	$\frac{\delta X}{X} = (1 - \gamma - 0.4 f_{v_0}) \frac{\delta q}{q}$
Угол бросания . . . . .	$\frac{\delta X}{X} = \frac{\cos 2\theta_0}{\cos^2 \theta_0 \operatorname{tg}  \theta_c } \delta \theta_0$

Поправочная формула для продольного ветра может быть получена из выражений (29), (39) и (40)

$$\delta X = W_x \left( T - \frac{X}{v_0} f_{v_0} \cos \theta_0 + \frac{X \cos 2\theta_0}{\cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c|} \frac{\sin \theta_0}{v_0} \right).$$

Для бокового ветра мы имели

$$Z = W_x \left( T - \frac{X}{v_0 \cos \theta_0} \right).$$

### § 106. Пример вычисления поправок по формулам метода Сиаччи

Стрельба из 76-мм пушки. Исходные данные:

Калибр . . . . .	$d = 0,0762 \text{ м}$
Начальная скорость . . . . .	$v_0 = 588 \text{ м/сек}$
Угол бросания . . . . .	$\theta_0 = 10^\circ 08'$
Баллистический коэффициент . . . . .	$c = 0,708$
Полная дальность . . . . .	$X = 5060 \text{ м}$
Угол падения . . . . .	$ \theta_c  = 16^\circ 42'$
Полное время полета . . . . .	$T = 15,3 \text{ сек.}$

1. Определить изменение полной дальности, отвечающее увеличению начальной скорости на  $10\%$ .

Вычисляем величину

$$c'X = 0,728 \cdot 5060 = 3680$$

и по табл. 29 части III по входным величинам  $c'X$  и  $v_0$  определяем  $\lg f_{v_0}$ .

Путем двукратного интерполирования находим

$$\lg f_{v_0} = 1,939; f_{v_0} = 0,869.$$

$v_0$	600	588	550
$c'X$			
3500	1,958	1,954	1,943
3680		1,939	
4000	1,917	1,913	1,902

Изменение дальности определим по формуле

$$\frac{\delta X}{X} = f_{v_0} \frac{\delta v_0}{v_0},$$

$$\delta X = 5060 \cdot 0,869 \cdot 0,01 = 44 \text{ м.}$$

2. Определить изменение полной дальности, отвечающее увеличению веса снаряда на  $\frac{2}{3}0\%$ .

Вычисляем величину

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\operatorname{tg} |\theta_c|} = \frac{0,179}{0,300} = 0,596.$$

Далее по формуле

$$\frac{\delta X}{X} = (1 - \gamma - 0,4 f_{v_0}) \frac{\delta q}{q}$$

получим

$$\delta X = 5060 (1 - 0,596 - 0,4 \cdot 0,869) \frac{2}{3} 0,01 = 1,9 \text{ м.}$$

3. Определить изменение полной дальности, отвечающее увеличению барометрического давления на 10 мм рт. ст.

По формуле

$$\frac{\delta X}{X} = -(1-\gamma) \frac{\delta h_0}{h_0}$$

получим

$$\delta X = -5060 \cdot 0,404 \frac{10}{750} = -27 \text{ м.}$$

4. Определить изменение полной дальности, отвечающее увеличению температуры воздуха на  $10^\circ$ .

По формуле

$$\frac{\delta X}{X} = \left(1 - \frac{1}{2} f_{\tau_0}\right) \frac{\delta \tau_0}{\tau_0}$$

получим

$$\delta X = 5060 (1 - 0,434) \frac{10}{289} = 99 \text{ м.}$$

5. Определить изменение полной дальности, отвечающее продольному ветру в  $10 \text{ м/сек.}$

По формуле

$$\delta X = W_x \left( T - \frac{X}{v_0} f_{v_0} \cos \theta_0 + \frac{X \cos 2\theta_0}{\cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_c|} \frac{\sin \theta_0}{v_0} \right)$$

получим

$$\begin{aligned} \delta X &= 10 \left( 15,3 - \frac{5060}{588} \cdot 0,869 \cdot 0,984 + \frac{5060 \cdot 0,938}{0,984^2 \cdot 0,300} \cdot \frac{0,176}{588} \right) = \\ &= 10(15,3 - 7,3 + 4,9) = 129 \text{ м.} \end{aligned}$$

6. Определить боковое отклонение точки падения, отвечающее боковому ветру в  $10 \text{ м/сек.}$

По формуле

$$Z = W_z \left( T - \frac{X}{v_0 \cos \theta_0} \right)$$

получим

$$Z = 10 \left( 15,3 - \frac{5060}{588 \cdot 0,984} \right) = 65 \text{ м.}$$

Сравнивая полученные значения с величинами поправок по таблицам Академии (§ 104), мы видим, что результаты получились очень близкими. Это вполне понятно, так как формулы, базирующиеся на методе Сиаччи, дают при малых углах бросания — порядка  $10^\circ$  — достаточно точные результаты.

### § 107. Поправочные формулы для малых скоростей применительно к методу Эйлера-Отто

Рассмотрим применение таблиц Отто-Сиаччи для вычисления поправок. В таблицах Отто-Сиаччи входными величинами являются  $\theta_0$  и  $2bX$  и для различных значений этих параметров ( $\theta_0$  через  $5^\circ$  и  $2bX$  через  $0,05$ ) даны величины

$$\frac{bv_0^2}{g}, \frac{v_0^2}{2gX}, |\theta_c|, \frac{v_c}{v_0}, \frac{TVg}{VX}, \frac{Y}{X}.$$

Обозначим для краткости

$$2bX = \xi; \quad \frac{bv_0^2}{g} = \eta; \quad \frac{v_0^2}{2gX} = \zeta,$$

при этом очевидно, что  $\zeta = \frac{\eta}{\xi}$ .

В таблицах Отто-Сиаччи  $\eta$  дано как функция от  $\xi$  и  $\theta_0$ :

$$\eta = f(\xi, \theta_0).$$

Формулы (1) и (2) § 98 позволяют легко вычислить значения  $\frac{\partial \eta}{\partial \xi}$  и  $\frac{\partial \eta}{\partial \theta_0}$ :

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{1}{0,05} \frac{\Delta \eta_n + \Delta \eta_{n-1}}{2}.$$

Заметим, что  $\Delta \eta$  — табличные разности величины  $\eta = \frac{bv_0^2}{g}$ , отвечающие изменению  $2bX$  на  $0,05$ . Эти разности непосредственно указаны в таблицах.

В дальнейшем будем для краткости обозначать

$$\Delta_1 = \frac{\Delta \eta_n + \Delta \eta_{n-1}}{2},$$

при этом получим

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = 20 \Delta_1. \quad (41)$$

Для вычисления величины  $\frac{\partial \eta}{\partial \theta_0}$  надо определить значения  $\eta$ , отвечающие углам бросания  $\theta_0 = +5^\circ$  и  $\theta_0 = -5^\circ$ . При этом, учитывая, что интервал углов бросания в радианах равен  $5^\circ \frac{\pi}{180}$ , получим на основании формулы (2)

$$\frac{\partial \eta}{\partial \theta_0} = \frac{\eta(\theta_0 + 5^\circ) - \eta(\theta_0 - 5^\circ)}{2h} = \frac{36}{\pi} \Delta_2, \quad (42)$$

где

$$\Delta_2 = \frac{\eta(\theta_0 + 5^\circ) - \eta(\theta_0 - 5^\circ)}{2}.$$

Таким образом, пользуясь выражениями (41) и (42), можно непосредственно по таблицам Отто-Сиаччи определить значения  $\frac{\partial \eta}{\partial \xi}$  и  $\frac{\partial \eta}{\partial \theta_0}$ . Остается выразить поправочные коэффициенты через эти величины.

Рассмотрим случай изменения начальной скорости и баллистического коэффициента. Логарифмируя и дифференцируя выражения

$$\xi = 2bX; \quad \eta = \frac{bv_0^2}{g},$$

получим

$$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{db}{b} + \frac{dX}{X},$$

$$\frac{d\eta}{\eta} = \frac{db}{b} + 2 \frac{dv_0}{v_0}.$$

Из первого уравнения, учитывая, что  $\frac{db}{b} = \frac{dc}{c}$ , получим

$$\frac{dX}{X} = \frac{d\xi}{\xi} - \frac{dc}{c} = \frac{d\xi}{d\eta} \frac{\eta}{\xi} \frac{d\eta}{\eta} - \frac{dc}{c} = \frac{d\xi}{d\eta} \frac{\eta}{\xi} \left( \frac{dc}{c} + 2 \frac{dv_0}{v_0} \right) - \frac{dc}{c}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\eta}{\xi} = \zeta = \frac{v_0^2}{2gX}$$

и что (41)

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \frac{1}{20\Delta_1},$$

получим после замены дифференциалов приращениями

$$\frac{dX}{X} = \left( \frac{dc}{c} + 2 \frac{dv_0}{v_0} \right) \frac{v_0^2}{2gX} \frac{1}{20\Delta_1} - \frac{dc}{c}.$$

Обозначая

$$\alpha = \frac{v_0^2}{2gX} \frac{1}{20\Delta_1},$$

получим

$$\frac{\delta X}{X} = -(1-\alpha) \frac{\delta c}{c} + 2\alpha \frac{\delta v_0}{v_0}. \quad (43)$$

Сравнивая с поправочными формулами метода Сиаччи, мы видим, что формула (43) получается из формул метода Сиаччи, если в последних заменить  $\gamma = \alpha$  и  $f_{v_0} = 2\alpha$ . Значения  $\alpha$  в зависимости от  $2bX$  и  $\theta_0$  даны в приложении (табл. V).

Поправочный коэффициент  $\frac{\partial X}{\partial \theta}$  найдем, пользуясь выражением (42) для  $\frac{d\eta}{d\theta}$ . Действительно,

$$d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \eta}{\partial \theta_0} d\theta_0. \quad (44)$$

Рассматривая случай изменения только угла бросания, получим

$$d\eta = d\left(\frac{bv_0^2}{g}\right) = 0$$

и из выражения (44)

$$\frac{d\xi}{d\theta_0} = -\frac{\frac{\partial \eta}{\partial \theta_0}}{\frac{\partial \eta}{\partial \xi}}.$$

На основании (41) и (42) получим

$$\frac{d\xi}{d\theta} = -\frac{36}{\pi} \Delta_2 \frac{1}{20\Delta_1}.$$

С другой стороны

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_0} = \frac{\partial X}{\partial \xi} \frac{d\xi}{d\theta_0},$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_0} = \frac{\partial}{\partial X}(2bX) = 2b;$$

следовательно,

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_0} = -\frac{1}{2b} \frac{36}{\pi} \frac{\Delta_2}{20\Delta_1} = -\frac{1}{2bX} \frac{1,8}{\pi} \frac{\Delta_2}{\Delta_1} X$$

или окончательно

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_0} = \beta X, \quad (45)$$

где

$$\beta = -\frac{1}{2bX} \frac{1,8}{\pi} \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = -\frac{0,573}{2bX} \frac{\Delta_2}{\Delta_1}.$$

Значения  $\beta$  в зависимости от  $2bX$  и  $\theta_0$  даны в приложении (табл. V).

Таким образом три основных поправочных коэффициента определяются при помощи таблиц значений  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\frac{\partial X}{\partial c} = -(1-\alpha) \frac{X}{c},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v_0} = 2\alpha \frac{X}{v_0},$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta_0} = \beta X.$$

Так как остальные поправочные коэффициенты выражаются через эти основные, то, аналогично изложенному в § 105, получим окончательные выражения поправочных формул в следующем виде:

Учитываемый фактор	Поправочная формула
Баллистический коэффициент . . . . .	$\frac{\delta X}{X} = -(1-\alpha) \frac{\delta c}{c}$
Барометрическое давление . . . . .	$\frac{\delta X}{X} = -(1-\alpha) \frac{\delta h_0}{h_0}$
Начальная скорость . . . . .	$\frac{\delta X}{X} = 2\alpha \frac{\delta v_0}{v_0}$
Температура воздуха . . . . .	$\frac{\delta X}{X} = (1-\alpha) \frac{\delta \tau_0}{\tau_0}$
Вес снаряда . . . . .	$\frac{\delta X}{X} = (1-1,8\alpha) \frac{\delta q}{q}$
Угол бросания . . . . .	$\frac{\delta X}{X} = \beta \theta_0$
Продольный ветер . . . . .	$\delta X = W_x \left( T - 2\alpha \frac{X}{v_0} \cos \theta_0 + \beta X \frac{\sin \theta_0}{v_0} \right)$
Боковой ветер . . . . .	$Z = W_z \left( T - \frac{X}{v_0 \cos \theta_0} \right)$

### Пример.

Даны:  $v_0 = 200$  м/сек;  $\theta_0 = 60^\circ$ ;  $c = 0,3$ ;  $X = 3170$  м;  $Y = 1425$  м;  $T = 34,2$  сек.

Требуется вычислить поправки для таблиц стрельбы.

1. Вычисляем  $y_{ep}$ :

$$y_{ep} = \frac{2}{3} Y = \frac{2}{3} 1425 = 950.$$

2. Вычисляем  $b$ :

$$b = 0,000121 c H(y_{ep}) = 0,000121 \cdot 0,3 \cdot 0,911 = 0,331 \cdot 10^{-4}.$$

3. Вычисляем  $2bX$ :

$$2bX = 2 \cdot 0,331 \cdot 10^{-4} \cdot 3170 = 0,210.$$

4. Определяем значения  $\alpha$  и  $\beta$  по табл. V:

$$\alpha = 0,894; \quad \beta = -1,18.$$

5. Вычисляем все поправки.

Для  $\frac{\delta v_0}{v_0} = 0,01$  имеем

$$\delta X = 2\alpha X \frac{\delta v_0}{v_0} = 2 \cdot 0,894 \cdot 3170 \cdot 0,01 = 57 \text{ м.}$$

Для  $\delta h_0 = 10$  мм имеем

$$\delta X = -(1-\alpha) X \frac{\delta h_0}{h_0} = -0,106 \cdot 3170 \cdot \frac{10}{750} = -4,5 \text{ м.}$$

Для  $\delta \tau_0 = 10^\circ$  имеем

$$\delta X = (1-\alpha) X \frac{\delta \tau_0}{\tau_0} = 0,106 \cdot 3170 \cdot \frac{10}{289} = 11,6 \text{ м.}$$

Для  $\frac{\delta q}{q} = \frac{2}{3} 0,01$  имеем

$$\delta X = (1 - 1,82) X \frac{\delta q}{q} = (1 - 1,8 \cdot 0,894) 3170 \frac{2}{3} 0,01 = -13 \text{ м.}$$

Для  $W_x = 10 \text{ м/сек}$  имеем

$$\begin{aligned} \delta X &= W_x \left[ T - 2x \frac{X}{v_0} \cos \theta_0 + \beta X \frac{\sin \theta_0}{v_0} \right] = \\ &= 10 \left[ 34,2 - 2 \cdot 0,894 \frac{3170}{200} 0,5 - 1,18 \cdot 3170 \frac{0,865}{200} \right] = 39 \text{ м.} \end{aligned}$$

Для  $W_z = 10 \text{ м/сек}$  имеем

$$Z = W_z \left( T - \frac{X}{v_0 \cos \theta_0} \right) = 10 \left( 34,2 - \frac{3170}{200 \cdot 0,5} \right) = 25 \text{ м.}$$

### § 108. Баллистические средние. Веса слоев

Изменения метеорологических элементов никогда не бывают постоянными по высоте. Известно, что с высотой меняются скорость и направление ветра, что это изменение не подчиняется какому-либо определенному закону, что ветер, дующий в нижних слоях в одном направлении, может на некоторой высоте изменить направление на обратное. Отклонение температуры от нормальной также не остается постоянным на различных высотах, особенно при наличии инверсий. Ясно, что нельзя пренебречь переменным с высотой характером изменений этих метеорологических элементов. Выведенные выше поправочные формулы позволяют вычислить отклонения точки падения в случае постоянных с высотой изменений метеорологических элементов. Хотя существуют приемы вычисления поправок и в случае переменных с высотой изменений метеорологических элементов, однако практическое выполнение подобных расчетов затруднительно даже в условиях обработки полигонных стрельб. Для подготовки войсковых стрельб подобные приемы совершенно исключаются, так как нельзя предусмотреть в таблицах стрельбы все могущие иметь место варианты изменений метеорологических элементов на различных высотах. Напрашивается необходимость в таком методе, который позволил бы заменить действительное, переменное с высотой, изменение метеорологического элемента некоторым его средним значением.

Введем понятие о баллистическом ветре и баллистическом изменении температуры.

Баллистическим ветром называют такой постоянный средний ветер, действие которого вдоль всей траектории вызовет такое же отклонение точки падения, как и действительный переменный с высотой ветер.

Подобным же образом определяется баллистическое изменение температуры с заменой в предыдущем предложении слова «ветер» словами «изменение температуры».

Для вычисления баллистических средних (баллистический ветер, баллистическое изменение температуры) разбивают траекторию по высоте на ряд слоев настолько тонких, чтобы в каждом из них можно было изменение метеорологического элемента считать постоянным. Например, при определении ветра методом шаров-пилотов определяют среднюю скорость ветра для слоя толщиной от 200 до 800 м.

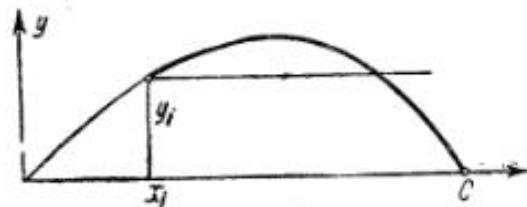
Обозначим через  $Q_z$  изменение дальности вследствие изменения температуры на  $1^\circ$  вдоль всей траектории, а через  $Q_z(x_i)$  — изменение

дальности вследствие изменения температуры на  $1^\circ$ , начиная от  $i$ -й точки и до точки падения (черт. 66, жирная линия).

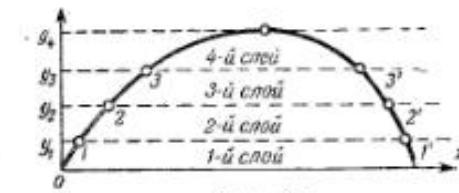
Выделим на траектории слой, ограниченный высотами  $y_1$  и  $y_2$  (черт. 67).

На восходящей ветви траектория пересекает этот слой в точках  $1$  и  $2$  с абсциссами  $x_1$  и  $x_2$ , а на нисходящей ветви — в точках  $1'$  и  $2'$  с абсциссами  $x'_1$  и  $x'_2$ . Положим, что в выделенном слое, и только в нем, имеет место изменение температуры на  $1^\circ$ . Обозначая соответствующее изменение полной дальности через  $|Q_z|_{i-1}^2$ , получим

$$|Q_z|_{i-1}^2 = Q_z(x_1) - Q_z(x_2) + Q_z(x'_2) - Q_z(x'_1).$$



Черт. 66



Черт. 67

Таким же образом для  $i$ -го слоя, ограниченного ординатами  $y_{i-1}$  и  $y_i$ , получим

$$|Q_z|_{i-1}^2 = Q_z(x_{i-1}) - Q_z(x_i) + Q_z(x'_i) - Q_z(x'_{i-1}). \quad (46)$$

Пусть в различных слоях изменение температуры  $\delta\tau$  различное и для  $i$ -го слоя равно  $\delta\tau_i$ . Тогда изменение дальности вследствие изменения температуры в  $i$ -м слое на  $\delta\tau_i$  будет

$$\delta X_i = |Q_z|_{i-1}^2 \delta\tau_i,$$

а полное изменение дальности

$$\delta X = |Q_z|_0^2 \delta\tau_1 + |Q_z|_1^2 \delta\tau_2 + \dots + |Q_z|_{n-1}^2 \delta\tau_n. \quad (47)$$

Нам надо подобрать постоянное вдоль траектории среднее изменение температуры  $\delta\tau_B$  (баллистическое изменение температуры), которое должно вызывать такое же изменение дальности, какое получается подсчетом по выражению (47), т. е.

$$\delta X = Q_z \delta\tau_B.$$

Приравнивая правые части последних двух равенств и разделив их на  $Q_z$ , получим формулу

$$\delta\tau_B = \frac{|Q_z|_0^2}{Q_z} \delta\tau_1 + \frac{|Q_z|_1^2}{Q_z} \delta\tau_2 + \dots + \frac{|Q_z|_{n-1}^2}{Q_z} \delta\tau_n,$$

позволяющую вычислить баллистическое изменение температуры.

Отношение  $\frac{|Q_z|_{i-1}^2}{Q_z}$  будем называть весом  $i$ -го слоя для вычисления баллистического изменения температуры и обозначать

$$q_{zi} = \frac{|Q_z|_{i-1}^2}{Q_z}.$$

Аналогично для продольного ветра получим

$$q_{wxi} = \frac{|Q_{wx}|_{i-1}^2}{Q_{wx}}$$

и для бокового ветра

$$q_{wi} = \frac{|Q_{xi}|}{Q_{xz}} i^{-1}.$$

Если веса слоев известны, то можно вычислить баллистические средние из выражений

$$\delta\tau_B = q_1 \delta\tau_1 + q_2 \delta\tau_2 + \dots + q_n \delta\tau_n, \quad (48)$$

$$W_{xB} = q_{wz1} W_{x1} + q_{wz2} W_{x2} + \dots + q_{wxn} W_{xn}, \quad (49)$$

$$W_{zB} = q_{wz1} W_{z1} + q_{wz2} W_{z2} + \dots + q_{wzn} W_{zn}. \quad (50)$$

Нетрудно видеть, что сумма весов всех слоев должна равняться единице. Действительно, применяя выражение (48) для частного случая, когда изменение температуры одно и то же во всех слоях,

$$\delta\tau_1 = \delta\tau_2 = \dots = \delta\tau_n = \delta\tau_B,$$

получим

$$\delta\tau_B = (q_1 + q_2 + \dots + q_n) \delta\tau_B,$$

откуда

$$\sum_i q_i = 1.$$

Как видно из выражения (46), для вычисления весов слоев необходимо рассчитать поправки в дальности для того случая, когда единичное изменение температуры имеет место не вдоль всей траектории, а начиная от различных точек траектории. Подобные методы вычисления поправок существуют, однако они являются весьма трудоемкими. Кроме того, необходимо учесть, что при точном подсчете весов слоев последние получаются различными не только для различных метеорологических факторов, но и для различных траекторий. Последнее обстоятельство чрезвычайно затрудняет их применение в войсках, так как метеорологические бюллетени должны быть различными не только для различных орудий и зарядов, но даже для различных установок прицела. Поэтому на практике вместо точных весов слоев применяют веса слоев, вычисляемые по приближенным формулам.

### § 109. Приближенный метод вычисления весов слоев

Приближенный метод вычисления весов слоев базируется на следующих двух гипотезах.

Во-первых, принимается, что для всех метеорологических элементов вес каждого слоя пропорционален времени пребывания снаряда в слое, иначе говоря, вес каждого слоя равен отношению времени пребывания снаряда в данном слое к общему времени полета

$$q_i = \frac{t_i}{T}.$$

Во-вторых, допускается, что относительные времена для действительных траекторий могут вычисляться по формулам параболической теории

$$q_i = \frac{t_i}{T} = \frac{\sqrt{n-i+1} - \sqrt{n-i}}{\sqrt{n}}, \quad (51)$$

где  $n$  — число слоев, а  $i$  — номер слоя.

Эта формула является общепринятой в артиллерийской практике. Ее применение значительно облегчает работу метеорологических станций.

так как веса слоев получаются одинаковыми для различных метеорологических элементов и для различных траекторий. Сравнительные расчеты баллистического ветра и баллистического изменения температуры точным методом и по приближенной формуле (51) показывают, что приближенные веса слоев обеспечивают вполне удовлетворительную точность учета указанных метеорологических факторов.

Приведем численные значения весов слоев, вычисленных по формуле (51) для числа слоев до десяти (табл. 26).

Таблица 26

Веса слоев для стрельбы наземной артиллерией

$\begin{array}{c} n \\ \diagdown \\ i \end{array}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,00	0,29	0,18	0,13	0,11	0,09	0,07	0,06	0,05	0,05
2		0,71	0,24	0,16	0,12	0,10	0,08	0,07	0,06	0,06
3			0,58	0,21	0,14	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06
4				0,50	0,19	0,13	0,10	0,08	0,07	0,06
5					0,44	0,17	0,12	0,09	0,08	0,07
6						0,40	0,16	0,12	0,09	0,07
7							0,38	0,15	0,11	0,08
8								0,35	0,14	0,10
9									0,33	0,13
10										0,32

Практическое вычисление баллистического изменения температуры производится непосредственно по формуле

$$\delta\tau_B = q_1 \delta\tau_1 + q_2 \delta\tau_2 + \dots + q_n \delta\tau_n.$$

При вычислении баллистического ветра применяется обычно графический метод, заключающийся в том, что вектор скорости ветра  $\bar{W}_i$  в  $i$ -м слое умножается на вес  $q_i$  этого слоя и подобные слагаемые суммируются векториально (черт. 68):

$$\bar{W}_B = q_1 \bar{W}_1 + q_2 \bar{W}_2 + \dots + q_n \bar{W}_n.$$

Для ускорения работы по вычислению баллистического ветра и баллистического изменения температуры применяются на метеорологических станциях специальные приборы (круг Молчанова, планшет Наумова), описания которых даны в соответствующих наставлениях.

### § 110. Уравнение движения снаряда на вращающейся земле

Уравнение относительного движения снаряда на вращающейся земле имеет следующий вид:

$$m\bar{j}_r = \bar{R} + m\bar{G} - m\bar{j}_e - m\bar{j}_c,$$

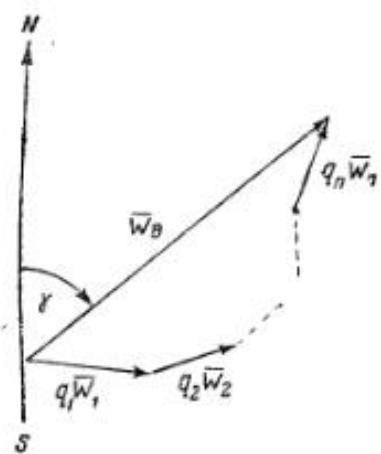
где

$\bar{R}$  — сила сопротивления воздуха;

$\bar{G}$  — ускорение силы притяжения земли;

$\bar{j}_e$  — ускорение относительного движения;

Черт. 68



$\vec{j}_e$  — ускорение переносного движения;  
 $\vec{j}_c$  — ускорения Кориолиса.  
 Вспомним (§ 3), что

$$m\vec{G} - m\vec{j}_e = m\vec{G} - \vec{mg} = mg = q,$$

т. е. что сила притяжения земли и сила тяжести в сумме дают вес снаряда  $q$ .

Таким образом вращение земли нами частично уже учтено. Для полного учета вращения земли достаточно добавить к силам, обычно учитываемым при решении основной задачи внешней баллистики, лишь силу инерции Кориолиса  $m\vec{j}_c$ .

Таким образом получим

$$m\vec{j}_r = \vec{R} + \vec{q} - m\vec{j}_c$$

или

$$m\vec{j}_r = m\vec{J} + \vec{mg} - m\vec{j}_c$$

и окончательно

$$\vec{j}_r = \vec{J} + \vec{g} - \vec{j}_c, \quad (52)$$

где  $J = cH(y)F(v)$  — ускорение силы сопротивления воздуха.

Найдем составляющие ускорения Кориолиса на оси координат, связанные с вращающейся землей. Для этого предварительно определим положение нашей координатной системы относительно земли. Ось  $oy$  (черт. 69) направлена по направлению вертикали в точке вылета. При этом ось  $oy$  составит с плоскостью экватора угол  $\lambda$ , равный географической широте точки вылета. Оси  $ox$  и  $oz$  лежат в плоскости горизонта точки вылета. В этой плоскости направим ось  $ox_1$  на север, а ось  $oz_1$  на восток. Направление стрельбы  $a$ , т. е. углом между осями  $ox_1$  и  $ox$ , отсчитываемым по часовой стрелке, как показано на черт. 69. Вектор угловой скорости земли  $\vec{\Omega}$  направлен в ту сторону, откуда вращение земли кажется происходящим против часовой стрелки, так как в баллистике принята правая система координат.

Найдем проекции угловой скорости  $\vec{\Omega}$  на оси координат  $ox_1y_1z_1$ . Для того разложим вектор  $\vec{\Omega}$  в плоскости  $ox_1y_1$  на две составляющие  $\Omega_y$  и  $\Omega_{x_1}$ :

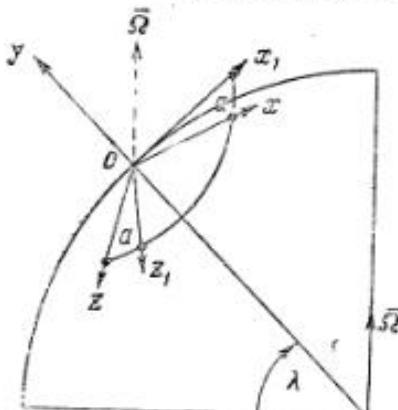
$$\begin{aligned}\Omega_y &= \Omega \sin \lambda, \\ \Omega_{x_1} &= \Omega \cos \lambda,\end{aligned}$$

а последнюю составляющую в свою очередь разложим в плоскости  $x_1y_1z_1$  на  $\Omega_x$  и  $\Omega_z$ :

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \Omega_{x_1} \cos a = \Omega \cos \lambda \cos a, \\ \Omega_z &= \Omega_{x_1} \cos \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\Omega \cos \lambda \sin a.\end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \Omega \cos \lambda \cos a, \\ \Omega_y &= \Omega \sin \lambda, \\ \Omega_z &= -\Omega \cos \lambda \sin a.\end{aligned}$$



Черт. 69

Проекции ускорения Кориолиса на оси координат определим по обычным формулам теоретической механики

$$j_{ex} = 2(\Omega_y \dot{z} - \Omega_z \dot{y}),$$

$$j_{ey} = 2(\Omega_z \dot{x} - \Omega_x \dot{z}),$$

$$j_{ez} = 2(\Omega_x \dot{y} - \Omega_y \dot{x}).$$

Ускорение силы сопротивления воздуха  $J$  составляет с осями координат  $xuz$  углы, косинусы которых равны

$$\cos(J, x) = -\frac{\dot{x}}{v},$$

$$\cos(J, y) = -\frac{\dot{y}}{v},$$

$$\cos(J, z) = -\frac{\dot{z}}{v}.$$

Имея в виду, что  $J = E v$ , где  $E = cH_z(y) G(v)$ , получим

$$J_x = -E \dot{x}; \quad J_y = -E \dot{y}; \quad J_z = -E \dot{z}.$$

Проектируя равенство (52) на оси координат  $xuz$ , получим

$$\left. \begin{aligned}\dot{x} &= -E \dot{x} - 2(\Omega_y \dot{z} - \Omega_z \dot{y}), \\ \dot{y} &= -E \dot{y} - g - 2(\Omega_z \dot{x} - \Omega_x \dot{z}), \\ \dot{z} &= -E \dot{z} - 2(\Omega_x \dot{y} - \Omega_y \dot{x}),\end{aligned}\right\} \quad (53)$$

где

$$E = cH_z(y) G(v); \quad v_r = v \sqrt{\frac{g}{v}}; \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Начальные условия: при  $t = 0$ :  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ;

$$\dot{x} = v_0 \cos \theta_0; \quad \dot{y} = v_0 \sin \theta_0; \quad \dot{z} = 0.$$

Если принять  $\Omega = 7,292 \cdot 10^{-5}$  за величину первого порядка малости, то изменения элементов траектории, которые она вызовет, будут величинами того же порядка малости. Так как при отсутствии вращения земли  $\dot{z} = 0$ , то при учете влияния вращения земли  $\dot{z}$  должно рассматриваться как величина первого порядка малости. Имея это в виду, мы можем в системе (53) пренебречь в первых двух уравнениях членами  $\Omega_y \dot{z}$  и  $\Omega_z \dot{z}$ , как величинами второго порядка малости. В выражении для скорости можно по той же причине пренебречь под корнем слагаемой  $\dot{z}^2$ . В результате получим следующую систему:

$$\left. \begin{aligned}\dot{x} &= -E \dot{x} + 2\Omega_z \dot{y}, \\ \dot{y} &= -E \dot{y} - g - 2\Omega_x \dot{x}, \\ \dot{z} &= -E \dot{z} - 2(\Omega_x \dot{y} - \Omega_y \dot{x}),\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

где

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Исследуя уравнения системы (54), мы приходим к выводу, что при стрельбе вдоль меридиана  $\sin a = 0$ ;  $\Omega_z = -\Omega \cos \lambda \sin a = 0$ , и первые два уравнения (54) ничем не будут отличаться от обычных уравнений основной задачи внешней баллистики. В этом случае вращение земли не влияет на дальность стрельбы, а вызывает только боковое отклонение снаряда, определяемое третьим уравнением.

С другой стороны, если стрельба производится на экваторе и вдоль экватора, то  $\lambda=0$  и  $a=\frac{\pi}{2}$ . В этом случае

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \Omega \cos \lambda \cos a = 0, \\ \Omega_y &= \Omega \sin \lambda = 0,\end{aligned}$$

а в третьем уравнении пропадут слагаемые, зависящие от вращения земли. Так как к тому же при  $t=0 z=0$ , то интегрирование третьего уравнения приводит к решению  $z=0$ ;  $z=0$  для всех значений аргумента  $t$ . В этом случае боковое отклонение будет отсутствовать.

В общем случае для определения влияния вращения земли на полет снаряда необходимо численно проинтегрировать уравнения системы (54) и сравнить полученный результат с данными обычных расчетов траекторий.

Для приближенных расчетов можно применять следующие формулы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A \cos \lambda \sin a, \\ z &= B \sin \lambda - C \cos a \cos \lambda,\end{aligned}$$

где

$$A = \frac{3 - p_0 + p_c}{p_0 + p_c} \frac{g \Omega T^2}{6},$$

$$B = \frac{3}{V(p_0 + p_c)} \frac{g \Omega T^2}{6},$$

$$C = \frac{g \Omega T^2}{6},$$

$$p = \tan \theta.$$

Эти формулы выведены путем некоторого преобразования формул, получающихся для безвоздушного пространства.

В табл. 27 приводятся значения коэффициентов  $A$ ,  $B$  и  $C$ , полученные по приближенным формулам и по данным точных расчетов.

Таблица 27

с	$v_0$	$\theta_0$	X	По точным расчетам			По приближенным формулам		
				A	B	C	A	B	C
0,335	562	40	13 340	29	46	12	31	50	17
0,2	700	40	20 570	58	84	24	55	97	35
0,2	900	40	27 600	77	133	36	71	153	60
0,1	900	40	42 550	195	262	80	178	292	102
0,1	1000	45	54 400	250	442	130	195	445	178

Следует иметь в виду, что коэффициент  $A$  равен наибольшему отклонению по дальности, а коэффициент  $B$  — наибольшему боковому отклонению снаряда вследствие влияния силы инерции Кориолиса.

Из приведенных в табл. 27 данных следует, что влияние вращения земли на полет снаряда целесообразно учитывать только для дальностей стрельбы, превышающих 30 км.

### § 111. Уравнения движения при учете изменения величины и направления ускорения силы тяжести

Ускорение силы тяжести можно считать направленным к центру земли.

Величина ускорения силы тяжести зависит от расстояния рассматриваемой точки до центра земли и изменяется обратно пропорционально квадрату этого расстояния (черт. 70):

$$\frac{g_1}{g} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{R^2}{\left(\frac{R+y}{\cos \alpha}\right)^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{\left(1 + \frac{y}{R}\right)^2}.$$

Значения  $g_1$  и  $R_1$  отвечают некоторой точке  $M$  траектории.

Таким образом

$$g_1 = g \cos^2 \alpha \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-2}.$$

Составляющие ускорения силы тяжести по осям координат равны

$$g_{1x} = -g_1 \sin \alpha; \quad g_{1y} = -g_1 \cos \alpha,$$

откуда

$$\tan \alpha = \frac{y}{R+y} = \frac{y}{R} \frac{1}{1 + \frac{y}{R}} = \frac{y}{R} \left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-1}.$$

Рассматривая  $\frac{x}{R}$  и  $\frac{y}{R}$ , как величины первого порядка малости, можно пренебречь их квадратами. Разлагая  $\left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-1}$  в биномиальный ряд, получим с точностью до малых величин первого порядка

$$\tan \alpha = \frac{y}{R} \left(1 - \frac{y}{R}\right) \approx \frac{y}{R}.$$

Кроме того, вследствие малости угла  $\alpha$ , можно принять

$$\sin \alpha = \tan \alpha = \frac{y}{R}; \quad \cos \alpha = 1.$$

Таким же образом, разлагая  $\left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-2}$  в биномиальный ряд, получим

$$\left(1 + \frac{y}{R}\right)^{-2} = 1 - 2 \frac{y}{R}.$$

При этом

$$g_1 = g \left(1 - 2 \frac{y}{R}\right),$$

$$g_{1x} = -g_1 \sin \alpha = -g \left(1 - 2 \frac{y}{R}\right) \frac{y}{R} \approx -g \frac{y}{R},$$

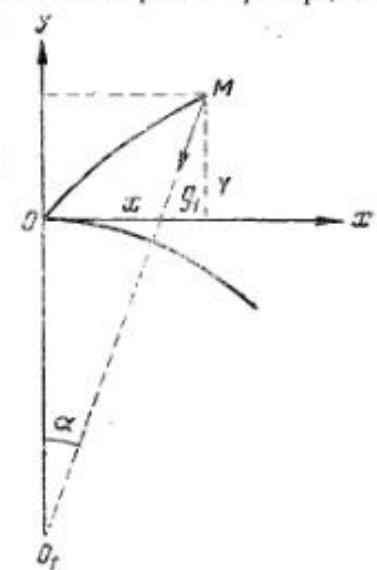
$$g_{1y} = -g_1 \cos \alpha \approx -g_1 = -g + 2 \frac{gy}{R}.$$

Уравнения движения напишутся в следующем виде:

$$\ddot{x} = -E \dot{x} - g \frac{x}{R},$$

$$\ddot{y} = -E \dot{y} - g + 2g \frac{y}{R}.$$

Черт. 70



Обычно влияние изменения величины и направления силы тяжести на дальность весьма мало, так как уменьшение дальности вследствие изменения направления силы тяжести в значительной мере компенсируется увеличением дальности вследствие изменения величины силы тяжести. Эти факторы приходится учитывать только для дальностей, превышающих 50 км.

### § 112. Изменение дальности вследствие кривизны земли

Кривизна земли вызывает несовпадение расчетной точки падения с точкой  $B$  действительного пересечения траекторией поверхности земли.

Дальность по поверхности земли  $\widehat{OB}$  будет больше расчетной дальности  $OC$ .

Поправку в дальности найдем из геометрических построений.  
Имеем (черт. 71)

$$OA = R \operatorname{tg} \alpha, \\ \widehat{OB} = R \alpha.$$

Так как угол  $\alpha$  мал, то с точностью до малых величин первого порядка можно считать  $\operatorname{tg} \alpha = \alpha$ , откуда  $OA = \widehat{OB}$ .

Поправка в дальности получится в следующем виде:

$$\delta X = \widehat{OB} - OC \approx OA - OC = CA.$$

Черт. 71  
Величину  $CA$  найдем из треугольника  $CAB$ . В этом треугольнике угол при  $A$  отличается от  $90^\circ$  на малый угол  $\alpha$ , и так как сама величина  $CA$  рассматривается как величина первого порядка малости, то при ее определении можно угол при  $A$  считать прямым. Отрезок дуги  $CB$  будем рассматривать как отрезок прямой. При этом получим

$$\delta X = AB \operatorname{ctg} |\theta_e|.$$

Величину отрезка  $AB$  можно определить, пользуясь известной теоремой об отношении между отрезком касательной и секущей<sup>1</sup>. Имеем

$$(2R + AB) AB = OA^2 = (X + \delta X)^2$$

или

$$AB \cdot 2R \left(1 + \frac{AB}{2R}\right) = X^2 \left(1 + \frac{\delta X}{X}\right)^2.$$

$$\frac{AB}{X} \left(1 + \frac{AB}{2R}\right) = \frac{X}{2R} \left(1 + \frac{\delta X}{X}\right)^2.$$

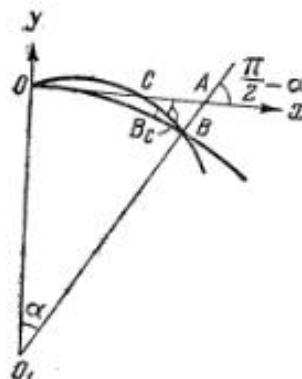
Считая  $\frac{AB}{X}$ ,  $\frac{AB}{R}$ ,  $\frac{X}{R}$ ,  $\frac{\delta X}{X}$  величинами первого порядка малости и пренебрегая их квадратами или произведениями, получим

$$\frac{AB}{X} = \frac{X}{2R}; \quad AB = \frac{X^2}{2R}.$$

Подставляя эти значения в выражение для  $\delta X$ , получим

$$\delta X = \frac{X^2}{2R} \operatorname{ctg} |\theta_e|.$$

<sup>1</sup> Отрезок касательной до ее пересечения с секущей является средней пропорциональной между всей секущей и ее отрезком вне окружности.



Черт. 71

Оценим величину поправки для дальности  $X = 100$  км, приняв  $|\theta_e| = 60^\circ$ :

$$\delta X = \frac{100^2}{2 \cdot 6370} \cdot 0,577 = 0,452 \text{ км} = 452 \text{ м}.$$

Так как поправка в дальности пропорциональна квадрату дальности, то для дальностей в 10, 25 и 50 км получим поправки в 4,5 м, 28 и 113 м соответственно.

### § 113. Поправочные формулы для установки трубы

Рассмотрим изменение установки трубы вследствие изменения условий стрельбы. Изменение метеорологических и баллистических условий стрельбы влияет на установку трубы двояко: непосредственно через изменение скорости горения дистанционного состава и косвенно через изменение элементов траектории.

Например, изменение барометрического давления непосредственно вызывает изменение скорости горения дистанционного состава, а следовательно, установки трубы. С другой стороны, изменение давления вызывает изменение дальности и времени полета, а это также требует изменения установки трубы.

Изменение начальной скорости, с одной стороны, изменяет добавочное давление в трубке, а следовательно, скорость горения дистанционного состава и, с другой, — изменяет дальность и время полета, что вызывает необходимость в изменении установки трубы.

При выводе общей поправочной формулы для установки трубы будем исходить из выражения (20) § 94

$$n_e = \frac{k \alpha_1}{c' \cos \theta_0} [N(U_e, \mu) - N(v_0, \mu')]. \quad (55)$$

Логарифмируя и дифференцируя это равенство и полагая переменными

$$n_e, \alpha_1, c', \theta_0, U_e, v_0 \text{ и } \mu',$$

получим

$$\frac{dn_e}{n_e} = \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} - \frac{dc'}{c'} + \operatorname{tg} \theta_0 d\theta_0 + \frac{d[N(U_e, \mu') - N(v_0, \mu')]}{N(U_e, \mu') - N(v_0, \mu')}. \quad (56)$$

В дальнейшем будем предполагать  $\frac{dn_e}{n_e} = \frac{dn_p}{n_p}$ , т. е. что относительные изменения установки трубы для точки падения и для точки, ставящей на выгоднейшему интервалу, равны. Кроме того, опустим для краткости индекс при  $n$ .

Далее

$$dN(U, \mu') = \frac{\partial N}{\partial U} dU + \frac{\partial N}{\partial \mu'} d\mu'.$$

Так как

$$N(U, \mu') = - \int_{\infty}^U [1 + \mu' F(U)] \frac{dU}{F(U)},$$

то

$$\frac{\partial N}{\partial U} dU = - [1 + \mu' F(U)] \frac{dU}{F(U)} = - \frac{S(U, \mu') dU}{F(U)},$$

$$\frac{\partial N}{\partial \mu'} d\mu' = - \nu d\mu' \int_{\infty}^U [1 + \mu' F(U)]^{-1} dU = Q(U, \mu') \frac{d\mu'}{\nu},$$

где

$$S(U, \mu') = [1 + \mu' F(U)]^{\frac{U}{U_0}},$$

$$Q(U, \mu') = -\nu \mu' \int_{U_0}^U [1 + \mu' F(U)]^{1-\frac{1}{\mu'}} dU.$$

Таблицы значений  $S(U, \mu')$  и  $Q(U, \mu')$  даны в приложении (табл. III и IV).

В дальнейшем для краткости будем писать  $N_c, S_c, Q_c, N_0 \dots$  вместо  $N(U_c, \mu'), S(U_c, \mu')$  и т. д.

Таким образом

$$d[N_c - N_0] = -\frac{S_c dU_c}{F(U_c)} + \frac{S_0 dv_0}{F(v_0)} + (Q_c - Q_0) \frac{d\mu'}{\mu'}.$$

Далее

$$-\frac{dU_c}{F(U_c)} = \frac{1}{U_c} dD(U_c) = \frac{1}{U_c} d[c'X + D(v_0)].$$

Следовательно,

$$d[N_c - N_0] = \frac{S_c}{U_c} d[c'X + D(v_0)] + \frac{S_0 dv_0}{F(v_0)} + (Q_c - Q_0) \frac{d\mu'}{\mu'}.$$

Кроме того,

$$d[c'X + D_0] = Xdc' + c'dX + dD_0 = Xdc' + c'dX - \frac{v_0 dv_0}{F(v_0)}.$$

Окончательно получим

$$d[N_c - N_0] = \frac{S_c}{U_c} Xdc' + \frac{S_c}{U_c} c'dX - \left( \frac{S_c}{U_c} - \frac{S_0}{v_0} \right) \frac{v_0 dv_0}{F(v_0)} + (Q_c - Q_0) \frac{d\mu'}{\mu'}. \quad (57)$$

Далее из формулы (55) следует непосредственно

$$\frac{1}{N_c - N_0} = \frac{k \alpha_1}{nc' \cos \theta_0}. \quad (58)$$

Подставляя выражения (57) и (58) в формулу (56), получим

$$\frac{dn}{n} = \frac{d\alpha_1}{\alpha_1} - \frac{dc'}{c'} + \operatorname{tg} \theta_0 d\theta_0 + \frac{k \alpha_1}{nc' \cos \theta_0 n} \left[ \frac{S_c}{U_c} Xdc' + \frac{S_c}{U_c} c'dX - \left( \frac{S_c}{U_c} - \frac{S_0}{v_0} \right) \frac{dv_0}{G(v_0)} + (Q_c - Q_0) \frac{d\mu'}{\mu'} \right].$$

Введя обозначения

$$\varphi_1 = \frac{k \alpha_1 S_0 X}{v_0 \cos \theta_0 n}; \quad \varphi_2 = \frac{k \alpha_1 S_c X}{U_c \cos \theta_0 n}; \quad \varphi_3 = \frac{k \alpha_1}{\cos \theta_0 nc'} (Q_c - Q_0)$$

и переходя от дифференциалов к приращениям, получим

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta \alpha_1}{\alpha_1} + (\varphi_2 - 1) \frac{\delta c'}{c'} + \operatorname{tg} \theta_0 \delta \theta_0 + \varphi_2 \frac{\delta X}{X} - (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\delta v_0}{c' X G(v_0)} + \varphi_3 \frac{\delta \mu'}{\mu'}. \quad (59)$$

Теперь необходимо выразить  $\frac{\delta \alpha_1}{\alpha_1}$ ,  $\frac{\delta c'}{c'}$  и  $\frac{\delta \mu'}{\mu'}$  через изменения параметров, непосредственно характеризующих условия стрельбы. Из выражения для  $\alpha_1$  (§ 91)

$$\alpha_1 = [1 + 0,0007(t_{a,0} - 15)][1 + 0,001(h_0 - 750)](1 - 0,000053Y),$$

дифференцируя неперов логарифм, полагая переменными величины  $\alpha_1$ ,  $h_0$ ,  $t_{a,0}$  и учитывая, что при нормальных условиях выражения в круглых скобках равны нулю, получим

$$\frac{\delta \alpha_1}{\alpha_1} = 0,0007 \delta t_{a,0} + 0,001 \delta h_0.$$

Из выражения для  $\mu'$

$$\mu' = \frac{\tau_0 Y}{\tau_0} \mu,$$

имеем

$$\frac{\delta \mu'}{\mu'} = -\frac{\delta \tau_0}{\tau_0}.$$

Так как множитель  $\mu'$  учитывает влияние средней температуры воздуха, то правильнее вместо  $\delta \tau_0$  писать  $\delta \tau_B$ .

Далее из выражения

$$c' = c \beta = \beta \frac{ld^2}{q} 1000,$$

в котором коэффициент  $\beta$  учитывает величину плотности воздуха, получим

$$\frac{\delta c'}{c'} = \frac{\delta \Pi_1}{\Pi_0} - \frac{\delta q}{q} = \frac{\delta h_0}{h_0} - \frac{\delta \tau_0}{\tau_0} - \frac{\delta q}{q}.$$

В этом выражении также необходимо произвести замену  $\delta \tau_0$  на  $\delta \tau_B$ .

Подставляя в (59) значения  $\frac{\delta \alpha_1}{\alpha_1}$ ,  $\frac{\delta \mu'}{\mu'}$  и  $\frac{\delta c'}{c'}$ , получим окончательно:

$$\begin{aligned} \frac{\delta n}{n} = & (0,001 h_0 + \varphi_2 - 1) \frac{\delta h_0}{750} + 0,0007 \delta t_{a,0} + (1 - \varphi_2 - \varphi_3) \frac{\delta \tau_B}{289} - \\ & - (\varphi_2 - 1) \frac{\delta q}{q} + \operatorname{tg} \theta_0 \delta \theta_0 - (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\delta v_0}{c' X G(v_0)} + \varphi_3 \frac{\delta X}{X}. \end{aligned} \quad (60)$$

Таким образом мы получили общую поправочную формулу, позволяющую вычислить поправки к установке трубы на изменение условий стрельбы.

Обычно изменение установки трубы рассматривается в связи с изменением установки прицела (угла возвышения) в виде изменения соответствия между прицелом и трубкой. Эту задачу приходится решать различно для двух случаев: а) для данной дальности, б) для данной установки прицела.

В первом случае надо в формуле (60) положить  $\delta X = 0$ , а во втором  $\delta \theta_0 = 0$ .

Так как при определении исходных данных по таблицам стрельбы основная установка трубы берется из графы, отвечающей определенной установке прицела, то и поправка к установке трубы должна определяться для данной установки прицела. Поэтому при вычислении поправок на установку трубы необходимо в формуле (60) положить  $\delta \theta_0 = 0$  и  $\delta X \neq 0$ .

Далее необходимо учесть, что изменение начальной температуры трубы  $\delta T_{m,0}$  обычно сопровождается таким же изменением температуры заряда  $\delta T_z$ . Во внутренней баллистике принимается следующая приближенная зависимость между изменением начальной скорости и изменением температуры заряда:

$$\delta v_0 = 0,001 v_0 \delta T_z.$$

Изменение веса снаряда также вызывает изменение начальной скорости, и, если это изменение не учтено особо, необходимо учесть его, исходя из следующей зависимости (см. § 101):

$$\delta v_0 = -0,4 v_0 \frac{\delta q}{q}.$$

Учитывая сказанное, получим окончательно следующие поправочные формулы для отдельных частных случаев:

а) Случай изменения барометрического давления

$$\frac{\delta n}{n} = (0,001h_0 + \varphi_2 - 1) \frac{\delta h_0}{750} + \varphi_2 \frac{\delta X_h}{X}.$$

б) Случай изменения температуры патрона (если положить  $\delta t_{\text{патр}} = -\delta t_{v_0} = \delta t_s$ )

$$\frac{\delta n}{n} = 0,0007 \delta t_{\text{патр}} - (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{0,001v_0}{c'XG(v_0)} \delta t_{\text{патр}} + \varphi_2 \frac{\delta X_{t_n}}{X}.$$

в) Случай изменения температуры воздуха

$$\frac{\delta n}{n} = (1 - \varphi_2 - \varphi_3) \frac{\delta t_B}{289} + \varphi_2 \frac{\delta X_t}{X}.$$

г) Случай изменения веса снаряда (с учетом изменения  $v_0$ )

$$\frac{\delta n}{n} = (1 - \varphi_2) \frac{\delta q}{q} + (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{0,4v_0}{c'XG(v_0)} \frac{\delta q}{q} + \varphi_2 \frac{\delta X_q}{X}.$$

д) Случай изменения начальной скорости

$$\frac{\delta n}{n} = -(\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\delta v_0}{c'XG(v_0)} + \varphi_2 \frac{\delta X_v}{X}.$$

В приведенных формулах  $\delta X_h, \delta X_t$  и т. д. — изменения дальности, отвечающие изменению давления, температуры и т. д.

#### § 114. Пример вычисления поправок к установке трубы

Исходные условия (§ 93 и 94):

$$v_0 = 624 \text{ м/сек}; c' = 0,766; X = 4000 \text{ м}; \theta_0 = 6^\circ 18';$$

$$|\theta| = 10^\circ 16'; v_c = 276 \text{ м/сек}; U_c = 273 \text{ м/сек}; n = 14,75 \text{ сек.};$$

$$N = 90,5 \text{ делений}; \mu = 0,0160; k = 0,99; z_1 = 0,992.$$

Поправки будем вычислять для следующих изменений условий стрельбы:

$$\delta h_0 = 10 \text{ мм}; \delta \tau_B = 10^\circ; \delta t_{\text{патр}} = 10^\circ; \frac{\delta v_0}{v_0} = 0,01.$$

Соответствующие изменения полной горизонтальной дальности:

$$\delta X_h = -22 \text{ м}; \delta X_t = 70 \text{ м}; \delta X_{t_n} = \delta X v_0 = 39 \text{ м}.$$

Предварительно по табл. III—IV приложения определяем значения функций  $S_o, S_c, Q_o, Q_c$  для  $v_0 = 624$  и  $U_c = 273$ . Получим

$$S(v_0) = 2,21; S(U_c) = 1,11; Q(v_0) = 1,34; Q(U_c) = 4,54.$$

Вычисляем значения  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\varphi_3$ :

$$\varphi_1 = \frac{kz_1 S_o X}{v_0 \cos \theta_0 n} = \frac{0,99 \cdot 0,992 \cdot 2,21 \cdot 4000}{624 \cdot 0,994 \cdot 14,75} = 0,951;$$

$$\varphi_2 = \frac{kz_1 S_c X}{U_c \cos \theta_0 n} = \frac{0,99 \cdot 0,992 \cdot 1,11 \cdot 4000}{273 \cdot 0,994 \cdot 14,75} = 1,090,$$

$$\varphi_3 = \frac{kz_1}{\cos \theta_0 n c'} (Q_c - Q_o) = \frac{0,99 \cdot 0,992 \cdot (4,54 - 1,34)}{0,994 \cdot 14,75 \cdot 0,766} = 0,280.$$

Вычисляем поправки:

$$\frac{\delta n}{n} = (0,001 \cdot 750 + \varphi_2 - 1) \frac{\delta h_0}{750} + \varphi_2 \frac{\delta X_h}{X} = 0,75 + (1,090 - 1) \frac{10}{750} - 1,090 \frac{22}{4000} = 0,0052.$$

Так как при равномерных делениях  $\frac{\delta N}{N} = \frac{\delta n}{n}$ , то  $\delta N_h = 0,0052 N = 0,0052 \cdot 90,5 = 0,47 \approx 0,5$  делений.

Далее

$$\frac{\delta n}{n} = (1 - \varphi_2 - \varphi_3) \frac{\delta t_B}{289} + \varphi_2 \frac{\delta X_t}{X} = (1 - 1,090 - 0,280) \frac{10}{289} + 1,090 \frac{70}{4000} = 0,0063,$$

$$\delta N_t = 0,0063 \cdot 90,5 = 0,57 \approx 0,6 \text{ делений},$$

$$\frac{\delta n_{t_n}}{n} = 0,0007 \delta t_{\text{патр}} - (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{0,001v_0}{c'XG(v_0)} \delta t_{\text{патр}} + \varphi_2 \frac{\delta X_{t_n}}{X} = -0,0007 \cdot 10 - (1,090 - 0,951) \frac{0,624 \cdot 10}{0,766 \cdot 4000 \cdot 0,2115} + \frac{1,090 \cdot 39}{4000} = 0,0163,$$

$$\delta N_{t_n} = 0,0163 \cdot 90,5 = 1,47 \approx 1,5 \text{ делений},$$

$$\frac{\delta n_v}{n} = -(\varphi_3 - \varphi_1) \frac{\delta v_0}{c'XG(v_0)} + \varphi_2 \frac{\delta X_v}{X} = -(1,090 - 0,951) \frac{6,24}{0,766 \cdot 4000 \cdot 0,2115} + \frac{1,090 \cdot 39}{4000} = 0,00931,$$

$$\delta N_v = 0,00931 \cdot 90,5 = 0,842 \approx 0,8 \text{ делений}.$$

Окончательно получим

$$\delta N_h = 0,5 \text{ делений}; \delta N_t = 0,6 \text{ делений}; \delta N_{t_n} = 1,5 \text{ делений};$$

$$\delta N_v = 0,8 \text{ делений}.$$

Знаки всех поправок положительны.

#### § 115. Вычисление поправок для зенитной стрельбы по методу разностей

Вычисление поправок для зенитной стрельбы можно производить по «Баллистическим таблицам АНИИ», ч. IV, изд. 1935 г. или по другим таблицам, дающим значения элементов траектории для различных величин  $v_0, \theta_0, c$  и  $t$ .

В таблицах АНИИ даются значения элементов траектории  $x, y, \sigma$  для  $\theta_0$  через  $5^\circ$ ;  $v_0$  через  $10^\circ$  м/сек;  $c$  через  $0,05$  для  $c \leq 1$  и через  $0,1$  для  $c \geq 1$ ;  $t$  через 2 сек.

Таблицы имеют следующий вид:

Угол бросания $\theta_0 = 75^\circ$						
Начальная скорость $v_0 = 860$ м/сек						
$c \backslash t$	0	2	4 . . . . .	28	30 . . . . .	
.	.	.				
.	.	.				
0,40	.	.				
0,45	.	.				
0,50	.	.				
.	.	.				
			1. Горизонтальная дальность $x$			
			2. Высота $y$			
			3. Скорость $v$			

Баллистические таблицы АНИИ составлены для закона сопротивления воздуха Гарнье (закон 1930 г.).

Расчет поправочных коэффициентов для  $x$  и  $y$ , отвечающих изменению основных параметров  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ , можно произвести по формуле (2) § 98, учитывая значения интервалов изменения этих параметров  $h_c = 20$ ;  $h_v = 0,05$ ;  $h_\theta = 5^\circ \frac{\pi}{180}$ .

При этом для  $c \leq 1$  получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial v_0} &= 0,025 [x_{(v_0+20)} - x_{(v_0-20)}], \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} &= 0,025 [y_{(v_0+20)} - y_{(v_0-20)}], \\ \frac{\partial x}{\partial c} &= 10 [x_{(c+0,05)} - x_{(c-0,05)}], \\ \frac{\partial y}{\partial c} &= 10 [y_{(c+0,05)} - y_{(c-0,05)}], \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_0} &= 5,73 [x_{(\theta_0+5^\circ)} - x_{(\theta_0-5^\circ)}], \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_0} &= 5,73 [y_{(\theta_0+5^\circ)} - y_{(\theta_0-5^\circ)}].\end{aligned}$$

Поправочные коэффициенты  $\frac{\partial x}{\partial W_x}$  и  $\frac{\partial y}{\partial W_x}$  найдем, исходя из метода Диодона, относящего движение снаряда к подвижной системе координат, движущейся со скоростью ветра в направлении ветра (§ 102). Значения  $v_0$  и  $\theta_0$  в этой системе отличаются от действительных на величины

$$\delta v_0 = -W_x \cos \theta_0; \quad \delta \theta_0 = W_x \frac{\sin \theta_0}{v_0}.$$

Обозначая координаты снаряда в подвижной системе через  $x$ , и  $y$ , получим

$$\begin{aligned}x_r - x &= \frac{\partial x}{\partial v_0} \delta v_0 + \frac{\partial x}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 = -\frac{\partial x}{\partial v_0} W_x \cos \theta_0 + \frac{\partial x}{\partial \theta_0} W_x \frac{\sin \theta_0}{v_0}, \\ y_r - y &= \frac{\partial y}{\partial v_0} \delta v_0 + \frac{\partial y}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 = -\frac{\partial y}{\partial v_0} W_x \cos \theta_0 + \frac{\partial y}{\partial \theta_0} W_x \frac{\sin \theta_0}{v_0}.\end{aligned}$$

Чтобы найти отклонение снаряда относительно земли, необходимо к полученным отклонениям добавить перемещение подвижной системы за время полета снаряда, т. е. величину  $W_x t$ .

Получим

$$\begin{aligned}\delta x &= W_x \left( t - \frac{\partial x}{\partial v_0} \cos \theta_0 + \frac{\partial x}{\partial \theta_0} \frac{\sin \theta_0}{v_0} \right), \\ \delta y &= W_x \left( -\frac{\partial y}{\partial v_0} \cos \theta_0 + \frac{\partial y}{\partial \theta_0} \frac{\sin \theta_0}{v_0} \right).\end{aligned}$$

Таким образом, зная поправочные коэффициенты, отвечающие изменению  $v_0$  и  $\theta_0$ , можно вычислить отклонения координат центра массы снаряда вследствие продольного ветра.

При вычислении поправок для зенитной стрельбы обычно вместо раздельного учета влияния изменения температуры и давления вводится поправка на изменение плотности воздуха (без учета влияния изменения скорости звука). При этом считают, что некоторое относительное изменение плотности  $\frac{\partial \Pi}{\partial c}$  отклоняет траекторию снаряда так же, как разное относительное отклонение баллистического коэффициента

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c} = \frac{\partial c}{c}; \quad \delta c = \frac{c}{\Pi} \delta \Pi.$$

Из выражения

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial c} \delta c = \frac{\partial x}{\partial c} \frac{c}{\Pi} \delta \Pi$$

получим окончательно

$$\frac{\partial x}{\partial \Pi} = \frac{c}{\Pi} \frac{\partial x}{\partial c};$$

аналогично

$$\frac{\partial y}{\partial \Pi} = \frac{c}{\Pi} \frac{\partial y}{\partial c}.$$

Таким образом можно, пользуясь баллистическими таблицами, вычислить все интересующие нас поправочные коэффициенты. Эти коэффициенты отвечают заданному времени  $t$ , т. е. тогда, когда сравниваются на основной и измененной траекториях две точки, отвечающие одному и тому же времени полета.

### § 116. Приближенные поправочные формулы для зенитной стрельбы

Будем исходить из приближенных формул метода Сиаччи в применении к зенитной стрельбе (§ 64):

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta &= \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{1}{2c_1 \cos \theta_0} [I(U) - I(v_0)], \\ x &= \frac{\cos \theta_0}{c_1} [D(U) - D(v_0)], \\ t &= \frac{1}{c_1} [T(U) - T(v_0)], \\ y &= x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{x}{2c_1 \cos \theta_0} \left[ \frac{A(U) - A(v_0)}{D(U) - D(v_0)} - I(v_0) \right],\end{aligned}$$

где

$$c_1 = c H(y_{cp}); \quad y_{cp} = \frac{1}{2} y.$$

Для сокращения письма в дальнейшем опустим индекс  $_1$ , при  $c$ , принимая во внимание, что множитель  $H(y_{cp})$  включен в баллистический коэффициент. Вместо  $D(U)$ ,  $D(v_0)$ ,  $A(U)$ ... будем писать  $D$ ,  $D_0$ ,  $A$ ..., а вместо  $\operatorname{tg} \theta$ ,  $\operatorname{tg} \theta_0$  соответственно  $p$ ,  $p_0$ . Кроме того, введем обозначение  $\xi = \frac{x}{\cos \theta_0}$ . При этих условиях получим

$$p = p_0 - \frac{I - I_0}{2c \cos \theta_0}, \quad (61)$$

$$c\xi = D - D_0, \quad (62)$$

$$ct = T - T_0, \quad (63)$$

$$y = xp_0 - \frac{\xi}{2c} \left( \frac{A - A_0}{c\xi} - I_0 \right). \quad (64)$$

Далее из выражений для основных функций Сиаччи имеем (§ 59—60)

$$dD = -\frac{U dU}{F(U)}, \quad (65)$$

$$dI = -\frac{2g dU}{U F(U)} = \frac{2g}{U^2} dD, \quad (66)$$

$$dA = -\frac{I(U) U dU}{F(U)} = I dD, \quad (67)$$

$$dT = -\frac{dU}{F(U)} = \frac{1}{U} dD. \quad (68)$$

Значения дифференциалов  $dD_0$ ,  $dI_0$ ... для точки вылета найдем путем замены в правых частях равенств (65—68)  $U$  через  $v_0$ .

Поправочные формулы будем выводить для заданного времени по-

лета, т. е. будем сравнивать на основной и измененной траекториях две точки, отвечающие одному и тому же времени полета.

Поэтому при выводе поправочных формул принимаем  $dt = 0$ . Дифференцируя выражения (62) и (63), найдем

$$d(c\xi) = dD - dD_0; \quad tdc = dT - dT_0 = \frac{dD}{U} - \frac{dD_0}{v_0}.$$

Исключая  $dD$  из последних двух равенств, получим

$$tdc = \frac{1}{U}[d(c\xi) + dD_0] - \frac{dD_0}{v_0},$$

откуда

$$d(c\xi) = Ut dc - \left(1 - \frac{U}{v_0}\right)dD_0.$$

Так как

$$U = \frac{v \cos \theta}{\cos \theta_0} = \frac{u}{\cos \theta_0},$$

то

$$d(c\xi) = \frac{ut dc}{\cos \theta_0} - \left(1 - \frac{u}{u_0}\right)dD_0. \quad (69)$$

Далее

$$\begin{aligned} d(c\xi) &= d\left(\frac{cx}{\cos \theta_0}\right) = \frac{x}{\cos \theta_0} dc + \frac{c}{\cos \theta_0} dx + \frac{cx \operatorname{tg} \theta_0}{\cos \theta_0} d\theta_0 \\ &\text{и} \\ dD_0 &= -\frac{v_0 dv_0}{F(v_0)}. \end{aligned}$$

Подставляя полученное значение в выражение (69), найдем

$$\frac{x}{\cos \theta_0} dc + \frac{c}{\cos \theta_0} dx + \frac{cx p_0}{\cos \theta_0} d\theta_0 = \frac{ut dc}{\cos \theta_0} + \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) \frac{v_0 dv_0}{F(v_0)}.$$

После деления на  $\frac{c}{\cos \theta_0}$  и замены дифференциалов приращениями получим окончательно

$$\boxed{\delta x = -xp_0 \delta \theta_0 - (x - ut) \frac{\delta c}{c} + (u_0 - u) \frac{\delta v_0}{c F(v_0)}} \quad (70)$$

Мы получили общую поправочную формулу, позволяющую определить изменение горизонтальной дальности  $x$  вследствие изменения трех основных параметров  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ .

Поправочную формулу для высоты  $y$  выведем, исходя из выражения (64), которое предварительно перепишем в следующем виде:

$$2c^2y = 2c^2p_0x - (A - A_0) + \xi I_0 = 2cp_0 \cos \theta_0 \left( \frac{cx}{\cos \theta_0} \right) - (A - A_0) + \xi I_0$$

или

$$A - A_0 + 2c^2y - 2c \sin \theta_0 \xi - \xi I_0 = 0.$$

Дифференцируя последнее равенство, получим

$$dA - dA_0 + 2d(c^2y) - (2c \sin \theta_0 + I_0) d(c\xi) - \xi d(2c \sin \theta_0 + I_0) = 0. \quad (71)$$

Далее

$$dA - dA_0 = IdD - I_0 dD_0 = I[dD_0 + d(c\xi)] - I_0 dD_0 = (I - I_0) dD_0 + Id(c\xi).$$

Подставляя это значение в выражение (71), получим

$$\begin{aligned} (I - I_0) dD_0 + 2d(c^2y) - [2c \sin \theta_0 - (I - I_0)] d(c\xi) - \\ - 2\xi d(c \sin \theta_0) - \xi dI_0 = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Из уравнения (61) имеем

$$\begin{aligned} I - I_0 &= 2(p_0 - p)c \cos \theta_0 = 2c \sin \theta_0 - 2cp \cos \theta_0, \\ 2 \sin \theta_0 - (I - I_0) &= 2cp \cos \theta_0. \end{aligned}$$

Кроме того, выразим  $dI_0$  через  $dD_0$  согласно (66) и подставим значение  $d(c\xi)$  из (69). Получим

$$\begin{aligned} 2(p_0 - p)c \cos \theta_0 dD_0 + 2d(c^2y) - 2cp \cos \theta_0 \left[ \frac{ut}{\cos \theta_0} dc - \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) dD_0 \right] - \\ - 2\xi d(c \sin \theta_0) - \frac{2\xi c}{v_0^2} dD_0 = 0, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \left[ 2(p_0 - p)c \cos \theta_0 + 2cp \cos \theta_0 \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) - \frac{2\xi c}{v_0^2 \cos \theta_0} \right] dD_0 + 2c^2 dy + 4cy dc - \\ - 2cp ut dc - 2c \frac{x}{\cos \theta_0} \sin \theta_0 dc - 2c^2 \frac{x}{\cos \theta_0} \cos \theta_0 d\theta_0 = 0. \end{aligned} \quad (74)$$

Упростим член с  $dD_0$ .

$$\begin{aligned} 2c \cos \theta_0 \left[ p_0 - p + p \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) - \frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \theta_0} \right] dD_0 = -2c \cos \theta_0 \times \\ \times \left( p_0 - p \frac{u}{u_0} - \frac{gx}{u_0^2} \right) \frac{v_0 d\sigma_0}{F(v_0)} = -2c \left( p_0 u_0 - pu - \frac{gx}{u_0} \right) \frac{d\sigma_0}{F(v_0)} = \\ = -2c \left( w_0 - w - \frac{gx}{u_0} \right) \frac{d\sigma_0}{F(v_0)}. \end{aligned}$$

Упростим член, содержащий  $dc$ :

$$(4cy - 2cp ut - 2cxp_0) dc = 2c(2y - wt - xp_0) dc = 2c(2y - wt - xp_0) de.$$

Подставим полученные значения в (74), разделим обе части (74) на  $2c^2$  и заменим дифференциалы приращениями:

$$\boxed{\delta y = \left( w_0 - w - \frac{gx}{u_0} \right) \frac{\delta v_0}{c F(v_0)} - (2y - wt - xp_0) \frac{\delta c}{c} + x \delta \theta_0,} \quad (75)$$

где

$$w = v \sin \theta.$$

Формула (75) позволяет определить изменение высоты  $y$  в зависимости от изменения трех основных параметров  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ .

Следует иметь в виду, что в этом выражении величина  $H(y_{cp})$  включена в балистический коэффициент.

Выпишем выражения для поправочных коэффициентов, учитывая выражение  $H(y_{cp})$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial c} &= \frac{x - ut}{c H(y_{cp})}, \\ \frac{\partial x}{\partial v_0} &= \frac{u_0 - u}{c H(y_{cp}) F(v_0)}, \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_0} &= -x \operatorname{tg} \theta_0, \\ \frac{\partial y}{\partial c} &= -\frac{2y - v \sin \theta - x \operatorname{tg} \theta}{c H(y_{cp})}, \\ \frac{\partial y}{\partial v_0} &= \frac{1}{c H(y_{cp}) F(v_0)} \left( v_0 \sin \theta_0 - v \sin \theta - \frac{gx}{v_0 \cos \theta_0} \right), \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_0} &= x. \end{aligned}$$

Зная поправочные коэффициенты, отвечающие изменению основных параметров  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ , можно определить поправочные коэффициенты для ветра и плотности по формулам предыдущего параграфа.

### 117. Пример вычисления поправочных коэффициентов для зенитной стрельбы

Вычислим поправочные коэффициенты для следующих условий:

$$c = 0,95; v_0 = 820 \text{ м/сек}; \theta_0 = 50^\circ; t = 6 \text{ сек}.$$

Значение баллистического коэффициента отвечает закону сопротивления воздуха Гарнье (1930 г.).

Расчет будем вести двумя методами: при помощи баллистических таблиц АНИИ ч. IV и при помощи приближенных формул § 116.

По таблицам находим непосредственно

$$x = 2529; y = 2858; v_e = 500.$$

Рассчитаем поправочные коэффициенты по формулам § 115. Схема расчетов следующая:

#### Для горизонтальной дальности

$x_{(c+0,05)} = 2502$	$x_{(v_0+20)} = 2587$	$x_{(\theta_0+5^\circ)} = 2256$
$x_{(c-0,05)} = 2556$	$x_{(v_0-20)} = 2471$	$x_{(\theta_0-5^\circ)} = 2776$
$\Delta = -54$	$\Delta = 116$	$\Delta = -520$
$10\Delta = \frac{\partial x}{\partial c} = -540$	$0,025\Delta = \frac{\partial x}{\partial v_0} = 2,90$	$5,73\Delta = \frac{\partial x}{\partial \theta_0} = -2980$

#### Для высоты $y$

$y_{(c+0,05)} = 2826$	$y_{(v_0+20)} = 2926$	$y_{(\theta_0+5^\circ)} = 3070$
$y_{(c-0,05)} = 2890$	$y_{(v_0-20)} = 2786$	$y_{(\theta_0-5^\circ)} = 2622$
$\Delta_1 = -64$	$\Delta_1 = 140$	$\Delta_1 = 448$
$10\Delta_1 = \frac{\partial y}{\partial c} = -640$	$0,025\Delta_1 = \frac{\partial y}{\partial v_0} = 3,50$	$5,73\Delta_1 = \frac{\partial y}{\partial \theta_0} = 2570$

Вычислим еще поправочные коэффициенты для продольного ветра:

$$\frac{\partial x}{\partial w_x} = t - \frac{\partial x}{\partial v_0} \cos \theta_0 + \frac{\partial x}{\partial \theta_0} \frac{\sin \theta_0}{v_0} = 6,00 - 2,90 \cdot 0,643 - 2980 \frac{0,766}{820} = \\ = 6,00 - 1,87 - 2,78 = 1,35,$$

$$\frac{\partial y}{\partial w_x} = - \frac{\partial y}{\partial v_0} \cos \theta_0 + \frac{\partial y}{\partial \theta_0} \frac{\sin \theta_0}{v_0} = - 3,50 \cdot 0,643 + 2570 \frac{0,766}{820} = \\ = - 2,25 + 2,39 = 0,14.$$

Вычислим поправочные коэффициенты по приближенным формулам. Для этого необходимо определить значение угла  $\theta$  в рассматриваемой

точке. Так как значения угла  $\theta$  в таблицах АНИИ не даются, то определим этот угол косвенно из выражения

$$\operatorname{tg} \theta \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{(t=6)} - y_{(t=0)}}{x_{(t=6)} - x_{(t=0)}} = \frac{3526 - 2858}{3180 - 2529} = 1,026, \\ \theta = 45^\circ 44'.$$

$$y_{ep} = \frac{1}{2} y = 1429; H(y_{ep}) = 0,869. \\ \frac{\partial x}{\partial c} = - \frac{x - v_0 \cos \theta_0 t}{cH(y_{ep})} = - \frac{2529 - 820 \cdot 0,643 \cdot 6}{0,95 \cdot 0,869} = - 532, \\ \frac{\partial x}{\partial v_0} = \frac{v_0 \cos \theta_0 - v \cos \theta}{cH(y_{ep}) F(v_0)} = \frac{820 \cdot 0,643 - 500 \cdot 0,608}{0,95 \cdot 0,869 \cdot 80} = 2,70, \\ \frac{\partial x}{\partial \theta_0} = - x \operatorname{tg} \theta_0 = - 2529 \cdot 1,192 = 3020, \\ \frac{\partial y}{\partial c} = - \frac{2y - v \sin \theta t - x \operatorname{tg} \theta_0}{cH(y_{ep})} = - \frac{5716 - 500 \cdot 0,716 \cdot 6 - 2529 \cdot 1,192}{0,95 \cdot 0,869} = - 660,$$

$$\frac{\partial y}{\partial v_0} = \frac{1}{cH(y_{ep}) F(v_0)} \left( v_0 \sin \theta_0 - v \sin \theta - \frac{gx}{v_0 \cos \theta_0} \right) = \\ = \frac{820 \cdot 0,766 - 500 \cdot 0,716 - \frac{9,81 \cdot 2529}{820 \cdot 0,643}}{0,95 \cdot 0,869 \cdot 80} = 3,40, \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_0} = x = 2529.$$

Сравним значения поправочных коэффициентов, полученных по таблицам АНИИ и по приближенным формулам.

Поправочные коэффициенты	$\frac{\partial x}{\partial c}$	$\frac{\partial x}{\partial v_0}$	$\frac{\partial x}{\partial \theta_0}$	$\frac{\partial y}{\partial c}$	$\frac{\partial y}{\partial v_0}$	$\frac{\partial y}{\partial \theta_0}$
Метод разностей по таблицам АНИИ	-540	2,90	-2980	-640	3,50	2570
Приближенные формулы	-532	2,70	-3020	-660	3,40	2529
Разность в процентах	1,5	7	1,3	3	2,9	1,5

### § 118. Веса слоев для зенитной стрельбы

В § 109 приведена приближенная формула, по которой определяются веса слоев, необходимые при вычислении баллистического ветра и баллистического изменения температуры. Эта формула основана на допущении, что веса слоев отвечают относительным временам пребывания снаряда в соответствующих слоях. Из рассмотрения таблицы весов слоев (табл. 26) видно, что веса слоев увеличиваются с увеличением высоты слоя и что наибольший вес слоя отвечает верхнему слою, содержащему вершину траектории.

Как показывают точные расчеты, ход изменения с высотой весов слоев для зенитной стрельбы резко отличается от характера изменения этих весов для стрельбы наземной артиллерией.

Объясняется это тем, что в зенитной артиллерии используется, по существу, только восходящая ветвь траектории, так что снаряд до разрыва проходит каждый слой только один раз.

При этих условиях оказывается, что наибольшие веса слоев отвечают нижним слоям, т. е. ход весов получается обратным тому, что имеет место при введении поправок для точки падения.

Для зенитной стрельбы можно применять веса слоев согласно табл. 28.

Эти веса получены путем осреднения результатов точных расчетов, проведенных применительно к типовым условиям стрельбы зенитной артиллерии<sup>1</sup>.

Таблица 28

Веса слоев для стрельбы зенитной артиллерии

$i \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,000	0,678	0,467	0,355	0,287	0,250	0,203	0,178	0,155	0,140
2		0,322	0,381	0,298	0,271	0,217	0,204	0,177	0,162	0,147
3			0,152	0,252	0,229	0,211	0,186	0,165	0,150	0,138
4				0,095	0,150	0,166	0,163	0,158	0,136	0,133
5					0,163	0,107	0,123	0,129	0,131	0,120
6						0,049	0,081	0,098	0,110	0,109
7							0,040	0,062	0,077	0,085
8								0,033	0,056	0,065
9									0,023	0,042
10										0,021

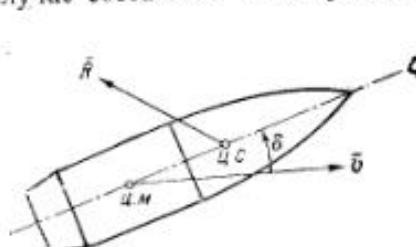
<sup>1</sup> Майор Дмитриев, Некоторые вопросы подготовки стрельбы зенитной артиллерии, 1941 (диссертация).

## Глава VIII

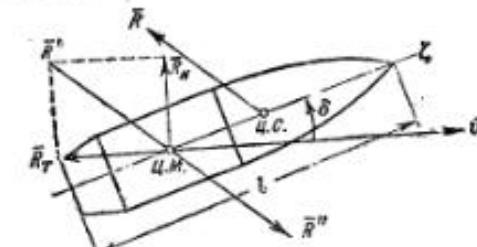
### ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ СНАРЯДА

#### § 119. Система сил, действующих на вращающийся артиллерийский снаряд

При решении основной задачи внешней баллистики предполагалось, что ось снаряда совпадает с касательной к траектории. При этих условиях сила сопротивления воздуха направлена строго по касательной к траектории центра массы снаряда обратно направлению скорости. При изучении вращательного движения снаряда необходимо учесть, что вследствие колебательного движения оси снаряда последняя в общем случае составляет некоторый угол  $\delta$  с касательной к траектории. При



Черт. 72



Черт. 73

этом сила сопротивления воздуха будет составлять некоторый угол  $\Delta$  с осью снаряда, который, вообще говоря, больше угла  $\delta$ .

Для неопиленных снарядов точка приложения силы сопротивления воздуха (центр сопротивления) находится впереди центра массы снаряда (черт. 72).

Приложим к центру массы снаряда силы  $\bar{R}'$  и  $\bar{R}''$ , равные  $\bar{R}$  и направленные в противоположные стороны (черт. 73).

Сила  $\bar{R}'$ , приложенная к центру массы снаряда, совместно с силой тяжести  $q$  определяет движение центра массы или поступательное движение снаряда. Силы  $\bar{R}$  и  $\bar{R}''$  образуют пару сил или опрокидывающий момент, стремящийся увеличить угол  $\delta$ . Для того чтобы при этом снаряд не кувыркался, ему придают быстрое вращательное движение. Известно, что любое твердое симметричное тело при быстром вращении около своей оси оказывает сопротивление внешним силам, стремящимся изменить положение этой оси. Это обстоятельство широко используется в технике (гироскопы, гирокомпасы, стабилизаторы).

Разложим силу  $\bar{R}'$  на две составляющие  $R_T$  и  $R_N$  по касательной к траектории и по нормали к ней. Касательная сила  $R_T$  (лобовое сопротивление) уже учитывалась при решении основной задачи внешней баллистики для случая, когда угол  $\delta$  равен нулю. Нормальная (или подъемная) сила  $R_N$  стремится отклонить центр массы снаряда в ту сторону, куда отклонена головная часть снаряда.

В дальнейшем мы будем рассматривать только движение устойчивых снарядов, для которых угол  $\delta$  мал и не превосходит обычно  $10^\circ$ . При этих условиях допускают<sup>1</sup>, что подъемная сила  $R_N$  и опрокидывающий момент  $M$  пропорциональны углу  $\delta$ , а касательная сила  $R_T$  не зависит от угла  $\delta$ , т. е.  $R_T = R$ .

Выражения для  $R_T$ ,  $R_N$  и  $M$  принято писать в следующем виде:

$$R_T = R = \frac{id^2}{g} 1000 H(y) v^2 K\left(\frac{v}{a}\right), \quad (1)$$

$$R_N = \frac{dl}{g} \cdot 1000 H(y) v^2 K_N\left(\frac{v}{a}\right) \delta, \quad (2)$$

$$M = \frac{d^2 h}{g} \cdot 1000 H(y) v^2 K_M\left(\frac{v}{a}\right) \delta, \quad (3)$$

где

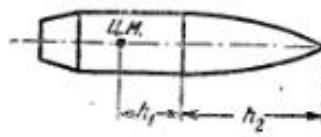
$$K\left(\frac{v}{a}\right) = 4,74 \cdot 10^{-4} C_x\left(\frac{v}{a}\right),$$

$l$  — длина снаряда,

$h$  — некоторая условная величина, приближенно равная расстоянию от центра массы снаряда до центра сопротивления воздуха.

Функции  $K_M$  и  $K_N$  определяются по данным специальных опытных стрельб (§ 129). Вид этих функций зависит от формы снаряда.

В выражение для силы  $R_N$  входит произведение  $dl$ , так как подъемная сила пропорциональна площади осевого сечения снаряда, а не площади поперечного сечения (как это принимается для лобового сопротивления воздуха). Для вычисления  $h$  у нас применяется обычно формула Гобара, имеющая следующий вид (черт. 74):



Черт. 74

$$h = h_1 + 0,57 h_r - 0,16 d,$$

где  $h_1$  — расстояние от центра массы снаряда до основания головной части снаряда;

$h_r$  — высота головной части снаряда.

Величина  $h$  для современных снарядов близка к 1,5 калibrям. Наиболее полные опыты по определению  $K_M$  и  $K_N$  в функции от скорости были проведены в Англии в 1918 г. Фоулером, Галлоном, Локом и Ричмондом со снарядами типа нашей старой 7,62-мм шрапнели.

На черт. 75 показаны кривые  $K_M$ ,  $K_N$  и  $K_T$ , отвечающие этим опытам. Там же показана кривая  $K_M$ , полученная у нас в 1927 г. проф. Вентцелем для 76,2-мм тротиловой гранаты.

<sup>1</sup> Подобное допущение, особенно в отношении силы  $R_T$ , справедливо только для неоперенных снарядов. Например, для оперенных снарядов минометной артиллерии (мин) изменение угла  $\delta$  от 0 до  $10^\circ$  вызывает увеличение силы  $R_T$  на 50%, а для ракетных снарядов, имеющих мощное оперение, это увеличение доходит до 100%.

Опыты с пулями калибра 7,62 и 12,7 мм, проведенные у нас в 1939 г. Чернозубовым и Коноваловым, дают следующие значения функций  $K_M$  и  $K_N$ :

Калибр	Скорость	$10^3 K_M$	$10^3 K_N$
12,7-мм . . . . .	850	1,05	0,565
	500	1,35	—
7,62-мм (тяжелая пуля) . . .	800	0,5	—

Рассмотренные выше силы  $R$  и  $R_N$  и опрокидывающий момент  $M$  являются основными факторами, определяющими поступательное и вращательное движение снаряда. Они учитывались в том или ином виде всеми авторами, занимавшимися изучением этого вопроса.

Однако вращательное движение снаряда зависит еще от некоторых дополнительных сил и моментов, которые сами по себе менее изучены экспериментально и рассматриваются обычно как второстепенные. Рассмотрим некоторые из этих факторов.

### Тушащий момент

Если ось снаряда совершает колебания относительно касательной, то появляется момент, стремящийся уменьшить угловую скорость колебаний. Этот момент, называемый тушающим моментом, пропорционален угловой скорости  $\omega$  колебания оси снаряда и скорости поступательного движения снаряда.

Выражение для тушащего момента принято писать в следующем виде:

$$\bar{D} = -\frac{dl^2}{g} \cdot 1000 H(y) v K_D \left(\frac{v}{a}\right) \bar{\omega},$$

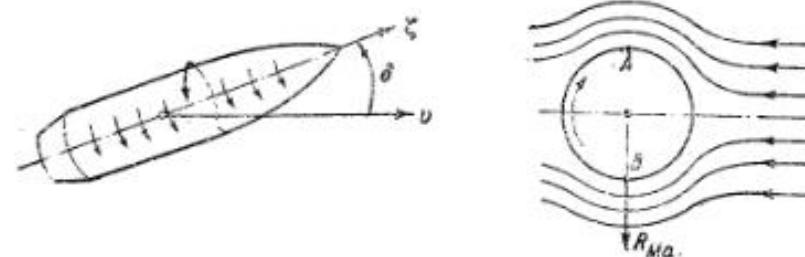
где  $K_D$  — функция, определяемая из опыта. Знак минус указывает, что направление тушащего момента обратно направлению угловой скорости  $\omega$  колебания оси снаряда.

По данным английских опытов  $K_D = 0,85 \cdot 10^{-4}$  для  $v = 390$  м/сек и  $K_D = 0,3 \cdot 10^{-4}$  для  $v = 760$  м/сек. По данным Сьютерлена  $K_D = 0,6 \cdot 10^{-4}$  при  $v = 800$  м/сек.

Такую же величину получил Чернозубов для 12,7-мм пули.

### Сила Магнуса

Рассмотрим вращающийся цилиндр, помещенный в воздушном потоке, направленном перпендикулярно оси цилиндра (черт. 76).



Черт. 76

Частицы воздуха, прилегающие к поверхности цилиндра, увлекаются в движение в направлении перемещения этой поверхности. При

этом в области  $A$  получается встречный поток, вызывающий сгущение воздуха. В области  $B$  будет разрежение воздуха. В результате получим некоторую силу  $R_{Ma}$  — так называемую силу Магнуса, направленную, как указано на чертеже. Если ось цилиндра параллельна направлению потока, то сила Магнуса появиться не может.

Рассмотрим общий случай движения вращающегося снаряда под некоторым углом  $\delta$  к касательной. Если вращение снаряда происходит, как указано на черт. 76, то на обращенной к нам стороне образуется сгущение, а на противоположной стороне — разрежение, и сила Магнуса будет направлена влево от направления движения снаряда.

Так как в общем случае точка приложения силы Магнуса не совпадает с центром массы снаряда, то появится еще момент этой силы. Для силы Магнуса принято выражение следующего вида:

$$R_{Ma} = \frac{d^2 l}{g} \cdot 1000 H(y) r v K_{Ma} \left( \frac{v}{a} \right) \delta,$$

где  $r$  — угловая скорость вращения снаряда вокруг оси симметрии.

Относительно функции  $K_{Ma}$  известно очень мало. Имеющиеся опытные данные относятся к очень малым скоростям; при этом получается  $K_{Ma} = 1,4 \cdot 10^{-2}$ .

#### Момент поверхностного трения

Момент поверхностного трения стремится уменьшить угловую скорость вращения снаряда вокруг его оси.

Выражение для этого момента пишется в следующем виде:

$$\Gamma = -\frac{d^2 l}{g} \cdot 1000 H(y) v K_r \left( \frac{v}{a} \right) \bar{r}.$$

Знак минус указывает на то, что момент  $\Gamma$  стремится уменьшить угловую скорость собственного вращения снаряда  $\bar{r}$ . Значение  $K_r$  получается порядка  $2 \cdot 10^{-6}$ .

Проводились опыты по определению падения угловой скорости снаряда путем фотографирования полета снаряда, снабженного боковым траассером.

Кроме того, производились стрельбы снарядом, снабженным специальной трубкой (М. Т. Г.).

Результаты опытов показаны в табл. 29.

Таблица 29

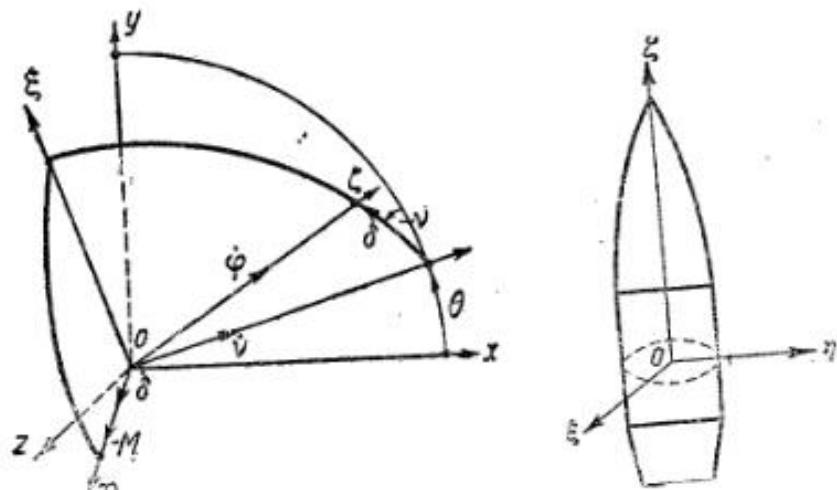
76,2-мм снаряд		122-мм снаряд	
$t$ , сек.	$\Delta r$ , %	$t$ , сек.	$\Delta r$ , %
3	8	4	4
6	13	11	9
9	18	15	11
15	23	20	14
21	29	25	16
28	34	30	19
40	44		

#### § 120. Выход дифференциальных уравнений вращательного движения снаряда на начальном участке траектории<sup>1</sup>

Рассмотрим движение снаряда около его центра массы на начальном участке траектории, пренебрегая ее кривизной. Предположим, кроме того, что на снаряд действует только момент опрокидывающей пары.

Положение оси снаряда будем определять следующим образом (черт. 77).

В центре массы снаряда поместим начало прямоугольной системы координат  $xuz$ , направленной таким образом, что плоскость  $xu$  гори-



Черт. 77

Черт. 78

зонтальна, а плоскость  $xu$  совпадает с плоскостью бросания. При этом ось  $x$  совпадает с направлением стрельбы, а ось  $u$  направлена вверх. В плоскости  $xu$  проведем вектор скорости центра массы снаряда  $v$ , составляющий с осью  $x$  угол  $\theta$ . Ось симметрии снаряда  $\zeta$  составляет с направлением скорости  $v$  угол  $\delta$ , называемый углом нутации. Плоскость угла  $\delta$ , называемая плоскостью сопротивления, составляет с плоскостью  $xu$  угол  $\varphi$ , называемый углом прецессии.

Подвижные оси координат, связанные со снарядом  $\xi, \eta, \zeta$ , направим по главным центральным осям инерции снаряда: ось  $\xi$  — по оси снаряда в направлении его вершины, а оси  $\eta$  и  $\zeta$  — в плоскости поперечного сечения снаряда (экваториальная плоскость), причем ось  $\eta$  лежит в плоскости сопротивления, а ось  $\zeta$  перпендикулярна ( $\xi, \eta, \zeta$  — черт. 77 и 78).

За параметры, определяющие положение оси снаряда, примем угол прецессии  $\varphi$  и угол нутации  $\delta$ . Третьим параметром, определяющим положение самого снаряда, является угол  $\psi$  поворота снаряда вокруг его оси симметрии. Этот угол на чертеже не показан, так как в уравнении движения его нет, а входит в уравнение только его производная.

Векторы угловых скоростей направлены против часовой стрелки (так как мы приняли правую систему координат).

Угловая скорость собственного вращения снаряда  $\omega_x$  направлена по оси  $\zeta$ ; угловая скорость прецессионного движения  $\omega_y$  — по направлению вектора скорости снаряда  $v$ , а угловая скорость нутационного

<sup>1</sup> При изложении § 120 и 121 использованы лекции проф. Слезкина по этому вопросу.

движения  $\dot{\vartheta}$  направлена по оси  $o\dot{\vartheta}$ . По этой же оси направлен вектор  $\overline{M}$  опрокидывающего момента.

Угол  $\delta$  предполагается постоянным, так что  $\dot{\delta}=0$ . Вектор мгновенной угловой скорости снаряда  $\overline{\Omega}$  равен

$$\overline{\Omega} = \overline{\varphi} + \overline{\gamma} + \overline{\delta}.$$

Обозначая проекции мгновенной угловой скорости снаряда на оси  $o\dot{\vartheta}$ ,  $o\dot{\vartheta}$  и  $o\dot{\varphi}$  через  $p$ ,  $q$  и  $r$ , получим

$$\begin{aligned} p &= \Omega_x = -\dot{\gamma} \sin \delta, \\ q &= \Omega_y = \dot{\delta}, \\ r &= \Omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\gamma} \cos \delta. \end{aligned} \quad (4)$$

Напишем выражение для живой силы  $T$  вращательного движения снаряда

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

где  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — моменты инерции относительно главных осей инерции или осей  $o\dot{\vartheta}$ ,  $o\dot{\vartheta}$ ,  $o\dot{\varphi}$ .

Так как снаряд является телом вращения, то для него  $A=B$ . В дальнейшем будем называть  $A$  экваториальным моментом инерции и  $C$  — осевым моментом инерции. Таким образом имеем

$$T = \frac{1}{2}[A(p^2 + q^2) + Cr^2].$$

Подставляя значения  $p$ ,  $q$  и  $r$ , получим

$$T = \frac{1}{2}[A(\dot{\gamma} \sin^2 \delta + \dot{\delta}^2) + C(\dot{\varphi} + \dot{\gamma} \cos \delta)^2]. \quad (5)$$

Для составления дифференциальных уравнений вращательного движения снаряда применим уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

где  $q_i$  — обобщенные координаты или параметры, определяющие положение твердого тела;

$Q_i$  — обобщенные силы или коэффициенты при вариации в выражении для элементарной работы.

В данном случае обобщенными координатами являются углы  $\varphi$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , определяющие положение снаряда.

Напишем выражение для обобщенных сил. Для этого рассмотрим элементарный поворот некоторого тела на угол  $\delta x$  вокруг оси поворота  $l$  под действием момента  $M$ .

Если момент направлен по оси вращения (черт. 79, а), то, заменив момент  $M$  силой  $F$ , действующей на плече  $r$ , получим перемещение точки приложения силы  $F$  равным  $r\delta x$ .

При этом элементарная работа

$$\delta A = Fr\delta x = M\delta x = Q_x \delta x,$$

В данном случае обобщенная сила  $Q_x$  равна моменту  $M$ . Если момент  $M$  составляет некоторый угол  $\beta$  с осью вращения (черт. 79, б),

то выберем точку приложения силы  $F$  на перпендикуляре к плоскости осей  $M$  и  $l$ . При этом сила  $F$  составит угол  $\beta$  с направлением перемещения  $r\delta x$ , и элементарная работа будет равна

$$\delta A = Fr\delta x \cos \beta = M \cos \beta \delta x,$$

а обобщенная сила

$$Q_x = M \cos \beta.$$

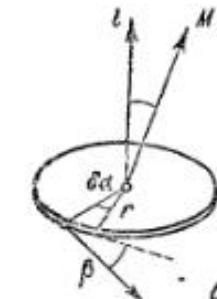
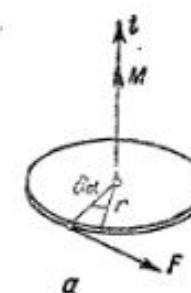
Таким образом обобщенная сила для углового параметра равна проекции главного момента всех сил на ось элементарного поворота. В нашем случае, учитывая, что опрокидывающий момент направлен по оси  $o\dot{\vartheta}$ , получим

$$Q_\varphi = M \cos(\eta, \zeta) = 0,$$

$$Q_\gamma = M \cos(\eta, v) = 0,$$

$$Q_\delta = M.$$

Черт. 79



Составим уравнения Лагранжа, исходя из выражения (5) для живой силы.

Для обобщенной координаты  $\varphi$  получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C(\dot{\varphi} + \dot{\gamma} \cos \delta);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0; \quad Q_\varphi = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = C \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} + \dot{\gamma} \cos \delta) = 0,$$

откуда

$$\dot{\varphi} + \dot{\gamma} \cos \delta = \text{const.}$$

Обозначая через  $r_0$  начальное значение составляющей угловой скорости по оси  $o\dot{\varphi}$ , получим

$$r = \dot{\varphi} + \dot{\gamma} \cos \delta = r_0. \quad (6)$$

Этот вывод верен, однако, только при условии, если пренебречь падением собственной угловой скорости снаряда под влиянием момента трения на поверхности снаряда.

Для обобщенной координаты  $\gamma$  получим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} = A \sin^2 \delta \dot{\gamma} + C(\dot{\varphi} + \dot{\gamma} \cos \delta) \cos \delta = A \sin^2 \delta \dot{\gamma} + Cr_0 \cos \delta;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \gamma} = 0; \quad Q_\gamma = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}}\right) = \frac{d}{dt}(A \sin^2 \delta \dot{\gamma} + Cr_0 \cos \delta) = 0,$$

откуда

$$A \sin^2 \delta \dot{\gamma} + Cr_0 \cos \delta = \text{const} = D. \quad (7)$$

Для обобщенной координаты  $\delta$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}} = A \dot{\delta};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \delta} = A \dot{v}^2 \sin \delta \cos \delta - C(\dot{v} + \dot{v} \cos \delta) \dot{v} \sin \delta = A \dot{v}^2 \sin \delta \cos \delta - Cr_0 \sin \delta;$$

$$Q_\delta = M = \frac{d^2 h}{g} \cdot 1000 H(y) v^2 K_M \left( \frac{v}{a} \right) \dot{\delta}.$$

Уравнение Лагранжа получим окончательно в следующем виде:

$$A \ddot{\delta} - A \dot{v}^2 \sin \delta \cos \delta + Cr_0 \dot{v} \sin \delta = M. \quad (8)$$

### § 121. Интегрирование уравнений вращательного движения снаряда на начальном участке траектории

При движении снаряда в канале ствола ось снаряда совпадает с направлением скорости его центра массы. В момент вылета снаряда, вследствие подпрыгивания орудия и под влиянием вырывающихся газов, снаряд получает некоторый боковой толчок или импульс. Направление этого толчка, вообще говоря, может быть произвольным. При этих условиях наиболее естественно исходить из следующих начальных условий в отношении угловых параметров: при  $t=0$ ;  $\delta_0=0$

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_0; \quad v = v_0.$$

Определим произвольную постоянную  $D$  для уравнения (7), исходя из указанных начальных условий

$$D = Cr_0.$$

Подставляя это значение в уравнение (7), получим

$$A \sin^2 \delta \dot{v} + Cr_0 \cos \delta = Cr_0,$$

$$A \sin^2 \delta \dot{v} = Cr_0 (1 - \cos \delta),$$

$$(1 - \cos^2 \delta) \dot{v} = \frac{Cr_0}{A} (1 - \cos \delta)$$

или окончательно

$$\dot{v} = \frac{Cr_0}{A(1 + \cos \delta)}. \quad (9)$$

В дальнейшем будем полагать угол  $\delta$  величиной первого порядка малости по отношению к единице. При этом, пренебрегая величинами второго порядка малости, можно принять  $\sin \delta \approx \delta$ ;  $\cos \delta \approx 1$ . Введя обозначение

$$\frac{Cr_0}{2A} = \alpha,$$

найдем из выражения (9)

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{Cr_0}{2A} = \alpha, \\ v &= v_0 + \alpha t. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом прецессионное движение снаряда характеризуется вращением плоскости сопротивления вокруг касательной к траектории с постоянной угловой скоростью, равной  $\alpha = \frac{Cr_0}{2A}$ .

Величина угла  $\delta$  на начальном участке траектории не превышает обычно  $10^\circ$ . Так как  $\cos 10^\circ = 0,985$ , то из выражения (9) следует, что колебания угловой скорости прецессии не превышают  $1,5^\circ$ .

Из уравнения (8), подставляя  $v=\alpha$  и заменяя  $\sin \delta = \delta$ ;  $\cos \delta = 1$ , получим

$$A \ddot{\delta} - A \alpha^2 \delta + Cr_0 \alpha \dot{\delta} = M. \quad (11)$$

Разделим обе части равенства (11) на  $A$  и заменим  $\frac{Cr_0}{A} = 2\alpha$ . Кроме того, в выражение для опрокидывающего момента

$$M = \frac{d^2 h}{g} \cdot 1000 H(y) v^2 K_M \left( \frac{v}{a} \right) \dot{\delta}$$

введем обозначение

$$\beta = \frac{d^2 h}{g A} \cdot 1000 H(y) v^2 K_M \left( \frac{v}{a} \right),$$

откуда

$$M = A \beta \dot{\delta}.$$

Подставляя это значение в уравнение (11) и сокращая на  $A$ , получим

$$\ddot{\delta} + (\alpha^2 - \beta) \dot{\delta} = 0. \quad (12)$$

Мы получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменным коэффициентом при  $\dot{\delta}$ , так как в выражение для  $\beta$  входят функции  $H(y)$  и  $v^2 K_M \left( \frac{v}{a} \right)$ .

Уравнение (12) не интегрируется точно в конечном виде. Однако, рассматривая вращательное движение снаряда на коротком участке траектории, можно вместо переменной величины  $\beta$  принять некоторое постоянное среднее ее значение. При этом уравнение (12) можно легко проинтегрировать в конечном виде.

Обозначая

$$\alpha^2 - \beta = \alpha^2 \left( 1 - \frac{\beta}{\alpha^2} \right) = \alpha^2 \sigma.$$

где

$$\sigma = 1 - \frac{\beta}{\alpha^2},$$

получим

$$\ddot{\delta} + \alpha^2 \sigma \dot{\delta} = 0. \quad (13)$$

Характеристическое уравнение напишем в виде

$$k^2 + \alpha^2 \sigma = 0.$$

Полагая  $\sigma > 0$ , найдем

$$k = \pm i \alpha \sqrt{\sigma}.$$

Решение уравнения (13) получим в следующем виде:

$$\delta = C_1 e^{i \alpha \sqrt{\sigma} t} + C_2 e^{-i \alpha \sqrt{\sigma} t} \quad (14)$$

Произвольные постоянные найдем из начальных условий.

Подставляя для начального момента  $t=0$ ;  $\delta_0=0$ , получим

$$0 = C_1 + C_2; \quad C_2 = -C_1.$$

Перепишем уравнение (14) в следующем виде:

$$\delta = C_1 (e^{i \alpha \sqrt{\sigma} t} - e^{-i \alpha \sqrt{\sigma} t}). \quad (15)$$

Дифференцируя уравнение (15), получим

$$\dot{\delta} = C(i\alpha V \sigma e^{i\alpha V \sigma t} + i\alpha V \sigma e^{-i\alpha V \sigma t}).$$

Подставляя для начального момента  $t=0$ ;  $\dot{\delta}=\dot{\delta}_0$ , найдем

$$\dot{\delta}_0 = 2C i\alpha V \sigma,$$

откуда

$$C = \frac{\dot{\delta}_0}{2i\alpha V \sigma}.$$

Далее из формулы Эйлера имеем

$$e^{i\alpha V \sigma t} = \cos \alpha V \sigma t + i \sin \alpha V \sigma t,$$

$$e^{-i\alpha V \sigma t} = \cos \alpha V \sigma t - i \sin \alpha V \sigma t,$$

откуда

$$e^{i\alpha V \sigma t} - e^{-i\alpha V \sigma t} = 2i \sin \alpha V \sigma t.$$

Подставляя последнее выражение и значение  $C_1$  в уравнение (15), получим

$$\dot{\delta} = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha V \sigma} \sin \alpha V \sigma t. \quad (16)$$

Таким образом нутационное движение снаряда характеризуется тем, что ось снаряда в плоскости сопротивления совершает гармонические колебания с периодом, равным

$$T = \frac{2\pi}{\alpha V \sigma},$$

и амплитудой, равной

$$a = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha V \sigma}.$$

### § 122. Исследование характера колебаний оси снаряда на начальном участке траектории

Характер колебания оси снаряда определяется прецессионным и нутационным движениями снаряда. Прецессионное движение определяется из выражения

$$\dot{\gamma} = \omega = \frac{Cr_0}{2A}.$$

Для артиллерийских снарядов отношение моментов инерции  $\frac{A}{C}$  находится в пределах 9—11 и может быть в среднем принято равным 10. При этом получим в среднем

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{20} r_0,$$

т. е. угловая скорость прецессии в среднем в 20 раз меньше угловой скорости собственного вращения снаряда.

Напишем выражение для угловой скорости собственного вращения снаряда  $r_0$ . Обозначая через  $\gamma$  угол наклона нарезов к оси канала ствола и через  $\eta$  — длину хода нарезов в калибрах, получим

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\tau d}{\eta d} = \frac{\pi}{\eta}.$$

Это видно непосредственно из черт. 80, на котором изображена в развернутом виде внутренняя поверхность канала орудия с одним нарезом на протяжении одного оборота нарезки. Окружная скорость точки на поверхности снаряда получится из выражения

$$v_{0k} = v_0 \operatorname{tg} \gamma = \frac{v_0 \pi}{\eta}.$$

Так как, с другой стороны,

$$v_{0k} = \frac{d}{2} r_0,$$

то, сравнивая последние выражения, получим

$$r_0 = \frac{2 \pi v_0}{\eta d}. \quad (17)$$

Для 76,2-мм снаряда, полагая  $v_0 = 600$  м/сек;  $\eta = 25$ , найдем

$$r_0 = \frac{2 \pi \cdot 600}{25 \cdot 0.0762} = 1980 \text{ сек.}^{-1}.$$

Таким образом угловая скорость снаряда получается порядка 2000 сек.  $^{-1}$  или 19000 об/мин.

Для пули, принимая  $v_0 = 800$  м/сек и  $\eta = 30$ , получим соответственно  $r_0 = 22000$  сек  $^{-1} \approx 200000$  об/мин.

Из сказанного следует, что угловая скорость прецессии для 76,2-мм снаряда получается порядка 100 сек.  $^{-1}$ .

Нутационные колебания оси снаряда совершаются с периодом, равным  $\frac{2\pi}{\alpha V \sigma}$ .

Обычно рассматривают промежуток  $T_0$  времени между двумя наименьшими или наибольшими по абсолютной величине значениями угла  $\delta$ . Легко видеть, что этот промежуток времени равен половине полного периода.

Для устойчивых снарядов  $\sqrt{\sigma}$  получается порядка 0,6. Таким образом для 76,2-мм снаряда получим

$$T_0 = \frac{\pi}{\alpha V \sigma} \approx \frac{\pi}{100 \cdot 0.6} \approx 0.052.$$

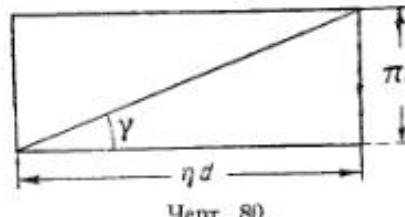
За этот промежуток времени плоскость сопротивления повернется на угол

$$\Delta \gamma = \alpha T_0 = \frac{\pi}{V \sigma} \approx \frac{\pi}{0.6} = 300^\circ.$$

Если, исходя из зависимостей (10) и (16), построить последовательные положения оси снаряда, определяемые углами  $\gamma$  и  $\delta$ , то получим картину, изображенную на черт. 81, на котором дана зависимость  $\delta = f(\gamma)$  в полярных координатах, причем угол  $\delta$  изображается радиус-вектором.

При выводе уравнения (16) мы предполагали скорость центра массы снаряда постоянной. В действительности скорость снаряда убывает на начальном участке траектории. При этом будет также убывать величина  $\beta$

$$\beta = \frac{d^2 h}{g} \cdot 1000 H(y) v^2 K_M \left( \frac{v}{a} \right).$$



Черт. 80.

Величина

$$\sigma = 1 - \frac{\beta}{\alpha^2}$$

будет возрастать, а, следовательно, амплитуда колебания угла  $\delta$

$$a = \frac{\delta_0}{\alpha\sqrt{\sigma}}$$

будет убывать.

Таким образом колебания угла  $\delta$  будут затухающими. Затухание нутационных колебаний усиливается еще под влиянием тушащего момента, который мы не учитывали при выводе формулы (16).

Сказанное подтверждается данными специальных стрельб по картонам, методика проведения которых рассмотрена далее (§ 129).

На черт. 82 показана запись колебаний, полученная на Абердинском полигоне (США) для 84-мм снаряда на протяжении 300 м.

На этом чертеже отчетливо виден характер затухания колебаний оси снаряда. Если рассматривать последовательные петли, описываемые осью снаряда, то видно, что максимальные значения угла  $\delta$  непрерывно убывают, а минимальные

возрастают. Например, если для первой петли имеем  $\delta_{\min} = 0$ ,  $\delta_{\max} = 9,5^\circ$ , то для второй петли  $\delta_{\min} = 0,5^\circ$ ,  $\delta_{\max} = 9^\circ$ , для третьей петли —  $1^\circ$  и  $8,5^\circ$  соответственно и т. д. В дальнейшем движение оси снаряда приближается к псевдорегулярной прецессии с углом нутации порядка  $3,5^\circ$ .

### § 123. Приближенное интегрирование уравнения нутационных колебаний снаряда при переменном $\beta$

Будем исходить из уравнения (13), полагая  $\beta$  переменным. При этом и  $\sigma = 1 - \frac{\beta}{\alpha^2}$  будет переменным.

Имеем

$$\ddot{\delta} + \alpha^2 \sigma \delta = 0. \quad (18)$$

Введем подстановку

$$\delta = \mu e^{it}, \quad (19)$$

где  $\mu$  и  $\chi$  — некоторые функции от аргумента  $t$ . Получим

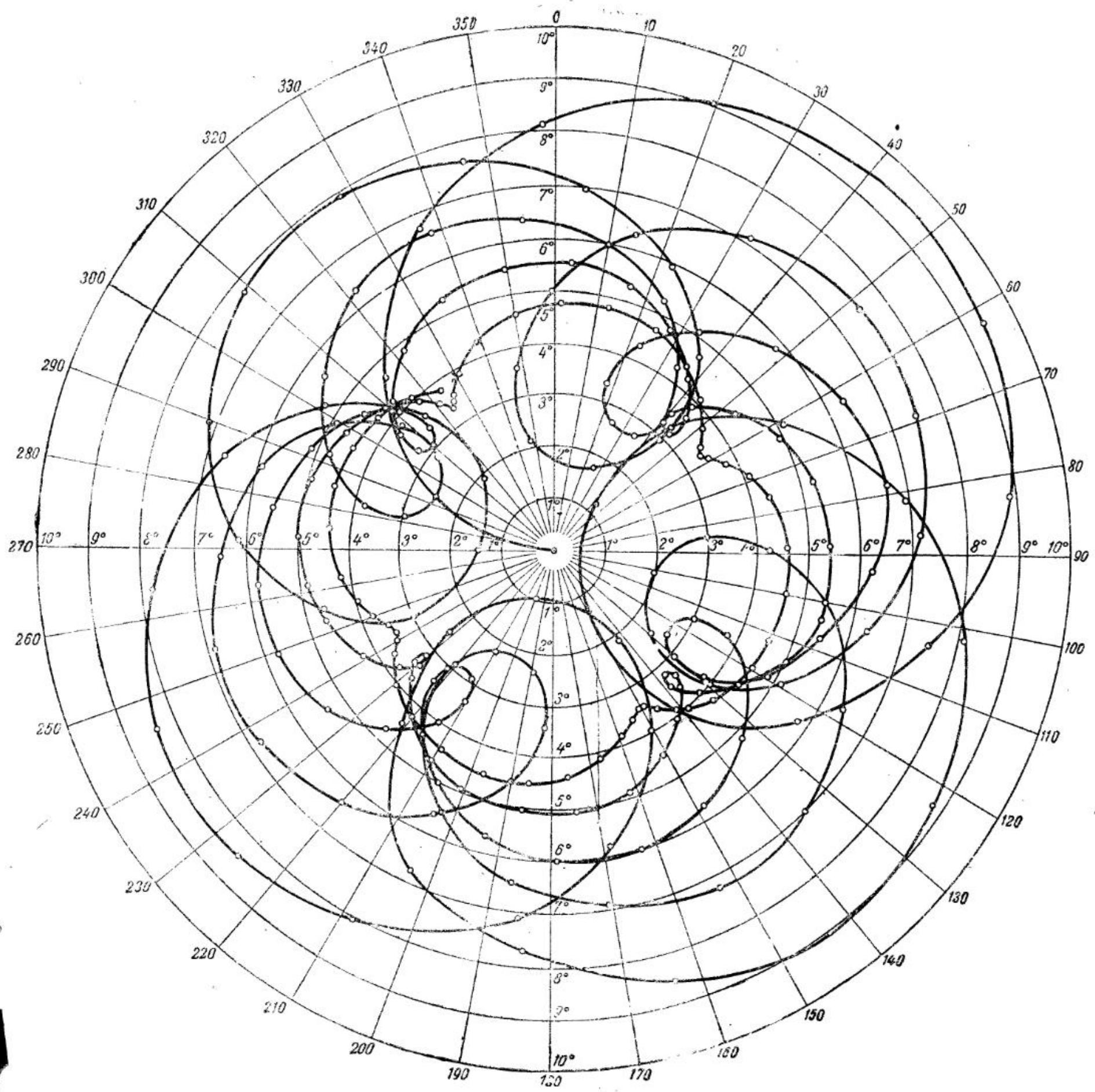
$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \dot{\mu} e^{it} + i\mu e^{it} \dot{\chi}, \\ \ddot{\delta} &= \ddot{\mu} e^{it} + 2i\dot{\mu} e^{it} \dot{\chi} - \mu \dot{\chi}^2 e^{it} + i\mu \ddot{\chi} e^{it}. \end{aligned}$$

Подставляя значения  $\delta$  и  $\ddot{\delta}$  в уравнение (18) и сокращая на  $e^{it}$ , получим

$$\ddot{\mu} + 2i\dot{\mu}\dot{\chi} + i\mu\ddot{\chi} - \mu\dot{\chi}^2 - \alpha^2\sigma\mu = 0. \quad (20)$$

Так как в подстановке (19) одна функция  $\delta$  заменена двумя функциями  $\mu$  и  $\chi$ , то можно задать произвольно одно отношение между ними. Положим, что

$$\alpha^2 \sigma \mu - \mu \dot{\chi}^2 = 0.$$



Черт. 82

Величина

При этом

$$\dot{\chi} = \pm \frac{1}{t} \alpha \sqrt{\sigma},$$
$$\chi = \pm \alpha \int_0^t \sqrt{\sigma} dt.$$

Из уравнения (20)

$$\ddot{\mu} \pm 2iz\sqrt{\sigma}\dot{\mu} \pm iz\sqrt{\sigma}\mu = 0.$$

Пренебрегая<sup>1</sup> в этом уравнении членом  $\ddot{\mu}$ , получим

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \frac{V^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\sigma}},$$

откуда

$$\ln \mu = -\frac{1}{2} \ln V^{\frac{1}{2}},$$
$$\mu = \sigma^{-\frac{1}{4}}.$$

Таким образом получены два приближенных частных интеграла уравнения (18)

$$\hat{\delta}_1 = \sigma^{-\frac{1}{4}} e^{\int_0^t V^{\frac{1}{2}} dt};$$
$$\hat{\delta}_2 = \sigma^{-\frac{1}{4}} e^{-\int_0^t V^{\frac{1}{2}} dt}.$$

Приближенный общий интеграл уравнения (18) напишем в следующем виде:

$$\hat{\delta} = \sigma^{-\frac{1}{4}} \left( C_1 e^{\int_0^t V^{\frac{1}{2}} dt} + C_2 e^{-\int_0^t V^{\frac{1}{2}} dt} \right), \quad (21)$$

Произвольные постоянные найдем из начальных условий: при  $t=0; \hat{\delta}=0$ .

Из уравнения (21) получим непосредственно

$$C_2 = -C_1.$$

Перепишем выражение (21) в следующем виде:

$$\hat{\delta} = C_1 \sigma^{-\frac{1}{4}} \left( e^{\int_0^t V^{\frac{1}{2}} dt} - e^{-\int_0^t V^{\frac{1}{2}} dt} \right). \quad (22)$$

Дифференцируя это уравнение, получим

$$\dot{\hat{\delta}} = C_1 \sigma^{-\frac{1}{4}} \left( i\alpha V^{\frac{1}{2}} e^{\int_0^t V^{\frac{1}{2}} dt} + i\alpha V^{\frac{1}{2}} e^{-\int_0^t V^{\frac{1}{2}} dt} \right) -$$
$$- C_1 \cdot 0,25 \sigma^{-\frac{5}{4}} \left( e^{\int_0^t V^{\frac{1}{2}} dt} - e^{-\int_0^t V^{\frac{1}{2}} dt} \right).$$

Подставляем начальные условия

$$\hat{\delta}_0 = C_1 \sigma_0^{-\frac{1}{4}} 2iz\sqrt{\sigma_0} = 2iz C_1 \sigma_0^{-\frac{1}{4}},$$

<sup>1</sup> Погрешность, связанная с этим допущением, согласно исследованиям проф. В. С. Пугачева, невелика — см. указатель литературы [11].

циами  $\mu$  и  $\chi$ , то можно задать произвольно одно отношение между ними. Положим, что

$$\alpha^2 \mu - \mu \chi^2 = 0.$$

откуда

$$C_1 = \frac{\dot{z}_0}{\frac{1}{4}}.$$

Подставляя это значение в выражение (22), получим

$$\dot{\delta} = \frac{\dot{z}_0}{\frac{1}{4}} \left( e^{i \int_0^t V \bar{z} dt} - e^{-i \int_0^t V \bar{z} dt} \right).$$

Из формулы Эйлера имеем

$$e^{i \int_0^t V \bar{z} dt} - e^{-i \int_0^t V \bar{z} dt} = 2i \sin \left( \alpha \int_0^t V \bar{z} dt \right).$$

Окончательно выражение для угла  $\delta$  напишем в следующем виде:

$$\boxed{\delta = \frac{\dot{z}_0}{\frac{1}{4}} \sin \left( \alpha \int_0^t V \bar{z} dt \right)} \quad (23)$$

Для отдельных участков траектории можно вынести  $\sqrt{\bar{z}}$  средним значением из-под знака интеграла, принимая  $\int_0^t V \bar{z} dt = V z_{ep} t$ . Если принять за  $z_{ep}$  среднегеометрическое между значениями  $z_0$  и  $z$ , т. е.  $z_{ep} = \sqrt{z_0 z}$ , то выражение для угла нутации получим в следующем виде:

$$\delta = \frac{\dot{z}_0}{\frac{1}{4}} \sin \left[ \alpha \left( z z_0^{-\frac{1}{4}} t \right) \right]. \quad (24)$$

В данном случае амплитуда и период колебаний получаются убывающими, так как  $\alpha$  растет вдоль траектории.

#### § 124. Гироскопическая устойчивость снаряда. Необходимая крутизна нарезов

При интегрировании уравнения (13), определяющего нутационные колебания снаряда, мы предположим, что  $\alpha > 0$ . При этих условиях нутационное движение оси снаряда имеет характер периодических колебаний с ограниченной амплитудой

$$\delta_{\max} = \frac{\dot{z}_0}{\alpha \sqrt{\bar{z}}}.$$

Если положить  $\alpha < 0$ , то, заменяя  $V \bar{z} = i \sqrt{|z|} t$ , получим вместо уравнения (15) следующее выражение:

$$\dot{\delta} = -C \left( e^{i \int_0^t V \bar{z} dt} - e^{-i \int_0^t V \bar{z} dt} \right).$$

Дифференцируя последнее выражение и определяя произвольную постоянную  $C$  из начальных условий  $t=0$ ;  $\dot{\delta}=\dot{\delta}_0$ , получим

$$C = -\frac{\dot{\delta}_0}{2 \alpha \sqrt{|z|}},$$

откуда

$$\dot{\delta} = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha \sqrt{|z|}} \frac{e^{i \int_0^t V \bar{z} dt} - e^{-i \int_0^t V \bar{z} dt}}{2} = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha \sqrt{|z|}} \operatorname{sh}(2 \sqrt{|z|} t). \quad (25)$$

Так как гиперболический синус  $\operatorname{sh}$  — функция неограниченно возрастающая, то в данном случае угол  $\delta$  может принять большие размеры и снаряд будет неустойчив на траектории<sup>1</sup>.

Если  $\alpha > 0$ , то снаряд является сильным волчком. При этом малые начальные толчки вызывают малые амплитуды колебаний угла  $\delta$ . Если  $\alpha < 0$ , то снаряд становится слабым волчком или, как говорят, становится гироскопически неустойчивым. При этом даже бесконечно малые начальные толчки могут вызвать значительные отклонения оси снаряда от касательной. Условие гироскопической устойчивости снаряда имеет следующий вид:

$$1 - \frac{\beta_0}{\alpha^2} > 0.$$

Если это условие соблюдается при вылете, то оно будет соблюдаться и при дальнейшем полете снаряда, так как  $\beta$  убывает. Таким образом можно написать условие устойчивости снаряда в следующем виде:

$$1 - \frac{\beta_0}{\alpha^2} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{\beta_0}{\alpha^2} < 1.$$

Для обеспечения устойчивого полета снаряда на начальном участке траектории необходимо стремиться уменьшать  $\beta_0$ , т. е. опрокидывающий момент, и увеличивать  $\alpha$ . Так как  $\alpha = \frac{Cr_0}{2A}$ , то необходимо, по возможности, увеличивать угловую скорость собственного вращения снаряда и уменьшать отношение моментов инерции  $\frac{A}{C}$ .

Выведем выражение для длины хода нарезов, обеспечивающей гироскопическую устойчивость снаряда.

Имеем

$$\beta_0 = \frac{d^2 h}{g A} \cdot 1000 v_0^2 K_{M_0},$$

$$\alpha = \frac{Cr_0}{2A} = \frac{C}{2A} \frac{2\pi v_0}{r^2},$$

откуда

$$\frac{\beta_0}{\alpha^2} = \frac{d^2 h \cdot 1000 v_0^2 d^2 \left( \frac{A}{C} \right)^2}{g A r^2} K_{M_0} = \frac{d^4 h \cdot 1000 v_0^2}{g C r^2} \frac{A}{C} K_{M_0}. \quad (26)$$

Осеневой момент инерции  $C$  выразим в следующем виде:

$$C = \mu \frac{g}{4} \cdot \frac{d^2}{4}.$$

В этом выражении коэффициент  $\mu$  характеризует распределение массы снаряда относительно его оси. Если предположить, что вся масса снаряда расположена на внешней его поверхности, то мы получили бы

$$C = \frac{g}{4} \frac{d^3}{4} \quad \text{или} \quad \mu = 1.$$

<sup>1</sup> При больших углах  $\delta$  становятся неверными исходные допущения, что  $\sin \delta \approx \delta$  и  $\cos \delta \approx 1$ . Поэтому выражение (25) не может быть использовано для конкретного изучения характера движения снаряда при  $\alpha < 0$ . Оно только показывает, что в данном случае нутационное движение снаряда не имеет характера малых периодических колебаний.

Для артиллерийских снарядов  $\mu \approx 0,6$ , а для пуль  $\mu \approx 0,45$ .  
Далее выразим вес снаряда  $q$  через коэффициент веса  $C_q$ :

$$q = C_q d^3 (\rho_m) = 1000 C_q d^3,$$

при этом получим

$$C = \mu \frac{q}{g} \frac{d^2}{4} = \mu C_q \frac{1000 d^5}{4g}.$$

Подставляя это значение в выражение (26), получим

$$\frac{\eta_0}{\eta^2} = \frac{4 \frac{h}{d} \frac{A}{C} \eta^2 K_{M_0}}{\pi^2 \mu C_q}.$$

Исходное неравенство имеет, таким образом, следующий вид:

$$\frac{4}{\pi^2} \frac{\frac{h}{d} \frac{A}{C} \eta^2 K_{M_0}}{\mu C_q} < 1,$$

откуда

$$\eta < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu C_q}{\frac{h}{d} \frac{A}{C} K_{M_0}}}. \quad (27)$$

Введя коэффициент запаса устойчивости  $a$ , можно последнее неравенство переписать в виде равенства

$$\boxed{\eta = a \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu C_q}{\frac{h}{d} \frac{A}{C} K_{M_0}}}, \quad (28)}$$

где

$$C_q = \frac{q}{d^3 (\rho_m)},$$

$$\mu = \frac{4gC}{qd^2},$$

$$\frac{h}{d} = \frac{h_1}{d} + 0,57 \frac{h_t}{d} - 0,16.$$

Значения  $K_{M_0}$  могут быть определены по следующей таблице, предложенной проф. Вентцелем на основании результатов опытных стрельб (табл. 30).

Таблица 30

$v$	$10^3 K_M$	$v$	$10^3 K_M$	$v$	$10^3 K_M$
0-200	0,97	400	1,39	750	1,33
250	1,00	450	1,39	800	1,32
275	1,05	500	1,38	850	1,31
300	1,13	550	1,37	900	1,31
325	1,24	600	1,35	950	1,31
350	1,32	650	1,34	1000	1,30
375	1,36	700	1,33	1050	1,30
400	1,39	750	1,33	1100	1,30

Коэффициент запаса устойчивости  $a$  можно рекомендовать принять равным 0,75. При этих условиях в большинстве случаев обеспечи-

230

вается удовлетворительная кучность, характеризующаяся отношением  $\frac{B_d}{X} \approx \frac{1}{200}$ .

Опыты показывают, что при несоблюдении условия (27) получается, как правило, плохая кучность снарядов. Были попытки добиться повышения кучности снаряда за счет значительного повышения крутизны нарезов против необходимого по условию (28). При этом предполагалось, что можно установить какую-то функциональную зависимость между ожидаемой кучностью и величиной  $\sigma$ . Обработка опытных данных этого не подтверждает. Поэтому увеличивать чрезмерно крутизну нарезов сверх необходимого для обеспечения гироскопической устойчивости снаряда нецелесообразно.

### Пример.

Определить необходимую крутизну нарезов 76,2-мм пушки для следующих условий:

$$v_0 = 700 \text{ м/сек}; \quad \frac{h}{d} = 1,56; \quad C_q = 14,5; \quad \frac{A}{C} = 9,16; \quad \mu = 0,59.$$

Определяем по табл. 30 для  $v_0 = 700 \text{ м/сек}$   $K_{M_0} = 0,00133$ .  
Необходимая длина хода нарезов

$$\eta = 0,75 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\mu C_q}{\frac{h}{d} \frac{A}{C} K_{M_0}}} = 0,75 \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{0,59 \cdot 14,5}{1,56 \cdot 9,16 \cdot 0,00133}} = 25 \text{ калибров.}$$

### § 125. Наибольшая угловая скорость оси снаряда на начальном участке траектории

При проектировании трубок и взрывателей необходимо знать ускорения, которые испытывают их детали вследствие колебания оси снаряда. Ускорение некоторой детали, находящейся на расстоянии  $l$  от центра массы снаряда, равно  $l\omega^2$ , где  $\omega$  — угловая скорость оси снаряда, определяемая из выражения (черт. 83)

$$\omega^2 = p^2 + q^2.$$

Подставляя значения  $p$  и  $q$  из выражений (4) получим

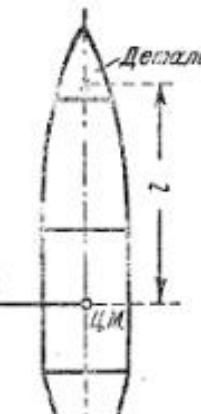
$$\omega^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha + \dot{\delta}^2 \approx \dot{\varphi}^2 \delta^2 + \dot{\delta}^2. \quad (29)$$

Далее из выражения для угла нутации

$$\dot{\delta} = \frac{\dot{\varphi}_0}{\alpha \sqrt{2}} \sin \alpha \sqrt{2} t,$$

где

$$\frac{\dot{\varphi}_0}{\alpha \sqrt{2}} = \dot{\delta}_{\max},$$



Черт. 83

имеем

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_{\max} \sin \alpha \sqrt{2} t.$$

Дифференцируя это выражение и принимая  $\alpha = \alpha_{cp} = \text{const}$ , получим

$$\ddot{\delta} = \dot{\delta}_{\max} \alpha \sqrt{2} \cos \alpha \sqrt{2} t.$$

Подставляя это значение в выражение (29) и заменяя  $\dot{\vartheta} = \alpha$ , получим

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \alpha^2 \delta_{\max}^2 \sin^2 \alpha \sqrt{\sigma} t + \delta_{\max}^2 \alpha^2 \cos^2 \alpha \sqrt{\sigma} t = \\ &= \alpha^2 \delta_{\max}^2 (\sin^2 \alpha \sqrt{\sigma} t + \cos^2 \alpha \sqrt{\sigma} t).\end{aligned}$$

Для определения максимальной величины  $\omega$  необходимо приравнять нулю производную от выражения в круглых скобках:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (\sin^2 \alpha \sqrt{\sigma} t + \cos^2 \alpha \sqrt{\sigma} t) &= 2 \sin \alpha \sqrt{\sigma} t \cos \alpha \sqrt{\sigma} t \alpha \sqrt{\sigma} - \\ &- 2 \cos \alpha \sqrt{\sigma} t \sin \alpha \sqrt{\sigma} t \alpha \sqrt{\sigma} = \alpha^2 \sqrt{\sigma} (1 - \sin^2 \alpha \sqrt{\sigma} t) = 0.\end{aligned}$$

Легко видеть, что максимум стечет на значению  $\alpha \sqrt{\sigma} t = \frac{\pi}{2}$ . При этом вторая производная отрицательна:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} (\sin^2 \alpha \sqrt{\sigma} t + \cos^2 \alpha \sqrt{\sigma} t) &= 2 \alpha^2 \sin 2 \alpha \sqrt{\sigma} t = \\ &= -2 \alpha^2 \sin(2 \alpha \sqrt{\sigma} t) < 0.\end{aligned}$$

Подставляя  $\alpha \sqrt{\sigma} t = \frac{\pi}{2}$  в выражение для  $\omega^2$ , получим

$$\omega_{\max}^2 = \alpha^2 \delta_{\max}^2; \quad \omega_{\max} = \alpha \delta_{\max}.$$

Наибольшее ускорение детали вследствие колебания оси снаряда получится из выражения

$$j_{\max} = l \omega_{\max}^2 = l \alpha^2 \delta_{\max}^2.$$

Угол  $\delta_{\max}$  определяется по данным стрельбы по картонам. Обычно эта величина не превосходит  $15^\circ$ .

Подсчитаем величину этого ускорения для детали взрывателя 76,2-мм снаряда, находящейся на расстоянии 3 калибров от центра массы снаряда.

При этом

$$\begin{aligned}\alpha &= 100 \text{ сек.}^{-1}; \\ \delta_{\max} &= 15^\circ = 0,262 \text{ рад.}; \\ l &= 3 \cdot 0,0762 = 0,228;\end{aligned}$$

$$j_{\max} = l \alpha^2 \delta_{\max}^2 = 0,228 \cdot 100^2 \cdot 0,262^2 = 157 \text{ м/сек}^2$$

или

$$j_{\max} = 16g.$$

Таким образом колебания оси снаряда вызывают наибольшую силу инерции, равную 16 весам детали. Эта сила стремится удалить деталь от центра массы снаряда.

### § 126. Движение оси снаряда на криволинейном участке траектории

Ранее мы видели, что колебания оси снаряда, вызываемые начальными толчками при вылете снаряда, затухают на расстоянии нескольких сот метров от орудия. При этом колебания снаряда принимают характер псевдорегулярной прецессии с углом нутации порядка  $3^\circ$ . При изучении вращательного движения снаряда на начальном участке траектории мы пренебрегали угловой скоростью понижения касательной.

Рассмотрим движение оси снаряда, зависящее от понижения касательной.

Так как устойчивый снаряд следует за касательной, то ось снаряда понижается вслед за касательной с угловой скоростью, близкой к угловой скорости  $\dot{\theta}$  касательной.

Рассмотрим относительное положение оси снаряда  $\zeta$ , вектора угловой скорости снаряда  $\Omega$  и вектора момента количества движения  $G$ . Из выражений

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} &= \bar{p} + \bar{q} + \bar{r}, \\ G &= A(\bar{p} + \bar{q}) + Cr\end{aligned}$$

и из черт. 84 видно, что векторы  $\bar{\Omega}$ ,  $\bar{G}$  и ось снаряда  $\zeta$  лежат в одной плоскости.

Оценим углы между этими векторами:

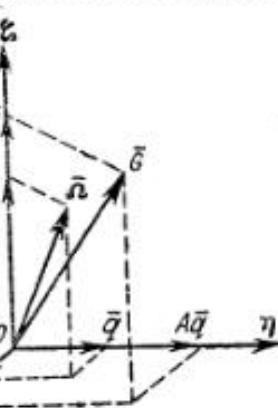
$$\operatorname{tg}(\bar{\Omega}, \zeta) = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r_0}.$$

Из выражений (4) имеем

$$p^2 + q^2 = \dot{\theta}^2 \delta^2 + \dot{\delta}^2.$$

После затухания начальных колебаний  $\dot{\delta}$  мало, так что можно принять

$$p^2 + q^2 \approx \dot{\theta}^2 \delta^2 = \alpha^2 \delta^2.$$



Черт. 84

Таким образом

$$\operatorname{tg}(\bar{\Omega}, \zeta) = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{r_0} = \frac{\alpha \delta}{r_0} = \frac{Cr_0}{2A} \frac{\delta}{r} = \frac{C}{A} \frac{\delta}{2}.$$

Принимая  $\delta = 5^\circ = 0,087$  и  $\frac{A}{C} = 10$ , получим

$$\operatorname{tg}(\bar{\Omega}, \zeta) = \frac{0,087}{10 \cdot 2} = 0,0043,$$

$$\triangle(\bar{\Omega}, \zeta) = 15'.$$

Далее

$$\operatorname{tg}(\bar{G}, \zeta) = \frac{A \sqrt{p^2 + q^2}}{Cr_0} = \frac{A}{C} \operatorname{tg}(\bar{\Omega}, \zeta) \approx 0,043,$$

$$\triangle(G, \zeta) = 2,5^\circ.$$

Таким образом мы видим, что векторы  $\Omega$  и  $G$  составляют очень малые углы с осью снаряда. Если понижение оси снаряда происходит с угловой скоростью, равной  $\dot{\theta}$ , то с такой же примерно угловой скоростью происходит понижение вектора момента количества движения  $G$ .

Согласно теореме Резаля скорость конца вектора момента количества движения твердого тела равна главному моменту действующих сил

$$\bar{V} = \bar{M}.$$

Скорость конца вектора  $G$  равна длине вектора, умноженной на угловую его скорость, т. е.

$$V = G |\dot{\theta}|.$$

Длина вектора  $G$  равна (черт. 85)

$$G = \frac{Cr}{\cos(\bar{G}, \zeta)}.$$

Так как угол  $(G, \zeta)$  порядка  $2,5^\circ$ , то, принимая косинус этого угла равным единице, получим

$$G \approx Cr_0,$$

$$V = Cr_0 |\dot{\theta}|.$$

С другой стороны,

$$M = A \beta \delta_p, \quad (31)$$

где  $\delta_p$  — угол отклонения среднего положения оси снаряда от касательной.

Приравнивая выражения (30) и (31), получим

$$\delta_p = \frac{Cr_0}{A\beta} |\dot{\theta}| = \frac{2\alpha}{\beta} |\dot{\theta}|.$$

Подставляя значение

$$|\dot{\theta}| = \frac{g \cos \theta}{v},$$

получим окончательно

$$\boxed{\delta_p = \frac{2\alpha g \cos \theta}{\beta v}}, \quad (32)$$

где

$$\alpha = \frac{Cr_0}{2A}.$$

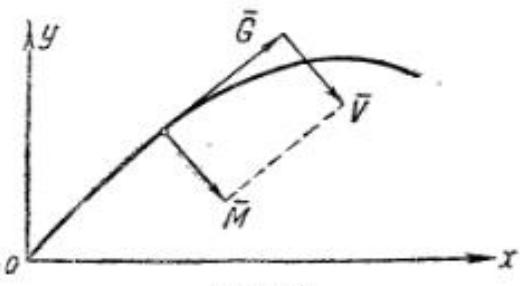
$$\beta = \frac{d^2 h}{g A} \cdot 1000 H(y) v^2 K_M \left( \frac{v}{a} \right).$$

Вектор  $\bar{M}$  перпендикулярен плоскости угла  $\delta_p$  и направлен так, что отклонение оси снаряда от касательной получается против часовой стрелки. Из черт. 85 видно, что ось снаряда при этом получается отклоненной вправо. Угол  $\delta_p$  определяет положение динамической оси равновесия, т. е. некоторой оси, вокруг которой происходят малые колебания оси снаряда (черт. 86). На начальном участке траектории динамическая ось равновесия совпадает с касательной. На криволинейном участке траектории динамическая ось отклонена вправо от касательной на угол  $\delta_p$ , определяемый формулой (32).

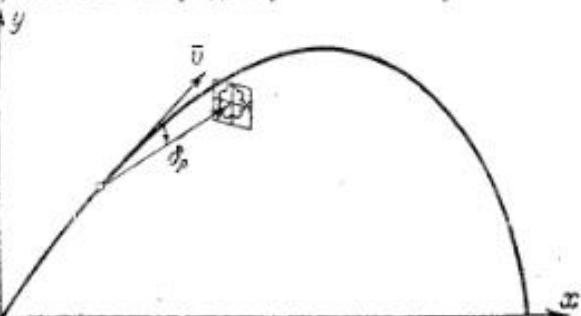
Таким образом динамическая ось играет в движении снаряда около центра масс ту же роль, какую в движении тяжелого волчка выполняет вертикаль.

### § 127. Правильность движения снаряда на криволинейном участке траектории

Для устойчивости полета снаряда на криволинейном участке траектории необходимо, чтобы угол  $\delta_p$  был невелик. Величина этого угла обычно рассматривается как критерий устойчивости движения снаряда на криволинейном участке траектории. Из выражения для  $\delta_p$  видно, что для уменьшения угла  $\delta_p$  выгодно уменьшать  $\alpha$  и увеличивать  $\beta$ ; однако эти требования находятся в противоречии с условиями устойчивости снаряда на начальном участке траектории. Опыт показывает,



Черт. 85



Черт. 86

что в большинстве случаев правильный полет снаряда вдоль всей траектории обеспечивается соблюдением условия гиростабильности снаряда и подбором крутизны нарезов по формуле (28). При этих условиях для углов бросания, не превосходящих  $45^\circ$ , угол  $\delta_p$  обычно не превосходит  $5^\circ$ . Однако в отдельных случаях, особенно при больших углах бросания, угол  $\delta_p$  может быть и очень большим.

Рассмотрим зависимость угла  $\delta_p$  от элементов траектории. Так как  $\beta$  пропорционален произведению  $H(y)v^2$ , то из выражения (32) видно, что угол  $\delta_p$  пропорционален величине

$$\frac{\cos \theta}{H(y)v^2}.$$

Наибольшего значения угол  $\delta_p$  может достигнуть, когда угол  $\theta$  близок к нулю, скорость близка к наименьшей, а высота близка к наибольшей. Это имеет место около вершины траектории, являющейся таким образом критической областью в отношении величины угла  $\delta_p$ .

В наибольшей мере угол  $\delta_p$  зависит от скорости снаряда, так как в выражение для этого угла скорость входит в третьей степени. Точка  $v_{min}$  близка к вершине, особенно при больших  $\theta_0$ . Однако величина  $v_{min}$  в существенной мере зависит от угла бросания. При увеличении угла бросания выше  $60^\circ$  минимальная скорость падает. При этом сильно возрастает угол  $\delta_p$ . Поэтому очень трудно заставить вращающийся снаряд устойчиво пройти вершину траектории при углах бросания порядка  $70^\circ$  и выше. В виде примера подсчитаем угол  $\delta_p$  для 76,2-мм снаряда при следующих условиях:

$$c = 0,6;$$

$$\theta_0 = 60^\circ;$$

$$v_0 = 600 \text{ м/сек};$$

$$\mu = 0,59;$$

$$c_g = 14,5;$$

$$\frac{h}{d} = 1,56.$$

При помощи баллистического сборника Академии находим непосредственно  $Y = 5160 \text{ м}$ .

Скорость в вершине найдем по методу Сиаччи

$$c' \sin 2\theta_0 = I(U_s) - I(v_0),$$

где  $c' = c \beta$  ( $\beta$  — по Сиаччи).

По табл. 31 части III находим

$$\beta = 1,037,$$

откуда

$$c' = 0,6 \cdot 1,037 = 0,622;$$

$$I(v_0) = 0,178;$$

$$I(U_s) = c' \sin 2\theta_0 + I(v_0) = 0,622 \cdot 0,866 + 0,178 = 0,716.$$

По той же таблице находим

$$U_s = 261;$$

$$v_s = U_s \cos \theta_0 = 261 \cdot 0,5 = 130 \text{ м/сек};$$

$$H(Y) = H(5160) = 0,590.$$

Далее, подставляя в выражение для

$$\delta_p = \frac{2\alpha g \cos \theta}{\beta v^2}$$

значения

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{d^2 h \cdot 1000}{g A} H(y) v^2 K_M, \\ C &= \mu \frac{q}{g} \frac{d^2}{4} = \mu C \frac{d^2}{q g} \cdot 1000, \\ a &= \frac{C r_0}{2 A}, \\ r_0 &= \frac{2 \pi v_0}{\gamma d},\end{aligned}$$

получим

$$\hat{\delta}_p = \frac{\pi g}{2} \frac{\mu C q v_0}{r_0 d} d \frac{\cos \theta}{H(y) v^2 K_M}.$$

Для вершины траектории

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_p &= \frac{\pi g}{2} \frac{0.59 \cdot 14.5 \cdot 600}{25 \cdot 1.56} \cdot 0.0762 \cdot \frac{1}{0.590 \cdot 130^2 \cdot 0.97 \cdot 10^{-3}} = 0.123 \text{ рад.} \\ \text{или } \hat{\delta}_p &= 7^\circ 3' .\end{aligned}$$

### § 128. Вычисление деривации

Так как в среднем ось снаряда отклонена вправо на угол  $\hat{\delta}_p$ , определяемый из выражения (32), то появится боковая сила  $R_N$ , направленная также вправо. Обозначая в данном случае эту силу через  $R_z$ , получим из выражения (2) следующую зависимость:

$$R_z = \frac{d I}{g} 1000 H(y) v^2 K_N \hat{\delta}_p.$$

Напишем уравнение движения центра массы снаряда по оси  $z$ . При этом, кроме силы  $R_z$ , необходимо учесть проекцию лобового сопротивления на ось  $z$ , которая равна

$$-R \cos(v, z) = -R \frac{\dot{z}}{v};$$

получим

$$\frac{g}{q} \ddot{z} = -R \frac{\dot{z}}{v} + R_z.$$

Учитывая, что

$$\frac{g}{q} R \frac{\dot{z}}{v} = J \frac{\dot{z}}{v} = c H(y) F(v) \frac{\dot{z}}{v} = c H(y) G(v) \dot{z},$$

найдем

$$\boxed{\ddot{z} = -c H(y) G(v) \dot{z} + \frac{g}{q} R_z.} \quad (33)$$

Начальные условия при  $t = 0$ :

$$z = 0;$$

$$\dot{z} = 0.$$

Если сила  $R_z$  известна, то можно вычислить деривацию путем численного интегрирования уравнения (33).

Заметим, что в выражение для  $R_z$  входит непосредственно функция  $K_N$ , а в выражение для  $\hat{\delta}_p$  — функция  $K_M$ . В итоге для вычисления деривации необходимо знать отношение  $\frac{K_N}{K_M}$  для рассматриваемого снаряда при различных скоростях.

Однако сведения, которыми мы располагаем в отношении функций  $K_M$  и  $K_N$ , недостаточны для вычисления деривации с удовлетворительной точностью. Опыты английских авторов, а также опыты проф. Вентцеля относятся, по существу, к одному типу снаряда старой формы. Относительно зависимости этих функций от формы снаряда почти ничего не известно. Кроме того, есть основание полагать, что деривация снаряда в какой-то мере зависит от силы Магнуса, отклоняющей снаряд влево при правой нарезке орудия. По указанным причинам в настоящее время деривация определяется в основном по данным опытных стрельб.

Предложено немало эмпирических формул для вычисления деривации, например:

$$\begin{aligned}Z &= k T^2, \\ Z &= k_1 \frac{X \operatorname{tg} \delta_0}{\tau},\end{aligned}$$

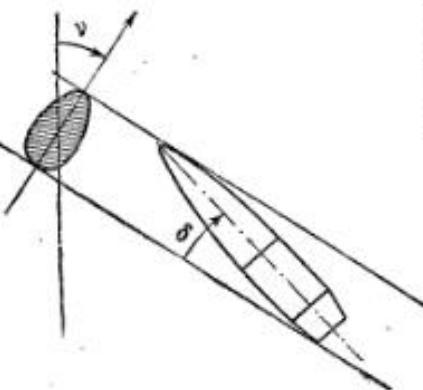
где  $k$  и  $k_1$  — коэффициенты, определяемые по данным опытных стрельб на нескольких дальностях. Эти эмпирические формулы являются по существу инструментом интерполяции, позволяющим несколько сократить число опытных стрельб при определении деривации.

### § 129. Определение аэродинамических характеристик снаряда стрельбой по картонам

Для определения аэродинамических характеристик снаряда  $K_M$  и  $K_N$  организуются специальные опытные стрельбы по картонам. Обмер пробони в картонах позволяет определить закон изменения углов  $\alpha$  и  $\delta$  в зависимости от времени.

Если ось снаряда не совпадает с направлением скорости, то снаряд вырубает в картоне овальную пробону. Угол прецессии может быть непосредственно измерен на картоне по отклонению большой оси овала от вертикали (черт. 87).

О величине угла  $\delta$  можно судить по длине большой оси овала. Для получения переходного масштаба от длины большой оси овала  $a$  к углу  $\delta$  поступают следующим образом. Из картона вырезают профиль снаряда и накалывают его в точке, отвечающей центру массы снаряда, на лист миллиметровой бумаги (черт. 88).



Черт. 87



Черт. 88

Придавая профилю снаряда различные углы  $\delta$ , можно непосредственно получить обмер величины  $a$ , отвечающей длине большой оси овала. Таким образом находится переходный масштаб  $\delta = f(a)$ .

Обмер картонов позволяет построить зависимость  $\psi = f(\delta)$  в полярных координатах, т. е. получить график, аналогичный черт. 81—82. Между картонами устанавливаются две рамы-мишени от хронографа

Ле-Буланже или соленоиды от соленоидного хронографа. Таким образом будет известна скорость снаряда. Зная, кроме того, расстояния между картонами, можно определить моменты времени прохождения снарядом каждого картона. В итоге будем иметь зависимости  $\delta = f_1(t)$  и  $y = f_2(t)$ . Это позволит нам определить период  $T_1$  между двумя минимумами угла  $\delta$ . С другой стороны, имеем (§ 121)

$$T_1 = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{aV^2},$$

Из этого выражения можно найти  $a$ , так как

$$a = 1 - \frac{v}{g};$$

$$a = \frac{Cr_0}{2A} = \frac{C}{A} \cdot \frac{r_0}{d}$$

и

$$\beta = \frac{d^2 h}{g A} \cdot 1000 v^2 K_M \left( \frac{v}{a} \right);$$

отсюда можно определить  $K_M \left( \frac{v}{a} \right)$ , так как все остальные величины, входящие в выражения для  $a$  и  $\beta$ , известны.

Чтобы определить функцию  $K_N$  для снаряда определенной формы, необходимо вычислить для него функцию  $K_M$  по методике, указанной выше, при двух положениях центра массы, отстоящих друг от друга на величину  $\Delta L$ .

Действительное расстояние между центром массы снаряда и центром сопротивления обозначим через  $L$  в отличие от условной величины  $h$ , вычисляемой по эмпирической формуле Гобара (§ 119) и принимаемой приближенно равной расстоянию от центра тяжести до центра сопротивления.

Между опрокидывающим моментом  $M$  и составляющими силы сопротивления воздуха  $R_T$  и  $R_N$

существует следующая зависимость (черт. 89):

$$M = R_T L \sin \delta + R_N L \cos \delta.$$

Принимая  $\sin \delta = \delta$  и  $\cos \delta = 1$ , получим

$$M = R_T L \delta + R_N L. \quad (34)$$

Далее

$$R_T = \frac{d^2 \cdot 1000}{g} H(y) v^2 K \left( \frac{v}{a} \right) = B K \left( \frac{v}{a} \right),$$

$$R_N = \frac{d^2 \cdot 1000}{g} H(y) v^2 K_N \left( \frac{v}{a} \right) \delta = B \frac{L}{d} K_N \left( \frac{v}{a} \right) \delta,$$

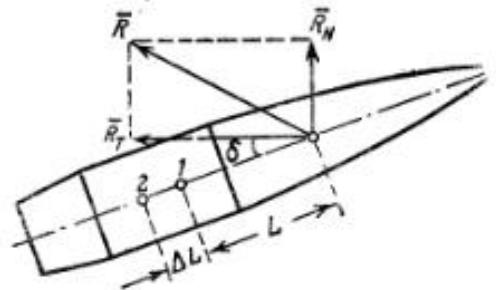
$$M = \frac{d^2 h \cdot 1000}{g} H(y) v^2 K_M \left( \frac{v}{a} \right) \delta = B h K_M \left( \frac{v}{a} \right) \delta,$$

где

$$B = \frac{d^2 \cdot 1000}{g} H(y) v^2.$$

В выражение для  $R_T$  мы не вводим коэффициента формы, полагая, что функция  $K \left( \frac{v}{a} \right)$  отвечает данному снаряду. Подставляя полученные значения в выражение (34) и сокращая на  $B$  и  $\delta$ , найдем

$$h K_M = K L + \frac{L}{a} K_N L. \quad (35)$$



черт. 89

Для снаряда со смещенным центром массы функции  $K \left( \frac{v}{a} \right)$  и  $K_N \left( \frac{v}{a} \right)$ , зависящие от внешнего очертания снаряда, останутся неизменными, а функция  $K_M \left( \frac{v}{a} \right)$  изменится. Пусть в результате стрельбы по картонам будут определены функции  $K_M$  и  $K_M^*$ , отвечающие нормальному снаряду и снаряду со смещенным центром массы. Тогда мы можем написать следующие зависимости для нормального снаряда

$$h K_M = K L + \frac{L}{d} K_N,$$

для снаряда со смещенным центром массы

$$(h + \Delta L) K_M^* = (L + \Delta L) K + \frac{L}{d} (L + \Delta L) K_N.$$

Вычитая первое равенство из второго, получим

$$(h + \Delta L) K_M^* - h K_M = \Delta L K + \frac{L}{d} \Delta L K_N,$$

откуда

$$K_N = \frac{d}{\Delta L} [(h + \Delta L) K_M^* - h K_M - \Delta L K].$$

Пользуясь этим выражением, можно определить функцию  $K_N$ .

Следует заметить, что функция  $K_N$  получается обычно с относительно небольшой точностью, так как в квадратных скобках последнего выражения входит разность нескольких слагаемых, определяемых в свою очередь с ограниченной точностью.

В заключение заметим, что наибольшие трудности при организации стрельбы по картонам вызывает обычно подбор такого картона, который должен обеспечивать получение отчетливых пробоин при минимальных потерях энергии снаряда на пробивание картонов. В опытах Чернозубова и Коновалова с 12,7-мм и 7,62-мм пулями применялись вместо картонов листы бумаги с плотностью несколько большей обычной писчей бумаги. Для получения отчетливых пробоин бумага предварительно несколько подкаливалась в печи, отчего она становилась более хрупкой.

Для каждого калибра снаряда приходится подбирать отдельный сорт картона. Расстояние между картонами выбирается таким, чтобы на каждой петле кривой  $\delta = f(y)$  можно было получить около 10 точек. Для снарядов средних калибров это расстояние получается от 5 до 10 м, для пуль это расстояние порядка 0,5 м для калибра 7,62 мм и 1,5 м для калибра 12,7 мм.

Чтобы исключить влияние сопротивления картонов на результаты опытов, повторяют опыт дважды: один раз при нормальном числе картонов и другой — при удвоенном числе картонов на том же интервале директриссы стрельбы.

Обозначим через  $K_{M1}$  и  $K_{M2}$  полученные опытные значения функции при нормальном и удвоенном числе картонов, а через  $K_M$  — истинное значение этой функции. Тогда можно принять

$$K_{M2} - K_{M1} = K_M - K_M,$$

откуда

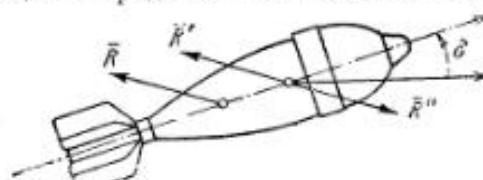
$$K_M = 2K_{M1} - K_{M2}.$$

Очевидно, что нет надобности повторять эту методику для всех опытов. Достаточно один раз определить поправку  $\Delta K_M = K_{M2} - K_{M1}$  и ввести ее в результаты опытов.

При стрельбе пульми через прокаленную бумагу этой поправкой оказалось возможным пренебречь.

### плоские колебания оперенных снарядов (мин)

В обычных снарядах нарезной артиллерии центр сопротивления находится впереди центра тяжести. Для стабилизации подобных снарядов на полете им придается вращение с большой угловой скоростью. При этом используется свойство гироскопа сопротивляться силам, стремящимся изменить положение его оси. В оперенных снарядах стабилизация снаряда на полете обеспечивается тем, что (благодаря наличию оперения) центр сопротивления находится позади центра массы снаряда.



Черт. 90

Если к центру массы снаряда приложить две силы  $\bar{R}'$  и  $\bar{R}''$ , равные  $R$  и направленные в противоположные стороны (черт. 90), то в итоге получим силу  $\bar{R}'$ , определяющую поступательное движение мины и пару  $R\bar{R}''$ , стремящуюся уменьшить угол нутации  $\delta$ . Момент этой пары будем называть стабилизирующим моментом. Оперенные снаряды (мины) применяются в настоящее время исключительно при дозвуковых скоростях<sup>1</sup>.

### § 130. Аэродинамические характеристики мин

В отличие от обычных снарядов нарезной артиллерии, аэродинамические характеристики которых определяются стрельбой, для мин эти характеристики определяются преимущественно в аэродинамических трубах. Поэтому выражения для сил и моментов будем писать применительно к обозначениям, принятым в аэродинамической литературе.

Лобовое сопротивление

$$R = \frac{\rho v^2}{2} Sc_x.$$

Нормальная (подъемная) сила

$$R_N = \frac{\rho v^2}{2} Sc_y = \frac{\rho v^2}{2} Sc_y' \delta.$$

Стабилизирующий момент

$$M = \frac{\rho v^2}{2} S l c_m = \frac{\rho v^2}{2} S l c'_m \delta,$$

где  $l$  — полная длина мины.

Тушащий момент

$$D = \rho v l^2 S c_D \delta.$$

Обычно оперенные снаряды используются при скоростях, не превышающих 250 м/сек. При этих условиях можно принять аэродинамические коэффициенты  $c_x$ ,  $c'_y$ ,  $c'_m$ , и  $c_D$  постоянными.

Между величиной  $c_x$  и коэффициентом формы  $i$  существуют соотношения, определяемые выражениями (§ 38):

<sup>1</sup> Мы здесь совершенно не касаемся движения оперенных ракетных снарядов, которое рассматривается в специальной литературе.

для закона Сиаччи  $i = 3,91 c_x$ ,  
для закона Гарнье-Дююи (1930 г.)  $i = 5,52 c_x$ .  
Коэффициенты  $c'_y$ ,  $c'_m$  и величины  $K_N$ ,  $K_M$ , обычно применяемые в баллистике (§ 119), связаны следующими соотношениями:

$$K_N = 0,947 \cdot 10^{-3} \frac{d}{l} c'_y,$$

$$h K_M = 0,947 \cdot 10^{-3} l c'_m,$$

которые легко получить из сравнения выражений для  $R_N$  и  $M$  через эти коэффициенты.

Приведем данные опытов по определению аэродинамических характеристик мин.

Лобовое сопротивление мина рассмотрено в § 38. Здесь укажем на зависимость лобового сопротивления мина от угла  $\delta$ .

Если рассматривать соотношение  $\frac{c_x}{c_{x0}}$ , где  $c_x$  отвечает произвольному углу  $\delta$ , а  $c_{x0}$  углу  $\delta=0$ , то по данным опытов получим в среднем следующую зависимость  $\frac{c_x}{c_{x0}}$  от  $\delta$ :

$\delta$	$0^\circ$	$5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$
$\frac{c_x}{c_{x0}}$	1,00	1,11	1,47	2,12

Таким образом при угле  $\delta=10^\circ$  лобовое сопротивление увеличивается почти на  $50\%$ . Чем больше площадь и число перьев, тем больше чувствительность  $c_x$  к изменению угла  $\delta$ . Коэффициент<sup>1</sup> подъемной силы  $c'_y$  для мина каплеобразной формы (нормальной емкости) получается в пределах 2,0—2,3, для мина удлиненной формы (большой емкости)  $c'_y$  — порядка 5,0.

Для оценки величины подъемной силы подсчитаем величину  $R_N$  для 82-ми мины при  $v=200$  м/сек и  $\delta=10^\circ$ :

$$R_N = \frac{\rho v^2}{2} Sc'_y \delta = \frac{1,205}{0,81} \cdot \frac{200^2}{2} \cdot \frac{\pi \cdot 0,082^2}{4} \cdot 2,15 \cdot 0,1745 = 4,9 \text{ кг},$$

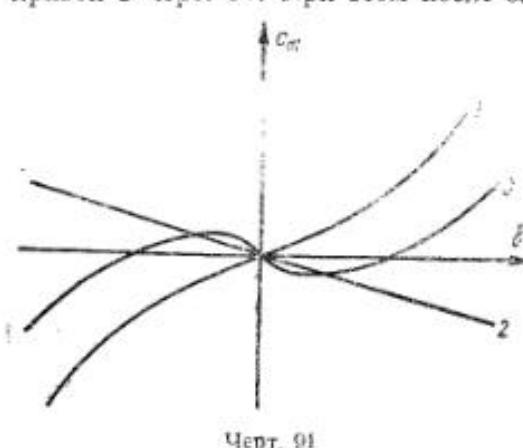
В данном примере подъемная (нормальная) сила превышает вес мины на  $45\%$ .

Коэффициент стабилизирующего момента  $c'_m$  в существенной мере зависит от мощности оперения и от взаимного расположения центра тяжести и середины оперения. В среднем получаем для каплеобразных мин  $c'_m \approx 0,50$  и для мина большой емкости  $c'_m \approx 1,5$ .

Обычно в баллистике принимается, что стабилизирующий момент пропорционален углу  $\delta$ ; при этом  $c_m = c'_m \delta$ . Это верно, однако, только для небольших углов  $\delta$ , не превышающих  $10^\circ$ . На черт. 91 показана типичная кривая зависимости  $c_m$  от  $\delta$  (кривая 1). Там же дана кривая  $c_m$  для одного керпуса без стабилизатора (кривая 2). Если уменьшать мощность оперения путем уменьшения числа перьев или их площади, то характеристика момента  $c_m$  может получиться такой, что положением равновесия при колебаниях снаряда будет некоторый угол  $\delta$ ,

<sup>1</sup> В книге автора «Устойчивость полета мина» численные значения коэффициентов  $c_x$ ,  $c'_y$ ,  $c'_m$  указаны вдвое меньше, так как там в выражениях для сил и моментов мы писали  $\frac{v^2}{2}$  вместо  $\frac{v^2}{2}$ , принятых в настоящем курсе.

отличный от нуля. Зависимость  $c_m$  от  $\dot{\theta}$  для этого случая показана кривой 3 черт. 91. При этом после затухания периодических колебаний ось снаряда займет какое-то случайное положение относительно касательной. Хотя подобный снаряд и не будет кувыркаться в полете, кучность его будет плохой.



Черт. 91

График позволяет определить коэффициент тушащего момента  $c_D$ . Значение этого коэффициента для мины получается в среднем порядка 0,4–0,5, если за величину  $I$  принять полную длину мины.

### § 131. Вывод уравнения плоских колебаний мины

Так как миномет в основном симметричен относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось канала ствола, то можно полагать, что толчок или боковой импульс, получаемый миною при выстреле, лежит в этой же плоскости. Поэтому будем предполагать колебания мины плоскими и происходящими в плоскости бросания. Положение касательной относительно горизонта определяется углом  $\theta$ , а положение оси снаряда относительно касательной — углом  $\delta$ . Таким образом положение оси снаряда в пространстве определяется углом  $\varphi = \theta + \delta$  (черт. 92).

Напишем уравнение колебания мины

$$A\ddot{\varphi} = M + D, \quad (36)$$

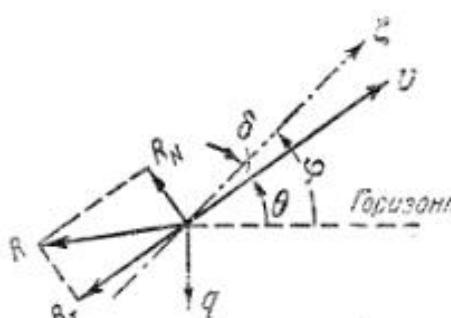
где  $A$  — момент инерции относительно экваториальной оси.

Из физических соображений ясно, что стабилизирующий момент  $M$  должен зависеть от угла  $\delta$ , а тушащий момент от угловой скорости  $\dot{\varphi}$ :

$$M = -\frac{p v^2}{2} \cdot S I c_m \delta,$$

$$D = -p v l^2 S c_D \dot{\varphi}^2,$$

Знаки минус указывают, что момент  $M$  стремится уменьшить угол  $\delta$ , а момент  $D$  — угловую скорость  $\dot{\varphi}$ .



Черт. 92

Обозначим

$$-a = \frac{|M|}{v^2 A} = \frac{p S I c_m}{2 A},$$

$$\beta = \frac{|D|}{v^2 A} = \frac{p l^2 S c_D}{A}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (36) и сокращая на  $A$ , найдем

$$\ddot{\varphi} = -av^2 \delta - \beta v \dot{\varphi}.$$

Заменяя  $\varphi = \delta + \theta$ , получим

$$\ddot{\varphi} + \dot{\theta} = -av^2 \delta - \beta v \dot{\varphi} - \beta v \dot{\theta},$$

или окончательно

$$\ddot{\varphi} + \beta v \dot{\varphi} + av^2 \dot{\varphi} = -\dot{\theta} - \beta v \dot{\theta}. \quad (37)$$

К этому уравнению необходимо присоединить два уравнения, определяющие движение центра массы мины:

$$\dot{v} = -c H(y) F(v) - g \sin \theta,$$

$$\dot{\theta} = -\frac{g \cos \theta}{v} + \frac{g R_N}{qv}.$$

Эта система уравнений отличается от обычных уравнений внешней баллистики тем, что во втором уравнении, наряду с проекцией на нормаль ускорения силы тяжести ( $g \cos \theta$ ), учитывается ускорение нормальной силы  $\frac{g}{q} R_N$  (черт. 92).

Примем выражение

$$c H(y_{cp}) F(v) = bv^2,$$

где при законе сопротивления воздуха Сиаччи

$$b = 1,21 \cdot 10^{-4} c H(y_{cp}),$$

и обозначим

$$\gamma = \frac{g R_N}{qv^2} = \frac{g z S c_p}{2q}.$$

Получим

$$\ddot{\varphi} = -bv^2 - g \sin \theta, \quad (38)$$

$$\dot{\theta} = -\frac{g \cos \theta}{v} + \gamma v \dot{\varphi}. \quad (39)$$

Исключим в уравнении (37)  $\dot{\theta}$  и  $\ddot{\theta}$  при помощи уравнений (38) и (39):

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{g \sin \theta}{v} \dot{\theta} + \frac{g \cos \theta}{v^2} \dot{v} + \gamma \dot{\varphi} + \gamma v \dot{\theta} = \frac{g \sin \theta}{v} \left( \gamma v \dot{\varphi} - \frac{g \cos \theta}{v} \right) - \\ &- \frac{g \cos \theta}{v^2} (bv^2 + g \sin \theta) - \gamma \dot{\theta} (bv^2 + g \sin \theta) + \gamma v \dot{\theta} = \gamma v \dot{\varphi} - \gamma b v^2 \dot{\varphi} - \\ &- \frac{g \cos \theta}{v^2} (2g \sin \theta + bv^2). \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} -\dot{\theta} - \beta v \dot{\theta} &= -\gamma v \dot{\varphi} + \gamma b v^2 \dot{\varphi} + \frac{g \cos \theta}{v^2} (2g \sin \theta + bv^2) - \beta v (\gamma v \dot{\varphi} - \frac{g \cos \theta}{v}) = \\ &= -\gamma v \dot{\varphi} + \gamma (b - \beta) v^2 \dot{\varphi} + g \cos \theta \left( b + \beta + \frac{2g \sin \theta}{v^2} \right). \end{aligned}$$

Подставляя полученное значение в уравнение (37), найдем

$$\ddot{\varphi} + (\beta + \gamma) v \dot{\varphi} + [a - \gamma(b - \beta)] v^2 \dot{\varphi} = g \cos \theta \left( b + \beta + \frac{2g \sin \theta}{v^2} \right). \quad (40)$$

Дадим оценку численным значениям  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $b$  применительно к 82-мм мина, для которой примем  $q = 3,4 \text{ кг}$ ;  $l = 0,325 \text{ м}$ ;  $A = 0,0021 \text{ км} \cdot \text{сек}^2$ ;  $c = 1,5$ ;  $H(y_{\text{cp}}) = 1$ .

Получим

$$\rho S = \frac{1,205}{9,81} \cdot \frac{\pi \cdot 0,08^2}{4} = 0,649 \cdot 10^{-3},$$

$$\alpha = \frac{\rho S l c' m}{2A} = \frac{0,649 \cdot 10^{-3} \cdot 0,325 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,0021} = 2,51 \cdot 10^{-2},$$

$$\beta = \frac{\rho S l^2 c_D}{A} = \frac{0,649 \cdot 10^{-3} \cdot 0,325^2 \cdot 0,45}{0,0021} = 1,47 \cdot 10^{-2},$$

$$\gamma = \frac{\rho S g c_Y'}{2q} = \frac{0,649 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 2,1}{2 \cdot 3,4} = 0,197 \cdot 10^{-2},$$

$$b = 1,21 \cdot 10^{-4} c H(y_{\text{cp}}) = 1,21 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 = 0,18 \cdot 10^{-3},$$

$$\gamma(b - \beta) = 0,197 \cdot 10^{-2} (0,18 \cdot 10^{-3} - 1,47 \cdot 10^{-2}) = 2,9 \cdot 10^{-5}.$$

Из полученных оценок видно, что  $\gamma(b - \beta)$  составляет величину порядка  $0,1\%$  по отношению к величине  $\alpha$  и ее можно пренебречь. При этом уравнение колебания мины получим окончательно в следующем виде:

$$\ddot{\delta} + (\beta + \gamma)v\dot{\delta} + \alpha v^2 \delta = g \cos \theta \left( b + \beta + \frac{2g \sin \theta}{v^2} \right). \quad (41)$$

Мы получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами и со свободным членом.

Общий интеграл уравнения без свободного члена характеризует колебания мины без учета понижения касательной. Частный интеграл уравнения со свободным членом характеризует положение динамической оси равновесия в связи с понижением касательной.

### § 132. Интегрирование однородного уравнения в случае постоянной скорости

Напишем однородное уравнение, характеризующие колебания мины на начальном участке траектории:

$$\ddot{\delta} + (\beta + \gamma)v\dot{\delta} + \alpha v^2 \delta = 0. \quad (42)$$

В случае переменной скорости  $v$  уравнение не интегрируется точно. Примем вместо переменной скорости некоторое постоянное среднее ее значение на рассматриваемом начальном участке траектории.

В этом случае получим уравнение с постоянными коэффициентами, которое легко интегрируется. Напишем характеристическое уравнение

$$k^2 + (\beta + \gamma)vk + \alpha v^2 = 0.$$

Корни этого уравнения определяются из выражения

$$k = -\frac{(\beta + \gamma)v}{2} \pm \sqrt{\frac{(\beta + \gamma)^2 v^2}{4} - \alpha v^2} = -\frac{(\beta + \gamma)v}{2} \pm v \sqrt{\frac{(\beta + \gamma)^2}{4} - \alpha}.$$

Оценим первое слагаемое под корнем квадратным

$$\frac{(\beta + \gamma)}{4} = \frac{(1,47 \cdot 10^{-2} + 0,20 \cdot 10^{-2})^2}{4} = 0,7 \cdot 10^{-4}.$$

Это слагаемое получается порядка  $0,3\%$  по отношению к величине  $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-2}$  и им можно пренебречь. Имеем

$$k = -\frac{1 + \gamma}{2} v \pm i v \sqrt{\alpha},$$

$$k_1 = -\frac{1 + \gamma}{2} v + i v \sqrt{\alpha},$$

$$k_2 = -\frac{1 + \gamma}{2} v - i v \sqrt{\alpha}.$$

Решение уравнения (42) представим в следующем виде:

$$\delta = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t}. \quad (43)$$

Присоединенные постоянные определим из начальных условий: при  $t = 0$ ;  $\delta = 0$ ;  $\dot{\delta} = \dot{\delta}_0$ . При этом непосредственно получим

$$c_2 = -c_1,$$

Далее

$$\dot{\delta} = c_1 k_1 e^{k_1 t} + c_2 k_2 e^{k_2 t},$$

Для начального момента имеем

$$\dot{\delta}_0 = c_1 (k_1 - k_2) = c_1 \cdot 2i v \sqrt{\alpha},$$

откуда

$$c_1 = \frac{\dot{\delta}_0}{2i v \sqrt{\alpha}}.$$

Подставляя это значение в уравнение (43), получим

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\dot{\delta}_0}{2i v \sqrt{\alpha}} \left( e^{-\frac{1+\gamma}{2} v t + i v \sqrt{\alpha} t} - e^{-\frac{1+\gamma}{2} v t - i v \sqrt{\alpha} t} \right) = \\ &= \frac{\dot{\delta}_0}{v \sqrt{\alpha}} e^{-\frac{1+\gamma}{2} v t} \cdot \frac{e^{i v \sqrt{\alpha} t} - e^{-i v \sqrt{\alpha} t}}{2i}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} = \sin \phi,$$

получим окончательно

$$\delta = \frac{\dot{\delta}_0}{v \sqrt{\alpha}} e^{-\frac{1+\gamma}{2} v t} \sin v \sqrt{\alpha} t. \quad (44)$$

Мы получили уравнение затухающих колебаний. Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{v \sqrt{\alpha}},$$

а логарифмический декремент затухания

$$\varepsilon = \frac{1+\gamma}{2} v \frac{T}{2} = \frac{\pi(1+\gamma)}{2 \sqrt{\alpha}}.$$

Рассматривая длину траектории, отвечающую периоду  $T$  колебания снаряда,

$$\lambda = T v = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}},$$

видим, что эта величина не зависит от скорости мины, а определяется целиком аэродинамическими и весовыми ее характеристиками. Поэтому

величину  $\lambda$  обычно рассматривают как фактор, определяющий устойчивость полета мины. Чем больше длина волны  $\lambda$ , тем мина менее устойчива. Это следует и из тех соображений, что увеличение  $\lambda$  может быть получено только за счет уменьшения  $a$ , а это вызывает увеличение амплитуды колебаний

$$a = \frac{\lambda_0}{v\sqrt{2}}.$$

Желательно иметь  $a$  побольше; из выражения  $a = \frac{c S c' w}{2A}$  видно,

что выгодно иметь более мощное оперение и меньшую величину момента инерции снаряда. Последнее обстоятельство объясняется тем, что мина, обладающую большим моментом инерции, труднее вернуть к положению равновесия при данной мощности оперения.

Следует, однако, заметить, что при определенном начальном толчке от выстрела величина  $\dot{\delta}_0$  должна получиться меньшей для мины с большим моментом инерции. Поэтому влияние момента инерции на амплитуду колебания угла  $\delta$  должно получиться меньше, чем это следует непосредственно из выражения для амплитуды колебаний.

Приведем некоторые численные подсчеты применительно к 82-мм мине. Ранее мы имели  $a = 2,5 \cdot 10^{-2}$ .

Следовательно,

$$\lambda = \frac{2\pi}{V 2,5 \cdot 10^{-2}} = 40 \text{ м.}$$

Для 120-мм мины длина волны получается около 90 м.

Далее, исходя из численных значений  $\beta = 1,47 \cdot 10^{-2}$  и  $\gamma = 0,20 \cdot 10^{-2}$ , получим

$$\varepsilon = \frac{\pi}{2} \frac{\beta + \gamma}{V^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1,47 \cdot 10^{-2}}{V 2,5 \cdot 10^{-2}} = 0,166.$$

Рассмотрим две амплитуды  $a_{t-1}$  и  $a_t$  для двух моментов времени отличающиеся полупериодом

$$a_{t-1} = \frac{\delta_0}{v\sqrt{2}} e^{-\frac{\beta+\gamma}{2}vt}; \quad a_t = \frac{\delta_0}{v\sqrt{2}} e^{-\frac{\beta+\gamma}{2}v(t+\frac{T}{2})}.$$

Отношение этих амплитуд разно

$$\frac{a_t}{a_{t-1}} = e^{-\frac{\beta+\gamma}{2}v\frac{T}{2}} = e^{-\frac{\beta+\gamma}{2}\frac{\pi}{V^2}} = e^{-\varepsilon}.$$

Для рассмотренного численного примера имеем  $e^{-\varepsilon} = e^{-0,166} = 0,85$ .

Следовательно, для каждого следующего полупериода амплитуда колебаний уменьшается на 15%, по отношению к предыдущей амплитуде. Таким образом периодические колебания мины быстро затухают.

### § 133. Приближенное интегрирование однородного уравнения при переменной скорости

В случае переменной скорости мины уравнение (42) может быть проинтегрировано приближенно по методу Ветчинкина-Вентцеля.

В уравнении (42)

$$\ddot{\delta} + (\beta + \gamma)v\dot{\delta} + xv^2\delta = 0$$

примем за аргумент длину дуги траектории  $s$  вместо времени  $t$ . При этом получим

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_s s = v\dot{\delta}_s; \quad \ddot{\delta} = v\dot{\delta}'_s + v^2\dot{\delta}_s''.$$

Подставив значения  $\dot{\delta}$  и  $\ddot{\delta}$  в уравнение (42), найдем

$$vv_s' \dot{\delta}_s' + v^2\dot{\delta}_s'' + (\beta + \gamma)v^2\dot{\delta}_s' + xv^2\delta = 0$$

или

$$\dot{\delta}_s'' + (\beta + \gamma + \frac{v^2}{v})\dot{\delta}_s' + xv^2\delta = 0. \quad (45)$$

Введем новую переменную  $u$ , определяемую зависимостью

$$\delta = ue^{-\varphi(s)}, \quad (46)$$

где

$$\varphi(s) = \frac{1}{2} \int_0^s \left( \beta + \gamma + \frac{v^2}{v} \right) ds.$$

Получим

$$\dot{\delta}_s'' = u_s' \dot{\delta} - \dot{\varphi}(s) - ue^{-\varphi(s)} \varphi'(s),$$

$$\dot{\delta}_s' = u_s'' \dot{\delta} - 2u_s' \dot{\varphi}(s) e^{-\varphi(s)} - u_s''(s) e^{-\varphi(s)} + u_s' \dot{\varphi}(s)^2 e^{-\varphi(s)}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (45) и сокращая на  $e^{-\varphi(s)}$ , получим

$$u_s'' - 2u_s' \dot{\varphi}(s) - u_s''(s) + u_s' \dot{\varphi}(s)^2 + 2\dot{\varphi}'(s)[u_s' - u_s' \dot{\varphi}(s)] + xu = 0$$

или

$$u_s'' + pu = 0,$$

где

$$p = x - \dot{\varphi}(s) - \dot{\varphi}(s)^2.$$

Можно показать, что в этом выражении последние два слагаемых в правой части пренебрежимо малы по сравнению с первым. Поэтому, принимая  $p = x$ , получим

$$u = c \sin \sqrt{as}.$$

Подставляя это значение в выражение (46), найдем

$$\delta = ce^{-\varphi(s)} \sin(\sqrt{as} + \tau_0),$$

где  $c$  и  $\tau_0$  — произвольные постоянные.

Подставляя значение  $\varphi(s)$ ,

$$\varphi(s) = \frac{1}{2} \int_0^s \left( \beta + \gamma + \frac{v^2}{v} \right) ds = \frac{1}{2} (\beta + \gamma)s + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{v}{v_0} \right),$$

$$e^{-\varphi(s)} = e^{-\frac{1}{2} [\beta + \gamma s + \ln(\frac{v}{v_0})]} = \sqrt{\frac{v_0}{v}} e^{-\frac{1}{2} (\beta + \gamma s + v^2)},$$

получим

$$\delta = A \sqrt{\frac{v_0}{v}} e^{-\frac{1}{2} (\beta + \gamma s + v^2)} \sin(\sqrt{as} + \tau_0).$$

Произвольные постоянные  $A$  и  $\tau_0$  найдем из начальных условий:  $\delta_0 = 0$ ;  $\dot{\delta}_0 \neq 0$ ; при этом получим непосредственно  $\tau_0 = 0$ .

Далее имеем

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_s s = \left( A \sqrt{\frac{v_0}{v}} e^{-\frac{1}{2} (\beta + \gamma s + v^2)} \right)_s \sin \sqrt{as} s +$$

$$+ A \sqrt{\frac{v_0}{v}} e^{-\frac{1}{2} (\beta + \gamma s + v^2)} \sqrt{a} \cos \sqrt{as} s.$$

При  $t=0$  и  $s_0=0$

$$s_0=v_0.$$

При этом получим

$$\dot{s} = A \sqrt{\frac{v_0}{v}} \sqrt{av} = A \sqrt{avv_0},$$

откуда

$$A = \frac{\dot{s}}{\sqrt{avv_0}}.$$

Окончательно

$$\dot{s} = \frac{\dot{s}_0}{\sqrt{avv_0}} e^{-\frac{1}{2}(0+\gamma)s} \sin \sqrt{as}. \quad (47)$$

Полученное решение отличается от формулы (44), отвечающей постоянной скорости  $v$ , следующим:

1. В выражении для амплитуды колебания вместо постоянной скорости  $v$  принята величина  $\sqrt{avv_0}$ , т. е. средняя геометрическая между скоростями на концах рассматриваемого участка.

2. В статальных множителях вместо величины  $\sqrt{t}$  взята величина

$$s = \int_0^t v dt.$$

### § 134. Влияние понижения касательной на положение динамической оси равновесия мины

Ранее мы видели, что колебания оси снаряда, вызываемые начальным толчком при выстреле, быстро затухают. Поэтому, рассматривая влияние понижения касательной на положение оси снаряда, мы можем предположить, что мина вылетела без толчков и что периодические колебания мины отсутствуют. Понижение касательной вызовет отставание оси мины от касательной, т. е. некоторый угол  $\delta_p$ , медленно изменяющийся так, что можно принять  $\dot{\delta}=0$  и  $\ddot{\delta}=0$ ; при этих условиях получим из уравнения (41)

$$av^2 \dot{\delta}_p = g \cos \theta \left( b + \beta + \frac{2g \sin \theta}{v^2} \right)$$

или окончательно

$$\dot{\delta}_p = \frac{g \cos \theta}{av^2} \left( b + \beta + \frac{2g \sin \theta}{v^2} \right).$$

Угол  $\dot{\delta}_p$  определяет положение оси мины при отсутствии периодических колебаний. При наличии периодических колебаний этот угол определяет положение динамической оси равновесия, т. е. той оси, около которой совершаются периодические колебания.

Расчеты показывают, что угол  $\dot{\delta}_p$  достигает максимального значения перед вершиной, а затем быстро убывает. Обычно наибольшая величина  $\dot{\delta}_p$  не превышает нескольких градусов. Следует, однако, заметить, что величина  $\dot{\delta}_p$  примерно обратно пропорциональна  $v^4$ , поэтому при очень больших углах бросания, когда скорость в вершине может понизиться до  $10-15$  м/сек, угол  $\dot{\delta}_p$  может получиться значительным. При углах бросания, больших  $80^\circ$ , угол  $\dot{\delta}_p$  сильно возрастает. Стрельба оперенными снарядами производится при углах бросания до  $85^\circ$ ; вращающиеся снаряды при углах бросания, больших  $70^\circ$ , редко проходят устойчиво вершину.

## Глава IX

### СОСТАВЛЕНИЕ ТАБЛИЦ СТРЕЛЬБЫ

#### § 135. Введение

Излагаемые в курсах внешней баллистики методы баллистических расчетов имеют непосредственное применение главным образом при решении двух задач артиллерийской практики: задачи отыскания баллистического решения при проектировании артиллерийских систем и задачи составления таблиц стрельбы. Точность баллистических расчетов, требуемая при решении этих двух задач, различна. При отыскании баллистического решения для проектируемой системы требуемая точность сравнительно невелика. Максимальную дальность, которую нужно получить согласно техническим условиям, достаточно определить с точностью порядка  $3-5\%$ . Большой точности расчета и не следует добиваться, так как до осуществления системы и проведения опытных стрельб коэффициент формы снаряда может быть известен только приближенно (с ориентировкой на близкие по форме и по условиям полета снаряды). Кроме того, обычный запас прочности системы всегда позволит путем небольшого увеличения веса заряда и соответствующего увеличения начальной скорости увеличить дальность стрельбы на несколько процентов без ущерба для системы.

Совсем иначе приходится подходить к вопросу о точности баллистических расчетов для составления таблиц стрельбы. При оценке требуемой точности таблиц стрельбы необходимо учесть, что сравнительно небольшие ошибки таблиц могут существенно понизить вероятность попадания при стрельбе.

Пусть  $P_0$  — вероятность попадания по цели ограниченных размеров (до  $1 B_d$ ) при средней траектории, проходящей через середину цели, и  $P_\xi$  — вероятность попадания по той же цели, но при средней траектории, проходящей на расстоянии  $\xi$  от середины цели.

Легко получить следующую зависимость между уменьшением вероятности попадания ( $P_0 - P_\xi$ ) и расстоянием  $\xi$ :

Расстояние $\xi$ от средней траектории до середины цели	$0,5 B_d$	$B_d$	$1,5 B_d$	$2B_d$
Уменьшение вероятности попадания ( $P_0 - P_\xi$ ) в процентах	5	20	40	60

Таким образом при ошибке таблиц стрельбы, равной всего лишь одному  $B_d$ , вероятность попадания уменьшается на  $20\%$ . Если учесть, что величина  $B_d$  в среднем равна  $0,5^\circ$  полной дальности, то станет ясной необходимость предъявлять к таблицам стрельбы высокие требования в отношении их точности. Поэтому все работы, связанные с составлением таблиц стрельбы: баллистические расчеты, опытные стрельбы, определение метеорологических, топографических и баллисти-

ческих условий стрельбы, должны быть проведены с большой тщательностью.

Составление таблиц стрельбы высокой точности является важнейшей задачей внешней баллистики, и последнюю можно было бы по существу назвать наукой о составлении таблиц стрельбы.

Тут же уместно поставить вопрос, в какой мере современное развитие внешней баллистики обеспечивает требуемую от таблиц точность и в какой мере данные баллистических расчетов должны доверяться результатами опытных стрельб.

Известно, что опыты являются необходимой составной частью каждой науки, всякого познания, хотя характер опыта меняется с развитием самой науки. Естественно, что и во внешней баллистике нельзя освободиться от постановки опытных стрельб при составлении таблиц стрельбы и базировать последние исключительно на теоретических расчетах. Однако количество требуемых стрельб и их характер в существенной мере зависят от развития артиллерийской техники вообще и от развития наших теоретических познаний в области внешней баллистики в частности.

Почти до конца прошлого столетия таблицы стрельбы составлялись преимущественно эмпирически, иначе говоря, все данные, требуемые для таблиц стрельбы, определялись на основании опытов многочисленных стрельб. Этот метод составления таблиц стрельбы отвечал, с одной стороны, уровню развития внешней баллистики в то время и, с другой стороны, тем требованиям точности, которые предъявлялись к таблицам стрельбы в связи с общим уровнем развития артиллерийской техники и методов стрельбы.

Недостатки подобного метода составления таблиц стрельбы заключаются не столько в том, что он связан с большим расходом снарядов, но главным образом в том, что при нем вообще невозможно достаточно точно определить табличные данные. Действительно, каждая данная опытная стрельба проводится при определенных баллистических и метеорологических условиях, и полученные значения табличных данных будут верны только для условий данного опыта. Для того чтобы полученные данные могли быть использованы для стрельбы при условиях, отличных от условий опыта, нужно уметь данные опыта привести к нормальным баллистическим и метеорологическим условиям; это возможно только на основании теоретических зависимостей, выводимых во внешней баллистике. Кроме того, целый ряд данных, как, например, угол падения, высота траектории, окончательная скорость снаряда, почти не поддается непосредственному определению из опытных стрельб.

Применяемый в настоящее время способ составления таблиц стрельбы является опытно-теоретическим и заключается в том, что основные данные таблиц стрельбы получаются на основании расчетов, исходя из теоретических зависимостей, выводимых во внешней баллистике, и сравнительно небольшое число стрельб ставится для определения параметров, входящих в баллистические зависимости, и для согласования данных расчетов с результатами опыта.

Несобходимость же подобного согласования вызывается следующими соображениями. Современные методы внешней баллистики позволяют определить с требуемой степенью точности элементы траектории, а также поправочные коэффициенты при условии, однако, верности тех допущений о системе сил, действующих на снаряд, которые мы делаем при выводе основных зависимостей внешней баллистики. В отношении силы сопротивления воздуха мы делали следующие два существенных допущения:

1. Ускорение силы сопротивления воздуха направлено по касательной к траектории и обратно направлению скорости. При этом функция

сопротивления воздуха зависит от скорости центра массы снаряда, а не от характера вращательного движения снаряда вокруг его центра массы.

2. Функция сопротивления  $F_1(v)$  для данного снаряда отличается от принятой при расчетах функции сопротивления  $F(v)$  постоянным множителем  $i$ , так что

$$F_1(v) = iF(v).$$

Если бы эти допущения были в точности верны, то для составления таблиц стрельбы было бы достаточно предварительно провести едину стрельбу для определения коэффициента формы снаряда и на этом базировать производство баллистических расчетов.

Эти допущения верны, однако, только в первом приближении. В действительности же коэффициент формы зависит от скорости, так как каждый снаряд имеет, строго говоря, свой закон сопротивления, который не может быть получен из закона сопротивления эталона путем умножения функции  $F(v)$  на постоянное число. Кроме того, функция сопротивления зависит не только от скорости центра массы снаряда, но и от характера вращательного движения снаряда вокруг его центра массы. И, наконец, ускорение силы сопротивления воздуха не направлено строго по касательной к траектории; поэтому, кроме касательного ускорения, мы будем иметь нормальную составляющую ускорения силы сопротивления воздуха.

Отсюда ясно, что, когда мы определяем на основании стрельб на дальность коэффициент  $i$ , мы находим, строго говоря, не коэффициент формы, а некоторый коэффициент согласования, выбирающий все погрешности наших допущений при определении дальности. Естественно, что нельзя ожидать при этих условиях постоянства коэффициента  $i$  для стрельбы \* при различных углах бросания и начальных скоростях. И в действительности, как показывают данные сработки опытных стрельб, коэффициент  $i$  может меняться в известных границах (на 5–7% в среднем). Поэтому при составлении таблиц стрельбы полевой артиллерии приходится коэффициент  $i$  определять на основании опытных стрельб при различных углах бросания и для различных зарядов.

Так как указанные стрельбы должны приводиться к нормальным метеорологическим и баллистическим условиям, то, с одной стороны, должно быть организовано зондирование атмосферы для определения метеорологических условий стрельбы и, с другой стороны, должны проводиться вспомогательные стрельбы для определения начальной скорости и угла вылета.

## ПОДГОТОВКА БАЛЛИСТИЧЕСКИХ СТРЕЛЬБ

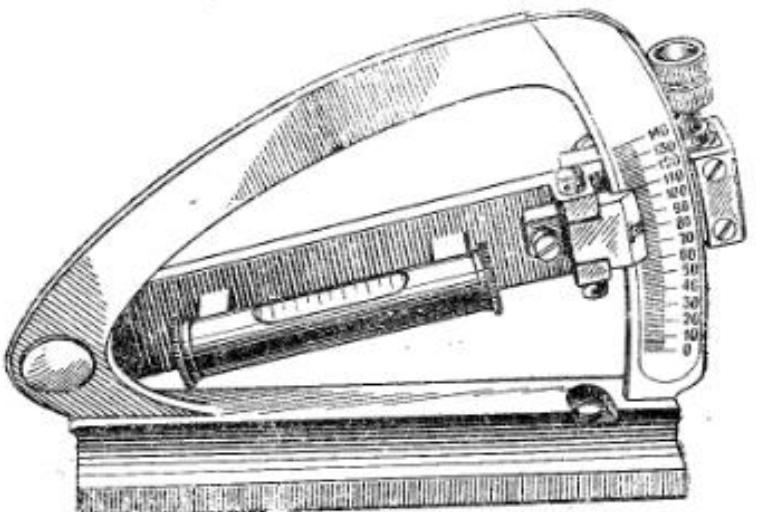
### § 136. Подготовка орудия к стрельбе

Орудие, предназначенное для проведения баллистической стрельбы, должно быть мало изношенным (первой категории), с тем чтобы начальная скорость при стрельбе мало отличалась от нормальной начальной скорости, установленной в качестве табличной.

Особенное внимание должно быть обращено на выверку приспособлений для наведения орудия.

Для определения угла возвышения применяется квадрант (черт. 93), устанавливаемый на горизонтальной площадке казенной части ствола и позволяющий производить отсчеты углов с точностью в 1 мин. Квадрант периодически выверяется на специальном приборе, и составляется таблица поправок к установкам квадранта, хранящаяся в его футляре. Помимо проверки квадранта, необходимо еще убедиться в том, что горизонтальная площадка казенной части ствола параллельна оси

канала орудия. Для отдельных орудий, особенно при навинтных казенниках, наклон площадки казенной части к оси канала ствола может доходить до 5—6°, а это может существенно сказаться на точности обработки опытных стрельб, особенно при малых углах брассания.



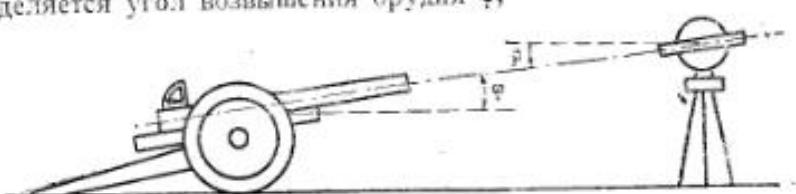
### Черт. 93 Квадрант

Выверка горизонтальной площадки казенной части ствола производится следующим образом<sup>1</sup>:

- а) минутный теодолит устанавливается на треноге в 40—50 м от орудия;

б) орудие по перекрестьям на казенном и дульном срезах наводится в объектив теодолита; одновременно спиральная ось теодолита наводится в перекрестья на казенном и дульном срезах;

в) на площадке казенной части ствола устанавливается квадрат и определяется угол возвышения орудия  $\varphi$ ;



Dept. 94

- г) по вертикальному кругу теодолита отсчитывается наклон  $\beta$  оптической оси теодолита к горизонту (положительный отсчет от горизонта вверх);  
д) в случае параллельности горизонтальной площадки ствола оси канала орудия углы  $\varphi$  и  $\beta$  (черт. 94) должны быть равны по абсолютной величине и обратны по знаку; в противном случае вводится соответствующая поправка в установку квадранта;  
е) результат выверки площадки казенной части ствола заносится в формуляр орудия.

Система бокового наведения орудия также должна быть выверена с большой тщательностью. В войсковых частях обычно выверяется параллельность оптической оси панорамы оси канала орудия при установке угломера 30-00 и при угле возвышения, равном нулю. Для

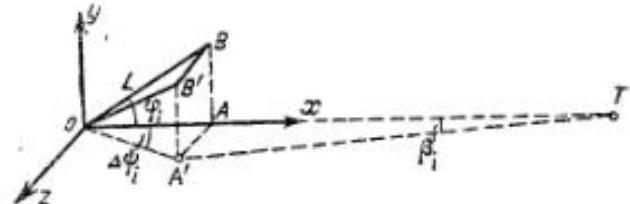
1 Этод метод поверки предложен военным инженером С. И. Ермоловым.

252

подготовки ответственных баллистических стрельб этого недостаточно. Необходимо еще убедиться в том, что боковая наводка не сбивается при придании орудию различных углов возвышения, или же учесть эти ошибки. Изменение угла боковой наводки с приданiem орудию углов возвышения может быть вызвано негоризонтальностью оси цапф или неперпендикулярностью оси канала ствола оси цапф. При этих условиях плоскость вращения оси канала ствола не будет вертикальной, и с приданiem орудию различных углов возвышения ось канала ствола будет уходить в сторону. Помимо этого, возможна невертикальность плоскости вращения оптической оси панорамы при выдвижении прицела.

Ошибки боковой наводки при различных углах возвышения выявляются следующим образом (черт. 95):

1. При горизонтальном положении оси канала орудия и лимба панорамы орудие наводится в точку наводки при установке панорамы  $\varphi_0$ , отвечающей предполагаемому направлению стрельбы на дальность



Черт. 95

2. Впереди орудия на расстоянии около 10 м устанавливается теодолит. Теодолит наводится в перекрестье на дульном срезе ствола при горизонтальном положении оси канала. Затем орудию придаются последовательно те углы возвышения, при которых предполагается начать стрельбу на дальность.

3. После установки какого-либо угла возвышения  $\psi_i$  лимб панорамы путем выдвижения прицела приводится в горизонтальное положение. Если при этом боковая наводка сбилась, то записывается новая отметка по точке наводки  $\psi_i$ . Кроме того, по теодолиту отмечается боковое отклонение  $\beta_i$  перекрестья дульного среза от вертикальной плоскости теодолита. Положительное значение угла  $\beta_i$  отвечает отклонению перекрестья дульного среза вправо от направления орудия-теодолита.

Пусть  $ox$  — направление оси канала орудия при угле возвышения равном нулю,  $yox$  — вертикальная плоскость. При угле возвышения,  $\varphi$ , ось канала орудия вместо положения  $oB$  займет положение  $oB'$ . Пусть  $\overline{AA'}$  — проекция  $\overline{BB'}$  на плоскость  $xoz$ ,  $\overline{oB} = \overline{oB'} = L$  — расстояние от оси цапф до дульного среза и  $\overline{AT} = D$  — расстояние от дульного среза по тесоболиду.

Боковое отклонение плоскости стрельбы  $\Delta\psi_1$ , отвечающее углу возвышения  $\varphi_1$ , найдем из следующего выражения (вследствие малости угла  $\Delta\psi$ , можно принять  $\Delta\psi_1 = \operatorname{tg} \Delta\psi_1$ ):

$$\Delta \phi_i = \frac{AA'}{eA} = \frac{AA'}{L \cos \varphi_i} \\ \Delta \psi_i = \frac{D \operatorname{tg} \varphi_i}{L \cos \varphi_i}, \quad (1)$$

Для того чтобы при всех углах возвышения угол боковой наводки отвечал установке  $\phi_0$ , необходимо на панораме поставить установку  $\phi_i - \Delta\phi_i$ , где  $\phi_i$  определяется, как указано выше (п. 3), а  $\Delta\phi_i$  — по формуле (1).

### § 137. Подготовка боеприпасов к стрельбе

При подготовке боеприпасов к стрельбе необходимо прежде всего убедиться в том, что снаряды в отношении чертежа, снаряжения и взрывателя в точности того же образца, для которого составляются таблицы стрельбы. Это особенно важно в тех случаях, когда имеется несколько близких по внешней форме образцов снарядов.

Правильность чертежа удобнее всего проверить путем измерения: а) общей длины снаряда, б) длины оживальной части, в) длины запояской части, г) размеров и формы ведущего пояска.

Вес снарядов должен быть близким к табличному (со знаком  $H$ ), с тем чтобы поправки на вес снаряда были возможно меньшими.

Каждый снаряд взвешивается и нумеруется.

Весьма важно точное знание температуры зарядов, применяющихся при баллистических стрельбах. Поэтому необходимо боеприпасы хранить перед стрельбой в течение 8–12 час. вблизи огневой позиции, в специальных хранилищах, в которых поддерживается постоянная температура. Температура в хранилищах должна быть близкой к температуре наружного воздуха. Например, если стрельбы проводятся зимой при температуре воздуха, близкой к  $-10^\circ$ , то правильнее будет поддерживать в хранилищах температуру  $-10^\circ$ , а не  $+15^\circ$ , так как в последнем случае заряды, выносимые перед стрельбой на воздух, успели бы несколько охладиться и температура заряда не была бы в точности известна.

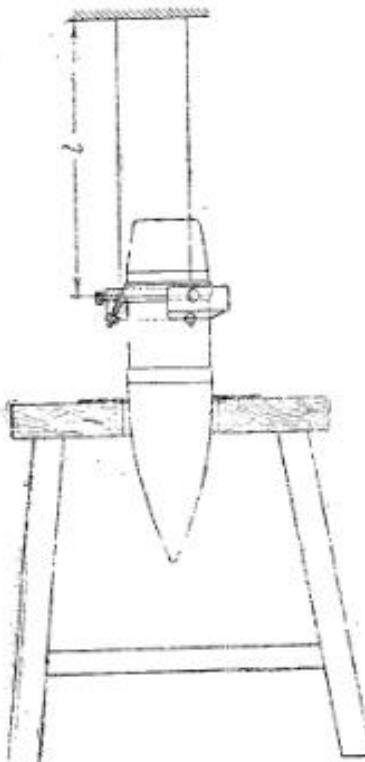
Если замечаются неправильности в поведении снаряда на полете (ненормальное рассеивание, неустойчивость снаряда на полете), то необходимо проверить и механические характеристики снаряда: положение центра тяжести снаряда и его полярный и экваториальный моменты инерции.

Определение моментов инерции производится путем определения периода колебания снаряда на специальном приборе — универсальном трехнитевом подвесе, изображенном на черт. 96. Снаряд вставляется в шайбу, подвешиваемую к потолку на трех стальных нитях длиной около 3 м. Затем поворачивают шайбу вокруг ее оси на угол  $10^\circ$  и определяют период свободных колебаний снаряда вместе с шайбой. Для этого сбывно отчитывают при помощи секундомера продолжительность 10 полных размахов и полученный результат делят на 10.

На черт. 96 показана схема, при которой ось снаряда вертикальна и совпадает с осью шайбы. При таком положении снаряда определяется полярный момент инерции. При помощи специальной переходной шайбы можно придать оси снаряда горизонтальное положение так, чтобы центр массы снаряда лежал на вертикальной оси основной шайбы. При таком положении определяется экваториальный момент инерции.

Дадим вывод расчетных формул, служащих для подсчета моментов инерции.

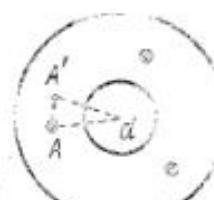
Черт. 96



Пусть  $l$  — длина нити,  $Q$  — общий вес колеблющейся части,  $\tau$  — полный период колебания,  $R$  — радиус цилиндра, описанного вокруг трех нитей,  $I_e$  — момент инерции снаряда,  $I_m$  — момент инерции шайбы.

Для краткости будем называть верхнюю плоскость крепления нитей  $P$ , а плоскость крепления нитей к шайбе —  $P'$ . Расстояние между этими плоскостями равно  $l$ .

Пусть шайба повернута около положения равновесия на некоторый угол  $\alpha$ . Точка  $A$  крепления нити к шайбе переместится в горизонтальном направлении на величину хорды (черт. 97)



Черт. 97

$$\overline{AA'} = 2R \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Новое расстояние по вертикали между плоскостями  $P$  и  $P'$  будет равно

$$y = \sqrt{l^2 - (2R \sin \frac{\alpha}{2})^2} = l \sqrt{1 - (\frac{2R}{l})^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Дадим оценку величине  $(\frac{2R}{l})^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ , полагая  $R = 7$  см,  $l = 300$  см,  $\alpha = 10^\circ$ . Получим

$$(\frac{2R}{l})^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = (\frac{2 \cdot 7}{300})^2 \sin^2 5^\circ = 0,16 \cdot 10^{-4}.$$

Ввиду малости этой величины можно пренебречь второй и высшими ее степенями по отношению к единице. Разлагая выражение для  $y$  по биному, получим

$$y = l \left[ 1 - \frac{4R^2}{l^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right]^{1/2} = l \left( 1 - \frac{2R^2}{l^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = l - \frac{2R^2}{l} \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Составим уравнение Лагранжа, определяющее движение колеблющейся части. Для этого напишем выражение для живой силы  $T$  вращательного и поступательного (по вертикали) движения колеблющейся части. За обобщенную координату примем угол поворота  $\alpha$ . Получим

$$T = \frac{I_e \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{I_m \dot{\alpha}^2}{2} + \frac{Q \dot{y}^2}{2} = \frac{1}{2} (I_e + I_m) \dot{\alpha}^2 + Q \frac{R^2}{l^2} \sin^2 \alpha \dot{\alpha}^2$$

или окончательно

$$T = (I_e + I_m + \frac{QR^4}{gl^2} \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}.$$

Легко показать, что третье слагаемое в скобках по своей величине обычно не превышает  $0,01\%$  остальных двух слагаемых. Поэтому, отбрасывая последнее слагаемое, напишем

$$T = (I_e + I_m)^{\frac{1}{2}}.$$

Выражение для обобщенной силы  $Q_s$  найдем, рассматривая элементарную работу  $dA$  силы тяжести при повороте шайбы на некоторый угол  $d\alpha$ :

$$dA = Q d\alpha = Q \frac{R^2}{l} \sin \alpha d\alpha = -Q \frac{R^2}{l} \sin \alpha d\alpha = Q_s d\alpha.$$

Следовательно, обобщенная сила

$$Q_s = -Q \frac{R^2}{l} \sin \alpha.$$

Составим уравнение Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (2)$$

В данном случае

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (I_e + I_m) \ddot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Подставляя это значение в выражение (2), получим

$$(I_e + I_m) \ddot{x} + Q \frac{R^2}{t} \sin x = 0$$

или

$$\ddot{x} + k^2 \sin x = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{QR^2}{I(I_e + I_m)}.$$

Это уравнение того же вида, что и уравнение математического маятника, для которого  $k^2 = \frac{g}{l}$ . Оно не интегрируется в элементарных функциях. Для малых углов  $x$ , полагая  $\sin x = x$ , получим уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{x} + k^2 x = 0,$$

решение которого

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Период колебания найдем из выражения

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{(I_e + I_m) l}{QR^2}},$$

откуда получим выражение для  $I_e$ :

$$I_e = \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 \frac{QR^2}{l} - I_m. \quad (3)$$

По этой формуле обычно подсчитываются моменты инерции снаряда — полярный и экваториальный.

Момент инерции шайбы  $I_m$  является константой прибора. Он может быть определен путем качания одной шайбы без снаряда. Обозначая через  $q'$  вес шайбы, аналогично выражению (3) получим

$$I_m = \left( \frac{\tau'}{2\pi} \right)^2 q' R^2,$$

где  $\tau'$  — период колебания шайбы без снаряда.

### § 138. Топографическая подготовка стрельбы

Директрисса для отстрела таблиц стрельбы выбирается на мало пересеченной местности. Гон падения снарядов должен представлять равнину горизонтальную площадку, хорошо наблюдаемую со всех сторон. Координаты огневой позиции и точек наводки определяются геодезическим путем. Основное направление стрельбы провешивается на местности геодезически. Положение каждого километра отмечается столбом высотой 3—5 м. Расстояние между километровыми столбами делится на части по 100 м; положение каждой точки отмечается столбом высотой в 2—3 м.

Параллельно основному направлению стрельбы, в 1 км справа или слева от него, провешиваются линии наблюдательных вышек (черт. 98), положение которых определяется геодезическим путем. Вышки строятся с таким расчетом, чтобы положение вертикальной оси прибора, устанавливаемого на вышке, совпадало с геодезической точкой. Все вышки соединяются проволочной связью.

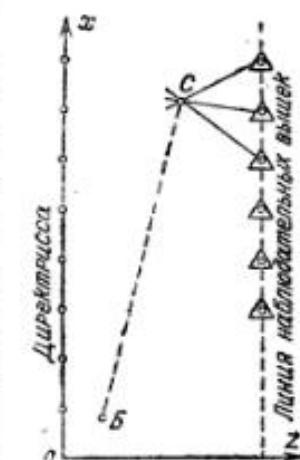
Для определения координат точек падения при помощи сопряженного наблюдения на вышках устанавливаются углоизмерительные приборы. Благодаря малым расстояниям от наблюдательных вышек до точек падения удобнее применять углоизмерительные приборы без оптики. Применяемый на артиллерийском полигоне визирный прибор представляет собой металлический полукруг радиусом 40 см, устанавливаемый на наблюдательной вышке в горизонтальном положении. Дуга этого полукруга градуирована в делениях угломера от 0 до 30°00'. В центре круга шарнирно закреплен один конец металлической визирной планки с двумя визирами по концам. Отсчет углов производится непосредственно по основной шкале (без нониуса) с точностью до 0,01.

Применение визирного прибора без оптики позволяет быстро засекать разрывы и избежать ошибки, связанной с перемещением облака разрыва ветром. С другой стороны, так как расстояние от наблюдателя до разрыва обычно не превышает 1000 м, то средняя ошибка определения координат точек падения получается порядка 2 м. Эта ошибка значительно меньше вызываемой рассеиванием ошибки в определении координат центра группировки. Например, при дальности стрельбы  $X=5000$  м и величине  $B_x=25$  м при семи счетных выстрелах получаем среднюю ошибку в определении дальности центра группирования попаданий

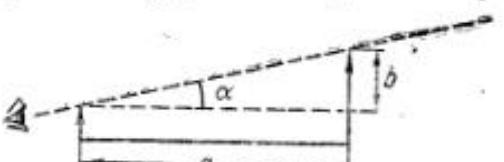
$$\frac{B_x}{\sqrt{n}} = \frac{25}{\sqrt{7}} = 9,5 \text{ м.}$$

Обычно разрывы засекаются с трех пунктов. При этом основная обработка ведется из наблюдений с двух пунктов, ближайших к месту падения снарядов. Наблюдения с третьего пункта используются для контроля. Определение координат точек падения обычно производится при помощи радиальных сеток крупного масштаба. Это значительно ускоряет процесс обработки опытов.

В некоторых случаях определение координат точек падения производится при помощи мерной ленты и эккера путем непосредственной привязки воронок от разрыва к ближайшему столбу директриссы. Этот метод, являвшийся основным на полигоне до введения системы засечек с наблюдательных вышек, в настоящее время применяется редко ввиду его малой производительности. Для определения высот дистанционных разрывов применяются высотомеры различных конструкций. Обычно этот прибор, в котором строится прямоугольный треугольник, подобный треугольнику из местности (черт. 99), причем в треугольнике при-



Черт. 98



Черт. 99

бора один катет  $a$  — база (расстояние от наблюдателя до плоскости стрельбы), угол  $\alpha$  устанавливается непосредственным визированием на разрыв, а другой катет  $b$  дает истинную высоту разрыва.

На черт. 100 показан один из образцов высотомера. Визирование производится через визирные проволоки  $A$  и  $B$ , из которых первая — ближайшая к наблюдателю. Дистанция до плоскости стрельбы устанавливается на выдвижной линейке  $C$ . Высота разрыва отсчитывается непосредственно по выдвижной колонке  $D$ .

### § 139. Определение метеорологических условий стрельбы

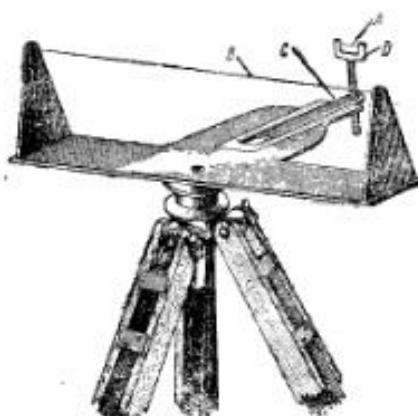
Данные опытных стрельб должны быть приведены к нормальным метеорологическим условиям. Поэтому при проведении стрельб на дальность необходимо производить зондирование атмосферы для определения метеорологических данных в различных слоях атмосферы до максимальной высоты полета снаряда. При этом непосредственно определяются следующие элементы: распределение температуры воздуха по высоте, распределение по высоте скорости и направления ветра и наземное барометрическое давление. Что касается влажности воздуха, то определение этого метеорологического элемента на различных высотах затруднительно. И так как влияние влажности воздуха на дальность сравнительно невелико, то можно считать ее постоянной и равной среднегодовой наземной влажности воздуха для данного района.

Для определения скорости и направления ветра в метеорологии применяется метод шаров-пилотов. При этом методе наполненный водородом резиновый шар выпускается в свободный полет в атмосферу и за ним производят непрерывные наблюдения при помощи одного или нескольких теодолитов. По отсчетам вертикальных и горизонтальных углов через определенные промежутки времени определяются координаты шара-пилота в различные моменты времени. Средняя скорость движения проекции шара-пилота на горизонтальной плоскости будет равна средней скорости горизонтального ветра, отвечающей средней высоте шара за указанный промежуток времени.

Метод обработки наблюдений различен в зависимости от того, производились ли наблюдения с одного или с двух пунктов (так называемые базисные наблюдения).

При наблюдении с одного пункта предварительно вычисляется по определенным формулам<sup>1</sup> вертикальная скорость шара в зависимости от его размеров и подъемной силы; при этом принимается допущение о постоянной вертикальной скорости шара. Зная вертикальную скорость шара, можно определить для любого момента времени его высоту. По высоте и угловым отсчетам теодолита можно определить координаты шара в различные моменты времени, а следовательно, и среднюю горизонтальную скорость шара или ветра. Однако, как показывают исследования проф. Молчанова, вертикальная скорость шара-пилота фактически не остается постоянной, и расхождения между расчетными и опытными значениями вертикальной скорости шара-пилота могут быть значительными (до 30%). Поэтому метод наблюдения с одного пункта не обес-

<sup>1</sup> Проф. П. Молчанов, Краткий курс аэрометрии, стр. 37, 1933.



Черт. 100. Высотомер

печивает требуемой точности, и на полигонах необходимо применять метод базисного наблюдения шаров-пилотов с двух пунктов.

При базисных наблюдениях координаты шара-пилота определяются чисто геодезическим путем, на основе отсчетов горизонтальных и вертикальных углов с двух концов базы. Направление базы выбирается примерно перпендикулярно направлению господствующих ветров. Размер базы выбирается от 1000 до 2000 м, в зависимости от максимальной высоты зондирования. Теодолиты, применяемые для базисных наблюдений, должны обеспечивать точность отсчетов не менее 3'. Теодолиты взаимно ориентируются так, чтобы при нулевом отсчете трубы их были направлены вдоль базы.

Через определенные промежутки времени, обычно через 1 мин., одновременно по сигналу с одного из пунктов производится на обоих теодолитах отсчет горизонтальных ( $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ ) и вертикальных ( $\beta_1$  и  $\beta_2$ ) углов (черт. 101).

Дальности и высоты шара-пилота вычисляются по формулам

$$D_1 = \frac{b \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad D_2 = \frac{b \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)};$$

$$H = D_1 \operatorname{tg} \beta_1; \quad H = D_2 \operatorname{tg} \beta_2.$$

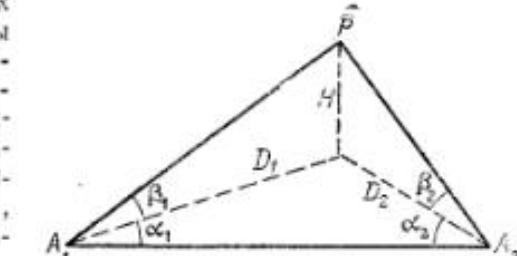
Высоты шара, полученные из последних двух выражений (полагаем что оба пункта находятся на одной высоте), должны быть равны. Это обстоятельство служит мерилом для поверки вычислений.

Таким образом для различных моментов времени через 1 мин. будут известны высоты шара и его проекции на горизонтальную плоскость. Просекции шара-пилота наносятся на планшет. Разделив вектор перемещения шара-пилота за некоторый промежуток времени  $t_i - t_{i-1}$  на этот промежуток времени, получим скорость ветра, отвечающую некоторой средней высоте  $\frac{H_i + H_{i-1}}{2}$ . Практически определение скорости ветра производится при помощи специального прибора — круга Молчанова.

Шари-пилоты выпускаются с основного пункта один за другим, с равными интервалами от 15 до 30 мин., в течение всего времени, пока длится отстрел данной группы. В итоге сработки наблюдений над шарами-пилотами строят слаженные графики продольной и боковой составляющих скорости ветра для различных высот и в зависимости от времени. Указанный метод позволяет определить составляющие скорости ветра на различных высотах со срединной ошибкой порядка 0,5 м/сек.

Наряду с определением составляющих скорости ветра при помощи базисных наблюдений над шарами-пилотами необходимо знать структуру ветра и его порывистость.

Метод шаров-пилотов позволяет определить среднее значение скорости ветра за некоторый промежуток времени, порядка 1 мин. Однако в течение этой минуты скорость ветра может колебаться в широких пределах. Зависимость скорости ветра от времени чрезвычайно сложна вследствие его порывистости. Колебания скорости и направления ветра совершаются за время от нескольких минут до долей секунды около некоторого среднего значения. Величины порывов могут достигать в некоторых случаях довольно значительных размеров, превышающих



Черт. 101

и иногда величину средней скорости ветра. При небольших порывах ветра влияние отдельных порывов на среднее значение скорости ветра будет незначительно. Если же порывы значительны и доходят примерно до 50% от средней скорости ветра, то следует избегать проведения опытных стрельбы при такой погоде, так как, с одной стороны, будут увеличены ошибки в определении скорости ветра и, с другой, можно ожидать заметного увеличения рассеивания снарядов.

Для определения температуры воздуха на различных высотах применяется один из следующих основных методов:

а) непосредственные наблюдения на самолете за показаниями стоечного термометра, прикрепляемого к стойкам между плоскостями самолета;

б) обработка записей метеорографов, поднимаемых на привязном аэростате;

в) метод радиозондов проф. Молчанова.

Радиозонд проф. Молчанова представляет собой метеорограф, снабженный автоматически действующим радиопередатчиком. При изменении температуры или давления стрелки метеорографа, попадая на те или иные контакты, посыпают различные радиосигналы, принимаемые приемником метеорологической станции. По этим сигналам определяются метеорологические элементы на высоте полета. Метод радиозондов при меньшей точности измерений обладает существенным преимуществом перед другими методами, так как его применение возможно при любой погоде. Кроме того, он позволяет зондировать атмосферу при больших высотах, когда другие методы практически не могут быть применены. Всегда, когда это возможно, целесообразно одновременно с выпуском радиозонда производить подъем самолета или аэростата до высоты не менее 2000 м. Для этой высоты наблюдаются частые температурные инверсии и значительные колебания температурного градиента. В этих условиях показания радиозондов не обеспечивают достаточной точности определения температуры воздуха.

При зондировании температуры при помощи самолета на последнем устанавливаются, кроме стоечного термометра, барометр-высотомер, служащий для определения высоты самолета в момент производства отсчета температуры, и самолетный метеорограф, служащий для контроля визуальных наблюдений. Стоечные термометры должны быть хорошо защищены от нагревания солнечными лучами и должны допускать отсчет температуры с точностью в 0,5°. Показания барометра-высотомера исправляются на среднюю по высоте температуру воздуха согласно принятым в метеорологии формулам и таблицам поправок. Заметим, что как эти таблицы поправок, так и сама возможность определения высот по показаниям барометра базируются на гипотезе о вертикальном разновесии атмосферы. Исходя из этой гипотезы, мы получаем следующую зависимость между метеорологическими элементами:

$$\ln \left( \frac{h_1}{h_0} \right) = - \frac{R}{M} \left( \frac{y_1}{z} \right).$$

Вынеся в среднем значение, найдем

$$\ln \left( \frac{h_1}{h_0} \right) = - \frac{R z_{\text{ср}}}{M},$$

здесь

$$y_1 = R z_{\text{ср}} \ln \left( \frac{h_1}{h_0} \right) = \frac{R z_{\text{ср}}}{M} \lg \left( \frac{h_0}{h_1} \right),$$

где

$$M = \lg e = 0,4343.$$

Зная давление у земли  $p_0$ , давление  $p_1$  на искомой высоте и среднюю виртуальную температуру на участке от земли до высоты  $y_1$ , можно определить и самую высоту  $y_1$ .

Подъем самолета производится ступенями с таким расчетом, чтобы отсчеты производились через 300 м до высоты 1500 м и через 500 м для больших высот. На каждой из этих высот летчик выдерживает горизонтальный полет в течение 2 мин.; к концу этого периода летчик-наблюдатель производит отсчет по барометру-высотомеру и по термометру. Снижение самолета также производится ступенями с выдержкой на тех же высотах и с производством отсчетов по приборам.

Приборами зондирования для подъема на аэростат служат метеографы с часовыми механизмами. Метеографы записывают непрерывно значения барометрического давления и температуры, отвечающие различным моментам времени. Отвечающие этим моментам высоты подъема метеографа могут определяться расчетом по барометрической формуле на основании тех же записей метеографа. Помимо этого, желательно определять высоту аэростата еще засечками при помощи тесодолитов.

Подъемы самолетов или аэростатов для зондирования температуры производятся в течение всего времени проведения опытных стрельб с интервалами через 1,5—2 часа. Срединная ошибка определения температуры воздуха может быть принята равной 0,5° при определении температуры по стоечному термометру, 1° при зондировании температуры метеорографом, поднимаемым на аэростате, и 1,5—2° при зондировании температуры при помощи радиозонда.

## ОРГАНИЗАЦИЯ И ПРОВЕДЕНИЕ БАЛИСТИЧЕСКИХ СТРЕЛЬБ

### § 140. Определение начальной скорости

Для каждой артиллерийской системы, для каждого заряда и снаряда устанавливается табличная начальная скорость. Однако и в условиях полягона трудно добиться того, чтобы опытные стрельбы на дальность производились при начальной скорости, в точности совпадающей с табличной начальной скоростью. В этом собственно и нет надобности. Необходимо только избегать значительных (больше 1—2%) отклонений начальной скорости от табличной. Кроме того, необходимо знать с достаточной точностью ту начальную скорость, при которой проводились стрельбы на дальность. Поэтому стрельбы для определения начальной скорости организуются непосредственно перед проведением стрельб на дальность или после их окончания и проводятся снарядами и зарядами той же партии.

В настоящее время основным хронографом, применяемым на полягонах для определения начальных скоростей, является хронограф системы Ле-Булланже. В отношении точности и простоты работы хронограф Ле-Булланже остается до настоящего времени непревзойденным. Он не требует наличия каких-либо других приборов для градуировки его показаний. Применяемый обычно для выверки хронографов маятниковый верификатор вспреки распространенному ошибочному мнению не может служить для проверки правильности абсолютных показаний хронографа Ле-Булланже, а скорее служит лишь разобщителем, дающим с большим постоянством определенные промежутки времени. Это позволяет использовать его для взаимной сверки показаний всех хронографов баллистической лаборатории.

Подобная сверка производится периодически (2—3 раза в месяц) путем чередования размыканий от верификатора, по 5—10 размыканий на хронограф, при определенной установке верификатора. Для исправленных и правильно выверенных хронографов расхождение средних отсчетов различных хронографов обычно не превышает 0,25%. Непосред-

ственная выверка<sup>1</sup> каждого хронографа производится ежедневно до начала работы баллистической станции и заключается в:

- а) выверке вертикальности хронографа,
- б) регулировке силы тока,
- в) поверке места нуля шкалы линейки,
- г) поверке разобщителя и времени запаздывания.

Расстояние до первой рамы устанавливается обычно от 10 до 30 м.

Расстояние между рамами-мишнями (в метрах) устанавливается обычно в 0,1 от ожидаемой величины начальной скорости, с округлением до 10 м. Особенное внимание должно быть обращено на однобразие навивки рам. При навивке проволока должна натягиваться и обматываться таким образом, чтобы исключить возможность скользко-нибудь значительного ее вытягивания при выстреле. Расстояние между соседними проволоками на раме должно быть не более<sup>1</sup>, как калибра. Стрельба для определения начальной скорости проводится, как правило, при горизонтальном положении орудия. Если по условиям стрельбы это невозможно, то учитываемое расстояние между рамами определяется по направлению полета снаряда, т. е. принимается равным  $\frac{L}{\cos \varphi}$ , где  $L$  — расстояние между рамами по горизонту. Для определения скорости снаряда производят от 5 до 10 выстрелов и среднегарифметическое полученных значений скорости принимают за истинное значение скорости снаряда в точке, отвечающей середине между рамами. Понятно с определением скорости для оценки точности получаемого результата находится так называемый «разброс» показаний хронографа или величина

$$r_v = 0,6745 \sqrt{\frac{\sum \Delta v_i^2}{n-1}},$$

где

$$\Delta v_i = v_{cp} - v_i; \quad v_{cp} = \frac{\sum v_i}{n};$$

$n$  — число учтенных выстрелов.

Величина  $r_v$  для артиллерийских систем получается в среднем равной  $0,25\%$ , для пушек и  $(0,1 + \frac{100}{v})\%$ , для гаубиц. В абсолютных величинах можно принять для артиллерийских систем среднюю величину  $r_v = 1,5 \text{ м/сек}$  независимо от начальной скорости. Для минометов величина  $r_v$  получается в среднем  $0,6 \text{ м/сек}$ .

Для приведения начальной скорости к дну можно пользоваться формулой Сиаччи

$$x = \frac{1}{c} [D(U) - D(v_0)],$$

откуда

$$D(v_0) = D(U) - cx.$$

Так как угол наклона траектории в данном случае весьма мал, а  $\cos \theta$  и  $\cos \theta_0$  близки к единице, то можно принять  $U = v$ , и тогда получим

$$D(v_0) = D(v) - cx. \quad (4)$$

Отсюда можно найти  $D(v_0)$ , а затем по таблицам основных функций Сиаччи по величине  $D(v_0)$  и самую величину  $v_0$ .

<sup>1</sup> Порядок проведения указанных выверок см. в книге М. Е. Серебрякова, Описание основных приборов внутренней баллистики и методика работы с ними, стр. 46—49.

Формула (4) может быть несколько упрощена. Перепишем ее в следующем виде:

$$D(v) - D(v_0) = cx. \quad (5)$$

Для малых изменений скорости можно считать изменение функции  $D(v)$  пропорциональным изменению скорости; следовательно,

$$\frac{D(v) - D(v_0)}{v - v_0} = \frac{\Delta D(v)}{10},$$

где  $\Delta D(v)$  — изменение функции  $D(v)$ , отвечающее изменению аргумента  $v$  на 10 м/сек.

Обозначая  $v - v_0 = \Delta v$ , получим

$$D(v) - D(v_0) = \frac{\Delta D(v)}{10} \Delta v. \quad (6)$$

Приравниваем правые части выражений (5) и (6)

$$\frac{\Delta D(v)}{10} \Delta v = cx$$

или

$$\Delta v = \frac{10 cx}{\Delta D(v)} = \frac{id^2}{q} \cdot 10^4 \frac{x}{\Delta D(v)},$$

где коэффициент  $i$  определяется для каждого снаряда по данным опытных стрельб.

Последняя формула обычно применяется для приведения скорости снаряда к дну.

Значения  $\Delta D(v)$  для закона Сиаччи могут быть определены по табл. 31.

Таблица 31

$v$	$\Delta D(v)$	$v$	$\Delta D(v)$
200	407	600	49
225	363	650	46
250	315	700	44
275	266	800	41
300	193	900	39
325	136	1000	37
350	105	1100	36
375	88	1200	35
400	77	1300	35
450	65	1400	34
500	57	1500	33
550	53		

### § 141. Определение угла вылета

Угол бросания  $\theta_0$  есть угол наклона вектора начальной скорости к горизонту. Угол возвышения  $\varphi$ , устанавливаемый на орудии по квадранту или по прицелу, есть угол наклона к горизонту оси канала ствола перед выстрелом.

Вследствие подпрыгивания орудия при выстреле эти углы не совпадают. Разность этих углов

$$\theta_0 - \varphi = \gamma$$

называется углом вылета. У гаубиц угол вылета, как правило, положительный. У пушек угол вылета бывает и непоследательный и отрицательный. По своей абсолютной величине угол вылета меняется от нескольких минут для пушек до 30 мин. для гаубиц. Для определения угла вылета проводятся специальные стрельбы.

Для того чтобы избежать излишнего расхода боеприпасов, целесообразно стрельбу для определения угла вылета соединить со стрельбой для определения начальной скорости. Для этого за второй рамкой-мишенью устанавливается щит. Стрельба производится при положении ствола орудия, близком к горизонтальности, а для систем, не допускающих горизонтального положения ствола, при наименьшем угле возвышения.

Орудие наводится по перекрестьям на дульном и казенном срезах в отмеченную точку  $A$  щита. Пусть вследствие наличия угла вылета  $\gamma$  снаряд вылетел не по направлению  $oA$ , а по  $oB$ , и благодаря понижению снаряда пробона получилась в точке  $C$  (черт. 102).

Понижение  $BC$  невелико и может быть определено по формуле для пустоты

$$BC = \frac{gt^2}{2}.$$

Допуская, что на коротком участке  $oC$  пути снаряд сохраняет свою скорость, равную начальной скорости, получим

$$oA = x = v_0 t; \quad t = \frac{x}{v_0};$$

$$BC = \frac{gt^2}{2} = \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

Для вычисления угла вылета, сблизивая  $BC = y$ , получим следующую зависимость:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{AB}{oA} = \frac{BC + CA}{oA} = \frac{\frac{gx^2}{2} + y}{x}$$

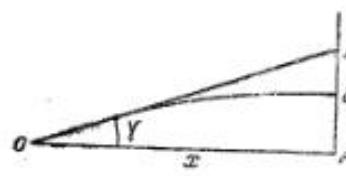
и окончательно

$$\boxed{\operatorname{tg} \gamma = \frac{y}{x} + \frac{gx}{2v_0^2}.} \quad (7)$$

Число счетных выстрелов при стрельбе для определения угла вылета принимается от 5 до 10. Величина  $y$  в формуле (7) принимается равной превышению центра группирования пробона над точкой  $A$ .

Следует заметить, что величина угла вылета зависит от целого ряда факторов, влияние которых трудно учесть. Поэтому, если повторить опыт в другой день, другим экземпляром орудия, другими снарядами и с другой платформы, то мы получим несколько другие результаты. Расхождения получаются в среднем порядка 1 мин. Нормально следует произвести спределение угла вылета троекратно для каждой данной системы и для каждого сбраса снаряда. Для артиллерийских систем, имеющих большие единого заряда, определение угла вылета можно произвести при полном и наименьшем зарядах; для других зарядов угол вылета вычисляется интерполированием.

Значения углов вылета, помещаемые в таблицах стрельбы, получаются как средние арифметические из всех стрельб, проведенных для данного снаряда и данного заряда.



Черт. 102

Часто может случиться, что разница между средними значениями углов вылета для двух каких-либо снарядов или зарядов получается того же порядка, что и разница между результатами различных стрельб для одного и того же снаряда или заряда. При этих условиях целесообразно принять одно общее значение угла вылета, получающееся как среднее арифметическое из всех стрельб.

Обычно спределение угла вылета производят только при положении орудия, близком к горизонтальному, и полученный результат считают верным для всех углов возвышения. Это допустимо, однако, только при малых значениях угла вылета. При больших же значениях определение угла вылета желательно производить еще для одного угла возвышения порядка  $20-30^\circ$  (для системы полевой артиллерии). При этом приходится картон поднимать на высоту около 10 м.

Для вычисления угла вылета в этом случае имеем (черт. 103)

$$oA = \frac{x}{\cos \varphi}; \quad oA = v_0 t,$$

откуда

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi};$$

$$BC = \frac{gt^2}{2} = \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \varphi};$$

$$\frac{BA}{oA} = \frac{\sin \gamma}{\cos(\varphi + \gamma)};$$

$$\sin \gamma = \frac{BA}{oA} \cos(\varphi + \gamma) = \frac{y - BC}{oA} \cos(\varphi + \gamma).$$

Окончательно получим

$$\sin \gamma = \left( \frac{y \cos \varphi}{x} + \frac{gx}{2v_0^2 \cos \varphi} \right) \cos(\varphi + \gamma). \quad (8)$$

В первом приближении для  $\gamma$  в правой части равенства принимаем значение угла вылета, полученное при горизонтальном положении орудия. Второго приближения достаточно для окончательного определения величины  $\gamma$ , отвечающей некоторому значению угла возвышения  $\varphi$ . Зная  $\gamma$  для двух значений угла возвышения, можно получить зависимость  $\gamma = f(\varphi)$ , исходя из линейного характера этой зависимости.

При выводе формул (7) и (8) мы принимали понижение снаряда под линией вылета равным  $\frac{gt^2}{2}$ , т. е. не учитывали влияние сопротивления воздуха. Это влияние учтеть нетрудно. Напишем выражение для разложения ординаты  $y$  в ряд Тейлора около точки вылета, ограничиваясь четырьмя членами разложения:

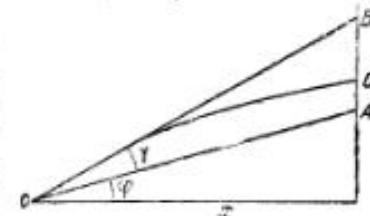
$$y = y_0 + xy'_0 + \frac{x^2}{2} y''_0 + \frac{x^3}{6} y'''_0.$$

Учитывая (начало координат в точке вылета), что

$$y_0 = 0; \quad y'_0 = \operatorname{tg} \hat{\varphi}_0; \quad y''_0 = -\frac{g}{v_0^2}; \quad y'''_0 = \left( \frac{2g}{v_0^2} \hat{\varphi}_0 \right),$$

получим

$$y = x \operatorname{tg} \hat{\varphi}_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2} - \frac{gx^3}{3v_0^3} cG(v_0). \quad (9)$$



Черт. 103

Если перед началом стрельбы оси канала орудия было придано горизонтальное положение, то  $\varphi = 0$ ;  $\theta_0 = \gamma$ . Определим  $\operatorname{tg} \gamma$  из уравнения (9):

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y}{x} + \frac{gx}{2v_0^2} + \frac{gx^2}{3v_0^3} cG(v_0).$$

Вследствие малости угла бросания можно положить  $v_0 = u_0$ ; окончательно получим

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y}{x} + \frac{gx}{2v_0^2} + \frac{gx^2}{3v_0^3} cG(v_0). \quad (10)$$

Формула (10) отличается от формулы (7) наличием последнего слагаемого, учитывающего влияние сопротивления воздуха. Сравним величину последнего члена со вторым для такого случая, когда влияние сопротивления воздуха должно быть наибольшим, т. е. для случая стрельбы пулей при следующих условиях:

$$x = 30 \text{ м}, \quad v_0 = 800 \text{ м/сек}; \quad c = 3,3; \\ \frac{gx}{2v_0^2} = \frac{9,81 \cdot 30}{2 \cdot 800^2} = 0,00023; \\ \frac{gx^2}{3v_0^3} cG(v_0) = \frac{9,81 \cdot 900}{3 \cdot 800^3} \cdot 3,3 \cdot 0,245 = 0,0000046.$$

Второму слагаемому отвечает угловая величина  $1'$ , а третьему — угловая величина  $1''$ . Следовательно, и в этом случае можно вполне пренебречь добавочным понижением, вызываемым сопротивлением воздуха.

#### S 142. Организация стрельб на дальность

Стрельбы на дальность, или отстрелы, являются основными баллистическими стрельбами. На основании обработки результатов отстрелов определяются для различных дальностей значения коэффициента формы  $i$  или баллистического коэффициента  $c$ , необходимые для вычисления элементов траектории и поправочных данных. Для того чтобы обеспечить возможность построения кривой зависимости баллистического коэффициента от дальности или от угла бросания, необходимо отстрелы производить при 4—5 углах бросания.

Для пушек калибра 75 мм и больше отстрелы обычно производятся при углах бросания  $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$ ; иногда отстреливается еще угол  $5^\circ$ . Для гаубиц отстреливаются углы  $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ$  или  $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  в зависимости от максимального угла возвышения. Для пушек калибра меньше 75 мм, стреляющих при ограниченных углах бросания, можно ограничиться стрельбой при 3—4 углах бросания.

Следует избегать производить отстрелы при небольших углах бросания, так как эти стрельбы не позволяют с достаточной точностью определить значение баллистического коэффициента. Объясняется это тем, что при малых углах бросания небольшие ошибки в этом угле вызывают значительные изменения дальности, что приводит к соответствующим ошибкам в определении баллистического коэффициента.

Действительно, если при организации стрельбы на дальность допущена некоторая ошибка в угле бросания  $\delta\theta_0$ , то ошибка в дальности, определяемая из выражения (§ 105), будет

$$\frac{\delta X}{X} = \frac{\cos 2\theta_0}{\cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_e|}. \quad (11)$$

Так как допущенная ошибка угла бросания неизвестна и останется невыправляемой, то при обработке стрельбы получится ошибка в определяемой величине баллистического коэффициента. Эта ошибка равна

$$\frac{\delta X}{X} = -(1 - \gamma) \frac{\delta c}{c}, \quad (12)$$

где

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\operatorname{tg} |\theta_e|}.$$

Сравнивая выражения (11) и (12), получим зависимость между допущенной ошибкой в угле бросания и ошибкой в определении величины баллистического коэффициента

$$\left| \frac{\delta c}{c} \right| = \frac{\cos 2\theta_0 \delta \theta_0}{\cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} |\theta_e| (1 - \gamma)}.$$

При безграничном уменьшении угла бросания  $\cos 2\theta_0$  и  $\cos^2 \theta_0$  стремятся к единице,  $\operatorname{tg} |\theta_e|$  — к нулю, а  $\gamma$  — к единице. При этом коэффициент при  $\delta\theta_0$  становится бесконечно большой величиной второго порядка. Таким образом при малых углах бросания небольшие и неизбежные ошибки угла бросания могут вызвать большие ошибки в определении величины баллистического коэффициента.

Например, если для 76,2-мм пушки ( $c = 0,6$ ;  $v_0 = 600 \text{ м/сек}$ ) провести стрельбу на дальность при угле бросания  $\theta_0 = 1^\circ$ , то получим следующий результат:

$$\theta_e = 1^\circ 10'; \quad \gamma = \frac{\operatorname{tg} 1^\circ}{\operatorname{tg} 1^\circ 10'} = \frac{0,0175}{0,0203} = 0,862.$$

Если допустить, что при наводке допущена ошибка в одну тысячину ( $\delta\theta_0 = 0,001$ ), то получим следующую ошибку в баллистическом коэффициенте:

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{\cos 2^\circ \cdot 0,001}{\cos^2 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 1^\circ 10' (1 - 0,862)} = 0,357.$$

Таким образом ошибка получилась порядка  $36\%$ . При меньшей начальной скорости ошибка получается еще большей. К этому надо добавить еще ошибки, происходящие от неровности местности в районе падения снарядов. Эти ошибки сказываются тем больше, чем меньше угол бросания.

Если орудие предназначено для стрельбы прямой наводкой на короткие дистанции при малых углах бросания, то вместо стрельб на дальность по местности производятся стрельбы по щиту. Для этого на расстоянии от 1000 до 2000 м устанавливаются щиты размером примерно  $5 \times 5 \text{ м}$ . В центре щита набивается черный круг таких размеров, чтобы он был отчетливо виден при наведке. Точка наводки должна быть точно пронивелирована относительно орудия, т. е. должно быть известно превышение точки наводки над дульным срезом орудия. Приведение центра группирования разрывов к горизонту орудия производится, исходя из начала жесткости траекторий.

**Пример.** Произведен отстрел противотанковой пушки по щиту, находящемуся на расстоянии 1500 м. Угол возвышения орудия по квадранту равен  $45^\circ$ . Нивелировкой установлено перевышение точки наводки на щите относительно дульного среза 2,45 м. Центр группирования пробоин получился выше точки наводки на 1,75 м. Таким образом общее превышение центра группирования пробоин над дульным срезом равно 4,20 м. Определяем поправку  $\Delta\varphi$  к углу возвышения. Исходя из начала жесткости траекторий, получим

$$\Delta\varphi = \frac{4,20}{1500} = 2,71 \text{ тыс.} = 9,8'.$$

Таблица 3

$N \diagdown nN$	100	60	40	20
1	0,404	0,406	0,408	0,415
2	0,287	0,290	0,294	0,304
3	0,235	0,240	0,244	0,257
4	0,206	0,210	0,215	0,229
5	0,180	0,190	0,195	0,211

Таблица 32

$N$	$E\%$	$\Delta$	$\left(\frac{121}{6,408}\right)\%$
1	0,408	-0,114	28
2	0,294	-0,050	12
3	0,244	-0,029	7
4	0,215	-0,020	5
5	0,195	-	-

рядов; также, например, выгоднее поставить четыре стрельбы по пять снарядов, чем три стрельбы по 33 снаряда.

С другой стороны, нетрудно показать что очень большое число стрельб ставить также нецелесообразно. Действительно, выпишем, например, столбец, отвечающий общему расходу 40 снарядов, и составим первые разности. Из последнего столбца видно, что если постановка второй стрельбы уменьшает ошибку  $E$  на  $28\%$ , а постановка третьей стрельбы на  $12\%$ , то постановка пятой стрельбы уменьшает эту ошибку только на  $5\%$ .

Необходимо к тому же учесть, что стрельбы на дальность должны сопровождаться еще стрельбами для определения начальной скорости, и если принять во внимание фактор времени, т. е. необходимость составить таблицы стрельбы в возможно короткий срок, то можно принять в среднем количество стрельб в 3—4 и расход снарядов на каждую стрельбу в 7—10 шт. При этих условиях средняя дальность будет определена с точностью в  $0,2\%$ .

Окончательно вопрос о количестве стрельб решается в ходе их проведения, в зависимости от полученных результатов. Действительно, при исследовании вопроса о необходимом количестве стрельб мы исходим из величины средней ошибки  $e_n = 0,4\%$  и  $B_d = 0,5\%$ . Это — некоторые средние величины, полученные на основании обработки полигонных стрельб. Может, однако, случиться, что в тех конкретных условиях, в которых проводятся отстрелы,  $e_n$  и  $B_d$  больше указанных средних величин, и, следовательно, для обеспечения необходимой точности таблиц стрельбы нужно увеличить число стрельб. Можно поэтому рекомендовать после проведения первых трех стрельб сечинить среднюю ошибку  $E$  определения средней дальности.

Величина  $E$  может быть определена следующим образом:

а) по результатам каждой стрельбы: находят приведенную к нормальным условиям полную дальность  $X_{np}$ ; получаются три четыре значения этой величины;

б) определяют разность между наибольшим и наименьшим из полученных  $X_{np}$ ;

Таким образом для дальнейшей обработки результатов стрельбы необходимо принять для дальности  $X = 1500$  м опытное значение угла возвышения равным  $45' - 9,8' = 35,2' \approx 35'$ .

В тех случаях, когда требуется очень большая точность определения угла бросания при стрельбе на дальность, применяются стрельбы через бумажные щиты, методика проведения которых рассмотрена в § 154.

### § 143. Число стрельб и расход снарядов

Можно, вообще говоря, принять, что чем большее количество снарядов израсходовано, тем большая точность результата получена. Однако при некотором заданном расходе снарядов эффективность стрельбы будет различна в зависимости от числа отдельных стрельб. Это объясняется различным характером ошибок, сопровождающих стрельбы. Эти ошибки можно разделить на две группы:

1. Ошибки случайные, меняющиеся от одного выстрела к другому. Эти ошибки вызываются неоднозначием наводки, разбросом начальных скоростей, порывами ветра и т. д., т. е. факторами, определяющими рассеивание снарядов, и характеризуются величиной  $B_d$ .

2. Ошибки, повторяющиеся для всех выстрелов данной стрельбы но меняющиеся от одних стрельб к другой. К этой группе относятся ошибки определения начальной скорости и метеорологических факторов, ошибки вычисления поправок и приведения данных стрельбы к нормальным условиям. Срединная ошибка этого вида обозначается через  $e_n$ .

Если бы существовали только ошибки первого вида, то не было бы надобности в проведении повторных стрельб. Для повышения точности результата достаточно было бы увеличить число снарядов в стрельбе. Наличие ошибок второго вида приводит к повторным стрельбам в различные дни.

Если мы при заданных углах бросания, заряде снаряда организуем  $N$  стрельб в различные дни и израсходуем для каждой стрельбы по  $n$  снарядов, затем каждую стрельбу приведем к нормальным условиям, т. е. за истинную дальность надо принять среднеарифметическую из результатов всех стрельб. Срединная ошибка полученного результата найдется из выражения

$$E = \sqrt{\frac{B_d^2}{nN} + \frac{e_n^2}{N}}.$$

Из этого выражения видно, что при данном общем расходе снарядов  $Nn$  ошибка  $E$  будет тем меньше, чем больше число отдельных стрельб.

Как показывают результаты опытных стрельб, срединная ошибка  $e_n$  колеблется в пределах  $0,1 - 0,8\%$  дальности. Как некоторую среднюю величину можно принять  $e_n \approx 0,4\%$ .

Величину  $B_d$  в среднем можно принять равной  $\frac{X}{200}$ , т. е.  $0,5\%$  дальности.

Задаваясь различным общим расходом снарядов  $Nn$  и различным числом отдельных стрельб, подсчитаем величину  $E$  в процентах дальности и сведем результат в табл. 32.

Табл. 32 показывает, что ошибка  $E$  значительно убывает с увеличением числа стрельб, но мало убывает с увеличением общего расхода снарядов<sup>1</sup>.

Из табл. 32 следует, что выгоднее поставить две стрельбы по 16 снарядов в общем расходе 20 снарядов, чем одну стрельбу в 100 сна-

<sup>1</sup> Это обстоятельство впервые было отмечено С. И. Ермолаевым.

в) срединная ошибка  $E$  найдется из выражения

$$E = \frac{(\Delta X)_{\max}}{\beta},$$

где  $(\Delta X)_{\max}$  — указанная разность, а  $\beta$  — коэффициент Шовене для приближенного определения срединной ошибки по результатам небольшого числа наблюдений.

Коэффициент  $\beta$  определяется из табл. 33.

Таблица 33

Число стрельб	3	4	5	6	7
$\beta$	1,87	2,09	2,25	2,38	2,48

Общее количество проведенных стрельб должно обеспечить величину  $E \leq 0,2\%$ . Обычно этого удается добиться в результате трех стрельб. Если получилась большая величина для  $E$ , необходимо поставить дополнительные стрельбы.

#### § 144. Стрельбы для определения деривации

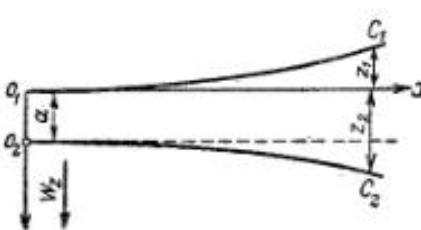
Деривация может определяться на основании обычных стрельб на дальность. При этом необходимо с особенной тщательностью провести боковую наводку орудия и из полученного опытного бокового отклонения снаряда от плоскости бросания исключить отклонения вследствие бокового ветра. Однако такой метод определения деривации не является вполне надежным, так как ошибки в боковой наводке и в учете поправки на ветер сравнимы с величиной деривации. Поясним это на примере. Для 107-мм пушки обр. 1910 г. при  $v_0 = 580 \text{ м/сек}$  имеем: боковому ветру скоростью в 10 м/сек отвечает боковое отклонение в восемь делений угломера. Пусть скорость ветра определена со срединной ошибкой, равной 1 м/сек, что отвечает угловой ошибке в 0,8 делению угломера, а ошибка боковой наводки равна одному делению угломера; получим суммарную угловую ошибку

$$E = \sqrt{1 + 0,8^2} = 1,3.$$

Если учесть еще ошибку поправочной формулы, учитывающей поправку на ветер (около 5% от величины поправки), то можно принять  $E = 1,5$  делений угломера при самой тщательной подготовке стрельбы. В то же время вся величина деривации для старой гранаты на эту дистанцию равняется четырем делениям угломера. Таким образом при одной стрельбе деривация будет определена со срединной ошибкой порядка  $40^\circ$  от величины деривации.

Точность определения деривации может быть, однако, значительно повышена путем постановки специальных стрельб из двух орудий с правой и левой нарезкой согласно следующей схеме (черт. 104).

Пусть два орудия с правой и левой нарезкой наведены параллельно друг другу и одновременно проведены стрельбы из обоих орудий. Поместим начало координат  $O_1$  в точке стояния орудия с левой нарезкой. В итоге проведения стрельб определим координаты центров группиро-



Черт. 104

вания  $C_1$  и  $C_2$ , отвечающих сбоям орудиям. Отклонения снарядов вследствие деривации должны быть для сбоях орудий равны по абсолютной величине и обратны по знаку. Отклонения же снарядов вследствие бокового ветра для сбоях орудий должны быть одинаковы по величине и по направлению. Обозначая абсолютную величину отклонения вследствие деривации через  $Z_d$ , отклонение вследствие бокового ветра через  $Z_w$ , расстояние между орудиями через  $a$  и координаты центров группирования через  $Z_1$  и  $Z_2$ , получим

$$\begin{aligned} Z_1 &= -Z_d + Z_w, \\ Z_2 &= Z_d + a + Z_w. \end{aligned}$$

Вычитаем из второго равенства первое и делим полученный результат пополам

$$\frac{Z_2 - Z_1}{2} = Z_d + \frac{a}{2},$$

откуда

$$Z_d = \frac{Z_2 - Z_1 - a}{2}. \quad (13)$$

Если орудия установлены непосредственно одно возле другого то  $a = 0$  и

$$Z_d = \frac{Z_2 - Z_1}{2},$$

т. е. деривация равняется половине расстояния между центрами группирования в боковом направлении.

Основное преимущество такого метода заключается в том, что влияние бокового ветра исключается; следовательно, устраняются ошибки, связанные с определением боковой составляющей скорости ветра и с вычислением поправки на боковой ветер.

Для исключения при стрельбе влияния ошибок прицельных приспособлений на боковую наводку можно рекомендовать следующий метод наводки орудий. Предварительно методом, указанным в § 136, выверяется горизонтальность оси цапф. Затем оба орудия пристреливаются по двум точкам, отмеченным на вертикальном щите, устанавливаемом на расстоянии 200—300 м. Число счетных выстрелов для каждого орудия 5—6. Расстояние между точками пристрелки по возможности выбирается равным расстоянию между орудиями, а последнее выбирается таким образом, чтобы эллизы рассеивания не накладывались один на другой. После пристрелки по щиту орудия отмечаются, и при этих установках угломера производится стрельба на различные дальности для определения деривации.

Часто бывает трудно добиться пристрелкой полной параллельности плоскостей бросания орудий. В этом случае непараллельность плоскостей бросания учитывается следующим образом. Пусть расстояние между орудиями в боковом направлении равняется  $a$ , а расстояние между центрами группирования на щите —  $h$ , причем для определенности положим  $h > a$ . Обозначая расстояние до щита через  $D$ , получим расхождение плоскостей бросания  $\phi$  из следующего выражения:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{h-a}{D}.$$

Полученную по формуле (13) величину  $Z_d$  надо уменьшить на половину расхождения центров группирования, отвечающего углу  $\phi$ , т. е. на величину

$$\frac{X \operatorname{tg} \phi}{2} = \frac{X(h-a)}{2D}.$$

Нетрудно оценить ошибку определения угла  $\phi$  (а следовательно, ошибку боковой наводки) при таком методе. Координаты центров группирования пробоин на щите могут быть легко определены со срединной ошибкой порядка 5 см, при этом расстояние  $h$  будет определено со срединной ошибкой  $\varepsilon = 5\sqrt{2} = 7$  см. Этой ошибке при расстоянии до щита 250 м отвечает угловая ошибка  $\frac{1}{3500}$  или  $1'$ .

### § 145. Встречные стрельбы

Встречные стрельбы организуются тогда, когда хотят исключить влияние ветра на полет снаряда или же когда необходимо проверить опытным путем правильность методики вычисления поправок на ветер. Два орудия, выбираемые для проведения встречных стрельб, должны быть в баллистическом отношении однородны. Для этого орудия предварительно проверяются стрельбой в одном направлении патронами одной и той же партии на однообразие начальных скоростей и дальностей. Имеющиеся небольшие неустранимые расхождения отмечаются. Затем орудия устанавливаются друг от друга на расстоянии, превышающем дальность стрельбы на 1—2 км, и по возможности на одной высоте. Стрельба производится одновременно из обоих орудий навстречу друг другу. Во время стрельбы производится зондирование атмосферы по всей высоте траектории. В результате проведенных стрельб определяются значения полных дальностей ( $X_{\text{сп}1}, X_{\text{сп}2}$ ) и боковых отклонений ( $Z_{\text{сп}1}, Z_{\text{сп}2}$ ) для обоих орудий. При этом положительный отсчет дальностей и боковых отклонений производят для каждого орудия отдельно, так что дальность и продольные отклонения отчитываются в направлении на противоположное орудие, а боковые отклонения — вправо. Знак величин  $W_x$  и  $W_z$  принимается в отношении системы  $x, \theta_1, z_1$ .

Заметим, что ветер, увеличивающий дальность для первого орудия на некоторую величину  $\delta X_{\text{сп}1}$ , уменьшает дальность для второго орудия на ту же величину. Что касается изменения дальности вследствие изменения барометрического давления и температуры, то эти изменения должны быть одинаковы для обоих орудий.

Обозначим изменение дальности вследствие продольного ветра через  $\delta X_{\text{вв}}$ , вследствие изменения барометрического давления и температуры через  $\delta X_{\text{вz}}$ . Кроме того, обозначим отклонение дальности второго орудия по отношению к первому при стрельбе на ту же дальность в одном направлении через  $a$ .

Результаты встречных стрельб могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_{\text{сп}1} &= X + \delta X_{\text{вв}} + \delta X_{\text{вz}}, \\ X_{\text{сп}2} &= X + a - \delta X_{\text{вв}} + \delta X_{\text{вz}}. \end{aligned}$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$X_{\text{сп}1} - X_{\text{сп}2} = 2\delta X_{\text{вв}} - a,$$

откуда

$$\delta X_{\text{вв}} = \frac{X_{\text{сп}1} - X_{\text{сп}2} + a}{2}.$$

Таким же образом для боковых отклонений можем написать

$$\begin{aligned} Z_{\text{сп}1} &= Z_d + Z_{\text{вв}}, \\ Z_{\text{сп}2} &= Z_d - Z_{\text{вв}}. \end{aligned}$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$Z_{\text{сп}1} - Z_{\text{сп}2} = 2Z_{\text{вв}}$$

откуда

$$Z_{\text{вв}} = \frac{Z_{\text{сп}1} - Z_{\text{сп}2}}{2}.$$

Складываем те же два равенства:

$$Z_d = \frac{Z_{\text{сп}1} + Z_{\text{сп}2}}{2}.$$

Таким образом на основании встречных стрельб мы получаем непосредственно из опыта значения продольного и бокового отклонений снаряда под влиянием ветра. Эти опытные данные могут быть использованы для проверки теоретических формул, служащих для вычисления баллистического ветра и поправок на ветер.

Что касается опытного определения деривации, то хотя оно и может быть произведено на основании встречных стрельб, но точность результата будет, безусловно, ниже, чем в опытах с двумя орудиями противоположной крутизны. Это объясняется тем, что при встречных стрельбах невозможно исключить влияние ошибок прицельных приспособлений и ошибок наводки на боковое отклонение снарядов, как это имеет место при стрельбе из двух орудий с противоположной крутизной нарезов.

В заключение укажем на большие опыты по определению поправок на ветер при помощи встречных стрельб, проведенные на Абердинском полигоне США в 1921—1922 гг. Было проведено несколько сот встречных стрельб при значительной скорости ветра. Стрельбы проводились и обрабатывались с большой тщательностью. При исходных условиях  $\theta_0 = 42^\circ 30'$ ;  $X = 8200$  м;  $Y = 2500$  м были получены следующие средние опытные значения поправок на продольный ветер и боковой ветер:

$$\delta X_{\text{вв}} = 377 \text{ м для } W_x = 10 \text{ м/сек};$$

$$Z_d = 0—31 \text{ (в тысячных) для } W_z = 10 \text{ м/сек.}$$

Соответствующие поправки, вычисленные теоретически,  $\delta X_{\text{вв}} = 401$ ;  $Z_d = 0—30,3$ . Ошибка получается в  $6\%$  для продольного ветра и  $2\%$  для бокового ветра.

### § 146. Согласование баллистических расчетов с результатами опытных стрельб при помощи баллистического сборника

Как указывалось выше, стрельбы на дальность проводятся обычно при трех-пяти углах бросания и для каждого угла бросания повторяются 3—4 раза. Приведя данные стрельб к нормальным условиям, получим для каждой стрельбы значения полной дальности  $X$ , полного времени полета  $T$ , деривации  $Z$  и величин, характеризующих рассеивание. Значения этих величин, принимаемые за опорный материал для составления таблиц стрельбы, получаются как среднеарифметические из всех стрельб, отвечающих определенному углу бросания. Остальные элементы траектории  $v_e, \theta_e, Y$  не могут быть получены опытным путем и должны быть определены при помощи баллистических расчетов.

Кроме того, расчетом должны быть определены все элементы траектории, включая  $X$  и  $T$ , для неотстреливаемых углов бросания.

Для обеспечения необходимой точности баллистические расчеты должны быть согласованы с результатами опытных стрельб. По данным этих стрельб определяются значения коэффициента формы  $i$  или баллистического коэффициента

$$i = \frac{id^2}{q} \cdot 1000.$$

Таблица 34

$\theta_0$	$c$	$v_0$	650	660	700
$10^\circ$	0,50	$v_0$	3,8125	3,8080	3,8455
	0,55		3,7945		3,8265
$20^\circ$	0,50	$v_0$	3,9760	3,9713	4,0015
	0,55		3,9570		3,9815
$30^\circ$	0,50	$v_0$	4,0545	4,0492	4,0770
	0,55		4,0340		4,0550
$40^\circ$	0,50	$v_0$	4,0895	4,0792	4,1115
	0,55		4,0675		4,0885

лирования по скорости опытное значение дальности находилось между значениями соответствующих величин в столбце для  $v_0 = 660$ . Результат интерполяции приведен в табл. 35.

Таблица 35

$\theta_0$	$c$	$v_0$	650	660	700
$10^\circ$	0,50	$v_0$	3,8125	3,8191	3,8453
	0,5305		3,8080	3,8099	3,8265
	0,55		3,7945	3,8009	3,8265
$20^\circ$	0,50	$v_0$	3,9760	3,9811	4,0015
	0,5255		3,9713	3,9619	3,9815
	0,55		3,9570	3,9619	3,9815
$30^\circ$	0,50	$v_0$	4,0545	4,0590	4,0770
	0,5235		4,0492	4,0383	4,0550
	0,55		4,0340	4,0383	4,0550
$40^\circ$	0,50	$v_0$	4,0895	4,0939	4,1115
	0,5330		4,0792	4,0717	4,0885
	0,55		4,0675	4,0717	4,0885

Таким образом получены следующие значения баллистического коэффициента (табл. 36).

Таблица 36

$\theta_0$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
$c$	0,5305	0,5255	0,5235	0,5330

Выше мы видели, что коэффициент  $i$  играет по существу роль коэффициента согласования и меняется с изменением угла бросания. Более того, для одного и того же угла бросания коэффициент  $i$  получается несколько различным в зависимости от того, будем ли мы им согласовывать дальность, полное время полета или какой-либо другой элемент точки падения.

Таким образом различным элементам точки падения отвечают различные баллистические коэффициенты  $c_x$ ,  $c_z$  и др. Эти коэффициенты, однако, мало отличаются друг от друга; кроме того, по опытным стрельбам можно определить только два элемента —  $X$  и  $T$ , из которых с наибольшей точностью необходимо определить  $X$ .

Поэтому принимают  $c = c_x$  и при этих значениях баллистического коэффициента вычисляют все элементы точки падения.

Для получения величины баллистического коэффициента, согласующегося при данном угле бросания  $\theta_0$ , полученному из опыта дальность  $X$ , необходимо решить обычную задачу нахождения по трем известным элементам  $v_0$ ,  $\theta_0$ ,  $X$  четвертого элемента  $c$ .

На основании полученных для различных углов бросания значений баллистического коэффициента строят кривую, выражющую зависимость баллистического коэффициента от угла бросания. Последующие баллистические расчеты, отвечающие различным углам бросания, производятся при значениях баллистического коэффициента, определяемых из полученного графика.

Указанные выше расчеты легко выполняются при помощи баллистического сборника, содержащего значения элементов точки падения и вершины, отвечающие различным значениям  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ .

Применение баллистического сборника Академии для построения кривой зависимости баллистического коэффициента от угла бросания разберем на следующем примере.

#### Пример.

Для составления таблиц стрельбы по наземным целям из 76,2-мм пушки при  $v_0 = 660$  м/сек и  $q = 6,5$  кг проведены опытные стрельбы. По данным этих стрельб получены следующие, приведенные к нормальным условиям, значения полной горизонтальной дальности:

$\theta_0$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$
$X$	6427	9360	11200	12000
$\lg X$	3,8080	3,9713	4,0492	4,0792

Требуется согласовать баллистические расчеты с результатами опытных стрельб и вычислить основные табличные данные. Решаем задачу определения баллистического коэффициента по заданным значениям  $v_0$ ,  $\theta_0$ ,  $X$ .

Предварительно выписываем из таблиц сборника для отстрелянных углов бросания значения  $\lg X$ , между которыми находятся полученные на опыте величины.

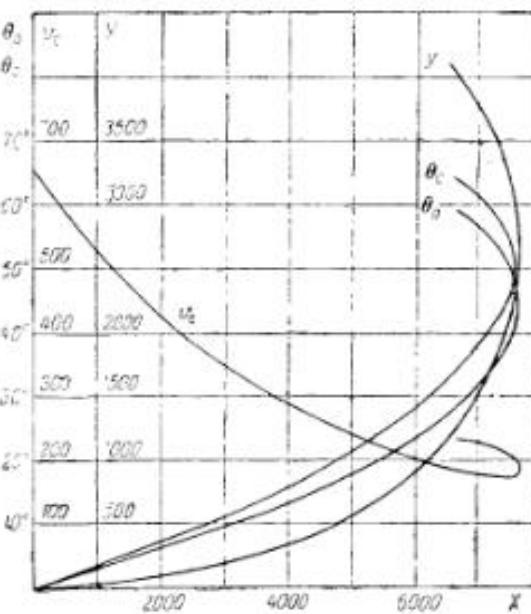
После этого бланк расчетов примет следующий вид (табл. 34).

При заполнении бланка не всегда сразу ясно, для каких значений  $c$  выписывать  $\lg X$ . Например, для угла  $\theta_0 = 10^\circ$  и для столбца, отвечающего  $v_0 = 650$ , опытное значение  $\lg X = 3,8080$  находится между 3,8125 и 3,7945, отвечающими значениям  $c = 0,50$  и 0,55. Если же рассматривать столбец, отвечающий  $v_0 = 700$ , то опытное значение  $\lg X = 3,8080$  находится между значениями  $\lg X$ , отвечающими  $c = 0,60$  и 0,65. Выбор  $c$  в бланке производится таким образом, чтобы после интерпо-

Таблица 37

	$v_0$	650	660	700
$c$	0,50 0,524 0,55	4,0220 4,0172 4,0070	4,0267 4,0172 4,0250	4,0455
$\lg X$	0,50 0,524 0,55	1,5545 1,5536 1,5460	1,5577 1,5536 1,5491	1,5705
$\lg T$	0,50 0,524 0,55	39°20' 39°40' 39°35'	39°33' 39°40' 39°48'	40°25' 40°40'
$ \theta_e $	0,50 0,524 0,55	3,232 3,230 3,215	3,239 3,230 3,221	3,265 3,247
$\lg Y$	0,50 0,524 0,55	2,418 2,413 2,405	2,419 2,413 2,406	2,423 2,409
$\lg v_e$	0,50 0,524 0,55	2,418 2,413 2,405	2,419 2,413 2,406	2,423 2,409
Переходя от логарифмов к числам, получим				
$X = 10400 \text{ м}; \quad T = 35,75 \text{ сек.}; \quad Y = 1700 \text{ м};$				
$v_e = 250 \text{ м/сек}; \quad  \theta_e  = 39^{\circ}40'.$				

черт. 106 показан характер расположения на графике кривых основных табличных данных для углов бросания до  $60^{\circ}$ .



Черт. 106

Для вычисления деривации используются непосредственно опытные данные, по которым строится график  $Z=f(\theta_0)$  или  $Z=f(X)$ . Иногда

Полученные результаты наносим на график  $c=f(\theta_0)$  черт. 105, пользуясь которым определяем значения баллистического коэффициента для промежуточных углов бросания.

Следует отметить исключительное значение графика  $c=f(\theta_0)$  во всей работе по составлению таблиц стрельбы. В этом графике, по существу, сосредоточен результат всех немалочисленных опытных стрельб, которые проводятся при составлении таблиц стрельбы. После получения графика можно все основные элементы траектории определить расчетом. Если стрельбы на дальность проводились для нескольких зарядов, то необходимо построить семейство кривых  $c=f(\theta_0)$  для различных начальных скоростей. При этом для получения плавного семейства приходится иногда несколько отступить от полученных опытных точек, руководствуясь в значительной мере интуицией и практическим опытом. Необходимо при этом учесть, что чем больше угол бросания, тем больше чувствительность дальности к ошибкам баллистического коэффициента. Поэтому надо соблюдать большую осторожность в отходе от опытных точек, отвечающих большим углам бросания.

Так как стрельба на дальность для каждого угла бросания повторяется, как правило, троекратно, то можно определить срединную ошибку стрельбы по формуле (§ 143)

$$E_x = \frac{(\Delta X)_{\max}}{23}.$$

Этой ошибке в дальности отвечает срединная ошибка в баллистическом коэффициенте

$$E_c = \frac{E_x}{\frac{\partial X}{\partial c}}.$$

Исходя из поправочных коэффициентов Артиллерийской академии, получим

$$\frac{\partial X}{\partial c} = \frac{100}{c} Q_{\frac{\partial c}{\partial c}}; \quad E_c = \frac{c E_x}{100 Q_{\frac{\partial c}{\partial c}}}.$$

При построении кривой  $c=f(\theta)$  не следует, как правило, отступать от опытных точек больше, чем на величину  $E_c$ , определяемую приведенной зависимостью.

#### § 147. Вычисление основных табличных данных

После получения графика  $c=f(\theta)$  определяют значения баллистического коэффициента для углов бросания  $2^{\circ}, 5^{\circ}$  и далее через  $5^{\circ}$  и вычисляют основные данные при помощи баллистического сборника.

Например, для угла бросания  $\theta_0 = 25^{\circ}$ , определяя по графику значение баллистического коэффициента, получим  $c = 0,5240$ . Расчет основных табличных данных приведен в табл. 37.

Полученные значения элементов траектории наносим на график крупного масштаба, с которого снимаем основные табличные данные для дальностей через 200 м.

При построении графика обычно дальность откладывается по оси абсцисс, а все остальные табличные данные — по оси ординат. На

пользуются эмпирическими формулами, в которых подбираются коэффициенты согласования по данным опытных стрельб (§ 128).

Данные поправочных граф вычисляются непосредственно при помощи таблиц поправочных коэффициентов Академии. При этом необходимо иметь в виду, что в таблицах стрельбы поправки даются со знаком, обратным знаку отклонения.

#### § 148. Согласование баллистических расчетов с результатами опытных стрельб и вычисление основных табличных данных по методу Сиаччи

В некоторых случаях может оказаться удобным базировать баллистические расчеты, связанные с составлением таблиц стрельбы, на методе Сиаччи. Это относится, в первую очередь, к случаям, когда таблицы стрельбы составляются для углов бросания, не превышающих  $25-30^\circ$ , например, для мелкокалиберных пушек или для стрельбы шрапнелью из пушек средних калибров.

Вычисления по методу Сиаччи производятся следующим образом.

1. По полученным из опытных стрельб значениям  $v_0$ ,  $\theta_0$ , и  $X$  определяют значения коэффициента  $c'$  при помощи таблиц вспомогательных функций Сиаччи. Для этого вычисляют предварительно

$$f_1 = \frac{v^2 \sin 2\theta_0}{\gamma};$$

затем по табл. 23 части III по значениям  $f_1$  и  $v_0$  определяют  $cX$  и  $c$ .

2. По полученным значениям  $c'$  строится график зависимости  $c'$  от  $b_0$ , по которому и определяются значения  $c'$  для последующих расчетов.

Заметим, что, применяя метод Сиаччи, необходимо определять и строить график величины  $c'$ , а не  $c$ , так как результаты опытных стрельб позволяют определить непосредственно величину  $c'$ . Это освобождает от необходимости отыскивать коэффициент  $\beta$  из специальных таблиц, применение которых может быть источником излишних ошибок.

В качестве примера проделаем расчеты § 146—147 при помощи метода Сиаччи.

Вычисляем значения  $\lg f_1$ , отвечающие четырем опытным дальностям (табл. 38).

Таблица 38

	$\theta_0$	10°	20°	30°	40°
	$\lg X$	3,8080	3,9713	4,0492	4,0792
$f_1 = \frac{v_0 \sin 2\theta_0}{X}$	$2\lg v_0$	5,6390	5,6390	5,6390	5,6390
	$\lg \sin 2\theta_0$	1,5341	1,8081	1,9375	1,9934
	$-\lg X$	4,1920	4,0287	5,9508	5,9208
	$\lg f_1$	1,3651	1,4758	1,5273	1,5532

По табл. 23 части III путем двукратного интерполирования находим  $c'X$ ; расчеты вносим в бланк следующего вида (табл. 39).

Таблица 39

$\theta_3$	$c'X$	$v_0$	700	660	650
$10^\circ$	3000		1,331	1,327	1,326
	3381			1,3651	
	3500		1,385	1,377	1,375
$20^\circ$	4500		1,478	1,464	1,461
	4648			1,4758	
	5000		1,519	1,503	1,499
$30^\circ$	5000		1,519	1,503	1,499
	5334			1,5273	
	5500		1,557	1,539	1,535
$40^\circ$	5500		1,557	1,539	1,535
	5699			1,5532	
	6000		1,594	1,574	1,569

Вычисляем  $c'$ :

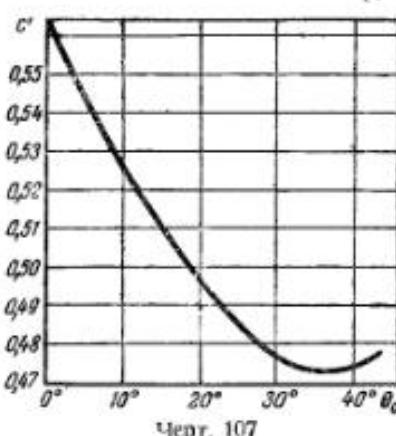
$\theta_0$	10°	20°	30°	40°
$\lg c'X$ — $\lg X$	3,5290 4,1920	3,6672 4,0287	3,7270 5,9508	3,7558 5,9208
$\lg c'$	1,7210	1,6959	1,6778	1,6766
$c'$	0,5260	0,4965	0,4762	0,4749

Строим график зависимости  $c'$  от  $\theta_0$  (черт. 107).

Для угла бросания  $\theta_0 = 25^\circ$  по графику находим  $c' = 0,4855$ .

Для вычисления элементов точки падения и вершины предварительно вычисляем функцию  $f_2$ .

	$\lg c'$	1,6861
	$\lg \sin 2\theta_3$	1,8843
$f_0 = c' \sin 2\theta_3$	$\lg f_0$	1,5704
	$f_0$	0,3718



Черг. 10

По табл. 22 части III определяем  $c'X$  и вычисляем полную горизонтальную дальность  $X$ :

$c'X$	$v_0$	700	660	650
5000		0,337	0,365 <sub>8</sub>	0,373
5042			0,3718	
5500		0,405	0,437 <sub>8</sub>	0,446

$\lg c'X$	3,7026
$-\lg c$	0,3139
$\lg X$	4,0165
$X$	10390

Определяем значения функций  $f_2 - f_6$ :

	$c'X$	$v_0$	700	660	650
$\lg f_2$	5000	0,281	0,269	0,266	
	5042		0,270		
	5500	0,288	0,277	0,274	
$\lg f_3$	5000	0,892	0,886	0,885	
	5042		0,887		
	5500	0,910	0,903	0,901	
$\lg f_4$	5000	0,496	0,480	0,476	
	5042		0,482		
	5500	0,523	0,507	0,503	
$\lg f_6$	5000	1,5656	1,5580	1,5561	
	5042		1,5583		
	5500	1,5688	1,5614	1,5596	

Вычисляем основные элементы точки падения и вершины:

$\lg f_2$	$\lg \frac{f_2}{\lg \tan \theta_0}$	0,2700 1,6687
$\lg \tan \theta_c$	$\lg \tan \theta_c$	1,9387
$ \theta_c $	$ \theta_c $	40°58'
$T = \frac{v_0 \sin \theta_0}{f_2}$	$\lg v_0$	2,8195
	$\lg \sin \theta_0$	1,6259
	$-\lg f_2$	1,1130
$v_c = \frac{v_0 \cos \theta_0}{f_2 \cos \theta_c}$	$\lg T$	1,5584
	$T$	36,17
$\lg v_c$	$\lg v_0$	2,8195
	$\lg \cos \theta_0$	1,9573
	$-\lg f_2$	1,5180
	$-\lg \cos \theta_c$	0,1220
$v_c$	$\lg v_c$	2,4168
	$v_c$	261,1
$Y = f_6 X \tan \theta_0$	$\lg f_6$	1,5583
	$\lg X$	4,0165
	$\lg \tan \theta_0$	1,6687
$\lg Y$	$\lg Y$	3,2435
$Y$	$Y$	1752

Сравним значения основных элементов точки падения и вершины, полученные при помощи баллистического сборника и по методу Сиаччи.

	$X$	$T$	$ \theta_c $	$Y$	$v_c$
Баллистический сборник	10400	35,75	39°40'	1700	259
Функции Сиаччи	10390	36,17	40°58'	1752	261

Дальности получились практически одинаковыми, что вполне понятно, так как в том и другом случаях согласование расчетов с данными опытных стрельб велось по дальности. Для остальных элементов расходжения получились заметные. Поэтому можно рекомендовать и в том случае, когда расчеты таблиц стрельбы производятся по методу Сиаччи,

вычислять элементы  $T$  и  $\beta_0$  при помощи баллистического сборника. Что касается элементов  $Y$  и  $v_e$ , то точность, обеспечиваемая при определении их методом Сиаччи, практически достаточна.

### § 149. Вычисление величин, характеризующих рассеивание

Рассеивание точек падения снарядов характеризуется средними отклонениями  $B_d$  и  $B_b$ .

Эти величины определяются из опыта для тех углов бросания, при которых производились стрельбы на дальность. Если координаты точек падения отмечены в порядке появления разрывов, то целесообразно вычислять значения  $B_d$  и  $B_b$  «по разностям» по формулам

$$B_d = 0,4769 \sqrt{\frac{\sum \Delta X_i^2}{n-2}},$$

$$B_b = 0,4769 \sqrt{\frac{\sum \Delta Z_i^2}{n-2}},$$

где  $n$  — число учтенных выстрелов;

$\Delta X_i$ ,  $\Delta Z_i$  — разности между двумя последовательными наблюдениями.

Вычисление «по разностям» позволяет исключить из рассеивания влияние на него закономерного изменения какого-либо фактора, например: равномерное падение начальной скорости от выстрела к выстрелу, равномерное изменение температуры воздуха и т. д.

Если порядок появления разрывов не отмечен, то вычисление величин  $B_d$  и  $B_b$  производится по формулам

$$B_d = 0,6745 \sqrt{\frac{\sum (X_i - X_{cp})^2}{n-1}},$$

$$B_b = 0,6745 \sqrt{\frac{\sum (Z_i - Z_{cp})^2}{n-1}},$$

где  $X_{cp}$  и  $Z_{cp}$  — координаты центра группирования точек падения разрывов.

Значения  $B_d$  и  $B_b$  для промежуточных углов бросания, при которых стрельбы на дальность не проводились, могут быть определены при помощи графиков функций  $B_d = f(\theta_0)$  и  $B_b = g(\theta_0)$ , построенных по результатам опытов.

Следует, однако, иметь в виду, что опытные значения величин  $B_d$  и  $B_b$  при повторных стрельбах изменяются в значительных пределах, т. е. имеет место «рассеивание» рассеивания. Обработка многочисленных стрельб, произведенная полковником Ермолаевым, дает значение рассеивания величин  $B_d$  и  $B_b$  порядка  $20\%$  от их средних значений. При этих условиях обычно затруднительно построить плавные семейства кривых зависимости  $B_d$  и  $B_b$  от угла бросания и начальной скорости. Поэтому целесообразнее вычислять значения  $B_d$  и  $B_b$ , исходя из оценки факторов, определяющих рассеивание.

Элементы траектории определяются тремя основными параметрами  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$ . Естественно рассматривать величину  $B_d$  как функцию от рассеивания этих параметров, т. е. от величин  $r_e$ ,  $r_v$  и  $r_b$ . Исходя из известной зависимости между ошибками функций и ошибками аргументов, получим

$$B_d = \sqrt{r_{se}^2 + r_{sv}^2 + r_{sb}^2} = \sqrt{(r_e \frac{\partial X}{\partial c})^2 + (r_v \frac{\partial X}{\partial v_0})^2 + (r_b \frac{\partial X}{\partial \theta_0})^2}, \quad (14)$$

где  $r_{se}$ ,  $r_{sv}$  и  $r_{sb}$  — значения рассеивания в дальности, вызываемого рассеиванием каждого из рассматриваемых факторов в отдельности.

Величина  $r_e$  находится одновременно с определением начальной скорости (§ 140). Величина  $r_b$  может быть принята равной величине  $r_f$  рассеивания углов вылета, которая может быть определена при проведении стрельбы для нахождения угла вылета. Для определения величины  $r_e$  используются стрельбы на дальность при угле бросания в диапазоне  $40-50^\circ$ .

Известно, что при угле бросания, близком к углу наибольшей дальности, небольшие отклонения угла бросания практически не влияют на дальность; поэтому в данном случае  $B_d$  будет зависеть только от рассеивания двух параметров:  $r_e$  и  $r_v$ .

Если значения  $r_e$  и  $B_d$  определены из опыта, то можно найти  $r_v$  из выражения

$$B_d = \sqrt{(r_e \frac{\partial X}{\partial v_0})^2 + (r_v \frac{\partial X}{\partial c})^2},$$

в котором все величины известны, кроме  $r_v$ . Определив  $r_v$ , можно вычислить значения  $B_d$  для различных углов бросания по формуле (14).

Для артиллерийских систем в среднем получаются следующие значения:

$$r_e = 1,5 \text{ м/сек}; \quad r_b = 1,5'; \quad r_v = 10,04$$

При вычислении значения  $B_d$  для определенного орудия необходимо исходить из значений  $r_e$ ,  $r_b$ ,  $r_v$ , полученных для данного орудия. При этом надо, по возможности, использовать наибольшее число опытных стрельб.

При вычислении величины  $B_b$  будем полагать, что боковое рассеивание зависит от двух основных факторов: от углового рассеивания  $r_e$  и от рассеивания  $r_f$ , суммарного бокового ускорения. Величина  $r_f$  включает в себя рассеивание факторов, вызывающих деривацию, и рассеивание бокового ветра.

Боковое рассеивание снаряда, определяемое величиной  $r_f$ , можно принять равным

$$r_{zf} = r_f \frac{T^2}{2}.$$

Боковое рассеивание, определяемое величиной  $r_f$ ,

$$r_{zf} = X \operatorname{tg} r_f.$$

Таким образом получим

$$B_b = \sqrt{r_{se}^2 + r_{zf}^2} = \sqrt{\left(r_f \frac{T^2}{2}\right)^2 + (X \operatorname{tg} r_f)^2}. \quad (15)$$

Величина  $r_f$  может быть найдена из данных опытных стрельб по щиту при определении угла вылета путем обмера боковых отклонений отдельных пробоин от центра группирования.

Используя значения  $B_b$ , полученные на опытных стрельбах, можно определить  $r_f$  из выражения (15), а зная величины  $r_e$  и  $r_f$ , можно вычислить значения  $B_b$  для всех углов бросания.

Рассматривая влияние различных факторов на рассеивание по дальности, следует заметить, что угловое рассеивание  $r_e$  является определяющим при углах бросания, меньших  $5^\circ$ . С увеличением угла бросания растет влияние факторов  $r_v$  и  $r_b$ . При этом, чем меньше скорость снаряда, тем больше влияние фактора  $r_v$ . В виде примера приведем данные о составляющих рассеивания, вычисленных для 76,2-мм пушки при следующих исходных данных:

$$c = 0,6; \quad v_0 = 600 \text{ м/сек}; \quad r_e = 10/0; \quad r_v = 1,5 \text{ м/сек}; \quad r_b = 1,5'.$$

Результаты расчетов видны из табл. 40.

Таблица 40

$\theta_0$	5°	10°	20°	30°	40°
X	3660	5550	8195	9830	10600
$r_{xc}$	13	22	37	47	55
$r_{xv}$	11	13	15	16	17
$r_{xh}$	11	8	5	3	1
$B_d$	21	26	40	50	57

В данном примере рассеивание баллистического коэффициента является преобладающим для всех углов бросания, начиная от  $\theta_0 = 10^\circ$ .

Заметим, что при тех же условиях, но при  $v_0 = 300 \text{ м/сек}$ , мы получили бы для угла бросания  $\theta_0 = 40^\circ$  следующие величины составляющих рассеивания:

$$r_{xc} = 18 \text{ м}; \quad r_{xv} = 40 \text{ м}; \quad r_{xh} = 1 \text{ м}; \quad B_d = 43 \text{ м}.$$

Отсюда видно, что для уменьшения рассеивания гаубичных зарядов необходимо в первую очередь уменьшить величину  $r_v$ , т. е. добиться большого однообразия зарядов и условий заграждения.

### § 150. Вычисление табличных данных для дистанционной стрельбы

Накатка трубы производится либо в секундах горения в покое, либо в делениях, согласованных с установкой прицела.

Для того чтобы найти зависимость между установкой трубы в тех делениях  $N$ , в которых она насечена, и временем горения в покое  $n$ , проводятся специальные опыты по сжиганию трубок в покое при различных установках. Время горения засекается одновременно двумя-тремя взаимосверенными секундомерами. При сжигании трубок должно быть обращено внимание на хорошее сжатие дистанционных колец, чтобы избежать распространения пламени между кольцами. На каждой установке при одном опыте сжигают 5—7 трубок и опыты повторяются не менее 3 раз в различные дни. Результаты каждого опыта приводятся к нормальным значениям температуры трубы и барометрического давления по формуле

$$n = n_{\text{оп}} (1 + 0,0007 \Delta t_m^2) (1 + 0,001 \Delta h),$$

где  $\Delta t_m^2$  — отклонение температуры трубы от нормальной.

Исходя из средних результатов сжигания на каждой установке, строим график зависимости  $n = f(N)$ .

Так как в формулы для расчета установки трубы входит коэффициент согласования  $k$ , то необходимо провести специальные стрельбы для определения этого коэффициента.

Для отстрела дистанционных снарядов желательно выбрать мало пересеченную местность: площадка в районе падения снарядов должна быть примерно на той же высоте, что и огневая позиция. Во всяком случае директриса для стрельбы дистанционными снарядами должна быть тщательно пронивелирована, т. е. должны быть определены пре-вышения районов падения снарядов относительно огневой позиции.

Отстрел дистанционных снарядов производится сначала на удар для определения координат точек падения. Затем производится дистанционная стрельба при установке трубы, обеспечивающей получение

всех воздушных разрывов. Засечки точек падения и разрывов производятся с трех пунктов визирными приборами. Эти засечки позволяют определить проекции точек разрывов и точек падения на горизонтальную плоскость. Кроме того, производится засечка разрывов при помощи высотомера, располагающегося у средней наблюдательной вышки на земле (а не на вышке, где обычно размещаются визирные приборы).

В результате проведения отстрела дистанционных снарядов получаем для нескольких углов бросания координаты средних точек падения, а также координаты центров группирования воздушных разрывов, отвечающих определенным установкам трубы. После этого можно приступить к расчетам.

Прежде всего вычисляются элементы точек падения и вершины и все табличные данные, к ним относящиеся. Затем вычисляются установки трубы и поправки к ним в следующем порядке.

1. Полученные опытные значения установки трубы  $N_{\text{оп}}$  (в условных делениях шкалы) переводятся в величины  $n_{\text{оп}}$ , т. е. в секунды горения трубы на приборе, при помощи графика зависимости  $n = f(N)$ .

2. Опытные значения установки трубы  $n_{\text{оп}}$  приводятся к точке падения. Для этого по полученной средней высоте разрывов  $y_1$  определяют средний интервал разрывов по формуле  $I = y_1 \operatorname{ctg} |\theta_e|$ . Иногда интервал определяется непосредственно при помощи специального прибора — интерваломера. Затем вычисляется поправка на приведение к точке падения по формуле (§ 92)

$$\delta n = \frac{IS(v_e)}{v_e \cos \theta_e}.$$

Установка трубы, отвечающая точке падения, найдется из выражения

$$n_e = n_{\text{оп}} + \delta n.$$

3. Полученные значения  $n_e$  приводятся к нормальным условиям по формуле (§ 114)

$$\frac{\delta n_e}{n_e} = (0,001h_{eN} + \varphi_2 - 1) \frac{\delta h_0}{750} + 0,0007 \delta t_{m,0} + (1 - \varphi_2 - \varphi_3) \frac{\delta t_B}{289} + (1 - \varphi_2) \frac{\delta q}{q} - (\varphi_2 - \varphi_1) \frac{\delta v_0}{c' X G(v_0)} + \varphi_2 \frac{\Sigma X}{X}. \quad (16)$$

В этой формуле  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  определяются из выражений

$$\varphi_1 = \frac{s_0 S_0 X}{v_e \cos \theta_e n}; \quad \varphi_2 = \frac{s_e S_e X}{v_e \cos \theta_e n}; \quad \varphi_3 = \frac{s_1}{\cos \theta_e n} (Q_e - Q_0).$$

Значения  $S_0$ ,  $S_e$ ,  $Q_0$ ,  $Q_e$  определяются по табл. III—IV приложения. В последнем слагаемом  $\Sigma X$  — суммарная поправка в дальности, отвечающая условиям стрельбы. Знак  $\Sigma X$  принимается положительным, если суммарное влияние условий стрельбы вызвало увеличение дальности.

Заметим, что, в отличие от формул § 114, в формуле (16) опущены те слагаемые, которые учитывают влияние веса снаряда и температуры заряда на начальную скорость, так как в условиях опытных полигонных стрельб, когда начальная скорость определяется непосредственно во время стрельбы, влияние этих факторов учитывается величиной  $\delta v_0$ , определяемой на опыте как разность между измеренной начальной скоростью и табличной.

Приведенные к нормальным условиям значения  $n_e$  находятся из выражения

$$(n_e)_{\text{прив}} = n_e - \delta n_e.$$

4. Определяется для каждого отстрелянного угла бросания значение коэффициента согласования  $k$  из выражения

$$k = \frac{(n_e)_{\text{прив}}}{(n_e)_{\text{расч}}},$$

где  $n_{\text{расч}}$  находится методами, указанными в § 91 и 94 при  $k=1$ .

При этом  $\alpha_i$  вычисляется для нормальных условий, т. е.

$$\alpha_i = 1 - 0,000053Y.$$

Значения  $N_c$  и  $N_o$  определяются по табл. II приложения для значения  $\mu$ , отвечающего данной конструкции трубы (§ 89).

5. Строится график зависимости  $k$  от  $X$  и из этого графика определяются значения коэффициента  $k$  для дальностей через 800 м.

6. Для дальностей через 800 м вычисляется установка трубы, отвечающая точке падения, по формулам § 91 и 94.

Полученное значение  $n_e$  приводится к нормальному разрыву по формуле

$$n_p = n_e - \frac{I_p S(v_c)}{v_c \cos \theta_e},$$

где  $I_p$  — нормальный интервал, принимаемый обычно равным 85 м.

7. Полученная величина  $n_p$  переводится в деления  $N$  установки трубы по графику  $n=f(N)$ .

8. Для дальностей через 200 м установки трубы определяются двукратным интерполированием на середину по формуле Бесселя или графическим интерполированием.

### § 151. Вычисление таблицы поправок к углу прицеливания на угол места цели

Поправки к углу прицеливания на угол места цели вычисляются либо для заданной горизонтальной, либо для заданной наклонной дальности. Так как в результате топографической подготовки стрельбы по наземным целям (карта, планшет или аналитический расчет) стреляющий непосредственно определяет горизонтальную дальность от батареи до цели, то целесообразно в таблицах стрельбы давать указанные поправки для заданной горизонтальной дальности.

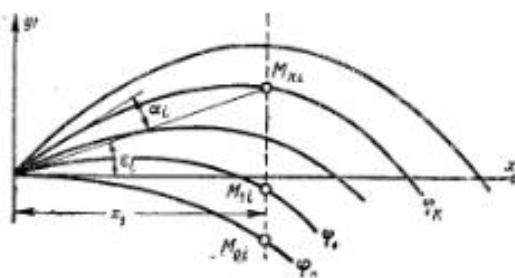
Для вычисления поправок на угол места цели можно рекомендовать два метода, из которых первый, точный метод, базируется на построении пучка траекторий по методу численного интегрирования; второй метод, приближенный, базируется на построении концов траектории на основании табличных данных.

#### Точный метод

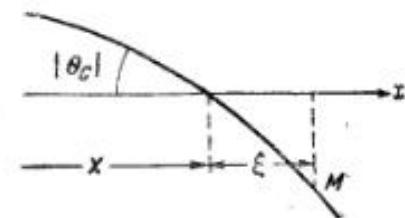
Вычисляется пучок траекторий через  $5^\circ$  до предельной дальности. Для того чтобы можно было вычислять поправки и для отрицательных углов места цели, необходимо вычисление траекторий продолжать ниже горизонта. При этом можно принять, что  $H_z(-y_i) = \frac{1}{H_z(y_i)}$  и что  $\sqrt{\frac{z_0 y_i}{z}}$  для  $(-y_i)$  также равняется обратному значению этой величины для  $y_i$ . Таким образом при вычислении траектории необходимо значения  $\lg H_z(y)$  и  $\lg \sqrt{\frac{z_0 y_i}{z}}$  взять из таблицы с обратным знаком. Вычисленные траектории наносим на график, как показано на черт. 108.

По полученным расчетам строим дополнительный график зависимости угла бросания от полной дальности. Пусть требуется определить поправки к углу прицеливания для горизонтальной дальности  $x_i$ . Прочерчиваем вертикальную прямую, отвечающую этой горизонтальной дальности. Прямая пересечет ряд траекторий. Количество рассчитанных траекторий должно обеспечить наличие не менее 2—3 точек ниже и стольких же точек выше горизонта.

Рассмотрим некоторую точку  $M_{ki}$ , отвечающую углу возвышения  $\varphi_k$  и горизонтальной дальности  $x_i$ . Обозначая ординату этой точки через  $y_{ki}$ , получим  $\tan \varepsilon_k = \frac{y_{ki}}{x_i}$ . Угол прицеливания  $\alpha_i$ , отвечающий точке  $M_{ki}$ , найдется из выражения  $\alpha_i = \varphi_k - \varepsilon_k$ , а поправка к углу прицеливания на угол места цели — из выражения  $\Delta x_i = x_i - x_0$ . Угол  $\alpha_0$  найдем из графика зависимости  $\alpha_0$  от дальности. Аналогичным образом опре-



Черт. 108



Черт. 109

дляются значения  $\Delta x$  для всех точек, отвечающих заданной горизонтальной дальности. Для каждой дальности получим ряд значений  $\Delta x$ . По полученным  $\Delta x$  строим семейство кривых зависимости  $\Delta x = f(X, z)$  или  $\Delta x = f(x_0, z)$ .

#### Приближенный способ

Этот способ применим для углов места цели, не превышающих  $7-8^\circ$ . Он основан на построении концов траектории по приближенной формуле, получающейся путем разложения в ряд функции  $y = f(x)$  около точки падения. При построении концов траектории будем базироваться на табличных данных  $v_c$  и  $\theta_c$ .

Пусть требуется определить высоту (понижение) некоторой точки  $M$  (черт. 109), отстоящей от точки падения на расстоянии  $\xi$ . Разлагая  $y = f(x)$  в ряд Тейлора по степеням  $x - X = \xi$ , получим

$$y = y_c + \xi y'_c + \frac{1}{2} \xi^2 y''_c + \frac{1}{6} \xi^3 y'''_c.$$

Учитывая, что

$$y_c = 0; \quad y'_c = \tan \theta_c = -\tan |\theta_c|;$$

$$y''_c = -\frac{g}{u_c^2} = -\frac{g}{v_c^2 \cos^2 \theta_c};$$

$$y'''_c = \left( \frac{2g}{u_c^3} u'_c \right)_c = -\frac{2g}{v_c^3 \cos^3 \theta_c} c G(v_c),$$

получим

$$y = -\xi \tan |\theta_c| - \frac{g}{2} \left( \frac{\xi}{v_c \cos \theta_c} \right)^2 - \frac{g}{3} \left( \frac{\xi}{v_c \cos \theta_c} \right)^3 c G(v_c).$$

Для точек траектории, находящихся ближе точки падения (обозначая для этого случая  $D = |\xi| = -\xi$ ), получим

$$y = D \tan |\theta_c| - \frac{g}{2} \left( \frac{D}{v_c \cos \theta_c} \right)^2 + \frac{g}{3} \left( \frac{D}{v_c \cos \theta_c} \right)^3 c G(v_c).$$

По этим формулам можно определить ординаты точек траектории, примыкающих к точке падения. После построения концов траекторий производится расчет  $\varepsilon$ ,  $\alpha$  и  $\Delta\alpha$ , как указано выше.

### § 152. Вычисление табличных данных для стрельбы в горах

При вычислении таблиц для стрельбы в горах необходимо учесть значительные отклонения барометрического давления и температуры воздуха от нормальных. Например, при высоте орудия, равной 3000 м,  $h = 520$  мм;  $t = 270$ , т. е. имеем понижение давления на 30% и температуры на 7%. Учет этих факторов при помощи дифференциальных поправок может привести к значительным погрешностям, так как при выводе поправочных формул отбрасываются величины второго порядка малости относительно  $\delta t$  и  $\delta h$ ; следовательно, поправочные формулы могут быть применены только для малых изменений этих параметров.

При вычислении основных табличных данных для стрельбы в горах можно исходить из формулы Ланжевена (§ 99)

$$X = \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} \Phi(c^*, v_{t0}, \theta_0),$$

где

$$c^* = c \frac{h_0}{h_{0N}}; \quad v_{t0} = v_0 \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau_0}},$$

$h_0$  и  $\tau_0$  — давление и температура на высоте стояния орудия.

Как следует из формулы Ланжевена, для определения нормальной дальности, отвечающей некоторой высоте орудия, необходимо поступить следующим образом:

1. По таблицам № 15 и 16 части III определить значения  $h_0$  и  $\tau_0$ , отвечающие рассматриваемой высоте, и вычислить значения  $c^*$  и  $v_{t0}$ .

2. По входным величинам  $c^*$ ,  $v_{t0}$  и  $\theta_0$  определить соответствующую этим величинам полную дальность.

3. Полученный результат, умноженный на отношение  $\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}$ , равен нормальной дальности для рассматриваемой высоты.

Применяя метод Ланжевена к вычислению времени полета и окончательной скорости, можно рекомендовать следующее правило:

1. По входным величинам  $c^*$ ,  $v_{t0}$ ,  $\theta_0$  определяем по сборнику соответствующие значения окончательной скорости и времени полета.

2. Полученный результат умножаем на  $\sqrt{\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}}$  и получаем значения  $T$  и  $v_e$ , отвечающие рассматриваемой высоте.

При вычислении высоты траектории и данных поправочных графиков стрельбы необходимо поступать так же, как при вычислении дальности, т. е. полученные по входным параметрам  $c^*$ ,  $v_{t0}$  и  $\theta_0$  величины умножить на отношение  $\frac{\tau_0}{\tau_{0N}}$ .

Что касается постановки опытных стрельб на дальность для определения баллистического коэффициента  $c$  или коэффициента формы  $i$ , то, конечно, эти стрельбы желательно провести в условиях, близких к тем, при которых будут применяться таблицы стрельбы. Однако постановка опытных стрельб в горах затруднительна. Точность проведения подобных стрельб на больших высотах будет, безусловно, значительно ниже стрельб, проводимых в нормальных условиях на полигоне. Поэтому для построения кривой  $c = f(\theta_0)$  целесообразнее воспользоваться данными обычных стрельб на дальность.

Рассмотренную в настоящем параграфе методику можно также применить при составлении специальных таблиц для стрельбы зимой при очень низких температурах, если признать применение подобных специальных таблиц целесообразным.

### § 153. Ошибки таблиц стрельбы

Обычно в таблицах стрельбы значения полных дальностей и поправок к ним даются с точностью до 1 м, угол прицеливания и падения — до 1 мин., время полета до 0,1 сек. и т. д. Не следует, однако, полагать, что указанные величины характеризуют действительную точность таблиц стрельбы. На точность таблиц стрельбы будут влиять ошибки большого числа факторов, определяющих условия проведения баллистических стрельб, а также ошибки баллистических расчетов. Так как источники, вызывающие эти ошибки, многочисленны, то можно рассматривать все ошибки, связанные с определением табличных данных, как случайные ошибки, подчиняющиеся закону Гаусса.

Эти ошибки можно сложить по правилу сложения случайных ошибок и получить суммарную ошибку таблиц стрельбы.

Рассмотрим источники ошибок, влияющих на точность определения дальности при проведении опытных стрельб.

#### Ошибка определения координат центра группирования снарядов

Директриса стрельбы разбивается на полигоне с большой точностью. Измерение координат точки падения при существующей методике засечки разрыва с трех пунктов (§ 138) производится с круговой ошибкой порядка 2 м. Эта ошибка пренебрежимо мала по сравнению с ошибкой, вызываемой рассеиванием снарядов. Величину  $B_d$  можно принять в среднем равной 0,5%, от полной дальности, что составляет для средних дальностей (6—8 км) величину порядка 30—40 м. Так как координаты центра группирования определяются 7—8 счетными выстрелами, то средняя ошибка среднего результата может быть принята равной

$R_x = \frac{B_d}{\sqrt{n}} = 0,18\%$ . Учитывая еще небольшие ошибки самого измерения, можно принять, что полная опытная дальность, отвечающая отдельной стрельбе, определяется со срединной ошибкой  $R_x = 0,2\%$  дальности.

#### Ошибка определения начальной скорости

При определении начальной скорости приходится учитывать, что помимо случайных для каждого выстрела ошибок, вызываемых неоднородным показанием хронографа и неоднородностью зарядов, будут иметь место еще систематические или повторяющиеся ошибки, вызываемые ошибками в измерении расстояния между рамами, в выверке хронографов, в определении температуры зарядов. Первые ошибки характеризуются величиной  $r_v$ , которая равна в среднем 1,5 м/сек. Вторые ошибки не связаны с величиной  $r_v$ . Они являются постоянными для данной стрельбы, но различными для различных стрельб. Обозначим срединную ошибку второго вида через  $\varepsilon_v$ . Эта ошибка в среднем равна 0,2%. Суммарную ошибку  $R_v$  получим из выражения

$$R_v = \sqrt{\frac{r_v^2}{n} + \varepsilon_v^2}.$$

Принимая для пушек  $r_v = 0,25\%$ , получим для семи счетных выстрелов

$$R_v = \sqrt{\frac{0,25^2}{7} + 0,2^2} = 0,22\%.$$

Для гаубиц, принимая  $r_v = 0,5\%$ , получим соответственно  $R_v = 0,27\%$ . В среднем можно принять срединную ошибку определения начальной скорости, равной 0,25%.

Таблица 41

№ п/п.	Источник ошибок	Величина ошибки	Ошибка X %
1	Ошибка определения дальности . . . . .	0,2%	0,20
2	Ошибка определения угла бросания . . . . .	2'	0,11
3	Ошибка определения начальной скорости . . . . .	0,25%	0,25
4	Ошибка определения температуры воздуха . . . . .	1°	0,20
5	Ошибка в 5% вычисления поправки на $\delta t$ (при среднем $\delta t = 10''$ ) . . . . .	—	0,10
6	Ошибка в определении скорости $W_x$ . . . . .	0,5 м/сек	0,15
7	Ошибка в 5% вычисления поправки на $W_x$ (при среднем $W_x = 7$ м/сек) . . . . .	—	0,10
8	Ошибка в определении давления . . . . .	1 мм	0,05
9	Ошибка в 5% вычисления поправки на $\delta h_0$ (при среднем $\delta h_0 = 10$ мм) . . . . .	—	0,02
Суммарная срединная ошибка $E_x = \sqrt{\sum E_i^2}$			0,45

### Ошибка определения угла бросания

Ошибка определения угла бросания зависит от ошибок определения угла вылета и угла возвышения. Угол возвышения устанавливается по квадранту со срединной ошибкой порядка 1,5'. Срединная ошибка определения угла вылета по данным опытов может быть принята примерно такой же. Таким образом суммарная срединная ошибка определения угла бросания

$$R_0 = 1,5\sqrt{2} = 2'.$$

### Ошибка определения метеорологических элементов

При средних условиях погоды и для методики определения метеорологических элементов, принятой на полигоне, можно принять следующие срединные ошибки определения метеорологических элементов:

$$R_{ax} = R_{az} = 0,5 \text{ м/сек}; \quad R_v = 1^\circ; \quad R_h = 1 \text{ мм}.$$

### Ошибки поправочных формул

Баллистические расчеты базируются на некотором, принятом за основной, законе сопротивления воздуха. Индивидуальные свойства каждого снаряда учитываются коэффициентом формы снаряда, подбираемого таким образом, чтобы согласовать расчетную дальность с опытом. Однако согласование дальности не обеспечивает еще согласования поправочных коэффициентов, вычисляемых при данном законе сопротивления воздуха. Численные значения поправочных коэффициентов, отвечающих одной и той же дальности, будут зависеть от закона сопротивления, при котором произведены вычисления поправок. Например, при вычислении поправок на температуру воздуха и на продольный ветер, исходя из законов сопротивления воздуха Сиаччи и Гарнье, получаются в среднем расхождение порядка 10%, причем поправки получаются меньшими для закона Гарнье. Так как законы сопротивления воздуха для наших снарядов являются средними между законами сопротивления воздуха Сиаччи и Гарнье, то можно принять, что неточный учет закона сопротивления воздуха вызывает ошибку при вычислении поправок, в среднем равную 5% от величины поправки.

### Суммарные ошибки стрельбы

Переводя указанные выше ошибки в относительные ошибки полной дальности, получим суммарную ошибку стрельбы, иначе говоря, суммарную ошибку в величине опытной, приведенной к нормальным условиям полной дальности. При этом учтем, что в среднем:

- а) изменению температуры на 1° отвечает изменение X на 0,20%;
- б) » давлению на 1 мм » » 0,05%;
- в) » начальной скорости на 1% » » 1,00%;
- г) » углу бросания на 1' » » 0,05%;
- д) продольному ветру скоростью в 1 м/сек » » 0,30%.

Таким образом получим (табл. 41).

Округляя, можно принять срединную ошибку стрельбы равной 0,5% от величины опытной дальности. Эта величина подтверждается при сравнении приведенных к нормальным условиям дальностей, отвечающих повторным стрельбам.

Величина ошибки стрельбы, определяемая по формуле (§ 143)  $E = \frac{\Delta X_{\max}}{2^2}$ , при обработке большого числа стрельб получается в среднем порядка 0,4% от величины полной дальности.

Французский баллистик Дюфренуа<sup>1</sup> принимает срединную ошибку стрельбы от 0,2 до 0,6%, что практически совпадает с подсчитанной выше величиной.

Так как опытные стрельбы на дальность обычно повторяются 4 раза в различные дни, то срединная ошибка среднего результата всех этих стрельб будет примерно в 2 раза меньше. Однако необходимо еще учесть ошибки вычислительного процесса, связанного с построением графика  $c = f(\delta t)$ , и непосредственного вычисления табличных данных.

Учитывая эти ошибки, можно принять срединную ошибку табличных дальностей, помещаемых в таблицах стрельбы, в 0,3–0,5% дальности. Очевидно, что в отдельных случаях действительные ошибки могут быть в несколько раз больше указанной срединной ошибки и что после напечатания таблиц стрельбы эта ошибка станет систематической.

Все это необходимо учесть при выработке правил стрельбы и при подсчете вероятности попадания и поражения целей.

### ОСОБЕННОСТИ СОСТАВЛЕНИЯ ТАБЛИЦ СТРЕЛЬБЫ ДЛЯ СТРЕЛКОВОГО ОРУЖИЯ

#### § 154. Директриса стрельбы и система наведения оружия

Стрельбы на дальность из стрелкового оружия проводятся по щитам для близких дальностей или по местности (песок, снег) для больших дальностей.

При стрельбе на близких дальностях до 1500 м по местности мы имели бы большое количество рикошетов, затрудняющих определение координат точек падения; поэтому стрельбу на эти дальности целесообразнее проводить по щитам. При стрельбе по местности на дальности, большие 1500 м, количество рикошетов сравнительно невелико. С другой стороны, стрельба по щитам на эти дальности потребовала бы постройки очень больших щитов, позволяющих перехватить весь эллипс рассеивания пуль. Поэтому стрельбу на большие дальности целесообразнее проводить по местности.

Директриса для стрельбы из стрелкового оружия по местности обычно выбирается на ровном песчаном побережье моря. Ровный и широкий морской пляж, периодически заливаемый благодаря морскому

<sup>1</sup> J. N. Bingen, La technique de l'artillerie, Deuxième édition, v. II, Balistique extérieure, p. 261.

прибою и приливам, приглаживаемый прибрежными ветрами, представляет собой идеальную директрису для стрельбы по местности лесом. На такой местности можно легко найти точки падения почти всех выпущенных пуль, а также, при некотором опыте, отделить нормальное падение пули от рикошета.

В зимних условиях хорошей директрисой для стрельбы по местности является поверхность широкой замерзшей реки, покрытой ровным слоем снега.

Так как длина директрисы обычно не превышает 4—5 км, то разбивка директрисы легко проводится провешиванием линии колес через 100 м. Расстояния вдоль директрисы от начала отсчета дальностей (от огневой позиции) измеряются стальной 20-метровой лентой. К каждому колу через 100 м пришивается табличка с указанием расстояния от огневой позиции. Устройство огневой позиции должно обеспечить одновременное ведение огня из двух станковых пулеметов. Пулеметы устанавливаются на массивных деревянных стеллажах, зарываемых в песок. В стеллажах выдалбливаются небольшие, выложенные войлоком, выемки для колес пулемета и для сошника.

Устройство огневой позиции должно обеспечить надежное определение угла бросания и угла возвышения при стрельбе из станкового пулемета. Трудность обеспечения надежной вертикальной наводки стан-



Черт. 110

кового пулемета заключается в том, что в противоположность артиллерийским системам в нем отсутствует параллельная ось канала контрольная площадка, позволяющая при помощи квадранта определить угол возвышения.

Кроме того, наводка по перекрестьям, наклеиваемым на казенный и дульный срезы, применяемая в артиллерии для выверки прицельных приспособлений, в данном случае сильно затруднена вследствие малого диаметра канала ствола оружия. При этих условиях наиболее надежным средством определения угла бросания при стрельбе из станкового пулемета является обмер превышения над дульным срезом пробоин в щите, устанавливаемом на расстоянии 15—25 м от пулемета. Для этого на огневой позиции устанавливается горизонтальная планка таким образом, чтобы дульный срез ствола при горизонтальном положении его оси находился непосредственно над горизонтальной планкой. Верхняя поверхность планки принимается за начало отсчета высот (черт. 110).

На расстоянии 15—20 м от огневой позиции устанавливается контрольный щит из деревянной рамы с наклеенными на ней бумажными листами, пронизываемыми пулями при стрельбе на дальность. У основания контрольного щита устанавливается горизонтальная планка, верхний срез которой находится строго на одной высоте с верхним срезом горизонтальной планки огневой позиции. Нивелировка двух горизонтальных планок производится при помощи обычного нивелира с точностью до 1—2 мм.

Пусть пулемету придан некоторый угол возвышения и произведена стрельба на дальность автоматическим или одиночным огнем. На бумажных листах контрольного щита получаются пробоины. Определим центр

группирования пробоин *B* и измерим превышение *H* центра группировки над горизонтальной планкой контрольного щита. Кроме того, измерим превышение *h* середины дульного среза над горизонтальной планкой огневой позиции. Если не учитывать понижения пули на участке от точки вылета до контрольного щита, то угол бросания найдется из выражения

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{H - h}{D}. \quad (17)$$

Понижение пули легко может быть учтено из выражения для свободного падения

$$s = \frac{gt^2}{2},$$

где

$$t = \frac{D}{v_0},$$

Таким образом получим при учете понижения пули

$$s = \frac{gD^2}{2v_0^2},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{H - h + \frac{gD^2}{2v_0^2}}{D}. \quad (18)$$

При скорости пули  $v_0 = 800$  м/сек и  $D = 20$  м второе слагаемое получается равным 0,00015, что отвечает углу в 0,5°.

Дадим оценку точности такого метода определения угла бросания. Так как второе слагаемое правой части формулы (18) весьма мало, то при оценке ошибки определения угла бросания можно исходить из выражения (17). Логарифмируя и дифференцируя равенство (17), получим

$$\frac{d \operatorname{tg} \theta_0}{\operatorname{tg} \theta_0} = \frac{d(H - h)}{H - h} - \frac{dD}{D}.$$

Подставляя значение  $\operatorname{tg} \theta_0$  из выражения (17), получим

$$d \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{d(H - h)}{D} - \frac{dD}{D} \operatorname{tg} \theta_0.$$

Превышение  $(H - h)$  центра группирования над центром дульного среза может быть определено с ошибкой порядка 0,5 см. С такой же ошибкой может быть определено расстояние *D* от дульного среза до контрольного щита. Таким образом для угла бросания  $\theta_0 = 5^\circ$  и для расстояния *D* = 20 м

$$d \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{0,5}{2000} - \frac{0,5}{2000} 0,087.$$

Второе слагаемое мало по сравнению с первым. Поэтому ошибка определения угла бросания будет целиком зависеть от первого слагаемого. В данном случае эта ошибка будет равна  $d \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{1}{4000}$ , что отвечает угловой ошибке в 1'. Таким образом угол бросания может быть определен с достаточной степенью точности.

Для обработки результатов стрельбы на дальность достаточно ограничиться знанием угла бросания. Однако для облегчения наводки и накопления опытного материала по определению угла вылета желательно иметь возможность независимо от угла бросания определять и устанавливать угол возвышения. Угол возвышения можно определять при помощи квадранта, устанавливаемого на коробке пулемета Максим.

Как показывает опытная поверка, непараллельность крышки короба оси ствола обычно не превосходит 3—4'. Эту ошибку необходимо определить и ввести соответствующую поправку в установку квадранта. Для определения ошибки квадранта, вызываемой непараллельностью крышки короба оси канала ствола, поступают следующим образом:

1. В ствол пулемета вставляется специальный прибор — оптический осенскатель, позволяющий навести ось канала ствола в отмеченную точку О контрольного щита. Совпадение оптической оси осенскателя с осью канала ствола проверяется путем поворота осенскателя в канале ствола на 180°.

2. Определяется превышение  $H$  точки наводки над горизонтальной планкой контрольного щита и превышение  $h$  центра дульного среза над горизонтальной планкой огневой позиции; угол возвышения определяется из выражения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{H - h}{D}.$$

3. На точно очерченное место крышки короба устанавливается квадрант, позволяющий производить отсчеты углов с точностью в 1', и записывается установка квадранта  $\varphi_1$ .

4. Ошибка от непараллельности крышки короба оси канала ствола найдется из выражения

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_1.$$

5. Подобная поверка повторяется 4—5 раз и определяется среднее значение  $\Delta\varphi$ .

В дальнейшем необходимо к отсчитываемым по квадранту значениям угла возвышения добавлять алгебраически полученную поправку  $\Delta\varphi$ . Так как при каждой стрельбе будут определяться независимо угол бросания  $\theta_0$  и угол возвышения  $\varphi$ , то нет надобности в постановке специальных стрельб для определения угла вылета, который получается как разность этих двух углов. Если желательно непосредственно определить угол вылета, то поступают, как указано в § 141, наводя ось канала при помощи осенскателя.

### § 155. Организация и проведение стрельб на дальность

Стрельбы на дальность целесообразно проводить только из станкового пулемета, так как эти стрельбы могут быть проведены с наибольшей тщательностью в смысле точности наведения оружия. Что касается других образцов стрелкового оружия: винтовка, автоматическая винтовка, ручной пулемет, то основные табличные данные для них можно вычислить с достаточной точностью, базируясь на значениях баллистического коэффициента, определенных обработкой стрельб из станкового пулемета. Необходимо только для этих образцов оружия определить угол вылета и учесть разницу табличных начальных скоростей для различных образцов стрелкового оружия (эта разница обычно бывает порядка 20—30 м/сек).

Стрельбы на дальность достаточно проводить для 5—6 дальностей. Можно рекомендовать проводить стрельбу на дальности 500, 800 и 1500 м по щитам и на дальности 1500, 2000, 3000 и 4000 м по местности. Стремление увеличить число отстреливаемых дальностей, особенно на близкие дальности, не только не приносит никакой пользы, но может даже ухудшить результаты обработки опытных стрельб.

Проводимые часто стрельбы на дальности 100—300 м имеют назначением поверку правильности накатки шкалы прицела, высоты мушки и правильности выбранного угла вылета, но не должны быть исполь-

зованы для определения баллистического коэффициента, так как это приводит к очень большим ошибкам.

Это легко показать, если сопоставить относительные ошибки  $(\frac{\delta X}{X})_0$  в дальности, отвечающие угловой ошибке угла бросания в 1', с относительными ошибками  $(\frac{\delta X}{X})_c$  в дальности, отвечающими ошибке баллистического коэффициента в 1% (табл. 42).

Таблица 42

Дальности, м	300	500	700	1000	1500	2000
Относительная ошибка $(\frac{\delta X}{X})_0$ в %, отвечающая $\frac{\delta\varphi}{\varphi} = 1'$	8,30	3,90	2,12	0,90	0,34	0,20
Относительная ошибка $(\frac{\delta X}{X})_c$ в %, отвечающая $\frac{\delta C}{C} = 1\%$	0,20	0,30	0,37	0,46	0,51	0,52
Отношение $(\frac{\delta X}{X})_0 : (\frac{\delta X}{X})_c$	41,5	13,0	5,7	2,0	0,7	0,4

Полагая срединную ошибку угла бросания равной 1' и рассматривая последнюю строку табл. 42, видим, что при стрельбе на дальность  $X=300$  м значение баллистического коэффициента определяется с относительной срединной ошибкой, равной 41,5%. Соответствующая ошибка для дальностей 500, 700 и 1000 м получится равной 13,0; 5,7 и 2,0%. Отсюда очевидна нецелесообразность баллистических стрельб на дальности, меньшие 500 м. С другой стороны, для малых дальностей кривизна траектории невелика и мало меняется. Поэтому нет никаких физических факторов, которые вызывали бы сколько-нибудь существенное изменение баллистического коэффициента при переходе от дальности 800 м к меньшим дальностям, и можно на этом интервале дальностей считать баллистический коэффициент постоянным.

Отстрел на дальности 1500 м целесообразно проводить и по щитам и по местности. Сравнение результатов стрельб по щитам и по местности после приведения результатов стрельб к нормальным условиям позволяет избежать аномальных ошибок в проведении и обработке опытных стрельб и получить оценку точности проведения опытов.

Стрельбы на дальность ведутся из двух пулеметов автоматическим огнем очередями по 15—20 выстрелов при стрельбе по щитам и 30—40 выстрелов при стрельбе по местности.

Различного типа пули (легкая, тяжелая, бронебойная и т. д.) отстреливаются непосредственно одна за другой, чем обеспечивается однобразие условий отстрела этих пуль. Таким образом при определенной установке угла возвышения по квадранту отстреливают пули всех типов по 1—2 очереди для каждой пули и каждого пулемета, и после обмера пробоин на контрольном щите для определенного угла бросания переходят к стрельбе при следующем угле бросания. Стрельбы повторяются 3—4 раза в различные дни.

Ежедневно после проведения стрельб на дальность оружие отправляется в баллистическую лабораторию для определения начальной скорости. Методика определения начальной скорости такая же, как и для артиллерийских систем. Разница заключается только в том, что вместо проволочных рам применяются фольговые рамы (фольговые полоски, наклеенные на бумажные мишени).

### § 156. Определение координат центров группирования и величин, характеризующих рассеивание

Для облегчения и ускорения работы по определению координат пробоин при стрельбе по щитам последние расчерчиваются горизонтальными и вертикальными линиями на клетки  $10 \times 10$  см или  $20 \times 20$  см. Клетки нумеруются в определенном порядке. Клетки с такой же нумерацией имеются на специальных бланках. Запись координат производится следующим образом. «Съемщик» отыскивает на щите пробоины и диктует записывающему: «квадрат 23—12, левый верхний угол», или «квадрат 19—11, центр» и т. д. Записывающий ставит в бланке в указанном месте условную метку. Остальная обработка производится в помещении.

Для определения координат центра группирования пробоин проводятся на бланке две прямые — горизонтальная и вертикальная, каждая из которых делит число пробоин пополам. Пересечение этих прямых принимается за центр группирования пробоин. Так как стрельбы на дальность производятся не прямой наводкой, а при определенных значениях угла бросания, то отсчет координат центра группирования должен производиться по отношению к горизонтальной плоскости, проходящей через середину дульного среза. Для этого на щите путем нивелировки наносится горизонтальная линия на одинаковой высоте с горизонтальной планкой огневой позиции. Эта же линия прочерчивается и на бланке, на который переносятся точки пробоин.

Зная превышение  $h$  дульного среза относительно горизонтальной планки огневой позиции и определив на бланке превышение  $H$  центра группирования над горизонтальной нивелировочной линией, получим превышение  $(H - h)$  центра группирования относительно горизонта дульного среза. Положение же центра группирования относительно плоскости бросания в боковом направлении определяется только при стрельбе для определения деривации (§ 157).

Для определения величин, характеризующих рассеивание,  $B_v$ ,  $B_d$  и  $B_b$ , выделяют на бланке горизонтальными и вертикальными прямыми центральные полосы, отделяющие 50% пробоин. Величина  $B_v$  принимается равной половине горизонтальной полосы, а величина  $B_b$  — половине вертикальной полосы. Величина  $B_d$  вычисляется из выражения

$$B_d = B_v \operatorname{ctg} |\theta_e|.$$

Определение координат центров группирования и величин, характеризующих рассеивание при стрельбе по местности, целесообразно проводить следующим образом.

После отстрела определенной очереди обмерщики находят точки падения и втыкают в точки падения колышки определенного цвета и формы. При наличии колышков различных цветов и форм можно выпустить несколько очередей, отмечая каждую очередь колышками определенной формы и цвета, и производить обмер координат после 5—6 очередей. Для определения координат центра группирования и величин  $B_d$  и  $B_b$  обмерщик определяет на глаз положение большой оси эллипса рассеивания и, двигаясь вдоль этой оси, отсчитывает 25, 50, 75 и 100% точек падения, отмечая соответствующие места колышками.

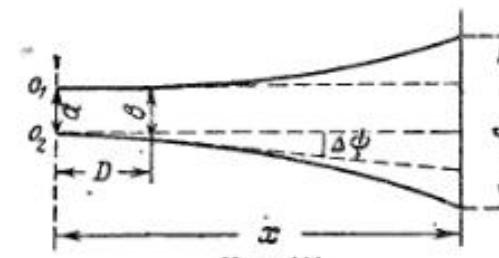
Аналогичным образом производится обмер в направлении, перпендикулярном плоскости стрельбы. Определение координат центра группирования точек падения производится путем обмера стальной лентой расстояния до прошитой колышами директрисы стрельбы и вдоль директрисы до ближайшего кола. Обмер центральных полос, содержащих 50% пробоин, производится на местности стальной лентой или рулеткой.

### § 157. Стрельбы из стрелкового оружия для определения деривации

Для определения деривации необходимо организовать одновременные стрельбы из двух пулеметов со стволами правой и левой нарезки. При определении деривации особенно важное значение имеет большая точность боковой наводки. Так как в условиях стрельбы из стрелкового оружия этого трудно добиться, то определение углов боковой наводки следует базировать на обмере пробоин в контрольном щите. Схема проведения стрельб рекомендуется следующая.

Пулеметы располагаются таким образом, чтобы пулемет с левой нарезкой был слева, а пулемет с правой нарезкой — справа. Подобное расположение поможет избежать взаимного наложения эллипсов рассеивания двух пулеметов (черт. 111).

Пулеметы наводятся примерно параллельно друг другу при помощи обычных прицельных приспособлений и при одной и той же установке



Черт. 111

угла возвышения производится одновременная стрельба по щиту или по местности в зависимости от расстояния. Для обработки результатов стрельбы необходимо измерить:

- а) расстояние в боковом направлении между центрами дульных срезов  $a$ ;
- б) расстояние в боковом направлении между центрами группирования пробоин на контрольном щите  $b$ ;
- в) расстояние в боковом направлении между центрами группирования пробоин на дальнем щите (или на местности)  $f$ ;
- г) расстояние в направлении стрельбы до контрольного щита  $D$ ;
- д) расстояние в направлении стрельбы до дальнего щита или среднее расстояние до центров группирования точек падения при стрельбе по местности  $X$ .

Так как для расстояния  $D$  до контрольного щита (20—30 м) деривация может быть принята равной нулю, то угловое расхождение  $\Delta\phi$  между плоскостями стрельбы двух пулеметов легко определить из выражения

$$\operatorname{tg} \Delta\phi = \frac{b - a}{D}.$$

Этому угловому расхождению отвечает расхождение центров группирования на дальнем щите

$$Z_1 = X \operatorname{tg} \Delta\phi = (b - a) \frac{X}{D}.$$

Вычитая  $Z_1$  из  $f$ , получим удвоенную величину диверсии. Таким образом

$$Z_x = \frac{1}{2} [f - (b-a) \frac{X}{D}] .$$

Влияние ветра при этом автоматически исключается. Стрельбы для определения диверсии достаточно проводить для 3—4 дальностей, начиная от  $X=800$  м и до наибольшей, повторяя каждую стрельбу троекратно в различные дни. Срединная угловая ошибка определения диверсии при такой схеме проведения стрельб может быть принята равной  $1'$ .

#### § 158. Вычисление основных табличных данных

Так как стрельбы на дальность из стрелкового оружия проводятся обычно при углах бросания, не превосходящих  $15^\circ$ , то приведение результатов стрельб к нормальным условиям может быть произведено при помощи приближенных поправочных формул, отвечающих методу Сиаччи.

Предварительно результаты щитовых стрельб приводятся к горизонту оружия, иначе говоря, вводится поправка к углу бросания на превышение центра группирования пробоин над горизонтом оружия. Пусть превышение центра группирования пробоин над дульным срезом оружия равняется  $(H-h)$  (§ 156) и расстояние от огневой позиции до щита равно  $X$ ; тогда угол места центра группирования пробоин определится из выражения

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{H-h}{X} .$$

Пусть установка угла бросания, определенная по контрольному щиту, равна  $\theta_0$ . Нетрудно видеть, что положение центра группирования на горизонте оружия отвечает углу бросания  $\theta_0 - \varepsilon$ . Этот угол бросания принимается к дальнейшей обработке. В остальном обработка результатов стрельб по щитам и по местности проводится совершенно одинаково следующим образом:

а) определяется поправка на изменение барометрического давления по формуле

$$\delta X_h = -X(1-\gamma) \frac{\varepsilon h_0}{750}, \quad \text{где } \gamma = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\operatorname{tg} \theta_d};$$

б) находится поправка на баллистическое изменение температуры по формуле

$$\delta X_t = X \left(1 - \frac{1}{2} f_{v_0} \right) \frac{\delta t_B}{289};$$

в) определяется поправка на отклонение начальной скорости от табличной по формуле

$$\delta X_{v_0} = X f_{v_0} \frac{\delta v_0}{v_0};$$

г) определяется поправка на продольный ветер по формуле

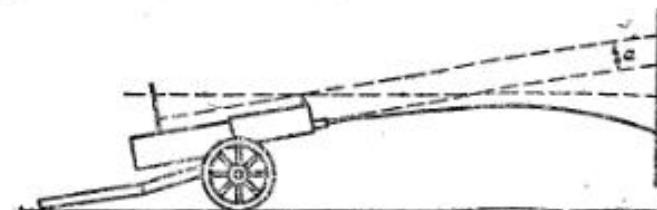
$$\delta X_w = W_x \left( T - \frac{X}{v_0} f_{v_0} \cos \theta_0 + \frac{X \cos 2\theta_0}{\cos^2 \theta_0 \operatorname{tg} \theta_d} - \frac{\sin \theta_0}{v_0} \right).$$

После вычисления всех поправок определяем приведенную к нормальным условиям дальность из выражения

$$X = X_{\text{оп}} - \sum \delta X_i .$$

Методика согласования баллистических расчетов с данными стрельб на дальность и вычисления основных табличных данных ничем принципиально не отличается от указанной в § 148. При вычислении установок углов прицеливания, отвечающих дальностям до 500 м, необходимо учесть превышение  $a$  нулевой линии прицеливания над осью канала ствола (черт. 112). Это превышение равно 10,2 см для пулемета Максим и около 5 см для ручных пулеметов.

Войсковые стрельбы из стрелкового оружия производятся, как правило, прямой наводкой; поэтому при установке угла прицеливания,



Черт. 112

равного разности угла бросания и угла вылета, вся действительная траектория пойдет ниже расчетной на величину понижения оси канала под нулевой линией прицеливания.

Для того чтобы стрелою при наводке в цель попадал в точку наводки, необходимо при нарезке прицела к установке угла прицеливания добавить угол, под которым превышение  $a$  видно при данной дальности. Этот угол определяется из выражения

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{X} .$$

Так, например, для пулемета Максим получим следующие угловые поправки:

$X$	100	200	300	400	500
$\beta$	3,5'	1,8'	1,2'	0,9'	0,7'

Таким образом численные значения угла прицеливания, по которым производится нарезка прицела, должны определяться из выражения

$$\alpha = \theta_0 - \gamma + \beta,$$

где  $\gamma$  — угол вылета и  $\beta$  — угол, под которым виден отрезок  $a$  с данного расстояния.

Табличные данные для ручных пулеметов и винтовок, для которых стрельбы на дальность не проводились, вычисляются на основании значений  $\epsilon$ , полученных для станкового пулемета, с учетом разницы в начальных скоростях и в углах вылета.

#### § 159. Вычисление табличных данных для стрельбы из стрелкового оружия по воздушным целям

Существует мнение, что для составления таблиц стрельбы из стрелкового оружия по воздушным целям необходимо организовать специальные опытные стрельбы в горах при больших углах места. Покажем, что это заблуждение. Прежде всего отметим, что опытные стрельбы

на дальность служат для определения значений баллистического коэффициента или коэффициента формы. Вследствие неточного соответствия табличного закона сопротивления воздуха данному типу снаряда, а также наличия возмущающих влияний от вращательного движения снаряда значения коэффициента формы меняются в зависимости от угла бросания. Это изменение баллистического коэффициента для данной начальной скорости не выходит из границ  $10^{\circ}$ .

Стрельба из стрелкового оружия (калибра 7,62 мм) по воздушным целям может считаться действительной на дальности, не превышающие 1000 м; поэтому и таблицы стрельбы должны составляться для наклонных дальностей до 1000 м.

Рассмотрим пучок траекторий, ограниченный этой наклонной дальностью. При начальной скорости пули порядка 800 м/сек сила сопротивления воздуха в 58 раз больше веса пули. Если учесть, что на расстоянии 1000 м от точки вылета скорость пули падает до 340 м/сек, и исходить из средней скорости  $\frac{800+340}{2} = 570$  м/сек, то в среднем сила сопротивления воздуха получится в 33 раза больше веса пули. Таким образом изменение скорости пули в зависимости от наклонной дальности зависит почти исключительно от силы сопротивления воздуха и, следовательно, будет примерно одинаковым для всех траекторий нашего пучка.

Кривизна всех траекторий будет малой, так как наибольшее расстояние точек траектории до линии прицеливания получается равным 5 м. Таким образом условия полета для всех траекторий будут идентичны, и нет основания ожидать сколько-нибудь существенного изменения баллистического коэффициента при изменении угла места цели. Допустим, однако, наихудший и маловероятный случай, что баллистический коэффициент может отличаться на  $10^{\circ}$  от баллистического коэффициента, определенного по наземным стрельбам. Посмотрим, к каким ошибкам угла прицеливания это приведет.

Напишем уравнение траектории в виде разложения в ряд по степеням  $x$  (§ 65, формула 48).

Рассматривая третье слагаемое как остаточный член разложения и вычисляя  $y''$  для  $v_{cp} = 570$  м/сек, получим

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx^2}{2u_0^2} - \frac{gx^3}{3u_0^3} cG(v_{cp}).$$

Изменение  $y$ , отвечающее изменению баллистического коэффициента, найдем, дифференцируя обе части последнего равенства, полагая  $u$  и  $c$  переменными,

$$\delta y = -\frac{gx^3}{3u_0^3} G(v_{cp}) \delta c.$$

Учитывая, что вследствие малой кривизны траектории

$$x = D \cos \varepsilon \approx D \cos \theta_0; \quad u_{cp} = v_{cp} \cos \theta_{cp} \approx v_{cp} \cos \theta_0,$$

где  $D$  — наклонная дальность, получим

$$\delta y = -\frac{gD^3}{3u_0^3} G(v_{cp}) \delta c = -\frac{gD^3}{3v_{cp}^4} F(v_{cp}) \delta c.$$

Отклонение по нормали к траектории  $\delta N \approx \delta y \cos \theta_0$ . Соответствующая угловая ошибка  $\delta x$  получится из выражения

$$\operatorname{tg}(\delta x) = \frac{\delta y \cos \theta_0}{D} = -\frac{gD^2}{3v_{cp}^4} \cos \theta_0 F(v_{cp}) \delta c.$$

Подлагая  $D = 1000$  м,  $v_{cp} = 570$  м/сек,  $\theta_0 = 45^\circ$ ,  $c = 3,0$ ,  $\delta c = 0,1$ ,  $c = 0,3$ , получим

$$\operatorname{tg}(\delta x) = -\frac{9,81 \cdot 1000^2}{3 \cdot 570^4} \cdot 112,4 \cdot 0,706 \cdot 0,3 = 0,00073; |\delta x| = 2,5'.$$

Если взять наклонную дальность  $D = 500$  м и  $v_{cp} = 660$  м/сек, получим

$$\operatorname{tg}(\delta x) = -\frac{9,81 \cdot 500^2}{3 \cdot 660^4} \cdot 145 \cdot 0,706 \cdot 0,3 = 0,00013; |\delta x| = 0,5'.$$

Таким образом полученная ошибка в худшем случае не превзойдет одной тысячной. Если же ставить специальные стрельбы в горах, то необходимо учесть, что сама обстановка проведения опытов не позволит организовать опытные стрельбы с той степенью тщательности, с какой это проводится в нормальных условиях полигона. В условиях нормальных полигонных стрельб при наиболее тщательной методике проведения стрельб срединная ошибка вертикальной наводки равна  $1-2'$ . В условиях стрельбы в горах эта ошибка будет в 2-3 раза больше, чем и перекроет подсчитанные выше ошибки.

Таким образом ввиду отсутствия достаточно надежной методики организации отстрелов траекторий стрелкового оружия при больших углах места можно рекомендовать пользоваться данными наземных стрельб для дальности 1000 м. Для этой дальности надо подобрать такой баллистический коэффициент, чтобы при расчете траектории по методу численного интегрирования расчетная дальность совпадала с опытной, приведенной к нормальным условиям. Пользуясь этим значением баллистического коэффициента, можно рассчитать траектории тем же методом численного интегрирования для углов бросания через  $10$  или  $15^\circ$ , а для остальных углов бросания получить элементы траектории путем интерполяции.

Можно поступить еще и иначе: на основании рассчитанных траекторий вычислить зависимость угла прицеливания и времени полета от угла места цели для различных наклонных дальностей и составить таблицы поправок к табличным данным наземных таблиц.

#### ОСОБЕННОСТИ СОСТАВЛЕНИЯ ТАБЛИЦ СТРЕЛЬБЫ ЗЕНИТНОЙ АРТИЛЛЕРИИ

##### § 160. Постановка задачи. Отстрел траекторий

При составлении таблиц стрельбы полевой артиллерии нам приходится определять элементы одной точки траектории — точки падения — и в отношении этой точки согласовывать данные расчетов с результатами опытных стрельб.

Задача составления таблиц стрельбы зенитной артиллерии имеет те существенные особенности, что при ее решении необходимо согласовать результаты расчетов с данными опытов для всех точек траекторий. Это обстоятельство существенно меняет как характер постановки и обработки опытных стрельб, так и способы баллистических расчетов для определения элементов траектории и их согласования с данными опытных стрельб.

Практическая потребность в согласовании всех точек траектории с данными опытных стрельб вытекает из следующих соображений. Как мы указывали во введении, при решении основной задачи внешней баллистики приходится делать некоторые допущения, не вполне оправдывающиеся в действительности. Таково допущение о том, что сила сопротивления воздуха направлена по касательной к траектории и не зависит от характера вращательного движения снаряда. Так как в действительности сила сопротивления воздуха зависит от величин углов  $\delta$  и  $\gamma$ ,

определяющих вращательное движение оси снаряда, то, кроме касательной составляющей, будем иметь еще нормальную и боковую составляющие силы сопротивления воздуха. Боковая составляющая, не влияя на координаты центра массы снаряда в плоскости стрельбы, вызывает боковое отклонение снаряда или диверсию. Что касается нормальной составляющей, то, не будучи учитываема при решении основной задачи внешней баллистики, она, естественно, должна вызвать некоторое отклонение в плоскости стрельбы действительной траектории снаряда от получающейся на основании расчетов.

При составлении таблиц стрельбы по наземным целям это расхождение не вызывает особых затруднений практического порядка. Так как полная дальность  $X$  является непрерывной функцией параметров  $c$ ,  $v_0$  и  $\theta_0$ , то всегда можно подобрать такое значение коэффициента  $t$ , входящего в выражение для баллистического коэффициента, при котором расчетная дальность будет равна получающейся на опыте дальности.

Таким образом согласуется дальность точки падения. Некоторое расхождение координат остальных точек траекторий не имеет существенного значения при стрельбе по наземным целям. При составлении же таблиц стрельбы зенитной артиллерии эти отклонения необходимо учесть. При согласовании траекторий по одной точке расхождение остальных точек может получиться порядка нескольких десятков метров — по высоте на восходящей ветви траектории и до 100 и более метров — на нисходящей. Расхождение времени полета может получиться порядка 1 сек. Очевидно, что пренебрегать такими расхождениями нельзя. Поэтому при составлении зенитных таблиц стрельбы необходимо иметь возможность получить опытным путем значения координат и времени полета для различных точек траектории и согласовать для этих точек данные баллистических расчетов с опытными данными, т. е. нужно уметь организовать отстрел траекторий и обработать опытные данные для получения элементов таблиц стрельбы зенитной артиллерии.

В настоящее время получение основных опорных координат для составления таблиц стрельбы производится исключительно стереофотограмметрическим методом, сущность которого заключается в следующем.

Стрельба ведется шрапнелью или гранатой с дистанционной трубкой при различных углах бросания и установках трубы. Разрывы фотографируются одновременно двумя фототеодолитами, установленными на концах точно измеренной базы, под определенным углом к горизонту и соответствующим образом взаимно ориентированными. Координаты точек разрывов определяются при помощи обработки на компьютере фотоснимков, а время полета — непосредственно по секундомеру, и таким образом получаются опорные точки опытных траекторий. Все стрельбы должны обслуживаться метеорологической станцией, которая определяет давление, температуру и ветер в различных слоях атмосферы до максимальной высоты полета снаряда. Полученные из опыта координаты точек траекторий и времена полета приводятся к нормальным метеорологическим условиям, и эти приведенные опытные данные принимаются как основные опорные данные для построения и согласования в пространстве и времени всего пучка траекторий, а также для составления таблиц стрельбы.

### § 161. Стереофотограмметрический метод построения траекторий

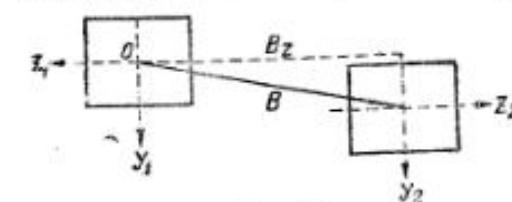
Фототеодолиты (черт. 113), применяемые для фотографирования разрывов, имеют постоянные фокусные расстояния и устроены таким образом, что на пластинках при съемке фотографируются ориентирные метки, определяющие положение двух взаимно перпендикулярных осей  $oz$  и  $oy$ , из которых ось  $oz$  всегда горизонтальна (черт. 114—116).

Фокусное расстояние теодолита около 400 мм. Размер пластинок  $13 \times 18$  см. Оптическая ось камеры всегда перпендикулярна плоскости пластины и проходит через пересечения осей  $oz$  и  $oy$ . Кроме того, на рамке имеются следующие отметки, дающие отпечатки на пластинке: установка горизонтального и вертикального лимбов, фокусное расстояние прибора, номер группы, буква, обозначающая прибор, и одно запасное гнездо для дополнительных отметок. Наличие таких отметок гарантирует от путаницы при обработке пластинок, относящихся к различным стрельбам (см. черт. 118).

Фототеодолиты имеют приспособления для взаимного ориентирования и снабжены горизонтальным и вертикальным лимбами, позволяющими установить оптическую ось фотокамеры под произвольным углом к горизонту, а плоскость вертикального лимба — под произвольным углом к базе.

Точность отсчетов по лимбам теодолитов — 1 мин. С горизонтальным лимбом наглухо связана визирная труба, служащая для взаимного ориентирования теодолитов. Линия визирования зиральной трубы направлена по диаметру  $90 - 270^\circ$ , так что при взаимном визировании обоих теодолитов, установленных на концах базы, и при нулевых установках по горизонтальному лимбу плоскости вертикальных лимбов будут параллельны друг другу и перпендикулярны горизонтальной базе. Под базой  $B$  будем понимать отрезок прямой, соединяющей точки пересечения осей  $oz$  и  $oy$  на пластинах обоих теодолитов. Под горизонтальной базой  $B_z$  будем понимать проекцию базы на горизонтальную плоскость или, что то же самое, на ось  $oz$ .

Черт. 113. Фототеодолит. Обозначения:  
1 — фотокамера; 2 — объектив; 3 — вертикальный лимб; 4 — электромагнит затвора; 5 — рама; 7 — горизонтальный лимб; 8 — оптическая труба для взаимного визирования теодолитов; 9 — микроскоп; 11 — тренога



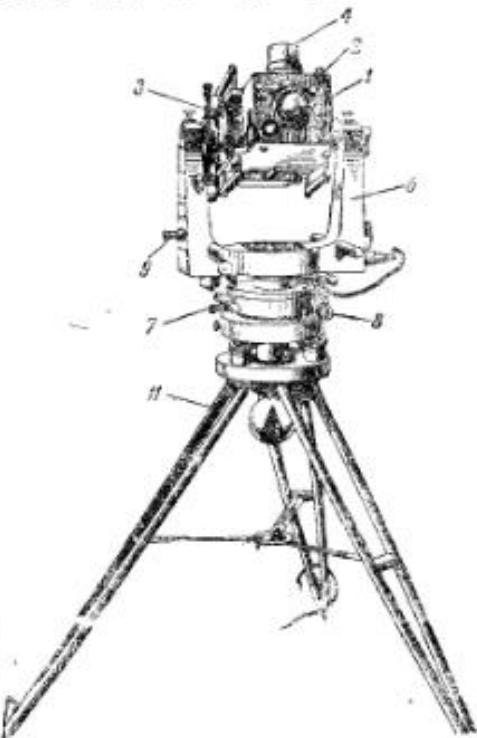
Черт. 114

параллельны, единаково направлены и перпендикулярны к горизонтальной базе;

б) оси  $oz$  и  $oy$  обеих пластинок были параллельны между собой, а оси  $oz$  еще и горизонтальны.

При таком положении осей пластины будут лежать в одной плоскости. Положительные отрезки осей  $oz$  обеих пластинах удобнее направлять в противоположные стороны, а положительные отрезки оси  $oy$  — в одну сторону вниз, как показано на черт. 114.

Будем определять пространственные координаты фотографируемой точки разрыва в системе координат  $ZYE$ , имеющей начало в центре объектива одного из теодолитов.



Направим ось  $OZ$  параллельно оси  $o_1z_1$  пластиинки в направлении на другой теодолит, ось  $OY$  — параллельно оси  $o_1y_1$  в противоположную сторону и ось  $OE$  — перпендикулярно плоскости  $ZOY$ , т. е. по оптической оси камеры в направлении на фотографируемую точку (черт. 115—117).

Спроектируем схему съемки на плоскость  $ZOE$  (черт. 116). Из подобия соответствующих треугольников получим

$$\frac{Z}{z_1} = \frac{E}{f}; \quad \frac{E}{f} = \frac{B_z}{z_1 + z_2};$$

отсюда

$$E = \frac{B_z f}{z_1 + z_2}; \quad Z = \frac{B_z z_1}{z_1 + z_2}.$$

Таким же образом, проектируя схему съемки на плоскость  $YOE$ , получим

$$Y = \frac{E}{f} y_1 = \frac{B_z y_1}{z_1 + z_2}.$$

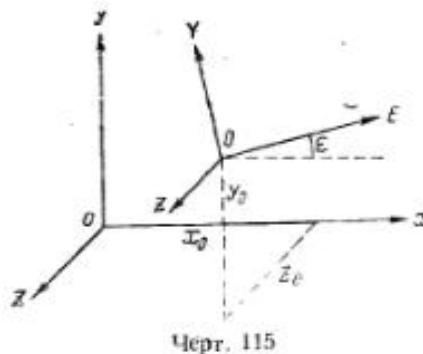
Величину  $z_1 + z_2$ , определяющую при данных значениях  $f$  и  $B_z$  величину проекции расстояния  $E$  фотографируемой точки  $S$  от  $O$ , называют параллаксом точки  $S$ . Таким образом можно получить координаты фотографируемой точки в координатной системе  $ZYE$ , связанной с положением одного из теодолитов. Для того чтобы положение указанной точки определить по отношению к обычной системе координат, связанной с орудием, необходимо знать в отношении к данной системе координат начала и положение осей  $ZYE$  и подсчитать координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  по обычным формулам для преобразования координат.

Для нормального случая съемки, когда плоскость вертикального лимба и плоскость стрельбы перпендикулярны к горизонтальной базе плоскости  $YOE$  и  $xy$  параллельны, и формулы для преобразования координат могут быть написаны в следующем виде:

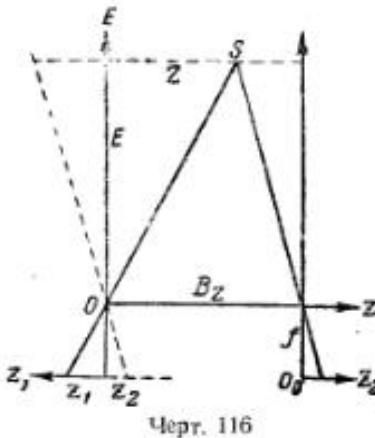
$$x = x_0 + E \cos \varepsilon - Y \sin \varepsilon = x_0 + \frac{B_z f}{Z_1 + Z_2} \cos \varepsilon - \frac{B_z y_1}{Z_1 + Z_2} \sin \varepsilon;$$

$$y = y_0 + E \sin \varepsilon + Y \cos \varepsilon = y_0 + \frac{B_z f}{Z_1 + Z_2} \sin \varepsilon + \frac{B_z y_1}{Z_1 + Z_2} \cos \varepsilon;$$

$$z = z_0 + Z_1 = z_0 + \frac{B_z Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$



Черт. 115



Черт. 116

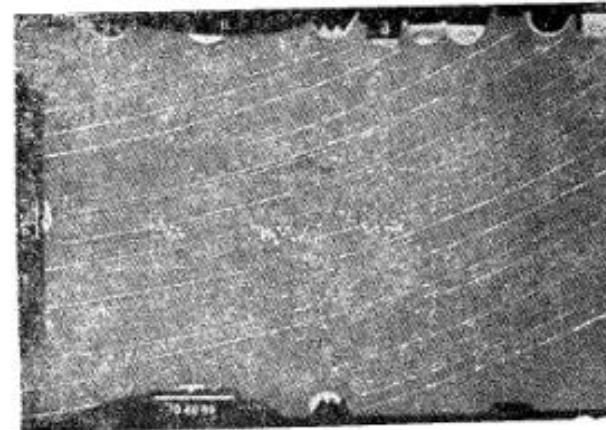
В этих формулах  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  — координаты центра объектива основного теодолита в системе координат, связанной с орудием, а  $\varepsilon$  — угол наклона оптической оси того же фототеодолита к горизонту. Координаты  $z_1$ ,  $y_1$ ,  $z_2$  и  $y_2$  — изображения фотографируемой точки на пластинах — определяются на специальных компараторах.

### § 162. Организация и проведение отстрелов траекторий

Перед постановкой отстрелов траекторий или после их проведения должны быть организованы стрельбы для определения начальной скорости и угла вылета обычными методами. Подготовка орудий и боеприпасов к стрельбе производится, как указано в § 136—137.

Отстрел траекторий обычно производится ночью, так как фотографирование разрывов в дневное время затруднительно. При фотографировании ночью объективы могут оставаться открытыми во все время стрельбы и на одну пластинку можно заснять несколько групп разрывов.

Для упрощения дальнейшей обработки результатов базу следует разбивать перпендикулярно к директрисе стрельбы. Величина базы



Черт. 118

выбирается в зависимости от удаления фотографируемых разрывов, в среднем порядка 500 м. Точки стояния аппаратов выбираются по обе стороны от директрисы стрельбы на равных по возможности расстояниях от нее и на одной высоте. Оптические оси аппаратов устанавливаются перпендикулярно к базе и под одним и тем же углом к горизонту. Для определения необходимого угла наклона аппаратов, отвечающего различным группам разрывов, должны быть предварительно подсчитаны приближенные значения угла места, отвечающего ожидаемому положению разрывов (черт. 118). Стрельба ведется обычно при 5—6 углах возвышения в пределах 30°—75° и при 5—6 установках трубки, отвечающих преимущественно восходящей ветви траекторий. При каждой установке трубки производится около 10 выстрелов. Каждая стрельба повторяется, как правило, трижды в различные дни. Время полета определяется по секундомеру, пускаемому в ход при выстреле и останавливаемому вручную при появлении разрыва.

При некоторой тренировке секундомерщика ошибка в определении времени полета снаряда обычно не превосходит 0,05 сек. Для большей надежности результатов определения времени полета следует работу секундомерщика дублировать. Для объективной регистрации времени полета снаряда применяется специальный прибор — фотореле.

Для контроля правильности установок аппаратов во время стрельбы целесообразно перед выниманием кассет из аппаратов заснять какую-либо точку, координаты которой известны с достаточной степенью точности. Такой точкой может служить любая звезда. При ночной стрельбе объективы остаются открытыми продолжительное время, и звезды чертят на пластинах свои пути в виде сплошных линий. Поэтому для получения изображения звезд в виде точек рекомендуется перед началом съемки произвести одновременно при помощи электромагнитного звукового момента снимок неба с боими аппаратами, а затем после выдержки в несколько минут открыть объективы и начать стрельбу.

После стрельбы пластиинки проявляются; парные негативы обрабатываются на кинопаттере и определяются для каждой группы разрывов координаты каждого разрыва в системе координат, связанный с директрисой стрельбы. По полученным координатам определяются координаты центра группирования и размеры эллипсона рассеивания. Координаты центра группирования и время полета приводятся к нормальным условиям методами, указанными в § 115—118.

Центры группирования различных групп, отвечающих одной и той же установке угла возвышения и различным установкам трубы, принимаются как полученные опытным путем точки средней траектории, отвечающей при нормальных условиях данному углу бросания.

В результате проседения отстрелов получаем сеть спорных точек, базируясь на которую можно рассчитать пучок траекторий, согласованный с данными опытных стрельб, методом, излагаемым в следующем параграфе.

### § 163. Согласование расчетов траекторий с данными отстрелов

Как известно, три параметра —  $c$ ,  $v_0$ ,  $\theta_0$  — определяют траекторию снаряда. В выражение для баллистического коэффициента  $c = \frac{v_0^2}{g} 1000$  входит множителем коэффициент формы, могущий играть роль коэффициента согласования. Однако, как мы видели ранее, при помощи одного коэффициента согласования не удается полностью согласовать не только все элементы траектории, но даже один элемент для всех точек траектории. При расчете траекторий для составления таблиц стрельбы необходимо знать с достаточной точностью и для различных дальностей два основных элемента: высоту точки траектории и время полета. Следовательно, для каждой точки траектории надо согласовать эти два элемента; согласование их производится одним из следующих двух методов.

**Первый метод.** Учитывая невозможность согласования данных расчета с результатами опыта при помощи одного постоянного коэффициента, ищут решение этой задачи при помощи двух переменных коэффициентов согласования. Такими коэффициентами можно принять  $c$  и  $g$  при расчете траекторий по аргументу  $x$ ; при расчете же траектории по аргументу  $t$  можно принять два различных переменных коэффициента  $c_x$  и  $c_y$ , т. е. те значения баллистического коэффициента, которые входят в выражение для  $x$  и  $y$ . Значения указанных (переменных вдоль траекторий) коэффициентов определяются путем подгонки так, чтобы рассчитанные значения элементов траектории совпадали с опытными данными. Далее строятся графики семейства кривых  $c$  и  $g$  или  $c_x$  и  $c_y$  в функции от скорости или времени и для различных углов бросания.

Последующий расчет всего пучка траекторий, в том числе для неотстрелянных углов бросания, производится при помощи переменных коэффициентов согласования, определенных по соответствующим кривым  $c$  и  $g$  или  $c_x$  и  $c_y$ .

Основной недостаток этого метода — его громоздкость.

**Второй метод.** Расчет траекторий производится при одном постоянном значении баллистического коэффициента  $c$ , подбираемого так, чтобы согласовать координаты одной из центральных опорных точек, полученных при отстреле. При полученном значении  $c$  вычисляются по методу численного интегрирования траектории, отвечающие всем отстрелянным углам бросания, и для дальностей, отвечающих отстрелянным точкам, определяются значения  $y_{расч}$  и  $t_{расч}$ .

Эти расчетные значения, как правило, не совпадут с полученными из опыта, и будут иметь место некоторые расхождения:

$$\begin{aligned}\delta y &= y_{оп} - y_{расч} \\ \delta t &= t_{оп} - t_{расч}\end{aligned}$$

Определив таким образом расхождения  $\delta y$  и  $\delta t$  для различных отстрелянных точек, строим графики двух семейств кривых  $\delta y$  и  $\delta t$  в функции от дальности и для различных значений угла бросания. В дальнейшем при постоянном  $c$  производим расчет всех требуемых для таблиц стрельбы траекторий для углов бросания через  $1-00$  (т. е.  $6^\circ$ ) и к полученным расчетом величинам  $y_{расч}$  и  $t_{расч}$  прибавляем  $\delta y$  и  $\delta t$ , определенные по «графикам расхождений». Таким образом расчетные данные будут полностью согласованы с данными опытных стрельб.

Этот метод согласования, помимо простоты вычислений, имеет то преимущество, что вид графиков кривых расхождений и степень плавности изменения величин расхождений позволяют судить о качестве опорного опытного материала и обнаружить аномальные ошибки опытов. Эти ошибки труднее заметить при построении кривых  $c$  и  $g$  или  $c_x$  и  $c_y$ .

Рассмотренный нами второй метод можно еще применять в несколько измененном виде. Вместо одного и того же постоянного  $c$  для всех траекторий можно брать  $c$  различным для различных углов бросания. При этом для каждой отстрелянной траектории определяется значение  $c$  путем согласования одной точки, отвечающей (для всех траекторий) определенной установке трубы. Затем строится график зависимости  $c$  от  $\theta_0$ , с которого определяются значения баллистического коэффициента для промежуточных углов бросания. В случае необходимости строятся еще графики расхождения  $\delta y$  и  $\delta t$ , как указано выше.

## **ПРИЛОЖЕНИЯ**

Таблица I  
 $\lg G(v_e)$  как функция от  $\lg v_e$  для закона сопротивления воздуха 1943 г.

$\lg v_e$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,00	3,8724	734	744	754	764	774	784	794	804	814
1	824	834	844	854	864	874	884	894	904	914
2	924	934	944	954	964	974	984	994	004*	014*
3	3,9024	034	044	054	064	074	084	094	104	114
4	124	134	144	154	164	174	184	194	204	214
5	224	234	244	254	264	274	284	294	304	314
6	324	334	344	354	364	374	384	394	404	414
7	424	434	444	454	464	474	484	494	504	514
8	524	534	544	554	564	574	584	594	604	614
9	624	634	644	654	664	674	684	694	704	714
2,10	724	734	744	754	764	774	784	794	804	814
1	824	834	844	854	864	874	884	894	904	914
2	924	934	944	954	964	974	984	994	004*	014*
3	2,0024	034	044	054	064	074	084	094	104	114
4	124	134	144	154	164	174	184	194	204	214
5	224	234	244	254	264	274	284	294	304	314
6	324	334	344	354	364	374	384	394	404	414
7	424	434	444	454	464	474	484	494	504	514
8	524	534	544	554	564	574	584	594	604	614
9	624	634	644	654	664	674	684	694	704	714
2,20	724	734	744	754	764	774	784	794	804	814
1	824	834	844	854	864	874	884	894	904	914
2	924	934	944	954	964	974	984	994	004*	014*
3	2,1024	034	044	054	064	074	084	094	104	114
4	124	134	144	154	164	174	184	194	204	214
5	224	234	244	254	264	274	284	294	304	314
6	324	334	344	354	364	374	384	394	404	414
7	424	434	444	454	464	474	484	494	504	514
8	524	534	544	554	564	574	584	594	604	614
9	624	634	644	654	664	674	684	694	704	714
2,30	724	734	744	754	764	774	784	794	804	814
1	824	834	844	854	864	874	884	894	904	914
2	924	934	944	954	964	974	984	994	004*	014*
3	2,2024	034	044	054	064	074	084	094	104	114
4	124	134	144	154	164	174	184	194	204	214
5	224	234	244	254	264	274	284	294	304	314
6	324	334	344	354	364	374	384	394	404	414
7	424	434	444	454	464	474	484	494	504	514
8	524	534	544	554	564	574	584	594	604	614
9	624	634	644	654	664	674	684	694	704	714
2,400										

\* Для  $\lg v_e \leq 2,0$  следует принимать  $\lg G(v_e) = 5,8724 + \lg v_e$ .

$\lg v_e$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,400	2,2724	725	726	727	728	729	730	731	732	733
1	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743
2	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753
3	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763
4	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773
5	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783
6	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793
7	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803
8	804	805	806	807	808	809	810	811	812	814
9	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824
2,410	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834
1	835	836	837	838	839	841	842	843	844	845
2	846	847	848	849	850	852	853	854	855	856
3	857	858	859	860	861	863	864	865	866	867
4	868	869	870	871	872	874	875	876	877	878
5	879	880	881	882	883	885	886	887	888	889
6	890	891	892	893	894	895	897	898	899	900
7	901	902	903	904	905	907	908	909	910	911
8	912	913	914	915	916	918	919	920	921	922
9	923	924	926	927	928	929	930	931	932	934
2,420	935									
$\lg v_e$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,420	2,2935	936	937	938	939	941	942	943	944	945
1	946	947	949	950	951	952	953	954	955	957
2	953	959	960	961	962	964	965	966	967	968
3	970	971	972	973	974	976	977	978	979	980
4	982	983	984	985	986	988	989	990	991	992
5	994	995	996	997	998	998	000*	001*	002*	003*
6	2,3006	007	008	009	010	012	013	014	015	017
7	018	019	020	022	023	024	025	027	028	029
8	030	032	033	034	035	037	038	039	040	042
9	043	044	045	047	048	049	050	052	053	054
2,430	055	057	058	059	060	062	063	064	065	067
1	068	070	071	072	074	075	076	078	079	080
2	082	083	084	086	087	088	089	090	092	093
3	095	096	097	098	100	101	102	104	105	107
4	108	109	111	112	113	115	116	118	119	120
5	122	123	125	126	127	129	130	132	133	134
6	136	137	139	140	141	143	144	148	147	148
7	150	151	153	154	155	157	158	160	161	162
8	164	165	167	168	169	171	172	174	175	176
9	178	179	180	182	183	185	186	188	189	191
2,440	192	194	195	197	198	200	201	203	204	206
1	207	209	210	212	213	215	216	218	219	221
2	222	224	225	227	228	230	231	233	234	236

$$\lg G(v_*)$$

$$\lg G(v_s)$$

$$\lg G(v_i)$$

$$\lg G(v_+)$$

$\lg G(v_i)$ 

$\lg v_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,520	2,6583	589	595	601	607	612	618	624	630	636
1	641	647	652	658	663	669	674	680	685	691
2	697	703	708	714	719	725	730	736	741	747
3	752	757	762	768	773	778	784	789	794	800
4	805	810	815	820	825	831	836	841	846	851
5	857	862	867	872	877	882	887	892	897	902
6	907	912	917	922	927	932	937	942	947	952
7	956	961	966	971	976	980	985	990	995	999*
8	2,7004	009	013	018	022	027	032	036	041	045
9	050	054	059	063	068	072	077	081	086	090
2,530	095	099	104	108	113	117	122	126	131	135
1	139	143	147	152	155	160	165	169	173	177
2	182	186	190	194	198	203	207	211	215	219
3	224	228	232	233	240	244	248	252	256	260
4	265	269	273	277	281	285	289	293	297	301
5	305	309	313	317	321	325	329	333	337	341
6	344	348	352	356	359	363	367	371	375	379
7	382	386	390	393	397	401	404	408	412	416
8	419	423	426	430	433	437	441	445	448	452
9	455	459	462	466	469	472	476	479	483	486
2,540	490									

 $\lg G(v_i)$ 

$\lg v_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,550	2,8023	025	027	029	031	033	035	037	039	041
1	043	045	047	049	051	053	055	057	059	061
2	063	065	067	069	071	073	075	077	079	081
3	083	085	087	089	091	093	095	097	099	101
4	102	104	106	108	110	112	113	115	117	119
5	121	123	124	126	128	130	132	134	136	138
6	139	141	143	145	147	148	150	152	154	156
7	157	159	161	163	165	166	168	170	172	174
8	175	177	178	180	182	183	185	187	188	190
9	192	193	195	197	198	200	202	203	205	207
2,570	209	211	212	214	216	217	219	221	222	224
1	225	227	229	231	232	234	236	237	239	241
2	242	244	245	247	248	250	251	253	254	256
3	257	259	260	262	263	265	266	268	269	271
4	273	275	276	278	279	281	282	284	285	287
5	288	290	291	293	294	296	297	299	300	302
6	303	304	305	307	309	310	311	313	314	316
7	317	318	320	321	323	324	326	327	329	330
8	332	333	335	336	338	339	340	342	343	345
9	346	347	349	350	352	353	354	355	357	358
2,580	360									

 $\lg G(v_i)$ 

$\lg v_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,540	2,7490	493	497	500	504	507	510	514	517	521
1	524	527	530	534	537	540	544	547	550	553
2	557	560	563	566	569	573	576	579	582	585
3	589	592	595	598	601	605	608	611	614	617
4	621	624	627	630	633	635	639	642	645	648
5	652	655	658	661	664	667	670	673	676	679
6	682	685	688	691	694	697	700	703	706	709
7	711	714	717	720	723	725	728	731	734	737
8	739	742	744	747	750	752	755	758	760	763
9	766	769	771	774	776	779	782	784	787	789
2,550	792	795	797	800	802	805	808	810	813	815
1	818	821	823	826	828	831	833	835	838	841
2	843	845	848	850	853	855	857	860	862	865
3	867	869	872	874	877	879	882	884	886	889
4	891	893	895	898	900	902	905	907	909	911
5	914	916	918	921	923	925	928	930	932	934
6	937	939	941	943	945	948	950	952	954	956
7	959	961	963	965	967	970	972	974	976	978
8	981	983	985	987	989	991	993	995	997	999
9	2,8002	004	006	008	010	012	014	016	018	020
2,560	023									

 $\lg G(v_i)$ 

$\lg v_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,580	2,8360	361	362	364	365	366	368	369	370	372
1	373	374	376	377	378	380	381	382	384	385
2	387	388	389	391	392	393	395	396	397	399
3	400	401	403	404	405	407	408	409	411	412
4	414	415	416	418	419	420	422	423	424	426
5	427	428	430	431	432	434	435	436	438	439
6	449	451	442	443	445	446	447	448	450	451
7	452	453	455	456	457	458	460	461	462	463
8	465	466	467	468	469	471	472	473	474	475
9	477	478	479	480	481	483	484	485	486	487
2,590	489	490	491	492	493	495	493	497	498	499
1	501	502	503	504	505	507	503	509	510	511
2	513	514	515	516	517	518	519	521	522	523
3	524	525	526	528	529	530	531	532	533	534
4	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545
5	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556
6	553	559	560	561	562	563	554	565	566	567
7	569	570	571	572	573	574	575	576</td		

$\lg G(v_z)$ 

$\lg v_z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,60	2,8602	612	623	633	2,8644	654	664	674	684	694
1	703	713	723	733	742	752	761	770	779	788
2	797	806	814	823	832	840	849	857	866	874
3	883	891	900	908	916	924	933	941	949	957
4	965	973	980	988	996	004*	011*	019*	026*	033*
5	2,9040	047	055	062	069	076	084	091	098	105
6	112	119	126	133	140	147	153	160	167	174
7	180	187	194	200	207	213	220	223	233	239
8	246	252	258	264	271	277	283	289	296	302
9	308	314	321	327	333	339	345	351	357	363
2,70	369	375	381	387	393	399	404	410	416	422
1	427	433	439	445	450	456	462	468	473	479
2	485	491	496	502	508	514	519	525	530	536
3	541	547	552	558	563	569	574	580	585	591
4	596	602	607	613	618	624	629	635	640	646
5	651	657	662	668	673	679	684	690	695	701
6	705	712	717	723	728	733	738	743	749	754
7	759	764	770	775	780	785	791	796	801	806
8	812	817	822	827	833	838	843	848	854	859
9	864	869	875	880	885	890	896	901	906	911
2,80	917									

 $\lg G(v_z)$ 

$\lg v_z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,80	2,9917	922	927	932	938	943	948	953	959	964
1	969	974	980	985	991	996	001*	006*	011*	016*
2	1,0022	027	032	037	043	048	053	058	064	070
3	075	081	086	092	097	103	108	114	119	125
4	180	136	141	147	152	158	163	169	174	180
5	185	191	196	202	207	213	218	224	229	235
6	240	246	251	257	262	268	273	279	284	290
7	295	301	306	312	317	323	328	334	339	346
8	351	357	362	368	374	380	385	391	397	403
9	408	414	420	426	431	437	443	449	455	461
2,90	467	473	479	485	492	497	503	509	515	521
1	526	532	538	544	550	556	562	568	574	580
2	586	592	598	604	610	616	622	628	634	640
3	647	653	659	665	671	677	683	689	695	701
4	708	714	720	726	732	739	745	751	757	763
5	770	776	782	789	795	801	808	814	820	826
2,96	1,0833	839	846	852	859	865	872	878	885	891
7	898	905	911	918	924	931	937	944	950	957
8	964	971	977	984	991	997	004*	011*	017*	024*
9	1,1031	038	045	052	059	065	072	079	086	093
3,00	100									

 $\lg G(v_z)$ 

$\lg v_z$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,00	1,1100	107	114	121	128	135	142	149	156	163
1	171	178	185	193	200	207	215	222	229	237
2	244	252	259	267	274	282	269	297	304	312
3	319	327	335	342	350	358	366	374	381	389
4	397	405	413	421	429	437	445	453	461	469
5	477	485	493	502	510	518	527	535	543	552
6	560	569	577	586	594	603	611	620	628	637
7	616	655	664	672	681	690	699	708	716	725
8	734	743	752	761	770	779	788	797	805	815
9	825	834	843	853	862	871	881	890	899	909
3,10	918	928	927	947	955	960	975	985	994	004*
1	1,2013	023	032	042	051	061	070	080	089	099
2	103	119	129	138	148	158	168	178	187	197
3	207	217	227	236	246	256	266	276	285	295
4	305	315	325	335	345	355	365	375	385	395
5	404	414	424	434	444	454	464	474	484	494
6	504	514	524	534	544	554	564	574	584	594
7	604	614	624	634	644	654	664	674	684	694
8	704	714	724	734	744	754	764	774	784	794
9	804	814	824	834	844	854	864	874	884	894
3,20*	904									

\* Для  $\lg v_z > 3,20$  следует принимать  $\lg G(v_z) = 4,0904 - \lg v_z$ .

Функция  $N(U, p')$  (к методу Трофимова)

Таблица II

Функция  $N(U, p')$  (к методу Трофимова)

$U$	$p' \cdot 10^4$	Функция $N(U, p')$ (к методу Трофимова)									
		30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
800	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
790	0,07	0,07	0,08	0,09	0,10	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11
780	0,14	0,15	0,16	0,18	0,19	0,20	0,21	0,21	0,23	0,23	0,23
770	0,22	0,23	0,25	0,27	0,28	0,30	0,31	0,33	0,34	0,34	0,34
760	0,29	0,31	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,45	0,45	0,45
750	0,36	0,39	0,42	0,45	0,48	0,50	0,53	0,56	0,58	0,58	0,58
740	0,44	0,48	0,51	0,54	0,58	0,61	0,64	0,67	0,70	0,70	0,70
730	0,52	0,55	0,60	0,64	0,68	0,71	0,75	0,79	0,82	0,82	0,82
720	0,60	0,64	0,69	0,74	0,82	0,82	0,86	0,91	0,95	0,95	0,95
710	0,68	0,72	0,79	0,84	0,88	0,93	0,98	1,03	1,07	1,07	1,07
700	0,76	0,82	0,88	0,94	0,99	1,04	1,10	1,15	1,20	1,20	1,20
690	0,84	0,91	0,98	1,04	1,10	1,16	1,22	1,27	1,33	1,33	1,33
680	0,93	1,00	1,07	1,14	1,20	1,27	1,34	1,40	1,46	1,46	1,46
670	1,01	1,05	1,17	1,24	1,31	1,35	1,46	1,53	1,59	1,59	1,59
660	1,10	1,16	1,27	1,35	1,42	1,50	1,58	1,66	1,73	1,73	1,73
650	1,19	1,28	1,37	1,46	1,54	1,62	1,71	1,79	1,86	1,86	1,86
640	1,28	1,39	1,48	1,57	1,65	1,74	1,83	1,97	2,00	2,00	2,00
630	1,38	1,48	1,53	1,68	1,77	1,87	1,96	2,05	2,14	2,14	2,14
620	1,47	1,58	1,69	1,79	1,89	1,99	2,09	2,19	2,28	2,28	2,28
610	1,57	1,68	1,80	1,91	2,02	2,12	2,23	2,33	2,43	2,43	2,43
600	1,67	1,79	1,91	2,03	2,14	2,25	2,36	2,45	2,57	2,57	2,57
590	1,77	1,90	2,03	2,15	2,27	2,38	2,50	2,61	2,72	2,72	2,72
580	1,88	2,01	2,14	2,27	2,40	2,52	2,64	2,76	2,87	2,87	2,87
570	1,99	2,12	2,26	2,40	2,53	2,66	2,79	2,91	3,03	3,03	3,03
560	2,10	2,24	2,39	2,53	2,67	2,80	2,93	2,06	3,19	3,19	3,19
550	2,29	2,36	2,51	2,66	2,87	2,95	3,03	3,22	3,35	3,35	3,35
540	2,33	2,40	2,64	2,80	2,95	3,10	3,24	3,38	3,51	3,51	3,51
530	2,45	2,61	2,77	2,94	3,10	3,25	3,40	3,54	3,68	3,68	3,68
520	2,57	2,74	2,91	3,03	3,25	3,41	3,56	3,70	3,85	3,85	3,85
510	2,70	2,87	3,05	3,23	3,40	3,56	3,72	3,87	4,03	4,03	4,03
500	2,83	3,01	3,20	3,38	3,55	3,72	3,89	4,05	4,21	4,21	4,21
490	2,97	3,16	3,35	3,53	3,71	3,89	4,06	4,23	4,40	4,40	4,40
480	3,11	3,31	3,50	3,69	3,88	4,06	4,24	4,42	4,59	4,59	4,59
470	3,26	3,46	3,66	3,86	4,05	4,24	4,43	4,61	4,79	4,79	4,79
460	3,42	3,62	3,83	4,03	4,23	4,43	4,62	4,81	4,99	4,99	4,99
450	3,58	3,79	4,00	4,21	4,42	4,62	4,82	5,01	5,20	5,20	5,20
440	3,75	3,97	4,19	4,40	4,61	4,82	5,02	5,22	5,42	5,42	5,42
430	3,93	4,16	4,38	4,60	4,81	5,03	5,24	5,45	5,65	5,65	5,65
420	4,11	4,35	4,58	4,81	5,03	5,25	5,47	5,68	5,93	5,93	5,93
410	4,31	4,55	4,79	5,03	5,26	5,48	5,70	5,92	6,04	6,04	6,04
400	4,52	4,77	5,02	5,26	5,49	5,72	5,95	6,17	6,39	6,39	6,39
390	4,74	5,00	5,25	5,50	5,74	5,97	6,21	6,44	6,66	6,66	6,66
380	4,98	5,24	5,50	5,75	6,00	6,24	6,48	6,72	6,95	6,95	6,95
370	5,24	5,50	5,76	6,02	6,28	6,53	6,77	7,02	7,21	7,21	7,21
360	5,52	5,79	6,05	6,32	6,58	6,84	7,09	7,34	7,59	7,59	7,59
350	5,82	6,10	6,37	6,64	6,91	7,18	7,44	7,69	7,94	7,94	7,94
340	6,15	6,44	6,72	7,00	7,27	7,55	7,82	8,08	8,33	8,33	8,33
330	6,53	6,83	7,12	7,40	7,68	8,96	8,24	8,51	8,77	8,77	8,77
320	6,97	7,27	7,57	7,86	8,15	8,43	8,71	8,99	9,26	9,26	9,26
310	7,48	7,78	8,09	8,39	8,69	8,98	9,26	9,54	9,82	9,82	9,82
300	8,08	8,39	8,71	9,02	9,32	9,62	9,91	10,19	10,48	10,48	10,48
290	8,92	9,14	9,46	9,77	10,08	10,39	10,69	10,98	11,27	11,27	11,27
280	9,69	10,02	10,34	10,66	10,98	11,29	11,60	11,90	12,20	12,20	12,20
270	10,68	11,02	11,35	11,68	12,00	12,32	12,63	13,24	13,24	13,24	13,24
260	11,78	12,13	12,47	12,80	13,13	13,45	13,77	14,08	14,39	14,39	14,39
250	13,00	13,35	13,70	14,04	14,37	14,70	15,03	15,35	15,66	15,66	15,66
240	14,34	14,64	15,05	15,40	15,74	16,08	16,41	16,74	17,06	17,06	17,06
230	15,81	16,17	16,53	16,98	17,23	17,58	17,92	18,25	18,59	18,59	18,59
220	17,42	17,79	18,15	18,51	18,86	18,22	19,57	19,91	20,25	20,25	20,25
210	19,19	19,57	19,94	20,30	20,66	21,02	21,38	21,73	22,07	22,07	22,07
200	21,14	21,53	21,91	22,28	22,65	23,01	23,37	23,72	24,07	24,07	24,07

$U$	$p' \cdot 10^4$	Функция $N(U, p')$ (к методу Трофимова)							
		110	120	130	140	150	160	170	180
800	0	0	0	0	0	0	0	0	0
790	0,11	0,12	0,12	0,13	0,13	0,14	0,14	0,15	0,15
780	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29	0,30	0,30
770	0,34	0,35	0,37	0,39	0,40	0,42	0,43	0,45	0,45
760	0,46	0,48	0,50	0,52	0,54	0,56	0,58	0,60	0,60
750	0,58	0,60	0,63	0,66	0,68	0,70	0,73	0,75	0,75
740	0,70	0,73	0,76	0,79	0,82	0,85	0,88	0,90	0,90
730	0,82	0,86	0,89	0,93	0,96	0,99			

Таблица III

Функция  $Q(U, p')$  (к методу Трофимова)

$U$	$p' \cdot 10^4$	30	40	50	60	70	80	90	100	110
800	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
790	0,02	0,02	0,03	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05
780	0,04	0,05	0,06	0,07	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,11
770	0,05	0,07	0,08	0,10	0,11	0,12	0,13	0,15	0,16	0,16
760	0,07	0,09	0,11	0,13	0,15	0,17	0,18	0,20	0,21	0,21
750	0,09	0,11	0,14	0,16	0,19	0,21	0,23	0,25	0,27	0,27
740	0,11	0,14	0,17	0,20	0,23	0,26	0,29	0,33	0,36	0,38
730	0,13	0,16	0,20	0,23	0,26	0,29	0,33	0,36	0,38	0,38
720	0,15	0,19	0,23	0,27	0,30	0,34	0,33	0,41	0,44	0,44
710	0,17	0,21	0,26	0,30	0,34	0,38	0,42	0,46	0,50	0,50
700	0,18	0,23	0,29	0,34	0,38	0,43	0,47	0,52	0,56	0,56
690	0,20	0,26	0,32	0,37	0,42	0,47	0,52	0,57	0,61	0,61
680	0,22	0,29	0,35	0,41	0,46	0,52	0,57	0,62	0,67	0,67
670	0,24	0,31	0,37	0,44	0,50	0,55	0,62	0,67	0,72	0,72
660	0,26	0,33	0,40	0,47	0,54	0,61	0,67	0,73	0,78	0,78
650	0,28	0,35	0,43	0,51	0,53	0,65	0,72	0,73	0,84	0,84
640	0,30	0,38	0,46	0,54	0,62	0,69	0,75	0,83	0,90	0,90
630	0,32	0,40	0,49	0,58	0,66	0,74	0,81	0,89	0,96	0,96
620	0,34	0,43	0,52	0,61	0,70	0,78	0,86	0,94	1,02	1,02
610	0,35	0,45	0,55	0,65	0,74	0,83	0,92	1,00	1,08	1,08
600	0,37	0,47	0,58	0,69	0,79	0,88	0,97	1,05	1,14	1,14
580	0,39	0,50	0,61	0,72	0,83	0,93	1,02	1,11	1,19	1,19
590	0,41	0,53	0,64	0,73	0,87	0,97	1,07	1,16	1,25	1,25
570	0,43	0,55	0,67	0,79	0,91	1,02	1,12	1,22	1,31	1,31
560	0,45	0,58	0,70	0,83	0,95	1,05	1,17	1,27	1,38	1,38
550	0,47	0,60	0,73	0,86	0,99	1,11	1,22	1,33	1,44	1,44
540	0,49	0,63	0,76	0,90	1,03	1,15	1,27	1,39	1,50	1,50
530	0,51	0,55	0,79	0,93	1,07	1,20	1,32	1,44	1,56	1,56
520	0,53	0,58	0,83	0,97	1,11	1,25	1,38	1,50	1,52	1,52
510	0,55	0,70	0,96	1,01	1,15	1,29	1,43	1,56	1,68	1,68
500	0,57	0,73	0,59	1,05	1,20	1,34	1,48	1,62	1,75	1,75
490	0,59	0,75	0,92	1,08	1,24	1,39	1,53	1,67	1,81	1,81
480	0,61	0,78	0,95	1,12	1,28	1,44	1,59	1,73	1,87	1,87
470	0,62	0,80	0,98	1,16	1,33	1,49	1,64	1,79	1,94	1,94
460	0,64	0,83	1,02	1,20	1,37	1,54	1,70	1,85	2,00	2,00
450	0,66	0,86	1,05	1,23	1,41	1,58	1,75	1,91	2,06	2,06
440	0,68	0,88	1,08	1,27	1,45	1,63	1,80	1,97	2,13	2,13
430	0,70	0,91	1,11	1,31	1,50	1,68	1,86	2,03	2,20	2,20
420	0,72	0,94	1,15	1,35	1,54	1,73	1,97	2,09	2,26	2,26
410	0,74	0,93	1,18	1,39	1,59	1,78	1,92	2,15	2,33	2,33
400	0,76	0,99	1,21	1,43	1,64	1,84	2,03	2,21	2,30	2,30
390	0,78	1,02	1,25	1,47	1,63	1,89	2,09	2,28	2,46	2,46
380	0,80	1,04	1,28	1,51	1,73	1,94	2,14	2,34	2,53	2,53
370	0,82	1,07	1,31	1,54	1,77	1,99	2,20	2,40	2,60	2,60
360	0,84	1,09	1,34	1,53	1,82	2,04	2,25	2,46	2,67	2,67
350	0,86	1,12	1,37	1,62	1,86	2,09	2,31	2,53	2,74	2,74
340	0,89	1,15	1,41	1,66	1,90	2,14	2,37	2,59	2,81	2,81
330	0,91	1,18	1,44	1,70	1,95	2,19	2,43	2,66	2,88	2,88
320	0,93	1,21	1,48	1,74	2,00	2,25	2,49	2,72	2,95	2,95
310	0,95	1,23	1,51	1,78	2,04	2,30	2,55	2,79	3,03	3,03
300	0,97	1,26	1,54	1,82	2,09	2,35	2,61	2,86	3,10	3,10
290	0,99	1,28	1,57	1,86	2,14	2,41	2,67	2,92	3,17	3,17
280	1,01	1,31	1,61	1,91	2,19	2,46	2,73	2,99	3,24	3,24
270	1,03	1,34	1,65	1,95	2,23	2,51	2,79	3,06	3,32	3,32
260	1,05	1,37	1,69	1,99	2,28	2,57	2,85	3,13	3,40	3,40
250	1,07	1,40	1,72	2,03	2,33	2,63	2,92	3,20	3,47	3,47
240	1,09	1,42	1,75	2,07	2,38	2,68	2,98	3,27	3,55	3,55
230	1,11	1,45	1,78	2,11	2,43	2,74	3,04	3,33	3,62	3,62
220	1,14	1,48	1,82	2,15	2,43	2,80	3,10	3,40	3,70	3,70
210	1,16	1,51	1,86	2,20	2,53	2,85	3,16	3,47	3,77	3,77
200	1,18	1,54	1,89	2,24	2,58	2,91	3,23	3,54	3,85	3,85

Функция  $Q(U, p')$  (к методу Трофимова)

$U$	$p' \cdot 10^4$	110	120	130	140	150	160	170	180
800	0	0	0	0	0	0	0	0	0
790	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08	0,08	0,08
780	0,11	0,12	0,15	0,13	0,14	0,15	0,15	0,16	0,16
770	0,16	0,17	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,24
760	0,21	0,23	0,25	0,27	0,28	0,29	0,30	0,32	0,32
750	0,27	0,29	0,31	0,33	0,35	0,36	0,38	0,40	0,40
740	0,33	0,35	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46	0,49	0,49
730	0,38	0,41	0,44	0,47	0,49	0,51	0,54	0,57	0,57
720	0,44	0,47	0,51	0,54	0,57	0,60	0,64	0,67	0,74
710	0,50	0,53	0,57	0,60	0,64	0,67	0,71	0,75	0,82
700	0,61	0,66	0,70	0,74	0,78	0,82	0,86	0,90	0,94
690	0,67	0,72	0,77	0,81	0,86	0,90	0,94	0,98	1,02
680	0,72	0,78	0,83	0,88	0,93	0,98	1,02	1,07	1,16
670	0,78	0,84	0,90	0,95	1,01	1,06	1,11	1,16	1,24
660	0,84	0,90	0,96	1,02	1,08	1,13	1,19	1,24	1,33
650	0,90	0,97	1,03	1,09	1,15	1,21	1,27	1,37	1,43
640	0,96	1,03	1,10	1,17	1,24	1,31	1,38	1,45	1,50
630	1,02	1,10	1,18	1,26	1,34	1,42	1,50	1,59	1,68
620	1,08	1,17	1,26	1,35	1,44	1,53	1,		

Таблица IV

Функция  $S(U, p')$  (к методу Трофимова)

$U$	$p' \cdot 10^4$	Функция $S(U, p')$ (к методу Трофимова)									
		30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
800	1,38	1,50	1,61	1,72	1,83	1,94	2,04	2,14	2,24		
790	1,38	1,49	1,60	1,71	1,82	1,92	2,02	2,12	2,22		
780	1,37	1,48	1,59	1,70	1,80	1,90	2,00	2,10	2,19		
770	1,36	1,47	1,58	1,69	1,79	1,89	1,99	2,08	2,17		
760	1,35	1,46	1,57	1,67	1,77	1,87	1,97	2,06	2,15		
750	1,35	1,46	1,56	1,66	1,76	1,86	1,95	2,04	2,13		
740	1,34	1,45	1,55	1,65	1,75	1,84	1,93	2,02	2,11		
730	1,34	1,44	1,54	1,64	1,74	1,83	1,92	2,01	2,09		
720	1,33	1,43	1,53	1,62	1,72	1,81	1,90	1,99	2,07		
710	1,32	1,42	1,52	1,61	1,70	1,79	1,88	1,97	2,06		
700	1,31	1,41	1,51	1,60	1,69	1,78	1,86	1,95	2,03		
690	1,30	1,40	1,50	1,59	1,68	1,76	1,85	1,93	2,01		
680	1,30	1,39	1,48	1,57	1,66	1,75	1,83	1,91	1,99		
670	1,29	1,38	1,47	1,56	1,65	1,73	1,81	1,89	1,97		
660	1,29	1,38	1,46	1,55	1,64	1,71	1,79	1,87	1,95		
650	1,28	1,37	1,45	1,54	1,62	1,70	1,78	1,85	1,93		
640	1,27	1,36	1,44	1,52	1,60	1,68	1,76	1,83	1,91		
630	1,27	1,35	1,43	1,51	1,59	1,67	1,74	1,81	1,88		
620	1,26	1,34	1,42	1,50	1,57	1,65	1,72	1,79	1,86		
610	1,25	1,33	1,41	1,49	1,56	1,63	1,70	1,77	1,84		
600	1,25	1,32	1,40	1,47	1,54	1,61	1,68	1,75	1,82		
590	1,24	1,31	1,39	1,46	1,53	1,60	1,67	1,73	1,80		
580	1,23	1,30	1,38	1,45	1,52	1,58	1,65	1,71	1,78		
570	1,22	1,29	1,36	1,43	1,50	1,57	1,63	1,69	1,75		
560	1,22	1,28	1,35	1,42	1,48	1,55	1,61	1,67	1,73		
550	1,21	1,27	1,34	1,41	1,47	1,54	1,60	1,65	1,71		
540	1,20	1,27	1,33	1,40	1,46	1,52	1,58	1,63	1,69		
530	1,20	1,26	1,32	1,38	1,44	1,50	1,56	1,61	1,67		
520	1,19	1,25	1,31	1,37	1,43	1,48	1,54	1,59	1,64		
510	1,18	1,24	1,30	1,36	1,42	1,47	1,52	1,57	1,62		
500	1,18	1,24	1,29	1,34	1,40	1,45	1,50	1,55	1,60		
490	1,17	1,23	1,28	1,33	1,38	1,43	1,48	1,53	1,58		
480	1,16	1,22	1,27	1,32	1,37	1,41	1,46	1,51	1,56		
470	1,16	1,21	1,26	1,30	1,35	1,39	1,44	1,49	1,53		
460	1,15	1,20	1,24	1,29	1,33	1,38	1,42	1,47	1,51		
450	1,14	1,19	1,23	1,28	1,32	1,36	1,40	1,45	1,49		
440	1,13	1,18	1,22	1,26	1,30	1,34	1,38	1,42	1,46		
430	1,13	1,17	1,21	1,25	1,29	1,33	1,36	1,40	1,44		
420	1,12	1,16	1,20	1,24	1,27	1,31	1,34	1,38	1,42		
410	1,11	1,15	1,19	1,22	1,26	1,29	1,32	1,36	1,39		
400	1,11	1,14	1,17	1,21	1,24	1,27	1,30	1,34	1,37		
390	1,10	1,13	1,16	1,19	1,22	1,25	1,28	1,32	1,35		
380	1,09	1,12	1,15	1,18	1,21	1,24	1,26	1,29	1,32		
370	1,08	1,11	1,14	1,17	1,20	1,22	1,24	1,27	1,30		
360	1,08	1,10	1,13	1,15	1,18	1,20	1,22	1,25	1,27		
350	1,07	1,09	1,12	1,14	1,16	1,18	1,20	1,22	1,25		
340	1,06	1,08	1,10	1,12	1,14	1,16	1,18	1,20	1,22		
330	1,05	1,07	1,09	1,11	1,13	1,14	1,16	1,18	1,20		
320	1,05	1,06	1,08	1,09	1,11	1,12	1,14	1,15	1,17		
310	1,04	1,05	1,07	1,08	1,09	1,10	1,12	1,13	1,15		
300	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,09	1,10	1,11	1,12		
290	1,03	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09	1,10		
280	1,02	1,03	1,04	1,05	1,05	1,06	1,07	1,08	1,08		
270	1,02	1,03	1,04	1,04	1,05	1,06	1,07	1,07	1,07		
260	1,02	1,02	1,03	1,04	1,04	1,05	1,06	1,06	1,07		
250	1,02	1,02	1,03	1,03	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06		
240	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06		
230	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05		
220	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,04	1,04		
210	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04		
200	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04		

Функция  $S(U, p')$  (к методу Трофимова)

$U$	$p' \cdot 10^4$	Функция $S(U, p')$ (к методу Трофимова)							
		110	120	130	140	150	160	170	180
800	2,24	2,34	2,52	2,61	2,70	2,79	2,88		
790	2,22	2,32	2,41	2,50	2,59	2,68	2,77	2,85	
780	2,19	2,29	2,38	2,47	2,56	2,65	2,74	2,82	
770	2,17	2,26	2,35	2,44	2,53	2,62	2,71	2,79	
760	2,15	2,24	2,33	2,42	2,51	2,59	2,68	2,73	
750	2,13	2,22	2,31	2,40	2,49	2,57	2,65	2,70	
740	2,11	2,20	2,28	2,37	2,46	2,54	2,62	2,67	
730	2,09	2,18	2,26	2,35	2,43	2,51	2,59	2,64	
720	2,07	2,16	2,24	2,32	2,40	2,48	2,56	2,64	
710	2,05	2,13	2,22	2,30	2,38	2,46	2,54	2,61	
700	2,03	2,11	2,19	2,27	2,35	2,43	2,51	2,58	
690	2,01	2,09	2,17	2,25	2,33	2,40	2,48	2,55	
680	1,99	2,07	2,15	2,22	2,30	2,37	2,45	2,52	
670	1,97	2,05	2,13	2,20	2,27	2,34	2,42	2,49	
660	1,95	2,03	2,10	2,17	2,24	2,31	2,39	2,46	
650	1,93	2,00	2,08	2,15	2,22	2,29			

Таблица V

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  для вычисления поправок при малых скоростях

$$\text{Коэффициент } \alpha = \frac{v_0}{2X} \frac{\partial X}{\partial v_0}$$

$\theta_0$	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°
0,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,05	0,984	0,983	0,983	0,982	0,982	0,981	0,978	0,976	0,969	0,964	0,956	0,948
0,10	0,968	0,967	0,967	0,965	0,964	0,962	0,957	0,952	0,942	0,933	0,921	0,905
0,15	0,953	0,951	0,951	0,948	0,943	0,937	0,929	0,918	0,907	0,889	0,869	0,849
0,20	0,937	0,935	0,934	0,931	0,928	0,922	0,918	0,907	0,898	0,884	0,862	0,835
0,25	0,921	0,919	0,917	0,914	0,910	0,904	0,899	0,899	0,879	0,862	0,839	0,803
0,30	0,906	0,902	0,900	0,897	0,892	0,886	0,880	0,870	0,859	0,839	0,815	0,772
0,35	0,891	0,886	0,884	0,881	0,875	0,868	0,862	0,851	0,838	0,817	0,791	0,744
0,40	0,876	0,870	0,869	0,865	0,858	0,851	0,844	0,833	0,817	0,795	0,767	0,716
0,45	0,861	0,855	0,854	0,849	0,842	0,834	0,826	0,815	0,797	0,773	0,743	0,688
0,50	0,846	0,840	0,838	0,833	0,826	0,818	0,809	0,797	0,777	0,752	0,719	0,660
0,55	0,831	0,825	0,822	0,818	0,810	0,802	0,792	0,780	0,757	0,731	0,694	0,631
0,60	0,817	0,811	0,807	0,803	0,795	0,786	0,775	0,762	0,738	0,711	0,670	0,603
0,65	0,803	0,797	0,793	0,788	0,780	0,771	0,759	0,745	0,720	0,692	0,647	0,576
0,70	0,789	0,783	0,780	0,773	0,765	0,756	0,743	0,728	0,703	0,673	0,625	0,550
0,75	0,775	0,770	0,766	0,759	0,751	0,741	0,728	0,710	0,686	0,653	0,602	0,524
0,80	0,761	0,756	0,752	0,745	0,737	0,726	0,712	0,693	0,669	0,635	0,579	0,498

Коэффициент  $\alpha$ 

$\theta_0$	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	75°
0,85	0,748	0,743	0,738	0,731	0,723	0,711	0,697	0,677	0,652	0,617	0,557	0,473
0,90	0,735	0,730	0,725	0,717	0,709	0,697	0,681	0,661	0,635	0,598	0,535	0,447
0,95	0,721	0,717	0,712	0,704	0,695	0,682	0,666	0,645	0,619	0,580	0,512	0,421
1,00	0,708	0,705	0,699	0,691	0,681	0,668	0,651	0,630	0,602	0,562	0,490	
1,05	0,695	0,692	0,686	0,678	0,668	0,654	0,637	0,615	0,596	0,543	0,468	
1,10	0,683	0,680	0,673	0,665	0,665	0,641	0,624	0,601	0,571	0,525	0,445	
1,15	0,671	0,667	0,661	0,653	0,642	0,629	0,611	0,587	0,555	0,508	0,423	
1,20	0,659	0,655	0,649	0,641	0,630	0,616	0,598	0,574	0,540	0,491	0,400	
1,25	0,648	0,644	0,637	0,629	0,618	0,604	0,585	0,550	0,525	0,474		
1,30	0,636	0,632	0,626	0,617	0,606	0,591	0,572	0,546	0,510	0,456		
1,35	0,625	0,621	0,615	0,605	0,595	0,580	0,550	0,533	0,495	0,439		
1,40	0,613	0,609	0,604	0,594	0,583	0,568	0,548	0,520	0,480	0,421		
1,45	0,602	0,598	0,593	0,583	0,572	0,557	0,530	0,507	0,466	0,403		

$$\text{Коэффициент } \beta = \frac{\partial X}{\partial \theta_0} \frac{1}{X}$$

$\theta_0$	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
0,00	2,40	1,69	1,14	0,74	0,35	0	-0,36	-0,72	-1,15	-1,69	-2,40
0,05	2,37	1,66	1,12	0,72	0,34	-0,02	-0,36	-0,73	-1,16	-1,70	-2,42
0,10	2,34	1,64	1,10	0,70	0,33	-0,03	-0,37	-0,74	-1,16	-1,70	-2,44
0,15	2,31	1,61	1,08	0,69	0,32	-0,04	-0,38	-0,74	-1,17	-1,71	-2,47
0,20	2,28	1,59	1,06	0,67	0,30	-0,05	-0,39	-0,75	-1,18	-1,72	-2,49
0,25	2,25	1,56	1,04	0,66	0,29	-0,06	-0,40	-0,76	-1,18	-1,73	-2,51
0,30	2,22	1,54	1,02	0,64	0,28	-0,07	-0,40	-0,76	-1,18	-1,74	-2,54
0,35	2,19	1,52	1,00	0,62	0,26	-0,08	-0,41	-0,76	-1,20	-1,75	-2,56
0,40	2,16	1,49	0,98	0,61	0,25	-0,09	-0,42	-0,77	-1,20	-1,76	-2,58
0,45	2,13	1,47	0,95	0,60	0,24	-0,09	-0,42	-0,78	-1,20	-1,76	-2,60
0,50	2,10	1,44	0,93	0,58	0,23	-0,10	-0,43	-0,78	-1,21	-1,77	-2,62
0,55	2,07	1,42	0,91	0,56	0,22	-0,11	-0,44	-0,79	-1,22	-1,78	-2,64
0,60	2,04	1,40	0,89	0,54	0,20	-0,12	-0,44	-0,80	-1,22	-1,78	-2,67
0,65	2,01	1,37	0,87	0,53	0,19	-0,13	-0,45	-0,80	-1,23	-1,79	-2,69
0,70	1,98	1,35	0,85	0,52	0,18	-0,14	-0,46	-0,81	-1,24	-1,80	-2,71
0,75	1,95	1,32	0,83	0,50	0,17	-0,15	-0,47	-0,82	-1,24	-1,81	-2,74
0,80	1,92	1,30	0,81	0,48	0,16	-0,16	-0,48	-0,82	-1,25	-1,82	-2,76

Коэффициент  $\beta$ 

$\theta_0$	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
0,85	1,89	1,27	0,79	0,46	0,14	-0,17	-0,48	-0,83	-1,26	-1,82	-2,78
0,90	1,86	1,25	0,77	0,45	0,13	-0,18	-0,49	-0,84	-1,26	-1,83	-2,80
0,95	1,83	1,23	0,75	0,44	0,12	-0,18	-0,50	-0,84	-1,26	-1,84	-2,82
1,00	1,80	1,20	0,72	0,42	0,11	-0,20	-0,50	-0,85	-1,27	-1,85	-2,85
1,05	1,77	1,18	0,70	0,40	0,10	-0,20	-0,51	-0,85	-1,28	-1,86	-2,87
1,10	1,74	1,15	0,68	0,39	0,08	-0,22	-0,52	-0,86	-1,28	-1,86	-2,89
1,15	1,71	1,13	0,66	0,37	0,07	-0,22	-0,52	-0,86	-1,29	-1,87	-2,91
1,20	1,68	1,11	0,64	0,36	0,06	-0,24	-0,53	-0,87	-1,29	-1,88	-2,94
1,25	1,65	1,08	0,62	0,34	0,05	-					

Таблица VI  
Функция  $B(y) = \frac{h}{h_N}$

$y$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	1,000	0,988	0,976	0,964	0,953	0,942	0,931	0,920	0,909	0,898
1000	0,883	0,877	0,866	0,856	0,846	0,835	0,825	0,815	0,805	0,796
2000	0,786	0,776	0,766	0,757	0,748	0,738	0,729	0,720	0,711	0,702
3000	0,693	0,685	0,676	0,668	0,659	0,650	0,642	0,638	0,625	0,617
4000	0,609	0,601	0,594	0,586	0,578	0,571	0,563	0,556	0,549	0,542
5000	0,534	0,527	0,521	0,514	0,507	0,500	0,494	0,487	0,481	0,474
6000	0,467	0,461	0,455	0,448	0,442	0,436	0,431	0,425	0,419	0,413
7000	0,407	0,401	0,396	0,390	0,384	0,379	0,373	0,368	0,363	0,358
8000	0,353	0,348	0,343	0,338	0,333	0,329	0,324	0,319	0,314	0,309
9000	0,305	0,300	0,296	0,292	0,288	0,284	0,280	0,276	0,272	0,268
10000	0,264	0,260	0,256	0,252	0,248	0,244	0,240	0,236	0,233	0,230

Таблица VII  
Функция  $L(U)$  для вычисления установки трубы при зенитной стрельбе

$U$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
100	78,240	69,894	62,523	56,096	50,621	46,067	42,236	38,715	35,621	32,809
200	30,229	27,902	25,697	23,671	21,825	20,099	18,528	17,117	15,856	14,806
300	13,834	12,997	12,298	11,686	11,154	10,682	10,259	9,872	9,515	9,185
400	8,873	8,576	8,294	8,023	7,765	7,519	7,285	7,037	6,838	6,626
500	6,420	6,224	6,034	5,848	5,668	5,494	5,322	5,157	4,995	4,836
600	4,680	4,526	4,375	4,226	4,030	3,933	3,798	3,659	3,521	3,385
700	3,250	3,115	2,984	2,856	2,731	2,610	2,492	2,375	2,260	2,147
800	2,035	1,925	1,815	1,707	1,601	1,497	1,394	1,293	1,194	1,097
900	1,000									

Таблица VIII  
Баллистический сборник Артиллерийской академии КА  
Таблица  $\lg X$   $b_0 = 2^3$

$v_0$ $c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,4530	2,6460	2,8025	2,9335	3,0455	3,1445	3,2325	3,3115	3,3835
0,15	2,4525	2,6450	2,8010	2,9305	3,0405	3,1375	3,2240	3,3015	3,3720
0,20	2,4520	2,6440	2,7995	2,9275	3,0360	3,1315	3,2160	3,2920	3,3610
0,25	2,4515	2,6430	2,7980	2,9250	3,0315	3,1250	3,2090	3,2830	3,3505
0,30	2,4510	2,6425	2,7965	2,9220	3,0265	3,1190	3,2005	3,2740	3,3400
0,35	2,4505	2,6420	2,7950	2,9190	3,0215	3,1125	3,1930	3,2650	3,3300
0,40	2,4500	2,6410	2,7935	2,9160	3,0170	3,1065	3,1860	3,2595	3,3200
0,45	2,4495	2,6400	2,7920	2,9135	3,0130	3,1010	3,1790	3,2485	3,3110
0,50	2,4490	2,6395	2,7910	2,9110	3,0090	3,0955	3,1725	3,2410	3,3020
0,55	2,4490	2,6390	2,7895	2,9085	3,0050	3,0905	3,1660	3,2330	3,2930
0,60	2,4485	2,6385	2,7880	2,9060	3,0010	3,0850	3,1595	3,2255	3,2845
0,65	2,4480	2,6380	2,7870	2,9035	2,9970	3,0300	3,1535	3,2185	3,2760
0,70	2,4475	2,6370	2,7860	2,9010	2,9935	3,0750	3,1475	3,2115	3,2680
0,75	2,4470	2,6360	2,7845	2,8985	2,9900	0,0705	3,1415	3,2045	3,2605
0,80	2,4465	2,6355	2,7835	2,8960	2,9865	3,0660	3,1360	3,1975	3,2530
0,85	2,4460	2,6350	2,7825	2,8940	2,9830	3,0515	3,1305	3,1910	3,2455
0,90	2,4455	2,6340	2,7810	2,8915	2,9790	3,0565	3,1250	3,1850	3,2385
0,95	2,4450	2,6335	2,7800	2,8890	2,9755	3,0520	3,1195	3,1790	3,2315
1,00	2,4440	2,6325	2,7790	2,8865	2,9715	3,0470	3,1135	3,1725	3,2250

$v_0$ $c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	3,3835	3,3495	3,5105	3,5670	3,6195	3,6685	3,7145	3,7580	3,7995
0,15	3,3720	3,3365	3,4955	3,5505	3,6015	3,6490	3,6935	3,7355	3,7760
0,20	3,3610	3,3235	3,4810	3,5345	3,5845	3,6310	3,6740	3,7145	3,7535
0,25	3,3505	3,3115	3,4675	3,5195	3,5685	3,6140	3,6560	3,6950	3,7320
0,30	3,3400	3,3000	3,4550	3,5055	3,5530	3,5975	3,6385	3,6765	3,7120
0,35	3,3300	3,3890	3,4425	3,4920	3,5385	3,5815	3,6215	3,6590	3,6935
0,40	3,3200	3,3780	3,4305	3,4790	3,5245	3,5665	3,6035	3,6420	3,6755
0,45	3,3110	3,3675	3,4190	3,4665	3,5110	3,5520	3,5900	3,6255	3,6595
0,50	3,3020	3,3575	3,4080	3,4545	3,4980	3,5380	3,5750	3,6095	3,6420
0,55	3,2930	3,3475	3,3970	3,4425	3,4850	3,5245	3,5610	3,5945	3,6260
0,60	3,2845	3,3380	3,3865	3,4310	3,4725	3,5110	3,5470	3,5800	3,6110
0,65	3,2760	3,3285	3,3765	3,4205	3,4610	3,4985	3,5335	3,5660	3,5965
0,70	3,2680	3,3195	3,3665	3,4100	3,4500	3,4870	3,5210	3,5530	3,5830
0,75	3,2605	3,3110	3,3570	3,3995	3,4390	3,4755	3,5090	3,5405	3,5700
0,80	3,2530	3,3030	3,3480	3,3895	3,4280	3,4640	3,4975	3,5285	3,5575
0,85	3,2455	3,2945	3,3390	3,3800	3,4180	3,4530	3,4860	3,5165	3,5450
0,90	3,2385	3,2865	3,3305	3,3710	3,4080	3,4425	3,4750	3,5050	3,5330
0,95	3,2315	3,2790	3,3225	3,3620	3,3985	3,4325	3,4640	3,4935	3,5210
1,00	3,2250	3,2720	3,3145	3,3535	3,3890	3,4220	3,4530	3,4820	3,5095

Таблица  $\lg X \quad \theta_0 = 5^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,8475	3,0395	3,1940	3,3200	3,4275	3,5210	3,6050	3,6800	3,7470
0,15	2,8465	3,0375	3,1905	3,3125	3,4160	3,5055	3,5860	3,6575	3,7215
0,20	2,8450	3,0355	3,1870	3,3055	3,4055	3,4915	3,5680	3,6365	3,6980
0,25	2,8440	3,0340	3,1835	3,2990	3,3955	3,4785	3,5520	3,6175	3,6765
0,30	2,8430	3,0320	3,1800	3,2930	3,3865	3,4665	3,5370	3,6000	3,6665
0,35	2,8420	3,0300	3,1770	3,2870	3,3780	3,4550	3,5230	3,5840	3,6385
0,40	2,8410	3,0280	3,1745	3,2815	3,3700	3,4445	3,5100	3,5690	3,6220
0,45	2,8400	3,0265	3,1720	3,2765	3,3625	3,4345	3,4975	3,5545	3,6065
0,50	2,8390	3,0250	3,1690	3,2715	3,3550	3,4250	3,4860	3,5410	3,5915
0,55	2,8380	3,0235	3,1660	3,2670	3,3485	3,4160	3,4750	3,5285	3,5770
0,60	2,8365	3,0215	3,1630	3,2620	3,3415	3,4075	3,4645	3,5165	3,5635
0,65	2,8355	3,0200	3,1600	3,2585	3,3350	3,3995	3,4550	3,5050	3,5510
0,70	2,8345	3,0185	3,1570	3,2540	3,3290	3,3915	3,4455	3,4945	3,5395
0,75	2,8330	3,0165	3,1540	3,2500	3,3230	3,3835	3,4365	3,4845	3,5285
0,80	2,8320	3,0145	3,1510	3,2460	3,3170	3,3755	3,4275	3,4750	3,5180
0,85	2,8305	3,0125	3,1485	3,2425	3,3110	3,3680	3,4190	3,4655	3,5080
0,90	2,8290	3,0105	3,1460	3,2390	3,3050	3,3605	3,4110	3,4570	3,4985
0,95	2,8275	3,0085	3,1435	3,2360	3,2990	3,3550	3,4025	3,4480	3,4800
1,00	2,8260	3,0065	3,1410	3,2330	3,2935	3,3460	3,3945	3,4390	3,4795

Таблица  $\lg X \quad \theta_0 = 10^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,1390	3,3295	3,4820	3,6030	3,7010	3,7880	3,8655	3,9345	3,9960
0,15	3,1365	3,3255	3,4760	3,5910	3,6820	3,7630	3,8350	3,8985	3,9555
0,20	3,1340	3,3220	3,4700	3,5800	3,6650	3,7410	3,8080	3,8670	3,9205
0,25	3,1315	3,3190	3,4640	3,5700	3,6495	3,7210	3,7840	3,8395	3,8895
0,30	3,1295	3,3155	3,4580	3,5600	3,6355	3,7030	3,7625	3,8155	3,8625
0,35	3,1275	3,3120	3,4525	3,5505	3,6230	3,6870	3,7435	3,7940	3,8385
0,40	3,1255	3,3085	3,4470	3,5420	3,6115	3,6725	3,7265	3,7745	3,8165
0,45	3,1235	3,3050	3,4420	3,5340	3,6010	3,6595	3,7105	3,7560	3,7960
0,50	3,1210	3,3015	3,4370	3,5265	3,5910	3,6475	3,6960	3,7390	3,7770
0,55	3,1190	3,2985	3,4320	3,5195	3,5815	3,6360	3,6830	3,7235	3,7600
0,60	3,1165	3,2955	3,4275	3,5125	3,5725	3,6250	3,6705	3,7090	3,7445
0,65	3,1145	3,2920	3,4225	3,5060	3,5645	3,6150	3,6685	3,6955	3,7300
0,70	3,1125	3,2885	3,4175	3,5000	3,5565	3,6055	3,6475	3,6835	3,7170
0,75	3,1100	3,2850	3,4125	3,4940	3,5490	3,5965	3,6370	3,6725	3,7055
0,80	3,1075	3,2815	3,4080	3,4880	3,5415	3,5875	3,6270	3,6620	3,6945
0,85	3,1050	3,2780	3,4035	3,4825	3,5345	3,5790	3,6175	3,6520	3,6840
0,90	3,1025	3,2750	3,3995	3,4770	3,5275	3,5705	3,6080	3,6425	3,6740
0,95	3,1005	3,2720	3,3950	3,4715	3,5205	3,5620	3,5990	3,6330	3,6640
1,00	3,0985	3,2690	3,3910	3,4660	3,5140	3,5545	3,5910	3,6240	3,6545

Таблица  $\lg X \quad \theta_0 = 5^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	3,7470	3,8085	3,8650	3,9175	3,9660	4,0110	4,0535	4,0935	4,1315
0,15	3,7215	3,7795	3,8335	3,8830	3,9285	3,9705	4,0100	4,0475	4,0835
0,20	3,6980	3,7535	3,8045	3,8515	3,8950	3,9350	3,9720	4,0070	4,0405
0,25	3,6765	3,7300	3,7785	3,8230	3,8645	3,9025	3,9380	3,9710	4,0025
0,30	3,6565	3,7080	3,7545	3,7970	3,8365	3,8730	3,9070	3,9385	3,9685
0,35	3,6385	3,6880	3,7325	3,7735	3,8110	3,8460	3,8785	3,9090	3,9375
0,40	3,6220	3,6695	3,7125	3,7515	3,7875	3,8210	3,8525	3,8815	3,9090
0,45	3,6065	3,6520	3,6935	3,7310	3,7655	3,7980	3,8185	3,8565	3,8830
0,50	3,5915	3,6360	3,6760	3,7120	3,7455	3,7765	3,8060	3,8335	3,8590
0,55	3,5770	3,6205	3,6645	3,7270	3,7570	3,7850	3,8120	3,8370	
0,60	3,5635	3,6060	3,6440	3,6780	3,7095	3,7385	3,7660	3,7920	3,8165
0,65	3,5510	3,5925	3,6295	3,6630	3,6935	3,7220	3,7485	3,7735	3,7975
0,70	3,5395	3,5800	3,6160	3,6485	3,6785	3,7065	3,7325	3,7565	3,7795
0,75	3,5285	3,5680	3,6035	3,6355	3,6645	3,6915	3,7170	3,7405	3,7625
0,80	3,5180	3,5565	3,5915	3,6230	3,6515	3,6775	3,7020	3,7250	3,7470
0,85	3,5080	3,5460	3,5800	3,6110	3,6390	3,6645	3,6880	3,7105	3,7320
0,90	3,4985	3,5355	3,5600	3,5900	3,6260	3,6510	3,6750	3,6970	3,7180
0,95	3,4890	3,5255	3,5580	3,5870	3,6135	3,6380	3,6615	3,6835	3,7045
1,00	3,4795	3,5155	3,5470	3,5755	3,6015	3,6255	3,6485	3,6705	3,6910

Таблица  $\lg X \quad \theta_0 = 10^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	3,9960	4,0520	4,1035	4,1510	4,1950	4,2360	4,2745	4,3100	4,3445
0,15	3,9555	4,0065	4,0535	4,0965	4,1365	4,1740	4,2095	4,2430	4,2745
0,20	3,9205	3,9680	4,0115	4,0515	4,0885	4,1230	4,1550	4,1855	4,2145
0,25	3,8895	3,9340	3,9750	4,0125	4,0470	4,0790	4,1090	4,1375	4,1640
0,30	3,8625	3,9045	3,9430	3,9785	4,0110	4,0415	4,0700	4,0965	4,1215
0,35	3,8385	3,8785	3,9145	3,9480	3,9790	4,0080	4,0350	4,0600	4,0840</

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 15^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,3015	3,4910	3,6415	3,7575	3,8495	3,9315	4,0035	4,0680	4,1265
0,15	3,2980	3,4855	3,6330	3,7415	3,8250	3,8990	3,9645	4,0220	4,0750
0,20	3,2945	3,4800	3,6245	3,7275	3,8040	3,8720	3,9320	3,9850	4,0325
0,25	3,2910	3,4750	3,6165	3,7150	3,7860	3,8490	3,9050	3,9540	3,9980
0,30	3,2875	3,4705	3,6090	3,7030	3,7700	3,8290	3,8815	3,9280	3,9690
0,35	3,2845	3,4655	3,6015	3,6920	3,7555	3,8115	3,8610	3,9045	3,9430
0,40	3,2815	3,4605	3,5945	3,6810	3,7420	3,7955	3,8420	3,8830	3,9195
0,45	3,2785	3,4555	3,5875	3,6710	3,7300	3,7805	3,8245	3,8635	3,8985
0,50	3,2755	3,4510	3,5805	3,6615	3,7185	3,7670	3,8090	3,8455	3,8790
0,55	3,2725	3,4460	3,5735	3,6525	3,7080	3,7545	3,7945	3,8295	3,8615
0,60	3,2690	3,4415	3,5670	3,6440	3,6980	3,7425	3,7805	3,8145	3,8455
0,65	3,2660	3,4365	3,5610	3,6360	3,6895	3,7315	3,7680	3,8010	3,8310
0,70	3,2630	3,4320	3,5550	3,6280	3,6795	3,7205	3,7565	3,7885	3,8175
0,75	3,2600	3,4275	3,5490	3,6205	3,6703	3,7100	3,7450	3,7765	3,8050
0,80	3,2565	3,4230	3,5430	3,6135	3,6620	3,7005	3,7345	3,7650	3,8030
0,85	3,2535	3,4185	3,5370	3,6065	3,6540	3,6910	3,7240	3,7540	3,7815
0,90	3,2505	3,4145	3,5315	3,6000	3,6460	3,6820	3,7140	3,7435	3,7705
0,95	3,2475	3,4105	3,5260	3,5935	3,6380	3,6730	3,7045	3,7330	3,7595
1,00	3,2450	3,4065	3,5210	3,5875	3,6305	3,6645	3,6955	3,7235	3,7495

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 20^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,4085	3,5975	3,7465	3,8585	3,9460	4,0240	4,0925	4,1535	4,2090
0,15	3,4040	3,5905	3,7355	3,8405	3,9190	3,9880	4,0490	4,1025	4,1515
0,20	3,3995	3,5835	3,7250	3,8240	3,8960	3,9690	4,0145	4,0635	4,1075
0,25	3,3950	3,5770	3,7150	3,8090	3,8760	3,9345	3,9855	4,0305	4,0710
0,30	3,3910	3,5705	3,7055	3,7950	3,8585	3,9130	3,9605	4,0025	4,0400
0,35	3,3870	3,5645	3,6965	3,7825	3,8425	3,8940	3,9385	3,9780	4,0130
0,40	3,3830	3,5580	3,6880	3,7705	3,8280	3,8770	3,9185	3,9555	3,9890
0,45	3,3790	3,5520	3,6795	3,7595	3,8150	3,8615	3,9005	3,9355	3,9675
0,50	3,3750	3,5460	3,6715	3,7485	3,8025	3,8470	3,8840	3,9175	3,9480
0,55	3,3710	3,5400	3,6640	3,7385	3,7905	3,8330	3,8690	3,9010	3,9300
0,60	3,3670	3,5340	3,6565	3,7285	3,7790	3,8200	3,8550	3,8860	3,9135
0,65	3,3630	3,5285	3,6490	3,7195	3,7685	3,8075	3,8415	3,8715	3,8980
0,70	3,3590	3,5225	3,6415	3,7105	3,7585	3,7960	3,8290	3,8580	3,8840
0,75	3,3550	3,5170	3,6345	3,7020	3,7485	3,7850	3,8170	3,8455	3,8705
0,80	3,3515	3,5120	3,6275	3,6935	3,7390	3,7745	3,8055	3,8330	3,8575
0,85	3,3475	3,5065	3,6205	3,6855	3,7295	3,7645	3,7945	3,8210	3,8450
0,90	3,3440	3,5015	3,6135	3,6775	3,7205	3,7545	3,7840	3,8100	3,8330
0,95	3,3405	3,4965	3,6070	3,6700	3,7120	3,7450	3,7740	3,7995	3,8220
1,00	3,3375	3,4915	3,6010	3,6630	3,7035	3,7360	3,7645	3,7895	3,8110

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 15^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	4,1265	4,1795	4,2285	4,2740	4,3160	4,3550	4,3910	4,4245	4,4565
0,15	4,0750	4,1225	4,1665	4,2070	4,2450	4,2800	4,3125	4,3430	4,3715
0,20	4,0325	4,0735	4,1155	4,1525	4,1870	4,2190	4,2490	4,2770	4,3035
0,25	3,9980	4,0380	4,0750	4,1090	4,1405	4,1700	4,1975	4,2235	4,2480
0,30	3,9600	4,0065	4,0410	4,0730	4,1020	4,1295	4,1550	4,1785	4,2010
0,35	3,9430	3,9780	4,0105	4,0405	4,0690	4,0935	4,1175	4,1395	4,1605
0,40	3,9195	3,9525	3,9830	4,0115	4,0380	4,0620	4,0850	4,1060	4,1260
0,45	3,8985	3,9300	3,9590	3,9860	4,0110	4,0340	4,0560	4,0765	4,0965
0,50	3,8790	3,9095	3,9375	3,9630	3,9870	4,0095	4,0305	4,0505	4,0705
0,55	3,8615	3,8910	3,9180	3,9425	3,9655	3,9875	4,0080	4,0275	4,0465
0,60	3,8455	3,8740	3,9000	3,9240	3,9465	3,9675	3,9875	4,0060	4,0240
0,65	3,8310	3,8585	3,8840	3,9075	3,9295	3,9495	3,9685	3,9865	4,0040
0,70	3,8175	3,8440	3,8690	3,8920	3,9135	3,9330	3,9515	3,9690	3,9855
0,75	3,8080	3,8310	3,8555	3,8780	3,8985	3,9175	3,9355	3,9525	3,9685
0,80	3,7930	3,8185	3,8425	3,8645	3,8845	3,9030	3,9200	3,9365	3,9520
0,85	3,7815	3,8065	3,8295	3,8510	3,8705	3,8885	3,9050	3,9210	3,9365
0,90	3,7705	3,7950	3,8175	3,8380	3,8570	3,8745	3,8905	3,9060	3,9215
0,95	3,7595	3,7835	3,8055	3,8255	3,8440	3,8610	3,8765	3,8915	3,9065
1,00	3,7495	3,7730	3,7945	3,8140	3,8315	3,8475	3,8630	3,8780	3,8920

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 20^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	4,2090	4,2595	4,3065	4,3500	4,3905	4,4200	4,4650	4,4990	4,5320
0,15	4,1515	4,1965	4,2380	4,2765	4,3125	4,3465	4,3785	4,4000	4,4385
0,20	4,1075	4,1480	4,1895	4,2200	4,2520	4,2825	4,3115	4,3390	4,3655
0,25	4,0710	4,1085	4,1430	4,1745	4,2040	4,2320	4,2585	4,2835	4,3075
0,30	4,0400	4,0745	4,1065	4,1360	4,1635	4,1895	4,2140	4,2370	4,2595
0,35	4,0130	4,0455	4,0755	4,1030	4,1285	4,1525	4,1755</td		

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 30^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,5350	3,7215	3,8695	3,9795	4,0620	4,1340	4,1980	4,2560	4,3085
0,15	3,5286	3,7125	3,8555	3,9575	4,0320	4,0960	4,1515	4,2010	4,2460
0,20	3,5220	3,7030	3,8425	3,9380	4,0065	4,0640	4,1140	4,1590	4,1995
0,25	3,5160	3,6940	3,8300	3,9205	3,9345	4,0375	4,0830	4,1240	4,1605
0,30	3,5105	3,6855	3,8185	3,9040	3,9650	4,0145	4,0565	4,0940	4,1280
0,35	3,5050	3,6775	3,8070	3,8885	3,9470	3,9935	4,0325	4,0675	4,0965
0,40	3,5000	3,6700	3,7930	3,8745	3,9300	3,9745	4,0110	4,0440	4,0740
0,45	3,4945	3,6625	3,7855	3,8615	3,9135	3,9565	3,9915	4,0225	4,0510
0,50	3,4890	3,6545	3,7755	3,8490	3,8985	3,9395	3,9730	4,0030	4,0300
0,55	3,4840	3,6470	3,7660	3,8375	3,8840	3,9230	3,9555	3,9835	4,0105
0,60	3,4790	3,6400	3,7555	3,8260	3,8705	3,9075	3,9395	3,9675	3,9925
0,65	3,4735	3,6325	3,7475	3,8150	3,8580	3,8935	3,9245	3,9515	3,7755
0,70	3,4685	3,6255	3,7385	3,8045	3,8460	3,8805	3,9105	3,9370	3,9600
0,75	3,4635	3,6180	3,7300	3,7945	3,8350	3,8685	3,8975	3,9230	3,9455
0,80	3,4590	3,6110	3,7215	3,7850	3,8245	3,8570	3,8850	3,9095	3,9315
0,85	3,4540	3,6045	3,7135	3,7755	3,8145	3,8460	3,8730	3,8970	3,9180
0,90	3,4495	3,5980	3,7055	3,7665	3,8050	3,8355	3,8615	3,8845	3,9050
0,95	3,4450	3,5915	3,6975	3,7575	3,7955	3,8250	3,8500	3,8725	3,8925
1,00	3,4410	3,5855	3,6900	3,7495	3,7865	3,8150	3,8390	3,8605	3,8800

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 25^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,4825	3,6700	3,8185	3,9290	4,0140	4,0890	4,1550	4,2145	4,2680
0,15	3,4770	3,6620	3,8060	3,9090	3,9850	4,0510	4,1090	4,1605	4,2070
0,20	3,4715	3,6540	3,7940	3,8910	3,9605	4,0200	4,0725	4,1190	4,1605
0,25	3,4665	3,6460	3,7830	3,8745	3,9395	4,0420	4,0845	4,1225	
0,30	3,4615	3,6385	3,7725	3,8595	3,9210	3,9725	4,0165	4,0555	4,0905
0,35	3,4570	3,6315	3,7620	3,8455	3,9040	3,7525	3,9935	4,0300	4,0630
0,40	3,4525	3,6245	3,7520	3,8320	3,8880	3,9345	3,9730	4,0075	4,0385
0,45	3,4475	3,6175	3,7425	3,8195	3,8730	3,9175	3,9540	3,9870	4,0165
0,50	3,4430	3,6110	3,7335	3,8075	3,8590	3,9015	3,9365	3,9680	3,9965
0,55	3,4385	3,6045	3,7250	3,7965	3,8455	3,8860	3,9200	3,9505	3,9780
0,60	3,4340	3,5975	3,7165	3,7860	3,8330	3,8715	3,9045	3,9340	3,9605
0,65	3,4295	3,5910	3,7080	3,7760	3,8215	3,8580	3,8900	3,9185	3,9440
0,70	3,4250	3,5845	3,7000	3,7665	3,8105	3,8455	3,8765	3,9040	3,9285
0,75	3,4205	3,5780	3,6920	3,7570	3,7995	3,8340	3,8640	3,8905	3,9140
0,80	3,4165	3,5720	3,6840	3,7480	3,7805	3,8230	3,8525	3,8780	3,9005
0,85	3,4120	3,5660	3,6765	3,7390	3,7800	3,8125	3,8410	3,8660	3,8880
0,90	3,4075	3,5600	3,6690	3,7305	3,7710	3,8025	3,8300	3,8545	3,8760
0,95	3,4035	3,5540	3,6620	3,7225	3,7620	3,7930	3,8200	3,8435	3,8640
1,00	3,4000	3,5485	3,6550	3,7150	3,7535	3,7840	3,8100	3,8325	3,8520

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 25^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	4,2680	4,3170	4,3620	4,4040	4,4440	4,4830	4,5200	4,5560	4,5910
0,15	4,2070	4,2500	4,2900	4,3275	4,3630	4,3970	4,4295	4,4605	4,4910
0,20	4,1605	4,1990	4,2345	4,2675	4,2985	4,3285	4,3575	4,3855	4,4130
0,25	4,1225	4,1575	4,1900	4,2205	4,2490	4,2760	4,3020	4,3270	4,3510
0,30	4,0905	4,1230	4,1530	4,1810	4,2075	4,2325	4,2560	4,2785	4,3005
0,35	4,0630	4,0935	4,1215	4,1475	4,1720	4,1950	4,2170	4,2380	4,2585
0,40	4,0385	4,0670	4,0935	4,1180	4,1410	4,1630	4,1835	4,2030	4,2215
0,45	4,0165	4,0435	4,0685	4,0920	4,1140	4,1345	4,1535	4,1720	4,1900
0,50	3,9965	4,0220	4,0455	4,0680	4,0890	4,1085	4,1270	4,1445	4,1620
0,55	3,9780	4,0025	4,0250	4,0460	4,0660	4,0850	4,1030	4,1200	4,1365
0,60	3,9605	3,9845	4,0060	4,0260	4,0450	4,0635	4,0810	4,0975	4,1135
0,65	3,9440	3,9670	3,9880	4,0075	4,0260	4,0435	4,0605	4,0765	4,0920
0,70	3,9285	3,9505	3,9710	3,9900	4,0080	4,0250	4,0415	4,0570	4,0720
0,75	3,9140	3,9355	3,9555	3,9740	3,9915	4,0080	4,0235	4,0385	4,0530
0,80	3,9005	3,9215	3,9410	3,9590	3,9760	3,9920	4,0070	4,0215	4,0355
0,85	3,8880	3,9080	3,9265	3,9440	3,9610	3,9763	3,9915	4,0055	4,0190
0,90	3,8760	3,8950	3,9130	3,9300	3,9465	3,9620	3,9765	3,9900	4,0030
0,95	3,8640	3,8825	3,9000	3,9155	3,9325	3,9480	3,9625	3,9755	3,9880
1,00	3,8520	3,8700	3,8870	3,9035	3,9190	3,9340	3,9485	3,9615	3,9735

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 35^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,5690	3,7555	3,9030	4,0135	4,0955	4,1560	4,2285	4,2850	4,3365
0,15	3,5615	3,7450	3,8880	3,9005	4,0650	4,1280	4,1820	4,2305	4,2745
0,20	3,5545	3,7350	3,8740	3,9700	4,0385	4,0955	4,1440	4,1875	4,2270
0,25	3,5480	3,7250	3,8605	3,9515	4,0155	4,0680	4,1120	4,1520	4,1880
0,30	3,5420	3,7160	3,8480	3,9340	3,9945	4,0435	4,0840	4,1210	4,1545
0,35	3,5360	3,7070	3,8360	3,9175	3,9755	4,0215	4,0595	4,0935	4,1245
0,40	3,5300	3,6985	3,8240	3,9025	3,9575	4,0015	4,0370	4,0690	4,0980
0,45	3,5245	3,6905	3,8125	3,8885	3,9405	3,9825	4,0165	4,0470	4,0745
0,50	3,5190	3,6820	3,8015	3,8755	3,9245	3,9645	3,9975	4,0265	4,0530
0,55	3,5135	3,6740	3,7915	3,8635	3,9095	3,9475	3,9795	3,0075	4,0325
0,60	3,5080	3,6665	3,7820	3,8520	3,8935	3,9315	3,9625	3,9895	3,0140
0,65	3,5025	3,6590	3,7725	3,8405	3,8820	3,9170	3,9470	3,9730	3,9965
0,70	3,4970	3,6515	3,7630	3,8205	3,8605	3,9035	3,9325	3,9580	3,9805
0,75	3,4915	3,6440	3,7540	3,8190	3,8580	3,8905	3,9185	3,9435	3,9655
0,80	3,4865	3,6365	3,7450	3,8085	3,8470	3,8785	3,9055	3,9295	3,9510
0,85	3,4815	3,6295	3,7365	3,7985	3,8365	3,8670	3,8930	3,9160	3,9370
0,90	3,4765	3,6225	3,7280	3,7890	3,8265	3,8555	3,8805	3,9030	3,9235
0,95	3,4715	3,6155	3,7195	3,7795	3,8165	3,8445	3,8685	3,8905	3,9105
1,00	3,4670	3,6090	3,7115	3,7705	3,8065	3,8340	3,8570	3,8780	3,8975

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 40^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,5880	3,7745	3,9215	4,0325	4,1155	4,1860	4,2475	4,3030	4,2545
0,15	3,5800	3,7635	3,9060	4,0095	4,0850	4,1480	4,2010	4,2490	4,2030
0,20	3,5730	3,7530	3,8915	3,9885	4,0580	4,1150	4,1625	4,2055	4,2445
0,25	3,5665	3,7430	3,8775	3,9690	4,0335	4,0865	4,1300	4,1695	4,2050
0,30	3,5600	3,7330	3,8640	3,9510	4,0115	4,0610	4,1010	4,1375	4,1705
0,35	3,5535	3,7235	3,8515	3,9340	3,9915	4,0375	4,0750	4,1090	4,1400
0,40	3,5470	3,7145	3,8390	3,9180	3,9725	4,0160	4,0515	4,0835	4,1125
0,45	3,5410	3,7055	3,8270	3,9035	3,9550	3,9960	4,0300	4,0605	4,0880
0,50	3,5350	3,6965	3,8155	3,8900	3,9385	3,9775	4,0105	4,0395	4,0655
0,55	3,5290	3,6860	3,8045	3,8770	3,9230	3,9605	3,9920	4,0195	4,0445
0,60	3,5230	3,6795	3,7940	3,8660	3,9085	3,9445	3,9750	4,0015	4,0255
0,65	3,5170	3,6715	3,7845	3,8535	3,8950	3,9295	3,9590	3,9845	4,0075
0,70	3,5115	3,6640	3,7750	3,8420	3,8820	3,9155	3,9440	3,9685	3,9905
0,75	3,5060	3,6565	3,7655	3,8310	3,8700	3,9020	3,9295	3,9535	3,9750
0,80	3,5010	3,6490	3,7565	3,8200	3,8585	3,8890	3,9160	3,9395	3,9605
0,85	3,4955	3,6415	3,7475	3,8065	3,8475	3,8770	3,9030	3,9255	3,9460
0,90	3,4900	3,6345	3,7385	3,7995	3,8365	3,8650	3,8900	3,9120	3,9320
0,95	3,4850	3,6275	3,7295	3,7895	3,8260	3,8535	3,8775	3,8990	3,9185
1,00	3,4795	3,6205	3,7210	3,7795	3,8155	3,8425	3,8655	3,8860	3,9050

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 35^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	4,3365	4,3850	4,4315	4,4765	4,5195	4,5610	4,6015	4,6405	4,6795
0,15	4,2745	4,3155	4,3545	4,3925	4,4290	4,4645	4,4990	4,5330	4,5665
0,20	4,2270	4,2635	4,2975	4,3300	4,3610	4,3915	4,4210	4,4505	4,4795
0,25	4,1880	4,2210	4,2515	4,2805	4,3080	4,3345	4,3605	4,3855	4,4100
0,30	4,1545	4,1850	4,2135	4,2400	4,2650	4,2890	4,3120	4,3345	4,3560
0,35	4,1245	4,1530	4,1800	4,2050	4,2285	4,2505	4,2720	4,2925	4,3125
0,40	4,0980	4,1250	4,1505	4,1740	4,1960	4,2170	4,2370	4,2565	4,2750
0,45	4,0745	4,1000	4,1235	4,1460	4,1670	4,1870	4,2060	4,2245	4,2420
0,50	4,0530	4,0770	4,0990	4,1200	4,1400	4,1595	4,1780	4,1955	4,2120
0,55	4,0325	4,0555	4,0765	4,0965	4,1155	4,1340	4,1520	4,1690	4,1850
0,60	4,0140	4,0360	4,0565	4,0755	4,0935	4,1110	4,1280	4,1445	4,1600
0,65	3,9955	4,0180	4,0380	4,0505	4,0735	4,0900	4,1065	4,1220	4,1370
0,70	3,9805	4,0010	4,0205	4,0385	4,0550	4,0710	4,0865	4,1015	4,1155
0,75	3,9655	3,9855	4,0040	4,0215	4,0375	4,0530	4,0680	4,0820	4,0950
0,80	3,9510	3,9705	3,9885	4,0055	4,0210	4,0360	4,0500	4,0635	4,0760
0,85	3,9370	3,9560	3,9735	3,9900	4,0050	4,0195	4,0330	4,0460	4,0590
0,90	3,9235	3,9420	3,9590	3,9750	3,9895	4,0035	4,0170	4,0295	4,0410
0,95	3,9105	3,9285	3,9450	3,9605	3,9745	3,9880	4,0015	4,0135	4,0250
1,00	3,8975	3,9150	3,9310	3,9460	3,9600	3,9735	3,9865	3,9985	4,0095

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 40^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	4,3545	4,4040	4,4515	4,4970	4,5415	4,5850	4,6280	4,6695	4,7105
0,15	4,2930	4,3340	4,3735	4,4115	4,4490	4,4855	4,5220	4,5580	4,5940
0,20	4,2445	4,2805	4,3145	4,3475	4,3790	4,4100	4,4405	4,4710	4,5015
0,25	4,2050	4,2380	4,2985	4,2975	4,3255	4,3525	4,3790	4,4045	4,4300
0,30	4,1705	4,2010	4,2205	4,2560	4,2810	4,3050	4,3290	4,3520	4,3740
0,35	4,1400	4,1685	4,1955	4,2205	4,2440	4,2600	4,2875		

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 45^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,5945	3,7810	3,9280	4,0300	4,1235	4,1950	4,2570	4,3125	4,3640
0,15	3,5865	3,7700	3,9120	4,0155	4,0920	4,1560	4,2095	4,2575	4,3015
0,20	3,5790	3,7590	3,8965	3,9940	4,0645	4,1225	4,1705	4,2135	4,2525
0,25	3,5720	3,7485	3,8820	3,9740	4,0395	4,0930	4,1370	4,1765	4,2120
0,30	3,5650	3,7380	3,8680	3,9555	4,0165	4,0665	4,1070	4,1435	4,1765
0,35	3,5585	3,7280	3,8545	3,9380	3,9955	4,0426	4,0800	4,1145	4,1455
0,40	3,5515	3,7180	3,8420	3,9220	3,9765	4,0200	4,0555	4,0880	4,1175
0,45	3,5450	3,7085	3,8300	3,9070	3,9585	3,9995	4,0335	4,0640	4,0920
0,50	3,5385	3,6995	3,8185	3,8930	3,9415	3,9805	4,0135	4,0420	4,0685
0,55	3,5320	3,6905	3,8070	3,8795	3,9260	3,9630	3,9945	4,0220	4,0470
0,60	3,5260	3,6820	3,7960	3,8670	3,9115	3,9470	3,9770	4,0030	4,0270
0,65	3,5200	3,6735	3,7860	3,8550	3,8975	3,9320	3,9605	3,9855	4,0085
0,70	3,5140	3,6655	3,7760	3,8430	3,8845	3,9175	3,9455	3,9695	3,9915
0,75	3,5085	3,6575	3,7660	3,8315	3,8720	3,9035	3,9310	3,9545	3,9755
0,80	3,5030	3,6495	3,7565	3,8205	3,8600	3,8905	3,9170	3,9400	3,9605
0,85	3,4975	3,6420	3,7470	3,8095	3,8480	3,8775	3,9035	3,9260	3,9460
0,90	3,4920	3,6350	3,7375	3,7990	3,8365	3,8650	3,8900	3,9120	3,9315
0,95	3,4865	3,6280	3,7285	3,7885	3,8250	3,8530	3,8770	3,8985	3,9175
1,00	3,4810	3,6210	3,7195	3,7780	3,8140	3,8410	3,8645	3,8850	3,9035

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 50^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,5880	3,7745	3,9215	4,0330	4,1195	4,1925	4,2550	4,3110	4,3630
0,15	3,5800	3,7630	3,9050	4,0090	4,0875	4,1520	4,2065	4,2555	4,3000
0,20	3,5720	3,7520	3,8890	3,9870	4,0590	4,1180	4,1670	4,2105	4,2505
0,25	3,5645	3,7410	3,8740	3,9670	4,0330	4,0875	4,1325	4,1720	4,2085
0,30	3,5575	3,7305	3,8600	3,9480	4,0095	4,0605	4,1015	4,1380	4,1720
0,35	3,5505	3,7200	3,8465	3,9305	3,9885	4,0360	4,0740	4,1090	4,1405
0,40	3,5435	3,7100	3,8335	3,9145	3,9690	4,0135	4,0495	4,0820	4,1120
0,45	3,5370	3,7000	3,8215	3,8990	3,9510	3,9925	4,0270	4,0575	4,0855
0,50	3,5300	3,6905	3,8095	3,8845	3,9340	3,9730	4,0060	4,0350	4,0615
0,55	3,5235	3,6815	3,7980	3,8710	3,9180	3,9550	3,9865	4,0140	4,0390
0,60	3,5170	3,6730	3,7870	3,8580	3,9030	3,9385	3,9685	3,9945	4,0185
0,65	3,5110	3,6645	3,7765	3,8455	3,8890	3,9230	3,9515	3,9765	3,9995
0,70	3,5050	3,6560	3,7660	3,8330	3,8755	3,9080	3,9360	3,9600	3,9820
0,75	3,4990	3,6475	3,7560	3,8210	3,8625	3,8940	3,9215	3,9450	3,9660
0,80	3,4935	3,6395	3,7460	3,8100	3,8500	3,8805	3,9070	3,9305	3,9510
0,85	3,4875	3,6315	3,7360	3,7985	3,8375	3,8670	3,8930	3,9160	3,9360
0,90	3,4820	3,6245	3,7265	3,7875	3,8255	3,8540	3,8795	3,9015	3,9210
0,95	3,4765	3,6175	3,7170	3,7770	3,8135	3,8415	3,8660	3,8875	3,9065
1,00	3,4710	3,6105	3,7080	3,7665	3,8020	3,8295	3,8530	3,8735	3,8920

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 45^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	4,3640	4,4135	4,4615	4,5080	4,5540	4,6000	4,6455	4,6905	4,7345
0,15	4,3015	4,3430	4,3830	4,4220	4,4600	4,4980	4,5370	4,5760	4,6150
0,20	4,2525	4,2885	4,3230	4,3565	4,3890	4,4205	4,4525	4,4850	4,5180
0,25	4,2120	4,2450	4,2760	4,3060	4,3345	4,3620	4,3895	4,4165	4,4430
0,30	4,1765	4,2070	4,2360	4,2630	4,2890	4,3140	4,3385	4,3620	4,3845
0,35	4,1455	4,1740	4,2010	4,2265	4,2505	4,2735	4,2955	4,3170	4,3375
0,40	4,1175	4,1445	4,1695	4,1935	4,2160	4,2375	4,2580	4,2780	4,2970
0,45	4,0920	4,1175	4,1410	4,1635	4,1850	4,2035	4,2250	4,2440	4,2620
0,50	4,0685	4,0925	4,1150	4,1365	4,1565	4,1760	4,1945	4,2125	4,2300
0,55	4,0470	4,0700	4,0915	4,1115	4,1305	4,1490	4,1665	4,1835	4,2000
0,60	4,0270	4,0490	4,0695	4,0885	4,1070	4,1245	4,1410	4,1570	4,1725
0,65	4,0085	4,0295	4,0490	4,0675	4,0855	4,1025	4,1180	4,1330	4,1480
0,70	3,9915	4,0115	4,0305	4,0485	4,0655	4,0820	4,0970	4,1115	4,1255
0,75	3,9755	3,9950	4,0135	4,0305	4,0470	4,0630	4,0775	4,0915	4,1045
0,80	3,9605	3,9795	3,9970	4,0135	4,0295	4,0445	4,0585	4,0720	4,0845
0,85	3,9460	3,9645	3,9815	3,9975	4,0125	4,0270	4,0403	4,0535	4,0655
0,90	3,9315	3,9495	3,9665	3,9820	3,9965	4,0105	4,0235	4,0360	4,0475
0,95	3,9175	3,9350	3,9515	3,9665	3,9805	3,9940	4,0070	4,0190	4,0305
1,00	3,9035	3,9205	3,9365	3,9510	3,9645	3,9780	3,9910	4,0030	4,0140

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 50^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	4,3630	4,4125	4,4605	4,5090	4,5570	4,6045	4,6520	4,6990	4,7455
0,15	4,3000	4,3420	4,3825	4,4225	4,4620	4,5020	4,5435	4,5855	4,6275
0,20	4,2505	4,2870	4,3220	4,3560	4,3895	4,4225	4,4560	4,4910	4,5265
0,25	4,2085	4,2420	4,2740	4,3050	4,3345	4,3630	4,3920	4,4205	4,4485
0,30	4,1720	4,2035	4,2330	4,2610	4,2875	4,3135	4,3390	4,3635	4,3875
0,35	4,1405	4,1695	4,1965	4,2225	4,2475	4,2715	4,2940		

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 55^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,5675	3,7540	3,9010	4,0125	4,1015	4,1755	4,2390	4,2960	4,3495
0,15	3,5595	3,7425	3,8845	3,9885	4,0690	4,1350	4,1905	4,2405	4,2860
0,20	3,5515	3,7315	3,8685	3,9665	4,0400	4,1005	4,1500	4,1945	4,2355
0,25	3,5440	3,7205	3,8535	3,9465	4,0140	4,0695	4,1150	4,1555	4,1925
0,30	3,5365	3,7005	3,8390	3,9280	3,9905	4,0420	4,0840	4,1220	4,1560
0,35	3,5295	3,6990	3,8255	3,9105	3,9690	4,0170	4,0565	4,0915	4,1235
0,40	3,5225	3,6890	3,8125	3,8940	3,9490	4,0315	4,0640	4,1940	
0,45	3,5155	3,6790	3,8000	3,8785	3,9305	3,9730	4,0085	4,0390	4,0670
0,50	3,5085	3,6695	3,7880	3,8640	3,9135	3,9535	3,9870	3,0160	4,0425
0,55	3,5020	3,6605	3,7765	3,8500	3,8975	3,9350	3,9670	3,9950	4,0200
0,60	3,4955	3,6515	3,7655	3,8365	3,8825	3,9180	3,9485	3,9750	3,9990
0,65	3,4890	3,6425	3,7545	3,8235	3,8680	3,9020	3,9310	3,9565	3,9795
0,70	3,4830	3,6340	3,7440	3,8110	3,8540	3,8870	3,9150	3,9395	3,9615
0,75	3,4770	3,6255	3,7335	3,7990	3,8405	3,8725	3,9000	3,9235	3,9450
0,80	3,4715	3,6175	3,7235	3,7875	3,8275	3,8590	3,8855	3,9085	3,9295
0,85	3,4655	3,6085	3,7135	3,7760	3,8150	3,8455	3,8715	3,8940	3,9140
0,90	3,4595	3,6020	3,7035	3,7650	3,8030	3,8320	3,8575	3,8795	3,8990
0,95	3,4540	3,5950	3,6940	3,7540	3,7910	3,8190	3,8435	3,8650	3,8840
1,00	3,4485	3,5880	3,6850	3,7435	3,7795	3,8070	3,8305	3,8510	3,8695

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 60^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,5320	3,7185	3,8660	3,9770	4,0680	4,1435	4,2075	4,2660	4,3210
0,15	3,5240	3,7070	3,8495	3,9530	4,0355	4,1030	4,1595	4,2100	4,2570
0,20	3,5160	3,6960	3,8335	3,9315	4,0065	4,0685	4,1190	4,1645	4,2065
0,25	3,5085	3,6850	3,8185	3,9115	3,9805	4,0375	4,0835	4,1250	4,1630
0,30	3,5015	3,6745	3,8045	3,8930	3,9570	4,0095	4,0525	4,0910	4,1255
0,35	3,4940	3,6640	3,7910	3,8760	3,9355	3,9845	4,0250	4,0605	4,0925
0,40	3,4870	3,6540	3,7780	3,8600	3,9155	3,9615	4,0000	4,0330	4,0630
0,45	3,4800	3,6445	3,7655	3,8445	3,8970	3,9405	3,9770	4,0080	4,0360
0,50	3,4730	3,6350	3,7535	3,8295	3,8800	3,9210	3,9555	3,9845	4,0110
0,55	3,4665	3,6255	3,7420	3,8155	3,8635	3,9025	3,9350	3,9630	3,9890
0,60	3,4605	3,6165	3,7335	3,8020	3,8485	3,8850	3,9160	3,9425	3,9670
0,65	4,4540	3,6075	3,7195	3,7890	3,8340	3,8690	3,8985	3,9240	3,9475
0,70	3,4480	3,5990	3,7090	3,7770	3,8195	3,8535	3,8820	3,9065	3,9295
0,75	3,4420	3,5910	3,6985	3,7650	3,8055	3,8390	3,8665	3,8900	3,9120
0,80	3,4360	3,5825	3,6880	3,7530	3,7925	3,8250	3,8515	3,8740	3,8955
0,85	3,4300	3,5745	3,6780	3,7415	3,7800	3,8110	3,8365	3,8585	3,8795
0,90	3,4240	3,5670	3,6680	3,7305	3,7680	3,7975	3,8220	3,8435	3,8640
0,95	3,4180	3,5595	3,6585	3,7195	3,7565	3,7845	3,8080	3,8290	3,8490
1,00	3,4120	3,5520	3,6495	3,7085	3,7450	3,7720	3,7945	3,8150	3,8345

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 55^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	4,3495	4,4000	4,4490	4,4980	4,5470	4,5960	4,6450	4,6935	4,7410
0,15	4,2860	4,3290	4,3710	4,4125	4,4540	4,4960	4,5390	4,5825	4,6260
0,20	4,2355	4,2735	4,3095	4,3445	4,3795	4,4145	4,4505	4,4880	4,5255
0,25	4,1925	4,2270	4,2600	4,2915	4,3225	4,3530	4,3840	4,4145	4,4540
0,30	4,1560	4,1880	4,2180	4,2465	4,2740	4,3010	4,3280	4,3550	4,3810
0,35	4,1235	4,1530	4,1805	4,2070	4,2325	4,2370	4,2815	4,3050	4,3280
0,40	4,0940	4,1215	4,1470	4,1715	4,1955	4,2185	4,2405	4,2615	4,2825
0,45	4,0670	4,0930	4,1170	4,1400	4,1620	4,1835	4,2040	4,2235	4,2430
0,50	4,0425	4,0670	4,0900	4,1115	4,1320	4,1520	4,1715	4,1900	4,2080
0,55	4,0200	4,0430	4,0650	4,0855	4,1050	4,1240	4,1420	4,1595	4,1770
0,60	3,9990	4,0210	4,0420	4,0615	4,0805	4,0985	4,1155	4,1320	4,1485
0,65	3,9795	4,0010	4,0210	4,0400	4,0580	4,0750	4,0910	4,1070	4,1220
0,70	3,9615	3,9825	4,0020	4,0200	4,0370	4,0535	4,0690	4,0840	4,0980
0,75	3,9450	3,9650	3,9840	4,0015	4,0180	4,0340	4,0490	4,0630	4,0760
0,80	3,9295	3,9455	3,9665	3,9835	4,0000	4,0155	4,0300	4,0430	4,0550
0,85	3,9140	3,9325	3,9500	3,9665	3,9825	3,9975	4,0115	4,0240	4,0355
0,90	3,8990	3,9170	3,9340	3,9500	3,9650	3,9795	3,9930	4,0050	4,0165
0,95	3,8840	3,9015	3,9180	3,9335	3,9480	3,9620	3,9750	3,9870	3,995
1,00	3,8695	3,8865	3,9025	3,9175	3,9315	3,9450	3,9580	3,9700	3,9810

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 60^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	4,3210	4,3730	4,4235	4,4735	4,5230	4,5730	4,6230	4,6720	4,7200
0,15	4,2570	4,3020	4,3460	4,3890	4,4325	4,4765	4,5205	4,5650	4,6090
0,20	4,2065	4,2460	4,2840	4,3210	4,3580	4,3950	4,4325	4,4705	4,5095
0,25	4,1630	4,1990	4,2330	4,2655	4,2975	4,3290	4,3610	4,3940	4,4275
0,30	4,1255	4,1580	4,1890	4,2185	4,2470	4,2750	4,3025	4,3315	4,3595
0,35	4,0925	4,1225	4,1510	4,1780	4,2040	4,2295	4,2545	4,279	

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 65^\circ$ 

$c \backslash v_0$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0,20	3,7815	3,8800	3,9555	4,0180	4,0695	4,1165	4,1600	4,2095	4,2390
0,25	3,7670	3,8605	3,9300	3,9875	4,0350	4,0780	4,1170	4,1535	4,1880
0,30	3,7530	3,8420	3,9070	3,9600	4,0045	4,0440	4,0790	4,1120	4,1430
0,35	3,7395	3,8250	3,8800	3,9350	3,9770	4,0135	4,0455	4,0755	4,1040
0,40	3,7265	3,8090	3,8650	3,9120	3,9515	3,9860	4,0160	4,0435	4,0685
0,45	3,7140	3,7935	3,8475	3,8910	3,9280	3,9605	3,9890	4,0145	4,0385
0,50	3,7020	3,7785	3,8300	3,8715	3,9065	3,9370	3,9640	3,9880	4,0105
0,55	3,6900	3,7645	3,8135	3,8530	3,8860	3,9145	3,9400	3,9635	3,9855
0,60	3,6785	3,7510	3,7975	3,8350	3,8660	3,8930	3,9175	3,9405	3,9620

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 2^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	0,1530	0,2495	0,3285	0,3945	0,4515	0,5020	0,5470	0,5870	0,6240
0,15	0,1530	0,2495	0,3280	0,3935	0,4500	0,5000	0,5445	0,5845	0,6210
0,20	0,1530	0,2495	0,3275	0,3925	0,4490	0,4985	0,5425	0,5820	0,6180
0,25	0,1525	0,2490	0,3275	0,3926	0,4480	0,4970	0,5405	0,5795	0,6150
0,30	0,1525	0,2490	0,3270	0,3910	0,4465	0,4950	0,5380	0,5765	0,6120
0,35	0,1525	0,2485	0,3265	0,3905	0,4450	0,4930	0,5355	0,5740	0,6090
0,40	0,1525	0,2485	0,3265	0,3900	0,4440	0,4910	0,5335	0,5715	0,6060
0,45	0,1525	0,2485	0,3260	0,3890	0,4425	0,4895	0,5315	0,5600	0,6035
0,50	0,1520	0,2480	0,3255	0,3880	0,4410	0,4880	0,5295	0,5670	0,6010
0,55	0,1520	0,2480	0,3250	0,3870	0,4400	0,4863	0,5275	0,5645	0,5985
0,60	0,1520	0,2480	0,3250	0,3865	0,4385	0,4845	0,5255	0,5625	0,5960
0,65	0,1515	0,2475	0,3245	0,3855	0,4375	0,4830	0,5235	0,5600	0,5930
0,70	0,1515	0,2475	0,3240	0,3845	0,4360	0,4815	0,5220	0,5580	0,5905
0,75	0,1510	0,2470	0,3235	0,3835	0,4350	0,4800	0,5200	0,5555	0,5880
0,80	0,1510	0,2470	0,3230	0,3830	0,4335	0,4780	0,5180	0,5535	0,5855
0,85	0,1505	0,2465	0,3225	0,3820	0,4325	0,4765	0,5160	0,5515	0,5839
0,90	0,1505	0,2465	0,3220	0,3810	0,4310	0,4750	0,5140	0,5490	0,5805
0,95	0,1505	0,2465	0,3220	0,3805	0,4300	0,4735	0,5125	0,5470	0,5780
1,00	0,1500	0,2460	0,3215	0,3795	0,4285	0,4720	0,5105	0,5450	0,5760

Таблица  $\lg X$   $\theta_0 = 70^\circ$ 

$c \backslash v_0$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0,20	3,7065	3,8055	3,8815	3,9445	3,9975	4,0455	4,0895	4,1305	4,1695
0,25	3,6920	3,7865	3,8570	3,9150	3,9640	4,0075	4,0470	4,0840	4,1190
0,30	3,6780	3,7685	3,8345	3,8885	3,9340	3,9740	4,0100	4,0430	4,0740
0,35	3,6645	3,7515	3,8140	3,8640	3,9065	3,9435	3,9765	4,0065	4,0345
0,40	3,6515	3,7355	3,7945	3,8410	3,8810	3,9160	3,9465	3,9740	3,9990
0,45	3,6395	3,7205	3,6760	3,8200	3,8575	3,8905	3,9190	3,9445	3,9675
0,50	3,6280	3,7060	3,7585	3,8000	3,8350	3,8660	3,8935	3,9175	3,9390
0,55	3,6165	3,6920	3,7420	3,7810	3,7140	3,8430	3,8690	3,8925	3,9135
0,60	3,6050	3,6785	3,7260	3,7630	3,7940	3,8215	3,8465	3,8695	3,8905

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 2^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	0,6240	0,6580	0,6890	0,7180	0,7450	0,7705	0,7945	0,8170	0,8385
0,15	0,6210	0,6545	0,6850	0,7135	0,7405	0,7655	0,7890	0,8115	0,8325
0,20	0,6180	0,6510	0,6815	0,7095	0,7360	0,7610	0,7840	0,8060	0,8265
0,25	0,6150	0,6475	0,6775	0,7055	0,7315	0,7560	0,7790	0,8005	0,8210
0,30	0,6120	0,6445	0,6740	0,7015	0,7275	0,7515	0,7740	0,7950	0,8153
0,35	0,6090	0,6410	0,6705	0,6975	0,7220	0,7470	0,7690	0,7900	0,8100
0,40	0,6060	0,6380	0,6670	0,6940	0,7190	0,7425	0,7645	0,7850	0,8045
0,45	0,6035	0,6350	0,6640	0,6905	0,7150	0,7380	0,7600	0,7805	0,7995
0,50	0,6010	0,6320	0,6605	0,6865	0,7110	0,7340	0,7555	0,7755	0,7945
0,55	0,5985	0,6295	0,6575	0,6830	0,7070	0,7295	0,7510	0,7710	0,7895
0,60	0,5960	0,6265	0,6540	0,6795	0,7035	0,7255	0,7465	0,7660	0,7845
0,65	0,5930	0,6235	0,6510	0,6760	0,6995	0,7215	0,7420	0,7615	0,7800
0,70	0,5905	0,6205	0,6480	0,6730	0,6960	0,7175	0,7380	0,7570	0,7755
0,75	0,5880	0,6175	0,6445	0,6695	0,6925	0,7140	0,7340	0,7530	0,7710
0,80	0,5855	0,6145	0,6410	0,6660	0,6890	0,7105	0,7305	0,7490	0,7665
0,85	0,5830	0,6115	0,6380	0,6625	0,6855	0,7065	0,7265	0,7450	0,7620
0,90	0,5805	0,6090	0,6355	0,6595	0,6820	0,7030	0,7225	0,7410	0,7580
0,95	0,5780	0,6065	0,6325	0,6565	0,6785	0,6995	0,7190	0,7370	0,7535
1,00	0,5760	0,6040	0,6295	0,6530	0,6750	0,6955	0,7150	0,7330	0,7495

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 5^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	0,5500	0,6465	0,7245	0,7895	0,8450	0,8940	0,9375	0,9770	1,0125
0,15	0,5500	0,6460	0,7235	0,7875	0,8415	0,8895	0,9320	0,9705	1,0050
0,20	0,5495	0,6455	0,7230	0,7860	0,8385	0,8855	0,9270	0,9640	0,9975
0,25	0,5495	0,6450	0,7220	0,7840	0,8355	0,8815	0,9220	0,9580	0,9910
0,30	0,5490	0,6445	0,7210	0,7820	0,8325	0,8775	0,9170	0,9525	0,9845
0,35	0,5490	0,6445	0,7205	0,7800	0,8300	0,8740	0,9125	0,9470	0,9785
0,40	0,5485	0,6440	0,7200	0,7780	0,8275	0,8705	0,9080	0,9420	0,9725
0,45	0,5485	0,6435	0,7190	0,7760	0,8250	0,8670	0,9035	0,9370	0,9670
0,50	0,5480	0,6430	0,7185	0,7745	0,8225	0,8635	0,8995	0,9320	0,9615
0,55	0,5480	0,6425	0,7175	0,7725	0,8200	0,8600	0,8955	0,9275	0,9565
0,60	0,5480	0,6425	0,7170	0,7710	0,8175	0,8565	0,8915	0,9230	0,9515
0,65	0,5475	0,6420	0,7160	0,7695	0,8155	0,8535	0,8875	0,9185	0,9465
0,70	0,5470	0,6415	0,7150	0,7680	0,8130	0,8505	0,8840	0,9145	0,9420
0,75	0,5465	0,6410	0,7140	0,7665	0,8105	0,8475	0,8805	0,9105	0,9375
0,80	0,5460	0,6405	0,7130	0,7650	0,8080	0,8445	0,8770	0,9065	0,9330
0,85	0,5455	0,6400	0,7120	0,7635	0,8055	0,8415	0,8735	0,9025	0,9285
0,90	0,5450	0,6390	0,7110	0,7620	0,8030	0,8385	0,8700	0,8985	0,9240
0,95	0,5445	0,6385	0,7105	0,7605	0,8005	0,8355	0,8670	0,8960	0,9200
1,00	0,5440	0,6380	0,7095	0,7590	0,7985	0,8330	0,8640	0,8915	0,9160

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 10^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	0,8490	0,9445	1,0220	1,0850	1,1385	1,1855	1,2275	1,2650	1,2990
0,15	0,8485	0,9440	1,0205	1,0815	1,1325	1,1775	1,2175	1,2535	1,2865
0,20	0,8480	0,9430	1,0190	1,0780	1,1265	1,1700	1,2085	1,2430	1,2745
0,25	0,8470	0,9420	1,0175	1,0745	1,1210	1,1630	1,2000	1,2330	1,2630
0,30	0,8465	0,9415	1,0160	1,0715	1,1160	1,1560	1,1920	1,2240	1,2525
0,35	0,8460	0,9410	1,0145	1,0685	1,1115	1,1500	1,1845	1,2155	1,2430
0,40	0,8455	0,9400	1,0130	1,0655	1,1070	1,1440	1,1775	1,2075	1,2340
0,45	0,8455	0,9390	1,0110	1,0625	1,1025	1,1385	1,1710	1,2000	1,2255
0,50	0,8450	0,9380	1,0095	1,0595	1,0985	1,1335	1,1650	1,1930	1,2175
0,55	0,8445	0,9370	1,0080	1,0570	1,0950	1,1290	1,1590	1,1860	1,2095
0,60	0,8435	0,9360	1,0065	1,0545	1,0920	1,1250	1,1535	1,1790	1,2020
0,65	0,8430	0,9350	1,0050	1,0520	1,0890	1,1205	1,1485	1,1730	1,1955
0,70	0,8420	0,9335	1,0030	1,0500	1,0860	1,1165	1,1435	1,1675	1,1895
0,75	0,8415	0,9325	1,0015	1,0480	1,0830	1,1125	1,1390	1,1625	1,1835
0,80	0,8410	0,9320	1,0005	1,0460	1,0800	1,1090	1,1345	1,1575	1,1780
0,85	0,8400	0,9310	0,9990	1,0440	1,0770	1,1055	1,1305	1,1530	1,1730
0,90	0,8390	0,9300	0,9980	1,0420	1,0740	1,1020	1,1265	1,1485	1,1680
0,95	0,8385	0,9295	0,9970	1,0400	1,0715	1,0985	1,1225	1,1440	1,1630
1,00	0,8380	0,9285	0,9955	1,0380	1,0690	1,0955	1,1190	1,1400	1,1585

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 5^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	1,0125	1,0450	1,0755	1,1035	1,1295	1,1540	1,1770	1,1985	1,2185
0,15	1,0050	1,0365	1,0660	1,0930	1,1180	1,1420	1,1645	1,1855	1,2050
0,20	0,9975	1,0285	1,0570	1,0830	1,1075	1,1305	1,1525	1,1730	1,1920
0,25	0,9910	1,0210	1,0485	1,0740	1,0975	1,1200	1,1415	1,1615	1,1800
0,30	0,9845	1,0140	1,0410	1,0655	1,0885	1,1105	1,1310	1,1505	1,1685
0,35	0,9785	1,0070	1,0335	1,0580	1,0805	1,1015	1,1215	1,1400	1,1575
0,40	0,9725	1,0005	1,0265	1,0505	1,0725	1,0930	1,1120	1,1470	
0,45	0,9670	0,9945	1,0195	1,0430	1,0645	1,0845	1,1030	1,1205	1,1370
0,50	0,9615	0,9885	1,0130	1,0360	1,0570	1,0765	1,0945	1,1115	1,1275
0,55	0,9565	0,9830	1,0070	1,0295	1,0500	1,0690	1,0865	1,1030	1,1185
0,60	0,9515	0,9775	1,0010	1,0230	1,0430	1,0615	1,0790	1,0950	1,1100
0,65	0,9465	0,9720	0,9955	1,0170	1,0365	1,0545	1,0715	1,0870	1,1020
0,70	0,9420	0,9670	0,9900	1,0110	1,0300	1,0475	1,0640	1,0795	1,0940
0,75	0,9375	0,9620	0,9845	1,0050	1,0235	1,0405	1,0565	1,0720	1,0865
0,80	0,9330	0,9570	0,9790	0,9990	1,0170	1,0340	1,0495	1,0645	1,0790
0,85	0,9285	0,9520	0,9735	0,9930	1,0110	1,0275	1,0430	1,0575	1,0715
0,90	0,9240	0,9475	0,9685	0,9875	1,0050	1,0215	1,0365	1,0505	1,0640
0,95	0,9200	0,9430	0,9635	0,9825	0,9995	1,0155	1,0300	1,0440	1,0570
1,00	0,9160	0,9385	0,9590	0,9775	0,9940	1,0095	1,0240	1,0375	1,0505

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 10^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	1,2900	1,3300	1,3585	1,3850	1,4095	1,4325	1,4545	1,4750	1,4945
0,15	1,2865	1,3160	1,3430	1,3680	1,3915	1,4135	1,4340	1,4535	1,4715
0,20	1,2745	1,3030	1,3290	1,3525	1,3745	1,3955	1,4150	1,4330	1,4500
0,25	1,2630	1,2905	1,3155	1,3380	1,3590	1,3790	1,3975	1,4145	1,4305
0,30	1,2525	1,2785	1,3025	1,3245	1,3450	1,3640	1,3815	1,3975	1,4125
0,35	1,2430	1,2680	1,2910	1,3120	1,3315	1,3495	1,3660	1,3815</	

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 15^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	1,0220	1,1170	1,1935	1,2550	1,3065	1,3520	1,3925	1,4285	1,4615
0,15	1,0215	1,1160	1,1915	1,2500	1,2980	1,3410	1,3790	1,4130	1,4440
0,20	1,0205	1,1150	1,1895	1,2455	1,2905	1,3310	1,3670	1,3990	1,4280
0,25	1,0195	1,1140	1,1875	1,2410	1,2835	1,3215	1,3555	1,3860	1,4135
0,30	1,0185	1,1125	1,1855	1,2370	1,2770	1,3130	1,3455	1,3745	1,4005
0,35	1,0175	1,1110	1,1830	1,2330	1,2715	1,3055	1,3360	1,3635	1,3885
0,40	1,0170	1,1100	1,1810	1,2295	1,2665	1,2990	1,3280	1,3540	1,3775
0,45	1,0165	1,1085	1,1790	1,2260	1,2615	1,2930	1,3210	1,3460	1,3680
0,50	1,0160	1,1075	1,1770	1,2225	1,2570	1,2875	1,3145	1,3385	1,3595
0,55	1,0150	1,1060	1,1750	1,2195	1,2530	1,2825	1,3085	1,3315	1,3520
0,60	1,0140	1,1045	1,1730	1,2170	1,2495	1,2780	1,3030	1,3250	1,3450
0,65	1,0130	1,1030	1,1710	1,2145	1,2460	1,2735	1,2975	1,3190	1,3385
0,70	1,0120	1,1015	1,1690	1,2120	1,2425	1,2690	1,2920	1,3130	1,3320
0,75	1,0110	1,1000	1,1670	1,2095	1,2390	1,2630	1,2875	1,3075	1,3255
0,80	1,0095	1,0985	1,1650	1,2070	1,2355	1,2610	1,2830	1,3025	1,3200
0,85	1,0085	1,0975	1,1635	1,2045	1,2325	1,2575	1,2790	1,2980	1,3150
0,90	1,0075	1,0960	1,1615	1,2020	1,2295	1,2540	1,2750	1,2935	1,3100
0,95	1,0070	1,0950	1,1595	1,1995	1,2265	1,2505	1,2710	1,2800	1,3050
1,00	1,0060	1,0935	1,1575	1,1970	1,2235	1,2470	1,2675	1,2850	1,3005

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 20^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	1,1415	1,2370	1,3130	1,3735	1,4230	1,4670	1,5065	1,5415	1,5730
0,15	1,1405	1,2355	1,3105	1,3675	1,4135	1,4545	1,4910	1,5235	1,5530
0,20	1,1400	1,2345	1,3080	1,3620	1,4050	1,4430	1,4770	1,5075	1,5350
0,25	1,1390	1,2330	1,3055	1,3570	1,3970	1,4325	1,4640	1,4925	1,5185
0,30	1,1380	1,2310	1,3030	1,3520	1,3900	1,4230	1,4525	1,4790	1,5035
0,35	1,1365	1,2290	1,3000	1,3475	1,3835	1,4145	1,4420	1,4670	1,4905
0,40	1,1355	1,2270	1,2970	1,3435	1,3780	1,4070	1,4330	1,4570	1,4790
0,45	1,1345	1,2250	1,2945	1,3395	1,3730	1,4005	1,4255	1,4480	1,4690
0,50	1,1335	1,2235	1,2920	1,3360	1,3680	1,3950	1,4190	1,4405	1,4600
0,55	1,1325	1,2220	1,2895	1,3325	1,3635	1,3900	1,4130	1,4335	1,4520
0,60	1,1315	1,2200	1,2870	1,3290	1,3595	1,3850	1,4070	1,4270	1,4450
0,65	1,1305	1,2185	1,2850	1,3260	1,3555	1,3800	1,4015	1,4210	1,4385
0,70	1,1290	1,2170	1,2830	1,3230	1,3515	1,3755	1,3965	1,4150	1,4320
0,75	1,1275	1,2155	1,2810	1,3200	1,3480	1,3715	1,3915	1,4095	1,4260
0,80	1,1265	1,2140	1,2785	1,3170	1,3445	1,3670	1,3865	1,4045	1,4205
0,85	1,1255	1,2125	1,2765	1,3145	1,3410	1,3630	1,3820	1,3995	1,4150
0,90	1,1245	1,2110	1,2740	1,3115	1,3375	1,3590	1,3780	1,3950	1,4100
0,95	1,1235	1,2090	1,2715	1,3080	1,3340	1,3555	1,3740	1,3905	1,4050
1,00	1,1220	1,2075	1,2695	1,3065	1,3310	1,3520	1,3705	1,3865	1,4005

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 15^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	1,4615	1,4915	1,5190	1,5445	1,5680	1,5900	1,6105	1,6300	1,6485
0,15	1,4440	1,4725	1,4985	1,5225	1,5445	1,5650	1,5840	1,6025	1,6195
0,20	1,4280	1,4550	1,4795	1,5020	1,5230	1,5425	1,5605	1,5775	1,5935
0,25	1,4135	1,4300	1,4620	1,4830	1,5030	1,5215	1,5390	1,5550	1,5700
0,30	1,4005	1,4240	1,4460	1,4660	1,4850	1,5025	1,5190	1,5345	1,5485
0,35	1,3885	1,4110	1,4320	1,4510	1,4690	1,4855	1,5010	1,5155	1,5290
0,40	1,3775	1,3990	1,4190	1,4375	1,4545	1,4705	1,4850	1,4985	1,5115
0,45	1,3680	1,3880	1,4070	1,4250	1,4415	1,4565	1,4705	1,4835	1,4955
0,50	1,3595	1,3785	1,3965	1,4140	1,4300	1,4445	1,4575	1,4700	1,4815
0,55	1,3520	1,3705	1,3875	1,4040	1,4195	1,4335	1,4460	1,4580	1,4690
0,60	1,3450	1,3630	1,3795	1,3950	1,4100	1,4235	1,4360	1,4475	1,4580
0,65	1,3385	1,3560	1,3720	1,3870	1,4010	1,4145	1,4265	1,4375	1,4480
0,70	1,3320	1,3490	1,3630	1,3795	1,3930	1,4060	1,4175	1,4285	1,4385
0,75	1,3255	1,3425	1,3580	1,3720	1,3850	1,3975	1,4090	1,4200	1,4300
0,80	1,3200	1,3365	1,3515	1,3650	1,3780	1,3900	1,4015	1,4120	1,4220
0,85	1,3150	1,3305	1,3450	1,3585	1,3710	1,3830	1,3940	1,4045	1,4140
0,90	1,3100	1,3250	1,3390	1,3520	1,3645	1,3760	1,3870	1,3970	1,4065
0,95	1,3050	1,3200	1,3335	1,3465	1,3585	1,3700	1,3805	1,3905	1,3995
1,00	1,3005	1,3150	1,3285	1,3410	1,3530	1,3640	1,3745	1,3840	1,3930

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 20^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	1,5730	1,6020	1,6290	1,6540	1,6770	1,6985	1,7185	1,7375	1,7560
0,15	1,5530	1,5800	1,6030	1,6280	1,6495	1,6695	1,6880	1,7060	1,7230
0,20	1,5350	1,5600	1,5830	1,6045	1,6245	1,6430	1,6605	1,6775	1,6935
0,25	1,5185	1,5420	1,5635	1,5835	1,6020	1,6195	1,6360	1,6520	1,6670
0,30	1,5035	1,5200	1,5465	1,5650	1,5825	1,5990	1,6145	1,6290	1,6430
0,35	1,4905	1,5120	1,5315	1,5490	1,5665	1,5805	1,5950		

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 25^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	1,2330	1,3285	1,4040	1,4635	1,5115	1,5545	1,5930	1,6275	1,6580
0,15	1,2315	1,3265	1,4010	1,4565	1,5010	1,5405	1,5755	1,6070	1,6350
0,20	1,2305	1,3245	1,3975	1,4500	1,4915	1,5280	1,5600	1,5990	1,6150
0,25	1,2290	1,3225	1,3945	1,4445	1,4830	1,5165	1,5465	1,5730	1,5975
0,30	1,2280	1,3205	1,3915	1,4395	1,4760	1,5070	1,5345	1,5590	1,5820
0,35	1,2265	1,3185	1,3885	1,4350	1,4605	1,4985	1,5240	1,5470	1,5685
0,40	1,2255	1,3165	1,3865	1,4303	1,4635	1,4910	1,5150	1,5365	1,5565
0,45	1,2245	1,3145	1,3825	1,4260	1,4580	1,4840	1,5070	1,5275	1,5465
0,50	1,2230	1,3125	1,3795	1,4220	1,4525	1,4775	1,4995	1,5195	1,5375
0,55	1,2220	1,3105	1,3765	1,4180	1,4475	1,4720	1,4930	1,5120	1,5295
0,60	1,2210	1,3085	1,3735	1,4140	1,4430	1,4670	1,4875	1,5055	1,5225
0,65	1,2195	1,3065	1,3710	1,4105	1,4385	1,4620	1,4820	1,4995	1,5160
0,70	1,2180	1,3045	1,3685	1,4070	1,4345	1,4570	1,4765	1,4940	1,5100
0,75	1,2165	1,3025	1,3660	1,4035	1,4305	1,4525	1,4715	1,4885	1,5045
0,80	1,2150	1,3005	1,3635	1,4005	1,4270	1,4480	1,4665	1,4835	1,4990
0,85	1,2140	1,2985	1,3610	1,3975	1,4235	1,4440	1,4620	1,4785	1,4935
0,90	1,2125	1,2965	1,3585	1,3945	1,4200	1,4400	1,4575	1,4735	1,4880
0,95	1,2110	1,2945	1,3560	1,3920	1,4165	1,4360	1,4530	1,4690	1,4830
1,00	1,2100	1,2930	1,3540	1,3895	1,4135	1,4325	1,4490	1,4645	1,4785

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 30^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	1,3060	1,4010	1,4760	1,5350	1,5820	1,6240	1,6615	1,6955	1,7260
0,15	1,3040	1,3985	1,4725	1,5275	1,5710	1,6090	1,6430	1,6735	1,7010
0,20	1,3025	1,3965	1,4690	1,5210	1,5610	1,5960	1,6270	1,6545	1,6795
0,25	1,3010	1,3945	1,4655	1,5150	1,5525	1,5845	1,6130	1,6380	1,6610
0,30	1,2995	1,3920	1,4620	1,5095	1,5450	1,5745	1,6005	1,6240	1,6455
0,35	1,2980	1,3895	1,4585	1,5045	1,5380	1,5660	1,5900	1,6120	1,6320
0,40	1,2965	1,3870	1,4550	1,4995	1,5315	1,5580	1,5810	1,6015	1,6205
0,45	1,2950	1,3845	1,4520	1,4950	1,5255	1,5510	1,5730	1,5925	1,6105
0,50	1,2940	1,3825	1,4485	1,4905	1,5200	1,5445	1,5655	1,5845	1,6020
0,55	1,2925	1,3805	1,4450	1,4860	1,5145	1,5380	1,5585	1,5770	1,5940
0,60	1,2915	1,3785	1,4420	1,4820	1,5095	1,5320	1,5520	1,5700	1,5865
0,65	1,2900	1,3760	1,4390	1,4780	1,5045	1,5265	1,5460	1,5635	1,5795
0,70	1,2885	1,3735	1,4360	1,4740	1,5000	1,5215	1,5400	1,5570	1,5725
0,75	1,2865	1,3710	1,4335	1,4705	1,4960	1,5170	1,5350	1,5515	1,5665
0,80	1,2850	1,3690	1,4310	1,4675	1,4925	1,5125	1,5300	1,5460	1,5605
0,85	1,2835	1,3665	1,4285	1,4645	1,4890	1,5085	1,5255	1,5410	1,5550
0,90	1,2825	1,3645	1,4260	1,4615	1,4855	1,5045	1,5210	1,5360	1,5500
0,95	1,2810	1,3625	1,4235	1,4585	1,4820	1,5005	1,5163	1,5315	1,5450
1,00	1,2795	1,3605	1,4210	1,4555	1,4785	1,4965	1,5125	1,5270	1,5400

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 25^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	1,6580	1,6860	1,7125	1,7370	1,7600	1,7820	1,8025	1,8220	1,8405
0,15	1,6350	1,6610	1,6850	1,7075	1,7290	1,7490	1,7685	1,8040	
0,20	1,6150	1,6390	1,6610	1,6820	1,7020	1,7205	1,7380	1,7550	1,7715
0,25	1,5975	1,6200	1,6405	1,6600	1,6780	1,6950	1,7115	1,7275	1,7425
0,30	1,5820	1,6030	1,6225	1,6405	1,6570	1,6730	1,6885	1,7030	1,7170
0,35	1,5685	1,5880	1,6065	1,6235	1,6390	1,6540	1,6685	1,6820	1,6950
0,40	1,5565	1,5750	1,5925	1,6085	1,6235	1,6375	1,6510	1,6635	1,6760
0,45	1,5465	1,5640	1,5805	1,5960	1,6100	1,6230	1,6355	1,6475	1,6590
0,50	1,5375	1,5545	1,5705	1,5850	1,5980	1,6100	1,6220	1,6335	1,6445
0,55	1,5295	1,5460	1,5615	1,5750	1,5875	1,5990	1,6100	1,6210	1,6315
0,60	1,5225	1,5385	1,5530	1,5660	1,5780	1,5890	1,5995	1,6100	1,6200
0,65	1,5160	1,5315	1,5455	1,5580	1,5695	1,5800	1,5900	1,6000	1,6100
0,70	1,5100	1,5250	1,5385	1,5505	1,5615	1,5715	1,5815	1,5910	1,6005
0,75	1,5045	1,5190	1,5320	1,5435	1,5540	1,5640	1,5735	1,5825	1,5915
0,80	1,4990	1,5130	1,5255	1,5365	1,5470	1,5565	1,5660	1,5750	1,5830
0,85	1,4935	1,5070	1,5190	1,5300	1,5400	1,5495	1,5585	1,5675	1,5755
0,90	1,4880	1,5010	1,5130	1,5235	1,5335	1,5430	1,5520	1,5605	1,5685
0,95	1,4830	1,4955	1,5070	1,5175	1,5270	1,5365	1,5455	1,5540	1,5615
1,00	1,4785	1,4905	1,5015	1,5115	1,5210	1,5300	1,5390	1,5475	1,5550

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 30^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	1,7260	1,7540	1,7800	1,8040	1,8270	1,8490	1,8700	1,8900	1,9090
0,15	1,7010	1,7265	1,7500	1,7725	1,7940	1,8145	1,8335	1,8520	1,8700
0,20	1,6795	1,7030	1,7245	1,7450	1,7650	1,7840	1,8015	1,8185	1,8350
0,25	1,6610	1,6825	1,7025	1,7215	1,7400	1,7575	1,7735	1,7890	1,8040
0,30	1,6455	1,6655	1,6840	1,7020	1,7185	1,7345	1,7495	1,7640	1,7775
0,35	1,6320	1,6510	1,6685	1,6850	1,7000	1,7145	1,7285	1,7420	

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 35^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	1,3635	1,4600	1,5350	1,5940	1,6400	1,6810	1,7175	1,7510	1,7815
0,15	1,3635	1,4575	1,5310	1,5860	1,6285	1,6655	1,6980	1,7280	1,7555
0,20	1,3615	1,4550	1,5270	1,5785	1,6180	1,6520	1,6820	1,7090	1,7335
0,25	1,3595	1,4525	1,5225	1,5720	1,6090	1,6405	1,6680	1,6925	1,7150
0,30	1,3580	1,4500	1,5195	1,5665	1,6015	1,6305	1,6560	1,6785	1,6995
0,35	1,3565	1,4470	1,5155	1,5615	1,5945	1,6220	1,6455	1,6665	1,6860
0,40	1,3545	1,4445	1,5120	1,5565	1,5880	1,6140	1,6360	1,6660	1,6745
0,45	1,3530	1,4420	1,5085	1,5515	1,5815	1,6065	1,6280	1,6470	1,6645
0,50	1,3515	1,4395	1,5050	1,5465	1,5755	1,5995	1,6205	1,6390	1,6555
0,55	1,3500	1,4370	1,5015	1,5420	1,5760	1,5930	1,6130	1,6310	1,6470
0,60	1,3485	1,4350	1,4980	1,5380	1,5650	1,5870	1,6060	1,6235	1,6390
0,65	1,3470	1,4325	1,4950	1,5340	1,5600	1,5810	1,5995	1,6165	1,6315
0,70	1,3455	1,4300	1,4920	1,5300	1,5550	1,5755	1,5935	1,6100	1,6250
0,75	1,3435	1,4275	1,4895	1,5265	1,5510	1,5710	1,5885	1,6040	1,6185
0,80	1,3420	1,4250	1,4865	1,5220	1,5470	1,5665	1,5835	1,5985	1,6125
0,85	1,3405	1,4225	1,4835	1,5195	1,5430	1,5620	1,5785	1,5930	1,6065
0,90	1,3390	1,4200	1,4805	1,5160	1,5395	1,5575	1,5735	1,5880	1,6010
0,95	1,3375	1,4180	1,4780	1,5130	1,5360	1,5535	1,5690	1,5830	1,5960
1,00	1,3360	1,4160	1,4755	1,5100	1,5325	1,5495	1,5645	1,5785	1,5915

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 40^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	1,4145	1,5000	1,5840	1,6430	1,6885	1,7290	1,7650	1,7980	1,8285
0,15	1,4125	1,5030	1,5795	1,6345	1,6770	1,7130	1,7450	1,7745	1,8015
0,20	1,4105	1,5035	1,5755	1,6270	1,6665	1,6995	1,7285	1,7550	1,7795
0,25	1,4085	1,5005	1,5715	1,6200	1,6570	1,6880	1,7145	1,7385	1,7610
0,30	1,4065	1,4980	1,5675	1,6140	1,6485	1,6775	1,7025	1,7250	1,7455
0,35	1,4045	1,4950	1,5635	1,6085	1,6415	1,6685	1,6920	1,7130	1,7320
0,40	1,4025	1,4920	1,5595	1,6035	1,6350	1,6605	1,6825	1,7025	1,7205
0,45	1,4005	1,4890	1,5555	1,5985	1,6285	1,6530	1,6740	1,6930	1,7100
0,50	1,3985	1,4860	1,5515	1,5935	1,6225	1,6460	1,6660	1,6840	1,7000
0,55	1,3970	1,4835	1,5480	1,5890	1,6165	1,6395	1,6590	1,6760	1,6910
0,60	1,3955	1,4810	1,5445	1,5845	1,6110	1,6330	1,6520	1,6683	1,6830
0,65	1,3940	1,4785	1,5410	1,5800	1,6060	1,6270	1,6455	1,6645	1,6755
0,70	1,3925	1,4760	1,5380	1,5760	1,6010	1,6215	1,6390	1,6545	1,6685
0,75	1,3905	1,4735	1,5350	1,5725	1,5965	1,6160	1,6330	1,6480	1,6620
0,80	1,3890	1,4710	1,5320	1,5685	1,5925	1,6115	1,6280	1,6425	1,6560
0,85	1,3875	1,4690	1,5290	1,5650	1,5885	1,6070	1,6230	1,6370	1,6500
0,90	1,3860	1,4665	1,5260	1,5615	1,5845	1,6025	1,6180	1,6320	1,6445
0,95	1,3845	1,4540	1,5230	1,5580	1,5805	1,5980	1,6135	1,6270	1,6395
1,00	1,3830	1,4620	1,5200	1,5545	1,5770	1,5940	1,6050	1,6225	1,6350

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 35^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	1,7815	1,8095	1,8355	1,8595	1,8825	1,9050	1,9265	1,9470	1,9665
0,15	1,7535	1,7810	1,8045	1,8270	1,8485	1,8690	1,8975	1,9260	
0,20	1,7335	1,7565	1,7780	1,7990	1,8190	1,8375	1,8555	1,8730	1,8900
0,25	1,7150	1,7360	1,7560	1,7750	1,7935	1,8105	1,8270	1,8430	1,8585
0,30	1,6995	1,7190	1,7375	1,7545	1,7710	1,7870	1,8020	1,8170	1,8310
0,35	1,6860	1,7045	1,7215	1,7370	1,7520	1,7665	1,7805	1,7945	1,8075
0,40	1,6745	1,6915	1,7075	1,7220	1,7355	1,7490	1,7620	1,7750	1,7870
0,45	1,6645	1,6805	1,6950	1,7085	1,7215	1,7340	1,7465	1,7585	1,7695
0,50	1,6555	1,6705	1,6840	1,6970	1,7095	1,7215	1,7330	1,7440	1,7540
0,55	1,6470	1,6610	1,6740	1,6865	1,6985	1,7100	1,7210	1,7310	1,7405
0,60	1,6390	1,6525	1,6650	1,6770	1,6885	1,6995	1,7100	1,7195	1,7290
0,65	1,6315	1,6450	1,6570	1,6685	1,6725	1,6895	1,6995	1,7185	
0,70	1,6230	1,6380	1,6495	1,6605	1,6710	1,6805	1,6900	1,6995	1,7090
0,75	1,6185	1,6315	1,6420	1,6535	1,6635	1,6725	1,6815	1,6910	1,7000
0,80	1,6125	1,6250	1,6335	1,6445	1,6560	1,6630	1,6740	1,6830	1,6915
0,85	1,6065	1,6190	1,6300	1,6400	1,6495	1,6585	1,6670	1,6755	1,6835
0,90	1,6010	1,6130	1,6240	1,6345	1,6430	1,6520	1,6600	1,6680	1,6750
0,95	1,5960	1,6080	1,6185	1,6280	1,6370	1,6455	1,6535	1,6610	1,6685
1,00	1,5915	1,6030	1,6135	1,6225	1,6310	1,6395	1,6475	1,6545	1,6615

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 40^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	1,8285	1,8565	1,8825	1,9070	1,9305	1,9530	1,9750	1,9960	2,0160
0,15	1,8015	1,8270	1,8505	1,8730	1,8950	1,9160	1,9360	1,9555	1,9740
0,20	1,7795	1,8025	1,8240	1,8450	1,8890	1,9025	1,9205	1,9380	
0,25	1,7610	1,7820	1,8020	1,8210	1,8390	1,8565	1,8735	1,8900	1,9060
0,30	1,7455	1,7650	1,7830	1,8000	1,8165	1,8325	1,8480	1,8630	1,8780
0,35	1,7320	1,7500	1,7665	1,7820	1,7970	1,8120	1,8260	1,8400	1,8535

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 45^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	1,4555	1,5500	1,6250	1,6835	1,7295	1,7695	1,8055	1,8380	1,8680
0,15	1,4535	1,5470	1,6205	1,6750	1,7180	1,7535	1,7855	1,8145	1,8415
0,20	1,4515	1,5440	1,6160	1,6675	1,7075	1,7400	1,7690	1,7950	1,8195
0,25	1,4490	1,5410	1,6115	1,6605	1,6975	1,7280	1,7545	1,7785	1,8010
0,30	1,4470	1,5380	1,6075	1,6540	1,6890	1,7175	1,7420	1,7645	1,7850
0,35	1,4450	1,5350	1,6035	1,6485	1,6815	1,7085	1,7315	1,7525	1,7715
0,40	1,4430	1,5320	1,5990	1,6435	1,6750	1,7005	1,7220	1,7415	1,7595
0,45	1,4410	1,5290	1,5950	1,6380	1,6685	1,6930	1,7135	1,7320	1,7485
0,50	1,4390	1,5260	1,5910	1,6330	1,6620	1,6855	1,7055	1,7230	1,7385
0,55	1,4375	1,5235	1,5875	1,6285	1,6560	1,6785	1,6975	1,7145	1,7295
0,60	1,4355	1,5205	1,5840	1,6240	1,6505	1,6720	1,6905	1,7070	1,7215
0,65	1,4340	1,5180	1,5805	1,6195	1,6450	1,6660	1,6840	1,6995	1,7135
0,70	1,4325	1,5155	1,5770	1,6150	1,6400	1,6605	1,6775	1,6925	1,7060
0,75	1,4305	1,5130	1,5735	1,6110	1,6335	1,6550	1,6715	1,6860	1,6995
0,80	1,4285	1,5105	1,5700	1,6070	1,6310	1,6500	1,6660	1,6800	1,6930
0,85	1,4265	1,5080	1,5670	1,6030	1,6265	1,6450	1,6610	1,6745	1,6870
0,90	1,4250	1,5055	1,5640	1,5990	1,6220	1,6400	1,6560	1,6695	1,6815
0,95	1,4235	1,5030	1,5610	1,5950	1,6180	1,6355	1,6510	1,6645	1,6765
1,00	1,4220	1,5005	1,5580	1,5915	1,6145	1,6315	1,6465	1,6595	1,6715

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 50^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	1,4605	1,5850	1,6595	1,7180	1,7645	1,8040	1,8400	1,8725	1,9025
0,15	1,4880	1,5820	1,6550	1,7095	1,7525	1,7880	1,8200	1,8490	1,8760
0,20	1,4860	1,5785	1,6500	1,7015	1,7415	1,7745	1,8035	1,8295	1,8535
0,25	1,4835	1,5755	1,6455	1,6945	1,7315	1,7625	1,7890	1,8130	1,8350
0,30	1,4810	1,5720	1,6410	1,6880	1,7230	1,7515	1,7760	1,7985	1,8190
0,35	1,4790	1,5690	1,6370	1,6825	1,7155	1,7420	1,7650	1,7860	1,8050
0,40	1,4770	1,5660	1,6325	1,6770	1,7085	1,7340	1,7555	1,7750	1,7925
0,45	1,4750	1,5630	1,6285	1,6715	1,7020	1,7265	1,7470	1,7650	1,7815
0,50	1,4735	1,5600	1,6245	1,6665	1,6955	1,7190	1,7390	1,7560	1,7715
0,55	1,4715	1,5575	1,6210	1,6615	1,6895	1,7120	1,7310	1,7475	1,7625
0,60	1,4695	1,5543	1,6175	1,6570	1,6835	1,7030	1,7235	1,7400	1,7545
0,65	1,4675	1,5515	1,6135	1,6525	1,6780	1,6990	1,7165	1,7325	1,7465
0,70	1,4660	1,5490	1,6095	1,6480	1,6730	1,6935	1,7105	1,7255	1,7390
0,75	1,4640	1,5465	1,6060	1,6435	1,6685	1,6880	1,7045	1,7190	1,7320
0,80	1,4620	1,5440	1,6025	1,6290	1,6540	1,6830	1,6985	1,7125	1,7250
0,85	1,4600	1,5410	1,5990	1,6350	1,6590	1,6775	1,6930	1,7065	1,7190
0,90	1,4580	1,5380	1,5960	1,6310	1,6545	1,6725	1,6880	1,7010	1,7130
0,95	1,4560	1,5355	1,5930	1,6270	1,6505	1,6680	1,6830	1,6960	1,7075
1,00	1,4545	1,5335	1,5900	1,6230	1,6465	1,6640	1,6785	1,6910	1,7025

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 45^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	1,8680	1,8960	1,9225	1,9475	1,9715	1,9945	2,0165	2,0380	2,0590
0,15	1,8415	1,8665	1,8905	1,9135	1,9355	1,9565	1,9770	1,9970	1,0165
0,20	1,8195	1,8425	1,8640	1,8830	1,9050	1,9240	1,9430	1,9615	1,9800
0,25	1,8010	1,8220	1,8415	1,8605	1,8785	1,8960	1,9135	1,9305	1,9475
0,30	1,7850	1,8045	1,8225	1,8395	1,8560	1,8720	1,8880	1,9035	1,9190
0,35	1,7715	1,7890	1,8055	1,8210	1,8365	1,8515	1,8660	1,8800	1,8940
0,40	1,7595	1,7760	1,7910	1,8050	1,8195	1,8335	1,8470	1,8600	1,8725
0,45	1,7485	1,7640	1,7780	1,7915	1,8050	1,8180	1,8315	1,8425	1,8540
0,50	1,7385	1,7530	1,7665	1,7795	1,7920	1,8045	1,8160	1,8270	1,8375
0,55	1,7295	1,7430	1,7560	1,7685	1,7805	1,7920	1,8030	1,8135	1,8230
0,60	1,7215	1,7345	1,7470	1,7585	1,7700	1,7810	1,7915	1,8010	1,8100
0,65	1,7135	1,7265	1,7380	1,7490	1,7600	1,7705	1,7805	1,7895	
0,70	1,7060	1,7185	1,7300	1,7405	1,7510	1,7615	1,7710	1,7795	
0,75	1,6995	1,7115	1,7225	1,7330	1,7430	1,7530	1,7620	1,7705	
0,80	1,6930	1,7050	1,7160	1,7260	1,7355	1,7450	1,7535	1,7620	
0,85	1,6870	1,6985	1,7095	1,7195	1,7185	1,7375	1,7460	1,7540	
0,90	1,6815	1,6925	1,7030	1,7125	1,7215	1,7300	1,7385	1,7465	
0,95	1,6765	1,6875	1,6975	1,7065	1,7150	1,7235	1,7320	1,7395	
1,00	1,6715	1,6825	1,6920	1,7005	1,7085	1,7170	1,7255	1,7330	

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 50^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	1,9025	1,9305	1,9570	1,9825	2,0070	2,0300	2,0525	2,0745	2,0960
0,15	1,8760	1,9010	1,9250	1,9485	1,9705	1,9915	2,0125	2,0335	2,0535
0,20	1,8535	1,8765	1,8985	1,9195	1,9395	1,9590	1,9780	1,9975	2,0165
0,25	1,8350	1,8560	1,8755	1,8945	1,9130	1,9310	1,9485	1,9660	1,9835
0,30	1,8190	1,8380	1,8560	1,8735	1,8905	1,9085	1,9230	1,9390	1,9545
0,35	1,8050	1,8225	1,8390	1,8550	1,8705	1,8855	1,9005	1,9150	1,9295
0,40	1,7925	1,8090							

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 55^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	1,5195	1,6140	1,6885	1,7470	1,7940	1,8385	1,8695	1,9020	1,9320
0,15	1,5170	1,6110	1,6840	1,7385	1,7815	1,8175	1,8495	1,8785	1,9055
0,20	1,5150	1,6075	1,6790	1,7305	1,7705	1,8035	1,8325	1,8585	1,8830
0,25	1,5125	1,6040	1,6740	1,7235	1,7605	1,7915	1,8180	1,8420	1,8640
0,30	1,5100	1,6005	1,6695	1,7170	1,7520	1,7805	1,8050	1,8275	1,8480
0,35	1,5075	1,5975	1,6650	1,7110	1,7440	1,7710	1,7940	1,8150	1,8340
0,40	1,5055	1,5945	1,6610	1,7055	1,7365	1,7625	1,7840	1,8035	1,8210
0,45	1,5035	1,5915	1,6570	1,7000	1,7345	1,7750	1,7935	1,8100	
0,50	1,5020	1,5885	1,6530	1,6945	1,7235	1,7470	1,7670	1,7845	1,8000
0,55	1,5000	1,5855	1,6490	1,6895	1,7175	1,7400	1,7590	1,7760	1,7910
0,60	1,4990	1,5830	1,6455	1,6845	1,7115	1,7320	1,7515	1,7680	1,7825
0,65	1,4960	1,5800	1,6415	1,6800	1,7065	1,7270	1,7445	1,7605	1,7745
0,70	1,4940	1,5770	1,6375	1,6755	1,7015	1,7210	1,7380	1,7535	1,7670
0,75	1,4920	1,5745	1,6340	1,6710	1,6965	1,7155	1,7320	1,7465	1,7595
0,80	1,4900	1,5720	1,6305	1,6665	1,6920	1,7105	1,7260	1,7400	1,7525
0,85	1,4880	1,5690	1,6270	1,6625	1,6870	1,7050	1,7205	1,7340	1,7460
0,90	1,4860	1,5660	1,6235	1,6585	1,6825	1,7000	1,7150	1,7280	1,7405
0,95	1,4840	1,5635	1,6205	1,6545	1,6780	1,6935	1,7100	1,7230	1,7340
1,00	1,4825	1,5615	1,6175	1,6505	1,6740	1,6910	1,7055	1,7180	1,7290

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 60^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	1,5435	1,6380	1,7130	1,7715	1,8185	1,8585	1,8940	1,9265	1,9565
0,15	1,5410	1,6345	1,7080	1,7625	1,8060	1,8420	1,8740	1,9030	1,9300
0,20	1,5385	1,6310	1,7030	1,7545	1,7950	1,8280	1,8570	1,8835	1,9080
0,25	1,5365	1,6275	1,6980	1,7475	1,7850	1,8160	1,8425	1,8665	1,8890
0,30	1,5340	1,6245	1,6935	1,7410	1,7760	1,8050	1,8300	1,8520	1,8725
0,35	1,5315	1,6210	1,6890	1,7350	1,7680	1,7955	1,8185	1,8395	1,8585
0,40	1,5295	1,6180	1,6845	1,7295	1,7605	1,7865	1,8085	1,8280	1,8460
0,45	1,5270	1,6150	1,6805	1,7240	1,7535	1,7780	1,7990	1,8175	1,8345
0,50	1,5250	1,6120	1,6765	1,7185	1,7470	1,7795	1,7905	1,8085	1,8245
0,55	1,5235	1,6090	1,6725	1,7130	1,7410	1,7635	1,7825	1,8000	1,8150
0,60	1,5215	1,6060	1,6690	1,7080	1,7355	1,7570	1,7750	1,7915	1,8060
0,65	1,5195	1,6030	1,6650	1,7035	1,7305	1,7505	1,7680	1,7835	1,7975
0,70	1,5175	1,6000	1,6615	1,6990	1,7255	1,7445	1,7615	1,7765	1,7900
0,75	1,5155	1,5975	1,6580	1,6945	1,7205	1,7390	1,7550	1,7695	1,7825
0,80	1,5135	1,5950	1,6545	1,6900	1,7155	1,7335	1,7490	1,7630	1,7755
0,85	1,5115	1,5925	1,6510	1,6860	1,7105	1,7280	1,7435	1,7570	1,7690
0,90	1,5095	1,5900	1,6475	1,6815	1,7060	1,7230	1,7380	1,7510	1,7630
0,95	1,5075	1,5875	1,6440	1,6775	1,7015	1,7180	1,7325	1,7455	1,7570
1,00	1,5060	1,5850	1,6410	1,6735	1,6970	1,7135	1,7275	1,7405	1,7520

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 55^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	1,9320	1,9600	1,9865	2,0125	2,0370	2,0605	2,0835	2,1060	2,1280
0,15	1,9055	1,9310	1,9550	1,9780	2,0005	2,0220	2,0435	2,0650	2,0860
0,20	1,8830	1,9060	1,9280	1,9490	1,9695	1,9895	2,0090	2,0300	2,0485
0,25	1,8640	1,8850	1,9060	1,9245	1,9430	1,9615	1,9795	1,9975	2,0150
0,30	1,8480	1,8670	1,8855	1,9035	1,9205	1,9370	1,9535	1,9700	1,9855
0,35	1,8340	1,8515	1,8685	1,8850	1,9005	1,9155	1,9305	1,9455	1,9600
0,40	1,8210	1,8375	1,8535	1,8585	1,8830	1,8970	1,9110	1,9245	1,9380
0,45	1,8100	1,8255	1,8400	1,8540	1,8675	1,8805	1,8935	1,9060	1,9185
0,50	1,8000	1,8145	1,8280	1,8415	1,8540	1,8660	1,8780	1,8895	1,9010
0,55	1,7910	1,8045	1,8175	1,8300	1,8420	1,8535	1,8645	1,8750	1,8855
0,60	1,7825	1,7955	1,8075	1,8195	1,8310	1,8420	1,8520	1,8615	
0,65	1,7745	1,7870	1,7985	1,8010	1,8210	1,8310	1,8410	1,8505	1,8595
0,70	1,7670	1,7790	1,7909	1,8010	1,8115	1,8210	1,8305	1,8400	1,8485
0,75	1,7595	1,7710	1,7820	1,7925	1,8025	1,8120	1,8210	1,8300	1,8385
0,80	1,7525	1,7635	1,7740	1,7840	1,7940	1,8030	1,8125	1,8210	1,8295
0,85	1,7460	1,7570	1,7670	1,7765	1,7860	1,7955	1,8045	1,8130	
0,90	1,7400	1,7510	1,7610	1,7700	1,7790	1,7880	1,7970	1,8050	1,8130
0,95	1,7345	1,7450	1,7545	1,7635	1,7725	1,7815	1,7900	1,7980	1,8055
1,00	1,7290	1,7395	1,7485	1,7575	1,7665	1,7750	1,7830	1,7910	1,7980

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 60^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	1,9365	1,9845	2,0115	2,0375	2,0625	2,0865	2,1100	2,1325	2,1550
0,15	1,9300	1,9555	1,9800	2,0035	2,0265	2,0485	2,0700	2,0920	2,1135
0,20	1,9080	1,9310	1,9535	1,9750	1,9960	2,0160	2,0360	2,0560	2,0760
0,25	1,8890	1,9100	1,9305	1,9505	1,9695	1,9880	2,0065	2,0245	2,0425
0,30	1,8725	1,8920	1,9110	1,9290	1,9465	1,9635	1,9805	1,9970	2,0130
0,35	1,8585	1,8765	1,8935	1,9100	1,9265	1,9420	1,9575	1,9725	1,9870</td

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 65^\circ$ 

$c \backslash v_0$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0,20	1,7225	1,7745	1,8150	1,8485	1,8775	1,9040	1,9290	1,9525	1,9745
0,25	1,7175	1,7675	1,8050	1,8360	1,8630	1,8875	1,9100	1,9315	1,9520
0,30	1,7130	1,7610	1,7960	1,8250	1,8505	1,8730	1,8935	1,9130	1,9320
0,35	1,7085	1,7550	1,7880	1,8155	1,8390	1,8600	1,8790	1,8970	1,9145
0,40	1,7040	1,7490	1,7805	1,8065	1,8285	1,8485	1,8665	1,8830	1,8985
0,45	1,7000	1,7435	1,7735	1,7980	1,8190	1,8380	1,8550	1,8705	1,8845
0,50	1,6960	1,7380	1,7670	1,7905	1,8105	1,8285	1,8445	1,8590	1,8725
0,55	1,6920	1,7325	1,7610	1,7835	1,8025	1,8195	1,8345	1,8485	1,8615
0,60	1,6880	1,7275	1,7550	1,7765	1,7945	1,8110	1,8255	1,8385	1,8510

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 2^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0	2 00	2 00	2 00	2 00	2 00	2 00	2 00	2 00	2 00
0,10	2 00	2 01	2 01	2 02	2 03	2 04	2 05	2 06	2 07
0,15	2 01	2 01	2 02	2 03	2 04	2 06	2 07	2 09	2 10
0,20	2 01	2 01	2 02	2 03	2 05	2 07	2 09	2 11	2 13
0,25	2 01	2 01	2 02	2 04	2 07	2 09	2 11	2 14	2 17
0,30	2 01	2 02	2 02	2 05	2 08	2 11	2 14	2 17	2 20
0,35	2 01	2 02	2 03	2 06	2 09	2 12	2 16	2 19	2 23
0,40	2 01	2 02	2 03	2 06	2 10	2 14	2 18	2 22	2 25
0,45	2 01	2 02	2 04	2 07	2 11	2 16	2 20	2 24	2 28
0,50	2 01	2 03	2 04	2 07	2 12	2 17	2 22	2 26	2 31
0,55	2 02	2 03	2 05	2 08	2 13	2 18	2 23	2 28	2 33
0,60	2 02	2 03	2 05	2 09	2 14	2 20	2 25	2 30	2 36
0,65	2 02	2 03	2 05	2 09	2 15	2 21	2 27	2 32	2 38
0,70	2 02	2 03	2 05	2 10	2 16	2 22	2 28	2 35	2 41
0,75	2 02	2 04	2 06	2 10	2 17	2 23	2 30	2 37	2 43
0,80	2 02	2 04	2 06	2 11	2 18	2 25	2 31	2 38	2 45
0,85	2 02	2 04	2 06	2 12	2 19	2 26	2 33	2 40	2 47
0,90	2 03	2 04	2 07	2 12	2 20	2 27	2 34	2 41	2 49
0,95	2 03	2 05	2 07	2 13	2 21	2 28	2 35	2 43	2 51
1,00	2 03	2 05	2 07	2 13	2 21	2 29	2 37	2 45	2 53

Таблица  $\lg T$   $\theta_0 = 70^\circ$ 

$c \backslash v_0$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0,20	1,7380	1,7905	1,8310	1,8650	1,8940	1,9210	1,9465	1,9700	1,9915
0,25	1,7330	1,7835	1,8210	1,8625	1,8795	1,9045	1,9275	1,9490	1,9690
0,30	1,7285	1,7770	1,8120	1,8415	1,8670	1,8900	1,9110	1,9305	1,9490
0,35	1,7240	1,7705	1,8040	1,8315	1,8555	1,8770	1,8965	1,9145	1,9315
0,40	1,7195	1,7645	1,7965	1,8225	1,8450	1,8650	1,8835	1,9000	1,9155
0,45	1,7155	1,7590	1,7895	1,8145	1,8355	1,8545	1,8715	1,8870	1,9010
0,50	1,7115	1,7535	1,7830	1,8070	1,8270	1,8445	1,8605	1,8750	1,8885
0,55	1,7075	1,7480	1,7770	1,7995	1,8185	1,8355	1,8505	1,8645	1,8775
0,60	1,7035	1,7430	1,7710	1,7925	1,8105	1,8265	1,8410	1,8545	1,8670

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 2^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0	2 00	2 00	2 00	2 00	2 00	2 00	2 00	2 00	2 00
0,10	2 07	2 08	2 09	2 10	2 11	2 12	2 13	2 14	2 15
0,15	2 10	2 12	2 13	2 15	2 16	2 18	2 19	2 21	2 23
0,20	2 13	2 15	2 17	2 19	2 21	2 24	2 26	2 28	2 30
0,25	2 17	2 19	2 22	2 24	2 27	2 29	2 32	2 35	2 38
0,30	2 20	2 23	2 26	2 29	2 32	2 35	2 38	2 41	2 45
0,35	2 23	2 26	2 30	2 33	2 37	2 40	2 44	2 47	2 51
0,40	2 25	2 29	2 33	2 38	2 42	2 46	2 50	2 54	2 58
0,45	2 28	2 33	2 37	2 42	2 46	2 51	2 55	3 00	3 05
0,50	2 31	2 36	2 41	2 46	2 50	2 55	3 00	3 06	3 11
0,55	2 33	2 39	2 44	2 49	2 55	3 00	3 06	3 11	3 17
0,60	2 36	2 42	2 48	2 53	2 59	3 05	3 11	3 17	3 22
0,65	2 38	2 44	2 51	2 57	3 03	3 09	3 15	3 22	3 28
0,70	2 41	2 47	2 53	3 00	3 07	3 13	3 20	3 26	3 33
0,75	2 43	2 49	2 56	3 03	3 10	3 17	3 24	3 31	3 38
0,80	2 45	2 52	2 59	3 06	3 13	3 20	3 27	3 35	3 43
0,85	2 47	2 55	3 02	3 09	3 16	3 24	3 31	3 39	3 47
0,90	2 49	2 57	3 04	3 12	3 19	3 27	3 35	3 43	3 51
0,95	2 51	2 59	3 06	3 14	3 22	3 30	3 38	3 47	3 55
1,00	2 53	3 01	3 09	3 17	3 25	3 33	3 42	3 51	3 59

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 5^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	5 02	5 03	5 04	5 09	5 15	5 22	5 29	5 35	5 41
0,15	5 03	5 04	5 07	5 14	5 23	5 32	5 41	5 50	5 59
0,20	5 04	5 06	5 09	5 18	5 29	5 41	5 52	6 04	6 16
0,25	5 04	5 07	5 11	5 21	5 36	5 50	6 03	6 17	6 31
0,30	5 05	5 09	5 14	5 25	5 41	5 57	6 13	6 29	6 45
0,35	5 06	5 10	5 16	5 29	5 46	6 04	6 22	6 40	6 58
0,40	5 07	5 11	5 19	5 32	5 51	6 11	6 31	6 51	7 10
0,45	5 08	5 13	5 21	5 35	5 55	6 16	6 38	7 00	7 21
0,50	5 09	5 14	5 23	5 38	5 58	6 21	6 45	7 08	7 30
0,55	5 10	5 16	5 25	5 40	6 01	6 25	6 50	7 15	7 38
0,60	5 11	5 17	5 27	5 42	6 04	6 29	6 55	7 21	7 45
0,65	5 11	5 18	5 28	5 45	6 07	6 33	7 00	7 26	7 51
0,70	5 12	5 20	5 30	5 47	6 10	6 37	7 04	7 30	7 55
0,75	5 13	5 21	5 32	5 50	6 13	6 39	7 07	7 34	7 59
0,80	5 14	5 22	5 34	5 53	6 16	6 42	7 10	7 37	8 03
0,85	5 15	5 23	5 35	5 55	6 19	6 45	7 12	7 40	8 07
0,90	5 16	5 24	5 36	5 57	6 21	6 48	7 15	7 42	8 09
0,95	5 17	5 25	5 38	6 00	6 24	6 50	7 17	7 44	8 11
1,00	5 18	5 27	5 40	6 02	6 26	6 53	7 19	7 46	8 12

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 10^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	10 06	10 11	10 17	10 36	10 59	11 21	11 42	12 03	12 24
0,15	10 09	10 16	10 26	10 50	11 22	11 51	12 21	12 51	13 20
0,20	10 12	10 20	10 33	11 02	11 40	12 16	12 53	13 29	14 05
0,25	10 16	10 26	10 41	11 13	11 55	12 37	13 19	14 00	14 40
0,30	10 19	10 31	10 48	11 23	12 07	12 54	13 40	14 24	15 07
0,35	10 22	10 36	10 55	11 32	12 18	13 08	13 57	14 42	15 28
0,40	10 25	10 41	11 02	11 40	12 27	13 19	14 09	14 56	15 44
0,45	10 29	10 46	11 10	11 48	12 36	13 28	14 19	15 08	15 57
0,50	10 33	10 52	11 17	11 56	12 44	13 35	14 27	15 17	16 07
0,55	10 36	10 56	11 23	12 04	12 51	13 42	14 33	15 24	16 14
0,60	10 39	11 01	11 29	12 11	12 58	13 48	14 39	15 30	16 20
0,65	10 43	11 06	11 36	12 17	13 05	13 55	14 45	15 35	16 25
0,70	10 46	11 11	11 43	12 24	13 12	14 01	14 50	15 40	16 30
0,75	10 49	11 16	11 48	12 30	13 18	14 07	14 56	15 45	16 35
0,80	10 52	11 20	11 54	12 37	13 24	14 13	15 02	15 51	16 40
0,85	10 55	11 25	12 01	12 43	13 30	14 19	15 08	15 57	16 45
0,90	10 58	11 29	12 06	12 49	13 37	14 25	15 14	16 02	16 49
0,95	11 01	11 33	12 12	12 55	13 42	14 31	15 20	16 07	16 54
1,00	11 05	11 37	12 17	13 00	13 46	14 36	15 25	16 13	16 59

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 5^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	5 41	5 47	5 54	6 00	6 05	6 11	6 18	6 24	6 31
0,15	5 59	6 09	6 18	6 27	6 36	6 45	6 54	7 04	7 13
0,20	6 16	6 28	6 39	6 51	7 03	7 15	7 27	7 39	7 51
0,25	6 31	6 45	6 59	7 13	7 28	7 43	7 57	8 11	8 26
0,30	6 45	7 01	7 17	7 34	7 51	8 08	8 25	8 41	8 58
0,35	6 58	7 16	7 34	7 53	8 12	8 31	8 50	9 08	9 26
0,40	7 10	7 30	7 49	8 09	8 29	8 50	9 10	9 30	9 50
0,45	7 21	7 42	8 03	8 24	8 45	9 06	9 28	9 49	10 11
0,50	7 30	7 52	8 14	8 36	8 58	9 20	9 42	10 05	10 28
0,55	7 38	8 00	8 23	8 46	9 09	9 32	9 54	10 18	10 42
0,60	7 45	8 08	8 32	8 55	9 18	9 41	10 05	10 29	10 52
0,65	7 51	8 15	8 39	9 02	9 25	9 49	10 13	10 37	11 01
0,70	7 55	8 20	8 45	9 09	9 32	9 56	10 20	10 43	11 07
0,75	7 59	8 24	8 49	9 14	9 38	10 02	10 26	10 49	11 12
0,80	8 03	8 29	8 54	9 19	9 43	10 05	10 30	10 53	11 16
0,85	8 07	8 33	8 58	9 23	9 47	10 09	10 33	10 56	11 19
0,90	8 09	8 35	9 01	9 25	9 49	10 12	10 36	10 59	11 22
0,95	8 11	8 37	9 03	9 28	9 52	10 15	10 39	11 02	11 25
1,00	8 12	8 38	9 04	9 29	9 53	10 17	10 41	11 05	11 28

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 10^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	12 24	12 44	13 05	13 26	13 47	14 08	14 28	14 48	15 08
0,15	13 20	13 49	14 19	14 48	15 17	15 46	16 14	16 42	17 10
0,20	14 05	14 41	15 17	15 52	16 27	17 02	17 38	18 14	18 50
0,25	14 40	15 20	16 01	16 42	17 22	18 03	18 43	19 22	20 02
0,30	15 07	15 51	16 35	17 19	18 03	18 47	19 31	20 13	20 54
0,35	15 28	16 15	17 02	17 47	18 31	19 15	20 00	20 44	21 27
0,40	15 44	16 33	17 21	18 08	18 53	19 37	20 21	21 05	21 48
0,45	15 57	16 46	17 35	18 22	19 08	19 51	20 34	21 16	21 59
0,50	16 07	16 57	17 45	18 30	19 15	19 59	20 42	21 24	22 07
0,55	16 14	17 03	17 51	18 36	19 21	20 05	20 47	21 30	22 12
0,60	16 20	17 08	17 55	18 41	19 26	20 10	20 52	21 34	22 15
0,65	16 25	17 14	18 01	18 46	19 30	20 13	20 55	21 36	22 16
0,70	16 20	17 19	18 05	18 50	19 34	20 16	20 57	21 37	22 17
0,75	16 35	17 23	18 09	18 54	19 37				

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 15^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	15 14	15 22	15 36	16 10	16 53	17 37	18 17	18 56	19 35
0,15	15 20	15 32	15 52	16 36	17 31	18 24	19 17	20 11	21 05
0,20	15 27	15 42	16 07	16 57	17 58	19 00	20 02	21 05	22 07
0,25	15 34	15 53	16 22	17 15	18 19	19 26	20 34	21 42	22 49
0,30	15 40	16 03	16 36	17 31	18 37	19 47	20 57	22 07	23 15
0,35	15 46	16 14	16 50	17 46	18 53	20 03	21 14	22 24	23 32
0,40	15 53	16 25	17 04	18 01	19 07	20 17	21 29	22 38	23 44
0,45	16 00	16 35	17 17	18 15	19 21	20 31	21 43	22 50	23 55
0,50	16 07	16 46	17 31	18 29	19 35	20 44	21 54	23 01	24 06
0,55	16 14	16 56	17 44	18 42	19 49	20 57	22 05	23 12	24 16
0,60	16 21	17 06	17 56	18 53	20 02	21 09	22 16	23 21	24 25
0,65	16 28	17 15	18 08	19 07	20 14	21 21	22 27	23 31	24 34
0,70	16 35	17 24	18 19	19 20	20 26	21 33	22 38	23 41	24 43
0,75	16 41	17 33	18 31	19 32	20 39	21 45	22 49	23 51	24 53
0,80	16 47	17 42	18 42	19 45	20 51	21 56	22 59	24 02	25 04
0,85	16 53	17 51	18 54	19 58	21 03	22 07	23 10	24 13	25 14
0,90	16 59	17 59	19 05	20 10	21 15	22 18	23 21	24 23	25 24
0,95	17 05	18 07	19 16	20 22	21 26	22 30	23 32	24 33	25 33
1,00	17 10	18 15	19 27	20 34	21 38	22 41	23 43	24 43	25 42

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 20^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	20 25	20 35	20 55	21 45	22 45	23 50	24 50	25 45	26 35
0,15	20 35	20 50	21 20	22 20	23 30	24 45	26 05	27 20	28 30
0,20	20 45	21 10	21 45	22 50	24 05	25 25	26 55	28 20	29 35
0,25	20 55	21 25	22 10	23 15	24 30	25 55	27 25	28 50	30 10
0,30	21 05	21 40	22 30	23 40	24 55	26 20	27 50	29 15	30 35
0,35	21 15	21 55	22 50	24 00	25 15	26 40	28 05	29 30	30 45
0,40	21 25	22 15	23 10	24 20	25 40	27 00	28 20	29 40	30 55
0,45	21 35	22 30	23 30	24 40	26 00	27 20	28 40	29 55	31 10
0,50	21 45	22 45	23 50	25 05	26 20	27 40	28 55	30 15	31 25
0,55	21 55	23 00	24 10	25 25	26 40	28 00	29 15	30 30	31 40
0,60	22 05	23 15	24 30	25 45	27 00	28 20	29 35	30 45	31 55
0,65	22 15	23 30	24 50	26 05	27 20	28 35	29 50	31 00	32 10
0,70	22 30	23 45	25 05	26 25	27 40	28 55	30 05	31 15	32 25
0,75	22 40	24 00	25 25	26 45	28 00	29 15	30 25	31 30	32 40
0,80	22 50	24 15	25 40	27 00	28 15	29 30	30 40	31 50	32 55
0,85	23 00	24 25	25 55	27 20	28 35	29 45	30 55	32 10	33 15
0,90	23 10	24 40	26 15	27 40	28 55	30 05	31 15	32 25	33 30
0,95	23 20	24 50	26 30	27 55	29 10	30 25	31 35	32 40	33 40
1,00	23 30	25 05	26 45	28 10	29 30	30 40	31 50	32 55	33 55

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 15^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	19 35	20 13	20 51	21 29	22 05	22 39	23 11	23 41	24 10
0,15	21 05	21 59	22 52	23 43	24 32	25 18	26 02	26 43	27 22
0,20	22 07	23 07	24 04	24 59	25 52	26 44	27 36	28 27	29 18
0,25	22 49	23 52	24 52	25 50	26 46	27 41	28 35	29 29	30 23
0,30	23 15	24 20	25 22	26 22	27 20	28 18	29 14	30 09	31 04
0,35	23 32	24 37	25 40	26 42	27 42	28 40	29 37	30 34	31 29
0,40	23 44	24 49	25 53	26 56	27 56	28 54	29 52	30 46	31 39
0,45	23 55	25 01	26 05	27 09	28 08	29 04	29 58	30 51	31 43
0,50	24 06	25 11	26 14	27 15	28 13	29 09	30 03	30 54	31 43
0,55	24 16	25 19	26 21	27 20	28 18	29 14	30 06	30 55	31 43
0,60	24 25	25 27	26 28	27 27	28 24	29 18	30 09	30 57	31 44
0,65	24 34	25 36	26 37	27 35	28 31	29 23	30 12	31 00	31 46
0,70	24 43	25 44	26 45	27 42	28 37	29 29	30 17	31 04	31 50
0,75	24 53	25 53	26 52	27 48	28 43	29 35	30 23	31 09	31 55
0,80	25 04	26 03	27 00	27 56	28 50	29 41	30 29	31 15	32 00
0,85	25 14	26 12	27 08	28 03	28 56	29 47	30 35	31 21	32 05
0,90	25 24	26 21	27 16	28 10	29 02	29 52	30 39	31 25	32 10
0,95	25 33	26 30	27 25	28 18	29 08	29 56	30 44	31 30	32 16
1,00	25 42	26 38	27 32	28 24	29 14	30 02	30 49	31 36	32 22

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 20^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	26 35	27 30	28 20	29 10	29 55	30 35	31 10	31 40	32 10
0,15	28 30	29 40	30 50	31 55	32 55	33 55	34 50	35 35	36 10
0,20	29 35	30 50	32 05	33 15	34 20	35 20	36 20	37 20	38 20
0,25	30 10	31 30	32 45	33 55	35 05	36 10	37 10	38 15	39 20
0,30	30 35	31 50	33 05	34 15	35 20	36 30	37 35	38 40	39 45
0,35	30 45	32 00	33 15	34 25	35 30	36 40	37 45	38 45	39 40
0,40	30 55	32 15	33 25	34 35	35 40	36 45	37 45	38 45	39 40
0,45	31 10	32 25	33 35	34 45	35 50	36 50	37 45	38 45	39 40
0,50	31 25	32 35	33 45	34 55	35 55	36 55	37 50	38 45	39 40
0,55	31 40	32 50	33 55	35 00	36 00	37 00	37 55	38 50	39 40
0,60	31 55	33 00	34 05	35 10	36 10</				

Таблица  $|\theta_c|$        $\theta_0 = 25^\circ$   
 (градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	25 35	25 50	26 15	27 10	28 25	29 40	30 55	32 05	33 10
0,15	25 50	26 10	26 50	27 55	29 15	30 45	32 15	33 40	35 05
0,20	26 05	26 35	27 25	28 35	29 55	31 30	33 05	34 40	36 05
0,25	26 20	26 55	27 55	29 10	30 30	32 00	33 40	35 10	36 35
0,30	26 35	27 20	28 25	29 40	31 00	32 30	34 05	35 30	36 55
0,35	26 45	27 40	28 50	30 10	31 30	33 00	34 25	35 50	37 10
0,40	27 00	28 05	29 20	30 35	32 00	33 25	34 50	36 10	37 30
0,45	27 15	28 25	29 45	31 05	32 25	33 50	35 10	36 30	37 45
0,50	27 30	28 45	30 10	31 30	32 55	34 15	35 35	36 50	38 05
0,55	27 40	29 05	30 35	32 00	33 20	34 40	36 00	37 15	38 25
0,60	27 55	29 25	30 55	32 25	33 45	35 05	36 25	37 40	38 45
0,65	28 10	29 45	31 20	32 50	34 10	35 30	36 45	38 00	39 05
0,70	28 25	30 05	31 45	33 15	34 35	35 55	37 10	38 20	39 25
0,75	28 40	30 25	32 10	33 40	35 00	36 20	37 35	38 45	39 50
0,80	28 55	30 45	32 35	34 05	35 25	36 40	37 55	39 05	40 10
0,85	29 10	31 00	32 55	34 25	35 50	37 05	38 15	39 25	40 30
0,90	29 20	31 15	33 15	34 50	36 10	37 25	38 35	39 45	40 50
0,95	29 35	31 30	33 35	35 10	36 35	37 50	39 00	40 05	41 10
1,00	29 45	31 45	33 55	35 30	36 55	38 10	39 20	40 25	41 30

Таблица  $|\theta_c|$        $\theta_0 = 30^\circ$   
 (градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	30 40	31 00	31 30	32 25	33 45	35 15	36 40	38 00	39 10
0,15	31 00	31 30	32 10	33 15	34 40	36 15	37 55	39 30	41 00
0,20	31 15	31 55	32 50	34 00	35 25	37 00	38 40	40 15	41 45
0,25	31 35	32 25	33 30	34 40	36 05	37 40	39 15	40 45	42 10
0,30	31 55	32 55	34 05	35 20	36 45	38 15	39 45	41 10	42 30
0,35	32 15	33 25	34 40	36 00	37 20	38 50	40 15	41 35	42 50
0,40	32 35	33 50	35 15	36 35	37 55	39 20	40 45	42 00	43 15
0,45	32 50	34 15	35 45	37 10	38 30	39 55	41 15	42 30	43 40
0,50	33 05	34 40	36 15	37 40	39 05	40 25	41 45	42 55	44 05
0,55	33 25	35 05	36 40	38 10	39 35	40 55	42 10	43 20	44 30
0,60	33 40	35 30	37 10	38 45	40 05	41 25	42 40	43 50	44 55
0,65	34 00	35 55	37 40	39 15	40 35	41 50	43 05	44 15	45 20
0,70	34 15	36 15	38 10	39 45	41 05	42 20	43 35	44 45	45 45
0,75	34 35	36 35	38 35	40 10	41 35	42 50	44 00	45 10	46 10
0,80	34 50	36 55	39 00	40 40	42 00	43 15	44 25	45 30	46 35
0,85	35 05	37 15	39 25	41 05	42 25	43 40	44 50	45 55	46 55
0,90	35 20	37 35	39 50	41 25	42 50	44 05	45 10	46 20	47 20
0,95	35 35	37 55	40 10	41 50	43 15	44 30	45 35	46 40	47 40
1,00	35 50	38 10	40 30	42 15	43 35	44 50	46 00	47 05	48 00

Таблица  $|\theta_c|$        $\theta_0 = 25^\circ$   
 (градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	33 10	34 10	35 05	36 00	36 45	37 25	38 00	38 30	39 00
0,15	35 05	36 25	37 40	38 55	40 00	41 00	41 50	42 35	43 15
0,20	36 05	37 30	38 50	40 10	41 25	42 35	43 40	44 40	45 40
0,25	36 35	38 00	39 20	40 40	41 55	43 05	44 15	45 25	46 30
0,30	36 55	38 15	39 35	40 50	42 05	43 20	44 30	45 40	46 45
0,35	37 10	38 30	39 45	41 00	42 10	43 15	44 25	45 30	46 30
0,40	37 30	38 45	40 00	41 10	42 15	43 15	44 20	45 20	46 20
0,45	37 45	39 00	40 10	41 15	42 20	43 20	44 20	45 15	46 10
0,50	38 05	39 20	40 25	41 25	42 30	43 30	44 25	45 20	46 10
0,55	38 25	39 35	40 40	41 40	42 40	43 40	44 35	45 25	46 15
0,60	38 45	39 55	41 00	42 00	42 55	43 50	44 45	45 35	46 15
0,65	39 05	40 10	41 15	42 15	43 10	44 05	45 00	45 50	46 25
0,70	39 25	40 30	41 35	42 35	43 30	44 20	45 10	46 00	46 45
0,75	39 50	40 55	41 55	42 50	43 45	44 35	45 25	46 15	47 00
0,80	40 10	41 10	42 10	43 05	44 00	44 50	45 40	46 30	47 15
0,85	40 30	41 30	42 30	43 25	44 20	45 10	45 55	46 40	47 25
0,90	40 50	41 50	42 45	43 40	44 25	45 25	46 10	46 55	47 40
0,95	41 10	42 10	43 05	43 55	44 50	45 40	46 25	47 10	47 55
1,00	41 30	42 30	43 25	44 15	45 05	45 55	46 40	47 20	48 05

Таблица  $|\theta_c|$        $\theta_0 = 30^\circ$   
 (градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	39 10	40 10	41 05	41 55	42 40	43 15	43 45	44 10	44 30
0,15	41 00	42 25	43 40	44 50	45 55	46 50	47 40	48 20	48 55
0,20	41 45	43 15	44 40	46 05	47 20	48 30	49 35	50 35	51 30
0,25	42 10	43 35	45 00	46 20	47 40	48 55	50 05	51 10	52 15
0,30	42 30	43 50	45 10	46 30	47 45	48 55	50 05	51 15	52 20
0,35	42 50	44 10	45 25	46 35	47 45	48 55	50 00	51 05	52 10
0,40	43 15	44 30	45 40	46 45	47 50	48 50	49 50	50 50	51 50
0,45	43 40	44 50	45 55	47 00	48 00	49 00	49 55	50 50	51 40
0,50	44 05	45 10	46 15	47 15	48 15	49 10	50 05	50 55	51 45
0,55	44 30	45 35	46 35	47 35	48 30	49 25	50 15	51 05	51 50
0,60	44 55	46 00	47 00	47 55					

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 35^\circ$ 

(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	35 45	36 10	36 45	37 35	38 50	40 25	41 55	43 15	44 30
0,15	36 05	36 45	37 30	38 30	39 50	41 25	43 00	44 35	46 05
0,20	36 30	37 20	38 15	39 20	40 40	42 10	43 45	45 20	46 50
0,25	36 55	37 55	38 55	40 05	41 25	42 55	44 20	45 45	47 15
0,30	37 15	38 25	39 35	40 50	42 10	43 35	44 55	46 15	47 35
0,35	37 40	38 55	40 15	41 35	42 55	44 15	45 30	46 45	48 00
0,40	38 00	39 20	40 50	42 15	43 35	44 50	46 05	47 15	48 25
0,45	38 20	39 50	41 25	42 55	44 15	45 30	46 40	47 50	48 55
0,50	38 40	40 20	42 00	43 30	44 50	46 05	47 15	48 20	49 25
0,55	39 00	40 50	42 35	44 05	45 25	46 40	47 50	48 55	49 55
0,60	39 20	41 15	43 05	44 35	45 55	47 10	48 20	49 25	50 25
0,65	39 40	41 40	43 35	45 10	46 25	47 40	48 50	49 55	50 55
0,70	39 55	42 00	44 00	45 40	47 00	48 10	49 15	50 20	51 20
0,75	40 15	42 25	44 30	46 10	47 30	48 40	49 45	50 45	51 45
0,80	40 35	42 50	44 55	46 35	47 55	49 05	50 10	51 10	52 10
0,85	40 50	43 10	45 25	47 05	48 25	49 35	50 35	51 35	52 35
0,90	41 05	43 30	45 50	47 30	48 50	50 00	51 00	52 00	52 55
0,95	41 25	43 50	46 10	47 55	49 10	50 20	51 25	52 25	53 20
1,00	41 45	44 10	46 35	48 20	49 35	50 45	51 50	52 45	53 40

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 40^\circ$ 

(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	40 50	41 15	41 50	42 35	43 40	45 10	46 40	48 00	49 10
0,15	41 15	41 55	42 40	43 35	44 45	46 10	47 40	49 10	50 40
0,20	41 40	42 30	43 30	44 30	45 40	47 05	48 30	49 55	51 20
0,25	42 05	43 05	44 15	45 20	46 30	47 50	49 10	50 30	51 50
0,30	42 30	43 40	44 55	46 05	47 20	48 35	49 50	51 00	52 45
0,35	42 55	44 15	45 35	46 50	48 00	49 15	50 25	51 35	52 40
0,40	43 15	44 45	46 15	47 30	48 45	49 55	51 05	55 10	53 10
0,45	43 35	45 15	46 50	48 10	49 25	50 35	51 45	52 45	53 45
0,50	43 55	45 45	47 25	48 50	50 05	51 15	52 20	53 20	54 15
0,55	44 15	46 10	48 00	49 25	50 40	51 50	52 50	53 50	54 45
0,60	44 40	46 40	48 30	49 55	51 10	52 20	53 25	54 20	55 15
0,65	45 00	47 05	48 55	50 25	51 40	52 50	53 55	54 50	55 45
0,70	45 20	47 30	49 25	50 55	52 10	53 20	54 25	55 20	56 10
0,75	45 40	47 55	49 55	51 25	52 40	53 50	54 50	55 45	56 35
0,80	46 00	48 15	50 25	51 55	53 10	54 15	55 15	56 10	57 00
0,85	46 20	48 35	50 50	52 20	53 35	54 40	55 40	56 35	57 25
0,90	46 35	48 55	51 15	52 50	54 05	55 05	56 00	56 55	57 45
0,95	46 50	49 15	51 35	53 15	54 30	55 30	56 25	57 20	58 10
1,00	47 10	49 35	52 00	53 40	54 55	55 55	56 50	57 40	58 30

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 35^\circ$ 

(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	44 30	45 30	46 20	47 05	47 40	48 10	48 30	48 35	48 35
0,15	46 05	47 30	48 50	49 55	50 55	51 45	52 25	53 00	53 25
0,20	46 50	48 20	49 45	51 00	52 15	53 25	54 25	55 20	56 10
0,25	47 15	48 40	50 00	51 20	52 40	53 50	54 55	56 00	57 00
0,30	47 35	48 55	50 10	51 25	52 35	53 45	54 55	56 00	57 05
0,35	48 00	49 10	50 20	51 30	52 40	53 45	54 45	55 45	56 45
0,40	48 25	49 30	50 35	51 40	52 45	53 45	54 40	55 35	56 30
0,45	48 55	49 55	50 55	51 55	52 55	53 50	54 45	55 35	56 20
0,50	49 25	50 25	51 25	52 20	53 10	54 00	54 50	55 40	56 25
0,55	49 55	50 55	51 50	52 40	53 30	54 20	55 05	55 50	56 35
0,60	50 25	51 20	52 15	53 05	53 55	54 40	55 25	56 05	56 45
0,65	50 55	51 50	52 40	53 30	54 15	55 00	55 40	56 20	57 00
0,70	51 20	52 15	53 05	53 55	54 40	55 20	56 00	55 40	57 20
0,75	51 45	52 40	53 30	54 15	55 00	55 40	56 20	57 00	57 40
0,80	52 10	53 05	53 50	54 35	55 20	56 00	55 40	57 20	58 00
0,85	52 35	53 25	54 10	54 55	55 40	56 20	57 00	57 40	58 15
0,90	52 55	53 45	54 30	55 15	56 00	56 40	57 20	57 55	58 30
0,95	53 20	54 10	54 55	55 40	56 20	57 00	57 40	58 15	58 50
1,00	53 40	54 30	55 15	56 00	55 40	57 20	57 55	58 30	59 05

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 40^\circ$ 

(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	49 10	50 10	51 00	51 35	52 05	52 20	52 20	52 15	52 00
0,15	50 40	52 00	53 10	54 10	55 05	55 50	56 20	56 45	57 00
0,20	51 20	52 45	54 05	55 20	56 30	57 35	58 30	59 15	59 55
0,25	51 50	53 10	54 25	55 40	56 50	57 55	59 00	60 00	60 50
0,30	52 15	53 25	54 35	55 45	56 55	58 00	59 05	60 10	61 05
0,35	52 40	53 45	54 50	55 55	56 55	57 55	58 55	59 55	60 55
0,40	53 10	54 10	55 10	56 05	57 00	57 55	58 50	59 45	60 35
0,45	53 45	54 40	55 35	56 25	57 15	58 05	58 55	59 45	60 30
0,50	54 15	55 10	56 00	56 45	57 35	58 20	59 05	59 50	60 35
0,55	54 45	55 35	56 25	57 10	57 55	58 40	59 20	60	

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 45^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	45 50	46 20	46 50	47 30	48 25	49 40	51 00	52 15	53 25
0,15	46 20	47 00	47 40	48 30	49 30	50 45	52 05	53 25	54 45
0,20	46 45	47 35	48 25	49 25	50 30	51 40	52 55	54 15	55 30
0,25	47 10	48 05	49 10	50 15	51 20	52 30	53 40	54 55	56 00
0,30	47 35	48 40	49 50	51 00	52 05	53 15	54 20	55 25	56 25
0,35	48 00	49 15	50 35	51 45	52 50	53 55	54 55	55 55	56 55
0,40	48 20	49 50	51 15	52 25	53 30	54 35	55 35	56 30	57 25
0,45	48 45	50 20	51 50	53 05	54 10	55 15	56 15	57 10	58 00
0,50	49 10	50 50	52 25	53 40	54 50	55 50	56 50	57 45	58 35
0,55	49 30	51 20	53 00	54 15	55 25	56 25	57 20	58 15	59 05
0,60	49 50	51 45	53 30	54 45	55 55	56 55	57 55	58 45	59 35
0,65	50 05	52 10	53 55	55 15	56 25	57 25	58 25	59 15	60 00
0,70	50 25	52 35	54 25	55 45	56 55	57 55	58 50	59 40	60 25
0,75	50 45	52 55	54 55	56 15	57 25	58 25	59 15	60 05	60 50
0,80	51 05	53 20	55 20	56 45	57 50	58 50	59 40	60 30	61 15
0,85	51 25	53 40	55 45	57 10	58 15	59 15	60 05	60 50	61 35
0,90	51 45	54 00	56 05	57 35	58 40	59 35	60 25	61 15	62 00
0,95	52 00	54 20	56 30	58 00	59 05	60 00	60 50	61 35	62 20
1,00	52 15	54 40	56 50	58 20	59 30	60 25	61 15	62 00	62 40

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 50^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	50 55	51 15	51 45	52 20	53 10	54 10	55 15	56 20	57 20
0,15	51 15	51 55	52 35	53 20	54 10	55 15	56 20	57 30	58 35
0,20	51 40	52 30	53 20	54 10	55 05	56 10	57 15	58 20	59 25
0,25	52 05	53 05	54 05	55 00	55 55	56 55	57 55	58 55	59 55
0,30	52 30	53 40	54 45	55 45	56 40	57 40	58 35	59 30	60 25
0,35	52 55	54 10	55 20	56 25	57 25	58 20	59 15	60 05	60 55
0,40	53 15	54 40	56 00	57 05	58 05	59 00	59 50	60 40	61 30
0,45	53 35	55 10	56 35	57 40	58 40	59 35	60 25	61 15	62 00
0,50	53 55	55 35	57 05	58 15	59 15	60 10	61 00	61 45	62 30
0,55	54 20	56 05	57 35	58 50	59 50	60 40	61 30	62 15	62 55
0,60	54 40	56 30	58 05	59 20	60 20	61 10	62 00	62 45	63 25
0,65	55 00	56 50	58 30	59 45	60 45	61 40	62 25	63 10	63 50
0,70	55 20	57 15	59 00	60 10	61 15	62 05	62 50	63 35	64 15
0,75	55 40	57 40	59 25	60 40	61 40	62 30	63 15	64 00	64 40
0,80	55 55	58 00	59 50	61 05	62 05	62 55	63 40	64 20	65 00
0,85	56 15	58 20	60 10	61 30	62 25	63 15	64 00	64 40	65 20
0,90	56 35	58 40	60 30	61 50	62 50	63 40	64 25	65 05	65 40
0,95	56 50	59 00	60 55	62 15	63 10	64 00	64 45	65 25	66 00
1,00	57 00	59 20	61 15	62 35	63 30	64 20	65 05	65 45	66 20

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 45^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	53 25	54 20	55 10	55 35	55 55	55 55	55 40	55 20	55 00
0,15	54 45	56 00	57 05	58 00	58 45	59 20	59 40	59 50	59 50
0,20	55 30	56 45	57 55	59 05	60 10	61 10	61 55	62 30	62 55
0,25	56 00	57 15	58 25	59 30	60 30	61 30	62 30	63 25	64 10
0,30	56 25	57 30	58 35	59 40	60 40	61 40	62 40	63 35	64 30
0,35	56 55	57 55	58 55	59 50	60 45	61 40	62 35	63 30	64 25
0,40	57 25	58 20	59 15	60 05	60 55	61 45	62 35	63 25	64 15
0,45	58 00	58 50	59 40	60 25	61 10	61 55	62 40	63 25	64 05
0,50	58 35	59 20	60 05	60 50	61 30	62 15	62 55	63 35	64 10
0,55	59 05	59 50	60 30	61 15	61 55	62 30	63 10	63 45	64 20
0,60	59 35	60 20	61 00	61 40	62 15	62 50	63 25	64 00	64 30
0,65	60 00	60 45	61 25	62 00	62 35	63 40	63 45	64 15	64 45
0,70	60 25	61 10	61 50	62 25	63 00	63 30	64 05	64 35	65 05
0,75	60 50	61 30	62 10	62 45	63 20	63 50	64 25	64 55	65 25
0,80	61 15	61 55	62 35	63 10	63 40	64 15	64 45	65 15	65 40
0,85	61 35	62 15	62 55	63 30	64 05	64 35	65 05	65 35	66 00
0,90	62 00	62 40	63 15	63 50	64 25	64 55	65 25	65 50	66 15
0,95	62 20	63 00	63 35	64 10	64 45	65 15	65 45	66 10	66 35
1,00	62 40	63 20	63 55	64 30	65 00	65 30	66 00	66 25	66 50

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 50^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	57 20	58 10	58 45	59 05	59 15	59 10	58 50	58 30	58 00
0,15	58 35	59 40	60 40	61 30	62 05	62 20	62 40	62 40	62 25
0,20	59 25	60 30	61 30	62 30	63 30	64 20	64 55	65 15	65 30
0,25	59 55	61 00	62 00	63 00	64 00	64 55	65 40	66 20	67 00
0,30	60 25	61 25	62 20	63 15	64 10	65 00	65 50	66 40	67 30
0,35	60 55	61 50	62 40	63 30	64 20	65 10	66 00	66 45	67 30
0,40	61 30	62 15	63 00	63 50	64 35	65 29	66 05	66 45	67 30
0,45	62 00	62 40	63 25	64 10	64 10	64 50	65 30	66 10	66 50
0,50	62 30	63 10	63 50	64 30	65 10	65 45	66 20	66 55	67 30
0,55	62 55	63 35	64 15	64 50	65 25	66 00	66 35	67 05	67 35
0,60	63 25	64 00	64 40	65 15	65 45				

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 55^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	55 55	56 10	56 35	57 10	57 50	58 35	59 25	60 15	61 05
0,15	56 15	56 45	57 25	58 05	58 50	59 40	60 30	61 25	62 20
0,20	56 35	57 20	58 05	58 50	59 40	60 30	61 20	62 15	63 10
0,25	57 00	57 50	58 45	59 35	60 25	61 15	62 05	62 55	63 45
0,30	57 20	58 25	59 25	60 15	61 05	61 55	62 40	63 30	64 15
0,35	57 40	58 55	60 00	60 50	61 40	62 30	63 15	64 00	64 45
0,40	58 05	59 20	60 30	61 25	62 15	63 05	63 50	64 30	65 15
0,45	58 25	59 45	61 00	62 00	62 50	63 35	64 20	65 00	65 40
0,50	58 45	60 10	61 30	62 30	63 20	64 05	64 50	65 30	66 10
0,55	59 05	60 35	62 00	63 00	63 50	64 35	65 20	66 00	66 35
0,60	59 20	60 55	62 25	63 30	64 20	65 05	65 45	66 25	67 00
0,65	59 40	61 20	62 50	63 55	64 45	65 30	66 10	66 50	67 25
0,70	59 55	61 40	63 15	64 20	65 10	65 55	66 35	67 10	67 45
0,75	60 10	62 00	63 35	64 45	65 35	66 20	67 00	67 35	68 05
0,80	60 30	62 20	63 55	65 05	65 55	66 40	67 20	67 55	68 25
0,85	60 45	62 40	64 20	65 25	66 15	67 00	67 40	68 15	68 45
0,90	61 00	62 55	64 40	65 45	66 35	67 20	68 00	68 35	69 05
0,95	61 15	63 15	65 00	66 05	66 55	67 40	68 20	68 55	69 25
1,00	61 30	63 30	65 20	66 25	67 15	68 00	68 40	69 15	69 45

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 60^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	60 50	61 05	61 25	61 55	62 25	62 55	63 30	64 15	64 55
0,15	61 10	61 25	62 05	62 40	63 20	64 00	64 40	65 25	66 05
0,20	61 30	62 05	62 40	63 20	64 05	64 45	65 25	66 10	66 55
0,25	61 45	62 30	63 15	64 00	64 45	65 25	66 05	66 45	67 30
0,30	62 05	63 00	63 50	64 35	65 20	66 00	66 40	67 20	68 00
0,35	62 25	63 25	64 20	65 05	65 50	66 30	67 10	67 50	68 25
0,40	62 45	63 50	64 45	65 35	66 20	67 00	67 40	68 15	68 50
0,45	63 05	64 15	65 15	66 05	66 50	67 30	68 05	68 40	69 15
0,50	63 20	64 35	65 40	66 35	67 20	67 55	68 30	69 05	69 35
0,55	63 35	64 55	66 05	67 00	67 45	68 20	68 55	69 25	70 00
0,60	63 50	65 15	66 30	67 25	68 10	68 45	69 20	69 50	70 20
0,65	64 05	65 35	66 55	67 45	68 30	69 10	69 45	70 15	70 40
0,70	64 20	65 55	67 15	68 10	68 55	69 30	70 05	70 35	71 00
0,75	64 35	66 10	67 35	68 30	69 15	69 50	70 25	70 55	71 20
0,80	64 50	66 30	67 55	68 50	69 35	70 10	70 40	71 10	71 40
0,85	65 05	66 45	68 10	69 10	69 55	70 30	71 00	71 30	71 55
0,90	65 20	67 00	68 30	69 25	70 10	70 50	71 20	71 50	72 15
0,95	65 30	67 15	68 45	69 45	70 30	71 05	71 35	72 05	72 30
1,00	65 40	67 30	69 00	70 00	70 45	71 20	71 55	72 25	72 45

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 55^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	61 05	61 50	62 20	62 35	62 40	62 30	62 10	61 40	61 10
0,15	62 20	63 15	64 00	64 40	65 10	65 30	65 20	65 00	
0,20	63 10	64 05	64 55	65 45	66 30	67 05	67 30	67 40	67 45
0,25	63 45	64 40	65 30	66 20	67 10	67 55	68 30	69 00	69 30
0,30	64 15	65 05	65 55	66 45	67 30	68 15	68 55	69 35	70 10
0,35	64 45	65 30	66 15	67 00	67 40	68 25	69 05	69 45	70 25
0,40	65 15	65 55	66 35	67 15	67 55	68 35	69 15	69 55	70 30
0,45	65 40	66 20	66 55	67 35	68 10	68 45	69 20	69 55	70 25
0,50	66 10	66 45	67 20	67 55	68 30	69 00	69 30	70 00	70 30
0,55	66 35	67 10	67 40	68 10	68 45	69 15	69 40	70 10	70 30
0,60	67 00	67 30	68 00	68 30	69 00	69 30	69 55	70 25	70 40
0,65	67 25	67 55	68 25	68 55	69 20	69 45	70 10	70 35	71 00
0,70	67 45	68 15	68 45	69 10	69 40	70 05	70 30	70 50	71 10
0,75	68 05	68 35	69 05	69 30	69 55	70 20	70 45	71 05	71 25
0,80	68 25	68 55	69 25	69 50	70 15	70 40	71 00	71 25	71 45
0,85	68 45	69 15	69 45	70 10	70 35	70 55	71 15	71 40	72 00
0,90	69 05	69 35	70 00	70 25	70 50	71 10	71 35	71 55	72 15
0,95	69 25	69 55	70 20	70 45	71 10	71 30	71 50	72 10	72 30
1,00	69 45	70 10	70 35	71 00	71 25	71 45	72 05	72 25	72 45

Таблица  $|\theta_c|$   $\theta_0 = 60^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	64 55	65 25	65 45	66 00	66 00	65 50	65 30	65 05	64 35
0,15	66 05	66 40	67 15	67 45	68 05	68 15	68 05	68 05	67 50
0,20	66 55	67 35	68 15	68 55	69 25	69 50	70 05	70 10	70 15
0,25	67 30	68 10	68 55	69 35	70 10	70 45	71 10	71 35	71 50
0,30	68 00	68 40	69 20	70 00	70 40	71 15	71 50	72 20	72 40
0,35	68 25	69 05	69 40	70 20	70 55	71 30	72 05	72 35	73 05
0,40	68 50	69 25	70 00	70 35	71 10	71 45	72 15	72 45	73 15
0,45	69 15	69 45	70 20	70 50	71 25	71 55	72 25	72 55	73 20
0,50	69 35	70 10	70 40	71 10	71 40	72 05	72 35	73 00	73 25
0,55	70 00	70 30	70 55	71 25	71 55	72 20	72 45	73 05	73 30
0,60	70 20	70 50	71 15	71 40	72 05	72			

Таблица  $|\delta_c|$   $\theta_0 = 65^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0,20	67 15	67 45	68 20	68 55	69 25	70 00	70 35	71 10	71 45
0,25	67 40	68 15	68 50	69 25	70 00	70 35	71 10	71 45	72 15
0,30	68 10	68 45	69 20	69 55	70 30	71 05	71 35	72 10	72 40
0,35	68 35	69 15	69 50	70 25	70 55	71 30	72 00	72 30	73 00
0,40	69 00	69 40	70 15	70 50	71 20	71 50	72 20	72 50	73 20
0,45	69 20	70 05	70 40	71 15	71 45	72 10	72 40	73 05	73 35
0,50	69 45	70 25	71 00	71 35	72 05	72 30	73 00	73 25	73 50
0,55	70 05	70 50	71 25	71 55	72 25	72 50	73 15	73 40	74 05
0,60	70 25	71 10	71 45	72 15	72 45	73 10	73 35	74 00	74 20

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 2^\circ$

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	0,394	0,587	0,745	0,877	0,992	1,093	1,183	1,264	1,337
0,15	0,394	0,587	0,745	0,876	0,989	1,089	1,178	1,258	1,331
0,20	0,394	0,587	0,744	0,874	0,986	1,085	1,173	1,253	1,325
0,25	0,394	0,587	0,744	0,873	0,984	1,081	1,168	1,247	1,319
0,30	0,394	0,586	0,743	0,871	0,981	1,078	1,164	1,242	1,313
0,35	0,393	0,585	0,742	0,870	0,979	1,075	1,160	1,237	1,307
0,40	0,393	0,585	0,741	0,868	0,976	1,071	1,156	1,232	1,302
0,45	0,393	0,585	0,741	0,867	0,973	1,067	1,151	1,227	1,296
0,50	0,393	0,584	0,740	0,866	0,971	1,064	1,147	1,222	1,291
0,55	0,393	0,584	0,739	0,864	0,969	1,061	1,143	1,218	1,286
0,60	0,393	0,584	0,739	0,863	0,967	1,058	1,140	1,214	1,281
0,65	0,392	0,583	0,738	0,862	0,965	1,056	1,137	1,210	1,277
0,70	0,392	0,583	0,737	0,860	0,962	1,053	1,134	1,207	1,273
0,75	0,392	0,583	0,737	0,859	0,960	1,050	1,131	1,203	1,268
0,80	0,391	0,582	0,736	0,858	0,958	1,047	1,127	1,199	1,264
0,85	0,391	0,582	0,735	0,856	0,956	1,045	1,124	1,195	1,259
0,90	0,390	0,581	0,734	0,855	0,954	1,042	1,120	1,191	1,255
0,95	0,390	0,581	0,734	0,854	0,952	1,039	1,117	1,187	1,250
1,00	0,390	0,580	0,733	0,853	0,950	1,036	1,113	1,183	1,246

Таблица  $|\delta_c|$   $\theta_0 = 70^\circ$   
(градусы и минуты)

$c \backslash v_0$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0,20	71 45	72 10	72 35	73 00	73 25	73 55	74 20	74 45	75 10
0,25	72 10	72 35	73 00	73 25	73 55	74 20	74 45	75 10	75 35
0,30	72 30	72 55	73 25	73 50	74 20	74 45	75 10	75 35	75 55
0,35	72 50	73 15	73 45	74 10	74 40	75 05	75 30	75 55	76 15
0,40	73 05	73 35	74 05	74 30	75 00	75 25	75 50	76 10	76 35
0,45	73 25	73 55	74 25	74 50	75 15	75 40	76 05	76 25	76 50
0,50	73 40	74 15	74 45	75 10	75 35	76 00	76 20	76 40	77 00
0,55	74 00	74 35	75 05	75 30	75 55	76 15	76 35	76 55	77 15
0,60	74 15	74 50	75 20	75 45	76 10	76 30	76 50	77 05	77 25

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 2^\circ$

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	1,337	1,404	1,467	1,526	1,580	1,630	1,678	1,723	1,766
0,15	1,331	1,398	1,460	1,517	1,570	1,620	1,667	1,712	1,754
0,20	1,325	1,391	1,452	1,509	1,561	1,610	1,657	1,701	1,742
0,25	1,319	1,385	1,445	1,501	1,553	1,601	1,647	1,690	1,731
0,30	1,313	1,378	1,438	1,493	1,544	1,592	1,637	1,680	1,720
0,35	1,307	1,372	1,431	1,485	1,536	1,584	1,628	1,670	1,710
0,40	1,302	1,366	1,421	1,478	1,528	1,575	1,619	1,660	1,699
0,45	1,296	1,360	1,418	1,471	1,521	1,567	1,610	1,651	1,689
0,50	1,291	1,354	1,412	1,465	1,514	1,559	1,602	1,642	1,680
0,55	1,286	1,348	1,406	1,459	1,507	1,552	1,594	1,634	1,671
0,60	1,281	1,343	1,400	1,452	1,500	1,544	1,586	1,625	1,662
0,65	1,277	1,338	1,394	1,445	1,493	1,537	1,578	1,617	1,653
0,70	1,273	1,333	1,388	1,439	1,486	1,530	1,571	1,609	1,645
0,75	1,268	1,328	1,383	1,433	1,479	1,523	1,563	1,601	1,636
0,80	1,264	1,323	1,377	1,427	1,473	1,516	1,556	1,593	1,628
0,85	1,259	1,318	1,372	1,421	1,467	1,510	1,549	1,586	1,620
0,90	1,255	1,313	1,366	1,415	1,461	1,503	1,542	1,579	1,613
0,95	1,256	1,308	1,361	1,409	1,454	1,496	1,535	1,571	1,605
1,00	1,246	1,303	1,356	1,404	1,448	1,489	1,528	1,564	1,598

Таблица  $\lg Y$   $b_0 = 5^{\circ}$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	1,189	1,381	1,538	1,667	1,779	1,877	1,964	2,043	2,114
0,15	1,188	1,380	1,536	1,664	1,773	1,868	1,954	2,031	2,100
0,20	1,187	1,379	1,534	1,660	1,767	1,860	1,944	2,019	2,087
0,25	1,187	1,378	1,532	1,656	1,761	1,853	1,935	2,008	2,075
0,30	1,186	1,377	1,531	1,653	1,756	1,846	1,926	1,998	2,063
0,35	1,186	1,376	1,530	1,650	1,750	1,839	1,918	1,988	2,052
0,40	1,185	1,375	1,528	1,647	1,745	1,832	1,909	1,978	2,041
0,45	1,184	1,374	1,526	1,644	1,740	1,825	1,901	1,969	2,031
0,50	1,183	1,373	1,524	1,641	1,736	1,819	1,894	1,961	2,021
0,55	1,183	1,372	1,523	1,638	1,731	1,813	1,887	1,953	2,012
0,60	1,182	1,371	1,521	1,635	1,727	1,808	1,880	1,945	2,004
0,65	1,181	1,370	1,520	1,633	1,723	1,802	1,873	1,937	1,995
0,70	1,181	1,370	1,519	1,630	1,719	1,796	1,866	1,929	1,986
0,75	1,180	1,369	1,517	1,627	1,715	1,791	1,859	1,921	1,977
0,80	1,179	1,368	1,515	1,625	1,711	1,786	1,852	1,913	1,969
0,85	1,179	1,367	1,514	1,623	1,707	1,781	1,846	1,906	1,961
0,90	1,178	1,366	1,512	1,620	1,703	1,775	1,840	1,899	1,953
0,95	1,177	1,365	1,511	1,618	1,700	1,770	1,834	1,892	1,945
1,00	1,176	1,364	1,509	1,615	1,696	1,765	1,828	1,885	1,938

Таблица  $\lg Y$   $b_0 = 10^{\circ}$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	1,786	1,978	2,133	2,259	2,367	2,461	2,545	2,620	2,688
0,15	1,785	1,976	2,129	2,252	2,356	2,447	2,527	2,599	2,664
0,20	1,784	1,974	2,126	2,246	2,346	2,433	2,510	2,580	2,643
0,25	1,782	1,971	2,122	2,240	2,336	2,420	2,495	2,562	2,623
0,30	1,781	1,969	2,119	2,234	2,327	2,408	2,481	2,546	2,605
0,35	1,780	1,967	2,117	2,229	2,318	2,397	2,468	2,532	2,599
0,40	1,778	1,965	2,114	2,224	2,310	2,387	2,456	2,518	2,573
0,45	1,777	1,964	2,111	2,219	2,302	2,377	2,444	2,504	2,558
0,50	1,776	1,962	2,109	2,214	2,295	2,368	2,433	2,491	2,544
0,55	1,775	1,960	2,106	2,209	2,289	2,360	2,423	2,480	2,531
0,60	1,774	1,958	2,103	2,204	2,282	2,352	2,414	2,469	2,519
0,65	1,773	1,957	2,101	2,200	2,276	2,344	2,405	2,460	2,508
0,70	1,772	1,956	2,098	2,196	2,270	2,337	2,397	2,450	2,497
0,75	1,770	1,954	2,095	2,192	2,265	2,330	2,388	2,440	2,487
0,80	1,769	1,952	2,092	2,188	2,260	2,323	2,380	2,431	2,477
0,85	1,768	1,950	2,089	2,184	2,254	2,316	2,372	2,422	2,467
0,90	1,767	1,949	2,087	2,180	2,249	2,309	2,364	2,413	2,458
0,95	1,765	1,947	2,084	2,177	2,244	2,303	2,357	2,405	2,449
1,00	1,764	1,945	2,082	2,174	2,239	2,297	2,350	2,397	2,441

Таблица  $\lg Y$   $b_0 = 5^{\circ}$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	2,114	2,180	2,241	2,297	2,349	2,397	2,443	2,486	2,528
0,15	2,100	2,164	2,223	2,278	2,328	2,375	2,419	2,461	2,501
0,20	2,087	2,150	2,207	2,260	2,309	2,354	2,397	2,438	2,476
0,25	2,075	2,136	2,192	2,243	2,291	2,335	2,377	2,416	2,453
0,30	2,063	2,123	2,178	2,228	2,274	2,317	2,358	2,396	2,433
0,35	2,052	2,110	2,164	2,213	2,258	2,300	2,340	2,378	2,414
0,40	2,041	2,098	2,151	2,199	2,243	2,284	2,323	2,360	2,396
0,45	2,031	2,087	2,139	2,186	2,229	2,269	2,307	2,343	2,378
0,50	2,021	2,076	2,127	2,173	2,216	2,255	2,292	2,327	2,361
0,55	2,012	2,066	2,116	2,161	2,203	2,242	2,278	2,312	2,345
0,60	2,004	2,057	2,106	2,150	2,191	2,229	2,265	2,299	2,331
0,65	1,995	2,048	2,096	2,139	2,179	2,217	2,252	2,285	2,317
0,70	1,986	2,038	2,085	2,128	2,168	2,205	2,240	2,272	2,303
0,75	1,977	2,028	2,074	2,117	2,157	2,194	2,228	2,260	2,290
0,80	1,969	2,019	2,065	2,107	2,146	2,183	2,217	2,248	2,277
0,85	1,961	2,011	2,056	2,097	2,136	2,172	2,206	2,237	2,266
0,90	1,953	2,002	2,047	2,088	2,127	2,162	2,195	2,226	2,255
0,95	1,945	1,994	2,038	2,079	2,118	2,153	2,185	2,215	2,244
1,00	1,938	1,986	2,030	2,071	2,109	2,143	2,175	2,205	2,234

Таблица  $\lg Y$   $b_0 = 10^{\circ}$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	2,688	2,750	2,807	2,860	2,910	2,956	2,999	3,040	3,079
0,15	2,664	2,724	2,779	2,829	2,875	2,919	2,960	2,999	3,036
0,20	2,643	2,700	2,753	2,801	2,845	2,887	2,927	2,964	2,999
0,25	2,623	2,678	2,729	2,775	2,818	2,859	2,897	2,933	2,966
0,30	2,605	2,658	2,707	2,752	2,794	2,833	2,870	2,904	2,936
0,35	2,589	2,640	2,687	2,731	2,771	2,809	2,845	2,878	2,909
0,40	2,573	2,623	2,669	2,711	2,750	2,786	2,820	2,853	2,884
0,45	2,558	2,607	2,651	2,692	2,730	2,766	2,799	2,830	2,860
0,50	2,544	2,592	2,635	2,675	2,712	2,747	2,779	2,803	2,838
0,55	2,531	2,578	2,620	2,659	2,695	2,729	2,761	2,790	2,818
0,60	2,519	2,564	2,606	2,644	2,679	2,712	2,743	2,772	2,800
0,65	2,508	2,55							

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 15^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,131	2,323	2,477	2,599	2,704	2,795	2,876	2,949	3,014
0,15	2,130	2,320	2,472	2,590	2,689	2,776	2,853	2,922	2,983
0,20	2,128	2,317	2,467	2,582	2,676	2,758	2,831	2,897	2,956
0,25	2,126	2,314	2,462	2,574	2,663	2,742	2,812	2,875	2,932
0,30	2,124	2,311	2,458	2,567	2,652	2,727	2,794	2,855	2,910
0,35	2,122	2,308	2,454	2,560	2,642	2,714	2,778	2,836	2,880
0,40	2,121	2,305	2,450	2,553	2,632	2,702	2,764	2,820	2,870
0,45	2,119	2,303	2,446	2,546	2,623	2,691	2,751	2,805	2,853
0,50	2,117	2,300	2,443	2,540	2,615	2,681	2,739	2,791	2,837
0,55	2,116	2,298	2,439	2,534	2,607	2,671	2,727	2,777	2,822
0,60	2,114	2,295	2,435	2,528	2,599	2,661	2,716	2,761	2,808
0,65	2,112	2,293	2,432	2,523	2,592	2,652	2,705	2,752	2,795
0,70	2,111	2,291	2,428	2,518	2,585	2,644	2,696	2,742	2,783
0,75	2,109	2,289	2,424	2,513	2,578	2,636	2,687	2,732	2,772
0,80	2,107	2,286	2,420	2,508	2,572	2,628	2,678	2,722	2,762
0,85	2,106	2,284	2,417	2,503	2,566	2,620	2,669	2,712	2,751
0,90	2,104	2,281	2,414	2,499	2,560	2,612	2,660	2,703	2,741
0,95	2,102	2,279	2,411	2,494	2,554	2,605	2,651	2,693	2,731
1,00	2,101	2,277	2,408	2,490	2,548	2,598	2,643	2,684	2,722

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 20^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,372	2,564	2,717	2,837	2,938	3,026	3,104	3,175	3,239
0,15	2,370	2,560	2,711	2,826	2,920	2,003	3,077	3,143	3,202
0,20	2,368	2,556	2,705	2,816	2,905	2,983	3,053	3,115	3,171
0,25	2,366	2,552	2,699	2,807	2,891	2,963	3,031	3,090	3,144
0,30	2,364	2,549	2,693	2,798	2,878	2,948	3,011	3,068	3,119
0,35	2,361	2,545	2,688	2,789	2,866	2,933	3,047	3,097	
0,40	2,359	2,541	2,683	2,781	2,855	2,920	2,977	3,029	3,076
0,45	2,357	2,538	2,678	2,773	2,845	2,908	2,963	3,012	3,057
0,50	2,355	2,535	2,674	2,765	2,835	2,896	2,949	2,997	3,040
0,55	2,353	2,532	2,669	2,758	2,826	2,885	2,936	2,982	3,024
0,60	2,351	2,529	2,665	2,752	2,818	2,875	2,925	2,969	3,010
0,65	2,348	2,526	2,661	2,746	2,810	2,865	2,914	2,957	2,997
0,70	2,346	2,523	2,636	2,740	2,803	2,856	2,903	2,946	2,985
0,75	2,344	2,520	2,632	2,735	2,796	2,848	2,894	2,935	2,973
0,80	2,342	2,517	2,647	2,729	2,780	2,839	2,884	2,924	2,961
0,85	2,340	2,514	2,643	2,724	2,782	2,830	2,874	2,914	2,950
0,90	2,338	2,511	2,639	2,719	2,775	2,822	2,865	2,904	2,940
0,95	2,336	2,508	2,636	2,714	2,769	2,815	2,857	2,895	2,930
1,00	2,334	2,505	2,632	2,709	2,763	2,808	2,849	2,886	2,920

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 15^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	3,014	3,073	3,127	3,178	3,226	3,270	3,312	3,352	3,390
0,15	2,983	3,039	3,091	3,139	3,183	3,225	3,264	3,301	3,336
0,20	2,956	3,010	3,059	3,105	3,147	3,186	3,223	3,258	3,291
0,25	2,932	2,983	3,030	3,074	3,114	3,151	3,186	3,220	3,252
0,30	2,910	2,959	3,004	3,046	3,084	3,120	3,154	3,186	3,217
0,35	2,889	2,936	2,979	3,019	3,056	3,091	3,124	3,155	3,185
0,40	2,870	2,915	2,957	2,995	3,031	3,065	3,097	3,128	3,157
0,45	2,853	2,897	2,937	2,974	3,009	3,042	3,073	3,102	3,130
0,50	2,837	2,880	2,919	2,955	2,989	3,021	3,051	3,079	3,105
0,55	2,822	2,864	2,902	2,937	2,970	3,001	3,030	3,057	3,083
0,60	2,808	2,848	2,886	2,921	2,953	2,983	3,011	3,037	3,063
0,65	2,795	2,834	2,871	2,905	2,937	2,967	2,994	3,020	3,044
0,70	2,783	2,821	2,857	2,891	2,922	2,951	2,978	3,003	3,026
0,75	2,772	2,809	2,844	2,877	2,907	2,935	2,962	2,987	3,010
0,80	2,762	2,798	2,832	2,864	2,893	2,921	2,947	2,971	2,994
0,85	2,751	2,787	2,820	2,851	2,880	2,907	2,932	2,956	2,979
0,90	2,741	2,776	2,809	2,839	2,867	2,893	2,918	2,942	2,965
0,95	2,731	2,766	2,798	2,827	2,854	2,880	2,905	2,928	2,951
1,00	2,722	2,756	2,787	2,815	2,842	2,868	2,892	2,915	2,937

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 20^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	3,239	3,297	3,350	3,400	3,446	3,490	3,531	3,570	3,608
0,15	3,202	3,256	3,306	3,353	3,396	3,437	3,475	3,511	3,545
0,20	3,171	3,222	3,269	3,313	3,354	3,392	3,428	3,462	3,504
0,25	3,144	3,193	3,237	3,278	3,317	3,353	3,387	3,419	3,450
0,30	3,119	3,166	3,209	3,248	3,284	3,318	3,350	3,381	3,411
0,35	3,097	3,142	3,183	3,220	3,255	3,287	3,318	3,348	3,377
0,40	3,076	3,119	3,159	3,195	3,228	3,259	3,289	3,318	3,346
0,45	3,057	3,098	3,130	3,171	3,203	3,233	3,262	3,290	3,317
0,50	3,040	3,080	3,116	3,149	3,180	3,210	3,238	3,265	3,290
0,55	3,024	3,063	3,098	3,130	3,160	3,189	3,216	3,242	3,266
0,60	3,010	3,047	3,081	3,112	3,142	3,170	3,196	3,221	3,245
0,65	2,997	3,033							

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 25^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,555	2,746	2,898	3,017	3,116	3,202	3,278	3,346	3,408
0,15	2,552	2,741	2,891	3,004	3,095	3,175	3,246	3,309	3,367
0,20	2,550	2,737	2,885	2,993	3,078	3,153	3,220	3,279	3,333
0,25	2,547	2,732	2,878	2,982	3,062	3,133	3,196	3,252	3,303
0,30	2,545	2,728	2,871	2,972	3,048	3,115	3,174	3,227	3,276
0,35	2,542	2,723	2,865	2,963	3,035	3,090	3,155	3,206	3,252
0,40	2,539	2,719	2,859	2,954	3,025	3,085	3,138	3,187	3,231
0,45	2,537	2,716	2,854	2,946	3,014	3,072	3,123	3,170	3,212
0,50	2,534	2,712	2,849	2,938	3,004	3,060	3,109	3,154	3,195
0,55	2,532	2,708	2,844	2,930	2,994	3,048	3,096	3,140	3,179
0,60	2,530	2,705	2,839	2,923	2,985	3,037	3,084	3,126	3,164
0,65	2,527	2,701	2,834	2,916	2,976	3,027	3,073	3,114	3,151
0,70	2,524	2,697	2,828	2,909	2,968	3,017	3,052	3,102	3,138
0,75	2,521	2,694	2,823	2,903	2,960	3,008	3,051	3,090	3,126
0,80	2,519	2,691	2,818	2,857	2,953	2,999	3,041	3,079	3,114
0,85	2,517	2,688	2,814	2,891	2,946	2,991	3,032	3,069	3,103
0,90	2,514	2,684	2,809	2,885	2,939	2,983	3,023	3,060	3,093
0,95	2,512	2,681	2,805	2,880	2,933	2,976	3,014	3,050	3,083
1,00	2,510	2,678	2,801	2,875	2,927	2,969	3,006	3,041	3,073

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 30^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,700	2,890	3,043	3,161	3,257	3,340	3,415	3,483	3,545
0,15	2,657	2,885	3,035	3,146	3,235	3,313	3,382	3,444	3,500
0,20	2,694	2,880	3,027	3,133	3,216	3,289	3,353	3,411	3,464
0,25	2,691	2,875	3,019	3,121	3,199	3,268	3,328	3,382	3,432
0,30	2,638	2,870	3,012	3,111	3,185	3,249	3,306	3,357	3,404
0,35	2,685	2,865	3,006	3,101	3,172	3,232	3,286	3,335	3,379
0,40	2,682	2,861	3,000	3,092	3,160	3,217	3,268	3,315	3,357
0,45	2,679	2,857	2,993	3,083	3,148	3,203	3,252	3,297	3,337
0,50	2,676	2,852	2,987	3,074	3,137	3,190	3,238	3,281	3,319
0,55	2,674	2,848	2,982	3,066	3,127	3,178	3,224	3,266	3,303
0,60	2,671	2,844	2,976	3,058	3,117	3,167	3,212	3,252	3,288
0,65	2,668	2,840	2,970	3,050	3,108	3,157	3,201	3,240	3,275
0,70	2,665	2,836	2,965	3,043	3,100	3,147	3,190	3,223	3,262
0,75	2,662	2,832	2,959	3,037	3,092	3,138	3,179	3,216	3,249
0,80	2,659	2,828	2,954	3,031	3,085	3,129	3,169	3,205	3,237
0,85	2,656	2,824	2,949	3,024	3,077	3,120	3,159	3,194	3,226
0,90	2,654	2,821	2,944	3,018	3,070	3,111	3,149	3,184	3,215
0,95	2,651	2,817	2,939	3,012	3,063	3,103	3,140	3,174	3,204
1,00	2,649	2,814	2,935	3,007	3,057	3,096	3,131	3,161	3,194

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 25^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	3,408	3,466	3,519	3,568	3,613	3,656	3,697	3,736	3,774
0,15	3,357	3,420	3,469	3,514	3,556	3,596	3,635	3,671	3,705
0,20	3,333	3,383	3,428	3,470	3,510	3,547	3,583	3,617	3,650
0,25	3,303	3,350	3,393	3,433	3,470	3,505	3,538	3,570	3,601
0,30	3,276	3,321	3,362	3,400	3,435	3,468	3,500	3,530	3,559
0,35	3,252	3,295	3,334	3,370	3,404	3,435	3,465	3,494	3,522
0,40	3,231	3,271	3,308	3,343	3,375	3,405	3,434	3,462	3,489
0,45	3,212	3,250	3,285	3,318	3,349	3,378	3,406	3,433	3,459
0,50	3,193	3,232	3,265	3,296	3,326	3,354	3,384	3,407	3,432
0,55	3,179	3,215	3,247	3,277	3,305	3,332	3,358	3,384	3,403
0,60	3,164	3,199	3,230	3,259	3,286	3,312	3,338	3,363	3,386
0,65	3,151	3,185	3,215	3,243	3,269	3,294	3,319	3,343	3,365
0,70	3,138	3,171	3,201	3,228	3,253	3,278	3,302	3,325	3,346
0,75	3,126	3,158	3,187	3,214	3,239	3,263	3,286	3,303	3,323
0,80	3,114	3,145	3,174	3,201	3,225	3,248	3,271	3,292	3,312
0,85	3,103	3,134	3,162	3,188	3,212	3,234	3,256	3,277	3,297
0,90	3,093	3,123	3,150	3,175	3,199	3,221	3,242	3,262	3,282
0,95	3,083	3,112	3,139	3,163	3,186	3,208	3,228	3,248	3,268
1,00	3,073	3,102	3,128	3,152	3,174	3,195	3,215	3,235	3,254

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 30^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	3,545	3,601	3,653	3,701	3,747	3,791	3,832	3,871	3,909
0,15	3,500	3,552	3,600	3,645	3,687	3,727	3,765	3,801	3,836
0,20	3,464	3,512	3,556	3,598	3,638	3,675	3,710	3,743	3,775
0,25	3,432	3,477	3,519	3,558	3,595	3,630	3,663	3,694	3,724
0,30	3,404	3,447	3,486	3,523	3,558	3,591	3,622	3,651	3,679
0,35	3,379	3,420	3,457	3,492	3,525	3,556	3,586	3,614	3,640
0,40	3,357	3,395	3,431	3,464	3,496	3,526	3,554	3,581	3,606
0,45	3,337	3,373	3,407	3,439	3,469	3,498	3,525	3,551	3,575
0,50	3,319	3,354	3,387	3,417	3,445	3,472	3,499	3,524	3,548
0,55	3,303	3,337	3,368	3,397	3,424	3,450	3,475	3,500	3,523
0,60	3,288	3,321	3,351	3,378	3,404	3,429	3,454	3,478	3,500
0,65	3,275	3,							

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 35^\circ$ 

$c \backslash r_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,819	3,008	3,161	3,278	3,373	3,454	3,527	3,594	3,656
0,15	2,815	3,003	3,152	3,262	3,350	3,425	3,493	3,554	3,609
0,20	2,812	2,997	3,143	3,248	3,330	3,401	3,463	3,519	3,571
0,25	2,808	2,992	3,135	3,236	3,313	3,380	3,438	3,490	3,538
0,30	2,805	2,986	3,128	3,225	3,298	3,361	3,415	3,464	3,509
0,35	2,802	2,981	3,121	3,215	3,284	3,343	3,395	3,441	3,484
0,40	2,799	2,976	3,114	3,205	3,271	3,327	3,376	3,420	3,461
0,45	2,796	2,972	3,107	3,195	3,259	3,312	3,359	3,402	3,441
0,50	2,792	2,967	3,101	3,186	3,248	3,299	3,344	3,385	3,422
0,55	2,789	2,963	3,095	3,178	3,237	3,286	3,330	3,370	3,405
0,60	2,786	2,958	3,088	3,169	3,227	3,275	3,318	3,356	3,390
0,65	2,783	2,954	3,082	3,161	3,217	3,264	3,306	3,343	3,376
0,70	2,779	2,949	3,076	3,153	3,208	3,254	3,295	3,331	3,363
0,75	2,776	2,944	3,070	3,146	3,200	3,244	3,284	3,319	3,350
0,80	2,773	2,940	3,064	3,139	3,192	3,235	3,273	3,307	3,338
0,85	2,770	2,936	3,059	3,132	3,184	3,226	3,263	3,296	3,326
0,90	2,767	2,932	3,053	3,125	3,177	3,217	3,253	3,285	3,315
0,95	2,764	2,928	3,048	3,120	3,169	3,208	3,243	3,275	3,304
1,00	2,762	2,924	3,043	3,114	3,162	3,200	3,234	3,265	3,294

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 40^\circ$ 

$c \backslash r_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,917	3,106	3,258	3,375	3,469	3,550	3,622	3,688	3,749
0,15	2,913	3,101	3,249	3,359	3,446	3,520	3,586	3,646	3,701
0,20	2,910	3,095	3,240	3,345	3,426	3,495	3,555	3,610	3,661
0,25	2,906	3,089	3,232	3,332	3,408	3,473	3,530	3,581	3,628
0,30	2,902	3,083	3,224	3,320	3,392	3,454	3,507	3,554	3,598
0,35	2,899	3,077	3,216	3,309	3,378	3,436	3,486	3,531	3,572
0,40	2,896	3,072	3,208	3,299	3,364	3,419	3,467	3,510	3,549
0,45	2,892	3,067	3,201	3,289	3,351	3,404	3,450	3,491	3,528
0,50	2,888	3,062	3,194	3,279	3,340	3,390	3,434	3,473	3,509
0,55	2,884	3,057	3,187	3,270	3,329	3,377	3,419	3,457	3,492
0,60	2,881	3,052	3,180	3,261	3,318	3,365	3,406	3,443	3,476
0,65	2,878	3,047	3,174	3,253	3,308	3,354	3,394	3,430	3,462
0,70	2,875	3,042	3,167	3,245	3,299	3,343	3,382	3,417	3,448
0,75	2,871	3,037	3,161	3,237	3,290	3,333	3,371	3,405	3,435
0,80	2,868	3,033	3,155	3,230	3,282	3,323	3,360	3,393	3,423
0,85	2,865	3,028	3,149	3,223	3,274	3,314	3,349	3,381	3,410
0,90	2,861	3,024	3,143	3,216	3,266	3,305	3,339	3,370	3,399
0,95	2,858	3,020	3,138	3,210	3,258	3,296	3,329	3,360	3,388
1,00	2,855	3,016	3,133	3,204	3,251	3,288	3,320	3,350	3,377

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 35^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	3,656	3,712	3,764	3,812	3,858	3,902	3,944	3,984	4,022
0,15	3,609	3,660	3,708	3,753	3,795	3,835	3,873	3,910	3,945
0,20	3,571	3,618	3,662	3,704	3,744	3,781	3,816	3,849	3,881
0,25	3,538	3,582	3,623	3,662	3,699	3,734	3,767	3,798	3,828
0,30	3,509	3,551	3,590	3,626	3,660	3,693	3,724	3,753	3,781
0,35	3,484	3,524	3,560	3,594	3,626	3,657	3,686	3,714	3,741
0,40	3,461	3,499	3,533	3,565	3,596	3,626	3,654	3,680	3,705
0,45	3,441	3,476	3,509	3,540	3,569	3,597	3,624	3,649	3,673
0,50	3,422	3,456	3,488	3,517	3,545	3,571	3,597	3,621	3,645
0,55	3,405	3,438	3,468	3,496	3,523	3,548	3,573	3,597	3,619
0,60	3,390	3,421	3,450	3,477	3,503	3,527	3,551	3,574	3,596
0,65	3,376	3,406	3,434	3,460	3,485	3,509	3,532	3,554	3,574
0,70	3,363	3,392	3,419	3,444	3,468	3,492	3,514	3,535	3,554
0,75	3,350	3,379	3,405	3,429	3,453	3,475	3,497	3,517	3,536
0,80	3,338	3,366	3,392	3,416	3,438	3,460	3,481	3,500	3,519
0,85	3,326	3,354	3,379	3,403	3,425	3,446	3,465	3,484	3,502
0,90	3,315	3,342	3,367	3,390	3,412	3,432	3,451	3,470	3,487
0,95	3,304	3,331	3,356	3,378	3,399	3,419	3,438	3,456	3,472
1,00	3,294	3,321	3,345	3,366	3,386	3,406	3,425	3,442	3,458

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 40^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	3,749	3,805	3,857	3,906	3,952	3,997	4,040	4,081	4,120
0,15	3,701	3,752	3,800	3,845	3,887	3,927	3,966	4,003	4,039
0,20	3,661	3,708	3,752	3,794	3,833	3,870	3,906	3,940	3,973
0,25	3,628	3,671	3,711	3,750	3,787	3,822	3,855	3,887	3,917
0,30	3,598	3,639	3,677	3,713	3,747	3,779	3,810	3,840	3,869
0,35	3,572	3,611	3,647	3,680	3,712	3,742	3,771	3,799	3,827
0,40	3,549	3,586	3,620	3,651	3,681	3,710	3,738	3,764	3,789
0,45	3,528	3,563	3,595	3,625	3,653	3,681	3,707	3,732	3,756
0,50	3,509	3,542	3,573	3,602	3,629	3,655	3,680	3,704	3,727
0,55	3,492	3,524	3,553	3,581	3,607	3,632	3,656	3,679	3,701
0,60	3,476	3,507	3,535	3,562	3,587	3,611	3,634	3,656	3,677
0,65	3,462	3,							

Таблица  $\lg Y \quad \theta_0 = 45^\circ$ 

$c \backslash \nu_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,000	3,189	3,340	3,457	3,550	3,631	3,703	3,768	3,828
0,15	2,995	3,183	3,331	3,440	3,527	3,600	3,665	3,724	3,779
0,20	2,991	3,177	3,322	3,426	3,507	3,575	3,634	3,688	3,738
0,25	2,987	3,170	3,313	3,413	3,488	3,552	3,608	3,658	3,704
0,30	2,983	3,164	3,304	3,400	3,471	3,532	3,585	3,631	3,674
0,35	2,980	3,158	3,296	3,388	3,457	3,514	3,563	3,607	3,648
0,40	2,976	3,152	3,288	3,378	3,443	3,497	3,544	3,586	3,624
0,45	2,972	3,147	3,280	3,368	3,430	3,482	3,527	3,567	3,603
0,50	2,968	3,141	3,272	3,358	3,418	3,467	3,510	3,549	3,584
0,55	2,964	3,136	3,265	3,348	3,406	3,454	3,495	3,532	3,566
0,60	2,961	3,131	3,258	3,339	3,395	3,441	3,481	3,517	3,550
0,65	2,958	3,126	3,251	3,330	3,385	3,430	3,468	3,503	3,535
0,70	2,955	3,121	3,244	3,322	3,375	3,419	3,456	3,490	3,521
0,75	2,951	3,116	3,238	3,314	3,366	3,408	3,445	3,478	3,508
0,80	2,947	3,111	3,231	3,306	3,357	3,398	3,434	3,466	3,495
0,85	2,944	3,106	3,225	3,299	3,349	3,388	3,423	3,454	3,482
0,90	2,940	3,101	3,219	3,292	3,341	3,379	3,413	3,443	3,471
0,95	2,937	3,097	3,214	3,285	3,333	3,370	3,403	3,432	3,459
1,00	2,933	3,093	3,208	3,279	3,326	3,362	3,393	3,422	3,448

Таблица  $\lg Y \quad \theta_0 = 50^\circ$ 

$c \backslash \nu_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,009	3,258	3,409	3,526	3,619	3,699	3,771	3,836	3,896
0,15	3,064	3,252	3,400	3,509	3,595	3,668	3,732	3,791	3,846
0,20	3,060	3,245	3,391	3,495	3,575	3,643	3,702	3,755	3,804
0,25	3,056	3,238	3,381	3,481	3,556	3,619	3,675	3,724	3,769
0,30	3,052	3,232	3,372	3,468	3,539	3,599	3,651	3,697	3,739
0,35	3,048	3,226	3,363	3,456	3,524	3,581	3,629	3,673	3,713
0,40	3,044	3,220	3,355	3,445	3,510	3,564	3,610	3,651	3,689
0,45	3,040	3,214	3,347	3,435	3,497	3,548	3,593	3,632	3,667
0,50	3,036	3,208	3,339	3,424	3,484	3,533	3,576	3,614	3,648
0,55	3,032	3,203	3,332	3,414	3,472	3,519	3,560	3,597	3,630
0,60	3,028	3,197	3,325	3,405	3,461	3,506	3,546	3,581	3,613
0,65	3,025	3,192	3,317	3,396	3,450	3,494	3,532	3,566	3,597
0,70	3,022	3,187	3,310	3,387	3,440	3,483	3,520	3,553	3,583
0,75	3,018	3,182	3,303	3,379	3,431	3,472	3,508	3,541	3,570
0,80	3,014	3,177	3,296	3,371	3,422	3,462	3,497	3,528	3,557
0,85	3,010	3,172	3,290	3,363	3,413	3,452	3,486	3,516	3,544
0,90	3,006	3,167	3,284	3,356	3,405	3,443	3,476	3,505	3,532
0,95	3,003	3,162	3,278	3,349	3,397	3,434	3,466	3,494	3,520
1,00	3,999	3,158	3,272	3,342	3,389	3,425	3,456	3,484	3,509

Таблица  $\lg Y \quad \theta_0 = 45^\circ$ 

$c \backslash \nu_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	3,828	3,884	3,936	3,985	4,032	4,078	4,122	4,164	4,205
0,15	3,779	3,830	3,878	3,923	3,966	4,007	4,046	4,084	4,121
0,20	3,738	3,785	3,829	3,870	3,909	3,946	3,983	4,019	4,053
0,25	3,704	3,747	3,787	3,825	3,862	3,897	3,930	3,963	3,995
0,30	3,674	3,714	3,752	3,787	3,821	3,853	3,884	3,915	3,945
0,35	3,648	3,686	3,721	3,754	3,786	3,816	3,845	3,873	3,901
0,40	3,624	3,660	3,694	3,725	3,754	3,782	3,810	3,837	3,862
0,45	3,603	3,637	3,669	3,698	3,726	3,753	3,779	3,804	3,828
0,50	3,584	3,616	3,646	3,674	3,701	3,727	3,752	3,776	3,798
0,55	3,566	3,597	3,626	3,653	3,679	3,704	3,727	3,750	3,771
0,60	3,550	3,580	3,608	3,634	3,658	3,682	3,705	3,727	3,747
0,65	3,535	3,564	3,591	3,616	3,640	3,663	3,685	3,705	3,725
0,70	3,521	3,549	3,575	3,599	3,622	3,645	3,666	3,686	3,705
0,75	3,508	3,535	3,560	3,584	3,606	3,628	3,648	3,668	3,686
0,80	3,495	3,521	3,546	3,569	3,591	3,612	3,632	3,651	3,668
0,85	3,482	3,508	3,532	3,555	3,576	3,597	3,616	3,634	3,651
0,90	3,471	3,496	3,519	3,541	3,562	3,582	3,601	3,619	3,635
0,95	3,459	3,484	3,506	3,528	3,549	3,568	3,587	3,604	3,620
1,00	3,448	3,472	3,494	3,515	3,535	3,554	3,573	3,590	3,605

Таблица  $\lg Y \quad \theta_0 = 50^\circ$ 

$c \backslash \nu_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	3,896	3,952	4,004	4,053	4,101	4,148	4,193	4,236	4,278
0,15	3,846	3,897	3,945	3,990	4,034	4,076	4,116	4,155	4,193
0,20	3,804	3,851	3,895	3,936	3,975	4,013	4,050	4,087	4,123
0,25	3,769	3,812	3,852	3,890	3,926	3,951	3,995	4,029	4,062
0,30	3,739	3,779	3,816	3,851	3,883	3,917	3,949	3,980	4,010
0,35	3,713	3,750	3,785	3,818	3,849	3,879	3,909	3,937	3,965
0,40	3,689	3,724	3,757	3,788	3,817	3,845	3,873	3,900	3,926
0,45	3,667	3,700	3,732	3,761	3,789	3,816	3,842	3,867	3,891
0,50	3,648	3,679	3,709	3,737	3,764	3,793	3,814	3,838	3,860
0,55	3,630	3,660	3,688	3,715	3,741	3,765	3,788	3,811	3,832
0,60	3,613	3,642	3,670	3,696	3,720	3,743	3,766	3,788	3,808
0,65	3,597	3,626</							

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 55^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,127	3,316	3,467	3,584	3,677	3,757	3,829	3,894	3,954
0,15	3,122	3,309	3,457	3,567	3,653	3,726	3,790	3,848	3,903
0,20	3,118	3,302	3,448	3,553	3,632	3,700	3,759	3,812	3,861
0,25	3,114	3,296	3,438	3,539	3,614	3,676	3,731	3,780	3,825
0,30	3,110	3,289	3,429	3,526	3,597	3,656	3,707	3,753	3,795
0,35	3,105	3,283	3,420	3,513	3,581	3,637	3,685	3,729	3,769
0,40	3,101	3,277	3,411	3,502	3,566	3,620	3,666	3,707	3,744
0,45	3,097	3,271	3,403	3,491	3,553	3,604	3,648	3,687	3,722
0,50	3,093	3,265	3,395	3,480	3,540	3,589	3,632	3,669	3,702
0,55	3,089	3,259	3,388	3,470	3,528	3,575	3,616	3,652	3,684
0,60	3,085	3,253	3,381	3,461	3,517	3,562	3,601	3,636	3,667
0,65	3,081	3,248	3,373	3,452	3,506	3,549	3,587	3,621	3,651
0,70	3,078	3,243	3,366	3,443	3,496	3,538	3,574	3,607	3,636
0,75	3,074	3,238	3,359	3,434	3,486	3,527	3,562	3,594	3,623
0,80	3,070	3,232	3,352	3,426	3,477	3,517	3,551	3,582	3,610
0,85	3,066	3,227	3,345	3,418	3,468	3,507	3,540	3,570	3,597
0,90	3,062	3,222	3,339	3,411	3,459	3,497	3,530	3,559	3,585
0,95	3,059	3,217	3,332	3,404	3,451	3,488	3,520	3,548	3,573
1,00	3,055	3,213	3,326	3,396	3,442	3,479	3,510	3,537	3,561

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 60^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	3,175	3,364	3,515	3,632	3,725	3,806	3,877	3,942	4,002
0,15	3,170	3,357	3,505	3,615	3,701	3,775	3,839	3,897	3,952
0,20	3,166	3,350	3,495	3,601	3,680	3,748	3,807	3,860	3,909
0,25	3,162	3,344	3,485	3,587	3,662	3,724	3,779	3,828	3,873
0,30	3,157	3,337	3,476	3,574	3,645	3,704	3,755	3,801	3,843
0,35	3,152	3,331	3,467	3,561	3,628	3,685	3,733	3,776	3,816
0,40	3,148	3,324	3,458	3,549	3,613	3,667	3,713	3,754	3,791
0,45	3,144	3,318	3,450	3,538	3,600	3,651	3,695	3,734	3,769
0,50	3,140	3,312	3,442	3,527	3,587	3,636	3,678	3,715	3,748
0,55	3,136	3,306	3,435	3,517	3,575	3,622	3,662	3,698	3,730
0,60	3,132	3,300	3,427	3,507	3,564	3,609	3,647	3,682	3,713
0,65	3,128	3,295	3,420	3,498	3,553	3,596	3,633	3,667	3,697
0,70	3,124	3,290	3,413	3,489	3,543	3,584	3,620	3,653	3,682
0,75	3,120	3,284	3,406	3,480	3,533	3,573	3,608	3,640	3,668
0,80	3,116	3,279	3,299	3,472	3,523	3,563	3,597	3,628	3,655
0,85	3,113	3,274	3,302	3,464	3,514	3,553	3,587	3,616	3,642
0,90	3,109	3,269	3,285	3,457	3,505	3,543	3,576	3,604	3,629
0,95	3,105	3,264	3,378	3,450	3,496	3,533	3,565	3,593	3,618
1,00	3,101	3,259	3,371	3,442	3,487	3,524	3,555	3,582	3,606

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 55^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	3,954	4,010	4,062	4,112	4,161	4,208	4,254	4,298	4,341
0,15	3,903	3,954	4,002	4,048	4,092	4,135	4,177	4,217	4,256
0,20	3,861	3,907	3,951	3,993	4,033	4,071	4,109	4,147	4,184
0,25	3,825	3,888	3,908	3,946	3,982	4,017	4,052	4,086	4,120
0,30	3,795	3,835	3,872	3,907	3,940	3,973	4,005	4,036	4,066
0,35	3,769	3,806	3,840	3,873	3,904	3,934	3,964	3,993	4,021
0,40	3,744	3,779	3,811	3,842	3,872	3,900	3,928	3,955	3,981
0,45	3,722	3,755	3,786	3,815	3,843	3,870	3,896	3,921	3,946
0,50	3,702	3,733	3,763	3,791	3,818	3,843	3,868	3,891	3,914
0,55	3,684	3,714	3,742	3,769	3,794	3,818	3,841	3,864	3,885
0,60	3,667	3,696	3,723	3,749	3,773	3,796	3,818	3,840	3,860
0,65	3,651	3,679	3,706	3,731	3,751	3,776	3,798	3,818	3,837
0,70	3,630	3,663	3,589	3,714	3,737	3,758	3,779	3,798	3,816
0,75	3,623	3,649	3,674	3,697	3,720	3,741	3,761	3,779	3,796
0,80	3,610	3,635	3,659	3,682	3,704	3,725	3,744	3,761	3,778
0,85	3,597	3,621	3,644	3,667	3,689	3,709	3,727	3,744	3,761
0,90	3,585	3,608	3,631	3,653	3,674	3,693	3,711	3,728	3,744
0,95	3,573	3,596	3,618	3,630	3,659	3,678	3,696	3,713	3,729
1,00	3,561	3,583	3,604	3,625	3,645	3,663	3,681	3,698	3,714

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 60^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	4,002	4,058	4,111	4,162	4,212	4,250	4,307	4,352	4,396
0,15	3,952	4,003	4,051	4,097	4,142	4,186	4,229	4,271	4,311
0,20	3,909	3,955	3,999	4,041	4,082	4,121	4,160	4,199	4,236
0,25	3,873	3,916	3,956	3,994	4,031	4,066	4,101	4,136	4,171
0,30	3,843	3,882	3,919	3,954	3,988	4,021	4,053	4,085	4,116
0,35	3,816	3,853	3,887	3,919	3,951	3,982	4,012	4,041	4,069
0,40	3,791	3,826	3,858	3,888	3,918	3,947	3,975	4,002	4,028
0,45	3,769	3,802	3,832	3,861	3,889	3,916	3,942	3,968	3,993
0,50	3,748	3,779	3,809	3,837	3,863	3,889	3,913	3,937	3,961
0,55	3,730	3,760	3,788	3,815	3,840	3,864	3,887	3,909	3,931
0,60	3,713	3,742	3,768	3,794	3,818	3,841	3,863	3,885	3,905
0,65	3,697	3,724</							

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 65^\circ$ 

$c \backslash v_0$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0,20	3,534	3,610	3,720	3,788	3,847	3,900	3,949	3,995	4,039
0,25	3,524	3,626	3,701	3,764	3,819	3,868	3,913	3,956	3,996
0,30	3,515	3,613	3,634	3,743	3,795	3,841	3,883	3,922	3,959
0,35	3,506	3,600	3,667	3,724	3,773	3,816	3,855	3,892	3,926
0,40	3,497	3,588	3,652	3,706	3,752	3,793	3,830	3,865	3,897
0,45	3,489	3,577	3,639	3,690	3,734	3,773	3,808	3,841	3,871
0,50	3,481	3,566	3,626	3,675	3,717	3,754	3,787	3,818	3,847
0,55	3,473	3,555	3,613	3,660	3,700	3,736	3,768	3,798	3,826
0,60	3,465	3,545	3,602	3,647	3,685	3,720	3,751	3,780	3,806

Таблица  $\lg v_c$   $\theta_0 = 2^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,300	2,395	2,472	2,534	2,587	2,633	2,673	2,709	2,742
0,15	2,299	2,394	2,470	2,530	2,580	2,621	2,661	2,694	2,726
0,20	2,298	2,393	2,468	2,525	2,573	2,615	2,650	2,681	2,709
0,25	2,297	2,392	2,466	2,520	2,566	2,606	2,639	2,668	2,694
0,30	2,296	2,391	2,464	2,516	2,560	2,598	2,629	2,656	2,680
0,35	2,295	2,390	2,462	2,512	2,554	2,590	2,619	2,644	2,666
0,40	2,294	2,389	2,460	2,508	2,548	2,582	2,610	2,633	2,653
0,45	2,293	2,388	2,458	2,505	2,543	2,575	2,601	2,623	2,641
0,50	2,292	2,386	2,456	2,502	2,538	2,568	2,593	2,613	2,630
0,55	2,292	2,385	2,454	2,499	2,533	2,561	2,585	2,604	2,620
0,60	2,292	2,384	2,452	2,496	2,528	2,555	2,577	2,595	2,609
0,65	2,291	2,383	2,450	2,493	2,524	2,550	2,570	2,586	2,599
0,70	2,290	2,382	2,449	2,491	2,520	2,544	2,563	2,578	2,590
0,75	2,289	2,380	2,447	2,488	2,516	2,538	2,556	2,570	2,580
0,80	2,288	2,379	2,446	2,485	2,511	2,532	2,549	2,562	2,571
0,85	2,288	2,378	2,444	2,482	2,507	2,526	2,542	2,554	2,563
0,90	2,288	2,377	2,442	2,478	2,503	2,521	2,535	2,546	2,555
0,95	2,287	2,376	2,440	2,475	2,498	2,515	2,528	2,539	2,547
1,00	2,286	2,375	2,438	2,472	2,494	2,510	2,522	2,531	2,539

Таблица  $\lg Y$   $\theta_0 = 70^\circ$ 

$c \backslash v_0$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0,20	3,565	3,671	3,732	3,820	3,879	3,932	3,981	4,028	4,072
0,25	3,555	3,657	3,732	3,796	3,851	3,900	3,945	3,988	4,029
0,30	3,546	3,644	3,714	3,774	3,826	3,873	3,915	3,954	3,991
0,35	3,537	3,631	3,698	3,755	3,804	3,848	3,887	3,923	3,958
0,40	3,528	3,619	3,683	3,737	3,784	3,825	3,862	3,896	3,928
0,45	3,519	3,607	3,669	3,721	3,765	3,804	3,839	3,872	3,902
0,50	3,511	3,596	3,656	3,706	3,748	3,785	3,818	3,849	3,878
0,55	3,503	3,585	3,644	3,691	3,731	3,767	3,799	3,828	3,856
0,60	3,495	3,575	3,632	3,677	3,716	3,750	3,781	3,810	3,836

Таблица  $\lg v_c$   $\theta_0 = 2^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	2,742	2,772	2,799	2,823	2,845	2,866	2,886	2,905	2,923
0,15	2,725	2,753	2,777	2,799	2,819	2,837	2,855	2,872	2,888
0,20	2,709	2,734	2,756	2,776	2,794	2,810	2,826	2,841	2,855
0,25	2,694	2,717	2,737	2,755	2,771	2,786	2,800	2,813	2,825
0,30	2,680	2,701	2,719	2,735	2,750	2,763	2,775	2,787	2,797
0,35	2,666	2,685	2,702	2,717	2,730	2,741	2,751	2,761	2,770
0,40	2,653	2,671	2,686	2,699	2,710	2,720	2,728	2,736	2,744
0,45	2,641	2,657	2,670	2,681	2,691	2,699	2,706	2,713	2,720
0,50	2,630	2,644	2,655	2,664	2,673	2,680	2,686	2,692	2,698
0,55	2,620	2,632	2,641	2,649	2,656	2,662	2,668	2,673	2,679
0,60	2,609	2,620	2,628	2,634	2,640	2,646	2,651	2,656	2,661
0,65	2,599	2,609	2,616	2,621	2,626	2,631	2,635	2,640	2,644
0,70	2,590	2,598	2,604	2,609	2,614	2,618	2,621	2,625	2,629
0,75	2,580	2,588	2,594	2,599	2,603	2,606	2,609	2,612	2,615
0,80	2,571	2,578	2,584	2,589	2,593	2,595	2,597	2,599	2,601
0,85	2,563	2,569	2,574	2,579	2,582	2,584	2,586	2,587	2,588
0,90	2,555	2,561	2,565	2,569	2,572	2,574	2,575	2,576	2,576
0,95	2,547	2,552	2,556	2,559	2,561	2,563	2,564	2,564	2,564
1,00	2,539	2,544	2,548	2,550	2,551	2,552	2,553	2,553	2,553

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 5^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,297	2,392	2,467	2,521	2,566	2,605	2,640	2,668	2,693
0,15	2,295	2,389	2,462	2,511	2,551	2,586	2,615	2,639	2,660
0,20	2,293	2,386	2,457	2,502	2,537	2,567	2,592	2,613	2,631
0,25	2,291	2,383	2,452	2,494	2,525	2,550	2,572	2,589	2,604
0,30	2,289	2,380	2,448	2,487	2,514	2,536	2,554	2,568	2,580
0,35	2,287	2,377	2,444	2,480	2,504	2,523	2,538	2,550	2,559
0,40	2,285	2,375	2,439	2,473	2,495	2,511	2,524	2,534	2,542
0,45	2,283	2,372	2,435	2,467	2,487	2,501	2,512	2,521	2,527
0,50	2,282	2,369	2,431	2,461	2,480	2,492	2,502	2,509	2,514
0,55	2,280	2,366	2,427	2,456	2,473	2,484	2,492	2,498	2,502
0,60	2,279	2,364	2,423	2,451	2,467	2,477	2,484	2,489	2,492
0,65	2,277	2,361	2,419	2,446	2,461	2,470	2,476	2,480	2,483
0,70	2,276	2,358	2,416	2,441	2,456	2,464	2,469	2,472	2,474
0,75	2,274	2,355	2,412	2,436	2,451	2,458	2,462	2,465	2,466
0,80	2,272	2,352	2,408	2,432	2,446	2,452	2,456	2,459	2,460
0,85	2,271	2,350	2,404	2,428	2,441	2,447	2,451	2,453	2,454
0,90	2,269	2,348	2,401	2,424	2,437	2,443	2,446	2,448	2,448
0,95	2,268	2,346	2,398	2,420	2,432	2,438	2,441	2,443	2,442
1,00	2,266	2,343	2,395	2,416	2,427	2,433	2,436	2,437	2,437

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 10^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,294	2,386	2,457	2,503	2,540	2,571	2,597	2,618	2,637
0,15	2,290	2,380	2,448	2,488	2,518	2,541	2,560	2,576	2,589
0,20	2,286	2,375	2,440	2,475	2,499	2,518	2,532	2,543	2,552
0,25	2,283	2,369	2,433	2,464	2,485	2,500	2,510	2,518	2,524
0,30	2,279	2,364	2,425	2,454	2,472	2,484	2,492	2,498	2,502
0,35	2,275	2,359	2,418	2,445	2,461	2,470	2,476	2,481	2,485
0,40	2,272	2,354	2,411	2,437	2,451	2,459	2,464	2,467	2,470
0,45	2,269	2,349	2,404	2,429	2,442	2,450	2,454	2,456	2,458
0,50	2,266	2,344	2,367	2,421	2,434	2,441	2,444	2,446	2,448
0,55	2,263	2,339	2,391	2,414	2,426	2,432	2,435	2,437	2,439
0,60	2,260	2,334	2,385	2,407	2,418	2,423	2,426	2,428	2,430
0,65	2,256	2,329	2,379	2,400	2,410	2,415	2,418	2,420	2,421
0,70	2,253	2,325	2,373	2,393	2,403	2,408	2,410	2,412	2,413
0,75	2,250	2,321	2,367	2,386	2,396	2,400	2,402	2,404	2,405
0,80	2,247	2,316	2,362	2,380	2,389	2,393	2,395	2,397	2,397
0,85	2,244	2,312	2,356	2,373	2,382	2,386	2,388	2,389	2,389
0,90	2,242	2,308	2,350	2,367	2,375	2,379	2,381	2,382	2,382
0,95	2,239	2,303	2,345	2,361	2,368	2,372	2,374	2,375	2,374
1,00	2,236	2,299	2,340	2,355	2,362	2,365	2,367	2,368	2,367

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 5^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	2,693	2,717	2,738	2,757	2,774	2,790	2,804	2,816	2,828
0,15	2,669	2,679	2,696	2,710	2,723	2,735	2,745	2,754	2,762
0,20	2,631	2,646	2,658	2,669	2,679	2,687	2,694	2,700	2,706
0,25	2,604	2,616	2,626	2,634	2,640	2,646	2,651	2,655	2,659
0,30	2,589	2,589	2,597	2,603	2,607	2,611	2,614	2,617	2,619
0,35	2,559	2,566	2,572	2,577	2,580	2,582	2,583	2,585	2,586
0,40	2,542	2,547	2,551	2,554	2,557	2,558	2,558	2,559	2,559
0,45	2,527	2,531	2,533	2,535	2,537	2,538	2,538	2,537	2,537
0,50	2,514	2,517	2,518	2,519	2,520	2,520	2,520	2,519	2,518
0,55	2,502	2,504	2,505	2,505	2,505	2,505	2,504	2,503	2,503
0,60	2,492	2,493	2,494	2,493	2,493	2,492	2,491	2,490	2,490
0,65	2,483	2,484	2,484	2,483	2,482	2,481	2,481	2,480	2,479
0,70	2,474	2,475	2,475	2,474	2,473	2,472	2,471	2,470	2,469
0,75	2,466	2,467	2,467	2,466	2,465	2,464	2,463	2,462	2,460
0,80	2,460	2,460	2,460	2,459	2,458	2,457	2,456	2,455	2,453
0,85	2,454	2,453	2,453	2,452	2,451	2,450	2,449	2,448	2,446
0,90	2,448	2,447	2,447	2,446	2,445	2,444	2,443	2,442	2,440
0,95	2,442	2,442	2,442	2,441	2,440	2,438	2,437	2,435	2,434
1,00	2,437	2,437	2,437	2,436	2,434	2,432	2,431	2,429	2,427

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 10^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	2,637	2,653	2,667	2,679	2,690	2,701	2,710	2,718	2,725
0,15	2,589	2,600	2,609	2,610	2,623	2,630	2,635	2,639	2,641
0,20	2,552	2,559	2,565	2,576	2,575	2,579	2,581	2,582	2,582
0,25	2,524	2,530	2,534	2,537	2,539	2,540	2,541	2,542	2,542
0,30	2,502	2,506	2,509	2,510	2,511	2,511	2,511	2,511	2,511
0,35	2,485	2,487	2,488	2,489	2,489	2,489	2,489	2,489	2,489
0,40	2,470	2,472	2,472	2,473	2,473	2,473	2,473	2,473	2,473
0,45	2,458	2,459	2,459	2,460	2,460	2,460	2,460	2,459	2,459
0,50	2,448	2,449	2,449	2,449	2,449	2,449	2,449	2,448	2,448
0,55	2,439	2,439	2,439	2,439	2,439	2,439	2,439	2,438	2,438
0,60	2,430	2,430	2,430	2,430	2,430	2,430	2,430	2,429	2,429
0,65	2,421	2,42							

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 15^\circ$ 

$c \backslash v_e$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,291	2,382	2,451	2,492	2,523	2,548	2,569	2,586	2,601
0,15	2,285	2,374	2,430	2,474	2,499	2,517	2,531	2,542	2,551
0,20	2,280	2,366	2,428	2,459	2,480	2,494	2,504	2,512	2,518
0,25	2,275	2,358	2,418	2,447	2,465	2,477	2,484	2,490	2,494
0,30	2,271	2,351	2,408	2,435	2,452	2,462	2,468	2,473	2,476
0,35	2,266	2,344	2,399	2,424	2,439	2,448	2,454	2,458	2,460
0,40	2,262	2,338	2,390	2,414	2,428	2,436	2,441	2,444	2,447
0,45	2,257	2,331	2,381	2,404	2,417	2,425	2,429	2,432	2,435
0,50	2,252	2,325	2,373	2,395	2,406	2,414	2,418	2,421	2,424
0,55	2,248	2,319	2,365	2,386	2,396	2,403	2,407	2,410	2,413
0,60	2,244	2,312	2,357	2,377	2,386	2,392	2,397	2,400	2,402
0,65	2,239	2,306	2,350	2,368	2,377	2,383	2,387	2,390	2,392
0,70	2,235	2,300	2,342	2,360	2,368	2,374	2,378	2,381	2,383
0,75	2,231	2,294	2,335	2,352	2,360	2,365	2,369	2,372	2,374
0,80	2,227	2,289	2,328	2,344	2,352	2,357	2,360	2,363	2,365
0,85	2,223	2,284	2,321	2,336	2,344	2,352	2,354	2,356	
0,90	2,220	2,278	2,314	2,329	2,336	2,341	2,344	2,346	2,347
0,95	2,216	2,272	2,307	2,321	2,328	2,333	2,336	2,338	2,339
1,00	2,212	2,267	2,300	2,314	2,321	2,325	2,327	2,329	2,330

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 20^\circ$ 

$c \backslash v_e$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,288	2,378	2,447	2,486	2,514	2,535	2,553	2,569	2,583
0,15	2,281	2,369	2,433	2,467	2,490	2,506	2,518	2,528	2,536
0,20	2,275	2,360	2,420	2,451	2,471	2,483	2,492	2,499	2,504
0,25	2,270	2,351	2,407	2,437	2,455	2,466	2,473	2,479	2,484
0,30	2,264	2,342	2,396	2,424	2,441	2,450	2,457	2,463	2,467
0,35	2,259	2,334	2,386	2,412	2,427	2,436	2,443	2,449	2,453
0,40	2,254	2,326	2,376	2,400	2,414	2,423	2,430	2,435	2,440
0,45	2,248	2,318	2,366	2,389	2,402	2,411	2,417	2,422	2,427
0,50	2,242	2,311	2,357	2,378	2,390	2,399	2,405	2,410	2,414
0,55	2,237	2,304	2,347	2,368	2,379	2,387	2,393	2,398	2,402
0,60	2,232	2,297	2,338	2,358	2,369	2,376	2,382	2,387	2,390
0,65	2,227	2,290	2,330	2,349	2,359	2,366	2,372	2,376	2,379
0,70	2,222	2,283	2,321	2,340	2,349	2,356	2,362	2,366	2,369
0,75	2,217	2,276	2,313	2,331	2,340	2,346	2,352	2,356	2,359
0,80	2,213	2,270	2,305	2,322	2,331	2,337	2,342	2,346	2,349
0,85	2,208	2,264	2,298	2,314	2,323	2,329	2,333	2,337	2,340
0,90	2,204	2,258	2,291	2,306	2,314	2,320	2,324	2,327	2,330
0,95	2,199	2,252	2,283	2,298	2,306	2,311	2,315	2,318	2,321
1,00	2,195	2,246	2,275	2,290	2,298	2,303	2,306	2,309	2,312

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 15^\circ$ 

$c \backslash v_e$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	2,001	2,613	2,024	2,634	2,644	2,633	2,661	2,669	2,670
0,15	2,551	2,558	2,564	2,569	2,573	2,577	2,581	2,584	2,586
0,20	2,518	2,522	2,526	2,529	2,532	2,535	2,538	2,541	2,543
0,25	2,494	2,497	2,500	2,503	2,506	2,508	2,510	2,512	2,514
0,30	2,476	2,478	2,480	2,488	2,486	2,489	2,491	2,492	2,494
0,35	2,450	2,462	2,464	2,467	2,470	2,472	2,474	2,475	2,476
0,40	2,447	2,449	2,451	2,454	2,456	2,457	2,459	2,460	
0,45	2,435	2,437	2,439	2,441	2,443	2,444	2,445	2,446	
0,50	2,424	2,426	2,428	2,429	2,430	2,431	2,432	2,433	2,434
0,55	2,413	2,415	2,417	2,418	2,418	2,419	2,420	2,421	2,423
0,60	2,402	2,404	2,406	2,407	2,408	2,409	2,410	2,412	
0,65	2,392	2,394	2,396	2,397	2,397	2,398	2,399	2,400	2,401
0,70	2,383	2,385	2,386	2,387	2,387	2,388	2,389	2,390	2,391
0,75	2,374	2,375	2,376	2,377	2,378	2,379	2,380	2,381	
0,80	2,365	2,366	2,367	2,368	2,368	2,369	2,370	2,370	2,371
0,85	2,356	2,357	2,358	2,359	2,359	2,360	2,361	2,362	
0,90	2,347	2,348	2,349	2,350	2,350	2,351	2,352	2,353	
0,95	2,339	2,340	2,341	2,341	2,342	2,343	2,343	2,343	
1,00	2,330	2,331	2,332	2,333	2,333	2,334	2,334	2,334	

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 20^\circ$ 

$c \backslash v_e$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	2,583	2,596	2,607	2,617	2,627	2,636	2,645	2,654	2,662
0,15	2,536	2,543	2,549	2,553	2,561	2,566	2,572	2,577	2,582
0,20	2,504	2,509	2,514	2,518	2,522	2,525	2,529	2,533	2,536
0,25	2,484	2,488	2,492	2,495	2,499	2,502	2,505	2,508	2,511
0,30	2,467	2,471	2,475	2,478	2,482	2,485	2,488	2,490	2,493
0,35	2,453	2,457	2,461	2,464	2,467	2,470	2,473	2,475	2,477
0,40	2,440	2,444	2,447	2,450	2,453	2,456	2,458	2,461	2,463
0,45	2,427	2,431	2,434	2,437	2,440	2,442	2,444	2,447	2,449
0,50	2,414	2,418	2,421	2,424	2,426	2,428	2,431	2,434	2,436
0,55	2,402	2,405	2,408	2,411	2,413	2,415	2,418	2,421	2,424
0,60	2,390	2,393	2,395	2,399	2,401	2,403	2,406	2,409	2,412
0,65	2,379	2,382	2,385	2,387	2,389	2,392	2,395	2,39	

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 25^\circ$ 

$c \backslash \nu_e$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,286	2,376	2,444	2,484	2,511	2,531	2,548	2,564	2,578
0,15	2,279	2,366	2,429	2,465	2,487	2,503	2,515	2,525	2,533
0,20	2,272	2,356	2,415	2,448	2,469	2,481	2,490	2,498	2,504
0,25	2,266	2,346	2,402	2,433	2,452	2,463	2,472	2,479	2,485
0,30	2,259	2,337	2,390	2,419	2,437	2,447	2,456	2,463	2,469
0,35	2,254	2,328	2,379	2,405	2,422	2,433	2,442	2,449	2,455
0,40	2,248	2,319	2,368	2,392	2,408	2,419	2,428	2,435	2,441
0,45	2,242	2,311	2,357	2,380	2,395	2,406	2,414	2,421	2,427
0,50	2,236	2,303	2,347	2,369	2,383	2,393	2,401	2,408	2,413
0,55	2,230	2,295	2,337	2,358	2,371	2,381	2,389	2,395	2,400
0,60	2,225	2,287	2,327	2,348	2,360	2,369	2,377	2,383	2,388
0,65	2,220	2,280	2,318	2,338	2,350	2,358	2,365	2,371	2,376
0,70	2,214	2,273	2,309	2,329	2,340	2,348	2,355	2,360	2,365
0,75	2,209	2,266	2,301	2,320	2,330	2,338	2,345	2,350	2,355
0,80	2,204	2,259	2,293	2,312	2,322	2,329	2,335	2,340	2,344
0,85	2,199	2,252	2,286	2,304	2,314	2,321	2,326	2,331	2,334
0,90	2,194	2,246	2,279	2,296	2,305	2,312	2,317	2,321	2,325
0,95	2,189	2,240	2,271	2,288	2,297	2,303	2,308	2,312	2,316
1,00	2,184	2,234	2,263	2,280	2,289	2,295	2,300	2,304	2,307

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 30^\circ$ 

$c \backslash \nu_e$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,285	2,374	2,442	2,485	2,513	2,533	2,550	2,566	2,580
0,15	2,278	2,363	2,426	2,466	2,489	2,505	2,518	2,528	2,537
0,20	2,270	2,353	2,412	2,449	2,471	2,484	2,495	2,503	2,510
0,25	2,263	2,343	2,399	2,433	2,453	2,466	2,476	2,484	2,491
0,30	2,257	2,334	2,387	2,418	2,437	2,449	2,459	2,468	2,475
0,35	2,251	2,324	2,375	2,403	2,422	2,434	2,444	2,453	2,460
0,40	2,245	2,315	2,364	2,389	2,407	2,420	2,430	2,439	2,446
0,45	2,239	2,307	2,353	2,377	2,394	2,406	2,416	2,425	2,432
0,50	2,233	2,299	2,343	2,366	2,381	2,393	2,403	2,411	2,418
0,55	2,227	2,290	2,333	2,355	2,369	2,381	2,390	2,398	2,405
0,60	2,222	2,282	2,323	2,344	2,358	2,369	2,378	2,385	2,392
0,65	2,216	2,275	2,314	2,334	2,348	2,358	2,366	2,373	2,380
0,70	2,211	2,268	2,305	2,325	2,338	2,348	2,356	2,362	2,368
0,75	2,206	2,261	2,297	2,317	2,329	2,338	2,346	2,352	2,358
0,80	2,200	2,254	2,289	2,309	2,320	2,329	2,336	2,342	2,348
0,85	2,195	2,247	2,282	2,301	2,312	2,320	2,327	2,333	2,338
0,90	2,190	2,241	2,275	2,293	2,303	2,311	2,318	2,323	2,328
0,95	2,185	2,235	2,267	2,285	2,295	2,303	2,309	2,314	2,319
1,00	2,179	2,229	2,260	2,278	2,288	2,295	2,301	2,306	2,310

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 25^\circ$ 

$c \backslash \nu_e$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	2,578	2,591	2,603	2,614	2,624	2,634	2,644	2,654	2,664
0,15	2,533	2,541	2,548	2,555	2,562	2,568	2,574	2,581	2,588
0,20	2,504	2,509	2,514	2,519	2,524	2,528	2,532	2,537	2,542
0,25	2,485	2,490	2,495	2,499	2,503	2,507	2,511	2,515	2,519
0,30	2,469	2,474	2,479	2,483	2,487	2,491	2,495	2,498	2,501
0,35	2,455	2,460	2,465	2,469	2,473	2,477	2,480	2,483	2,486
0,40	2,441	2,446	2,451	2,455	2,459	2,463	2,466	2,469	2,472
0,45	2,427	2,432	2,437	2,441	2,445	2,449	2,452	2,455	2,458
0,50	2,413	2,418	2,423	2,427	2,431	2,435	2,438	2,441	2,445
0,55	2,400	2,405	2,409	2,413	2,417	2,421	2,424	2,428	2,432
0,60	2,388	2,392	2,396	2,400	2,404	2,408	2,412	2,415	2,419
0,65	2,376	2,380	2,384	2,388	2,392	2,396	2,400	2,403	2,406
0,70	2,365	2,369	2,373	2,377	2,380	2,384	2,388	2,391	2,394
0,75	2,355	2,359	2,362	2,366	2,369	2,373	2,377	2,380	2,383
0,80	2,344	2,348	2,352	2,356	2,359	2,362	2,366	2,369	2,372
0,85	2,334	2,338	2,342	2,345	2,349	2,352	2,356	2,359	2,362
0,90	2,325	2,328	2,332	2,335	2,339	2,342	2,346	2,349	2,352
0,95	2,316	2,319	2,322	2,325	2,329	2,332	2,336	2,339	2,342
1,00	2,307	2,310	2,313	2,316	2,320	2,323	2,326	2,329	2,332

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 30^\circ$ 

$c \backslash \nu_e$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	2,580	2,594	2,607	2,619	2,631	2,643	2,655	2,667	2,678
0,15	2,537	2,546	2,554	2,562	2,569	2,577	2,585	2,593	2,601
0,20	2,510	2,516	2,522	2,527	2,532	2,538	2,543	2,548	2,554
0,25	2,491	2,497	2,502	2,507	2,512	2,516	2,520	2,524	2,527
0,30	2,475	2,481	2,486	2,491	2,495	2,499	2,503	2,506	2,509
0,35	2,460	2,466	2,472	2,477	2,481	2,485	2,489	2,492	2,495
0,40	2,446	2,452	2,458	2,463	2,467	2,471	2,475	2,478	2,481
0,45	2,432	2,438	2,444	2,449	2,453	2,457	2,461	2,465	2,468
0,50	2,418	2,424	2,430	2,435	2,439	2,444	2,448	2,452	2,456
0,55	2,405	2,411	2,416	2,421	2,426	2,431	2,435	2,439	2,443
0,60	2,392	2,398	2,403	2,408	2,413	2,418	2,423	2,427	2,431
0,65	2,380								

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 35^\circ$ 

$c \backslash v_e$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,284	2,373	2,441	2,488	2,517	2,538	2,556	2,572	2,587
0,15	2,277	2,362	2,426	2,468	2,493	2,511	2,525	2,536	2,546
0,20	2,269	2,352	2,411	2,451	2,474	2,489	2,501	2,511	2,519
0,25	2,262	2,342	2,398	2,434	2,456	2,470	2,482	2,491	2,499
0,30	2,256	2,332	2,386	2,418	2,440	2,454	2,466	2,475	2,483
0,35	2,250	2,322	2,374	2,404	2,425	2,439	2,451	2,460	2,468
0,40	2,243	2,313	2,363	2,391	2,410	2,424	2,436	2,446	2,454
0,45	2,237	2,305	2,352	2,379	2,397	2,410	2,422	2,432	2,440
0,50	2,231	2,297	2,342	2,368	2,384	2,397	2,408	2,418	2,426
0,55	2,226	2,289	2,332	2,357	2,372	2,385	2,395	2,404	2,413
0,60	2,220	2,282	2,323	2,346	2,361	2,373	2,383	2,392	2,400
0,65	2,215	2,274	2,314	2,336	2,351	2,362	2,372	2,381	2,388
0,70	2,209	2,267	2,306	2,327	2,341	2,352	2,362	2,370	2,377
0,75	2,204	2,260	2,298	2,319	2,332	2,343	2,352	2,360	2,367
0,80	2,199	2,253	2,290	2,311	2,324	2,334	2,343	2,350	2,357
0,85	2,194	2,247	2,283	2,303	2,316	2,325	2,333	2,340	2,347
0,90	2,189	2,241	2,276	2,295	2,307	2,316	2,324	2,331	2,337
0,95	2,184	2,235	2,269	2,288	2,299	2,308	2,316	2,322	2,328
1,00	2,178	2,229	2,262	2,281	2,292	2,300	2,307	2,313	2,319

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 40^\circ$ 

$c \backslash v_e$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,285	2,373	2,442	2,490	2,521	2,544	2,563	2,580	2,596
0,15	2,277	2,362	2,427	2,471	2,498	2,517	2,532	2,544	2,555
0,20	2,270	2,352	2,413	2,454	2,479	2,496	2,509	2,519	2,528
0,25	2,263	2,342	2,400	2,437	2,461	2,477	2,490	2,500	2,509
0,30	2,256	2,332	2,387	2,422	2,445	2,461	2,474	2,484	2,492
0,35	2,249	2,323	2,376	2,409	2,430	2,446	2,459	2,469	2,477
0,40	2,243	2,314	2,365	2,396	2,416	2,432	2,445	2,455	2,463
0,45	2,237	2,306	2,354	2,384	2,403	2,418	2,431	2,441	2,450
0,50	2,231	2,298	2,344	2,373	2,391	2,405	2,417	2,427	2,436
0,55	2,226	2,290	2,335	2,362	2,379	2,392	2,404	2,414	2,423
0,60	2,220	2,282	2,323	2,352	2,368	2,380	2,391	2,401	2,410
0,65	2,215	2,274	2,316	2,343	2,358	2,370	2,380	2,390	2,398
0,70	2,210	2,270	2,310	2,334	2,349	2,360	2,370	2,380	2,388
0,75	2,204	2,263	2,303	2,325	2,340	2,351	2,361	2,370	2,378
0,80	2,199	2,256	2,296	2,317	2,332	2,343	2,352	2,360	2,368
0,85	2,194	2,250	2,289	2,310	2,324	2,334	2,342	2,350	2,358
0,90	2,189	2,244	2,282	2,302	2,316	2,325	2,333	2,341	2,348
0,95	2,185	2,238	2,275	2,294	2,308	2,317	2,325	2,332	2,339
1,00	2,180	2,232	2,269	2,288	2,300	2,309	2,316	2,323	2,330

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 35^\circ$ 

$c \backslash v_e$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	2,587	2,601	2,615	2,629	2,642	2,656	2,670	2,684	2,697
0,15	2,546	2,555	2,564	2,573	2,581	2,590	2,599	2,608	2,617
0,20	2,519	2,526	2,532	2,538	2,544	2,550	2,556	2,562	2,568
0,25	2,499	2,506	2,511	2,516	2,521	2,526	2,530	2,534	2,538
0,30	2,483	2,490	2,495	2,500	2,504	2,508	2,512	2,515	2,518
0,35	2,468	2,475	2,481	2,486	2,490	2,494	2,498	2,501	2,503
0,40	2,454	2,461	2,467	2,472	2,476	2,480	2,484	2,487	2,490
0,45	2,440	2,447	2,453	2,458	2,463	2,467	2,471	2,475	2,478
0,50	2,426	2,433	2,440	2,445	2,450	2,454	2,459	2,463	2,467
0,55	2,413	2,420	2,427	2,432	2,437	2,442	2,447	2,451	2,455
0,60	2,400	2,407	2,414	2,420	2,425	2,430	2,435	2,440	2,444
0,65	2,388	2,395	2,402	2,408	2,414	2,419	2,424	2,429	2,433
0,70	2,377	2,384	2,391	2,397	2,402	2,407	2,412	2,417	2,422
0,75	2,367	2,374	2,380	2,386	2,391	2,396	2,401	2,406	2,410
0,80	2,357	2,363	2,369	2,375	2,381	2,386	2,391	2,395	2,399
0,85	2,347	2,353	2,359	2,364	2,370	2,375	2,380	2,384	2,388
0,90	2,337	2,343	2,349	2,354	2,359	2,364	2,369	2,373	2,377
0,95	2,328	2,334	2,339	2,344	2,349	2,354	2,358	2,362	2,366
1,00	2,319	2,325	2,330	2,335	2,339	2,343	2,347	2,352	2,356

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 40^\circ$ 

$c \backslash v_e$	600	650	700	750	800	850	900	950	1000
0,10	2,596	2,611	2,626	2,641	2,656	2,671	2,687	2,702	2,717
0,15	2,555	2,565	2,575	2,585	2,595	2,604	2,614	2,624	2,635
0,20	2,528	2,536	2,543	2,549	2,556	2,562	2,569	2,576	2,584
0,25	2,509	2,516	2,522	2,526	2,531	2,536	2,540	2,545	2,550
0,30	2,492	2,499	2,504	2,509	2,513	2,517	2,520	2,524	2,527
0,35	2,477	2,484	2,490	2,493	2,499	2,503	2,506	2,509	2,511
0,40	2,463	2,471	2,477	2,482	2,486	2,490	2,493	2,498	2,500
0,45	2,450	2,458	2,464	2,469	2,473	2,477	2,481	2,484	2,487
0,50	2,436	2,444	2,451	2,456	2,461	2,465	2,469	2,473	2,477
0,55	2,423	2,431	2,438	2,444	2,449	2,454	2,458	2,462	2,466
0,60	2,410	2,418	2,426	2,432	2,437	2,442	2,447	2,452	2,456
0,65	2,398	2,406							

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 45^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,286	2,374	2,444	2,492	2,526	2,550	2,571	2,589	2,606
0,15	2,278	2,363	2,429	2,474	2,503	2,523	2,539	2,553	2,565
0,20	2,271	2,353	2,416	2,457	2,484	2,502	2,516	2,527	2,536
0,25	2,264	2,343	2,403	2,442	2,467	2,484	2,498	2,509	2,517
0,30	2,257	2,334	2,391	2,428	2,452	2,469	2,482	2,493	2,501
0,35	2,250	2,325	2,380	2,415	2,437	2,454	2,468	2,478	2,486
0,40	2,244	2,316	2,370	2,402	2,423	2,440	2,454	2,464	2,472
0,45	2,238	2,308	2,360	2,390	2,411	2,427	2,440	2,450	2,459
0,50	2,232	2,301	2,350	2,379	2,399	2,414	2,426	2,437	2,446
0,55	2,227	2,294	2,341	2,369	2,388	2,402	2,414	2,424	2,433
0,60	2,222	2,287	2,333	2,359	2,378	2,391	2,402	2,412	2,421
0,65	2,217	2,280	2,325	2,350	2,368	2,380	2,391	2,401	2,410
0,70	2,212	2,274	2,317	2,341	2,358	2,370	2,381	2,391	2,399
0,75	2,206	2,268	2,310	2,333	2,349	2,361	2,372	2,381	2,389
0,80	2,201	2,262	2,303	2,325	2,341	2,353	2,363	2,371	2,379
0,85	2,196	2,256	2,296	2,318	2,333	2,344	2,353	2,362	2,370
0,90	2,192	2,250	2,289	2,310	2,325	2,335	2,334	2,352	2,360
0,95	2,188	2,244	2,282	2,303	2,317	2,327	2,335	2,343	2,351
1,00	2,183	2,238	2,276	2,296	2,309	2,319	2,327	2,335	2,342

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 50^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,286	2,375	2,446	2,495	2,530	2,556	2,578	2,597	2,616
0,15	2,279	2,364	2,432	2,477	2,508	2,529	2,546	2,561	2,574
0,20	2,272	2,354	2,419	2,461	2,489	2,508	2,523	2,535	2,544
0,25	2,265	2,345	2,407	2,447	2,473	2,491	2,505	2,516	2,524
0,30	2,259	2,336	2,396	2,434	2,458	2,476	2,490	2,500	2,508
0,35	2,252	2,328	2,385	2,421	2,444	2,462	2,476	2,486	2,494
0,40	2,246	2,320	2,375	2,409	2,431	2,448	2,462	2,472	2,480
0,45	2,240	2,312	2,366	2,398	2,419	2,435	2,448	2,459	2,467
0,50	2,235	2,305	2,357	2,387	2,407	2,423	2,435	2,446	2,455
0,55	2,230	2,299	2,348	2,377	2,396	2,411	2,423	2,434	2,443
0,60	2,225	2,292	2,340	2,367	2,386	2,400	2,412	2,422	2,431
0,65	2,220	2,286	2,332	2,358	2,377	2,390	2,402	2,412	2,421
0,70	2,215	2,280	2,325	2,349	2,368	2,381	2,392	2,402	2,410
0,75	2,210	2,274	2,317	2,341	2,359	2,372	2,383	2,392	2,400
0,80	2,205	2,268	2,310	2,334	2,350	2,363	2,373	2,382	2,390
0,85	2,201	2,262	2,303	2,326	2,342	2,354	2,364	2,373	2,381
0,90	2,197	2,256	2,296	2,319	2,334	2,345	2,355	2,363	2,371
0,95	2,193	2,251	2,289	2,312	2,326	2,327	2,346	2,354	2,362
1,00	2,188	2,245	2,283	2,305	2,319	2,320	2,338	2,346	2,353

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 45^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	2,606	2,622	2,638	2,654	2,671	2,688	2,705	2,722	2,739
0,15	2,565	2,576	2,587	2,598	2,609	2,620	2,631	2,642	2,654
0,20	2,536	2,545	2,553	2,560	2,567	2,574	2,582	2,590	2,599
0,25	2,517	2,524	2,530	2,536	2,541	2,546	2,551	2,556	2,561
0,30	2,501	2,507	2,512	2,517	2,521	2,525	2,528	2,532	2,536
0,35	2,486	2,492	2,498	2,503	2,506	2,510	2,513	2,516	2,519
0,40	2,472	2,479	2,485	2,490	2,494	2,497	2,500	2,503	2,505
0,45	2,459	2,467	2,473	2,478	2,482	2,485	2,488	2,491	2,494
0,50	2,446	2,454	2,460	2,466	2,470	2,474	2,478	2,481	2,484
0,55	2,433	2,441	2,448	2,454	2,459	2,464	2,468	2,471	2,475
0,60	2,421	2,429	2,436	2,442	2,448	2,453	2,457	2,461	2,465
0,65	2,410	2,418	2,425	2,431	2,437	2,442	2,447	2,451	2,454
0,70	2,399	2,407	2,414	2,420	2,426	2,431	2,436	2,440	2,443
0,75	2,389	2,396	2,403	2,409	2,415	2,421	2,426	2,430	2,433
0,80	2,379	2,386	2,393	2,399	2,405	2,410	2,415	2,419	2,422
0,85	2,370	2,377	2,383	2,389	2,394	2,399	2,404	2,408	2,411
0,90	2,360	2,367	2,373	2,379	2,384	2,389	2,393	2,397	2,401
0,95	2,351	2,358	2,364	2,369	2,374	2,379	2,383	2,387	2,391
1,00	2,342	2,348	2,354	2,359	2,364	2,369	2,374	2,378	2,381

Таблица  $\lg v_e$   $\theta_0 = 50^\circ$ 

$v_0 \backslash c$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	2,616	2,633	2,650	2,667	2,685	2,704	2,722	2,741	2,759
0,15	2,574	2,586	2,608	2,610	2,622	2,634	2,646	2,659	2,672
0,20	2,544	2,553	2,562	2,570	2,578	2,586	2,594	2,603	2,612
0,25	2,524	2,532	2,538	2,544	2,550	2,555	2,560	2,565	2,571
0,30	2,508	2,514	2,519	2,524	2,529	2,533	2,536	2,539	2,543
0,35	2,494	2,500	2,505	2,509	2,513	2,516	2,519	2,522	2,525
0,40	2,480	2,487	2,492	2,496	2,500	2,503	2,505	2,508	2,511
0,45	2,467	2,474	2,480	2,484	2,488	2,491	2,494	2,497	2,500
0,50	2,455	2,462	2,468	2,473	2,477	2,481	2,484	2,487	2,490
0,55	2,443	2,450	2,457	2,462	2,467	2,472	2,475	2,478	2,481
0,60	2,431	2,439	2,446	2,452	2,457	2,462	2,466	2,469	2,472
0,65	2,421								

Таблица  $\lg v_c$   $\theta_0 = 55^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,287	2,376	2,448	2,498	2,534	2,561	2,584	2,605	2,625
0,15	2,280	2,366	2,435	2,480	2,512	2,535	2,553	2,568	2,582
0,20	2,274	2,356	2,423	2,465	2,494	2,514	2,530	2,542	2,552
0,25	2,268	2,348	2,411	2,452	2,479	2,497	2,512	2,523	2,531
0,30	2,262	2,340	2,400	2,439	2,464	2,482	2,496	2,507	2,515
0,35	2,256	2,332	2,390	2,427	2,451	2,469	2,482	2,492	2,500
0,40	2,250	2,324	2,381	2,416	2,439	2,456	2,469	2,479	2,487
0,45	2,244	2,317	2,372	2,405	2,427	2,443	2,456	2,467	2,475
0,50	2,239	2,310	2,363	2,394	2,415	2,431	2,444	2,455	2,463
0,55	2,234	2,304	2,355	2,384	2,404	2,420	2,432	2,443	2,452
0,60	2,229	2,298	2,347	2,375	2,394	2,409	2,421	2,432	2,441
0,65	2,224	2,292	2,339	2,366	2,385	2,399	2,411	2,422	2,431
0,70	2,220	2,286	2,332	2,358	2,377	2,390	2,402	2,412	2,421
0,75	2,215	2,280	2,325	2,350	2,368	2,381	2,392	2,402	2,411
0,80	2,210	2,274	2,318	2,343	2,360	2,373	2,383	2,393	2,401
0,85	2,206	2,268	2,310	2,335	2,351	2,364	2,375	2,384	2,392
0,90	2,202	2,263	2,303	2,328	2,343	2,355	2,366	2,374	2,382
0,95	2,198	2,258	2,307	2,331	2,336	2,347	2,356	2,365	2,373
1,00	2,194	2,253	2,291	2,314	2,329	2,339	2,348	2,356	2,363

Таблица  $\lg v_c$   $\theta_0 = 60^\circ$ 

$c \backslash v_0$	200	250	300	350	400	450	500	550	600
0,10	2,288	2,378	2,450	2,501	2,538	2,566	2,590	2,612	2,632
0,15	2,282	2,368	2,438	2,484	2,517	2,541	2,559	2,574	2,588
0,20	2,276	2,359	2,426	2,469	2,499	2,520	2,536	2,548	2,559
0,25	2,271	2,351	2,415	2,456	2,484	2,503	2,518	2,529	2,538
0,30	2,265	2,343	2,404	2,444	2,470	2,488	2,502	2,513	2,521
0,35	2,260	2,336	2,395	2,432	2,457	2,475	2,488	2,498	2,506
0,40	2,255	2,329	2,386	2,421	2,445	2,463	2,475	2,485	2,493
0,45	2,249	2,322	2,377	2,411	2,434	2,451	2,463	2,473	2,481
0,50	2,244	2,316	2,369	2,401	2,423	2,439	2,452	2,462	2,470
0,55	2,239	2,310	2,361	2,391	2,412	2,428	2,441	2,451	2,460
0,60	2,235	2,304	2,353	2,382	2,402	2,417	2,430	2,441	2,450
0,65	2,230	2,298	2,346	2,374	2,393	2,408	2,420	2,431	2,440
0,70	2,226	2,292	2,339	2,366	2,385	2,399	2,411	2,421	2,430
0,75	2,221	2,287	2,332	2,358	2,377	2,390	2,402	2,412	2,421
0,80	2,216	2,281	2,325	2,351	2,369	2,382	2,393	2,403	2,411
0,85	2,212	2,275	2,318	2,344	2,361	2,374	2,385	2,394	2,402
0,90	2,208	2,270	2,311	2,337	2,353	2,366	2,376	2,385	2,392
0,95	2,204	2,265	2,305	2,330	2,345	2,357	2,366	2,375	2,383
1,00	2,200	2,260	2,299	2,323	2,338	2,349	2,358	2,366	2,373

Таблица  $\lg v$   $\theta_0 = 55^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	2,625	2,643	2,661	2,679	2,698	2,718	2,737	2,757	2,776
0,15	2,582	2,595	2,607	2,620	2,633	2,647	2,660	2,674	2,688
0,20	2,552	2,561	2,570	2,579	2,588	2,596	2,605	2,614	2,624
0,25	2,531	2,539	2,546	2,552	2,558	2,563	2,568	2,574	2,580
0,30	2,515	2,521	2,526	2,531	2,536	2,540	2,543	2,546	2,550
0,35	2,500	2,506	2,511	2,515	2,519	2,522	2,524	2,527	2,530
0,40	2,487	2,493	2,498	2,502	2,505	2,508	2,510	2,513	2,515
0,45	2,475	2,481	2,486	2,490	2,493	2,496	2,499	2,502	2,504
0,50	2,463	2,469	2,475	2,479	2,483	2,486	2,489	2,492	2,494
0,55	2,452	2,459	2,465	2,470	2,474	2,477	2,480	2,483	2,485
0,60	2,441	2,449	2,455	2,460	2,465	2,469	2,472	2,475	2,477
0,65	2,431	2,439	2,445	2,451	2,456	2,460	2,463	2,466	2,468
0,70	2,421	2,429	2,435	2,441	2,446	2,450	2,453	2,456	2,458
0,75	2,411	2,418	2,423	2,431	2,436	2,440	2,443	2,446	2,448
0,80	2,401	2,408	2,415	2,421	2,426	2,430	2,433	2,436	2,439
0,85	2,392	2,399	2,405	2,411	2,416	2,420	2,424	2,427	2,430
0,90	2,382	2,389	2,395	2,401	2,406	2,410	2,414	2,418	2,421
0,95	2,373	2,380	2,386	2,392	2,397	2,401	2,405	2,409	2,412
1,00	2,363	2,370	2,376	2,382	2,387	2,392	2,396	2,399	2,402

Таблица  $\lg v_c$   $\theta_0 = 60^\circ$ 

$c \backslash v_0$	600	650	700	750	800	850	900	950	1 000
0,10	2,632	2,651	2,670	2,690	2,710	2,730	2,750	2,770	2,789
0,15	2,588	2,602	2,615	2,629	2,643	2,658	2,673	2,688	2,703
0,20	2,559	2,569	2,578	2,588	2,597	2,606	2,615	2,624	2,634
0,25	2,538	2,546	2,553	2,559	2,565	2,571	2,576	2,582	2,588
0,30	2,521	2,527	2,532	2,537	2,541	2,545	2,549	2,552	2,556
0,35	2,506	2,512	2,516	2,520	2,523	2,526	2,529	2,532	2,534
0,40	2,493	2,498	2,502	2,506	2,509	2,512	2,514	2,517	2,519
0,45	2,481	2,487	2,491	2,495	2,498	2,501	2,503	2,506	2,508
0,50	2,470	2,476	2,481	2,485	2,488	2,491	2,494	2,496	2,498
0,55	2,460	2,466	2,471	2,476	2,479	2,482	2,485	2,487	2,489
0,60	2,450	2,457	2,462	2,467	2,471	2,474	2,477	2,479	2,481
0,65	2,440								

Таблица  $\lg v_c$   $\theta_0 = 65^\circ$ 

$c \backslash v_0$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0,20	2,420	2,473	2,503	2,524	2,540	2,553	2,565	2,575	2,584
0,25	2,418	2,460	2,488	2,508	2,523	2,534	2,544	2,552	2,559
0,30	2,408	2,448	2,475	2,493	2,507	2,518	2,526	2,532	2,538
0,35	2,399	2,436	2,462	2,480	2,493	2,503	2,511	2,516	2,520
0,40	2,390	2,426	2,450	2,468	2,480	2,490	2,498	2,503	2,506
0,45	2,382	2,416	2,439	2,457	2,469	2,479	2,487	2,492	2,495
0,50	2,374	2,406	2,429	2,446	2,458	2,468	2,476	2,482	2,485
0,55	2,366	2,397	2,419	2,435	2,448	2,458	2,466	2,472	2,476
0,60	2,358	2,388	2,409	2,424	2,437	2,448	2,456	2,463	2,468

Таблица  $\lg v_c$   $\theta_0 = 70^\circ$ 

$c \backslash v_0$	300	350	400	450	500	550	600	650	700
0,20	2,432	2,476	2,507	2,528	2,544	2,557	2,569	2,580	2,590
0,25	2,421	2,463	2,492	2,512	2,527	2,539	2,549	2,557	2,564
0,30	2,411	2,451	2,479	2,498	2,512	2,523	2,531	2,537	2,542
0,35	2,402	2,440	2,467	2,485	2,498	2,508	2,515	2,520	2,524
0,40	2,394	2,430	2,455	2,473	2,485	2,495	2,502	2,507	2,509
0,45	2,386	2,420	2,444	2,462	2,474	2,484	2,491	2,496	2,498
0,50	2,378	2,410	2,434	2,451	2,463	2,473	2,481	2,486	2,489
0,55	2,370	2,401	2,424	2,440	2,453	2,463	2,470	2,477	2,480
0,60	2,363	2,393	2,414	2,430	2,443	2,453	2,461	2,467	2,472

Четырехзначные логарифмы  
и антилогарифмы

Таблица IX

## Мантиссы логарифмов

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043									4	9	13	17	22	26	30	35	39
	0086	0126	0170								4	9	13	17	21	25	30	34	38
				0212	0253						4	8	12	16	21	25	29	33	37
						0294	0334	0374			4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492								4	8	12	16	20	24	27	31	35
		0531	0569	0607							4	8	11	15	19	23	27	30	34
					0645	0682	0719	0753			4	7	11	15	18	22	26	29	33
12	0792	0828	0864	0890	0934						4	7	11	14	18	21	25	28	32
					0969						4	7	11	14	17	21	24	28	31
						1004	1038	1072	1106		3	7	10	14	17	20	24	27	30
13	1139	1173									3	7	10	13	17	20	23	27	30
		1206	1239	1271	1303	1335					3	6	10	13	16	19	23	26	29
							1367	1399	1430		3	6	9	13	16	19	22	25	28
14	1461	1492									3	6	9	13	16	19	22	25	28
		1523	1553	1584	1614	1644	1673				3	6	9	12	15	18	21	24	27
								1703	1732		3	6	9	11	14	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	193				3	6	9	11	14	17	20	23	26
									1959	1987	2014	3	5	8	11	14	16	19	22
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227			3	5	8	11	13	16	19	21	24
										2253	2279	3	5	8	10	13	15	18	20
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430					3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2455	2480	2504	2529		2	5	7	10	12	15	17	19	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718			2	5	7	9	12	14	16	19	21
										2742	2763	2	5	7	9	11	13	16	18
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900					2	4	7	9	11	14	16	18	20
							2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3095						2	4	6	8	11	13	15	17	19
						3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	10	12	14	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	11	13	15	17	19
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4062	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4561	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6600	6610	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6673	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	8	9

## Мантиссы логарифмов

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5			

### Антилогарифмы

<i>m</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
,00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
,04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	1	1	1	2	2	2
,34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	1	1	1	1	2	2	2
,49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	1	1	1	1	2	2	2
<i>m</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Основание натуральных логарифмов  $e = 2.718$  (с 8 значащими цифрами  $e = 2.7182818$ ):

$$\lg e = M = 0.4343; \quad \frac{1}{M} = 2.303 \quad (\text{точнее: } M = 0.43429448; \quad \frac{1}{M} = 2.3025851).$$

### Антилогарифмы

*m*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9


<tbl\_r cells="19" ix="2

## К главе V

1. А. Н. Крылов, Лекции о приближенных вычислениях, 1933.
2. Дж. Скарборо, Численные методы математического анализа, 1934.
3. Уиттекер и Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, 1935.
4. В. В. Мечников, Технические приемы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Известия Артиллерийской академии, т. VI, 1934.
5. И. А. Упорников, Вычисления траекторий, 1931.
6. Moulton F., Numerical integration of differential equations, «Journal of the U. S. Artillery», 1919.

## К главе VI

1. В. М. Трофимов, О зависимости горения дистанционных трубок от условий стрельбы, «Артиллерийский журнал» № 5—7, 1899.
2. Кушакевич, Расчет шкалы пороховой дистанционной трубы, 1932.
3. Я. М. Шапиро, Расчет шкалы пороховой дистанционной трубы, «Известия Артиллерийской академии», т. XXX, 1940.
4. Vlaepli, Combustion de la composition fusante, «Mém. de l'art. fr.», 1930, f. 3.

## К главе VII

1. В. М. Трофимов, Формулы изменения параметров траектории и установки трубок, 1925.
2. Д. А. Вентцель, Вычисление изменений элементов траектории, 1928.
3. В. В. Мечников, О поправочных формулах внешней баллистики, «Известия Военно-технической академии», 1930.
4. Я. М. Шапиро, Вычисление поправок во внешней баллистике по методу разностей, 1940.
5. Gagnier M., Sur les altérations de porté dues aux perturbations atmosphériques, «Mém. de l'art. fr.», 1922, f. 2.

## К главе VIII

1. Н. В. Майевский, О влиянии вращательного движения на полет продолговатых снарядов в воздухе, Санкт-Петербург, 1865.
2. Н. А. Забудский, Исследование о движении продолговатого снаряда, Санкт-Петербург, 1908.
3. А. Н. Крылов, О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета, 1929.
4. Sparre M., Sur le mouvement des projectiles oblongs autour de leur centre de gravité, 1891, 1893, 1904, 1911.
5. Fowler, Gallop, Lock and Richmond, The Aerodynamics of a spinning Shell, 1920 (перевод в «Mém. de l'art. fr.», 1922, f. 3).
6. Charbonnier P., Sur le mouvement gyroscopique du projectile, «Mém. de l'art. fr.», 1927, f. 3.
7. Esclangon E., Sur le mouvement des projectiles autour de leur centre de gravité, «Mém. de l'art. fr.», 1927, f. 3.
8. Д. А. Вентцель, Колебания оси снаряда в начальный период его движения, «Известия Военно-технической академии», т. I, 1927.
9. П. А. Гельвих, О движении продолговатого снаряда в воздухе, 1920.
10. Sutterlin R., Sur le mouvement de nutation des projectiles au départ et sur son amortissement, «Mém. de l'art. fr.», 1938, f. 1.
11. В. С. Пугачев, Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе с дополнением о колебательных движениях авиационных бомб, 1939.
12. Я. М. Шапиро, Устойчивость полета мин, 1939.

## ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО ВНЕШНЕЙ БАЛИСТИКЕ

### Курсы и учебники

1. Н. В. Майевский, Курс внешней баллистики, Санкт-Петербург, 1870.
2. Н. А. Забудский, Внешняя баллистика, Санкт-Петербург, 1895.
3. Siacci F., Corso di balistica, 3 vol., Torino, 1870—1884, 1888.
4. Charbonnier P., Traité de balistique extérieure, Paris, 1904.
5. Сганц С., Aussere Ballistik, Berlin, 1910, 1917, 1918, 1925.
6. Сганц С., Ballistik, Ergänzungsband (дополнение), 1936.
7. Moulton F. R., New Methods in Exterior Ballistics, Chicago, USA, 1926.  
(Есть русский перевод, 1928.)
8. Dufrênois, Risser et Rousier, Les méthodes actuelles de la balistique extérieure, Paris, 1921.  
(Есть русский перевод, 1927.)
9. Д. А. Вентцель, Б. Н. Окунев, Я. М. Шапиро, Внешняя баллистика, 1933—1934.
10. Bingen I. N., La technique de l'artillerie, t. II, Balistique extérieure, Bruxelles, 1938.
11. Д. А. Вентцель, Я. М. Шапиро, Внешняя баллистика, 1939.

### Дополнительная литература по главам

#### К главе I

1. Галилей Галилео, Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и чистому движению, День третий и день четвертый, ГГТИ, 1934.
2. В. В. Мечников, Курс внешней баллистики, книга I, Движение снаряда в пустоте, 1935.

#### К главе II

1. В. В. Мечников, Сопротивление среды, 1912.
2. Б. Н. Юрьев, Экспериментальная аэродинамика, ч. 1, Теоретические основы экспериментальной аэродинамики, 1936.
3. Ф. И. Франкл, С. А. Христианович, Р. И. Алексеева, Основы газовой динамики, Труды ЦАГИ, вып. 364, 1938.
4. Langevin P., Note sur la résistance de l'air et sur la correction d'élasticité proposée par M. le capitaine Darrieus, «Mém. de l'art. fr.», 1922, f. 2.
5. Сганц С., Lehrbuch der Ballistik, Bd. III, «Experimentelle Ballistik», Berlin, 1927.
6. Epstein P., On the Air Resistance of Projectiles, «Proc. of the National Academy of Sciences of USA», 1931. (Французский перевод в МАЕ, 1933.)

#### К главе III

1. Robert St., Mémoires scientifiques, Turin, 1872—1874.
2. Stoyanoff A., Sur la vitesse minimum des projectiles dans un milieu à densité constante, «Mém. de l'art. fr.», 1933, f. 2.

#### К главе IV

1. Euler L., Recherches sur la véritable courbe que décrivent les corps jetés dans l'air ou dans un autre fluid quelconque, «Mém. de l'académie de sc. de Berlin», 1753, f. IX.
2. Otto I. C. F., Tafeln für den Bombenwurf, Berlin, 1842.
3. Н. Майевский, Об измененных майором Сиаччи баллистических таблицах для павесной стрельбы генерала Отто, «Артиллерийский журнал» № 4, 1886.
4. Н. Майевский, Новый способ решения задач стрельбы капитана итальянской артиллерии Сиаччи, члена итальянской академии наук, «Артиллерийский журнал» № 1, 1888.
5. Виппо G., Corso teorico-practico di balistica esterna, Torino, 1934.

ОГЛАВЛЕНИЕ	Стр.
<b>Введение . . . . .</b>	3
§ 1. Предмет внешней баллистики . . . . .	3
§ 2. Основные обозначения и определения . . . . .	4
 Глава I	
<b>Движение центра массы снаряда в пустоте (параболическая теория)</b>	
§ 3. Сила тяжести. Ускорение Кориолиса . . . . .	5
§ 4. Составление и интегрирование дифференциальных уравнений движения . . . . .	7
§ 5. Исследование уравнения траектории . . . . .	8
§ 6. Элементы траектории в произвольной ее точке . . . . .	9
§ 7. Элементы точки падения и вершины . . . . .	10
§ 8. Исследование семейства траекторий с одинаковой начальной скоростью . . . . .	11
§ 9. Зависимость угла прицеливания от угла места цели при постоянной наклонной дальности . . . . .	13
§ 10. Относительное время пребывания снаряда в слое . . . . .	16
§ 11. Средняя высота траектории . . . . .	18
§ 12. Поправочные формулы, отвечающие малым изменениям параметров $v_0$ и $\theta_0$ . . . . .	—
§ 13. Применение параболической теории . . . . .	19
 Глава II	
<b>Сопротивление воздуха</b>	
<b>Некоторые теоретические зависимости для идеальных газов</b>	
§ 14. Теория Ньютона . . . . .	20
§ 15. Уравнение Бернулли . . . . .	22
§ 16. Теория плоского скачка давления . . . . .	24
§ 17. Динамический адиабатический закон. Формула Гюгоньо . . . . .	28
§ 18. Давление в вершине снаряда. Формула Релея . . . . .	29
§ 19. Теоретические исследования сопротивления воздуха . . . . .	31
 <b>Физические факторы, определяющие сопротивление воздуха артиллерийским снарядам</b>	
§ 20. Вязкость. Образование вихрей . . . . .	31
§ 21. Образование баллистической волны . . . . .	33
§ 22. Общее выражение для силы сопротивления воздуха . . . . .	35
§ 23. Ускорение силы сопротивления воздуха . . . . .	37
 <b>Опытное изучение сопротивления воздуха</b>	
§ 24. Изучение сопротивления воздуха стрельбой . . . . .	38
§ 25. Определение скорости снаряда . . . . .	39
§ 26. Оптические методы изучения сопротивления воздуха . . . . .	41
§ 27. Изучение сопротивления воздуха в аэродинамических трубах . . . . .	43
§ 28. Опыты по изучению сопротивления воздуха артиллерийским снарядам . . . . .	45
§ 29. Результаты опытов. Законы сопротивления воздуха . . . . .	—
 404	

§ 30. Показатель сопротивления воздуха . . . . .	48
§ 31. Распределение давления по поверхности снаряда . . . . .	49

#### Учет метеорологических факторов

§ 32. Зависимость между метеорологическими элементами . . . . .	51
§ 33. Уравнение вертикального равновесия атмосферы . . . . .	52
§ 34. Нормальный закон изменения температуры с высотой . . . . .	53
§ 35. Изменение давления и плотности с высотой . . . . .	—
§ 36. Ветер . . . . .	55
§ 37. Зависимость сопротивления воздуха от скорости звука . . . . .	—

#### Баллистические характеристики снарядов

§ 38. Коэффициент формы снаряда . . . . .	57
§ 39. Баллистический коэффициент . . . . .	60
§ 40. Наивыгоднейшая форма снаряда . . . . .	61
§ 41. Пример вычисления сопротивления воздуха по таблицам . . . . .	62

#### Глава III

##### Основная задача внешней баллистики

§ 42. Составление дифференциальных уравнений движения центра массы снаряда в воздухе . . . . .	64
§ 43. Различные системы дифференциальных уравнений . . . . .	65
1. Система уравнений при аргументе $\theta$ . . . . .	66
2. Система уравнений при аргументе $x$ . . . . .	—
3. Уравнение годографа . . . . .	67

#### Общие свойства траекторий в воздухе

§ 44. Горизонтальная проекция скорости убывает . . . . .	68
§ 45. Нисходящая ветвь круче восходящей . . . . .	—
§ 46. Асимметричность скорости . . . . .	69
§ 47. Положение абсциссы вершины . . . . .	—
§ 48. Предельное значение угла наклона касательной к траектории . . . . .	70
§ 49. Исследование изменения скорости вдоль траектории . . . . .	71
§ 50. Исследование кривизны траектории . . . . .	73
§ 51. Высота траектории . . . . .	74
§ 52. Угол наибольшей дальности . . . . .	75

#### Глава IV

##### Приближенные аналитические методы решения основной задачи внешней баллистики

###### Метод Эйлера

§ 53. Метод Эйлера интегрирования уравнения годографа. Определение элементов траектории . . . . .	77
§ 54. Вычисление траектории по дугам методом Эйлера . . . . .	79
§ 55. Таблицы Отто-Сиаччи . . . . .	80
§ 56. Определение элементов траектории по таблицам Отто-Сиаччи . . . . .	81
§ 57. Пример. Заданы $c$ , $v_0$ и $\theta_0$ . . . . .	83
§ 58. Пример. Заданы $b$ , $v_0$ и $X$ . . . . .	85

###### Метод Сиаччи

§ 59. Интегрирование уравнения годографа . . . . .	86
§ 60. Определение элементов траектории . . . . .	88
§ 61. Определение элементов точки падения и вершины . . . . .	90

	Стр.
§ 62. Вспомогательные функции Сиаччи . . . . .	91
§ 63. Применение метода Сиаччи для наивесной стрельбы . . . . .	93
§ 64. Применение метода Сиаччи для зенитной стрельбы . . . . .	94
§ 65. Расчет коротких настильных траекторий (стрельба по танкам) . . . . .	96
§ 66. Схема решения задач при помощи вспомогательных функций Сиаччи . . . . .	98
§ 67. Примеры решения задач при помощи вспомогательных функций Сиаччи . . . . .	99
§ 68. Схема решения задач при помощи основных функций Сиаччи . . . . .	104
§ 69. Примеры решения задач при помощи основных функций Сиаччи . . . . .	105
§ 70. Пример применения метода Сиаччи для зенитной стрельбы . . . . .	108

## Глава V

### Решение основной задачи внешней баллистики по методу численного интегрирования

§ 71. Введение . . . . .	111
§ 72. Конечные разности и их свойства . . . . .	112
§ 73. Интерполяция. Интерполирующая функция . . . . .	115
§ 74. Интерполирующая функция Лагранжа . . . . .	116
§ 75. Единственность интерполирующей функции . . . . .	117
§ 76. Составление интерполирующей функции при постоянном шаге аргумента . . . . .	118
§ 77. Интерполирующие функции, отвечающие различным строкам последовательных элементов . . . . .	120
§ 78. Обратное интерполирование . . . . .	123
§ 79. Численное дифференцирование . . . . .	124
§ 80. Численное интегрирование функций . . . . .	126
§ 81. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка . . . . .	129
§ 82. Нахождение исходных данных для начала интегрирования . . . . .	131
§ 83. Пример на численное интегрирование дифференциального уравнения первого порядка . . . . .	133
§ 84. Вычисление траекторий по методу численного интегрирования . . . . .	136
§ 85. Пример вычисления траектории по методу численного интегрирования при аргументе $x$ . . . . .	140
§ 86. Баллистические сборники (таблицы) . . . . .	153

## Глава VI

### Расчет шкалы дистанционной трубы

§ 87. Зависимость скорости горения дистанционного состава от давления, при котором происходит горение . . . . .	156
§ 88. Зависимость скорости горения дистанционного состава от его температуры . . . . .	158
§ 89. Добавочное давление в дистанционной трубке . . . . .	159
§ 90. Общее выражение для установки трубы . . . . .	161
§ 91. Вычисление установки трубы по средней скорости полета снаряда . . . . .	163
§ 92. Приведение разрыва к нормальному интервалу . . . . .	165
§ 93. Пример вычисления установки трубы для стрельбы по наземным целям . . . . .	166
§ 94. Метод Трофимова. Вычисление установки трубы для працельной стрельбы . . . . .	167
§ 95. Расчет установки трубы для зенитной стрельбы . . . . .	168
§ 96. Приближенный метод вычисления установки трубы для зенитной стрельбы . . . . .	170

## Глава VII

### Теория поправок

§ 97. Введение . . . . .	172
§ 98. Вычисление основных поправочных коэффициентов по методу разностей . . . . .	173
§ 99. Формула Ланжевена . . . . .	175
§ 100. Поправочные коэффициенты при изменении давления и температуры . . . . .	178
§ 101. Поправочный коэффициент при изменении веса снаряда . . . . .	179
§ 102. Изменение дальности вследствие постоянного продольного ветра . . . . .	180

406

Стр.

	Стр.
§ 103. Боковое отклонение снаряда вследствие постоянного бокового ветра . . . . .	183
§ 104. Таблицы поправок Артиллерийской академии . . . . .	184
§ 105. Приближенные поправочные формулы применительно к методу Сиаччи . . . . .	186
§ 106. Пример вычисления поправок по формулам метода Сиаччи . . . . .	189
§ 107. Поправочные формулы для малых скоростей применительно к методу Эйлера-Отто . . . . .	190
§ 108. Баллистические средние. Веса слоев . . . . .	194
§ 109. Приближенный метод вычисления весов слоев . . . . .	196
§ 110. Уравнение движения снаряда на вращающейся земле . . . . .	197
§ 111. Уравнения движения при учете изменения величины и направления ускорения силы тяжести . . . . .	201
§ 112. Изменение дальности вследствие кривизны земли . . . . .	202
§ 113. Поправочные формулы для установки трубы . . . . .	203
§ 114. Пример вычисления поправок к установке трубы . . . . .	206
§ 115. Вычисление поправок для зенитной стрельбы по методу разностей . . . . .	207
§ 116. Приближенные поправочные формулы для зенитной стрельбы . . . . .	209
§ 117. Пример вычисления поправочных коэффициентов для зенитной стрельбы . . . . .	212
§ 118. Веса слоев для зенитной стрельбы . . . . .	213

## Глава VIII

### Вращательное движение снаряда

§ 119. Система сил, действующих на вращающийся артиллерийский снаряд . . . . .	215
§ 120. Вывод дифференциальных уравнений вращательного движения снаряда на начальном участке траектории . . . . .	219
§ 121. Интегрирование уравнений вращательного движения снаряда на начальном участке траектории . . . . .	222
§ 122. Исследование характера колебаний оси снаряда на начальном участке траектории . . . . .	224
§ 123. Приближенное интегрирование уравнения нутационных колебаний снаряда при переменном $\beta$ . . . . .	226
§ 124. Гравитационная устойчивость снаряда. Необходимая крутизна нарезов . . . . .	228
§ 125. Наибольшая угловая скорость оси снаряда на начальном участке траектории . . . . .	231
§ 126. Движение оси снаряда на криволинейном участке траектории . . . . .	232
§ 127. Правильность движения снаряда на криволинейном участке траектории . . . . .	234
§ 128. Вычисление деривации . . . . .	236
§ 129. Определение аэродинамических характеристик снаряда стрельбой по картонам . . . . .	237

### Плоские колебания оперенных снарядов (мин)

§ 130. Аэродинамические характеристики мина . . . . .	240
§ 131. Вывод уравнения плоских колебаний мины . . . . .	242
§ 132. Интегрирование однородного уравнения в случае постоянной скорости . . . . .	244
§ 133. Приближенное интегрирование однородного уравнения при переменной скорости . . . . .	246
§ 134. Влияние понижения касательной на положение динамической оси равновесия мины . . . . .	248

## Глава IX

### Составление таблиц стрельбы

§ 135. Введение . . . . .	249
Подготовка баллистических стрельб	
§ 136. Подготовка орудия к стрельбе . . . . .	251
§ 137. Подготовка боеприпасов к стрельбе . . . . .	254
§ 138. Топографическая подготовка стрельбы . . . . .	256
§ 139. Определение метеорологических условий стрельбы . . . . .	258

407

Словарь ГОСТ  
 Техническое слово в ГОСТах  
 Числовые значения

	Стр.
<b>Организация и проведение баллистических стрельб</b>	
§ 140. Определение начальной скорости . . . . .	261
§ 141. Определение угла вылета . . . . .	263
§ 142. Организация стрельб на дальность . . . . .	266
§ 143. Число стрельб и расход снарядов . . . . .	268
§ 144. Стрельбы для определения державки . . . . .	270
§ 145. Встречные стрельбы . . . . .	272
§ 146. Согласование баллистических расчетов с результатами опытных стрельб при помощи баллистического сборника . . . . .	273
§ 147. Вычисление основных табличных данных . . . . .	276
§ 148. Согласование баллистических расчетов с результатами опытных стрельб и вычисление основных табличных данных по методу Спаччи . . . . .	278
§ 149. Вычисление величин, характеризующих рассеивание . . . . .	282
§ 150. Вычисление табличных данных для дистанционной стрельбы . . . . .	284
§ 151. Вычисление таблицы поправок к углу прицеливания на угол места цели . . . . .	286
§ 152. Вычисление табличных данных для стрельбы в горах . . . . .	288
§ 153. Ошибки таблиц стрельбы . . . . .	290
<b>Особенности составления таблиц стрельбы для стрелкового оружия</b>	
§ 154. Директриса стрельбы и система наведения снаряда . . . . .	291
§ 155. Организация и проведение стрельб на дальность . . . . .	294
§ 156. Определение координат центров группирования и величины, характеризующих рассеивание . . . . .	296
§ 157. Стрельбы из стрелкового оружия для определения державки . . . . .	297
§ 158. Вычисление основных табличных данных . . . . .	298
§ 159. Вычисление табличных данных для стрельбы из стрелкового оружия по воздушным целям . . . . .	299
<b>Особенности составления таблиц стрельбы зенитной артиллерии</b>	
§ 160. Постановка задачи. Отстрел траекторий . . . . .	301
§ 161. Стереофотограмметрический метод построения траекторий . . . . .	302
§ 162. Организация и проведение отстрелов траекторий . . . . .	305
§ 163. Согласование расчетов траекторий с данными отстрелов . . . . .	306
<b>Приложения.</b>	
Таблица I. $\lg G(v_r)$ как функция от $\lg v_r$ для закона сопротивления воздуха 1943 г. . . . .	310
Таблица II. Функция $N(U, \mu')$ (к методу Трофимова) . . . . .	318
Таблица III. Функция $Q(U, \mu')$ (к методу Трофимова) . . . . .	320
Таблица IV. Функция $S(U, \mu')$ (к методу Трофимова) . . . . .	322
Таблица V. Коэффициенты $a$ и $b$ для вычисления поправок при малых скоростях . . . . .	324
Таблица VI. Функция $B(y) = \frac{h}{h_{0N}}$ . . . . .	326
Таблица VII. Функция $L(U)$ для вычисления установки трубы при зенитной стрельбе . . . . .	326
Таблица VIII. Баллистический сборник Артиллерийской академии КА . . . . .	327
Таблица IX. Четырехзначные логарифмы и антилогарифмы . . . . .	397
Основная литература по внешней баллистике . . . . .	402