

***Т.Ю. ЛЕМЕШОНОК, А.А. СИЗОВА,  
Н.Е. БАРАНОВ, В.А. САННИКОВ***

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ  
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Балтийский государственный технический университет «Военмех»

*Т.Ю. ЛЕМЕШОНОК, А.А. СИЗОВА, Н.Е. БАРАНОВ,  
В.А. САННИКОВ*

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
2020

УДК 629.7.015:004.942(075.8)  
М34

**М34**            **Математические** модели динамики движения летательных аппаратов: учебное пособие/ Т.Ю. Лемешенок [и др.]; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2020. – 122 с.  
ISBN 978-5-907324-08-4

Излагаются общие вопросы динамики полета летательных аппаратов. Подробно расписывается вывод уравнений пространственного движения ЛА как твердого тела. Особое внимание уделяется методам упрощения существенно нелинейной системы уравнений пространственного движения ЛА.

Предназначено для студентов, изучающих курсы «Баллистика ракет», «Динамика движения летательных аппаратов», «Основы теории полета ЛА».

**УДК 629.7.015:004.942(075.8)**

Р е ц е н з е н т канд. техн. наук, доц. каф.  
«Аэродинамика и динамика полета» Санкт-Петербургского  
гос. ун-та гражданской авиации *Ю.С. Опара*

*Утверждено  
редакционно-издательским  
советом университета*

**ISBN 978-5-907324-08-4**

© Авторы, 2020  
© БГТУ, 2020

## ВВЕДЕНИЕ

Летательный аппарат (ЛА) может рассматриваться как некоторая динамическая система. При проектировании ЛА возникает задача оценки качества этой системы, которая может производиться экспериментальными или теоретическими методами. В случае использования последних необходимо составить математическую модель управляемого движения ЛА.

Математическая модель – это совокупность уравнений, позволяющая определить параметры движения при заданных начальных условиях и определенных управляющих и возмущающих воздействиях.

Процесс создания математической модели (процесс алгоритмизации) включает следующие этапы:

- 1) математическое описание движения управляемого ЛА;
- 2) математическая формулировка целей управления (критериев оптимальности);
- 3) количественная характеристика взаимодействия ЛА с окружающей средой (силы и моменты, действующие на ЛА в полёте);
- 4) математическое описание алгоритма управления (закон управления);
- 5) математическое описание схемы технической реализации алгоритма управления.

Наиболее общей формой математической модели является система нелинейных дифференциальных уравнений, содержащая случайные факторы. На определенных стадиях проектирования могут использоваться детерминированные математические модели (не содержащие случайных факторов). При этом, в зависимости от характера исследуемой задачи, могут учитываться упругость конструкции ЛА, колебание жидкого наполнения, наличие подвижных масс («маховиков») внутри ЛА, а также определенная специфика при движении ЛА в воде.

# **1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЖЁСТКОГО ЛА С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ**

Рассматривается движение ЛА вблизи поверхности Земли без учета колебаний жидкого наполнения и влияния подвижных масс. ЛА абсолютно жесткий. Не учитываются упругие деформации корпуса. Движение происходит в спокойной атмосфере (без учета влияния приземного ветра).

Полная система уравнений, из которых состоит эта математическая модель, включает:

- 1) уравнения динамики пространственного движения ЛА;
- 2) кинематические соотношения, связывающие линейные или угловые скорости ЛА с линейными или угловыми координатами;
- 3) уравнения, определяющие зависимость массы и моментов инерции ЛА от времени;
- 4) геометрические и вспомогательные соотношения (уравнения связи между различными системами координат, соотношения между углами, определяющими ориентацию ЛА в различных координатных системах, явные выражения для сил, моментов и т.д.);
- 5) уравнения, определяющие работу системы управления (уравнения управления).

Для вывода уравнений динамики используются различные системы координат (СК), чаще всего декартовы (т.е. прямоугольные).

## **1.1. Системы координат, используемые при описании движения ЛА**

Движение ЛА принято описывать с помощью уравнений движения, записанных в определенной системе координат. В задачах внешней баллистики одна из них должна быть связана с точкой старта реактивного снаряда: с поверхностью Земли или с бортом ЛА (самолетом, спутником Земли и пр.) и определять три линейные координаты точек траектории снаряда. Другая СК должна быть связана с самим баллистическим или реактивным снарядом и определять ориентацию снаряда как твердого тела в пространстве, а также его угловые параметры. Таким образом, можно условно выделить три группы СК:

- 1) связанные с земной поверхностью. В этой СК определяется положение движущегося тела относительно поверхности Земли;
- 2) связанные с движущимся ЛА. Общим признаком таких СК является расположение начала координат в характерной точке: обычно в центре масс ЛА или его центре давления;

3) определяющие положение движущегося ЛА относительно среды, в которой он движется: относительно вектора скорости центра масс и вектора воздушной скорости.

При исследовании движения ЛА используются прямоугольные или косоугольные СК, а также криволинейные (цилиндрические, сферические и др.), являющиеся «правыми» системами координат. Напомним, что прямоугольная СК  $Oxyz$  правая, если при выбранном направлении оси  $Ox$  ось  $Oy$  получается поворотом  $Ox$  на  $90^\circ$  против часовой стрелки, а  $Oz$  направлена так, что с «вершины»  $Ox$  поворот  $Oy$  проходит по направлению к  $Oz$  против часовой стрелки.

Основные СК, используемые в механике полета: стартовая (земная)  $O_0x_cy_cz_c$ , связанная  $Oxyz$ , скоростная  $Ox_a y_a z_a$ , полусвязанная  $Ox_e y_e z_e$ , полускоростная  $Ox_* y_* z_*$ , инерциальная  $O_{и} x_{и} y_{и} z_{и}$ .

Обозначения осей координат, относящиеся к динамике ЛА в атмосфере Земли и других планет, определяются в ГОСТе 20058–80. Используемые ранее и определяемые ГОСТом 20058–74, несколько отличаются от современных. В литературе, изданной до 1980 г., могут встречаться старые обозначения осей СК.

**Стартовая система координат**  $O_0x_cy_cz_c$  (рис. 1.1) связана с Землёй и участвует в ее суточном вращении. Начало координат (точка  $O_0$ ) – точка старта, расположенная на поверхности Земли. Ось  $O_0x_c$  направлена горизонтально по направлению полета и лежит в плоскости стрельбы. Ось  $O_0y_c$  перпендикулярна оси  $O_0x_c$ , направлена вертикально вверх и совпадает с истинной или геодезической вертикалью места старта;  $O_0x_cy_c$  – плоскость стрельбы,  $O_0x_cz_c$  – горизонтальная плоскость. Система координат  $O_0x_cy_cz_c$ , вообще говоря, неинерциальная, однако в ряде задач этим пренебрегают.

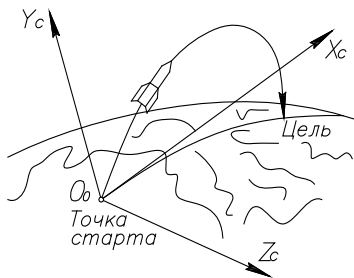


Рис. 1.1. Стартовая система координат

Для определения координат ЛА относительно земных осей применяется связанная с аппаратом СК.

**Связанная  $Oxyz$  и полусвязанная  $Ox_e y_e z_e$  системы координат.** Связанная СК (рис. 1.2) неизменно связана с ЛА как с твёрдым телом. Ее движение воспроизводит пространственное движение ЛА. Если

рассматривать ЛА как недеформируемое твёрдое тело, то в пространственном движении он имеет шесть степеней свободы, из которых три определяют вращательное движение относительно центра масс, три – движение центра масс.

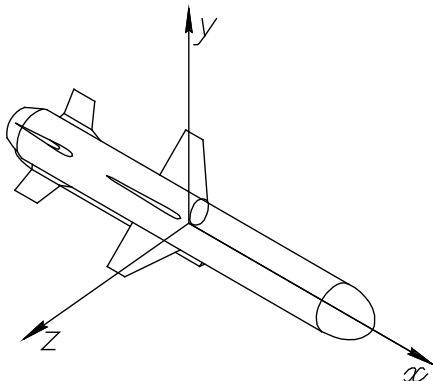


Рис. 1.2. Связанная система координат

Начало координат (точка  $O$ ) совпадает с центром масс ЛА, который считается неподвижным относительно корпуса аппарата. Оси  $Ox$  и  $Oy$  располагаются в плоскости симметрии ЛА. Ось  $Ox$  совпадает с продольной осью ЛА и направлена от центра масс к носовой части ЛА либо параллельно хорде крыла. Ось  $Oy$  перпендикулярна оси  $Ox$  и лежит в той плоскости симметрии ЛА, которая в момент запуска совпадает с плоскостью стрельбы. Ось  $Oz$  перпендикулярна плоскости  $Oxy$  и составляет правую систему координат с плоскостью симметрии  $Oxy$ .

В *полусвязанной*  $Ox_e y_e z_e$  системе координат ось  $Ox_e$  совпадает с осью ЛА  $Ox$  (продольная ось ЛА). Ось  $Oy_e$  перпендикулярна оси  $Ox_e$  и лежит в вертикальной плоскости, проходящей через ось ЛА  $Ox$ . Данная система координат имеет две степени свободы во вращательном движении.

**Скоростная  $Ox_a y_a z_a$  и полускоростная  $Ox_* y_* z_*$  системы координат.** В некоторых задачах динамики уравнения движения центра масс ЛА удобно записывать в проекциях на оси координат, связанные с вектором скорости центра масс  $\vec{V}$ . Начало координат (точка  $O$ ) скоростной СК  $Ox_a y_a z_a$  располагается в центре масс ЛА. Ось  $Ox_a$

направлена по вектору скорости  $\overline{V}$ , т.е. по касательной к траектории в сторону полета; ось  $Oy_a$  лежит в плоскости симметрии ЛА, а  $Oz_a$  – в плоскости, нормальной к траектории полета.

В полускоростной СК  $Ox_*y_*z_*$  ось  $Ox_*$  совпадает с осью  $Ox_a$ , ось  $Oy_*$  расположена в вертикальной плоскости, проходящей через вектор скорости центра масс, а ось  $Oz_*$  дополняет эту СК до правой.

Во вращательном движении относительно центра масс скоростная СК имеет три степени свободы, а полускоростная – две.

**Инерциальная система координат  $O_ix_iy_iz_i$ .** Для исследования абсолютного движения, т.е. движения в инерциальном пространстве, применяется инерциальная система координат  $O_ix_iy_iz_i$  (рис. 1.3). Она занимает в пространстве неподвижное положение или движется равномерно и прямолинейно, а ее оси не изменяют своего направления в пространстве. Инерциальная СК участвует только в поступательном движении Земли вокруг Солнца, и положение ее осей не зависит от суточного вращения Земли.

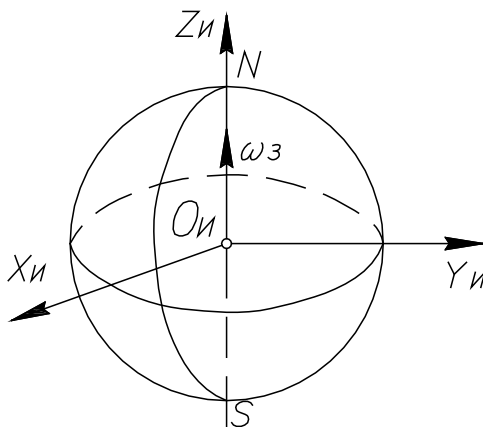


Рис. 1.3. Инерциальная система координат

Начало координат (точка  $O_i$ ) помещается в центре Земли, основной является плоскость экватора  $O_ix_iy_i$ , за опорное принимается направление  $O_ix_i$ , параллельное линии Земля–Солнце в день весеннего равноденствия. Ось  $O_iz_i$  направлена вдоль оси вращения Земли в сторону северного полюса.



Каждая СК используется для составления математической модели движения ЛА. От удачного выбора координатной системы во многом зависит простота математических операций, приводящих к составлению уравнений движения в проекциях на оси выбранной СК. Во многих случаях именно простота математической модели, зависящей от выбора СК, приводит к успеху при исследовании на базе полученной математической модели реальных процессов, сопровождающих движение ЛА.

## 1.2. Взаимное расположение систем координат.

### Связь между координатными системами.

#### Направляющие косинусы

**Взаимное расположение стартовой  $O_0x_cy_cz_c$ , связанной  $Oxyz$  и полусвязанной  $Ox_ey_ez_e$  СК при совмещённых началах.** Совместим точку старта с центром масс ЛА. Положение ЛА в пространстве определяется взаимным угловым положением связанной и стартовой (земной) СК. Это положение при совмещённых началах определяется тремя углами Эйлера (эйлеровыми углами): рыскания, тангажа и крена.

**Угол рыскания  $\psi$**  – угол между земной осью  $O_0x_c$  и проекцией продольной оси  $Ox$  на горизонтальную плоскость (линия  $OM_1$ , рис. 1.4). Угол рыскания положителен, когда ось  $O_0x_c$  совмещается с проекцией продольной оси на горизонтальную плоскость поворотом вокруг оси  $O_0y_c$  против часовой стрелки, если смотреть с конца этой оси.

**Угол тангажа  $\vartheta$**  – угол между продольной осью ЛА  $Ox$  и горизонтальной плоскостью. Угол тангажа положителен, когда продольная ось находится выше горизонтальной плоскости.

**Угол крена  $\gamma$**  – угол между поперечной осью  $Oz$  и осью  $O_0z_c$  стартовой СК, смещенной в положение, при котором угол рыскания равен нулю, или что то же самое, между нормальной осью ЛА  $Oy$  и вертикальной плоскостью, проходящей через продольную ось ЛА  $Ox$ . Угол крена положителен, когда смещенная ось  $O_0z_c$  совмещается с поперечной осью поворотом вокруг продольной оси против часовой стрелки, если смотреть с конца оси.

Напомним, что углы Эйлера независимы между собой, т.е. при изменении одного угла два других не меняются. Координатные преобразования, связанные с переходом от одной СК к другой, осуществляются с помощью *матриц направляющих косинусов*. Элементы

этой матрицы называются направляющими косинусами, так как каждый элемент равен косинусу угла между положительными направлениями соответствующих осей.

Связанную и стартовую СК можно совместить при помощи трех поворотов. На рис. 1.4 показано взаимное расположение связанной и стартовой СК.

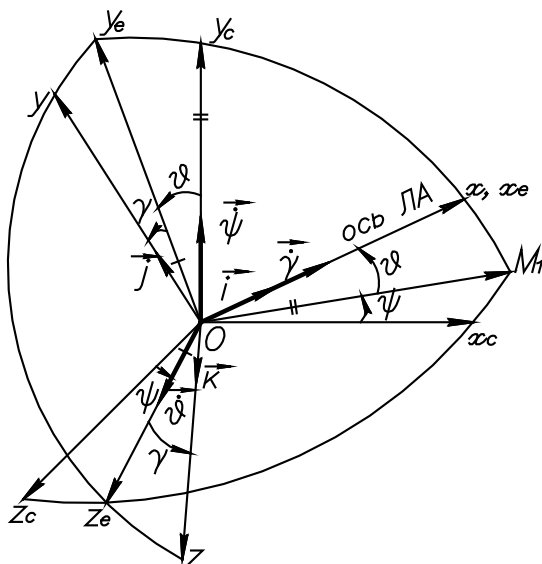


Рис. 1.4. Переход от стартовой СК к связанной

Первый поворот производится относительно любой оси исходной СК. Как правило, осью первого поворота выбирается та, относительно которой система координат в процессе полета может поворачиваться на больший угол. Например, для ЛА самолетной схемы первой осью поворота будет ось  $O_0 y_c$  поворота на угол рыскания, а для ЛА с вертикальным стартом и программным изменением угла тангажа первой осью поворота будет ось  $O_0 z_c$  поворота на угол тангажа.

Итак, произведем первый поворот относительно  $O_0 y_c$  на угол  $\psi$  с угловой скоростью  $\bar{\psi}$ . Второй поворот производится относительно любой из двух осей, вновь образовавшихся в результате первого поворота. Произведем второй поворот относительно оси  $O z_e$  на угол  $\theta$  с угловой скоростью  $\bar{\theta}$ , третий поворот – относительно оси, заняв-

шей окончательное положение (относительно оси  $Ox$  на угол  $\gamma$  с угловой скоростью  $\dot{\gamma}$ ). Векторы производных  $\dot{\bar{\psi}}$ ,  $\dot{\bar{\vartheta}}$  и  $\dot{\bar{\gamma}}$  направлены так, как показано на рис. 1.4.

Так как связанная СК совмещается со стартовой с помощью трёх поворотов, а ЛА неизменно связан со связанной СК, то абсолютная угловая скорость вращения ЛА:

$$\bar{\omega} = \bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\vartheta}} + \bar{\dot{\gamma}} . \quad (1.1)$$

Одновременно  $\bar{\omega}$  – угловая скорость вращения связанной СК. Соответственно угловая скорость вращения полусвязанной СК:

$$\bar{\omega}_e = \bar{\dot{\psi}} + \bar{\dot{\vartheta}} , \quad (1.2)$$

где  $\bar{\omega}_e$  – угловая скорость полусвязанной СК.

Взаимное расположение стартовой и связанной СК определяется таблицей направляющих косинусов (табл. 1.1), где  $a_{11} = \cos \vartheta \cos \psi$ ;  $a_{12} = \sin \gamma \sin \psi - \cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi$ ;  $a_{13} = \sin \psi \cos \gamma + \sin \gamma \sin \vartheta \cos \psi$ ;  $a_{21} = \sin \vartheta$ ;  $a_{22} = \cos \vartheta \cos \gamma$ ;  $a_{23} = -\cos \vartheta \sin \gamma$ ;  $a_{31} = -\cos \vartheta \sin \psi$ ;  $a_{32} = \cos \psi \sin \gamma + \cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi$ ;  $a_{33} = \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma$ .

Т а б л и ц а 1.1

**Косинусы углов между стартовыми и связанными осями**

	$Ox$	$Oy$	$Oz$
$O_0x_c$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$O_0y_c$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$O_0z_c$	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

На основе табл. 1.1 можно установить связь между стартовыми и связанными координатными осями:

$$\begin{aligned} x_c &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z ; \\ y_c &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z ; \\ z_c &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z . \end{aligned} \quad (1.3)$$

Данную систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где  $A = A(\vartheta, \psi, \gamma) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  – ортогональная квадратная матри-

ца перехода от связанных координат к стартовым.

Если надо осуществить обратный переход, т.е. от стартовой СК к связанной, то необходимо воспользоваться обратной матрицей  $A^{-1}$ . Так как матрица перехода является ортогональной, то обратная матрица  $A^{-1}$  совпадает с транспонированной  $A^T$ :

$$A^{-1} = A^T,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

где  $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$  – ортогональная матрица обратного перехо-

да от стартовых координат к связанным.

**Взаимное расположение стартовой  $O_0x_cy_cz_c$ , скоростной  $Ox_a y_a z_a$  и полускоростной СК  $Ox_* y_* z_*$  при совмещённых началах.** Расположение скоростной и стартовой СК при совмещённых началах определяется тремя углами: углом курса, углом возвышения и скоростным углом крена.

*Угол курса*  $\Psi$  – угол между осью  $O_0x_c$  и проекцией скорости на горизонтальную плоскость (линия  $OM_2$ , рис. 1.5).

*Угол возвышения (угол наклона траектории)*  $\Theta$  – угол между вектором скорости центра масс  $\vec{V}$  и горизонтальной плоскостью.

*Скоростной угол крена*  $\gamma_c$  – угол между боковой осью  $Oz_a$  и осью  $O_0z_c$  земной СК, смещенной в положение, при котором угол курса равен нулю.

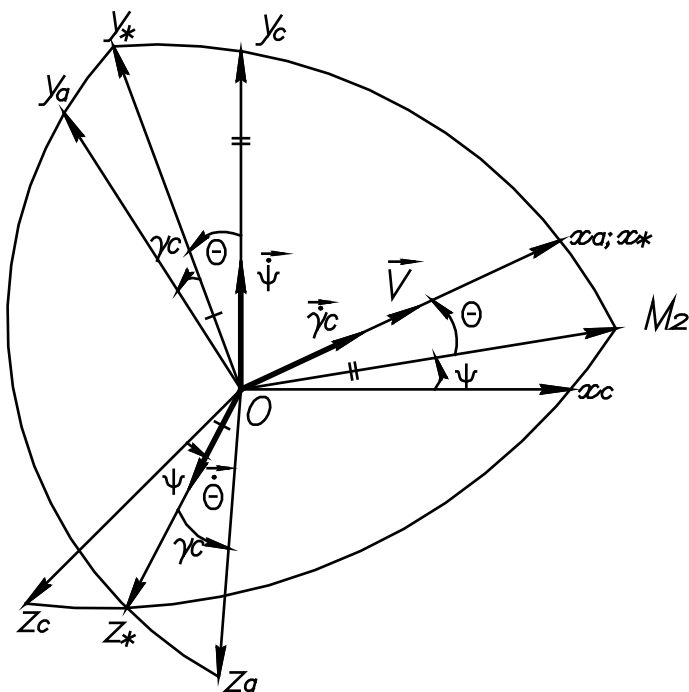


Рис. 1.5. Переход от стартовой СК к скоростной

Скоростную СК можно совместить со стартовой с помощью трех поворотов соответственно на углы  $\Psi$ ,  $\Theta$  и  $\gamma_c$ . Порядок поворотов аналогичен порядку перехода от стартовой СК к связанной. Первый поворот осуществляется относительно оси  $Oy_c$  на угол  $\Psi$  с угловой скоростью  $\bar{\Psi}$ , второй – относительно оси  $Oz_*$  на угол  $\Theta$  с угловой скоростью  $\bar{\Theta}$ , третий – относительно оси  $Ox_a$  на угол  $\gamma_c$  с угловой скоростью  $\bar{\gamma}_c$ . Векторы производных  $\bar{\Psi}$ ,  $\bar{\Theta}$  и  $\bar{\gamma}_c$  направлены так, как показано на рис. 1.5, где  $Ox_*y_*z_*$  – полускоростная СК, отличающаяся от скоростной отсутствием поворота на угол  $\gamma_c$ . Когда  $\gamma_c = 0$ , скоростная и полускоростная системы осей совпадают.

Вектор угловой скорости вращения скоростной СК определяется геометрическим сложением всех угловых скоростей последовательных трех вращений:

$$\overline{\omega}_a = \overline{\Psi} + \overline{\Theta} + \overline{\gamma}_c, \quad (1.6)$$

где  $\overline{\omega}_a$  – угловая скорость скоростной СК. Соответственно угловая скорость вращения полускоростной СК:

$$\overline{\omega}_* = \overline{\Psi} + \overline{\Theta}, \quad (1.7)$$

где  $\overline{\omega}_*$  – угловая скорость полускоростной СК.

Направляющие косинусы углов между скоростной и стартовой СК  $b_{ij}$  можно определить с помощью табл. 1.2, если в выражения для косинусов  $a_{ij}$  вместо углов  $\psi$ ,  $\vartheta$ ,  $\gamma$  подставить соответственно углы  $\Psi$ ,  $\Theta$ ,  $\gamma_c$ .

Т а б л и ц а 1.2

**Косинусы углов между стартовыми и скоростными осями**

	$Ox_a$	$Oy_a$	$Oz_a$
$O_0x_c$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$
$O_0y_c$	$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$
$O_0z_c$	$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{33}$

$$\text{В табл. 1.2 } b_{ij} = a_{ij} \begin{cases} \vartheta = \Theta \\ \psi = \Psi \\ \gamma = \gamma_c \end{cases}.$$

На основе табл. 1.2 можно установить связь между скоростными и стартовыми координатными осями. Запишем ее в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$\text{где } B = B(\Psi, \Theta, \gamma_c) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \text{ – ортогональная квадратная мат-}$$

рица перехода от скоростных координат к стартовым. Матрица  $B$  тоже является ортогональной, следовательно,  $B^{-1} = B^T$ .

Чтобы осуществить обратный переход от стартовых координат к скоростным, воспользуемся линейным преобразованием:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = B^T \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

**Взаимное расположение связанной  $Oxyz$  и скоростной СК  $Ox_a y_a z_a$ .** Взаимное расположение связанной и скоростной СК определяется двумя углами: углом атаки и углом скольжения.

Угол атаки  $\alpha$  – угол между продольной осью ЛА  $Ox$  и проекцией скорости центра масс  $\vec{V}$  на плоскость симметрии ЛА (линия  $OM_3$  на рис. 1.6).

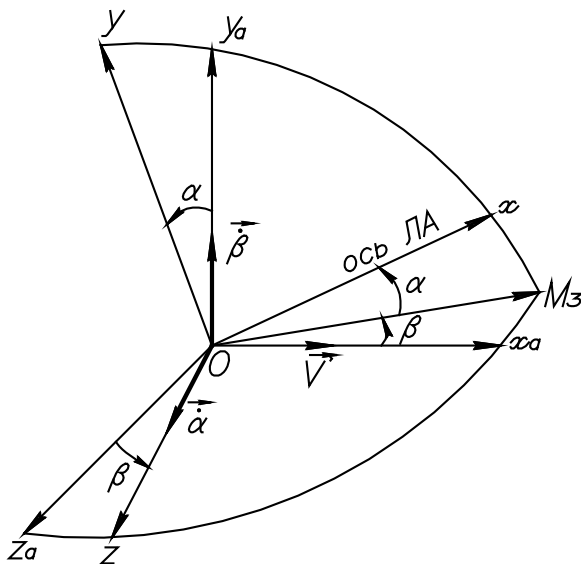


Рис. 1.6. Переход от скоростной СК к связанной

Угол скольжения  $\beta$  – угол между вектором скорости  $\vec{V}$  и плоскостью симметрии ЛА.

Угол  $\beta$  принимается положительным, если вектор скорости центра масс  $\vec{V}$  отклонен вправо от продольной плоскости  $Ox$  связанной СК; угол  $\alpha$  считается положительным, если вектор  $\vec{V}$  отклонен

«вниз» от боковой плоскости  $Oxz$  связанной СК (здесь понятие «вверх» связано с направлением оси  $Oy$ ).

Для перехода от скоростной СК к связанной осуществим два поворота: первый – вокруг оси  $Oy_a$  на угол  $\beta$  с угловой скоростью  $\bar{\beta}$ , второй – вокруг оси  $Oz$  на угол  $\alpha$  с угловой скоростью  $\bar{\alpha}$ .

Косинусы углов между связанной и скоростной СК можно определить с помощью табл. 1.3, где  $c_{11} = \cos \alpha \cos \beta$ ;  $c_{12} = -\sin \alpha \cos \beta$ ;  $c_{13} = \sin \beta$ ;  $c_{21} = \sin \alpha$ ;  $c_{22} = \cos \alpha$ ;  $c_{23} = 0$ ;  $c_{31} = -\cos \alpha \sin \beta$ ;  $c_{32} = \sin \alpha \sin \beta$ ;  $c_{33} = \cos \beta$ .

Т а б л и ц а 1.3

**Косинусы углов между скоростными и связанными осями**

	$Ox$	$Oy$	$Oz$
$Ox_a$	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$
$Oy_a$	$c_{21}$	$c_{22}$	$c_{23}$
$Oz_a$	$c_{31}$	$c_{32}$	$c_{33}$

Режим эксплуатации ЛА, в том числе артиллерийских и реактивных снарядов, оперенных мин, авиабомб, происходит, как правило, при малых углах атаки  $\alpha$  и  $\beta$  и малых значениях безразмерных угловых скоростей  $\bar{\omega}_y$  и  $\bar{\omega}_z$ , угловых ускорений и других параметров, входящих в выражение коэффициента полной аэродинамической силы. Поэтому при малых углах  $\alpha$  и  $\beta$  можно записать приближенные равенства:

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \sin \beta \approx \beta, \quad \cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1.$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} c_{11} &\approx 1; & c_{12} &\approx -\alpha; & c_{13} &\approx \beta; \\ c_{21} &\approx \alpha; & c_{22} &\approx 1; & c_{23} &= 0; \\ c_{31} &\approx -\beta; & c_{32} &\approx 0; & c_{33} &\approx 1. \end{aligned}$$

Матрицу направляющих косинусов между связанной  $Ox_yz$  и скоростной  $Ox_a y_a z_a$  СК обозначим  $C = C(\alpha, \beta)$ . Матрица  $C$  является ортогональной, следовательно,  $C^{-1} = C^T$ :



$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad C^{-1} = C^T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Запишем линейные преобразования перехода от связанной СК к скоростной в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad (1.10)$$

и перехода от скоростной СК к связанной:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

### 1.3. Геометрические соотношения

Положение скоростной системы координат относительно неподвижной земной можно определить или непосредственно углами  $\Psi, \Theta, \gamma_c$ , или углами  $\psi, \vartheta, \gamma, \alpha, \beta$ . Таким образом, пять из восьми углов являются независимыми и, следовательно, между ними должны существовать три связи.

Для определения этих связей используем таблицы направляющих косинусов (табл. 1.1–1.3) и соответствующие этим таблицам матрицы.

Таблица 1.1	Таблица 1.2	Таблица 1.3	
$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	(1.12)
$A(\vartheta, \psi, \gamma) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$	$B(\Psi, \Theta, \gamma_c) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$		
$C(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$			

Установив связь между матрицами, можно установить связь между углами. Задача сводится к нахождению связи между матрицами.

Из (1.12) следует:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = BC \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow A = BC, \quad B = AC^{-1}, \quad B = AC^T. \quad (1.13)$$

**Связь между углом возвышения  $\Theta$  и углом тангажа  $\vartheta$ .** Для определения угла возвышения  $\Theta$  выбираем из табл. 1.2 тот направляющий косинус, который простейшим образом выражается через  $\Theta$ :

$$\begin{aligned} b_{21} &= \sin \Theta = a_{21}c_{11} + a_{22}c_{12} + a_{23}c_{13} = \\ &= \sin \vartheta \cos \alpha \cos \beta - \cos \vartheta \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta - \cos \vartheta \sin \gamma \sin \beta \end{aligned}$$

(вторую строку матрицы  $A$  умножаем на первый столбец матрицы  $C^T$ , подставляем значения из табл. 1.1–1.3).

Принимая допущение, что  $\alpha, \beta, \gamma$  малы (крен стабилизирован), получаем

$$b_{21} \approx \sin \Theta \approx \sin \vartheta - \alpha \cos \vartheta \approx \sin \vartheta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \vartheta = \sin(\vartheta - \alpha).$$

Тогда

$$\Theta \approx \vartheta - \alpha. \quad (1.14)$$

**Связь между углом курса  $\Psi$  и углом рыскания  $\psi$ .** Для определения угла курса  $\Psi$  обратимся к элементу  $b_{31}$  и, используя табл. 1.1–1.3, запишем:

$$\begin{aligned} b_{31} &= -\cos \Theta \sin \Psi = a_{31}c_{11} + a_{32}c_{12} + a_{33}c_{13} = \\ &= -\sin \psi \cos \vartheta \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \cos \beta (\cos \psi \sin \gamma + \\ &+ \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma) + \sin \beta (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma). \end{aligned}$$

При малых углах  $\alpha, \beta, \gamma$  получим

$$\begin{aligned} b_{31} &= -\cos \Theta \sin \Psi \approx -\sin \psi \cos \vartheta - \alpha \sin \psi \sin \vartheta + \beta \cos \psi \approx \\ &\approx -\sin \psi (\cos \vartheta + \alpha \sin \vartheta) + \beta \cos \psi \approx \\ &\approx -\sin \psi (\cos \vartheta \cos \alpha + \sin \alpha \sin \vartheta) + \beta \cos \psi \approx -\sin \psi \cos(\vartheta - \alpha) + \beta \cos \psi. \end{aligned}$$

Подставим сюда  $\vartheta - \alpha \approx \Theta$ , тогда

$$\sin \Psi \approx \sin \psi - \frac{\beta}{\cos \Theta} \cos \psi . \quad (1.15)$$

Для баллистических ракет можно принять, что  $\Psi$  и  $\psi$  малы. Тогда

$$\Psi \approx \psi - \frac{\beta}{\cos \Theta} . \quad (1.16)$$

В случае горизонтального полета на постоянной высоте можно принять, что  $\vartheta$  мал, тогда

$$\Psi \approx \psi - \beta . \quad (1.17)$$

**Связь между скоростным углом крена  $\gamma_c$  и углом крена  $\gamma$ .**

Для определения скоростного угла крена  $\gamma_c$  обратимся к элементу  $b_{23}$ :

$$\begin{aligned} b_{23} &= -\sin \gamma_c \cos \Theta = a_{21}c_{31} + a_{22}c_{32} + a_{23}c_{33} = \\ &= -\sin \vartheta \cos \alpha \sin \beta + \cos \vartheta \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta - \cos \vartheta \sin \gamma \cos \beta. \end{aligned}$$

При малых углах  $\alpha, \beta, \gamma$  получим

$$\begin{aligned} -\gamma_c \cos \Theta &\approx -\sin \vartheta \beta - \gamma \cos \vartheta , \\ \gamma_c &\approx \gamma \frac{\cos \vartheta}{\cos \Theta} + \beta \frac{\sin \vartheta}{\cos \Theta} . \end{aligned} \quad (1.18)$$

В случае горизонтального полёта ЛА на постоянной высоте (крылатая ракета) углы крена  $\gamma$  и  $\gamma_c$  приблизительно равны:  $\Theta = 0$ ,  $\vartheta = \alpha$ ,  $\gamma_c \approx \gamma$ .

#### 1.4. Кинематические соотношения

Кинематические соотношения служат для определения линейных или угловых координат ЛА в зависимости от линейных или угловых скоростей. При изучении движения ЛА вблизи поверхности Земли со скоростями, меньшими первой космической, можно не учитывать орбитальное движение Земли и её вращательное движение. В этом случае стартовую СК  $O_0x_cy_cz_c$ , где  $O_0$  – точка старта, можно считать инерциальной, т.е. абсолютно неподвижной. При этих допущениях выведем основные кинематические соотношения.

Кинематическое уравнение движения центра масс ЛА в векторной форме:

$$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \quad (1.19)$$

где  $\bar{r}$  – радиус-вектор, проведенный из начала стартовой СК в центр масс ЛА;  $\bar{V}$  – вектор скорости центра масс ЛА относительно рассматриваемой системы отсчета.

Каждому векторному уравнению соответствуют три скалярных, конкретный вид которых зависит от выбранных осей координат.

Разложим вектор скорости и радиус-вектор по осям стартовой СК:

$$\bar{V} = V_{x_c} \bar{i}_c + V_{y_c} \bar{j}_c + V_{z_c} \bar{k}_c, \quad (1.20)$$

$$\bar{r} = x_c \bar{i}_c + y_c \bar{j}_c + z_c \bar{k}_c. \quad (1.21)$$

где  $x_c, y_c, z_c$  – координаты центра масс в стартовой СК;  $\bar{i}_c, \bar{j}_c, \bar{k}_c$  – орты соответствующих осей стартовой СК.

Подставим вектор скорости  $\bar{V}$  и радиус-вектор  $\bar{r}$  в уравнение (1.19):

$$V_{x_c} \bar{i}_c + V_{y_c} \bar{j}_c + V_{z_c} \bar{k}_c = \frac{dx_c}{dt} \bar{i}_c + \frac{dy_c}{dt} \bar{j}_c + \frac{dz_c}{dt} \bar{k}_c.$$

В результате получим

$$\begin{cases} \frac{dx_c}{dt} = V_{x_c} \\ \frac{dy_c}{dt} = V_{y_c} \\ \frac{dz_c}{dt} = V_{z_c} \end{cases}. \quad (1.22)$$

Уравнения (1.22) служат для определения координат центра масс ЛА.

Запишем выражения для проекций скорости центра масс на координатные оси стартовой СК. Для этого обратимся к рис. 1.5 и табл. 1.2:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= V\bar{i}_a = V\bar{i}_* \quad (x_a \text{ совпадает с } x_*); \\ V_{x_c} &= Vb_{11} = V \cos \Theta \cos \Psi; \\ V_{y_c} &= Vb_{21} = V \sin \Theta; \\ V_{z_c} &= Vb_{31} = -V \cos \Theta \sin \Psi. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{dx_c}{dt} = V_{x_c} = V \cos \Theta \cos \Psi \\ \frac{dy_c}{dt} = V_{y_c} = V \sin \Theta \\ \frac{dz_c}{dt} = V_{z_c} = -V \cos \Theta \sin \Psi \end{cases} . \quad (1.24)$$

**Кинематическое уравнение вращательного движения ЛА в векторной форме:**

$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\Theta}} + \vec{\dot{\gamma}} . \quad (1.25)$$

Поскольку при вращении ЛА изменяются углы  $\psi, \Theta, \gamma$ , определяющие положение ЛА относительно стартовых осей, вектор угловой скорости ЛА  $\vec{\omega}$  относительно этих осей равен геометрической сумме угловых скоростей элементарных поворотов.

Для определения угловых скоростей поворота  $\vec{\dot{\psi}}, \vec{\dot{\Theta}}, \vec{\dot{\gamma}}$  обратимся к рис. 1.7.

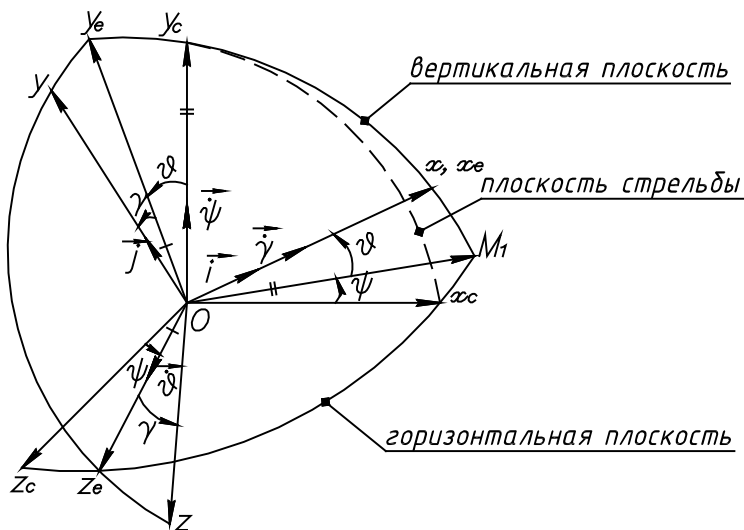


Рис. 1.7. Переход от стартовой СК к связанной

Проецируя равенство (1.25) на оси связанной СК  $x, y, z$  (см. рис. 1.7), получим

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\gamma}, \\ \omega_y = \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma, \\ \omega_z = -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \gamma. \end{cases} \quad (1.26)$$

Из (1.26) найдём  $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\gamma}$ : умножим второе уравнение на  $\sin \gamma$ , третье – на  $\cos \gamma$ , затем сложим их:

$$\dot{\vartheta} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma. \quad (1.27)$$

Помножим второе уравнение на  $\cos \gamma$ , третье – на  $\sin \gamma$  и вычтем:

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma). \quad (1.28)$$

Из первого уравнения системы (1.26)

$$\dot{\gamma} = \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma). \quad (1.29)$$

Считая  $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \gamma$  малыми величинами, получим

$$\begin{cases} \frac{d\vartheta}{dt} \approx \omega_z \\ \frac{d\psi}{dt} \approx \frac{\omega_y}{\cos \vartheta} \\ \frac{d\gamma}{dt} \approx \omega_x - \omega_y \operatorname{tg} \vartheta \end{cases}. \quad (1.30)$$

## 1.5. Уравнения динамики пространственного движения

ЛА в своём пространственном движении имеет шесть степеней свободы, если рассматривать его как недеформируемое твёрдое тело с переменной массой. Его движение определяется шестью обобщёнными координатами: тремя координатами центра масс и тремя эйлеровыми углами, определяющими угловую ориентацию ЛА относительно центра масс. Для определения шести указанных координат нужно составить шесть уравнений динамики. Для этого используются основные законы механики системы материальных точек и твёрдого

тела: закон количества движения и закон моментов количества движения.

**Закон количества движения.** Изменение вектора количества движения системы в единицу времени равняется главному вектору всех внешних сил, действующих на систему:

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \sum \bar{F}_i . \quad (1.31)$$

**Закон момента количества движения.** Изменение вектора момента количества движения в единицу времени равно главному моменту всех внешних сил, действующих на систему. При этом вектор момента количества движения и момент внешних сил вычисляются относительно неподвижной точки пространства или относительно центра масс системы:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum \bar{M}_{io} , \quad (1.32)$$

где  $\bar{L}_O$  – вектор момента количества движения (или кинетический момент) относительно центра масс  $O$ .

Оба эти закона справедливы для тела или системы с постоянной массой. При этом закон количества движения для тела с постоянной массой трансформируется в уравнение 2-го закона механики:

$$m \frac{d\bar{V}}{dt} = \sum \bar{F}_i , \quad m = \text{const} , \quad (1.33)$$

где  $\bar{V}$  – скорость центра масс;  $\frac{d\bar{V}}{dt}$  – абсолютное ускорение.

Если масса меняется в зависимости от времени, то эти законы несправедливы. В этом случае появляются дополнительные силы и моменты, вызванные изменением массы. Так как поступательное движение может быть описано движением одной точки, совпадающей с центром масс, то для вывода уравнений поступательного движения можно использовать уравнение Мещерского.

Уравнение Мещерского описывает движение точки с переменной массой. В общем случае, когда при движении точки с переменной массой имеет место как отсоединение, так и присоединение массы, уравнение Мещерского запишется в виде

$$m(t) \frac{d\bar{V}}{dt} = \sum \bar{F}_i + \bar{R}_1 + \bar{R}_2, \quad (1.34)$$

где  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{R}_2$  – реактивные силы, вызванные присоединением и отсоединением массы (рис. 1.8) и определяемые по следующим формулам.

Реактивная сила, вызванная присоединением массы, тормозит движение точки:

$$\bar{R}_1 = Q_1 \bar{U}_1, \quad (1.35)$$

где  $Q_1$  – секундный приход массы (количество массы, присоединяющейся в единицу времени);  $\bar{U}_1$  – относительная скорость присоединения массы.

В полете, главным образом вследствие работы двигателей, часть массы реактивного снаряда с течением времени отделяется от ракеты. Существуют ЛА, присоединяющие определенное количество массы окружающей среды для использования в качестве одного из продуктов сгорания в камере реактивного двигателя: реактивные торпеды, использующие заборную воду в качестве окислителя; самолеты с воздушно-реактивными двигателями; крылатые ракеты больших дальностей и другие виды ЛА. Одновременно с забором окружающей среды продукты сгорания выбрасываются через сопла с большой скоростью, создавая силу тяги.

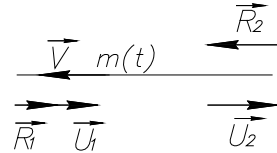


Рис. 1.8. Реактивные силы

Реактивная сила, вызванная отсоединением массы:

$$\bar{R}_2 = -Q_2 \bar{U}_2, \quad (1.36)$$

где  $Q_2$  – секундный расход массы,  $\bar{U}_2$  – относительная скорость отсоединения массы (скорость истечения продуктов сгорания из сопла). Эта сила возникает у ракет с жидкостными и твердотопливными двигателями.

Будем считать, что  $\bar{R}_1 = 0$ , т.е. рассматривать ЛА с жидкостными (ЖРД) и твердотопливными (РДТ) двигателями. Тогда

$$m(t) \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{R}_2 + \sum \bar{F}_i. \quad (1.37)$$

Закон изменения массы определяется уравнением



$$\frac{dm}{dt} = -Q. \quad (1.38)$$

Закон изменения массы при постоянном расходе ( $Q = \text{const}$ ):

$$m = m_0 - Qt, \quad (1.39)$$

где  $m_0$  – начальная масса точки.

Используя вместо закона количества движения уравнение Мещерского для описания поступательного движения ЛА, мы допускаем известную неточность, которая происходит от того, что не учитывается перемещение центра масс ЛА за счёт выгорания топлива.

Рассмотрим схему ракеты (рис. 1.9), где:  $p_a$  – давление газов на выходе из сопла;  $p(y_c)$  – атмосферное давление, зависящее от высоты полёта  $y_c$ ;  $F_{bc}$  – площадь выходного сечения.

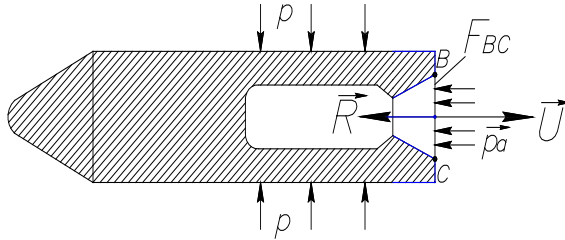


Рис. 1.9. Схема ракеты

При движении ЛА в атмосфере на него будет действовать тяга  $\vec{R}$ , приложенная в точке  $O_2$  (центр масс выходного сечения сопла), которая представляет собой сумму реактивной силы  $R_2$  и статической добавки  $R_{ст}$ :

$$R = R_2 + R_{ст},$$

где

$$R_{ст} = F_{bc}(p_a - p(y_c)). \quad (1.40)$$

Таким образом,

$$R = QU + F_{bc}[p_a - p(y_c)] = Qu_e, \quad (1.41)$$

где  $u_e$  – эффективная скорость истечения газов:

$$u_e = U + \frac{F_{\text{вс}}}{Q} [p_a - p(y_c)]. \quad (1.42)$$

С подъёмом на высоту  $U_e > U$ .

Заметим, что реактивная сила приложена в центре масс выходного сечения сопла, но не в геометрическом центре.

Кроме силы тяги  $R$ , в состав сил, обусловленных переменным составом ЛА, входят:

- силы, вызванные нестационарностью движения топлива и продуктов горения относительно корпуса ЛА;
- кориолисовы силы, обусловленные движением топлива и продуктов горения в ЛА, вращающемся относительно инерциальной СК;
- силы, обусловленные перемещением центра масс ЛА относительно корпуса.

Перечисленные силы очень малы по сравнению с тягой, причем непосредственно их измерить невозможно. В связи с этим при выводе уравнений динамики пространственного движения ЛА указанными малыми силами обычно пренебрегают.

## 1.6. Вывод уравнений поступательного движения в пространстве

Для вывода уравнений поступательного движения используется уравнение Мещерского:

$$m(t) \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{R} + \bar{F}_A + \bar{G}, \quad (1.43)$$

где  $\bar{R}$  – тяга;  $\bar{F}_A$  – главный вектор аэродинамических сил;  $\bar{G}$  – сила тяжести;  $\frac{d\bar{V}}{dt}$  – абсолютное ускорение;  $\bar{V}$  – скорость центра масс относительно земли (путевая скорость).

Уравнение (1.43) эквивалентно трём уравнениям в проекциях на оси СК. Чтобы получить эти уравнения, нужно выбрать какую-либо из пяти координатных систем, рассмотренных нами: стартовую, связанную, скоростную, полусвязанную, полускоростную.

При выводе уравнений поступательного движения может использоваться любая из них. Вид уравнений в проекциях будет зависеть от выбора системы координат. Наиболее часто при выводе уравнений поступательного движения используются  $Ox_*y_*z_*$  – полускоростная;  $Oxyz$  – связанная. В уравнении (1.43) слева стоит полная векторная производная от вектора  $\bar{V}$ , а справа – сумма сил.

Рассмотрим, как найти производную от вектора в подвижной СК. Если какой-либо вектор  $\bar{a} = \bar{a}(t)$  определен в подвижной системе координат:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad (1.44)$$

где  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  – единичные векторы подвижной СК, то производная по времени от этого вектора:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{da_y}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{da_z}{dt} \cdot \bar{k} + a_x \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + a_y \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + a_z \cdot \frac{d\bar{k}}{dt}.$$

Сумма первых трех слагаемых представляет собой производную от вектора  $\bar{a}$  в подвижной системе координат (характеризует изменение вектора  $\bar{a}$  во времени относительно подвижной СК) и называется локальной производной, обозначим ее  $\frac{d'\bar{a}}{dt}$ , т.е.

$$\frac{d'\bar{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{da_y}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{da_z}{dt} \cdot \bar{k}.$$

Поскольку  $\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}$ ,  $\frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}$  и  $\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}$ , то вторая сумма слагаемых (характеризует изменение вектора  $\bar{a}$  во времени, вызванное вращением координатных осей) может быть представлена как

$$\begin{aligned} a_x \cdot \frac{d\bar{i}}{dt} + a_y \cdot \frac{d\bar{j}}{dt} + a_z \cdot \frac{d\bar{k}}{dt} &= a_x (\bar{\omega} \times \bar{i}) + a_y (\bar{\omega} \times \bar{j}) + a_z (\bar{\omega} \times \bar{k}) = \\ &= \bar{\omega} \times (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) = \bar{\omega} \times \bar{a}, \end{aligned}$$

где  $\bar{\omega}$  является угловой скоростью вращения подвижной СК относительно рассматриваемой неподвижной опорной СК. Следовательно,

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{d'\bar{a}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{a}. \quad (1.45)$$

Таким образом, при рассмотрении сложного движения абсолютная производная вектора в подвижной СК равна сумме локальной производной этого вектора и векторного произведения угловой скорости вращения подвижной СК относительно опорной на этот вектор.

Применим это правило к нахождению производной от вектора  $\bar{V}$ . Рассмотрим *полускоростную систему координат*  $Ox_*y_*z_*$ . Полная производная вектора скорости:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d'\bar{V}}{dt} + \bar{\omega}_* \times \bar{V}, \quad (1.46)$$

где  $\bar{\omega}_*$  – абсолютная угловая скорость вращения системы координат  $Ox_*y_*z_*$ .

Спроецируем вектор скорости  $\bar{V}$  на полускоростную СК:

$$\bar{V} = V\bar{i}_*. \quad (1.47)$$

Тогда

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\bar{i}_* + \bar{\omega}_* \times \bar{V}. \quad (1.48)$$

Запишем векторное произведение в проекциях:

$$\bar{\omega}_* \times \bar{V} = \begin{vmatrix} \bar{i}_* & \bar{j}_* & \bar{k}_* \\ \omega_{*x_*} & \omega_{*y_*} & \omega_{*z_*} \\ V & 0 & 0 \end{vmatrix} = V(\omega_{*z_*}\bar{j}_* - \omega_{*y_*}\bar{k}_*). \quad (1.49)$$

Абсолютная угловая скорость полускоростной СК:  $\bar{\omega}_* = \bar{\dot{\theta}} + \bar{\dot{\Psi}}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \omega_{*y_*} &= \dot{\Psi} \cos \theta; \\ \omega_{*z_*} &= \dot{\theta}; \\ \bar{\omega}_* \times \bar{V} &= V\dot{\theta}\bar{j}_* - V\dot{\Psi} \cos \theta \bar{k}_*. \end{aligned} \quad (1.50)$$

В результате система уравнений поступательного движения в проекциях на полускоростные оси запишется следующим образом:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dt} = R_{x_*} + G_{x_*} + F_{AX_*} \\ mV \frac{d\theta}{dt} = R_{y_*} + G_{y_*} + F_{AY_*} \\ -mV \cos \theta \frac{d\Psi}{dt} = R_{z_*} + G_{z_*} + F_{AZ_*} \end{cases} \quad (1.51)$$

Рассмотрим **связанную систему координат**  $Oxyz$ . Полная производная вектора скорости в связанной СК:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d'\bar{V}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{V} . \quad (1.52)$$

где  $\bar{\omega}$  – абсолютная угловая скорость вращения системы координат  $Oxyz$ .

Спроецируем вектор скорости на оси связанной СК:

$$\bar{V} = V_x \bar{i} + V_y \bar{j} + V_z \bar{k} . \quad (1.53)$$

Обратившись к рис. 1.6, можно записать:

$$\begin{aligned} V &= V \cos \alpha \cos \beta \approx V; \\ V &= -V \sin \alpha \cos \beta \approx -V\alpha; \\ V &= V \sin \beta \approx V\beta. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Локальная производная вектора скорости:

$$\frac{d'\bar{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt} \bar{i} + \frac{dV_y}{dt} \bar{j} + \frac{dV_z}{dt} \bar{k} . \quad (1.55)$$

Векторное произведение в проекциях:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \times \bar{V} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(\omega_y V_z - \omega_z V_y) + \bar{j}(\omega_z V_x - \omega_x V_z) + \bar{k}(\omega_x V_y - \omega_y V_x), \end{aligned} \quad (1.56)$$

где  $\bar{\omega} = \bar{\psi} + \bar{\vartheta} + \bar{\gamma}$ ,

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\gamma}, \\ \omega_y = \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma, \\ \omega_z = -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \gamma. \end{cases} \quad (1.57)$$

Тогда система уравнений поступательного движения в проекциях на связанные оси:

$$\begin{cases} m \left( \frac{dV_x}{dt} + \omega_y V_z - \omega_z V_y \right) = R_x + G_x + F_{Ax} \\ m \left( \frac{dV_y}{dt} + \omega_z V_x - \omega_x V_z \right) = R_y + G_y + F_{Ay} \\ m \left( \frac{dV_z}{dt} + \omega_x V_y - \omega_y V_x \right) = R_z + G_z + F_{Az} \end{cases} \quad (1.58)$$

### 1.7. Уравнения вращательного движения в пространстве

Для вывода уравнений вращательного движения используется закон момента количества движения:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_R + \bar{M}_F, \quad (1.59)$$

где  $\bar{L}_O$  – момент количества движения относительно центра масс (кинетический момент).  $\bar{M}_R$  – момент тяги,  $\bar{M}_F$  – момент внешних сил, кроме силы тяги. Выражение (1.59) будет иметь смысл, если точка  $O$  неподвижна в инерциальном пространстве или является центром масс ЛА.

Векторное уравнение (1.59) запишем в проекциях на связанную СК, которая используется преимущественно при проектировании уравнения (1.59). Но наряду со связанной системой координат в случае осесимметричного ЛА может использоваться полусвязанная (рис. 1.10).

Остальные СК из перечисленных выше при записи уравнений вращательного движения не используются. Связанная СК неизменно связана с ЛА, и ее оси при движении ЛА сохраняют относительно него постоянную ориентацию, т.е. связанная система в пространстве вращается с той же угловой скоростью, что и сам ЛА. Та-

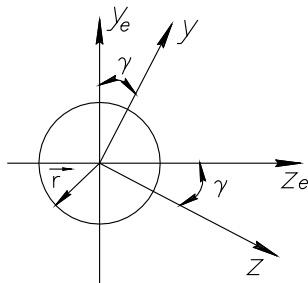


Рис. 1.10. Взаимное расположение связанных и полусвязанных осей

ким образом, моменты инерции, которые входят в уравнение вращательного движения, в случае использования связанной СК будут зависеть только от изменения массы, и не будут зависеть от вращения ЛА.

Если  $\dot{\gamma}$  мала (крен стабилизирован), то не имеет существенного значения, какую СК использовать, связанную или полусвязанную. Итак, при использовании связанной СК

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{L}_O}{dt} &= \frac{d\bar{L}_O}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{L}_O; \\ \bar{L}_O &= L_x \bar{i} + L_y \bar{j} + L_z \bar{k}; \\ \frac{d\bar{L}_O}{dt} &= \frac{dL_x}{dt} \bar{i} + \frac{dL_y}{dt} \bar{j} + \frac{dL_z}{dt} \bar{k},\end{aligned}\tag{1.60}$$

где  $\bar{L}_O$  – момент количества движения ЛА относительно центра масс;  $\bar{\omega}$  – абсолютная угловая скорость связанной СК (абсолютная угловая скорость ЛА).

При использовании полусвязанной системы координат

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \frac{d\bar{L}_O}{dt} + \bar{\omega}_e \times \bar{L}_O.\tag{1.61}$$

Проекции  $\bar{L}_O$  на связанные оси (для любой конфигурации ЛА):

$$\begin{aligned}L_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \\ L_y &= J_y \omega_y - J_{yx} \omega_x - J_{yz} \omega_z, \\ L_z &= J_z \omega_z - J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y\end{aligned}\tag{1.62}$$

где  $\bar{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  – абсолютная угловая скорость ЛА;  $J_x, J_y, J_z$  – осевые моменты инерции массы;  $J_{xy}, J_{xz}, J_{yz}, \dots$  – центробежные моменты инерции (произведения инерции).

Моменты инерции:

$$\begin{aligned}
J_x &= \int_{(m)} (y^2 + z^2) dm, & J_{xy} &= \int_{(m)} xy dm, \\
J_y &= \int_{(m)} (x^2 + z^2) dm, & J_{yz} &= \int_{(m)} yz dm, \quad \text{и т.д.} \quad (1.63) \\
J_z &= \int_{(m)} (x^2 + y^2) dm, & J_{xz} &= \int_{(m)} xz dm
\end{aligned}$$

Если ЛА имеет определенную симметрию, то эти формулы упрощаются:

1.  $Oxy$  – плоскость симметрии (ЛА самолётной схемы). Поскольку основная плоскость  $Oxy$  связанной СК является плоскостью симметрии ЛА, то в связанных осях центробежные моменты инерции, содержащие координаты  $z$ , обращаются в нуль:  $J_{xz} = J_{yz} = 0$ . Иначе говоря, для самолётной схемы

$$\begin{aligned}
L_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y \\
L_y &= J_y \omega_y - J_{yx} \omega_x \\
L_z &= J_z \omega_z
\end{aligned} \quad (1.64)$$

причем  $J_{xy} \omega_y, J_{yx} \omega_x$  – малые величины и ими часто пренебрегают;

2.  $Ox$  – ось симметрии. В этом случае все центробежные моменты равны нулю. Если все центробежные моменты инерции относительно осей принятой системы координат равны нулю, то такие оси называются *главными осями инерции*. В этом случае проекции вектора кинетического момента:

$$L_x = J_x \omega_x; L_y = J_y \omega_y; L_z = J_z \omega_z. \quad (1.65)$$

В дальнейшем при выводе уравнений вращательного движения будем использовать именно этот случай.

Отметим, что моменты инерции – это функции времени  $J_x, J_y, J_z = f_i(t)$ , т.е. являются переменными величинами, однако при проведении приближенных баллистических расчетов принято считать их постоянными. В стадии сдаточных исследований и испытаний конкретных образцов реактивных снарядов учитывают влияние переменности моментов инерции на характер движения центра масс. В дальнейшем будем полагать моменты инерции постоянными величинами.



нами, а значит, при вычислении локальной производной они выносятся за знак производной:

$$\frac{d\bar{L}_o}{dt} = J_x \frac{d\omega_x}{dt} \bar{i} + J_y \frac{d\omega_y}{dt} \bar{j} + J_z \frac{d\omega_z}{dt} \bar{k}; \quad (1.66)$$

Векторное произведение:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \times \bar{L}_o &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_x \omega_x & J_y \omega_y & J_z \omega_z \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(\omega_y J_z \omega_z - \omega_z J_y \omega_y) + \bar{j}(J_x \omega_x \omega_z - \omega_x J_z \omega_z) + \\ &\quad + \bar{k}(\omega_x J_y \omega_y - J_x \omega_x \omega_y). \end{aligned} \quad (1.67)$$

Запишем уравнение вращательного движения в общем виде:

$$\begin{cases} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (J_z - J_y) = M_{Rx} + M_{Ax} \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z (J_x - J_z) = M_{Ry} + M_{Ay} \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (J_y - J_x) = M_{Rz} + M_{Az} \end{cases} \quad (1.68)$$

где  $M_{Rx}, M_{Ry}, M_{Rz}$  – управляющие моменты относительно соответствующих осей, которые создаются за счёт отбора части тяги на управление;  $M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}$  – составляющие аэродинамического момента, действующего на ЛА.

Если угловое движение ЛА стабилизировано ( $\bar{\omega}$  – малая величина), тогда  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  малы, а значит, произведениями  $\omega_y \omega_z (J_z - J_y)$ ,  $\omega_x \omega_z (J_x - J_z)$ ,  $\omega_x \omega_y (J_y - J_x)$  можно пренебречь (для управляемого ЛА).

## 2. СИЛЫ И МОМЕНТЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЛЕТАТЕЛЬНЫЙ АППАРАТ

При полете какого-либо летательного аппарата на него действуют следующие силы: вес ЛА  $\bar{G}$ , полная аэродинамическая сила  $\bar{F}_A$ ,

т.е. равнодействующая сил взаимодействия между воздушной средой и поверхностью ЛА, сила тяги двигателей  $\vec{R}$ .

Для управления полетом ЛА необходимо иметь возможность изменять величины и направление этих сил. Но поскольку сила тяжести направлена все время по вертикали вниз, а ее величину нельзя регулировать произвольно, то практически управление полетом осуществляется с помощью аэродинамических сил и силы тяги.

### 2.1. Выражения для проекции сил тяги и веса на полускоростные и связанные оси

Для решения поставленной задачи рассмотрим взаимное расположение связанной  $Oxyz$ , скоростной  $Ox_a y_a z_a$  и полускоростной  $Ox_* y_* z_*$  СК (рис. 2.1) и проекции сил на полускоростные и связанные оси.

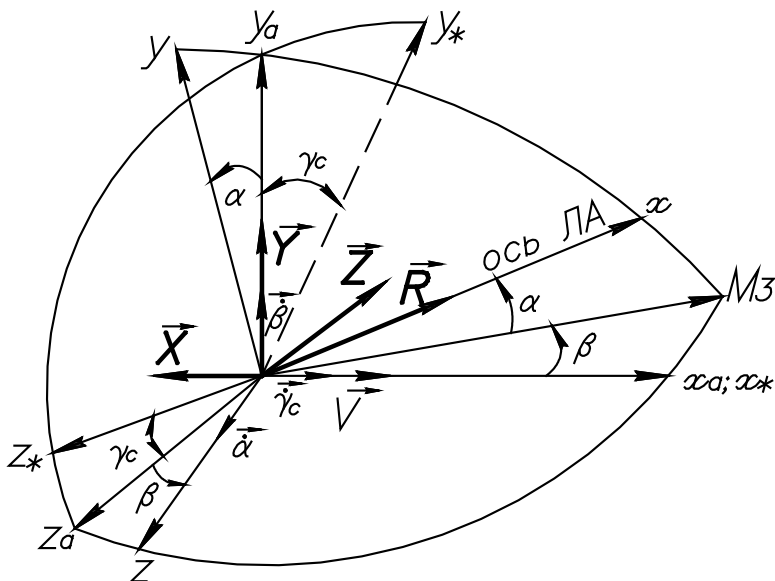


Рис. 2.1. Взаимное расположение связанной, скоростной и полускоростной СК

Общий метод заключается в следующем. Рассматриваемая сила представляется в проекциях на те координатные оси, в которых она задана. Затем с помощью соответствующих таблиц направляющих косинусов записываются проекции на необходимые координатные оси.

Тяга двигателей  $\bar{R}$  обычно лежит в плоскости симметрии ЛА  $Ox$  или составляет некоторые известные углы с положительным направлением оси  $Ox$ .

Разложим силу тяги на составляющие по осям связанной СК:

$$\bar{R} = R_x \bar{i} + R_y \bar{j} + R_z \bar{k}. \quad (2.1)$$

Компоненты тяги  $R_y, R_z$  используются для управления вращательным движением ЛА относительно центра масс, причем  $R_y, R_z \ll R_x$ . Будем считать, что  $R \approx R_x$ , значит, тяга  $\bar{R} = R \bar{i}$ . Таким образом, проекции силы тяги на связанные оси:

$$\begin{aligned} R_x &= R; \\ R_y &= R_z = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Воспользуемся рис. 2.1 и запишем выражение для проекции силы тяги на полускоростную систему координат. Тогда

$$\begin{aligned} R_{x_*} &= \bar{R} \cdot \bar{i}_* = R(\bar{i} \cdot \bar{i}_*) = R \cdot \cos(x \wedge x_*) = R \cos \alpha \cos \beta \approx R; \\ R_{y_*} &= R \cdot \cos(x \wedge y_*) = R \sin \alpha \cos \gamma_c + R \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_c \approx R \cdot \alpha; \\ R_{z_*} &= R \cos(x \wedge z_*) = R \sin \alpha \sin \gamma_c - R \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_c \approx -R \cdot \beta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Приближенные равенства имеют место в случае, когда углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma_c$  малы.

Сила тяжести ЛА  $\bar{G}$  приложена в его центре масс, направлена по местной вертикали вниз и, следовательно, расположена в плоскости  $O_0x_cy_c$  стартовой СК. Представим силу тяжести в виде  $\bar{G} = -G \cdot \bar{j}_c$ . Тогда проекции силы тяжести на оси связанной СК:

$$\begin{aligned} G_x &= \bar{G} \cdot \bar{i} = -G(\bar{j}_c \cdot \bar{i}) = -G \cos(y_c \wedge x) = -G \sin \vartheta; \\ G_y &= -G \cos(y_c \wedge y) = -G \cos \vartheta \cos \gamma; \\ G_z &= -G \cos(y_c \wedge z) = G \cos \vartheta \sin \gamma. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Проекция силы тяжести на оси полускоростной СК:

$$\begin{aligned} G_{x_*} &= \bar{G} \cdot \bar{i}_* = -G(\bar{j}_c \cdot \bar{i}_*) = -G \cos(y_c \wedge x_*) = -G \sin \theta; \\ G_{y_*} &= -G \cos(y_c \wedge y_*) = -G \cos \theta; \\ G_{z_*} &= 0, (y_c \perp z_*). \end{aligned} \quad (2.5)$$

## 2.2. Выражения для проекций аэродинамических сил на полускоростные и связанные оси

Аэродинамические силы, действующие на поверхность ЛА, можно привести к одной результирующей силе  $\vec{F}_A$ , проходящей через центр масс и называемой *полной аэродинамической силой*. Аэродинамические моменты можно привести к одному результирующему моменту  $\vec{M}_A$ , действующему относительно центра масс ЛА и называемому *полным аэродинамическим моментом*. Величина и направление векторов  $\vec{F}_A$  и  $\vec{M}_A$  зависят от ряда факторов, в том числе от ориентации ЛА относительно вектора скорости  $\vec{V}$ , плотности воздуха и т.д.

Аэродинамические силы являются распределенными.  $\vec{F}_A$  – полная аэродинамическая сила, равнодействующая всех распределенных сил, приложена в некоторой точке на оси ЛА, которая называется центром давления.

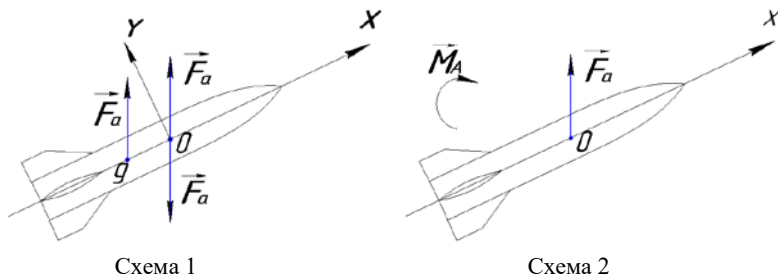


Рис. 2.2. Силы, приложенные к ЛА

Эту силу, приложенную к центру давления, можно заменить силой, приложенной к центру масс, и парой сил, момент которых равен главному моменту аэродинамических сил относительно центра масс (схема 1, рис. 2.2). Схема 1 эквивалентна схеме 2, на которой  $\vec{M}_A$  – аэродинамический момент (момент от дополнительной пары сил).

Аэродинамические силы определяются из продувок модели ЛА в аэродинамических трубах и обычно задаются в виде проекций главного вектора аэродинамических сил  $\vec{F}_A$  на оси скоростной СК. Вектор  $\vec{F}_A$  представим в виде

$$\begin{aligned}\bar{F}_A &= F_{Ax_a} \bar{i}_a + F_{Ay_a} \bar{j}_a + F_{Az_a} \bar{k}_a \\ F_{Ax_a} &= -X, F_{Ay_a} = Y, F_{Az_a} = -Z;\end{aligned}\quad (2.6)$$

где  $F_{Ax}$ ,  $F_{Ay}$ ,  $F_{Az}$  – проекции  $\bar{F}_A$  на скоростные оси;  $X = \frac{1}{2} C_x \rho S V^2$  – сила лобового сопротивления (направлена против оси  $x_a, x_*$ );  $Y = \frac{1}{2} C_y \rho S V^2$  – подъёмная сила (по оси  $y_a$ );  $Z = \frac{1}{2} C_z \rho S V^2$  – боковая сила (против оси  $z_a$ );  $C_x, C_y, C_z$  – безразмерные аэродинамические коэффициенты;  $V$  – скорость центра масс;  $\rho$  – массовая плотность воздуха;  $S$  – характерная площадь.

При скольжении ЛА аэродинамическая боковая сила  $Z$  возникает в результате перераспределения воздушной нагрузки на его боковых поверхностях. Если скольжение ЛА происходит на правое полукрыло ( $\beta > 0$ ), то боковая сила будет направлена по отрицательной полуоси  $Oz_a$ . Таким образом,

$$\bar{F}_A = -X \bar{i}_a + Y \bar{j}_a - Z \bar{k}_a. \quad (2.7)$$

Аэродинамические коэффициенты  $C_x, C_y, C_z$  зависят в основном от формы ЛА, его ориентации относительно вектора воздушной скорости (т.е. от углов  $\alpha, \beta, \delta_B, \delta_H, \delta_\Theta$ ) и критериев аэродинамического подобия – чисел Маха ( $M = V/a$ , где  $a$  – скорость распространения звука в воздухе) и Рейнольдса ( $Re = Vl/\nu$ , где  $l$  – характерный размер,  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости воздуха):

$$\begin{aligned}C_x &= C_x(M, \alpha, \beta, \delta_B, \delta_H, \delta_\Theta); \\ C_y &= C_y(M, \alpha, \delta_B); \\ C_z &= C_z(M, \beta, \delta_H).\end{aligned}$$

Здесь  $\delta_H$  – угол отклонения рулей направления;  $\delta_B$  – угол отклонения рулей высоты;  $\delta_\Theta$  – угол отклонения элеронов.

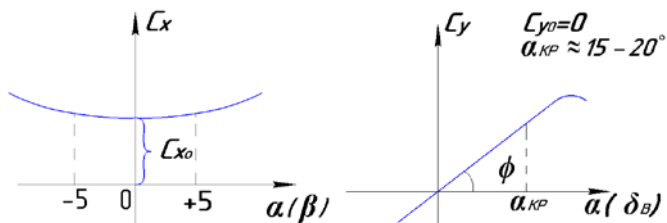
Аэродинамические коэффициенты  $C_x, C_y, C_z$  определяются экспериментально или путём математического моделирования процесса обтекания ЛА. Существуют также приближённые формулы:

$$\begin{aligned}
C_x &= C_{x0} + A\alpha^2 + B\beta^2 + D\delta_B^2 + E\delta_H^2 + C\delta_\gamma^2 + \dots \\
C_y &= C_{y0} + C_y^\alpha \alpha + C_y^{\delta_B} \delta_B, \\
C_z &= C_{z0} + C_z^\beta \beta + C_z^{\delta_H} \delta_H,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где  $C_y^\alpha = \frac{\partial C_y}{\partial \alpha}$  – частная производная коэффициента  $C_y$  по углу атаки  $\alpha$ ;  $C_y^{\delta_B} = \frac{\partial C_y}{\partial \delta_B}$  – частная производная коэффициента  $C_y$  по углу отклонения рулей высоты  $\delta_B$ ;  $C_z^\beta = \frac{\partial C_z}{\partial \beta}$  – частная производная коэффициента  $C_z$  по углу скольжения  $\beta$ ;  $C_z^{\delta_H} = \frac{\partial C_z}{\partial \delta_H}$  – частная производная коэффициента  $C_z$  по углу отклонения рулей направления  $\delta_H$ ;  $C_{x0}, C_{y0}, C_{z0}$  – значения соответствующих коэффициентов при нулевых угловых параметрах.

Коэффициенты  $C_{y0}$  и  $C_{z0}$  будут иметь место в том случае, если ЛА аэродинамически несимметричен. Для аэродинамически симметричного аппарата  $C_{y0}$  и  $C_{z0}$  равны нулю.

Графики зависимостей  $C_x(\alpha, \beta)$ ,  $C_y(\alpha)$ ,  $C_z(\beta)$  приведены на рис. 2.3,  $C_x(M)$  и  $C_y(M)$  – на рис. 2.4. На рис. 2.3  $\text{tg}\phi = C_y^\alpha$ ,  $\text{tg}\chi = C_z^\beta$  – угловые коэффициенты;  $C_{y0} = C_{z0} = 0$ ;  $C_y = C_y^\alpha \cdot \alpha$ ;  $C_z = C_z^\beta \cdot \beta$ .



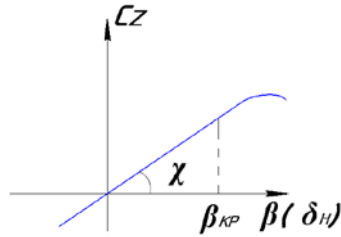


Рис. 2.3. Зависимости аэродинамических коэффициентов от углов атаки, скольжения и отклонения рулей

Подъёмная сила зависит от углов отклонения рулей  $\delta_H, \delta_B$  значительно меньше, чем от  $\alpha, \beta$ , кроме случая ЛА с поворотным крылом.

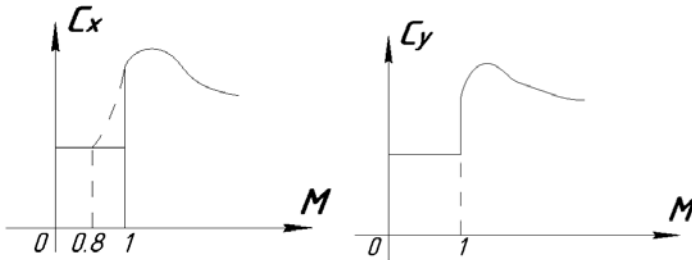


Рис. 2.4. Зависимость коэффициентов силы сопротивления и подъемной силы от числа Маха

Используя рис. 2.1, запишем выражения для проекции полной аэродинамической силы на оси полускоростной и связанной систем координат.

*Проекции на полускоростные оси:*

$$\begin{aligned} F_{Ax_*} &= F_{Ax_a} = -X; \\ F_{Ay_*} &= Y \cos \gamma_c + Z \sin \gamma_c; \\ F_{Az_*} &= Y \sin \gamma_c - Z \cos \gamma_c. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Учитывая малость углов  $\alpha, \beta$ , можно считать, что  $Y \sim \alpha, Z \sim \beta$ , а также если  $\gamma_c$  – малая величина, то  $\cos \gamma_c \approx 1; \sin \gamma_c \approx \gamma_c$ , следовательно,

$$\begin{aligned}
F_{Ax_*} &\approx -X; \\
F_{Ay_*} &\approx Y; \\
F_{Az_*} &\approx -Z;
\end{aligned}
\tag{2.10}$$

*Проекции на связанные оси:*

$$\begin{aligned}
F_{Ax} &= -X \cos \alpha \cos \beta + Y \sin \alpha + Z \cos \alpha \sin \beta; \\
F_{Ay} &= X \sin \alpha \cos \beta + Y \cos \alpha - Z \sin \alpha \sin \beta; \\
F_{Az} &= -X \sin \beta - Z \cos \beta.
\end{aligned}
\tag{2.11}$$

Учитывая малость углов  $\alpha, \beta$  можно считать, что  $Y \sim \alpha, Z \sim \beta$ , следовательно, можно записать:

$$\begin{aligned}
F_{Ax} &\approx -X; \\
F_{Ay} &\approx X\alpha + Y; \\
F_{Az} &\approx -X\beta - Z.
\end{aligned}
\tag{2.12}$$

Проекции аэродинамических сил  $X, Y$  и  $Z$  в связанной СК называются продольной, нормальной и поперечной аэродинамическими силами соответственно.

Теперь запишем уравнение поступательного движения ЛА в пространстве в проекциях на полускоростные и связанные оси, учитывая левые и правые части.

Рассмотрим сначала полускоростную СК  $(Ox_*, y_*, z_*)$ . Учитывая малость углов  $\alpha, \beta, \gamma_c$ , запишем:

$$\begin{cases} m \frac{dV}{dt} = R - G \sin \theta - X; \\ mV \frac{d\theta}{dt} = R\alpha - G \cos \theta + Y; \\ -mV \cos \theta \frac{d\Psi}{dt} = -R\beta - Z. \end{cases}
\tag{2.13}$$

Рассмотрим связанную СК  $(Oxyz)$ . Учитывая малость углов и угловых скоростей  $\alpha, \beta, \gamma_c, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ , запишем:



$$\begin{cases} m \frac{dV_x}{dt} = R - G \sin \vartheta - X; \\ m \left( \frac{dV_y}{dt} + \omega_z V_x \right) = -G \cos \vartheta + X\alpha + Y; \\ m \left( \frac{dV_z}{dt} - \omega_y V_x \right) = G\gamma \cos \vartheta - X\beta - Z; \end{cases} \quad (2.14)$$

$$V_x \approx V;$$

$$V_y \approx -V\alpha;$$

$$V_z \approx V\beta.$$

### 2.3. Аэродинамические моменты

Полный аэродинамический момент, действующий на ЛА, обычно раскладывают на составляющие по осям связанной системы координат (рис. 2.5):

$$\bar{M}_A = M_{Ax} \bar{i} + M_{Ay} \bar{j} + M_{Az} \bar{k}; \quad (2.15)$$

здесь  $M_{Ax} = \frac{1}{2} m_x \rho S V^2 l$  – аэродинамический момент крена;

$M_{Ay} = \frac{1}{2} m_y \rho S V^2 l$  – аэродинамический момент рыскания;

$M_{Az} = \frac{1}{2} m_z \rho S V^2 l$  – аэродинамический момент тангажа, где  $V$  – скорость центра масс;  $S$  – характерная площадь;  $\rho$  – массовая плотность воздуха (среды);  $l$  – характерная длина;  $m_x, m_y, m_z$  – безразмерные ко-

эффициенты аэродинамических моментов крена, рыскания и тангажа.

В качестве характерной площади может быть выбрана площадь миделя, диаметральной или другая площадь.

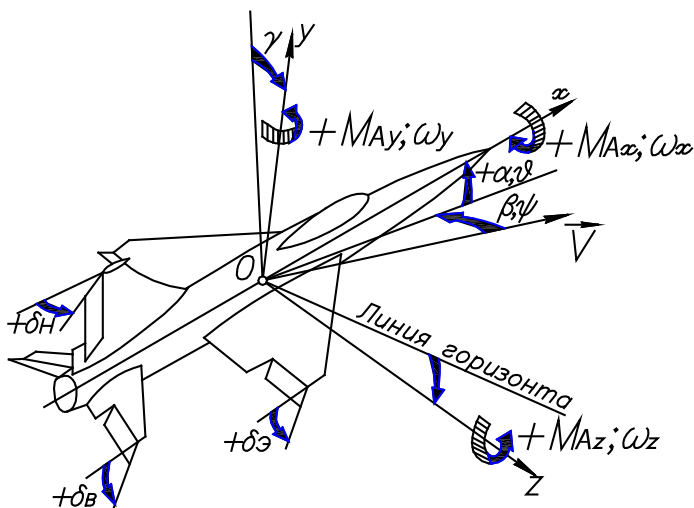


Рис. 2.5. Аэродинамические моменты

На рис. 2.5 стрелками показаны положительные направления отсчета моментов, угловых скоростей, углов отклонения органов управления, углов атаки, скольжения, тангажа, рыскания и крена. Отклонением аэродинамических органов управления создаются управляющие моменты, обеспечивающие требуемое изменение ориентации ЛА относительно Земли и воздушного потока.

Сформулируем общее правило знаков, определяющее знак отклонения органа управления от нейтрального положения. Отклонение органа управления от нейтрального положения считается положительным, если при этом образуется отрицательный управляющий момент. Соответственно отклонение считается отрицательным, если оно приводит к появлению положительного управляющего момента. Знак управляющего момента определяется по общепринятому правилу механики: проекция момента, приложенная к материальному телу, на направление, определяемое единичным вектором  $e^0$ , считается положительной, если она вызывает вращение тела вокруг данного вектора против часовой стрелки при условии, что это вращение наблюдается со стороны положительного направления вектора  $e^0$ .

Величина и направление полного аэродинамического момента зависят от тех же факторов, что и величины аэродинамических сил, и, кроме того, от некоторых дополнительных факторов (например, угловой скорости ЛА).

Проведенные в аэродинамике исследования показали, что имеет место следующая преимущественная зависимость коэффициентов аэродинамических моментов от различных параметров:

$$\begin{aligned} m_x &= m_x(M, \alpha, \beta, \delta_h, \delta_\omega, \bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y); \\ m_y &= m_y(M, \beta, \delta_h, \bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\beta}, \bar{\delta}_h); \\ m_z &= m_z(M, \alpha, \delta_b, \bar{\omega}_z, \bar{\alpha}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

здесь  $\delta_h$  – угол отклонения рулей направления;  $\delta_\omega$  – угол отклонения элеронов;  $\delta_b$  – угол отклонения рулей высоты; безразмерные величины:  $\bar{\omega}_x = \frac{\omega_x l}{V}$ ,  $\bar{\omega}_y = \frac{\omega_y l}{V}$ ,  $\bar{\omega}_z = \frac{\omega_z l}{V}$ ,  $\bar{\alpha} = \frac{\dot{\alpha} l}{V}$ ,  $\bar{\beta} = \frac{\dot{\beta} l}{V}$ ,  $\bar{\delta}_h = \frac{\dot{\delta}_h l}{V}$ .

Безразмерные коэффициенты моментов  $m_x, m_y, m_z$  являются функциями только безразмерных параметров. Так как величины  $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\delta}_h$  имеют размерность 1/с, то вместо них вводят безразмерные угловые скорости  $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$  и безразмерные производные  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\delta}_h$ .

На практике для определения коэффициентов аэродинамических моментов используются линейные аппроксимации:

$$\begin{aligned} m_x &= m_{x0}(\alpha, \beta) + m_x^{\delta_h} \delta_h + m_x^{\delta_\omega} \delta_\omega + m_x^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\omega}_y} \bar{\omega}_y + \dots; \\ m_y &= m_{y0} + m_y^\beta \beta + m_y^{\delta_h} \delta_h + m_y^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x + m_y^{\bar{\omega}_y} \bar{\omega}_y + m_y^{\bar{\beta}} \bar{\beta} + m_y^{\bar{\delta}_h} \bar{\delta}_h; \\ m_z &= m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_b} \delta_b + m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z + m_z^{\bar{\alpha}} \bar{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $m_{x0}(\alpha, \beta)$  – сложная нелинейная функция, зависящая от  $\alpha$  и  $\beta$ . Часто эту зависимость не учитывают, принимая  $m_{x0}$  постоянной;  $m_{y0}, m_{z0}$  – постоянные величины. Производные коэффициента момента по какому-либо углу принято называть *статическими производными*, а производные по скорости изменения того или иного угла – *вращательными производными*. Таким образом,  $m_z^\alpha, m_z^{\delta_b}, m_y^\beta, m_y^{\delta_h}, m_x^{\delta_\omega}, m_x^{\delta_\omega}$  – статические производные, а  $m_z^{\bar{\omega}_z}, m_z^{\bar{\alpha}}, m_y^{\bar{\omega}_x}, m_y^{\bar{\omega}_y}, m_y^{\bar{\beta}}, m_y^{\bar{\delta}_h}, m_x^{\bar{\omega}_x}, m_x^{\bar{\omega}_y}$  – вращательные.

Число Маха входит во все производные. Из формул для  $m_x$  и  $m_y$  видно, что коэффициент момента крена зависит от коэффициента момента рыскания, и наоборот. Связь между коэффициентами моментов рыскания и крена – перекрёстная аэродинамическая. Момент тангажа зависит только от параметров, влияющих на тангаж.

Подставив коэффициент момента тангажа  $m_z$  в формулу для определения аэродинамического момента тангажа  $M_{Az}$ , рассмотрим физический смысл каждого компонента:

$$M_{Az} = \frac{1}{2} m_z \rho S V^2 l = \frac{1}{2} m_{z0} \rho S V^2 l + \frac{1}{2} m_z^\alpha \alpha \rho S V^2 l + \frac{1}{2} m_z^{\delta_B} \delta_B \rho S V^2 l + \frac{1}{2} m_z^{\bar{\omega}_z} \bar{\omega}_z \rho S V l^2 + \frac{1}{2} m_z^{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} \rho S V l^2. \quad (2.18)$$

Момент тангажа состоит из суммы моментов, каждый из которых определяется соответствующим фактором: 1-е слагаемое – момент от аэродинамической асимметрии, зависит от коэффициента  $m_{z0}$  при  $\alpha, \delta_B, \bar{\omega}_z, \bar{\alpha} = 0$ ; 2-е – стабилизирующий момент; 3-е – управляющий момент; 4-е – тушащий (демпфирующий) момент; 5-е – момент от запаздывания скоса потока.

**Стабилизирующий момент.** Стабилизирующий момент тангажа возникает при наличии угла атаки  $\alpha$ :

$$M_{зст} = \frac{1}{2} m_z^\alpha \alpha \rho S V^2 l, \quad (2.19)$$

где  $m_z^\alpha = \frac{\partial m_z}{\partial \alpha}$  – коэффициент статической устойчивости.

Введем понятие статической устойчивости ЛА. ЛА называется *статически устойчивым*, если при появлении угла атаки  $\alpha$  возникает стабилизирующий аэродинамический момент, который стремится уменьшить этот угол по абсолютной величине, т.е.

$$m_z^\alpha < 0 \text{ – условие статической устойчивости.}$$

Конструктивно статическая устойчивость обеспечивается наличием хвостового оперения (рис. 2.6).

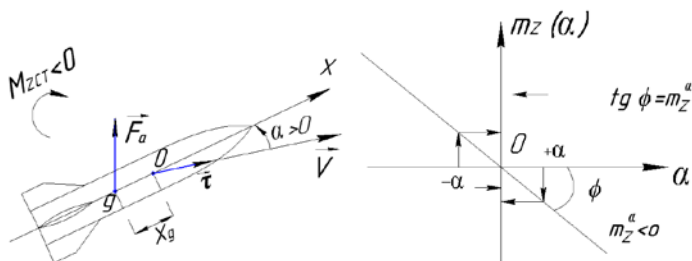


Рис. 2.6. Обеспечение статической устойчивости наличием хвостового оперения

Случай статически неустойчивого ЛА,  $M_{z\text{ст.}} > 0$  (рис. 2.7):

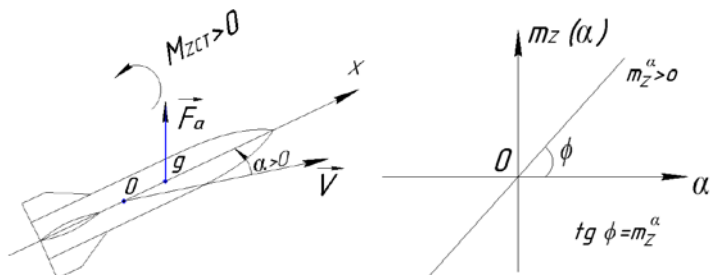


Рис. 2.7. Статически неустойчивый ЛА

Кривая, показанная на рис. 2.6, характеризуется тем, что тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке пересечения кривой с осью абсцисс, отрицателен:  $m_z^\alpha < 0$ . Если вывести ЛА из состояния равновесия, увеличив или уменьшив угол атаки, то на него будет действовать аэродинамический момент, стремящийся уменьшить угол атаки по абсолютной величине, т.е. направленный всегда в сторону положения равновесия. Этот момент стремится повернуть ось ЛА к вектору скорости центра масс  $\vec{V}$ . В данном случае ЛА будет обладать продольной статической устойчивостью.

Аэродинамический момент, вызванный отклонением от положения равновесия и направленный в сторону равновесия, иногда называют *восстанавливающим*. В случае, изображенном на рис. 2.7, тангенс угла наклона моментной кривой в точке ее пересечения с осью абсцисс положителен:  $m_z^\alpha > 0$ . Имеет место продольная статическая неустойчивость, так как при отклонении ЛА в любую сторону от положения равновесия возникает момент, направленный всегда в ту же

сторону. Этот момент стремится «увести» ось снаряда от направления вектора скорости движения центра масс  $\bar{V}$ , т.е. увеличить угол атаки по абсолютной величине. При следовании ЛА по траектории этот угол может стать таким большим, что ось ЛА развернется в направлении, противоположном направлению вектора скорости движения центра масс. Такой момент называют иногда *прокидывающим*.

Для обеспечения статической устойчивости центр масс должен находиться впереди центра давления ЛА. Если центр масс лежит позади центра давления, то ЛА статически неустойчив. Для стабилизации статически неустойчивого ЛА ему придают большую угловую скорость относительно собственной оси:  $\omega_x \approx 200 \div 300$  об/с, при этом он приобретает свойства гироскопа.

**Управляющий момент.** Управляющий момент зависит от отклонения руля высоты  $\delta_b$ :

$$M_{z \text{ упр}} = \frac{1}{2} m_z^{\delta_b} \delta_b \rho S V^2 l. \quad (2.20)$$

Для регулирования направления полета ЛА необходимо использовать нормальную управляющую силу  $N_y$  (проекцию равнодействующей аэродинамических и реактивных сил на нормаль к траектории). Изменение величины нормальной управляющей силы требует поворота корпуса ЛА относительно вектора скорости на некоторый угол (атаки, скольжения или крена). Для поворота корпуса необходимо приложить к ЛА соответствующие моменты относительно центра масс, которые называются управляющими. Таким образом, органы управления воздействуют на величину нормальной управляющей силы путем создания управляющих моментов.

Управляющие моменты нужны не только для регулирования управляющих сил, но и для поддержания требуемой угловой ориентации корпуса ЛА в пространстве, т.е. для его угловой стабилизации. Это связано с тем, что на ЛА непрерывно действуют возмущения, вызванные его несимметрией, эксцентриситетом силы тяги и воздействием неспокойной атмосферы.

При отклонении руля высоты  $\delta_b$  возникает управляющий момент  $M_{z \text{ упр}}$ , который обеспечивает поворот ЛА на требуемый угол атаки  $\alpha$ . На рис. 2.8 представлены моментные кривые для двух схем ЛА: нормальной аэродинамической схемы и схемы «утка».

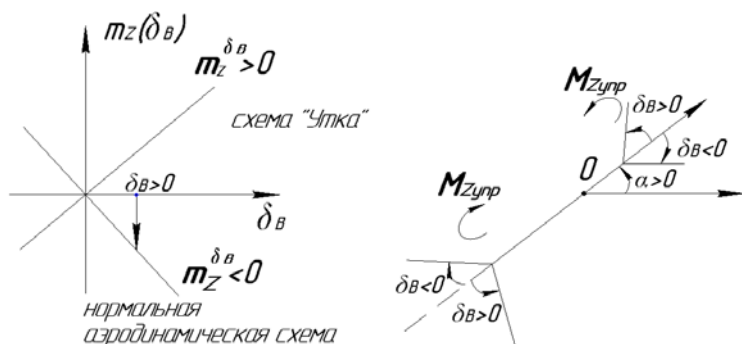


Рис. 2.8. Управляющий момент

**Тушащий (демпфирующий) момент** – часть момента, которая зависит от угловой скорости. Возникает при наличии угловой скорости вращения (рис. 2.9). Тушащий момент направлен против угловой скорости:

$$M_{\text{зтуш}} = \frac{1}{2} m_z^{\bar{\omega}_z} \omega_z \rho S V l^2; \quad (2.21)$$

$$m_z^{\bar{\omega}_z} = \frac{\partial m_z}{\partial \left( \frac{\omega_z l}{V} \right)}; \quad m_z^{\bar{\omega}_z} < 0.$$

На рис. 2.9  $\vec{V}_A = \vec{V} + \bar{\omega}_z \times \vec{r}_A$ ;  $\alpha_A = \alpha + \Delta\alpha$ .

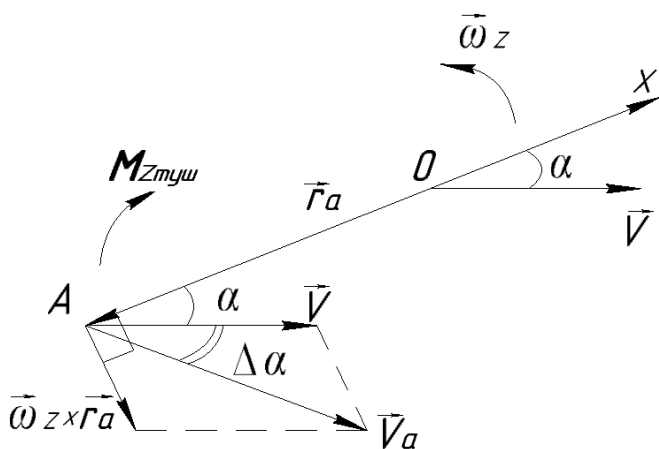


Рис. 2.9. Тушащий момент

Пусть ЛА, летящий со скоростью  $V$ , одновременно вращается вокруг оси  $Oz$  с угловой скоростью тангажа  $\omega_z$ . При вращении ЛА каждая точка его поверхности приобретает дополнительную скорость, направленную перпендикулярно к радиусу-вектору  $\vec{r}$ , соединяющему центр тяжести с этой точкой, и равную  $\vec{\omega}_z \times \vec{r}_a$ . Вследствие этого углы встречи потока с отдельными элементами поверхности получаются отличными от углов встречи при чисто поступательном движении. Изменение углов встречи приводит к появлению дополнительных аэродинамических сил, которые можно свести к равнодействующей  $\Delta R(\omega_z)$ , приложенной в центре тяжести, и моменту  $\Delta M(\omega_z)$  относительно поперечной оси, проходящей через центр тяжести. Величина  $\Delta R(\omega_z)$  очень мала, и в расчетах подъемной силы ею обычно пренебрегают. Момент  $\Delta M(\omega_z)$  при полете на докритических углах атаки препятствует вращению, поэтому его называют тушащим (демпфирующим) моментом, который нужно учитывать.

Тушащий момент способствует затуханию колебаний, возникающих при отклонении ЛА от положения равновесия или при переходе от одного положения равновесия к другому. Таким образом, тушащий момент является важным фактором, улучшающим качество переходных процессов.

**Момент от запаздывания скоса потока.** Имеет нестационарную природу, т.е. возникает, когда есть производная  $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$ :

$$M_{z \text{ зап.ск.}} = \frac{1}{2} m_z^{\bar{\alpha}} \dot{\alpha} S V l^2. \quad (2.22)$$

При неустановившемся движении угол атаки крыла изменяется с течением времени со скоростью  $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}$ . В соответствии с изменением угла атаки изменяется и скос потока за крылом. Однако скошенный поток достигает горизонтального оперения не мгновенно, а с некоторым запаздыванием по времени  $\Delta t$ , зависящим от расстояния между передними и задними аэродинамическими поверхностями и от скорости потока:  $\Delta t = \frac{x_{ГО} - x_{КР}}{V}$ , где  $x_{ГО}$  – координата центра давления горизонтального оперения;  $x_{КР}$  – координата центра давления



крыла. Поэтому угол скоса потока в области оперения в данный момент времени  $t$  будет определяться углом атаки, который крыло имело раньше, т.е. в момент времени  $t - \Delta t$ . Изменение угла атаки  $\alpha$  крыла за время  $\Delta t$ :

$$\Delta\alpha = \frac{d\alpha}{dt} \Delta t = \frac{d\alpha}{dt} \frac{x_{ГО} - x_{КР}}{V}.$$

За время  $\Delta t$  угол атаки крыла изменится на угол  $\Delta\alpha$ , а угол скоса потока – на величину  $\Delta\epsilon$ . Вследствие запаздывания скоса потока угол атаки горизонтального оперения будет отличаться от угла атаки при установившемся движении на величину  $\Delta\alpha = -\Delta\epsilon$ . Это является причиной появления дополнительной подъемной силы горизонтального оперения и дополнительного момента тангажа. Этот момент препятствует изменению угла атаки, действует в ту же сторону, что и демпфирующий момент.

Явление запаздывания скоса потока возникает не только при изменении угла атаки  $\alpha$ , но и при изменении угла отклонения руля высоты  $\delta_v$ , если руль располагается на передней аэродинамической поверхности ЛА, т.е. на ЛА, выполненном по схеме «утка».

Момент запаздывания скоса потока необходимо учитывать для ЛА с развитым оперением, так как в этом случае по величине он может достигать 20...25% от тушающего момента.

**Шарнирные моменты.** Кроме указанных выше моментов в процессе управления, большое значение имеют шарнирные моменты – моменты аэродинамических сил, действующих на органы управления (рули, элероны) относительно их осей вращения. Хотя шарнирные моменты в явном виде отсутствуют в уравнениях вращательного движения, они оказывают значительное влияние на характер управляемого полёта. Поясним это положение. Для того чтобы отклонить воздушные рули, нужно преодолеть их шарнирный момент. Чем больше величина команды, вырабатываемой системой управления, тем больше требуемое отклонение рулей и тем большую мощность должен развить силовой привод рулей для отработки данной команды. Но так как мощность рулевой машинки (РМ) ограничена, то при увеличении команды управления рули перестанут отклоняться. Это сразу отразится на величине располагаемых перегрузок ЛА, т.е. на его манёвренности. Очевидно также, что чем больше шарнирный момент, тем меньше скорость отклонения рулей и тем медленнее будет реакция ЛА на команду управления. Таким образом, величина шарнирно-

го момента влияет на манёвренные свойства ЛА и на точность управления его полётом.

Схема возникновения шарнирного момента представлена на рис. 2.10, где  $\bar{N}_p$  – нормальная к плоскости руля составляющая аэродинамической силы, действующей на руль (перпендикулярна оси руля);  $h$  – расстояние от центра давления руля до оси его вращения;  $h > 0$ , если центр давления руля позади оси вращения руля (точки  $O$ );  $\delta_v > 0$ , если отсчитывается против часовой стрелки;  $\bar{N}_p > 0$ , если направлена вверх.

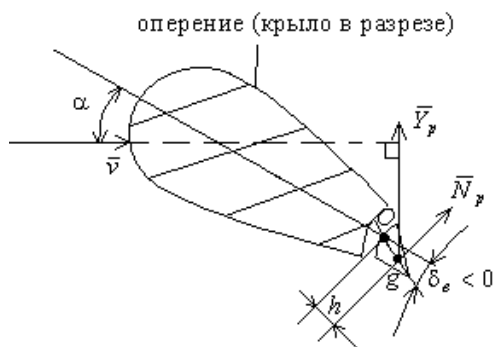


Рис. 2.10. Схема возникновения шарнирного момента

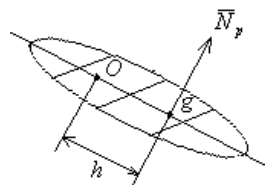


Рис. 2.11. Шарнирный момент силы

Шарнирный момент (рис. 2.11) – момент силы  $N_p$ ; он стремится уменьшить по модулю угол  $\delta_v$ :

$$\begin{aligned} M_{\text{ш}} &= -N_p h; \\ Y_p &= N_p \cos(\alpha + \delta_v) \approx N_p; \\ M_{\text{ш}} &= -Y_p h; \\ M_{\text{ш}} &= -\frac{1}{2} C_{y_p} \rho S_p V^2 h. \end{aligned}$$

где  $Y_p$  – подъёмная сила руля (перпендикулярна скорости),  $\alpha$  – угол между хордой крыла и скоростью потока, обтекающего оперение,  $V \approx V_{\text{оперения}}$  – скорость центра масс.

Обычно шарнирный момент

$$M_{\text{ш}} = -\frac{1}{2} m_{\text{ш}} \rho S_{\text{р}} V^2 b_{\text{ах}}, \quad (2.23)$$

где  $m_{\text{ш}}$  – безразмерный коэффициент шарнирного момента,  $b_{\text{ах}}$  – средняя аэродинамическая хорда руля (рис. 2.12),  $S_{\text{р}}$  – площадь поверхности руля.

Коэффициент шарнирного момента

$$m_{\text{ш}} = -\frac{Y_{\text{р}} h}{\frac{1}{2} \rho S_{\text{р}} V^2 b_{\text{ах}}} = \frac{C_{\text{ур}} h}{b_{\text{ах}}}. \quad (2.24)$$

Здесь  $C_{\text{ур}} = C_y^{\delta_{\text{в}}} \delta_{\text{в}}$  – коэффициент подъемной силы руля.

Увеличение размеров ЛА и скорости его полёта приводит к резкому увеличению шарнирного момента. Если при сохранении условий обтекания размер рулей увеличить в два раза, то шарнирный момент увеличится в восемь раз. Снизить величину шарнирного момента можно путём уменьшения коэффициента  $m_{\text{ш}}$ . Ос-

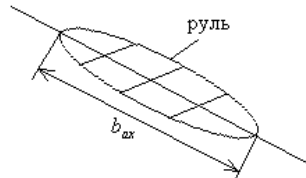


Рис. 2.12. Средняя аэродинамическая хорда руля

новное средство достижения этой цели – применение аэродинамической компенсации руля высоты, так называемая осевая компенсация, смысл которой – сместить ось вращения ближе к центру давления, чтобы уменьшить плечо силы  $\bar{N}_{\text{р}}$  (путём сдвига оси вращения назад от передней кромки).

## 2.4. Понятие маневренности. Выражения для перегрузок

*Маневренность* – это способность управляемого ЛА совершать полёт по криволинейной траектории.

Под маневренностью ЛА будем понимать возможную для него быстроту изменения скорости полета по величине и направлению (т.е. изменение углов наклона траектории  $\Theta$  и курса  $\Psi$ ). При оценке маневренности нас будет интересовать свойство ЛА создавать ускорение. При этом необходимо исключить из рассмотрения ускорение силы тяжести. Таким образом мы приходим к понятию перегрузки.

Под *перегрузкой* понимают отношение результирующих сил, действующих на ЛА (за исключением гравитационных и инерционных), к произведению массы ЛА на ускорение свободного падения:

$$\bar{n} = \frac{\bar{F}_A + \bar{R}}{mg}. \quad (2.25)$$

Модуль вектора перегрузки является величиной безразмерной, что делает ее удобной для сравнительных оценок. Перегрузки определяются энергетическими ресурсами ракеты, возможностями ее аэродинамической схемы, эффективностью органов управления и системы управления в целом. Суммарный вектор перегрузки может определяться его составляющими по осям принятой системы координат. В связанной системе координат

$$\begin{aligned} \bar{n} &= n_x \bar{i} + n_y \bar{j} + n_z \bar{k}; \\ n_x &= \frac{F_{Ax} + R_x}{mg} = \frac{R - X}{mg}; \\ n_y &= \frac{F_{Ay} + R_y}{mg} = \frac{X\alpha + Y}{mg}; \\ n_z &= \frac{F_{Az} + R_z}{mg} = \frac{-X\beta - Z}{mg}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_z$  – соответственно продольная, нормальная и поперечная перегрузки. Заметим, что для проекций перегрузок обычно пользуются приближенными выражениями, положив  $\cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin \beta \approx \beta$ .

В полускоростной системе координат

$$\begin{aligned} \bar{n} &= n_{x*} \bar{i}_* + n_{y*} \bar{j}_* + n_{z*} \bar{k}_*; \\ n_{x*} &= \frac{F_{Ax*} + R_{x*}}{mg} = \frac{R - X}{mg}; \\ n_{y*} &= \frac{F_{Ay*} + R_{y*}}{mg} = \frac{R\alpha + Y}{mg}; \\ n_{z*} &= \frac{F_{Az*} + R_{z*}}{mg} = \frac{-R\beta - Z}{mg}; \end{aligned} \quad (2.27)$$

где  $x_*$  – направление касательной к траектории;  $y_*$  – направление нормали к траектории;  $z_*$  – направление на бинормаль;  $n_{x*}$ ,  $n_{y*}$ ,  $n_{z*}$  – соответственно касательная (тангенциальная), нормальная скоростная и боковая перегрузки. Заметим, что  $n_{x*} = n_x$ .

Пользуясь понятием перегрузки, запишем уравнения движения центра масс через перегрузки. Из (2.13) получим

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = \frac{R}{m} - g \sin \theta - \frac{X}{m}; \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{R\alpha}{mV} - \frac{g \cos \theta}{V} + \frac{Y}{mV}; \\ \frac{d\Psi}{dt} = \frac{R\beta}{mV \cos \theta} + \frac{Z}{mV \cos \theta}. \end{cases} \quad (2.28)$$

Тогда

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = g(n_x - \sin \theta); \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{V}(n_{y*} - \cos \theta); \\ \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{g}{V \cos \theta} n_{z*}. \end{cases} \quad (2.29)$$

Из этой системы можно выразить перегрузки через кинематические параметры  $V$ ,  $\theta$ ,  $\Psi$ :

$$\begin{cases} n_x = \frac{1}{g} \frac{dV}{dt} + \sin \theta; \\ n_{y*} = \frac{V}{g} \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta; \\ n_{z*} = -\frac{V}{g} \cos \theta \frac{d\Psi}{dt}. \end{cases} \quad (2.30)$$

Поскольку параметры  $V$ ,  $\theta$ ,  $\Psi$  определяют вектор скорости полета (его величину и направление), а правые части (2.30) содержат производные от этих параметров по времени, то проекции вектора перегрузки характеризуют способность ЛА изменять величину и направление скорости полета.

С помощью безразмерных уравнений движения (2.29) легко установить связь между величинами проекций перегрузок и характером траектории ЛА.

Полет ЛА является в данный момент времени равномерным, если  $n_x = \sin \theta$ , ускоренным, если  $n_x > \sin \theta$ , и замедленным, если  $n_x < \sin \theta$ .

На рис. 2.13, а показано влияние  $n_{y*}$  на вид траектории при движении в вертикальной плоскости, на рис. 2.13, б – влияние  $n_{z*}$  на вид траектории при движении в горизонтальной плоскости.

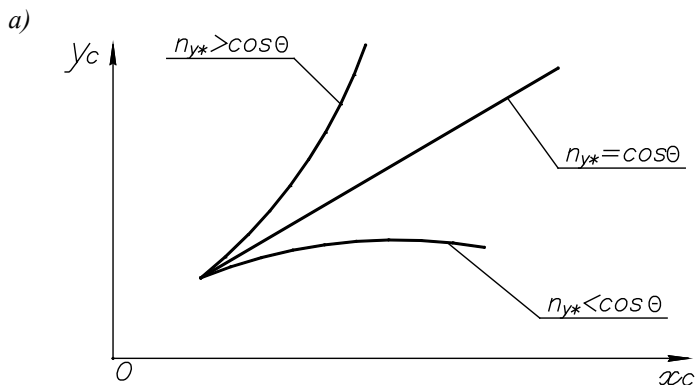


Рис. 2.13. Вид траектории в вертикальной плоскости в зависимости от  $n_{y*}$

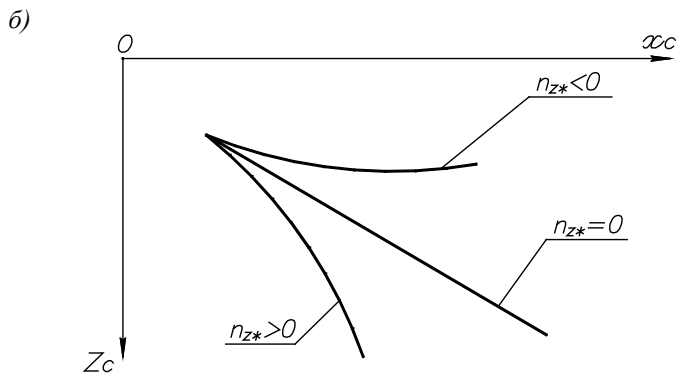


Рис. 2.13 (окончание)

Очевидно, что при полете в вертикальной плоскости  $n_{z*} = 0$ , в горизонтальной  $n_{y*} = 1$ . В случае прямолинейного полета  $n_{y*} = \cos \theta = \text{const}$  и  $n_{z*} = 0$ . При горизонтальном прямолинейном полете  $n_{y*} = 1$  и  $n_{z*} = 0$ , а при горизонтальном прямолинейном равномерном  $n_x = 0$ ,  $n_{y*} = 1$ ,  $n_{z*} = 0$ .

Величина радиуса кривизны траектории в каждой точке определяется нормальными перегрузками (рис. 2.14).

a)

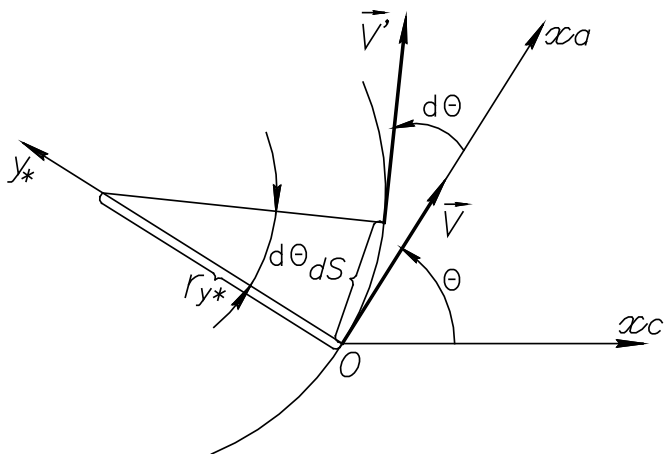
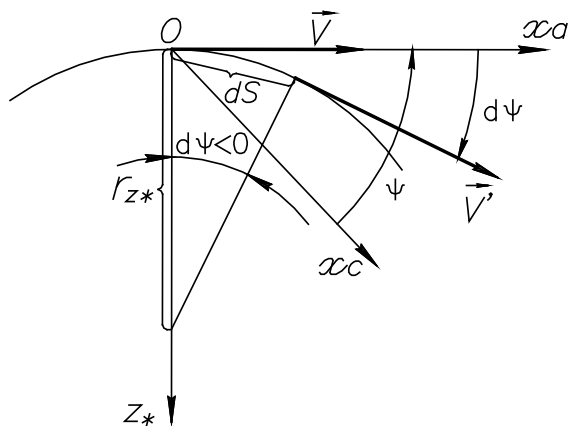


Рис. 2.14. Радиус кривизны в вертикальной (a) и горизонтальной (б) плоскости

б)



В вертикальной плоскости

$$r_{y*} = \frac{dS}{d\theta} = \frac{Vdt}{d\theta} = \frac{V}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)}.$$

Из (2.29) получаем, что радиус кривизны в вертикальной плоскости:

$$r_{y*} = \frac{V^2}{g(n_{y*} - \cos \theta)}, \quad (2.31)$$

в горизонтальной

$$r_{z*} = -\frac{dS}{d\Psi} = -\frac{Vdt}{d\Psi} = -\frac{V}{\left(\frac{d\Psi}{dt}\right)}.$$

Тогда из (2.29) получаем, что радиус кривизны в горизонтальной плоскости:

$$r_{z*} = \frac{V^2}{gn_{z*}} \cos \theta. \quad (2.32)$$

Как видно, величины радиусов кривизны траектории определяются нормальными перегрузками. С увеличением перегрузок  $n_{y*}$  и  $n_{z*}$  радиусы уменьшаются.

*Вектором перегрузки*  $\bar{n}$  часто называют отношение вектора ускорения центра масс к ускорению свободного падения, т.е.  $\bar{n} = \frac{\bar{W}}{g}$ , где  $\bar{W}$  – ускорение центра масс. В полускоростной системе координат

$$n_{x*} = \frac{W_{x*}}{g}; \quad n_{y*} = \frac{W_{y*}}{g}; \quad n_{z*} = \frac{W_{z*}}{g}, \quad (2.33)$$



где  $W_{x*} = \frac{dV}{dt}$ ;  $W_{y*} = V \frac{d\theta}{dt} = \frac{V^2}{r_{y*}}$ ,  $W_{z*} = -V \cos \theta \frac{d\Psi}{dt}$ . Чем выше пере-

грузки, тем больше соответствующие им угловые скорости касательной к траектории.

Различают также понятия *потребная* и *располагаемая* перегрузки. Нормальные перегрузки, действующие на ЛА при данных значениях скорости и высоты полета, определяются углами атаки, скольжения и отклонения органов управления. По известным элементам траектории можно вычислить перегрузки  $n_y$ ,  $n_z$ , которые должен развивать ЛА при полете по данной траектории. Эти перегрузки называются *потребными* ( $n_{\text{употр}}$ ,  $n_{\text{зпотр}}$ ). Они характеризуют определенные свойства траектории полета, например ее радиус кривизны.

*Располагаемая перегрузка* – это та часть перегрузки, которую мы можем изменять при управлении, или, иными словами, это нормальная перегрузка, которую может создать сбалансированный ЛА при максимальном отклонении органов управления. Она характеризует важнейшие маневренные качества ЛА, а именно его способность создавать нормальную к траектории силу, управляющую полетом.

Потребная перегрузка характеризует траекторию полета, в то время как располагаемая перегрузка характеризует свойства ЛА в рассматриваемой точке траектории. Сравнивая потребную перегрузку с располагаемой, можно установить возможность полета ЛА по данной траектории или возможность наведения ЛА на цель. Полет ЛА по требуемой траектории возможен только в том случае, если он способен во всех точках этой траектории развивать нормальную перегрузку, не меньшую по величине, чем потребная:

$$\begin{aligned} |n_{\text{урасп}}| &\geq |n_{\text{употр}}| + n_{\text{узап}}; \\ |n_{\text{зрасп}}| &\geq |n_{\text{зпотр}}| + n_{\text{ззап}}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где  $n_{\text{узап}}$ ,  $n_{\text{ззап}}$  – некоторый запас нормальной перегрузки.

### 3. ОРГАНЫ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЁТОМ. УПРАВЛЯЮЩИЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ

На ракету в полёте действуют аэродинамические, реактивные и гравитационные силы. Для управления ракетой посредством органов

управления можно использовать только аэродинамические и газодинамические (реактивные) силы.

Аэродинамические органы управления делятся на рулевые отклоняющие поверхности (рули), поворотные крылья и прерыватели воздушного потока (интерцепторы).

### 3.1. Принцип действия рулей и поворотных крыльев

Воздушный поток, обтекающий рули, приводит к появлению добавочных осевой и нормальной сил за счёт отклонения рулей от нейтрального положения.

Рассмотрим действие рулей высоты, которые управляют углом тангажа.

На рис. 3.1  $x$  – ось ЛА; точка  $O$  – центр масс (ЦМ) ЛА,  $\vec{V}$  – вектор скорости ЛА;  $\alpha > 0$  – угол атаки (больше нуля, если подъемная сила направлена вверх);  $\vec{Y}$  – подъемная сила,  $\vec{R}$  – тяга двигателя;  $\vec{X}$  – сила лобового сопротивления;  $\vec{n}$  – орт нормали к траектории ЦМ;  $\vec{\tau}$  – орт касательной к траектории ЦМ;  $\vec{X}_p, \vec{Y}_p$  – осевая и нормальная силы, действующие на руль.

Силы, действующие на руль:

$$X_p = S_p q \left( c_{xp0} + c_{xp}^{\delta_v^2} \delta_v^2 \right), \quad Y_p = S_p q c_{yp}^{\delta_v} \delta_v, \quad (3.1)$$

где  $q = \frac{\rho V^2}{2}$  – скоростной напор;  $c_{xp}^{\delta_v^2}$ ,  $c_{yp}^{\delta_v}$  – аэродинамические коэффициенты;  $c_{xp}$ ,  $c_{yp}$  – коэффициенты силы лобового сопротивления и подъемной силы руля.

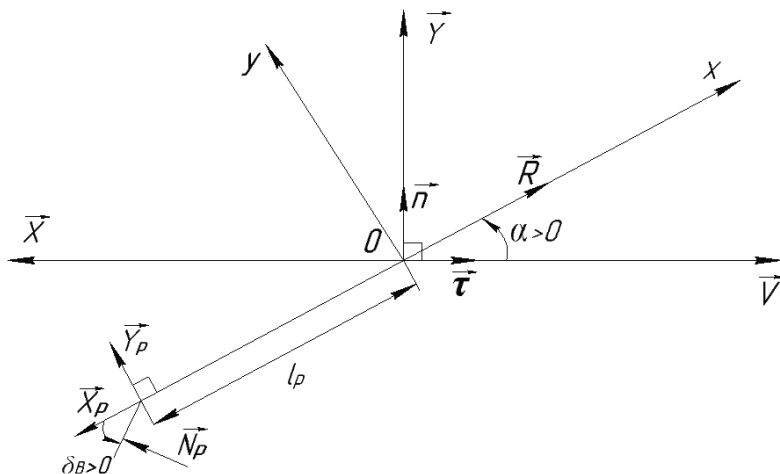


Рис. 3.1. Силы, действующие на рули высоты

Сила  $Y_p$  создает момент относительно оси  $z$ , который заставляет ЛА поворачиваться на угол атаки  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 M_{z_{\text{упр}}} &= -Y_p l_p = Sq m_{zp} l; \\
 Sq m_z^{\delta_B} l &= -l_p S_p q c_{yp}^{\delta_B}; \\
 m_z^{\delta_B} &= -\frac{c_{yp}^{\delta_B} l_p S_p}{Sl}; \quad m_{zp} = m_z^{\delta_B} \delta_B,
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

где  $S$  – характерная площадь ЛА,  $l$  – характерная длина ЛА.

Воздушные рули в зависимости от назначения ракеты могут располагаться в различных частях её корпуса. У баллистических ракет воздушные рули располагаются на задних кромках неподвижных стабилизаторов. Ракета имеет четыре руля, оси вращения которых лежат в плоскостях соответствующих стабилизаторов и перпендикулярны оси ракеты (рис. 3.2).

Рули II, IV называются рулями высоты. Они синхронно связаны друг с другом, т.е. имеют один привод. При их совместном отклонении от нейтрального положения возникает сила  $\pm Y_p$ , которая действует в вертикальной плоскости (крен стабилизирован) и управляет по углу тангажа.

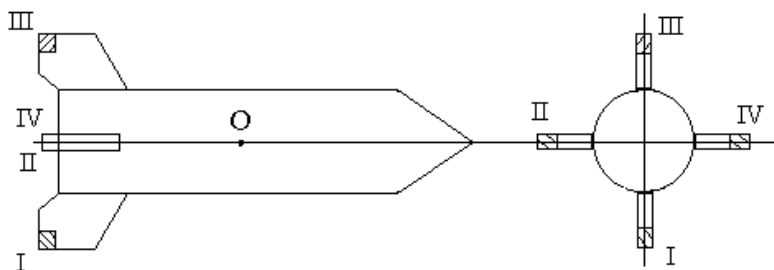


Рис. 3.2. Схема расположения воздушных рулей

Рули I, III расположены в вертикальной плоскости и используются для управления по углу рыскания  $\psi$  и крена  $\gamma$ . Для управления по углу рыскания они должны поворачиваться в одном направлении, создавая потребную боковую управляющую силу  $\pm Z_p$ , для парирования крена – в разные стороны, создавая необходимый крутящий момент  $M_{px}$ . Так как управление по углам  $\psi$  и  $\gamma$  должно осуществляться непрерывно и одновременно, рули I, III должны поворачиваться независимо друг от друга, для чего, в отличие от рулей II, IV, они имеют отдельные приводы.

У крылатых ракет, оперение и крылья которых используются не только для обеспечения статической устойчивости, но и для увеличения коэффициентов боковой и подъёмной сил  $c_y$  и  $c_z$ , рули по отношению к крыльям могут располагаться по трем аэродинамическим схемам:

1) нормальная схема – рули позади крыльев и ЦМ (рис. 3.3)

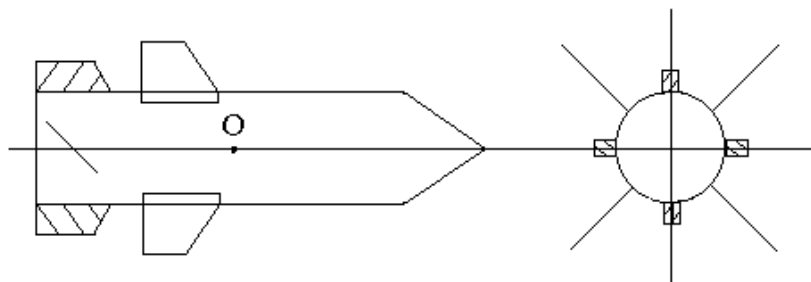


Рис. 3.3. Расположение рулей при нормальной аэродинамической схеме

2) схема «бесхвостка» (у противотанковых управляемых ракет и снарядов) – рули позади ЦМ, но не отдельно от крыльев, а на их задних кромках (рис. 3.4);

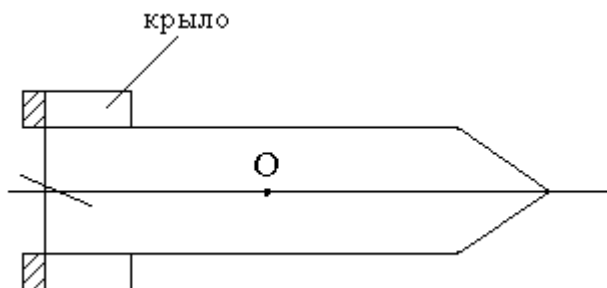


Рис. 3.4. Расположение рулей при аэродинамической схеме «бесхвостка»

3) схема «утка» – рули впереди крыльев и ЦМ (рис. 3.5).

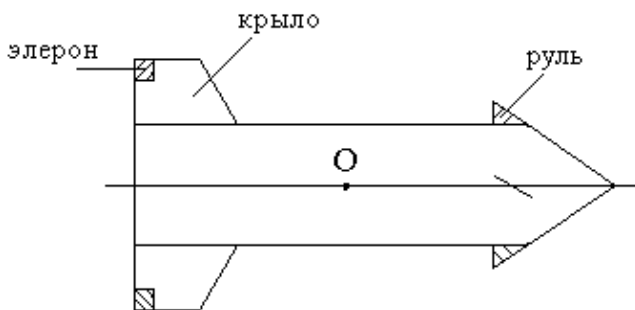


Рис. 3.5. Расположение рулей при аэродинамической схеме «утка»

Рассмотрим особенности этих схем. Сравним нормальную схему и схему «утка» на примере манёвра в вертикальной плоскости с набором высоты. «Бесхвостка» имеет такие же свойства, что и нормальная схема.

Пусть статически устойчивая ракета совершает полёт с нулевым углом атаки (рис. 3.6).

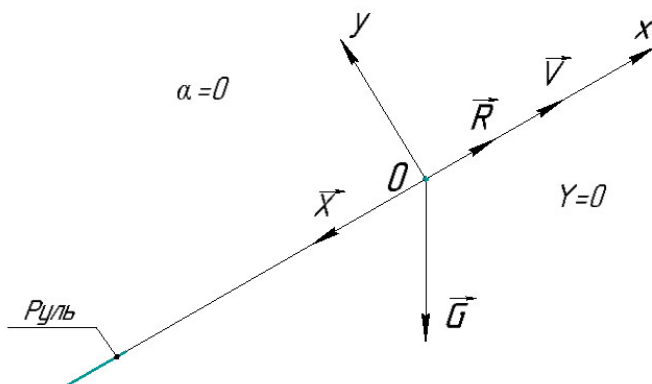


Рис. 3.6. Силы, действующие на статически устойчивую ракету

Требуется обеспечить манёвр с набором высоты. Чтобы повернуть ракету на угол атаки  $\alpha > 0$  в случае нормальной схемы, надо отклонить руль в отрицательном направлении  $\delta_b < 0$  (рис. 3.7).

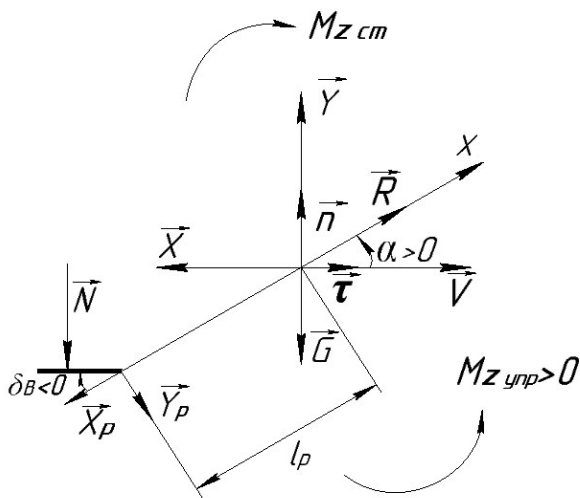


Рис. 3.7. Силы и моменты, действующие на ЛА, выполненный по нормальной схеме

В результате действия управляющего момента  $M_{зупр} = Y_p l_p$  ракета повернётся на  $\alpha > 0$  и появится стабилизирующий момент  $M_{зст}$ :

$$M_{\text{зст}} = \frac{1}{2} m_z^\alpha \alpha \rho S V^2 l < 0. \quad (3.3)$$

Ракета будет поворачиваться до тех пор, пока не наступит условие равновесия:

$$M_{\text{зст}} = M_{\text{зупр}}; \alpha = \alpha_6. \quad (3.4)$$

В результате появятся дополнительные силы:  $R \sin \alpha_6 + Y -$

$$-Y_p \cos \alpha_6 - X_p \sin \alpha_6; \quad Y = \frac{1}{2} c_y^\alpha \alpha \rho S V^2,$$

которые заставят ракету двигаться с набором высоты по отношению к естественной баллистической ( $\alpha = 0$ ) траектории.

Рассмотрим особенности реализации аналогичного манёвра в схеме «утка». В этом случае рули высоты должны быть повернуты на угол  $\delta_B > 0$  (рис. 3.8), в результате чего появится момент  $M_{\text{зупр}}$ , который при  $\alpha = \alpha_6$  уравнивается моментом  $M_{\text{зст}}$ :

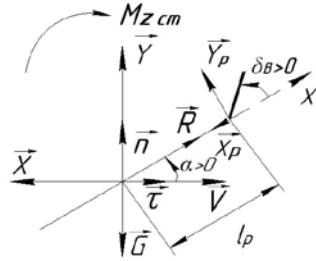


Рис. 3.8. Силы и моменты, действующие на ЛА, выполненный по схеме «утка»

$$M_{\text{зупр}} = Y_p l_p > 0; M_{\text{зст}} = M_{\text{зупр}}; M_{\text{зст}} < 0. \quad (3.5)$$

Появятся дополнительные силы  $R \sin \alpha_6 + Y + Y_p \cos \alpha_6 - X_p \sin \alpha_6$ , и ракета пойдет с набором высоты.

Заметим, что в случае нормальной схемы подъёмная сила рулей  $Y_p$  вычитается из общей подъёмной силы  $Y$ , а в схеме «утка»  $Y_p$  суммируется с общей подъёмной силой  $Y$ , увеличивая её, при этом в обеих схемах  $Y \gg Y_p$ .

На траекторию полёта существенно влияют силы тяги  $\bar{R}$  и подъёмная сила  $\bar{Y}$ . Рули, создавая маленькую нормальную силу ( $Y_p \ll Y$ ), создают заметный управляющий момент, который обеспечивает поворот ЛА на угол  $\alpha$ .

Сравним условия работы крыльев в нормальной схеме и в схеме «утка». Условия работы крыльев у ракет с нормальной аэродинамиче-

ской схемой лучше, так как они обтекаются невозмущённым потоком. В схеме «утка» при повороте рулей на крылья будет действовать скошенный поток, приводящий к возникновению крена, для парирования которого нужно принимать специальные меры. Условия работы рулей в схеме «утка» с точки зрения обтекания лучше, так как рули находятся в невозмущённом потоке. У ракет с нормальной схемой рули находятся в возмущённом потоке, вследствие чего могут возникнуть их вибрации. Однако угол атаки рулей в схеме «утка» больше, чем в нормальной схеме, и поэтому в схеме «утка» срыв обтекания может произойти при меньшем отклонении рулей, чем в нормальной схеме (рис. 3.9).

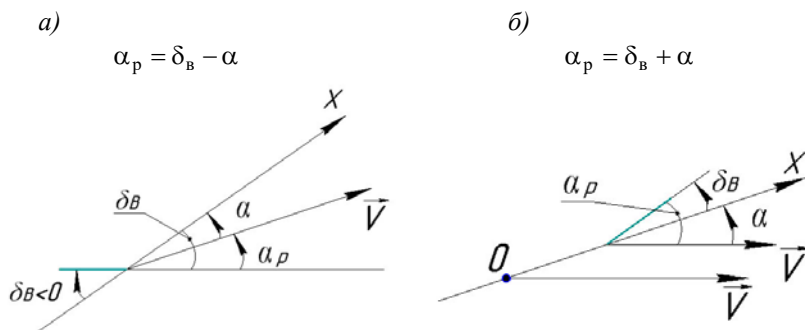


Рис. 3.9. Работа рулей при нормальной аэродинамической схеме (а) и схеме «утка» (б)

В нормальной схеме и «бесхвостке» все управляющие функции осуществляются четырьмя воздушными рулями, два из которых, управляющие рысканием и креном, имеют отдельные приводы, а два, управляющие тангажом, – общий привод.

В схеме «утка» вынесенные вперёд воздушные рули выполняют функции только рулей высоты и поворота (тангажом и рысканием), а креном управлять не могут, так как сами являются источником возникновения этого движения. Поэтому в схеме «утка» ракеты снабжаются ещё дополнительными рулями крена (элеронами), которые размещаются на задней кромке крыльев.

Статическая устойчивость и характеристики демпфирования в схеме «утка» больше, чем в других, так как крылья (стабилизаторы) и рули максимально раздвинуты относительно ЦМ, в то время как в нормальной схеме крылья размещены ближе к ЦМ, а плечи рулей меньше.



Аэродинамические органы управления могут выполняться в виде поворотных крыльев. Они располагаются несколько позади ЦМ, а на хвостовой части имеется дополнительное неподвижное оперение для обеспечения статической устойчивости.

Управляющая сила в вертикальной плоскости  $Y_{кр}$  создаётся за счёт поворота крыла относительно корпуса (рис. 3.10):

$$Y_{кр} = \frac{1}{2} c_{y^{\delta_v}} \delta_v \rho S_{кр} V^2 \quad (3.6)$$

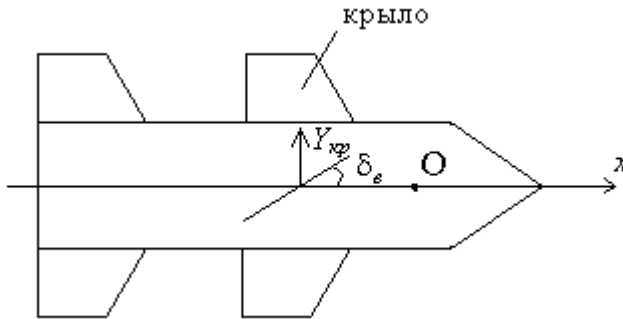


Рис. 3.10. Схема с поворотным крылом

Так как площадь крыльев больше, чем площадь рулей,  $S_{кр} \gg S_p$ , то необходимая управляющая сила  $Y_{кр}$  может быть создана при малых по сравнению с рулями углах поворота. Однако здесь необходим мощный привод для преодоления шарнирного момента. Такая аэродинамическая схема используется у крылатых ракет, предназначенных для быстрого маневрирования на траектории.

У ПТУРСов (противотанковых управляемых реактивных снарядов), для которых нужно обеспечить минимум веса на управление, используется управление с помощью прерывателей воздушного потока или интерцепторов.

*Интерцептор* – тонкая пластина, расположенная в середине или на задней кромке крыла перпендикулярно его поверхности. Интерцепторы приводят в колебательное движение с постоянной амплитудой и частотой. При этом если центр колебаний смещается от оси симметрии крыла, то возникает управляющая сила, так как колеблющийся интерцептор будет больше выдвигаться над поверхностью

крыла, к которой сдвинут его центр колебаний (рис. 3.11). Происходит перераспределение давлений воздуха по крылу, и появляется соответствующая управляющая сила.

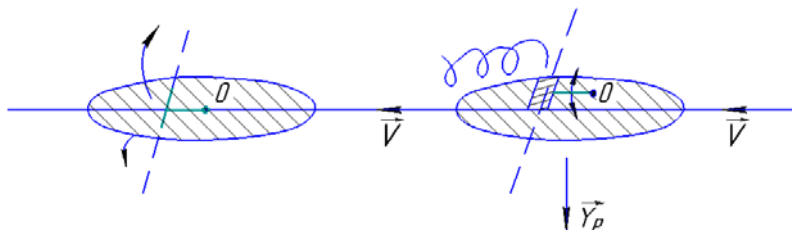


Рис. 3.11. Действие интерцепторов: точка  $O$  – центр колебаний

Интерцепторное управление характеризуется малым весом органов управления и привода, но создаваемые им управляющие силы малы и не могут обеспечить резкий манёвр на траектории. В некоторых ракетах, например «Сайдуиндер» (США), используются специальные аэродинамические органы управления, называемые роллеронами. Это элероны, внутри которых расположен массивный диск, вращающийся с большой угловой скоростью и имеющий свойства гироскопа. Ось вращения диска  $O_{yp}$  перпендикулярна плоскости элерона, которая может свободно вращаться вокруг оси  $z_p$ , расположенной в плоскости оперения. Перед пуском ракеты диск раскручивается до угловой скорости  $\bar{\Omega}_{yp}$ , которая во время полёта поддерживается воздействием набегающего потока воздуха, обтекающего зубцы диска, выступающие за боковую кромку элерона. Если возникнет возмущающий момент  $\bar{M}_x$  и ракета вместе с роллеронами под действием этого момента начнёт вращаться с угловой скоростью  $\bar{\Omega}_{xp}$ , то появится гироскопический момент  $\bar{M}_Г$ , направленный по оси  $z_p$ . Под его действием роллерон повернётся вокруг оси  $z_p$  на угол  $\delta_\Gamma$ , причём направление поворота будет таким, чтобы вектор угловой скорости  $\bar{\Omega}_{yp}$  стремился по кратчайшему пути совместиться с  $\bar{\Omega}_{xp}$  (правило Жуковского–Грюэ). Расположенный в симметричном стабилизаторе второй роллерон, диск которого закручивается в противоположном направлении, в свою очередь отклоняется от нейтральной оси на угол  $\delta_\Gamma$ . В результате на каждом из роллеронов возникнут управляющие

силы  $\pm Y_p$ , которые создадут момент  $\overline{M}_{px}$ , парирующий момент крена  $\overline{M}_x$ .

Роллерон – это пассивный стабилизатор, который используется для стабилизации крена, но не может управлять движением по крену.

### 3.2. Газодинамические органы управления

Все аэродинамические органы управления обладают общим недостатком: они могут эффективно действовать только в плотных слоях атмосферы, поэтому применяются у ракет с малыми высотами полета, т.е. для самолетов-снарядов, ЗУР, ПТУРС, авиационных и тактических полевых ракет.

Для БР, а также для дополнения аэродинамических органов управления у ракет перечисленных выше типов, необходимо применять газодинамические управляющие органы. Они являются универсальными, так как создают управляющие силы за счет энергии топлива, находящегося в ракете, и безразличны к внешним условиям. Газодинамические органы управления разделяются на следующие типы: I – газовые рули, дефлекторы, сопловые насадки, II – поворотные двигатели, поворотные сопла, III – впрыск реагентов в сверхзвуковую часть сопла, триммеры (щитки, выдвигаемые в сверхзвуковую часть сопла). Рассмотрим принцип действия этих органов управления.

**Газовые рули** создаются из графита или другого жаропрочного материала;  $\delta_{гр} \leq 20^\circ$ . Их недостатком является то, что они снижают тягу двигателя на 3...5%  $\sim \Delta R$ . Другой недостаток – сравнительно быстрое обгорание. По аналогии с воздушными рулями одна пара газовых рулей, имеющая отдельные приводы, располагается в вертикальной плоскости и управляет рысканием и креном (рули I и III типов). Другая пара газовых рулей (II и IV) связаны синхронно и управляют движением тангажа – это рули высоты (рис. 3.12).

На каждом руле возникают осевая сила  $X_{г.р.}$  и нормальная сила  $Y_{г.р.}$ :

$$X_{г.р.} = \frac{1}{2} c_{х.р.} \rho_{г.} S_{г.р.} u_a^2, \quad Y_{г.р.} = \frac{1}{2} c_{у.р.} \rho_{г.} S_{г.р.} u_a^2, \quad (3.7)$$

где  $u_a$  – скорость истечения газа на выходе из сопла;  $\rho_{г.}$  – массовая плотность газового потока;  $S_{г.р.}$  – площадь газовых рулей;  $c_{х.р.}$ ,

$c_{\text{уг.р.}}$  – коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы;

$$c_{\text{уг.р.}} = c_{\text{уг.р.}}^{\delta_{\text{г.р.}}} \delta_{\text{г.р.}}.$$

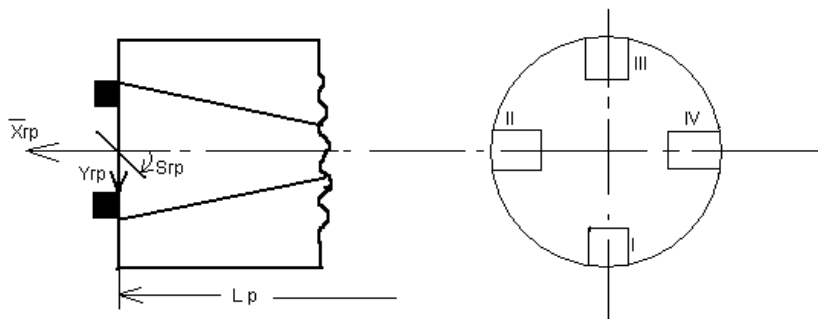


Рис. 3.12. Принцип действия газовых рулей

Момент относительно оси  $z$   $M_{pz} = Y_{г.р.} l_p$  можно выразить через коэффициент момента:

$$M_{pz} = \frac{1}{2} m_{г.р.}^{\delta_{г.р.}} \delta_{г.р.} \rho_{г.} S u_a^2 l, \quad (3.8)$$

где  $S$  – характерная площадь;  $l$  – характерная длина. Приравняв эти два момента и подставив  $Y_{г.р.}$ , получим

$$\frac{1}{2} c_{\text{уг.р.}}^{\delta_{г.р.}} \delta_{г.р.} \rho_{г.} S_{г.р.} u_a^2 l_p = \frac{1}{2} m_{г.р.}^{\delta_{г.р.}} \delta_{г.р.} \rho_{г.} S u_a^2 l. \quad (3.9)$$

**Дефлекторы** – кольца, расположенные вокруг среза сопла и отклоняемые относительно одной или двух взаимно перпендикулярных осей. Действие дефлекторов аналогично газовым рулям (рис. 3.13).

Одной из разновидностей дефлекторов являются сопловые насадки. По сравнению с газовыми рулями они менее эффективны, т.е. управляющая сила будет меньше ( $Y_{г.д.} \ll Y_{г.р.}$ ), однако они меньше обгорают и у них меньше шарнирные моменты.

**Поворотные двигатели**, как правило, используются для крупных ракет. Поворачиваться могут и маршевые двигатели, и вспомогательные (верньерные).

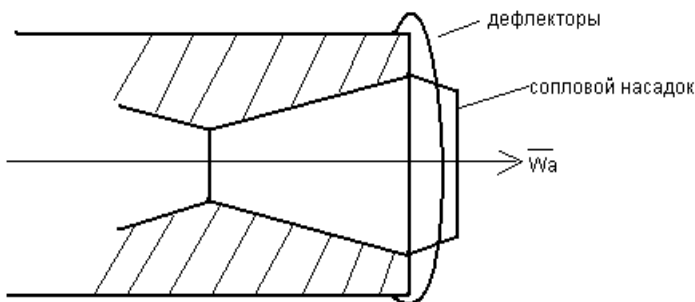


Рис. 3.13. Расположение дефлекторов и сопловых насадок

**Качающиеся поворотные сопла при неподвижной камере.**  
 12 марта 1983 г. было произведено огневое испытание самого большого поворотного управляющего сопла с эластичным опорным шарниром (рис. 3.14.). Это ускорило создание реактивного двигателя твердого топлива первой ступени МБР РТ-23 УТТУ.

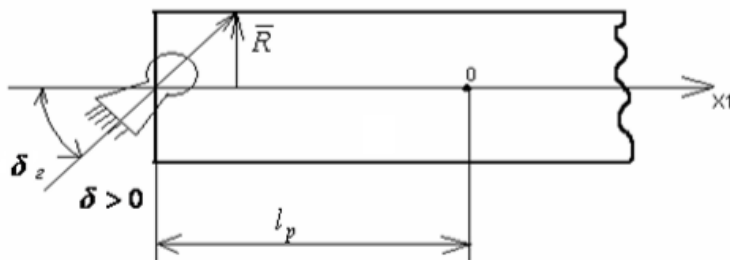


Рис. 3.14. Схема поворотного сопла:  $M_{зупр} = R \sin \delta l_p$ .

**Впрыск или вдув реагентов в сверхзвуковую часть сопла** (рис. 3.15). Область 2, заполненная реагентом, является преградой для сверхзвукового потока и тормозит его, в результате чего возникает скачок уплотнения 3. За скачком уплотнения поток поворачивается, скорость его уменьшается, а давление за скачком растет. В результате возникает боковая газодинамическая сила  $Y_{бок}$ , которая будет действовать на ракету так же, как и при использовании газовых рулей.

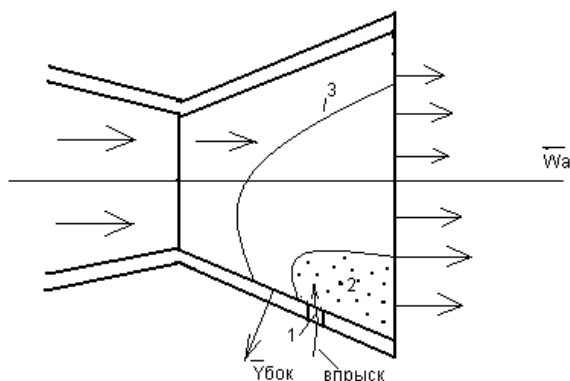


Рис. 3.15. Впрыск или вдув реагентов в сверхзвуковую часть сопла: 1 – отверстие, через которое впрыскивается реагент; 2 – предстеночная область (область газа); 3 – скачок уплотнения

Изменяя расход жидкости реагента, вдуваемой в сопло, и размер отверстия впрыска, можно регулировать направление и величину управляющей силы. При данном способе несколько уменьшается суммарная тяга ракеты за счет необратимых потерь механической энергии потока газа при переходе его через фронт скачка уплотнения, однако эти потери примерно компенсируются увеличением тяги от истечения через сопло вдуваемой жидкости.

**Триммеры** – выдвижные в сверхзвуковую часть сопла пластины (рис. 3.16). Эффект при использовании триммеров аналогичен эффекту впрыска реагентов. В литературе указывается, что использование триммеров является перспективным направлением, так же как и впрыск реагента.

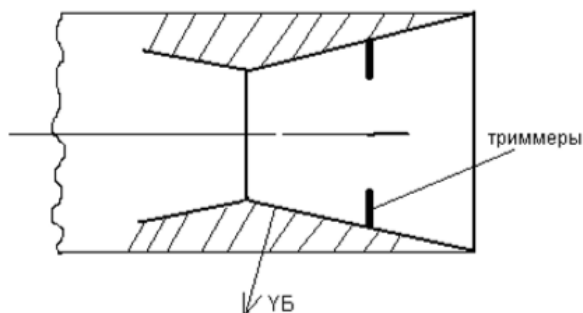


Рис. 3.16. Использование триммеров

**Струйные рули** (вспомогательные сопла) работают либо в импульсном режиме, либо непрерывно и расположены на боковой поверхности ракеты (рис. 3.17).

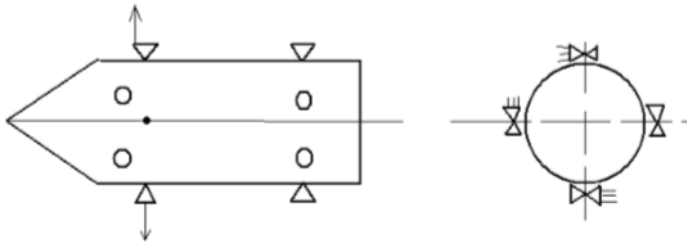


Рис. 3.17. Расположение струйных рулей

#### 4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЛА ПРИ ЗАКРЕПЛЁННЫХ РУЛЯХ

##### 4.1. Анализ системы уравнений пространственного движения

Запишем полную систему уравнений пространственного движения при закреплённых рулях (считаем, что закон отклонения рулей является известной функцией параметров движения). При записи всех уравнений не будем пренебрегать малыми 2-го порядка малости относительно параметров движения:

$$1) m \frac{dV}{dt} = R \cos \alpha \cos \beta - X - G \sin \Theta;$$

$$2) mV \frac{d\Theta}{dt} = (R \sin \alpha + Y) \cos \gamma_c + (R \cos \alpha \sin \beta + Z) \sin \gamma_c - G \cos \Theta;$$

$$3) -mV \cos \Theta \frac{d\Psi}{dt} = (R \sin \alpha + Y) \sin \gamma_c - (R \cos \alpha \sin \beta + Z) \cos \gamma_c;$$

$$4) J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \omega_z (J_z - J_y) = M_{Rx} + M_{Ax};$$

$$5) J_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_x \omega_z (J_x - J_z) = M_{Ry} + M_{Ay};$$

$$6) J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \omega_x \omega_y (J_y - J_x) = M_{Rz} + M_{Az};$$

$$7) \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma); \quad (4.1)$$

$$8) \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma;$$

$$9) \frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma);$$

$$10) \frac{dx_c}{dt} = V \cos \Theta \cos \Psi;$$

$$11) \frac{dy_c}{dt} = V \sin \Theta;$$

$$12) \frac{dz_c}{dt} = -V \cos \Theta \sin \Psi;$$

$$13) \sin \Theta = \cos \alpha \cos \beta \sin \vartheta - (\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma) \cos \vartheta;$$

$$14) \sin \Psi \cos \Theta = \cos \alpha \cos \beta \sin \psi \cos \vartheta + \sin \alpha \cos \beta (\cos \psi \sin \gamma + \cos \gamma \sin \psi \sin \vartheta) - \sin \beta (\cos \psi \cos \gamma - \sin \gamma \sin \vartheta \sin \psi);$$

$$15) \sin \gamma_c \cos \Theta = \cos \alpha \sin \beta \sin \vartheta - (\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma) \cos \vartheta;$$

$$J_x, J_y, J_z = f_i(t);$$

$$m = m(t).$$

Здесь  $V$  – скорость центра масс;  $\Theta$  – угол возвышения;  $\Psi$  – угол курса;  $\psi$  – угол рыскания;  $\vartheta$  – угол тангажа;  $\gamma$  – угол крена;  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – коэффициенты моментов крена, рыскания и тангажа соответственно;  $J_x, J_y, J_z$  – моменты инерции ЛА относительно соответствующих осей;  $\alpha$  – угол атаки;  $\beta$  – угол скольжения;  $\gamma_c$  – скоростной угол крена;  $x_c, y_c, z_c$  – координаты центра масс в стартовой СК;  $M_{Rx}, M_{Ry}, M_{Rz}$  – управляющие моменты относительно соответствующих осей, создаваемые за счёт отбора части тяги на управление;  $X$  – сила лобового сопротивления;  $Y$  – подъёмная сила;  $Z$  – боковая сила;  $M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}$  – составляющие аэродинамического момента, действующего на ЛА;  $R = R(\gamma_c)$  – тяга двигательной установки;  $G$  – вес ЛА;  $\rho = \rho(\gamma_c)$  – плотность воздуха, зависящая от высоты полета. Углы отклонения рулей  $\delta_\psi, \delta_\eta, \delta_\nu$  считаются известными функциями, и в частном случае это постоянные величины.

В системе (4.1) уравнения 1–3 представляют собой уравнения поступательного движения ЛА в проекциях на полускоростные оси,



4–6 – уравнения динамики вращательного движения в проекциях на связанные оси, 7–9 – кинематические соотношения для определения эйлеровых углов (вращательное движение), 10–12 – кинематические соотношения для определения координат ЛА в стартовой СК (поступательное движение), 13–15 – геометрические соотношения, устанавливающие связь между углами, ориентирующие ЛА в различных СК.

Если закон изменения массы неизвестен, то к указанной системе добавляется уравнение

$$16) \frac{dm}{dt} = -Q,$$

где  $Q$  [кг/с] – секундный массовый расход, зависящий от типа двигателя, режима его работы, скорости и высоты полёта ЛА. Для ракетных двигателей  $Q$  можно считать известной функцией времени, и в частном случае  $Q = \text{const}$ .

Если  $Q$  постоянен, то, интегрируя последнее уравнение, получаем  $m = m_0 - Qt$ , где  $m_0$  – начальная масса ЛА.

Система (4.1) содержит 15 переменных, из которых  $V, \Theta, \alpha, \omega_z, x_c, y_c, \delta_B, \vartheta$  определяют продольное движение ЛА, переменные  $\Psi, \psi, \beta, \gamma, \gamma_c, \omega_x, z_c, \delta_\Sigma, \delta_H$  – боковое движение.

Система (4.1) представляет собой сложную существенно нелинейную систему дифференциальных уравнений и может быть решена с помощью ЭВМ. Эта система записана без учёта колебаний жидкого наполнения, влияния упругости корпуса, не учитывает влияние ветра и наличие подвижных масс внутри ЛА.

Вращательное и поступательное движения ЛА принципиально взаимно связаны. Основная связь осуществляется через аэродинамические силы и моменты. Также между уравнениями, входящими в общую систему (4.1), имеются поперёкные аэродинамические и инерционные связи. При исследовании пространственного движения ЛА в расширенной постановке с учетом уравнений управления, определяющих отклонения рулей, необходимо учитывать поперёкные связи системы управления по каналам тангажа, рыскания и крена.

В уравнениях динамики поперёкные инерционные связи проявляются через члены, содержащие или произведения угловых скоростей вида  $\omega_i \omega_j$ , или центробежные моменты инерции (если они учитываются). Аэродинамические поперёкные связи проявляются в наличии поперёкных аэродинамических моментов в уравнениях

вращательного движения по крену и рысканию, обусловленных несимметричностью обтекания ЛА в полёте. Перекрёстные связи системы управления заметнее всего проявляются через разность показаний измерительных и исполнительных устройств.

На практике используют упрощённые математические модели, которые, тем не менее, при решении практических задач позволяют получить приемлемые результаты, хорошо согласующиеся с опытными данными.

## **4.2. Основные методы упрощения общей пространственной системы**

К наиболее распространенным методам упрощения системы пространственного движения ЛА относятся следующие:

- 1) разделение общего пространственного движения ЛА на движение центра масс и вращательное движение относительно центра масс;
  - 2) разделение общего пространственного движения ЛА на две подсистемы, одна из которых описывает изменение параметров продольного движения, а другая – параметров бокового движения;
  - 3) линеаризация общей пространственной системы уравнений.
- Рассмотрим их последовательно

### ***4.2.1. Разделение общего пространственного движения ЛА на поступательное движение центра масс и вращательное движение относительно центра масс***

Этот метод упрощения используется чаще всего при приближённом решении задачи построения траектории движения центра масс ЛА и задач, связанных с устойчивостью движения.

При исследовании траектории можно предположить, что система управления работает идеально и поэтому можно пренебречь переходными процессами изменения параметров движения ЛА при отклонении органов управления. Тогда оказывается возможным отделить движение центра масс ЛА от вращения ЛА вокруг центра масс. Рассматривая ЛА как управляемую материальную точку, можно сравнительно просто найти возможные траектории полета ЛА и его основные лётные параметры.

В идеальной системе управления все элементы, в том числе и сам ЛА (который является звеном контура управления), должны быть безынерционными. Применительно к ЛА это означает, что у него

должны равняться нулю моменты инерции:  $J_x = J_y = J_z = 0$ . Кроме того, в выражениях для аэродинамических моментов  $M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}$  можно пренебречь слагаемыми, зависящими от  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  (демпфирующие моменты) и от  $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$  (моменты от запаздывания скоса потока). Влияние величин  $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \dot{\alpha}, \dot{\beta}$  на моменты  $M_{Ax}, M_{Ay}, M_{Az}$  второстепенно по сравнению с влиянием углов  $\alpha, \beta$ .

С учетом вышеописанных допущений вместо уравнений 4, 5 и 6 системы (4.1) можно получить баланси́ровочные соотношения:

$$\begin{aligned} 1) M_{Rx} + M_{Ax} &= 0, \\ 2) M_{Ry} + M_{Ay} &= 0, \\ 3) M_{Rz} + M_{Az} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Заменяя моменты тяги  $M_{Ry}$  и  $M_{Rz}$  эквивалентными отклонениями рулей, можно записать вместо уравнений 2 и 3 системы (4.2) следующие баланси́ровочные соотношения:

$$\begin{aligned} m_z^{\delta_B} \tilde{\delta}_B + m_z^{\alpha} \alpha &= 0; \\ m_y^{\delta_H} \tilde{\delta}_H + m_y^{\beta} \beta &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\text{где } \tilde{\delta}_B = \delta_B + \frac{m_{z0}}{m_z^{\delta_B}} + \frac{M_{Rz}}{\frac{1}{2} m_z^{\delta_B} \rho S V^2 l}, \quad \tilde{\delta}_H = \delta_H + \frac{m_{y0}}{m_y^{\delta_H}} + \frac{M_{Ry}}{\frac{1}{2} m_y^{\delta_H} \rho S V^2 l}.$$

Углы  $\alpha$  и  $\beta$ , определяемые из (4.3), называются баланси́ровочными углами атаки и скольжения:  $\alpha \equiv \alpha_6, \beta \equiv \beta_6$ .

Баланси́ровочные соотношения используются для составления связей, необходимых для определения углов  $\delta_B$  и  $\delta_H$ .

Как теперь видно, предположение о безынерционности ЛА означает, что при отклонении органов управления углы  $\alpha$  и  $\beta$  мгновенно принимают свои баланси́ровочные значения, в результате чего в течение всего полета выполняются условия (4.3).

Рассмотрим, как получается одно из баланси́ровочных соотношений. Перепишем соотношение 3 из уравнений (4.2):

$$M_{Rz} - \frac{1}{2} m_z \rho S V^2 l = 0.$$

Коэффициент момента тангажа  $m_z$  представим в виде

$$m_z = m_{z_0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B,$$

и подставим его в балансирующее соотношение:

$$M_{Rz} + \frac{1}{2} m_{z_0} \rho S V^2 l + \frac{1}{2} m_z^\alpha \alpha \rho S V^2 l + \frac{1}{2} m_z^{\delta_B} \delta_B \rho S V^2 l = 0.$$

Разделив правую и левую часть полученного выражения на  $\frac{1}{2} m_z^{\delta_B} \rho S V^2 l$ , получим

$$\frac{M_{Rz}}{\frac{1}{2} m_z^{\delta_B} \rho S V^2 l} + \frac{m_{z_0}}{m_z^{\delta_B}} + \frac{m_z^\alpha \alpha}{m_z^{\delta_B}} + \delta_B = 0,$$

откуда  $m_z^{\delta_B} \tilde{\delta}_B + m_z^\alpha \alpha = 0$ .

Обратимся к исходной системе уравнений (4.1). Уравнения 1–3 и 10–12 описывают движение центра масс ЛА, а уравнений 4–9 – вращательное движение относительно центра масс. Полагая  $\alpha, \beta, \gamma, \gamma_c$  малыми величинами, получим из (4.1) с учётом вышеизложенных допущений уравнения поступательного движения центра масс в пространстве:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{dV}{dt} = R - X - G \sin \Theta, \\ mV \frac{d\Theta}{dt} = R\alpha + Y + Z\gamma_c - G \cos \Theta, \\ mV \cos \Theta \frac{d\Psi}{dt} = -Y\gamma_c + R\beta + Z, \\ \frac{dx_c}{dt} = V \cos \Theta \cos \Psi, \\ \frac{dy_c}{dt} = V \sin \Theta, \\ \frac{dz_c}{dt} = -V \cos \Theta \sin \Psi. \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Если считать, что крен стабилизирован  $\gamma \approx \gamma_c \approx 0$ , то (4.4) вместе с (4.3) определяют параметры  $V, \Theta, \Psi, \alpha, \beta, \gamma_c, x_c, y_c, z_c$  при заданных начальных условиях (при этом  $\delta_\gamma, \delta_\eta, \delta_B$  считаются известными).

Рассмотренная модель полета ЛА позволяет определить движение его центра масс путем интегрирования (4.4) независимо от оставшихся уравнений (4.1) и уравнений, описывающих процессы в системе управления.

Физически возможность применения данной модели для исследования траекторий ЛА объясняется тем, что движение центра масс обладает большой инерционностью и колебания аппарата вокруг центра масс вызывают сравнительно малые отклонения траектории.

#### ***4.2.2. Разделение пространственного движения ЛА на продольное и боковое***

Система уравнений (4.1) существенно упрощается, если удастся разделить ее на две подсистемы меньшего порядка, чем исходная, описывающие движение ЛА в двух взаимно перпендикулярных плоскостях: систему уравнений продольного движения и систему уравнений бокового движения. Первая описывает движение ЛА в вертикальной плоскости, вторая – в горизонтальной плоскости и движение крена. Принципиальная возможность такого разделения обусловлена наличием симметрии ЛА относительно продольной плоскости  $Ox$ .

Пусть полет совершается в некоторой вертикальной плоскости так, что плоскость симметрии ЛА все время совпадает с плоскостью полета, например в результате идеальной стабилизации по крену. Тогда кинематические параметры  $\gamma$ ,  $\gamma_c$ ,  $\beta$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  будут все время равны нулю. Если при этом направление стартовой оси  $O_0x_c$  выбрать в плоскости полета, то будут тождественно равны нулю и параметры  $\Psi$ ,  $\psi$ ,  $z_c$ . Такое движение называется продольным.

В продольном движении меняются параметры  $V$ ,  $\Theta$ ,  $\omega_z$ ,  $\vartheta$ ,  $\alpha$ ,  $x_c$ ,  $y_c$ , называемые кинематическими параметрами продольного движения. Продольное движение ЛА складывается из поступательных движений центра масс вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  и вращательного движения ЛА относительно оси  $Oz$ .

Параметры  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_c$ ,  $\Psi$ ,  $\psi$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $z_c$  называют кинематическими параметрами бокового движения. Изменению данных параметров соответствует так называемое боковое движение, которое состоит из поступательного движения центра масс ЛА вдоль оси  $Oz$  и вращательных движений относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ .

Общее движение ЛА складывается из продольного и бокового, причем между этими движениями имеет место взаимное влияние.

Разделение общей пространственной системы возможно, если боковое движение обладает малой интенсивностью, т.е. его параметры  $\gamma$ ,  $\gamma_c$ ,  $\Psi$ ,  $\psi$ ,  $\beta$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\delta_n$ ,  $\delta_z$ ,  $z_c$  являются малыми величинами, значит, можно положить  $\cos\beta \approx \cos\gamma \approx \cos\gamma_c \approx 1$  и пренебречь произведениями малых величин, такими как  $\sin\beta\sin\gamma$ ,  $\sin\beta\sin\gamma_c$ ,  $\omega_y\sin\gamma$ ,  $\omega_x\omega_y$ ,  $Z\sin\gamma_c$ . Кроме того, предполагается, что коэффициент лобового сопротивления  $c_x$  является функцией только числа Маха (М), угла атаки  $\alpha$  и угла отклонения рулей высоты  $\delta_v$  ( $c_x = c_x(M, \alpha, \delta_v)$ ) и не зависит от параметров бокового движения  $\beta$ ,  $\delta_n$ ,  $\delta_z$ . Эти два условия соблюдаются при движении управляемых крылатых и баллистических ракет.

Неуправляемые реактивные снаряды (НРС), стабилизируемые вращением, под этот способ упрощения не подпадают из-за большой угловой скорости вращения относительно продольной оси  $\omega_x$ . К ним относятся артиллерийские снаряды, турбореактивные снаряды и т.п.

Если указанные два условия выполняются, тогда 1-е, 2-е, 9-е, 10-е, 11-е уравнения системы (4.1) не будут содержать указанных параметров бокового движения, так как соответствующие члены этих уравнений будут величинами 2-го порядка малости и могут быть отброшены. Помимо этого, как и раньше, можем считать, что  $\sin\alpha \approx \alpha$ ,  $\cos\alpha \approx 1$ .

Для примера запишем еще раз 2-е уравнение системы (4.1):

$$mV \frac{d\Theta}{dt} = (R \sin \alpha + Y) \cos \gamma_c + (R \cos \alpha \sin \beta + Z) \sin \gamma_c - G \cos \Theta .$$

В соответствии со сказанным здесь можно положить  $\cos\gamma_c \approx 1$ ;  $\sin\beta \approx \beta$ ;  $\sin\gamma_c \approx \gamma_c$ ;  $Z\sin\gamma_c \approx 0$ ;  $Z \approx \beta$ ;  $R\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_c \approx R\beta\gamma_c \approx 0$ . Тогда получим

$$mV \frac{d\Theta}{dt} = R\alpha + Y - G \cos \Theta .$$

Аналогично поступим с остальными уравнениями движения. В результате уравнения продольного движения запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
m \frac{dV}{dt} &= R - X - G \sin \Theta ; \\
mV \frac{d\Theta}{dt} &= R\alpha + Y - G \cos \Theta . \\
J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_{Rz} + M_{Az} . \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z ; \\
\frac{dx_c}{dt} &= V \cos \Theta ; \\
\frac{dy_c}{dt} &= V \sin \Theta ; \\
\Theta &\approx \vartheta - \alpha . \\
R &= R(y_c) , \quad m = m(t) , \quad J_z = J_z(t) , \quad G = mg . \\
X &= \frac{1}{2} c_z \rho S V^2 ; Y = \frac{1}{2} c_y \rho S V^2 ; \quad M_{Az} = \frac{1}{2} m_z \rho S V^2 l ; \\
c_x &= c_x(M, \alpha, \delta_B) ; \quad c_y = c_y(M, \alpha, \delta_B) = c_y^\alpha \alpha + c_y^{\delta_B} \delta_B ; \\
m_z &= m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B + m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{\omega_z l}{V} + m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} \frac{\dot{\alpha} l}{V} .
\end{aligned} \tag{4.5}$$

К этим уравнениям следует добавить уравнения, описывающие процессы в канале тангажа системы управления.

В (4.5) параметры бокового движения не входят. Это означает, что система (4.5) может быть решена независимо от остальных уравнений (4.1). Нетрудно видеть, что продольное движение может существовать самостоятельно, как движение в вертикальной плоскости (плоскости стрельбы), когда не возникают отклонения органов управления рысканием  $\delta_n$  и креном  $\delta_z$  и отклонения боковых параметров движения от их нулевых значений в результате действия ветра. Практически это означает, что указанные возмущения должны достаточно быстро ликвидироваться.

Уравнения продольного движения можно записать независимо от пространственной системы (4.1) как уравнения плоско-параллельного движения ЛА в вертикальной плоскости  $x_c, y_c$ , совпадающей с плоскостью симметрии. На рис. 4.1 представлена схема сил, действующая на ЛА в таком полете.

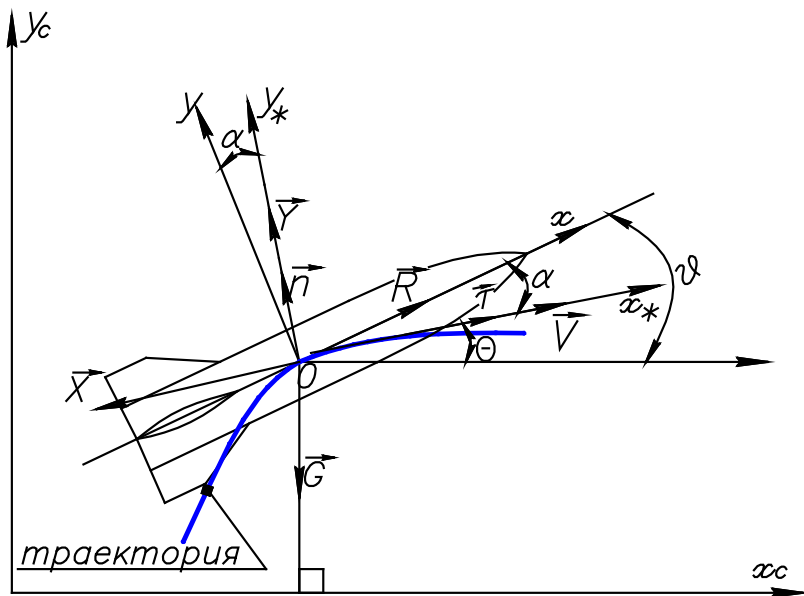


Рис. 4.1. Плоско-параллельное движение в вертикальной плоскости

Примем следующие допущения:  $\Theta \approx \vartheta - \alpha$ ;  $R \cos \alpha \approx R$ ;  $R \sin \alpha \approx R \alpha$ .

Боковое движение описывается 3-м, 4-м, 5-м, 7-м, 8-м, 12-м, 14-м и 15-м уравнениями системы (4.1). Параметры бокового движения –  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_c$ ,  $\Psi$ ,  $\psi$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$ .

При малых значениях параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma_c$ ,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  уравнения бокового движения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 1) \quad mV \cos \Theta \frac{d\Psi}{dt} &= R\beta + Z; \\
 2) \quad J_x \frac{d\omega_x}{dt} &= M_{Rx} + M_{Ax}; \\
 3) \quad J_y \frac{d\omega_y}{dt} &= M_{Ry} + M_{Ay}; \\
 4) \quad \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos \vartheta} \omega_y; \\
 5) \quad \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - \omega_y \operatorname{tg} \vartheta;
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$



- 6)  $\frac{dz_c}{dt} = -V \cos \Theta \sin \Psi$ ;
- 7)  $\sin \Psi \cos \Theta = \sin \psi \cos \vartheta + \alpha \sin \psi \sin \vartheta - \beta \cos \psi$ ;
- 8)  $\gamma_c \cos \Theta = \beta \sin \vartheta + \gamma \cos \vartheta$ .

Углы  $\delta_n$  и  $\delta_s$  считаются известными. Здесь  $Z = \frac{1}{2} c_z \rho S V^2$ ,  
 $c_z = c_z(M, \beta, \delta_n)$ .

В системе (4.6) уравнение 1 описывает движение центра масс, 2–3 – вращательное движение ЛА относительно центра масс, 4–6 – кинематические соотношения, 7–8 – геометрические соотношения.

Уравнения бокового движения (4.6) зависят от параметров продольного движения, поэтому боковое движение может существовать только вместе с продольным. Это значит, что для самостоятельного исследования бокового движения предварительно надо определить все необходимые продольные параметры. Продольное движение всегда существенно влияет на боковое, а влияние бокового движения на продольное может быть относительно слабым.

Таким образом, вместо системы (4.1) мы получили системы (4.5) и (4.6) более низкого порядка, которые интегрируются последовательно: сначала (4.5), потом (4.6).

Из (4.6) следует, что боковое движение состоит из движения рыскания и движения крена. Движение рыскания определяется 1-м, 3-м, 4-м, 6-м, 7-м уравнениями, движение крена – 2-м, 5-м и 8-м.

Эти движения связаны, однако во многих практических случаях их можно рассматривать независимо друг от друга. Часто используется допущение, что движение рыскания слабо зависит от параметров движения крена и уравнения рыскания можно решать независимо от уравнений, описывающих движение крена (если не учитывать перекрёстную аэродинамическую связь между движениями рыскания и крена). Уравнения движения крена более существенно зависят от параметров движения рыскания, и их можно рассматривать после того, как движение рыскания определено. Если ЛА стабилизирован вращением, то разделить систему (4.1) нельзя (параметры  $\gamma$ ,  $\omega_x$  – большие величины).

При разделении общего пространственного движения на продольное и боковое необходимо также учитывать следующий факт: если условия полета таковы, что все перечисленные выше допущения выполняются, то при отклонении органов управления тангажом возникает продольное движение, а при отклонении органов управления

рысканием и креном – боковое. Если при этом отклонение органов управления тангажом зависит только от продольных параметров движения, а органов управления рысканием и креном – только от боковых, то разделяются также и уравнения, описывающие работу системы управления, и, следовательно, разделяется полная система уравнений управляемого движения ЛА.

Такое упрощение этих уравнений позволяет вдвое снизить порядок исследуемой системы уравнений и широко применяется при исследовании полета ЛА.

#### ***4.2.3. Линеаризация общей пространственной системы***

Основные методы исследования нелинейных уравнений (4.1) связаны с предварительным их упрощением. Одним из таких упрощений является линеаризация этих уравнений относительно малых отклонений параметров движения от их значений для некоторого программного (невозмущенного) движения. Это один из самых распространенных способов упрощения сложной системы нелинейных уравнений (4.1).

Невозмущенной траекторией называется теоретическая траектория, отвечающая конкретным уравнениям управляемого движения ЛА с номинальными значениями параметров движения, заданными начальными условиями, стандартными параметрами атмосферы и т.п.

Действительные траектории всегда отличаются от теоретических, потому что используемая математическая модель движения описывает динамические свойства ЛА лишь приближенно и в полете на него воздействует ряд случайных факторов. Такие траектории, получающиеся из невозмущенных при действии различного рода возмущений, называют возмущенными.

Рассмотрим систему «летательный аппарат–автопилот». Эта физическая система является нелинейной. Но оказывается, что для исследования устойчивости ЛА уравнения движения ЛА и уравнения автопилота можно принять линейными. При этом если ставится задача исследовать автоколебания в системе «летательный аппарат–автопилот», то нелинейностью уравнений автопилота пренебрегать нельзя.

В данном разделе ЛА рассматривается как абсолютно жесткое тело, имеющее шесть степеней свободы. Такое предположение при решении большинства задач не приводит к большим погрешностям и позволяет провести линеаризацию пространственной модели движе-

ния ЛА. Для этого необходимо, чтобы было известно некоторое невозмущенное программное движение ЛА (требуемое движение). Параметры невозмущенного движения определяют обычно приближенно, с помощью численного интегрирования его дифференциальных уравнений или иным способом, в зависимости от характера рассматриваемой задачи. Кроме того, необходимо, чтобы параметры истинного возмущенного движения отличались от параметров невозмущенного (программного) на некоторые малые величины, которые называются отклонениями или вариациями. Близость возмущенных траекторий к теоретической невозмущенной служит основанием для линеаризации дифференциальных уравнений движения ЛА.

Предположим далее, что существуют первые частные производные от правых частей дифференциальных уравнений по всем входящим в них параметрам.

Линеаризация производится с использованием метода малых возмущений. Коротко остановимся на существе этого метода.

Пусть некоторая динамическая система описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений, которую представим в нормальной форме Коши:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(t, x_1 \dots x_n), \quad (i = 1..n), \quad (4.7)$$

где  $F_i$  – нелинейные функции  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Пусть известно некоторое программное (невозмущенное) движение этой системы, которому соответствует одно из частных решений уравнений (4.7). Параметры этого движения обозначим  $x_{i*}$  ( $i = 1..n$ ).

Если подставить это частное решение в (4.7), то получим равенства

$$\frac{dx_{i*}}{dt} = F_i(t, x_{1*} \dots x_{n*}). \quad (4.7')$$

Действительное движение отличается от невозмущенного, так как на систему действуют возмущающие силы, которые точно учесть невозможно. Предположим, что отклонения параметров действительного движения от невозмущенных являются малыми величинами т.е.

$$x_i = x_{i*} + \Delta x_i. \quad (i = 1..n). \quad (4.8)$$

Величины  $\Delta x_i$ , представляющие собой разности между кинематическим параметрами в возмущённом и невозмущённом движениях, называются отклонениями или вариациями. Причем  $\Delta x_i \Delta x_j = O(\Delta x_i, \Delta x_j)$ , где  $O(\Delta x_i, \Delta x_j)$  – величина высшего порядка малости, чем  $\Delta x_i$  или  $\Delta x_j$ .

Рассмотрим линеаризацию системы (4.7). Подставляем в нее уравнения (4.8):

$$\frac{dx_{i*}}{dt} + \frac{d\Delta x_i}{dt} = F_i(t, x_{1*} + \Delta x_1 \dots x_{n*} + \Delta x_n) \quad (i = 1..n). \quad (4.9)$$

Правые части (4.9) разложим в ряд Тейлора в окрестности невозмущённого движения. Ограничимся членами разложения, которые содержат отклонения  $\Delta x_i$  (вариации) в степени не выше первой. Получим

$$F_i(t, x_{1*} + \Delta x_1 \dots x_{n*} + \Delta x_n) = F_i(t, x_{1*} \dots x_{n*}) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_* \Delta x_k + R_2,$$

где  $R_2$  – остаточный член, содержащий члены разложения второго и более высокого порядка малости,  $\left( \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_* = \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_{\substack{x_1=x_{1*} \\ \vdots \\ x_n=x_{n*}}} -$  значения

частных производных  $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$ , отвечающие невозмущённому движению.

Подставив данную зависимость в (4.9), получим

$$\frac{dx_{i*}}{dt} + \frac{d\Delta x_i}{dt} = F_i(t, x_{1*} \dots x_{n*}) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_* \Delta x_k + R_2. \quad (i = 1..n).$$

Отбросим член  $R_2$ , имеющий порядок малости выше первого. Так как  $x_{i*}$  является решением (4.7'), то справедлива следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_{i*}}{dt} &= F_i(t, x_{1*} \dots x_{n*}), \\ \frac{d\Delta x_i}{dt} &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial F_i}{\partial x_k} \right)_* \Delta x_k, \end{aligned} \quad (4.10)$$

линейная относительно вариаций  $\Delta x_i$ . Она называется системой уравнений в отклонениях или вариациях.

В (4.10) выражения  $(\frac{\partial F_i}{\partial x_k})_*$  являются известными функциями времени, поскольку невозмущённое движение предполагается известным. Обозначим  $(\frac{\partial F_i}{\partial x_k})_* = a_{ik}(t)$ . Тогда  $\frac{d\Delta x_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)\Delta x_k$ , или в матричной форме:

$$\frac{d\Delta x}{dt} = A(t)\Delta x, \quad (4.10')$$

где  $\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \cdot \\ \Delta x_n \end{pmatrix}$  – матрица-столбец,  $A(t) = \{a_{ik}(t)\}$ ,  $i, k = 1 \dots n$  –

квадратная матрица.

Коэффициенты системы (4.10')  $a_{ik}$ , элементы матрицы  $A$ , зависят от параметров невозмущённого движения. Если все параметры являются постоянными (например в балансировочном режиме), то и  $a_{ik}$  тоже постоянные.

Таким образом, вместо исходной нелинейной системы (4.7) относительно фазовых координат  $x_i$  мы получили линейную систему (4.10) относительно отклонений (вариаций) этих координат от их значений в некотором программном невозмущённом движении  $\Delta x_i$ .

Следует отметить, что метод линеаризации не имеет строгого теоретического обоснования. Его справедливость в каждом конкретном случае должна подтверждаться сравнением решений исходной и линеаризованной систем.

Проведём линеаризацию уравнений пространственного движения (4.1). Пусть невозмущённое движение представляет собой некоторый заданный полёт в пространстве. Параметры этого движения являются известными функциями времени. Обозначим их индексом “\*”:

$$V_*(t), \Theta_*(t), \vartheta_*(t), \alpha_*(t), \beta_*(t), \gamma_*(t), \gamma_{c*}(t), \psi_*(t), \Psi_*(t), \\ \omega_{x*}(t), \omega_{y*}(t), \omega_{z*}(t), x_{c*}(t), y_{c*}(t), z_{c*}(t), \delta_{\vartheta*}(t), \delta_{H*}(t), \delta_{B*}(t).$$

Наложим на невозмущённое движение следующие ограничения. Предположим, что его параметры в боковом движении

$(\beta_*(t), \omega_{x*}(t), \omega_{y*}(t), \gamma_*(t), \gamma_{c*}(t), z_{c*}(t), \psi_*(t), \Psi_*(t), \delta_{\Theta*}(t), \delta_{H*}(t))$ , а также производные по времени от продольных параметров  $\omega_{z*}$ ,  $\dot{\alpha}_*$ ,  $\dot{\delta}_{B*}$ ,  $\dot{\Theta}_*$  являются малыми величинами и их произведениями можно пренебречь. Таким образом, выполняется условие разделения пространственной системы на продольное и боковое движения. Это предположение принимается для упрощения итоговой системы в вариациях и не является принципиальным.

При изучении возмущённого движения нас будет интересовать главным образом реакция ЛА на отклонения рулей. При такой постановке задачи влияние на возмущённое движение отклонений конструктивных параметров и режима работы двигателя можно не рассматривать. Тогда будем считать, что параметры  $R, m, J_x, J_y, J_z$  в возмущённом движении будут такими же, как и в невозмущённом, т.е. известными функциями времени. Кроме того, не будем учитывать влияние приращения высоты полета на тягу  $R$  и аэродинамические силы и моменты, так как оно незначительно. Отметим, что учитывать влияние вариации высоты имеет смысл только в том случае, если высота является одним из параметров, подлежащим регулированию.

Рассмотрим особенности линеаризации на примере уравнений продольного движения. Подробно рассмотрим линеаризацию первого уравнения системы (4.5). Запишем его в нормальной форме Коши:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{R}{m} - \frac{X}{m} - g \sin \Theta = F_0(V, \theta, \alpha, \delta_B),$$

где  $F_0$  – функция параметров движения ЛА. Будем считать, что  $R = R_*(t), m = m_*(t), \rho = \rho_* = \rho(y_{c*})$ .

Приступая к линеаризации уравнений движения, прежде всего необходимо выяснить, от каких параметров зависят аэродинамические силы и моменты.

Силу лобового сопротивления можно представить следующим образом:  $X = \frac{1}{2} c_x \rho S V^2$ , где  $c_x = c_x(M, \alpha, \delta_B)$  – коэффициент силы лобового сопротивления,  $M = \frac{V}{a}$  число Маха,  $\alpha$  – угол атаки,  $\delta_B$  – угол отклонения рулей высоты.

Напомним, что при разделении пространственного движения на продольное и боковое предполагается, что коэффициент лобового

сопротивления  $c_x$  является функцией только числа Маха, угла атаки  $\alpha$  и угла отклонения рулей высоты  $\delta_B$  ( $c_x = c_x(M, \alpha, \delta_B)$ ) и не зависит от параметров бокового движения  $\beta$ ,  $\delta_H$ ,  $\delta_\Theta$ .

Вычисляем частные производные от функции  $F_0$  по всем параметрам, от которых она зависит:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F_0}{\partial V}\right)_* &= (-c_x(M, \alpha, \delta_B) \frac{1}{m} \rho S V - \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial c_x}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial V}\right) \rho S V^2)_* = -\frac{1}{m} X^V; \\ \left(\frac{\partial M}{\partial V}\right)_* &= \frac{1}{a}; \\ \left(\frac{\partial F_0}{\partial \alpha}\right)_* &= \left(-\frac{1}{2m} \frac{\partial c_x}{\partial \alpha} \rho S V^2\right)_* = -\frac{1}{m} X^\alpha; \\ \left(\frac{\partial F_0}{\partial \Theta}\right)_* &= -g \cos \Theta_*; \\ \left(\frac{\partial F_0}{\partial \delta_B}\right)_* &= \left(-\frac{1}{2m} \frac{\partial c_x}{\partial \delta_B} \rho S V^2\right)_* = -\frac{1}{m} X^{\delta_B}. \end{aligned}$$

Знак «\*» после скобок означает, что все параметры внутри скобок содержат «\*», т.е. значения частных производных определяются для параметров невозмущенного полета.

Найдем теперь приращение силы лобового сопротивления по сравнению с ее значением в невозмущенном полете:

$$\Delta X = \frac{X^V}{m} \Delta V + \frac{X^\alpha}{m} \Delta \alpha + \frac{X^{\delta_B}}{m} \Delta \delta_B.$$

Учитывая сокращения, понятные из предыдущего изложения, можем записать уравнение в вариациях:

$$\frac{d\Delta V}{dt} = -\frac{X^V}{m} \Delta V - \frac{X^\alpha}{m} \Delta \alpha - \frac{X^{\delta_B}}{m} \Delta \delta_B - g \cos \Theta_* \Delta \Theta + \frac{X_B}{m},$$

где  $X_B$  – возмущающая сила, действие которой не учитывалось в программном невозмущённом движении.

Проведём линеаризацию кинематических уравнений:

$$\frac{dy_c}{dt} = V \sin \Theta = F_6(V, \Theta);$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F_6}{\partial V}\right)_* &= \sin \Theta_*; \\ \left(\frac{\partial F_6}{\partial \Theta}\right)_* &= V_* \cos \Theta_*.\end{aligned}$$

Получим уравнение в вариациях:

$$\frac{d\Delta y_c}{dt} = \sin \Theta_* \Delta V + V_* \cos \Theta_* \Delta \Theta.$$

Аналогично для пятого уравнения системы (4.5) получим

$$\begin{aligned}\frac{dx_c}{dt} &= V \cos \Theta = F_5(V, \Theta); \\ \left(\frac{\partial F_5}{\partial V}\right)_* &= \cos \Theta_*; \\ \left(\frac{\partial F_5}{\partial \Theta}\right)_* &= -V_* \sin \Theta_*; \\ \frac{d\Delta x_c}{dt} &= \cos \Theta_* \Delta V - V_* \sin \Theta_* \Delta \Theta.\end{aligned}$$

Линеаризуем четвертое уравнение системы (4.5):

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z = F(\omega_z); \\ \frac{\partial F}{\partial \omega_z} &= 1; \\ \frac{d\Delta \vartheta}{dt} &= \Delta \omega_z.\end{aligned}$$

Линеаризуем геометрическое соотношение:

$$\begin{aligned}\vartheta - \Theta - \alpha &= 0; \\ \Delta \vartheta - \Delta \Theta - \Delta \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Аналогично производится линеаризация остальных уравнений системы (4.5). Подробнее процесс линеаризации описан в [3].

В результате получим линейную систему уравнений продольного движения в вариациях, в которую в качестве неизвестных функций времени входят приращения  $\Delta V$ ,  $\Delta \Theta$  ..., а коэффициенты при этих



приращениях определяются значениями параметров невозмущённого движения  $V_*$ ,  $\Theta_*$ ....:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{d\Delta V}{dt} &= -\frac{X^v}{m}\Delta V - \frac{X^\alpha}{m}\Delta\alpha - \frac{X^{\delta_B}}{m}\Delta\delta_B - g \cos \Theta_* \Delta\Theta + \frac{X_B}{m}; \\
 2) \quad \frac{d\Delta\theta}{dt} &= \frac{Y^v}{mV_*}\Delta V + \frac{Y^\alpha + R}{mV_*}\Delta\alpha + \frac{g \sin \Theta_*}{V_*}\Delta\Theta + \frac{Y^{\delta_B}}{mV_*}\Delta\delta_B + \frac{Y_B}{mV_*}; \\
 3) \quad \frac{d\Delta\omega_z}{dt} &= \frac{M_z^v}{J_z}\Delta V + \frac{M_z^\alpha}{J_z}\Delta\alpha + \frac{M_z^{\omega_z}}{J_z}\Delta\omega_z + \\
 &+ \frac{M_z^{\dot{\alpha}}}{J_z}\Delta\dot{\alpha} + \frac{M_z^{\delta_B}}{J_z}\Delta\delta_B + \frac{M_{zB}}{J_z}; \\
 4) \quad \frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= \Delta\omega_z; \\
 5) \quad \Delta\vartheta &= \Delta\Theta + \Delta\alpha; \\
 6) \quad \frac{d\Delta x_c}{dt} &= \cos \Theta_* \Delta V - V_* \sin \Theta_* \Delta\Theta; \\
 7) \quad \frac{d\Delta y_c}{dt} &= \sin \Theta_* \Delta V + V_* \cos \Theta_* \Delta\Theta.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

У уравнениях (4.11) приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
 X^v &= \left( c_x \rho S V + \frac{1}{2} \frac{\partial c_x}{\partial M} \frac{1}{a} \rho S V^2 \right)_*; \quad X^\alpha = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial c_x}{\partial \alpha} \rho S V^2 \right)_*; \\
 X^{\delta_B} &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial c_x}{\partial \delta_B} \rho S V^2 \right)_*; \\
 Y^v &= \left( c_y \rho S V + \frac{1}{2} \frac{\partial c_y}{\partial M} \frac{1}{a} \rho S V^2 \right)_*; \quad Y^\alpha = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial c_y}{\partial \alpha} \rho S V^2 \right)_*; \\
 Y^{\delta_B} &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial c_y}{\partial \delta_B} \rho S V^2 \right)_*; \\
 M_z^v &= \left( m_z \rho S V l + \frac{1}{2} \frac{\partial m_z}{\partial M} \frac{1}{a} \rho S V^2 l \right)_*; \quad M_z^\alpha = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_z}{\partial \alpha} \rho S V^2 l \right)_*; \\
 M_z^{\dot{\alpha}} &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_z}{\partial \dot{\alpha}} \rho S V l^2 \right)_*; \quad M_z^{\omega_z} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_z}{\partial \omega_z} \rho S V l^2 \right)_*; \quad M_z^{\delta_B} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_z}{\partial \delta_B} \rho S V^2 l \right)_*;
 \end{aligned}$$

$$\overline{\omega}_z = \frac{\omega_z l}{V}; \overline{\dot{\alpha}} = \frac{\dot{\alpha} l}{V};$$

$$c_x = c_x(M, \alpha, \delta_B); c_y = c_y(M, \alpha, \delta_B); m_z = m_z(M, \alpha, \delta_B, \overline{\omega}_z, \overline{\dot{\alpha}}),$$

$X_B$   $Y_B$   $M_{z_B}$  – возмущающие силы и момент, которые не были учтены в программном движении.

Предположение о малости параметров бокового движения и о возможности разделить систему уравнений возмущённого движения на продольное и боковое значительно упростило решение задачи исследования возмущённого движения. Однако простота решения достигается в ущерб его точности. Следовательно, при использовании метода линеаризации необходимо знать, какова точность получаемых результатов. Иначе говоря, какими пределами должны быть ограничены исследуемые возмущения, чтобы ошибки расчета по уравнениям в отклонениях не превосходили допустимых.

Ответ на этот вопрос можно получить путем сравнения результатов приближенного и точного решений. Также можно использовать приближенный метод, при котором дается оценка суммы  $R$  членов разложения, отбрасываемых при линеаризации исходных уравнений. С помощью данной оценки можно ориентировочно установить допустимую область возмущений еще до выполнения расчетов.

Найдем, например, какую ошибку мы допускаем при линеаризации уравнения для  $\frac{d\theta}{dt}$  из системы уравнений (4.5) в его слагаемом  $\frac{Y}{mV}$ . Предположим, что  $Y$  изменяется только за счет изменения скорости и угла атаки, и получим

$$R_Y = \frac{Y}{mV} - \frac{Y_*}{mV_*} - \frac{Y^v}{mV_*} \Delta V - \frac{Y^\alpha}{mV_*} \Delta \alpha =$$

$$= \frac{Spc_y^\alpha}{2m} \{[(\alpha_* + \Delta \alpha) \Delta V + V_* \Delta \alpha] - [\alpha_* \Delta V + V_* \Delta \alpha]\}.$$

Отсюда

$$R_Y = \frac{Spc_y^\alpha}{2m} \Delta V \Delta \alpha = \frac{Y_*}{mV_*} \frac{\Delta V}{V_*} \frac{\Delta \alpha}{\alpha_*}.$$

Следовательно, при линеаризации мы допускаем относительную ошибку  $\varepsilon$ , равную

$$\varepsilon = \frac{R_Y}{Y_* / mV_*} = \frac{\Delta V}{V_*} \frac{\Delta \alpha}{\alpha_*}. \quad (4.12)$$

Задавая значения допустимой ошибки  $\varepsilon$ , можно построить по зависимости (4.12) графики, которые ограничат область допустимых значений отклонений  $\Delta V$  и  $\Delta \alpha$ . Такая область для  $\varepsilon = 0,03$  приведена на рис. 4.2 и показывает, что допустимые значения  $\frac{\Delta \alpha}{\alpha_*}$  велики при малых  $\frac{\Delta V}{V_*}$  и уменьшаются с ростом  $\frac{\Delta V}{V_*}$ .

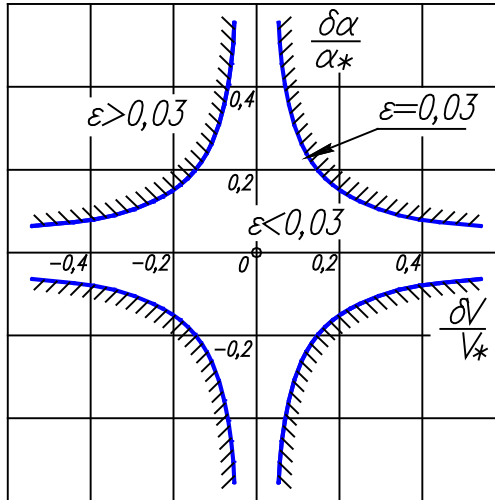


Рис. 4.2. Область допустимых значений отклонений  $\frac{\Delta \alpha}{\alpha_*}$  и  $\frac{\Delta V}{V_*}$ , соответствующая допустимой ошибке  $\varepsilon = 0,03$

#### 4.2.4. Уравнения продольного движения в вариациях. Динамические коэффициенты

При решении практических задач принято записывать системы уравнений продольного и бокового возмущённого движения в более простом и удобном виде. Для этого вводятся сокращённые обозначения коэффициентов, стоящих при отклонениях, называемые динамическими коэффициентами.

Динамические коэффициенты, входящие в уравнения продольного движения, будем обозначать  $a_{ij}$ , входящие в уравнения бокового движения –  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$ . Первый индекс динамического коэффициента ( $i$ ) соответствует номеру уравнения, к которому относится коэффициент, второй ( $j$ ) – номеру приращения, при котором он стоит.

Для этого пронумеруем переменные, входящие в (4.5), следующим образом:

0	1	2	3	4	5	6
$V$	$\omega_z$	$\alpha$	$\delta_B$	$\Theta$	$x_c, X_B,$ $Y_B, M_{zB}$	$y_c$

Каждому уравнению в вариациях (4.11) присвоим соответствующий номер. Например, уравнению, описывающему закон изменения вариации скорости  $\Delta V$ , присвоим номер 0, уравнению, описывающему  $\Delta \omega_z$  – 1 и т.д.

Так, например, коэффициент  $a_{02}$  относится к системе уравнений продольного движения, стоит в уравнении для расчета отклонения скорости движения ЛА  $\Delta V$  при отклонении угла атаки  $\Delta \alpha$ .

Система (4.11) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
 0) \quad & \frac{d\Delta V}{dt} + a_{00}\Delta V + a_{02}\Delta\alpha + a_{04}\Delta\Theta = -a_{03}\Delta\delta_B + a_{05}X_B; \\
 1) \quad & a_{10}\Delta V + \frac{d\Delta\omega_z}{dt} + a_{11}\Delta\omega_z + a'_{12}\frac{d\Delta\alpha}{dt} + a_{12}\Delta\alpha = -a_{13}\Delta\delta_B + a_{15}M_{zB}; \\
 4) \quad & a_{40}\Delta V + a_{42}\Delta\alpha + a_{44}\Delta\Theta - \frac{d\Delta\Theta}{dt} = -a_{43}\Delta\delta_B + a_{45}Y_B; \\
 & \frac{d\Delta\vartheta}{dt} - \Delta\omega_z = 0; \\
 & \Delta\alpha + \Delta\Theta - \Delta\vartheta = 0; \\
 5) \quad & \frac{d\Delta x_c}{dt} + a_{50}\Delta V + a_{54}\Delta\Theta = 0; \\
 6) \quad & \frac{d\Delta y_c}{dt} + a_{60}\Delta V + a_{64}\Delta\Theta = 0.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Динамические коэффициенты выражаются через аэродинамические и инерционные характеристики ЛА следующим образом:

$$\begin{aligned}
a_{00} &= \frac{X^v}{m} \text{ 1/с; } a_{02} = \frac{X^\alpha}{m} \text{ м/с}^2; a_{03} = \frac{X^{\delta_B}}{m} \text{ м/с}^2; a_{04} = g \cos \Theta_* \text{ м/с}^2; \\
a_{05} &= \frac{1}{m} \text{ 1/кг; } a_{10} = -\frac{M_z^V}{J_z} \text{ 1/(м·с); } a_{11} = -\frac{M_z^{\omega_z}}{J_z} \text{ 1/с; } \\
a_{12} &= -\frac{M_z^\alpha}{J_z} \text{ 1/с}^2; a'_{12} = -\frac{M_z^{\dot{\alpha}}}{J_z} \text{ 1/с; } a_{13} = -\frac{M_z^{\delta_B}}{J_z} \text{ 1/с}^2; \\
a_{15} &= \frac{1}{J_z} \text{ 1/(кг·м}^2\text{); } a_{40} = \frac{Y^V}{mV_*} \text{ 1/м; } a_{42} = \frac{R+Y^\alpha}{mV_*} \text{ 1/с; } \quad (4.14) \\
a_{43} &= \frac{Y^{\delta_B}}{mV_*} \text{ 1/с; } a_{44} = \frac{g \sin \Theta_*}{V_*} \text{ 1/с; } a_{45} = \frac{1}{mV_*} \text{ с/(кг·м); } \\
a_{50} &= -\cos \Theta_*; a_{54} = V_* \sin \Theta_* \text{ м/с; } a_{60} = -\sin \Theta_*; a_{64} = -V_* \cos \Theta_* \text{ м/с.}
\end{aligned}$$

В (4.14) для коэффициентов уравнений (4.13) все параметры движения соответствуют невозмущённой траектории, и, следовательно, эти коэффициенты являются известными функциями времени.

Динамические коэффициенты характеризуют важные динамические свойства ЛА. Рассмотрим физический смысл некоторых из них.

Коэффициент  $a_{11} = -\frac{M_z^{\omega_z}}{J_z} = -\frac{m_z^{\omega_z} q S l}{J_z V_*}$  характеризует аэродинамическое демпфирование ЛА. Величина  $a_{11}$  представляет собой приращение углового ускорения вращения ЛА, вызванное приращением угловой скорости на единицу ( $\Delta \omega_z = 1$ ).

Коэффициент  $a_{12} = -\frac{M_z^\alpha}{J_z} = -\frac{57,3 m_z^\alpha q S l}{J_z}$  характеризует статическую устойчивость ЛА. Величина  $a_{12}$  представляет собой приращение углового ускорения ЛА, обусловленное изменением угла атаки на единицу ( $\Delta \alpha = 1$ ).

Коэффициент  $a_{13} = -\frac{M_z^{\delta_B}}{J_z} = -\frac{57,3 m_z^{\delta_B} q S l}{J_z}$  характеризует эффективность рулей высоты. Величина  $a_{13}$  представляет собой приращение углового ускорения ЛА, создаваемое отклонением органов управления ЛА на единичный угол.

Коэффициент  $a_{42} = \frac{R + Y^\alpha}{mV_*} = \frac{57,3c_y^\alpha qS + R}{mV_*}$  представляет собой приращение угловой скорости касательной к траектории, вызванное отклонением угла атаки на единицу (единицу измерения):  $a_{42} = \frac{g}{V_*} n_y^\alpha$ , где  $n_y^\alpha = \frac{57,3c_y^\alpha qS + R}{G}$ .

Аналогично коэффициент  $a_{43} = \frac{Y^{\delta_b}}{mV_*} = \frac{57,3c_y^{\delta_b} qS}{mV_*}$  представляет собой приращение угловой скорости, касательной к траектории, обусловленное отклонением органов управления на единицу (при неизменном значении угла атаки).

При искривлении траектории изменяется и составляющая силы тяжести  $G \cos \theta$ , нормальная к траектории. Коэффициент  $a_{44} = \frac{g}{V_*} \sin \theta_*$  представляет собой приращение угловой скорости касательной к траектории за счет силы тяжести при изменении угла наклона траектории на единицу.

Коэффициент  $a'_{12} = -\frac{M_z^{\ddot{\alpha}}}{J_z} = -\frac{m_z^{\ddot{\alpha}} qS l}{J_z V_*}$  характеризует влияние запаздывания схода потока на момент тангажа и представляет собой приращение углового ускорения вращения ЛА, вызванное отклонением производной  $\Delta \dot{\alpha}$  на единицу.

Необходимо отметить, что многие динамические коэффициенты сильно изменяются по траектории движения ЛА. Например, для снаряда «Эрликон» динамические коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{42}$  изменяются за время полета в 7...8 раз,  $a_{13}$  – примерно в 12 раз, а коэффициент  $a_{12}$  – более чем в 50 раз.

#### 4.2.5. Уравнения бокового движения в вариациях

В качестве программного (невозмущённого) режима при записи этих уравнений примем балансировочный режим. Это прямолинейный установившийся полёт на постоянной высоте. Схема сил, действующих на ЛА в таком полете, представлена на рис. 4.3.

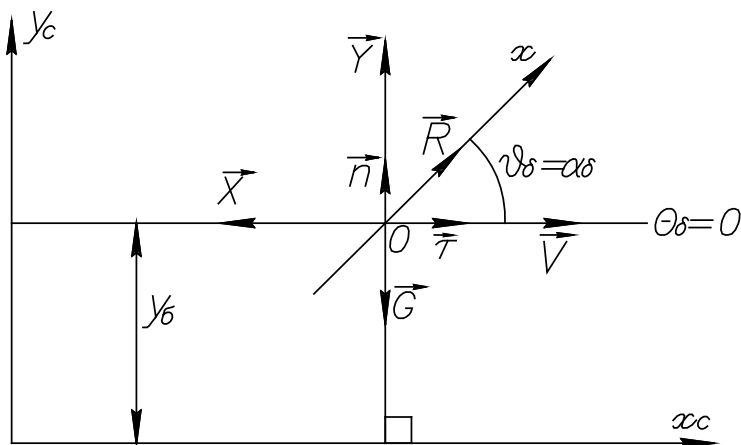


Рис. 4.3. Силы, действующие на ЛА в балансировочном режиме

Уравнения бокового движения в вариациях при сделанных выше предположениях о малости параметров бокового движения запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \cos \Theta_* \frac{d\Delta\Psi}{dt} &= \frac{R + Z^\beta}{mV_*} \Delta\beta + \frac{Z^{\delta_H}}{mV_*} \Delta\delta_H + \frac{Z_B}{mV_*}; \\
 2) \quad \frac{d\Delta\omega_x}{dt} &= \frac{M_x^\beta}{J_x} \Delta\beta + \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} \Delta\omega_x + \frac{M_x^{\omega_y}}{J_x} \Delta\omega_y + \\
 &\quad + \frac{M_x^{\delta_\beta}}{J_x} \Delta\delta_\beta + \frac{M_x^{\delta_H}}{J_x} \Delta\delta_H + \frac{M_{xB}}{J_x}; \\
 3) \quad \frac{d\Delta\omega_y}{dt} &= \frac{M_y^\beta}{J_y} \Delta\beta + \frac{M_y^{\omega_x}}{J_y} \Delta\omega_x + \frac{M_y^{\omega_y}}{J_y} \Delta\omega_y + \\
 &\quad + \frac{M_y^{\dot{\beta}}}{J_y} \Delta\dot{\beta} + \frac{M_y^{\delta_H}}{J_y} \Delta\delta_H + \frac{M_y^{\dot{\delta}_H}}{J_y} \Delta\dot{\delta}_H + \frac{M_{yB}}{J_y}; \\
 4) \quad \frac{d\Delta\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos \Theta_*} \Delta\omega_y; \\
 5) \quad \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= \Delta\omega_x - tg \Theta_* \Delta\omega_y;
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
6) \quad \frac{d\Delta z_c}{dt} &= -V_* \cos \Theta_* \Delta \Psi ; \\
7) \quad \Delta \Psi &= \frac{\cos \Theta_*}{\cos \theta_*} \Delta \psi - \frac{1}{\cos \theta_*} \Delta \beta ; \\
8) \quad \Delta \gamma_c &= \frac{\sin \Theta_*}{\cos \theta_*} \Delta \beta + \frac{\cos \Theta_*}{\cos \theta_*} \Delta \gamma .
\end{aligned}$$

Здесь  $Z_B$ ,  $M_{XB}$ ,  $M_{YB}$  – возмущающие сила и моменты, которые не были учтены в программном движении.

В (4.15) приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
Z^\beta &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial c_z}{\partial \beta} \rho S V^2 \right)_*, \quad Z^{\delta_H} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial c_z}{\partial \delta_H} \rho S V^2 \right)_*, \\
M_x^{\omega_x} &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_x}{\partial \overline{\omega}_x} \rho S V l^2 \right)_*, \quad M_x^{\delta_\Psi} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_x}{\partial \delta_\Psi} \rho S V^2 l \right)_*, \\
M_x^{\delta_H} &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_x}{\partial \delta_H} \rho S V^2 l \right)_*, \\
M_x^\beta &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_x}{\partial \beta} \rho S V^2 l \right)_*, \quad M_x^{\omega_y} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_x}{\partial \overline{\omega}_y} \rho S V l^2 \right)_*, \\
M_y^\beta &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_y}{\partial \beta} \rho S V^2 l \right)_*, \quad M_y^{\dot{\beta}} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_y}{\partial \dot{\beta}} \rho S V l^2 \right)_*, \quad M_y^{\omega_y} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_y}{\partial \overline{\omega}_y} \rho S V l^2 \right)_*, \\
M_y^{\omega_x} &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_y}{\partial \overline{\omega}_x} \rho S V l^2 \right)_*, \quad M_y^{\delta_H} = \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_y}{\partial \delta_H} \rho S V^2 l \right)_*, \\
M_y^{\overline{\delta_H}} &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial m_y}{\partial \overline{\delta_H}} \rho S V l^2 \right)_*,
\end{aligned}$$

$$\text{где } \overline{\omega}_x = \frac{\omega_x l}{V}, \overline{\omega}_y = \frac{\omega_y l}{V}, \overline{\beta} = \frac{\dot{\beta} l}{V}, \overline{\delta_H} = \frac{\dot{\delta}_H l}{V}.$$

Боковое возмущенное движение ЛА описывается системой из шести дифференциальных уравнений и двух геометрических соотношений. Эта система содержит следующие неизвестные:  $\Delta \omega_x$ ,  $\Delta \omega_y$ ,  $\Delta \Psi$ ,  $\Delta \psi$ ,  $\Delta \beta$ ,  $\Delta \gamma$ .



Вводя аналогично предыдущему динамические коэффициенты  $b_{ij}$  для движения рыскания и  $c_{ij}$  для движения крена, можем записать уравнения бокового движения в вариациях. Для этого пронумеруем переменные, входящие в (4.6):

	0	1	2	3	4	5	6
$b_{ij}$	$\omega_x$	$\omega_y$	$\beta$	$\delta_H$	$\Psi$	$Z_B, M_{yB}$	9
$c_{ij}$	—	$\omega_x$	$\beta$	$\delta_\gamma$	—	$M_{xB}$	—

Система (4.15) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \cos \theta_* \frac{d\Delta\Psi}{dt} - b_{42}\Delta\beta &= b_{43}\Delta\delta_H + b_{45}Z_B ; \\
 \frac{d\Delta\omega_y}{dt} + b_{11}\Delta\omega_y + b_{12}\Delta\beta + b'_{12} \frac{d\Delta\beta}{dt} + b_{10}\Delta\omega_x &= \\
 &= -b_{13}\Delta\delta_H - b'_{13} \frac{d\Delta\delta_H}{dt} + b_{15}M_{yB} ; \\
 \frac{d\Delta\omega_x}{dt} + c_{11}\Delta\omega_x + c'_{11}\Delta\omega_y + c_{12}\Delta\beta &= -c_{13}\Delta\delta_\gamma - c'_{13}\Delta\delta_H + c_{15}M_{xB} ; \\
 \frac{d\Delta\Psi}{dt} &= \frac{1}{\cos \vartheta_*} \Delta\omega_y ; \\
 \frac{d\Delta\gamma}{dt} &= \Delta\omega_x - \operatorname{tg} \vartheta_* \Delta\omega_y ; \\
 \frac{d\Delta z_c}{dt} &= -V_* \cos \theta_* \Delta\Psi ; \\
 \Delta\Psi &= \frac{\cos \vartheta_*}{\cos \theta_*} \Delta\Psi - \frac{1}{\cos \theta_*} \Delta\beta ; \\
 \Delta\gamma_c &= \frac{\sin \vartheta_*}{\cos \theta_*} \Delta\beta + \frac{\cos \vartheta_*}{\cos \theta_*} \Delta\gamma .
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Динамические коэффициенты  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  в (4.16) определяются следующим образом:

$$b_{10} = -\frac{M_y^{\omega_x}}{J_y} \frac{1}{c}, \quad b_{11} = -\frac{M_y^{\omega_y}}{J_y} \frac{1}{c}, \quad b_{12} = -\frac{M_y^\beta}{J_y} \frac{1}{c^2},$$

$$\begin{aligned}
b'_{12} &= -\frac{M_y^{\dot{\beta}}}{J_y} 1/c, \quad b_{13} = -\frac{M_y^{\delta_H}}{J_y} 1/c^2, \quad b'_{13} = \frac{M_y^{\bar{\delta}_H}}{J_y} 1/c, \\
b_{15} &= \frac{1}{J_y} 1/(\text{кг} \cdot \text{м}^2), \quad b_{42} = \frac{R + Z^{\beta}}{mV_*} 1/c, \quad b_{43} = \frac{Z^{\delta_H}}{mV_*} 1/c, \\
b_{45} &= \frac{1}{mV_*} c/(\text{кг} \cdot \text{м}), \\
c_{11} &= -\frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} 1/c, \quad c'_{11} = -\frac{M_x^{\omega_y}}{J_x} 1/c, \quad c_{12} = -\frac{M_x^{\beta}}{J_x} 1/c^2, \\
c_{13} &= -\frac{M_x^{\delta_y}}{J_x} 1/c^2, \quad c'_{13} = -\frac{M_x^{\delta_H}}{J_x} 1/c^2, \quad c_{15} = \frac{1}{J_x} 1/(\text{кг} \cdot \text{м}^2).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

### 4.3. Некоторые программные траектории полета

Траектории многих управляемых ЛА имеют, помимо участка наведения на цель, участки полета по программе. Рассмотрим примеры программных траекторий полета ЛА.

#### 4.3.1. Балансировочный режим

При решении многих задач динамики управляемого полета, например задачи стабилизации углового положения ЛА, в качестве программного невозмущенного режима движения принимается балансировочный режим.

Балансировочный режим – это режим прямолинейного установившегося полета на постоянной высоте. В качестве примера можно привести крейсерский режим крылатой ракеты.

Если требуется, чтобы ЛА на каком-либо участке своего полета находился в балансировочном режиме, то на его движение необходимо наложить следующие условия:  $\theta_* = \theta_6 = 0$ ;  $V_* = V_6 = \text{const}$ ;  $\dot{V} = \dot{\Theta} = \dot{\omega}_z = \dot{\alpha} = \omega_z = \dot{\gamma}_c = 0$ . Здесь  $\theta_6$  – угол возвышения ЛА в балансировочном режиме,  $V_6$  – скорость ЛА в балансировочном режиме. Соблюдение указанных условий требует определенного положения органов управления ЛА.

Уравнения движения ЛА в продольной плоскости в балансировочном режиме примут вид

$$\begin{aligned}
0 &= R \cos \alpha - X ; \\
0 &= R \sin \alpha + Y - G ; \\
0 &= M_{Rz} + M_{Az} ; \\
\frac{dx_c}{dt} &= V_6 ; \\
y_* &= y_6 = \text{const} .
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Здесь  $X = \frac{1}{2} c_x \rho S V^2$  – сила лобового сопротивления,  $c_x = c_x(M, \alpha, \delta_B)$  – коэффициент силы лобового сопротивления,  $M = \frac{V}{a}$  число Маха,  $Y = \frac{1}{2} c_y \rho S V^2$  – подъемная сила,  $c_y = c_y^\alpha \alpha$  – коэффициент подъемной силы,  $M_{Az} = \frac{1}{2} m_z \rho S V^2 l$  – момент тангажа;  $m_z = m_z(M, \alpha, \delta_B) = m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B$  – коэффициент момента тангажа.

Для балансировочного режима также характерно выполнение следующих условий:  $\cos \alpha = 1$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $R = \text{const}$ ,  $\rho = \text{const}$ ,  $a = a_6 = \text{const}$ . Требуется найти параметры балансировочного режима.

Обратимся к первому уравнению (4.18):

$$0 = R - \frac{1}{2} c_x \rho S V^2 . \tag{4.19}$$

Примем  $c_x = c_x(M)$ . Уравнение (4.19) решается численно, и в результате определяется скорость ЛА в балансировочном режиме  $V_6$ .

После определения скорости  $V_6$  из второго уравнения (4.18)

$$0 = R \alpha + \frac{1}{2} c_y^\alpha \alpha \rho S V^2 - G \text{ определяем балансировочный угол атаки } \alpha_6 :$$

$$\alpha_6 = \frac{G}{R + \frac{1}{2} c_y^\alpha \rho S V_6^2} .$$

Обратимся к третьему уравнению (4.18) и перепишем его в виде

$$0 = M_{Rz} + \frac{1}{2} (m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B) \rho S V^2 l .$$

Преобразуем данное уравнение:

$$\begin{aligned} 0 &= M_{Rz} + \frac{1}{2}(m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B) \rho S V^2 l = \\ &= \frac{1}{2} m_z^{\delta_B} \delta_{B_{\text{экв}}} \rho S V^2 l + \frac{1}{2} m_z^\alpha \alpha \rho S V^2 l, \end{aligned}$$

введя эквивалентный угол отклонения руля высоты:

$$\delta_{B_{\text{экв}}} = \delta_B + \frac{M_{Rz}}{\frac{1}{2} m_z^{\delta_B} \rho S V^2 l} + \frac{m_{z0}}{m_z^{\delta_B}}. \quad (4.20)$$

Если момент от силы тяги равен нулю ( $M_{Rz} = 0$ ) и момент от аэродинамической асимметрии равен нулю ( $m_{z0} = 0$ ), то формула (4.20) примет вид

$$m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B = 0. \quad (4.21)$$

Уравнение (4.21) называется балансировочным соотношением. Его часто записывают вместо уравнения моментов, чтобы понизить порядок решаемой задачи.

Из балансировочного соотношения можно получить требуемый угол отклонения органов управления:

$$\delta_B = -\alpha_6 \frac{m_z^\alpha}{m_z^{\delta_B}} = \delta_{B6}.$$

Зависимость угла атаки от угла отклонения руля высоты  $\alpha = -\delta_B \frac{m_z^{\delta_B}}{m_z^\alpha}$  позволяет делать выводы об управляемости ЛА. Например, в случае увеличения коэффициента статической устойчивости ЛА  $m_z^\alpha$  при одном и том же отклонении органов управления  $\delta_B$  получим меньший угол атаки. Если при этом учесть, что на руль высоты накладываются ограничения  $\delta_B = \pm \delta_{B_{\text{max}}}$ , то ЛА становится плохо управляемым.

Получим формулы для определения нормальных перегрузок, действующих на сбалансированный ЛА в зависимости от углов атаки, скольжения и отклонения органов управления. Предположим, что при лётных углах атаки и скольжения ЛА обладает линейными аэродина-

мическими характеристиками. Тогда аэродинамические силы можно представить как  $Y = Y_0 + Y^\alpha \alpha + Y^\delta \delta_B$ ,  $Z = Z^\beta \beta + Z^\delta \delta_H$ . Здесь  $Y_0$  – подъемная сила при нулевом угле атаки.

Перегрузки запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} n_{y*} &= \frac{R\alpha + Y}{mg}; \\ n_{z*} &= \frac{-R\beta - Z}{mg}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Условия балансировки с учетом момента от аэродинамической асимметрии:

$$m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B = 0; \quad m_y^\beta \beta + m_y^{\delta_H} \delta_H = 0. \quad (4.23)$$

Из данных балансировочных соотношений получим требуемые углы отклонения органов управления:

$$\delta_B = -\frac{m_{z0} + m_z^\alpha \alpha}{m_z^{\delta_B}} = \delta_{B0}, \quad \delta_H = -\beta \frac{m_y^\beta}{m_y^{\delta_H}} = \delta_{H0}.$$

Тогда

$$Y = (Y_0 - \frac{m_{z0}}{m_z^{\delta_B}} Y^\delta) + (Y^\alpha - Y^\delta \frac{m_z^\alpha}{m_z^{\delta_B}}) \alpha, \quad Z = (Z^\beta - Z^\delta \frac{m_y^\beta}{m_y^{\delta_H}}) \beta. \quad (4.24)$$

Подставим (4.24) в выражения для перегрузок (4.22) и получим перегрузки в балансировочном режиме:

$$\begin{aligned} n_{y6} &= n_{y6}^\alpha \alpha + (n_{y6})_{\alpha=0}; \\ n_{z6} &= n_{z6}^\beta \beta. \end{aligned} \quad (4.25)$$

где

$$\begin{aligned} n_{y6}^\alpha &= \frac{1}{G} (R + Y^\alpha - Y^\delta \frac{m_z^\alpha}{m_z^{\delta_B}}); & (n_{y6})_{\alpha=0} &= \frac{1}{G} (Y_0 - \frac{m_{z0}}{m_z^{\delta_B}} Y^\delta); \\ n_{z6}^\beta &= \frac{1}{G} (-R - Z^\beta + Z^\delta \frac{m_y^\beta}{m_y^{\delta_H}}). \end{aligned}$$

Аналогично можно получить зависимости для балансировочных значений перегрузок через отклонения органов управления:

$$n_{y_6} = n_{y_6}^{\delta} \delta_B + (n_{y_6})_{\delta_B=0}; \quad n_{z_6} = n_{z_6}^{\delta} \delta_H \quad (4.26)$$

$$\text{где } n_{y_6}^{\alpha} = \frac{1}{G} (Y^{\delta} - \frac{m_z^{\delta_B}}{m_z^{\alpha}} (R + Y^{\alpha}));$$

$$n_{z_6}^{\beta} = \frac{1}{G} (-Z^{\delta} + \frac{m_y^{\delta_H}}{m_y^{\beta}} (R + Z^{\beta})); \quad (n_{y_6})_{\delta_B=0} = \frac{1}{G} (Y_0 - \frac{m_{z0}}{m_z^{\alpha}} (R + Y^{\alpha})).$$

Уравнения (4.25) и (4.26) описывают связь между перегрузками  $n_y$ ,  $n_z$  и углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta_B$ ,  $\delta_H$ . Коэффициенты  $n_{y_6}^{\alpha}$ ,  $n_{z_6}^{\beta}$ ,  $n_{y_6}^{\delta}$ ,  $n_{z_6}^{\delta}$ , зависящие от аэродинамических и конструктивных параметров ЛА, скорости и высоты полета, характеризуют важнейшие динамические свойства ЛА.

Если известны нормальные перегрузки, то углы атаки и скольжения можно найти по формулам

$$\alpha_6 = \frac{n_y - (n_{y_6})_{\alpha=0}}{n_{y_6}^{\alpha}}; \quad \beta_6 = \frac{n_z}{n_{z_6}^{\beta}}, \quad (4.27)$$

углы отклонения органов управления – по аналогичным зависимостям:

$$\delta_B = \frac{n_y - (n_{y_6})_{\delta_B=0}}{n_{y_6}^{\delta}}; \quad \delta_H = \frac{n_z}{n_{z_6}^{\delta}}. \quad (4.28)$$

Нормальную перегрузку, которую может создавать сбалансированный ЛА при максимальном отклонении органов управления, называем располагаемой перегрузкой. Получим формулы для располагаемых перегрузок:

$$n_{y_{\text{расп}}} = n_{y_6}^{\delta} \delta_{B_{\text{max}}} + (n_{y_6})_{\delta_B=0}; \quad n_{z_{\text{расп}}} = n_{z_6}^{\delta} \delta_{H_{\text{max}}}. \quad (4.29)$$

#### **4.3.2. Программный разворот в вертикальной плоскости**

Пусть движение ЛА совершается по программе в вертикальной плоскости. Полет по программе может задаваться изменением угла

атаки  $\alpha(t) = \alpha_{\text{пр}}(t)$ , угла тангажа  $\vartheta(t) = \vartheta_{\text{пр}}(t)$  или непосредственно  $\theta = \theta_{\text{пр}}(t)$ .

Задан требуемый закон поворота вектора скорости  $\bar{V}$ :  $\theta = \theta_{\text{пр}}(t)$ . Необходимо определить следующие параметры траектории:  $V, \delta_B, \alpha, \omega_z, \vartheta, y_c, x_c$ .

Запишем систему уравнений продольного движения:

$$\begin{aligned} 1) \quad m \frac{dV}{dt} &= R - \frac{1}{2} c_x \rho S V^2 - G \sin \Theta; \\ 2) \quad m V \frac{d\Theta}{dt} &= R \alpha + \frac{1}{2} c_y^\alpha \alpha \rho S V^2 - G \cos \Theta; \\ 3) \quad J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_{Rz} + \frac{1}{2} (m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B + m_z^{\bar{\omega}_z} \frac{\omega_z l}{V}) \rho S V^2 l; \\ 4) \quad \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z; \\ 5) \quad \vartheta &= \theta + \alpha; \\ 6) \quad \frac{dx_c}{dt} &= V \cos \Theta; \\ 7) \quad \frac{dy_c}{dt} &= V \sin \Theta. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Примем, что  $m = m(t)$ ;  $R = R(y_c)$ ;  $J_z = J_z(t)$  являются известными функциями времени.

Подставляем в рассматриваемую систему заданный закон изменения угла возвышения, например:  $\theta = \theta_{\text{пр}}(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$ . Решая ее численно, находим остальные параметры программного движения. Уравнение 6 можно проинтегрировать отдельно, так как правые части остальных уравнений не зависят от  $x_c$ .

Можно предложить приближенный, полуаналитический метод определения параметров программного движения.

Рассмотрим первое и седьмое уравнения системы (4.30) и зависимость  $\rho = \rho(y_c)$ . В результате совместного численного интегрирования уравнений 1 и 7 получим программные значения скорости полета  $V_{\text{пр}}$  и высоты полета  $y_{c\text{пр}}$ . Затем из второго уравнения (4.30) находим программный угол атаки  $\alpha_{\text{пр}}$ .

$$\alpha_{\text{пр}} = \frac{mV_{\text{пр}} \frac{d\Theta_{\text{пр}}(t)}{dt} + G \cos \Theta_{\text{пр}}(t)}{R + \frac{1}{2} c_y^\alpha \rho S V_{\text{пр}}^2}.$$

Третье уравнение системы (4.30) заменяем на балансировочное соотношение. Для этого пренебрегаем инерционным и тушащим моментом:

$$m_z^\alpha \alpha + m_z^{\delta_B} \delta_B = 0.$$

Из балансировочного соотношения находим программный угол отклонения руля высоты:

$$\delta_{B\text{пр}} = -\alpha_{\text{пр}} \frac{m_z^\alpha}{m_z^{\delta_B}}.$$

Далее из пятого уравнения находим программное значение угла тангажа  $\vartheta_{\text{пр}}$ , а интегрируя третье уравнение, найдем  $\omega_{z\text{пр}}$ .

#### 4.4. Учёт влияния вращающихся масс (маховиков) в уравнениях вращательного движения ЛА

Пусть внутри ЛА имеется система из трёх маховиков, которые ориентированы симметрично по осям связанной системы так, что оси СК  $Oxuz$  остаются главными осями инерции (центробежные моменты отсутствуют). Маховики, вращающиеся относительно соответствующих осей, изображены на рис. 4.4, где  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  – угловые скорости вращения маховиков относительно ЛА;  $m_1, m_2, m_3 \ll m$  – массы маховиков, которые считаем сравнительно малыми по сравнению с массой ЛА;  $J_{M_x}, J_{M_y}, J_{M_z}$  – моменты инерции маховиков относительно собственной оси. ЛА вращается с угловой скоростью  $\bar{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  вместе с маховиками. Требуется составить уравнение вращательного движения ЛА вместе с маховиками.

Будем считать, что на ЛА действуют внешние моменты:  $\bar{M}_A$  – аэродинамический момент;  $\bar{M}_R$  – момент тяги. Уравнение вращательного движения ЛА:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \bar{M}_R + \bar{M}_A, \quad (4.31)$$



где  $L_o$  – момент количества движения ЛА вместе с маховиками (кинетический момент).

$$\bar{L}_o = L_x \bar{i} + L_y \bar{j} + L_z \bar{k}.$$

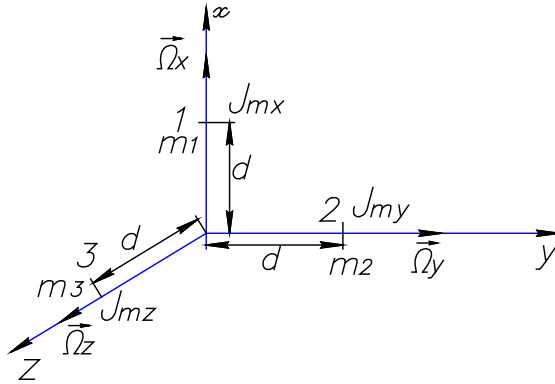


Рис. 4.4. Схема расположения системы маховиков

Полная векторная производная:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}_o}{dt} &= \frac{d\bar{L}_o}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{L}_o; \\ \frac{d\bar{L}_o}{dt} &= \frac{dL_x}{dt} \bar{i} + \frac{dL_y}{dt} \bar{j} + \frac{dL_z}{dt} \bar{k}. \end{aligned}$$

Запишем уравнение вращательного движения ЛА с маховиками в проекциях на связанные оси.

Проекции вектора кинетического момента:

$$\begin{aligned} L_x &= J_x \omega_x + J_{Mx} \Omega_x; \\ L_y &= J_y \omega_y + J_{My} \Omega_y; \\ L_z &= J_z \omega_z + J_{Mz} \Omega_z. \end{aligned}$$

Моменты инерции ЛА вместе с маховиками:

$$\begin{aligned} J_x &= J_1 + J'_{M_x}; \\ J_y &= J_2 + J'_{M_y}; \\ J_z &= J_3 + J'_{M_z}. \end{aligned}$$

Здесь моменты инерции маховиков:

$$\begin{aligned} J'_{M_x} &= J_{M_x} + (m_2 + m_3)d^2; & J'_{M_y} &= J_{M_y} + (m_1 + m_3)d^2; \\ J'_{M_z} &= J_{M_z} + (m_1 + m_2)d^2. \end{aligned}$$

$J'_{M_x}, J'_{M_y}, J'_{M_z}$  – момент инерции всех маховиков относительно осей  $x, y, z$  соответственно,  $J_1, J_2, J_3$  – моменты инерции ЛА без маховиков относительно осей  $x, y, z$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}_o}{dt} &= (J_1 \frac{d\omega_x}{dt} + J'_{M_x} \frac{d\omega_x}{dt} + J_{M_x} \frac{d\Omega_x}{dt})\bar{i} + (J_2 \frac{d\omega_y}{dt} + J'_{M_y} \frac{d\omega_y}{dt} + \\ &+ J_{M_y} \frac{d\Omega_y}{dt})\bar{j} + (J_3 \frac{d\omega_z}{dt} + J'_{M_z} \frac{d\omega_z}{dt} + J_{M_z} \frac{d\Omega_z}{dt})\bar{k}. \end{aligned}$$

$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  – большие величины, которые нужно учитывать.

Найдем проекции произведения  $\bar{\omega} \times \bar{L}_o$  на связанные оси:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \times \bar{L} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix} = \bar{i}(\omega_y L_z - \omega_z L_y) + \bar{j}(\omega_z L_x - \omega_x L_z) + \\ &+ \bar{k}(\omega_x L_y - \omega_y L_x) = \bar{i}(\omega_y((J_3 + J'_{M_z})\omega_z + J_{M_z}\Omega_z) - \omega_z((J_2 + J'_{M_y})\omega_y + \\ &+ J_{M_y}\Omega_y)) + \bar{j}(\omega_z((J_1 + J'_{M_x})\omega_x + J_{M_x}\Omega_x) - \omega_x((J_3 + J'_{M_z})\omega_z + J_{M_z}\Omega_z)) + \\ &+ \bar{k}(\omega_x((J_2 + J'_{M_y})\omega_y + J_{M_y}\Omega_y) - \omega_y((J_1 + J'_{M_x})\omega_x + J_{M_x}\Omega_x)). \end{aligned}$$

Пренебрегая произведениями малых величин, получим следующие уравнения вращательного движения ЛА с маховиками в проекциях на связанные оси:

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_x}{dt} &= M_{Rx} + M_{Ax} - J_{M_x} \frac{d(\omega_x + \Omega_x)}{dt} + \omega_z J_{M_y} \Omega_y - \omega_y J_{M_z} \Omega_z; \\ J_2 \frac{d\omega_y}{dt} &= M_{Ry} + M_{Ay} - J_{M_y} \frac{d(\omega_y + \Omega_y)}{dt} + \omega_x J_{M_z} \Omega_z - \omega_z J_{M_x} \Omega_x; \\ J_3 \frac{d\omega_z}{dt} &= M_{Rz} + M_{Az} - J_{M_z} \frac{d(\omega_z + \Omega_z)}{dt} + \omega_y J_{M_x} \Omega_x - \omega_x J_{M_y} \Omega_y. \end{aligned}$$

Для управления ЛА в космосе используются слагаемые, которые содержат производные:  $\frac{d\Omega_x}{dt}$ ;  $\frac{d\Omega_y}{dt}$ ;  $\frac{d\Omega_z}{dt}$ . При этом можно приближенно принять

$$J_{M_x} \frac{d(\omega_x + \Omega_x)}{dt} \approx J_{M_x} \frac{d\Omega_x}{dt}; \quad J_{M_y} \frac{d(\omega_y + \Omega_y)}{dt} \approx J_{M_y} \frac{d\Omega_y}{dt};$$

$$J_{M_z} \frac{d(\omega_z + \Omega_z)}{dt} \approx J_{M_z} \frac{d\Omega_z}{dt}.$$

#### 4.5. Учёт влияния ветра в задачах динамики полёта

Введём следующие понятия:  $\bar{V}$  – скорость центра масс относительно Земли (путевая скорость),  $\bar{V}_r$  – скорость центра масс ЛА относительно воздуха (ветра) – воздушная скорость,  $\bar{W}$  – скорость ветра относительно Земли. При наличии ветра скорость центра масс ЛА относительно Земли:

$$\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{W}. \quad (4.32)$$

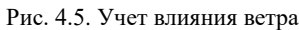
Учёт влияния ветра будем рассматривать на примере уравнений продольного движения.

Существует два способа учета влияния ветра в уравнениях динамики ЛА. Первый основан на рассмотрении относительного движения ЛА по отношению к ветру (метод Дидиона), второй – на рассмотрении абсолютного движения ЛА по отношению к Земле, которая считается неподвижной.

Основная идея учёта влияния ветра состоит в том, что аэродинамические силы и моменты, действующие на ЛА, определяются величиной и ориентацией вектора воздушной скорости  $\bar{V}_r$  (рис. 4.5).

Рассматривается плоское движение. Будем считать, что в стартовой системе координат скорость ветра задана двумя компонентами:  $\bar{W} = W_{x_c} \bar{i}_c + W_{y_c} \bar{j}_c$ . На рис. 4.5  $xy$  – плоскость симметрии ЛА;  $\alpha_r$  – угол атаки для воздушной скорости;  $\bar{\tau}$ ,  $\bar{n}$  – орты касательной и нормали к траектории;  $R$  – тяга,  $G$  – сила тяжести.

Имеем  $\bar{F}_A = \bar{X} + \bar{Y}$ ;  $\bar{W} = \bar{V} - \bar{V}_r$ ;  $\bar{V}_r = \bar{V} - \bar{W}$ . Здесь  $\bar{F}_A$  – главный вектор аэродинамических сил.


$$X = \frac{1}{2} C_x \rho S V_r^2 ;$$

$$Y = \frac{1}{2} C_y \rho S V_r^2;$$

$$C_x = C_x(M_r, \alpha_r); \quad M_r = \frac{V_r}{a};$$

$$C_y = C_y(M_r, \alpha_r); \quad C_y(\alpha_r) = C_y^{\alpha_r} \cdot \alpha_r;$$

$$C_y^{\alpha_r} = C_y^{\alpha};$$

$$M_{Az} = \frac{1}{2} m_z \rho S V_r^2 l;$$

$$m_z = m_z(M_r, \alpha_r, \overline{\omega}_z, \overline{\dot{\alpha}}_r, \delta_B);$$

$$\overline{\omega}_z = \frac{\omega_z l}{V_r}; \quad \overline{\dot{\alpha}}_r = \frac{\dot{\alpha} l}{V_r};$$

$$m_z = m_{z_0} + m_z^\alpha \alpha_r + m_z^{\bar{\omega}z} \frac{\omega_z l}{V_r} + m_z^{\delta_B} \delta_B + m_z^{\bar{\alpha}} \frac{\dot{\alpha}_r l}{V_r}.$$

Установим связь между углами  $\alpha$  и  $\alpha_r$ ,  $\bar{V}$  и  $\bar{V}_r$ . Для решения

этой задачи воспользуемся уравнением (4.32), которое перепишем в виде

$$\bar{V} = \bar{V}_r + (W_{x_c} \bar{i}_c + W_{y_c} \bar{j}_c). \quad (4.33)$$

Для решения поставленной задачи спроецируем векторное уравнение (4.33) на оси связанной СК (на  $x$  и  $y$ ):

$$\begin{cases} x: V \cos \alpha = V_r \cos \alpha_r + W_{x_c} \cos \vartheta + W_{y_c} \sin \vartheta; \\ y: -V \sin \alpha = -V_r \sin \alpha_r - W_{x_c} \sin \vartheta + W_{y_c} \cos \vartheta. \end{cases}$$

В полученной системе уравнений  $V_r$ ,  $\alpha_r$  – неизвестные величины. Можно принять  $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\cos \alpha_r \approx 1$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin \alpha_r \approx \alpha_r$ . Тогда получим

$$\begin{cases} x: V = V_r + W_{x_c} \cos \vartheta + W_{y_c} \sin \vartheta; \\ y: V \alpha = V_r \alpha_r + W_{x_c} \sin \vartheta - W_{y_c} \cos \vartheta. \end{cases}$$

Так как  $|\bar{W}| \ll |\bar{V}|$ , то можно считать, что  $V_r^2 \approx V^2$ ,  $V_r \approx V$ . Отсюда

$$\alpha_r = \alpha - \frac{W_{x_c} \sin \vartheta}{V} + \frac{W_{y_c} \cos \vartheta}{V}.$$

Обозначим разность углов  $v = \alpha_r - \alpha$ . Тогда

$$v = \alpha_r - \alpha = -\frac{W_{x_c} \sin \vartheta}{V} + \frac{W_{y_c} \cos \vartheta}{V}.$$

Запишем уравнения движения ЛА с учетом ветра. При этом уравнение поступательного движения спроецируем на касательную и нормаль к траектории:

$$\begin{cases} \tau: m \frac{dV}{dt} = R \cos \alpha - G \sin \Theta - X \cos v + Y \sin v; \\ n: mV \frac{d\Theta}{dt} = R \sin \alpha - G \cos \Theta + X \sin v + Y \cos v. \end{cases}$$

Уравнение вращательного движения:

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = M_{Rz} + \frac{1}{2} \rho S V_r^2 l (m_{z0} + m_z^\alpha \alpha_r + m_z^{\bar{\omega}} \frac{\omega_z l}{V_r} + m_z^{\delta_B} \delta_B + m_z^{\bar{\alpha}} \frac{\dot{\alpha}_r l}{V_r}).$$

Остальные уравнения остаются без изменения:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega_z, \quad \frac{dx_c}{dt} = V \cos \Theta, \quad \frac{dy_c}{dt} = V \sin \Theta, \quad \vartheta = \Theta + \alpha.$$

Так как  $\cos \alpha \approx 1$ ,  $\cos v \approx 1$ ,  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin v \approx v$ , то можно принять  $Y \sin v \approx 0$ . Тогда получим систему уравнений движения ЛА в вертикальной плоскости с учетом влияния ветра:

$$\begin{aligned} 1) \quad m \frac{dV}{dt} &= R - G \sin \Theta - \frac{1}{2} C_x(M_r, \alpha_r) \rho S V^2; \\ 2) \quad m V \frac{d\Theta}{dt} &= R \alpha - G \cos \Theta + \frac{1}{2} C_x(M_r, \alpha_r) \rho S V^2 v + \frac{1}{2} C_y^\alpha(\alpha + v) \rho S V^2; \\ 3) \quad J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_{Rz} + \frac{1}{2} \rho S V_r^2 l (m_{z0} + m_z^\alpha \alpha_r + m_z^{\bar{\omega}} \frac{\omega_z l}{V_r} + m_z^{\delta_B} \delta_B + m_z^{\bar{\alpha}} \frac{\dot{\alpha}_r l}{V_r}); \\ 4) \quad \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z; \\ 5) \quad \vartheta &= \theta + \alpha; \\ 6) \quad \frac{dx_c}{dt} &= V \cos \Theta; \\ 7) \quad \frac{dy_c}{dt} &= V \sin \Theta; \\ 8) \quad V_r^2 &\approx V^2; \\ 9) \quad \alpha_r &= \alpha - \frac{W_{xc} \sin \vartheta}{V} + \frac{W_{yc} \cos \vartheta}{V}. \end{aligned} \tag{4.34}$$

# НАПРАВЛЯЮЩИЕ КОСИНУСЫ

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат  $Ox_1y_1z_1$ . Выделим на координатных осях  $Ox_1$ ,  $Oy_1$  и  $Oz_1$  единичные векторы (орты), обозначаемые  $\vec{i}_1$ ,  $\vec{j}_1$ ,  $\vec{k}_1$  соответственно (рис. П.1).

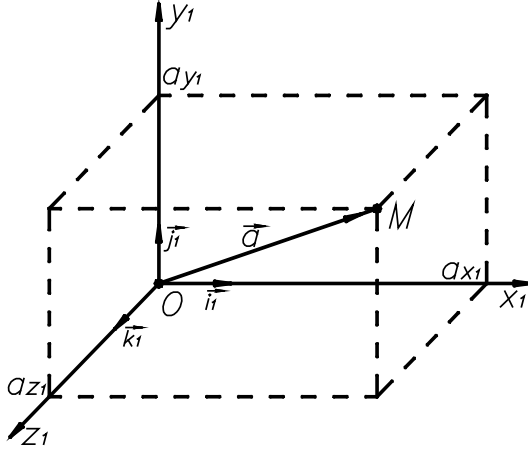


Рис. П.1. Радиус-вектор  $\vec{a}$  в первой СК

Положение точки  $M$  в пространстве определяется ее радиусом-вектором  $\vec{a}$ . Это вектор  $\vec{a}$ , проведенный из начала координат в точку  $M$ . Координатами точки  $M$  в прямоугольной декартовой СК будут расстояния (со знаком)  $a_{x1}$ ,  $a_{y1}$ ,  $a_{z1}$  до плоскостей  $Ox_1y_1$ ,  $Oy_1z_1$  и  $Ox_1z_1$ . Поэтому

$$\vec{a} = a_{x1}\vec{i}_1 + a_{y1}\vec{j}_1 + a_{z1}\vec{k}_1. \quad (\text{П.1})$$

Допустим, есть вторая прямоугольная система координат  $Ox_2y_2z_2$ , начало которой (точка  $O$ ) совпадает с началом первой СК  $Ox_1y_1z_1$ . Во второй СК

$$\vec{a} = a_{x2}\vec{i}_2 + a_{y2}\vec{j}_2 + a_{z2}\vec{k}_2. \quad (\text{П.2})$$

Находим проекции разложенного вектора  $\vec{a}$  во второй СК на оси первой СК на ось  $Ox_1$ :

$$a_{x1} = (a_{x2}\vec{i}_2 + a_{y2}\vec{j}_2 + a_{z2}\vec{k}_2)\vec{i}_1 = a_{x2}\vec{i}_2\vec{i}_1 + a_{y2}\vec{j}_2\vec{i}_1 + a_{z2}\vec{k}_2\vec{i}_1.$$

Далее находим оставшиеся проекции на оси  $Oy_1$  и  $Oz_1$ :

$$\begin{aligned} a_{y1} &= (a_{x2}\bar{i}_2 + a_{y2}\bar{j}_2 + a_{z2}\bar{k}_2)\bar{j}_1 = a_{x2}\bar{i}_2\bar{j}_1 + a_{y2}\bar{j}_2\bar{j}_1 + a_{z2}\bar{k}_2\bar{j}_1; \\ a_{z1} &= (a_{x2}\bar{i}_2 + a_{y2}\bar{j}_2 + a_{z2}\bar{k}_2)\bar{k}_1 = a_{x2}\bar{i}_2\bar{k}_1 + a_{y2}\bar{j}_2\bar{k}_1 + a_{z2}\bar{k}_2\bar{k}_1. \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Напомним, что скалярным произведением двух векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называется произведение их косинусов на модуль угла между ними:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b}).$$

Таким образом,

$$\bar{i}_2\bar{i}_1 = \cos(\bar{i}_2, \bar{i}_1) \cdot |\bar{i}_2| |\bar{i}_1| = \cos(\bar{i}_2, \bar{i}_1).$$

Запишем (П.3) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ a_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\bar{i}_2, \bar{i}_1) & \cos(\bar{j}_2, \bar{i}_1) & \cos(\bar{k}_2, \bar{i}_1) \\ \cos(\bar{i}_2, \bar{j}_1) & \cos(\bar{j}_2, \bar{j}_1) & \cos(\bar{k}_2, \bar{j}_1) \\ \cos(\bar{i}_2, \bar{k}_1) & \cos(\bar{j}_2, \bar{k}_1) & \cos(\bar{k}_2, \bar{k}_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{y2} \\ a_{z2} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.4})$$

Обозначим полученную матрицу направляющих косинусов через  $A_1$ :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos(\bar{i}_2, \bar{i}_1) & \cos(\bar{j}_2, \bar{i}_1) & \cos(\bar{k}_2, \bar{i}_1) \\ \cos(\bar{i}_2, \bar{j}_1) & \cos(\bar{j}_2, \bar{j}_1) & \cos(\bar{k}_2, \bar{j}_1) \\ \cos(\bar{i}_2, \bar{k}_1) & \cos(\bar{j}_2, \bar{k}_1) & \cos(\bar{k}_2, \bar{k}_1) \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ a_{z1} \end{bmatrix} = A_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{y2} \\ a_{z2} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.5})$$

Матрица  $A_1$  называется матрицей направляющих косинусов. Чтобы вычислить ее элементы, необходимо сначала вычислить углы между различными оортами двух систем координат, а затем – косинусы этих углов.

Отметим, что любая матрица направляющих косинусов обладает свойством ортогональности ( $A_1^{-1} = A_1^T$ ) и её определитель равен 1 ( $\det A_1 = 1$ ).

Допустим, есть третья прямоугольная система координат  $Ox_3y_3z_3$ , начало которой (точка  $O$ ) совпадает с началом первой СК  $Ox_1y_1z_1$ .

В третьей СК вектор

$$\bar{a} = a_{x3}\bar{i}_3 + a_{y3}\bar{j}_3 + a_{z3}\bar{k}_3. \quad (\text{П.6})$$

Аналогично находим проекции разложенного вектора  $\bar{a}$  в третьей СК на оси второй СК:



$$\begin{aligned}
a_{x2} &= (a_{x3}\bar{i}_3 + a_{y3}\bar{j}_3 + a_{z3}\bar{k}_3)\bar{i}_2 = a_{x3}\bar{i}_3\bar{i}_2 + a_{y3}\bar{j}_3\bar{i}_2 + a_{z3}\bar{k}_3\bar{i}_2 \cdot \\
a_{y2} &= (a_{x3}\bar{i}_3 + a_{y3}\bar{j}_3 + a_{z3}\bar{k}_3)\bar{j}_2 = a_{x3}\bar{i}_3\bar{j}_2 + a_{y3}\bar{j}_3\bar{j}_2 + a_{z3}\bar{k}_3\bar{j}_2 \cdot \\
a_{z2} &= (a_{x3}\bar{i}_3 + a_{y3}\bar{j}_3 + a_{z3}\bar{k}_3)\bar{k}_2 = a_{x3}\bar{i}_3\bar{k}_2 + a_{y3}\bar{j}_3\bar{k}_2 + a_{z3}\bar{k}_3\bar{k}_2 \cdot
\end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Запишем (П.7) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{y2} \\ a_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\bar{i}_3, \bar{i}_2) & \cos(\bar{j}_3, \bar{i}_2) & \cos(\bar{k}_3, \bar{i}_2) \\ \cos(\bar{i}_3, \bar{j}_2) & \cos(\bar{j}_3, \bar{j}_2) & \cos(\bar{k}_3, \bar{j}_2) \\ \cos(\bar{i}_3, \bar{k}_2) & \cos(\bar{j}_3, \bar{k}_2) & \cos(\bar{k}_3, \bar{k}_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{x3} \\ a_{y3} \\ a_{z3} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.8})$$

Обозначим полученную матрицу направляющих косинусов через  $A_2$ :

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos(\bar{i}_3, \bar{i}_2) & \cos(\bar{j}_3, \bar{i}_2) & \cos(\bar{k}_3, \bar{i}_2) \\ \cos(\bar{i}_3, \bar{j}_2) & \cos(\bar{j}_3, \bar{j}_2) & \cos(\bar{k}_3, \bar{j}_2) \\ \cos(\bar{i}_3, \bar{k}_2) & \cos(\bar{j}_3, \bar{k}_2) & \cos(\bar{k}_3, \bar{k}_2) \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{y2} \\ a_{z2} \end{bmatrix} = A_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{x3} \\ a_{y3} \\ a_{z3} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.9})$$

Подставив (П.9) в (П.5), получим

$$\begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ a_{z1} \end{bmatrix} = A_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{x2} \\ a_{y2} \\ a_{z2} \end{bmatrix} = A_1 \cdot A_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{x3} \\ a_{y3} \\ a_{z3} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.10})$$

Теперь выразим третью СК через первую. Для этого находим проекции разложенного вектора  $\bar{a}$  в третьей СК на оси первой:

$$\begin{aligned}
a_{x1} &= (a_{x3}\bar{i}_3 + a_{y3}\bar{j}_3 + a_{z3}\bar{k}_3)\bar{i}_1 = a_{x3}\bar{i}_3\bar{i}_1 + a_{y3}\bar{j}_3\bar{i}_1 + a_{z3}\bar{k}_3\bar{i}_1 \cdot \\
a_{y1} &= (a_{x3}\bar{i}_3 + a_{y3}\bar{j}_3 + a_{z3}\bar{k}_3)\bar{j}_1 = a_{x3}\bar{i}_3\bar{j}_1 + a_{y3}\bar{j}_3\bar{j}_1 + a_{z3}\bar{k}_3\bar{j}_1 \cdot \\
a_{z1} &= (a_{x3}\bar{i}_3 + a_{y3}\bar{j}_3 + a_{z3}\bar{k}_3)\bar{k}_1 = a_{x3}\bar{i}_3\bar{k}_1 + a_{y3}\bar{j}_3\bar{k}_1 + a_{z3}\bar{k}_3\bar{k}_1 \cdot
\end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Запишем (П.11) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ a_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\bar{i}_3, \bar{i}_1) & \cos(\bar{j}_3, \bar{i}_1) & \cos(\bar{k}_3, \bar{i}_1) \\ \cos(\bar{i}_3, \bar{j}_1) & \cos(\bar{j}_3, \bar{j}_1) & \cos(\bar{k}_3, \bar{j}_1) \\ \cos(\bar{i}_3, \bar{k}_1) & \cos(\bar{j}_3, \bar{k}_1) & \cos(\bar{k}_3, \bar{k}_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{x3} \\ a_{y3} \\ a_{z3} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.12})$$

Обозначим полученную матрицу направляющих косинусов через  $A_3$ :

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos(\bar{i}_3, \bar{i}_1) & \cos(\bar{j}_3, \bar{i}_1) & \cos(\bar{k}_3, \bar{i}_1) \\ \cos(\bar{i}_3, \bar{j}_1) & \cos(\bar{j}_3, \bar{j}_1) & \cos(\bar{k}_3, \bar{j}_1) \\ \cos(\bar{i}_3, \bar{k}_1) & \cos(\bar{j}_3, \bar{k}_1) & \cos(\bar{k}_3, \bar{k}_1) \end{bmatrix}. \quad (\text{П.13})$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ a_{z1} \end{bmatrix} = A_3 \cdot \begin{bmatrix} a_{x3} \\ a_{y3} \\ a_{z3} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.14})$$

Таким образом, подставив (П.14) в (П.10), получим

$$A_3 \cdot \begin{bmatrix} a_{x3} \\ a_{y3} \\ a_{z3} \end{bmatrix} = A_1 \cdot A_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{x3} \\ a_{y3} \\ a_{z3} \end{bmatrix}. \quad (\text{П.15})$$

Следовательно,

$$A_3 = A_1 \cdot A_2. \quad (\text{П.16})$$

Таким образом, чтобы найти координаты вектора  $\bar{a}$  в третьей системе координат, необходимо последовательно перемножить матрицы направляющих косинусов  $A_1$  и  $A_2$ .

Рассмотрим пример перехода из стартовой СК в связанную. Связанную и стартовую СК можно совместить при помощи трех последовательных поворотов на углы рыскания, тангажа и крена.

Первый поворот осуществим относительно оси  $O_0 y_c$  на угол рыскания  $\psi$  с угловой скоростью угла рыскания  $\bar{\psi}$  (рис. П.2).

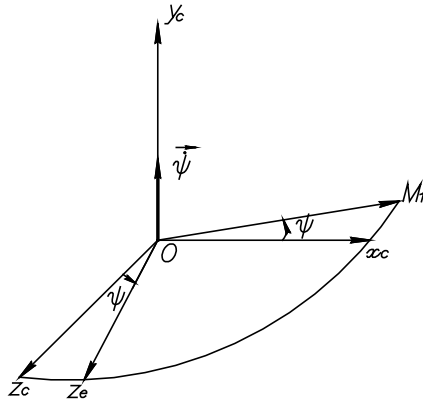


Рис. П.2. Поворот горизонтальной плоскости на угол рыскания

Запишем матрицу перехода между новой СК  $OM_1y_cz_e$ , полученной в результате поворота горизонтальной плоскости на угол рыскания, и стартовой СК (табл. П.1):

Т а б л и ц а П.1

	$OM_1$	$Oy_c$	$Oz_e$
$Ox_c$	$\cos \psi$	0	$\sin \psi$
$Oy_c$	0	1	0
$Oz_c$	$-\sin \psi$	0	$\cos \psi$

Обозначим полученную матрицу направляющих косинусов через  $A_1$  :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричном виде первый переход между системами координат:

$$\begin{pmatrix} Ox_c \\ Oy_c \\ Oz_c \end{pmatrix} = A_1 \cdot \begin{pmatrix} OM_1 \\ Oy_c \\ Oz_c \end{pmatrix}.$$

Второй поворот осуществим относительно оси  $Oz_e$  на угол тангажа  $\vartheta$  с угловой скоростью угла тангажа  $\dot{\vartheta}$  (рис. П.3).

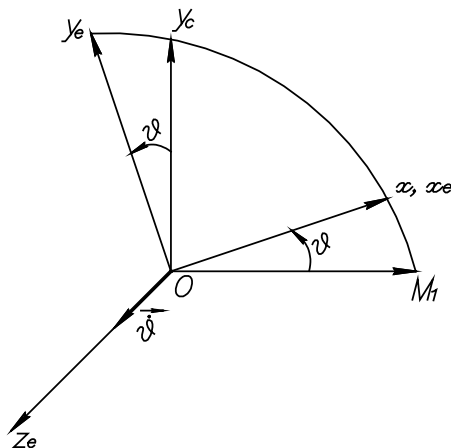


Рис. П.3. Поворот вертикальной плоскости на угол тангажа

Запишем матрицу перехода между новой СК  $Ox_y z_e$ , полученной в результате поворота вертикальной плоскости на угол тангажа, и СК  $OM_1 y_c z_e$  (табл. П.2):

Т а б л и ц а П.2

	$Ox$	$Oy_e$	$Oz_e$
$OM_1$	$\cos \vartheta$	$-\sin \vartheta$	0
$Oy_c$	$\sin \vartheta$	$\cos \vartheta$	0
$Oz_e$	0	0	1

Обозначим полученную матрицу направляющих косинусов через  $A_2$ :

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричном виде второй переход между системами координат:

$$\begin{pmatrix} OM_1 \\ Oy_c \\ Oz_e \end{pmatrix} = A_2 \cdot \begin{pmatrix} Ox \\ Oy_e \\ Oz_e \end{pmatrix}.$$

Последний, третий поворот осуществляется относительно оси  $Ox$  на угол крена  $\gamma$  с угловой скоростью угла крена  $\dot{\gamma}$  (рис. П.4).

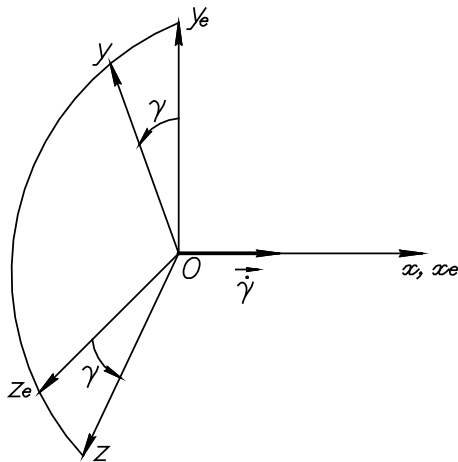


Рис. П.4. Поворот поперечной плоскости на угол крена

Аналогично запишем матрицу перехода между новой СК  $Oxyz$ , полученной в результате поворота поперечной плоскости на угол крена, и системой координат  $Oxy_ez_e$  (табл. П.3):

Т а б л и ц а П.3

	$Ox$	$Oy$	$Oz$
$Ox$	1	0	0
$Oy_e$	0	$\cos \gamma$	$-\sin \gamma$
$Oz_e$	0	$\sin \gamma$	$\cos \gamma$

Обозначим полученную матрицу направляющих косинусов через  $A_3$ :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричном виде третий переход между системами координат:

$$\begin{pmatrix} Ox \\ Oy_e \\ Oz_e \end{pmatrix} = A_3 \cdot \begin{pmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{pmatrix}.$$

В результате последовательных трех поворотов на углы рыскания, тангажа и крена получили три матрицы перехода:

$$\begin{pmatrix} Ox_c \\ Oy_c \\ Oz_c \end{pmatrix} = A_1 \cdot \begin{pmatrix} OM_1 \\ Oy_c \\ Oz_c \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} OM_1 \\ Oy_c \\ Oz_e \end{pmatrix} = A_2 \cdot \begin{pmatrix} Ox \\ Oy_e \\ Oz_e \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} Ox \\ Oy_e \\ Oz_e \end{pmatrix} = A_3 \cdot \begin{pmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} Ox_c \\ Oy_c \\ Oz_c \end{pmatrix} = A_1 \cdot \begin{pmatrix} OM_1 \\ Oy_c \\ Oz_c \end{pmatrix} = A_1 \cdot A_2 \cdot \begin{pmatrix} Ox \\ Oy_e \\ Oz_e \end{pmatrix} = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \begin{pmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{pmatrix}.$$

Окончательно получаем переход между связанной и стартовой СК:

$$\begin{pmatrix} Ox_c \\ Oy_c \\ Oz_c \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} Ox \\ Oy \\ Oz \end{pmatrix},$$

где  $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ .

Таким образом, чтобы найти координаты в стартовой СК, зная координаты в связанной, необходимо последовательно перемножить сначала матрицы направляющих косинусов  $A_1 \cdot A_2$ , а затем результат умножить на матрицу  $A_3$ :

$$\begin{aligned} A_1 \cdot A_2 &= \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & -\cos \psi \sin \vartheta & \sin \psi \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ -\sin \psi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta & \cos \psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} A &= A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & -\cos \psi \sin \vartheta & \sin \psi \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ -\sin \psi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta & \cos \psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & -\cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma & \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \cos \gamma & -\sin \gamma \cos \vartheta \\ -\sin \psi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma & -\sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \cos \gamma \cos \psi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Аналогичный результат можно получить, последовательно раскладывая единичный вектор на два взаимно перпендикулярных направления, одно из которых находится в плоскости, где расположена та ось, на которую мы хотим спроецировать нужный единичный вектор. Затем каждая из двух полученных проекций проецируется на выбранное направление и результат алгебраически складывается.

Рассмотрим, как находится элемент  $a_{21}$  (рис. П.5). Данный косинус является углом между двумя положительными направлениями осей  $Oy$  связанной СК и  $Ox_c$  стартовой СК.

Проекция вектора  $\vec{j}$  на два взаимно перпендикулярных направления  $Oy_e$  и  $Oz_e$ , где  $Oz_e$  лежит в одной плоскости с направлением оси  $Ox_c$ , дает результат: на ось  $Oy_e + \vec{j} \cos \gamma$ , на ось  $Oz_e + \vec{j} \sin \gamma$ . Проекция  $\vec{j} \cos \gamma$  на ось  $Ox_c$  дает  $-\vec{j} \cos \gamma \sin \psi \cos \psi$ , а проекция  $\vec{j} \sin \gamma$  на ось  $Ox_c$   $\vec{j} \sin \gamma \sin \psi$ .

Результирующий направляющий косинус между осью  $Oy$ , вдоль которой направлен вектор  $\vec{j}$ , и осью  $Ox_c$  получится алгебраическим сложением двух проекций, а именно:  $-\cos \gamma \sin \psi \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi$ .

Также, последовательно раскладывая нужный вектор на два взаимно перпендикулярных направления, можно найти любой другой необходимый направляющий косинус.

Подробнее про существующие системы координат и переходы между ними можно посмотреть в [5].

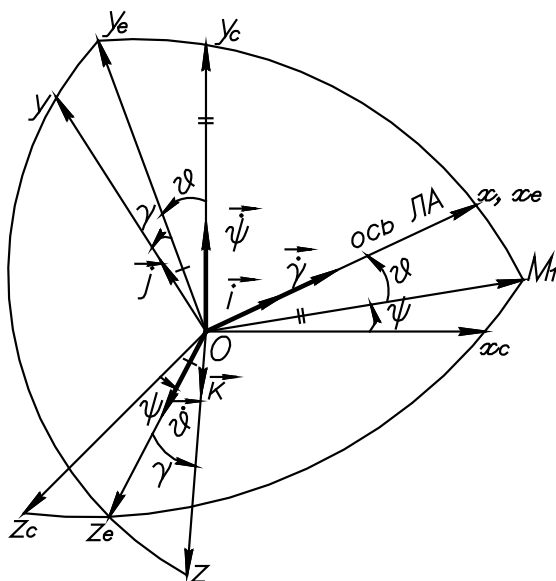


Рис. П.5. Переход от стартовой СК к связанной

Используя рассмотренные способы нахождения направляющих косинусов, можно записать матрицы перехода между любыми системами координат, ориентированными относительно друг друга определенной системой углов. Матрицы направляющих косинусов, необходимые для данного курса, приведены в табл. П.4–П.6.

Т а б л и ц а П.4

**Направляющие косинусы для преобразования составляющих векторов**

		Стартовая СК		
		$Ox_c$	$Oy_c$	$Oz_c$
Связанная СК	$Ox$	$\cos \psi \cos \vartheta$	$\sin \vartheta$	$-\sin \psi \cos \vartheta$
	$Oy$	$-\cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma$	$\cos \vartheta \cos \gamma$	$\sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma$
	$Oz$	$\cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma$	$-\sin \gamma \cos \vartheta$	$-\sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \cos \gamma \cos \psi$

Окончание табл. П.4

		Стартовая СК		
		$Ox_c$	$Oy_c$	$Oz_c$
Скоростная СК	$Ox_a$	$\cos \Psi \cos \Theta$	$\sin \Theta$	$-\sin \Psi \cos \Theta$
	$Oy_a$	$-\cos \Psi \sin \Theta \cos \gamma_c + \sin \Psi \sin \gamma_c$	$\cos \Theta \cos \gamma_c$	$\sin \Psi \sin \Theta \cos \gamma_c + \cos \Psi \sin \gamma_c$
	$Oz_a$	$\cos \Psi \sin \Theta \sin \gamma_c + \sin \Psi \cos \gamma_c$	$-\sin \gamma_c \cos \Theta$	$-\sin \Psi \sin \Theta \sin \gamma_c + \cos \gamma_c \cos \Psi$
Полускоростная СК	$Ox_*$	$\cos \Psi \cos \Theta$	$\sin \Theta$	$-\sin \Psi \cos \Theta$
	$Oy_*$	$-\sin \Theta \cos \Psi$	$\cos \Theta$	$\sin \Psi \sin \Theta$
	$Oz_*$	$\sin \Psi$	0	$\cos \Psi$
Полусвязанная СК	$Ox_e$	$\cos \psi \cos \vartheta$	$\sin \vartheta$	$-\sin \psi \cos \vartheta$
	$Oy_e$	$-\sin \vartheta \cos \psi$	$\cos \vartheta$	$\sin \psi \sin \vartheta$
	$Oz_e$	$\sin \psi$	0	$\cos \psi$

Т а б л и ц а П.5

		Связанная СК		
		$Ox$	$Oy$	$Oz$
Скоростная СК	$Ox_a$	$\cos \beta \cos \alpha$	$-\cos \beta \sin \alpha$	$\sin \beta$
	$Oy_a$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	0
	$Oz_a$	$-\sin \beta \cos \alpha$	$\sin \beta \sin \alpha$	$\cos \beta$



		Связанная СК		
		$Ox$	$Oy$	$Oz$
Полускоростная СК	$Ox_*$	$\cos \beta \cos \alpha$	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\sin \beta$
	$Oy_*$	$\sin \alpha \cos \gamma_c + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_c$	$\cos \alpha \cos \gamma_c - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma_c$	$-\cos \beta \sin \gamma_c$
	$Oz_*$	$\sin \alpha \sin \gamma_c - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_c$	$\cos \alpha \sin \gamma_c + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma_c$	$\cos \beta \cos \gamma_c$
Полусвязанная СК	$Ox_e$	1	0	0
	$Oy_e$	0	$\cos \gamma$	$-\sin \gamma$
	$Oz_e$	0	$\sin \gamma$	$\cos \gamma$

Т а б л и ц а П.6

		Скоростная СК		
		$Ox_a$	$Oy_a$	$Oz_a$
Полусвязанная СК	$Ox_e$	$\cos \alpha \cos \beta$	$\sin \alpha$	$-\sin \beta \cos \alpha$
	$Oy_e$	$-\cos \gamma \sin \alpha \cos \beta - \sin \gamma \sin \beta$	$\cos \alpha \cos \gamma$	$-\cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \sin \alpha \cos \gamma$
	$Oz_e$	$\cos \gamma \sin \beta - \sin \gamma \sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \sin \gamma$	$\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \alpha \sin \gamma$
Полускоростная СК	$Ox_*$	1	0	0
	$Oy_*$	0	$\cos \gamma_c$	$-\sin \gamma_c$
	$Oz_*$	0	$\sin \gamma_c$	$\cos \gamma_c$

### ***Библиографический список***

1. ГОСТ 20058–80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения, обозначения.
2. *Ефремов А.В.*, Захарченко В.Ф., Овчаренко В.Н., Суханов В.Л., Шелюхин Ю.Ф., Устинов А.С. Динамика полета: учебник для студентов вузов. М.: Машиностроение, 2011.
3. *Лебедев А.А.*, Чернобровкин Л.С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов: учебное пособие для вузов. Изд. 2-е перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1973.
4. *Лысенко Л.Н.*, Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика. М.: Машиностроение, 2005.
5. *Савельев Ю.П.* Лекции по уравнениям динамики полета и внешней баллистики: [учеб. пособие по дисциплинам воен.-спец. подгот. для вузов по программе подгот. офицеров запаса воен.-учет. специальностей ракет. и артиллер. профилей]. Кн. 1: СПб., 2003.

# О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЖЁСТКОГО ЛА С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ .....	4
1.1. Системы координат, используемые при описании движения ЛА .....	4
1.2. Взаимное расположение систем координат. Связь между координатными системами. Направляющие косинусы .....	8
1.3. Геометрические соотношения .....	16
1.4. Кинематические соотношения .....	18
1.5. Уравнения динамики пространственного движения .....	21
1.6. Вывод уравнений поступательного движения в пространстве .....	25
1.7. Уравнения вращательного движения в пространстве .....	29
2. СИЛЫ И МОМЕНТЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЛЕТАТЕЛЬНЫЙ АППАРАТ .....	32
2.1. Выражения для проекции сил тяги и веса на полускоростные и связанные оси .....	33
2.2. Выражения для проекций аэродинамических сил на полускоростные и связанные оси .....	35
2.3. Аэродинамические моменты .....	40
2.4. Понятие маневренности. Выражения для перегрузок .....	50
3. ОРГАНЫ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЁТОМ. УПРАВЛЯЮЩИЕ СИЛЫ И МОМЕНТЫ .....	56
3.1. Принцип действия рулей и поворотных крыльев .....	57
3.2. Газодинамические органы управления .....	66
4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЛА ПРИ ЗАКРЕПЛЁННЫХ РУЛЯХ .....	70
4.1. Анализ системы уравнений пространственного движения .....	70
4.2. Основные методы упрощения общей пространственной системы .....	73
4.2.1. Разделение общего пространственного движения ЛА на поступательное движение центра масс и вращательное движение относительно центра масс .....	73
4.2.2. Разделение пространственного движения ЛА на продольное и боковое .....	76
4.2.3. Линеаризация общей пространственной системы .....	81
4.2.4. Уравнения продольного движения в вариациях. Динамические коэффициенты .....	90
4.2.5. Уравнения бокового движения в вариациях .....	93
4.3. Некоторые программные траектории полета .....	97
4.3.1. Балансировочный режим .....	97
4.3.2. Программный разворот в вертикальной плоскости .....	101
4.4. Учёт влияния вращающихся масс (маховиков) в уравнениях вращательного движения ЛА .....	103
4.5. Учёт влияния ветра в задачах динамики полёта .....	106
П р и л о ж е н и е .....	110
Библиографический список .....	121

*Лемешонок Татьяна Юрьевна, Сизова Анастасия Александровна,  
Баранов Николай Евгеньевич, Санников Виталий Андреевич*

**Математические модели динамики движения  
летательных аппаратов**

Редактор *Г.В. Никитина*

Корректор *Л.А. Петрова*

Компьютерная верстка: *Н.А. Андреева*

Подписано в печать 21.08.2020. Формат 60×84/16. Бумага документная.

Печать трафаретная. Усл. печ. л. 7,125. Тираж 100 экз. Заказ № 114

Балтийский государственный технический университет

Типография БГТУ

190005, С.-Петербург, 1-я Красноармейская ул., д. 1

