

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ НОСОВОЙ ЧАСТИ В РАМКАХ ЛОКАЛЬНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

© 2018 г. С.А. Таковицкий

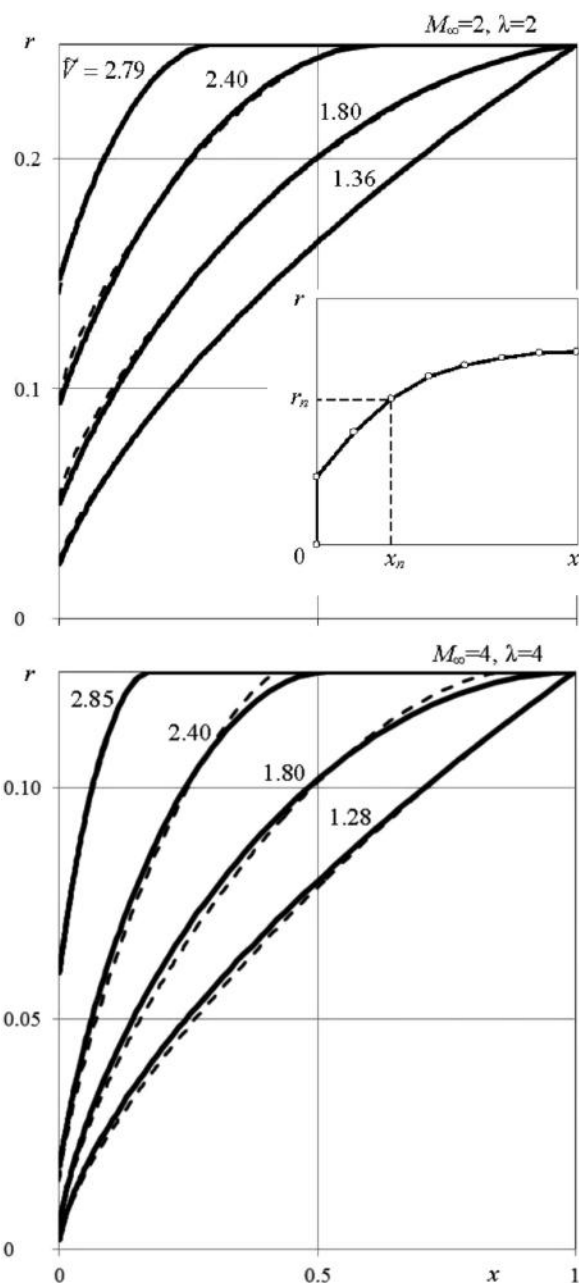
Задача построения осесимметричной носовой части минимального сопротивления при заданных ограничениях по объему и габаритам решена в рамках локальной линеаризации связи между геометрическими параметрами и газодинамическими функциями. Оптимальная носовая часть найдена через вариацию формы конуса эквивалентного удлинения, для которого на основе известных точных значений параметров течения определена аппроксимация целевой функции (волнового сопротивления, связанного с объемом). Характерные особенности оптимальной формы — притупление носка по торцу и гладкая стыковка с замыкающим цилиндром для тел достаточно большого объема, превышающего значение, зависящее от удлинения и числа Маха. Сопоставление с результатами прямой численной оптимизации в рамках модели Эйлера показало, что предлагаемое аналитическое решение обеспечивает достижение близких к минимальным значениям волнового сопротивления.

Ключевые слова: волновое сопротивление, оптимальная носовая часть, локальная линеаризация, аналитическое решение

DOI: 10.31857/S003282350002741-5

Задача минимизации сопротивления осесимметричной носовой части, первоначально сформулированная Ньютоном, получила развитие как в направлении усложнения используемых моделей течения, так и по анализу влияния дополнительных ограничений, накладываемых на геометрические параметры. Имеется подробный обзор известных решений в [1]. Отмечено, что результаты, полученные с помощью методов вычислительной аэродинамики, подтверждают справедливость данных о характерных особенностях оптимальных форм, которые были установлены на основе локальной формулы Ньютона для давления на теле. В первую очередь, это обязательное присутствие торца в оптимальной носовой части заданных габаритов. Самостоятельные исследования проведены для тел, задаваемых степенной зависимостью радиуса от продольной координаты, и для тел с единой образующей для произвольных значений удлинения. Эффективность использования тел вращения степенной формы подтверждена экспериментально [2].

Модель Ньютона — локальная модель, она связывает местное давление только с ориентацией элемента поверхности по отношению к вектору скорости и не учитывает аэродинамическую интерференцию между элементами тела. Тем не менее, по качеству построенных тел эта модель превосходит модель линеаризованного сверхзвукового течения. Заметим, что в отличие от плоского случая линеаризация уравнений движения не приводит к локальности, и в случае осесимметричного течения местное давление зависит от формы тела вверх по потоку. Во многом это объясняется ролью переднего торца как элемента краевого экстремума, который легко вводится в рассмотрение в модели Ньютона и который не удалось учесть в



линейной теории. В последнем случае особенность передней точки проявилась в бесконечном значении производной радиуса по продольной координате.

Точность исследования, основанного на подходах линейной теории, можно повысить, если принять в качестве исходного варианта тело с известным распределением аэродинамической нагрузки и выполнить локальную линеаризацию относительно местных параметров течения в окрестности каждого элемента поверхности. В случае осесимметричных тел известны теоретические значения параметров

течения около конусов, обтекаемых с присоединенным скачком уплотнения. Заметим, что у конуса отсутствует обязательный элемент оптимального тела — передний торец. В результате по значениям волнового сопротивления превышение составляет десятки процентов. Тем не менее, посредством определения улучшающей вариации формы конуса с возможным образованием переднего торца в рамках локальной линеаризации удалось построить близкие к оптимальным по волновому сопротивлению осесимметричные носовые части [3]. Предлагается развитие этого подхода для аналитического решения задачи с дополнительным ограничением по объему.

1. Постановка задачи. Рассматривается задача минимизации волнового сопротивления осесимметричной носовой части, имеющей заданные габариты и объем. Сопротивление трения по поверхности тела не учитывается, что позволяет принять длину носовой части за единицу и представить все линейные размеры в ее долях. Радиус миделевого сечения равен $R = 0.5/\lambda$, где λ — удлинение носовой части. Характерная величина объема — объем конуса $V_c = \pi/(12\lambda^2)$, который составляет 1/3 от максимально допустимого объема, соответствующего цилиндру. Определяющими параметрами, от которых зависит решение, являются основные геометрические характеристики носовой части — удлинение λ и относительный объем V/V_c , и число Маха M_∞ , характеризующее условия в набегающем потоке. Тело обтекается под нулевым углом атаки.

В цилиндрической системе координат образующая тела определяется набором из $N+1$ точки с координатами $x_n, r_n, n = 0, 1, \dots, N$. Соседние точки соединены прямолинейными отрезками: представление образующей показано на фигуре. Точка $x_0 = 0, r_0 = 0$ лежит на оси симметрии и задает начало системы координат. Первый отрезок, представляющий торец, имеет длину r_1 и направлен вертикально вверх ($x_1 = 0$). Отрезок под номером n соединяет пару точек, которые имеют координаты x_{n-1}, r_{n-1} и x_n, r_n . Такое представление применимо для исследования затупленных и заостренных тел. Если передний торец отсутствует, то $r_1 = 0$. Для последней точки набора выполняются условия $r_N = R$ и $x_N = 1$. Таким образом, удлинение носовой части фиксировано.

Целевая функция — коэффициент волнового сопротивления носовой части c_x , который представляется суммой по всем элементам образующей

$$c_x = \frac{2}{\gamma M_\infty^2 R^2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{p_n}{p_\infty} - 1 \right) (r_n^2 - r_{n-1}^2) \quad (1.1)$$

Здесь p_∞ — давление в невозмущенном потоке, p_n — давление на n -м отрезке образующей тела вращения, γ — отношение удельных теплоемкостей (в представленном исследовании принято $\gamma = 1.4$). При вычислении коэффициента волнового сопротивления аэродинамическая сила отнесена к скоростному напору и площади основания носовой части.

В процессе оптимизации предполагаем, что переднему торцу соответствует постоянная (независящая от формы тела) величина давления p_1 . Оценка давления на торце может быть получена из соотношений для прямого скачка уплотнения или по результатам численного расчета обтекания цилиндра. Здесь использован второй вариант. Геометрическими параметрами, варьируемыми в процессе оптимизации, служат радиусы r_n в узловых сечениях с номерами $n=1, \dots, N-1$.

Оптимальные носовые части, получаемые при решении изопериметрической задачи с нелинейным ограничением типа равенства $V(r_1, r_2, \dots, r_N) = \text{const}$, имеют сложную геометрическую структуру [1]. Ограничимся исследованием наиболее интересного с практической точки зрения случая, когда объем носовой части больше объема V_0 , соответствующего оптимальной носовой части в рамках безусловной оптимизации. Решение в этом случае характеризуется наличием участка двустороннего экстремума (центральная часть обра-

зующей) и участков краевого экстремума (передний торец и цилиндрический участок, прилегающий к основанию тела). Первый краевой участок обусловлен ограничением по длине, второй — ограничениями по поперечному габариту и объему. В постановке задачи построения носовых частей заданного объема появляются дополнительные условия типа неравенства $r_n \leq r_N$ ($n = 1, \dots, N-1$). Это габаритные ограничения, и они присутствовали в задаче безусловной минимизации [3], но были неактивными.

Условие сохранения внутреннего объема определяется соотношением

$$\Delta \tilde{V} = 4\lambda^2 \sum_{n=2}^N (r_{n-1}^2 + r_{n-1}r_n + r_n^2)(x_n - x_{n-1}) - \tilde{V} = 0; \quad \tilde{V} = \frac{V}{V_c}$$

где V — заданное условиями задачи значение объема.

Переход к безусловной минимизации осуществляется введением функции Лагранжа $F = c_x + \mu \Delta \tilde{V}$ с неизвестным множителем μ . Для носовой части заданного объема с минимальным сопротивлением выполняются необходимые условия оптимальности — равенство нулю градиента функции F . Полученная в результате система N уравнений позволяет определить экстремальные значения геометрических параметров. Соотношения, связывающие давление с геометрическими параметрами, предлагается установить на основе локальной линеаризации.

2. Аналитическое решение в рамках локальной линеаризации. Метод локальной линеаризации оказался достаточно мощным инструментом для решения оптимизационных задач. Примеры прямой численной оптимизации подтвердили высокую скорость сходимости метода при большом числе управлений [1]. Другое важное достоинство метода локальной линеаризации — возможность установления характерных особенностей оптимальных форм, получения решений в аналитическом виде [3].

Примем равномерное распределение узловых точек в продольном направлении

$$x_n = (n-1)\Delta x, \quad \Delta x = 1/(N-1), \quad n = 1, \dots, N$$

В качестве исходного тела рассмотрим конус эквивалентного удлинения, для которого известны значения радиусов во всех поперечных сечениях: $r_{n,c} = R(n-1)/(N-1)$. Также считаем известными значения давления p_c и числа Маха M_c на поверхности конуса и осредненное значение давления p_l на переднем торце.

Дальнейшие рассуждения проведем в предположении о малости углов наклона отрезков образующей (без учета торца) относительно продольной оси

$$(r_n - r_{n-1})/(x_n - x_{n-1}) \rightarrow 0, \quad n = 2, \dots, N$$

Принятое допущение о локальности влияния изменения формы конуса на приращение поверхностного давления в линейной постановке приводит к соотношению, позволяющему определить давление на n -м отрезке ($n > 1$) образующей тела вращения произвольной формы

$$\frac{p_n}{p_\infty} = \frac{p_c}{p_\infty} + \frac{k}{\Delta x} (r_n - r_{n-1} - r_{n,c} + r_{n-1,c}); \quad k = \frac{\gamma M_c^2 p_c}{p_\infty \sqrt{M_c^2 - 1}}$$

В результате локальной линеаризации соотношение для волнового сопротивления (1.1) преобразуется к аналитической зависимости от геометрических параметров

$$c_x = \frac{2}{\gamma M_\infty^2 R^2} \left(\frac{p_l}{p_\infty} - 1 \right) r_1^2 + \frac{2}{\gamma M_\infty^2 R^2} \sum_{n=2}^N \left(\frac{p_c}{p_\infty} - 1 - \frac{k}{2\lambda} + \frac{k}{\Delta x} (r_n - r_{n-1}) \right) (r_n^2 - r_{n-1}^2)$$

Здесь учтено геометрическое соотношение, справедливое для конуса

$$2\lambda(r_{n,c} - r_{n-1,c}) = \Delta x$$

Функция Лагранжа аппроксимируется кубической формой от геометрических параметров r_n ($n = 1, \dots, N-1$) и множителя μ . Для определения оптимальной формы носовой части воспользуемся приемом [3], который заключается в анализе частных производных целевой функции и предельном переходе при $N \rightarrow \infty$.

Первое условие экстремума $\partial F / \partial r_1 = 0$ приводит к соотношению, которое связывает параметры r_1 и r_2

$$6r_1 \left(\frac{p_1 - p_c}{p_\infty} + \frac{k}{2\lambda} \right) - 3 \frac{k}{\Delta x} (r_2^2 + 2r_1 r_2 - 3r_1^2) + \tau \Delta x (2r_1 + r_2) = 0; \quad \tau = 6\gamma\lambda^2 M_\infty^2 R^2 \mu$$

Применив линейную аппроксимацию с использованием производной радиуса по продольной координате в месте стыковки образующей с передним торцом ($x = 0$) $r_2 = r_1 + r'_1 \Delta x$ и, устремив N к бесконечности (т.е. $\Delta x \rightarrow 0$), преобразуем экстремальное соотношение к виду

$$r_1 \left(2 \left(\frac{p_1 - p_c}{p_\infty} + \frac{k}{2\lambda} \right) - 4kr'_1 \right) = 0$$

Это уравнение имеет два решения, одно из которых устанавливает отсутствие переднего торца $r_1 = 0$, а второе фиксирует значение производной r'_1 :

$$r'_1 = \frac{1}{4\lambda} + \frac{p_1 / p_c - 1}{2\gamma M_c^2} \sqrt{M_c^2 - 1} \quad (2.1)$$

Условия $\partial F / \partial r_n = 0$ при $n=2, \dots, N-1$ связывают радиусы в трех соседних поперечных сечениях r_{n-1} , r_n и r_{n+1} :

$$3 \frac{k}{\Delta x} (8r_n^2 - (r_n + r_{n-1})^2 - (r_n + r_{n+1})^2) + \tau \Delta x (4r_n + r_{n-1} + r_{n+1}) = 0$$

В этом случае при предельном переходе $N \rightarrow \infty$ необходимо применить квадратичную аппроксимацию с использованием первой и второй производной радиуса по продольной координате в сечении x_n :

$$r_{n\pm 1} = r_n \pm r'_n \Delta x + \frac{1}{2} r''_n \Delta x^2$$

В результате устанавливаем дифференциальное соотношение, которое выполняется для всех точек экстремальной образующей, при условии отсутствия нарушений по габаритным ограничениям. Уравнение связывает радиус, первую и вторую производные радиуса:

$$2rr'' + r'^2 - \frac{\tau}{k} r = 0 \quad (2.2)$$

Порядок уравнения понижается, и первый интеграл записывается в виде

$$r \left(r'^2 - \frac{\tau}{2k} r \right) = C; \quad C = \text{const} = r_1 \left(r_1'^2 - \frac{\tau}{2k} r_1 \right) \quad (2.3)$$

Анализ полученных уравнений показывает, что при отсутствии торца (т.е. при $r(0) = 0$) экстремальным будет либо тело нулевой толщины ($r \equiv 0$), либо тело с образующей параболической формы $r = \frac{\tau}{8k} x^2$. Первый вариант не удовлетворяет габаритному ограничению в миделевом сечении. Во втором случае тело имеет вогнутую образующую, и следовательно,

его объем будет меньше объема носовой части, оптимальной в рамках безусловной оптимизации. В представленном исследовании такие тела не рассматриваются.

Преобразуем уравнение (2.3) к более удобному виду

$$r' = \sqrt{\frac{r_1}{r} \left(r_1'^2 - \frac{\tau}{2k} r_1 \right) + \frac{\tau}{2k} r} \quad (2.4)$$

Здесь учтено условие положительности производной радиуса, а значение постоянной C в равенстве (2.3) определено из граничного условия при $x = 0$.

Простые рассуждения показывают, что условию $V > V_0$ соответствуют отрицательные значения множителя Лагранжа $\mu < 0$. Решение при $V = V_0$ было найдено в [3], и для него выполняются условия $r'' < 0$ и $2rr'' + r'^2 = 0$. Согласно уравнению (2.2), множители τ и μ уменьшаются (т.е. перейдут в диапазон отрицательных значений) при увеличении второй производной радиуса по абсолютному значению и уменьшении отношения квадрата производной радиуса к радиусу, что и происходит при увеличении объема.

Учтем условие $\mu < 0$ и преобразуем уравнение (2.4) путем двух последовательных замен переменных:

$$\begin{aligned} 1) \quad y' &= \sqrt{\frac{|\tau|(1-y^2)}{2kAy}}, \quad y = \frac{r}{A}; \quad 0 < y \leq 1, \quad A = \sqrt{r_1^2 + \frac{2k}{|\tau|} r_1 r_1'^2} \\ 2) \quad z' &= \frac{2}{B\sqrt{\sin z}}, \quad z = \arcsin y; \quad B = \sqrt{\frac{2kA}{|\tau|}} \end{aligned}$$

Переходим к интегральной форме уравнения

$$x = B \int_a^b \sqrt{\sin z} dz; \quad a = \arcsin(r_1/A), \quad b = \arcsin(r/A)$$

Сделав заключительную замену переменной, приходим к окончательному результату

$$x = -2B \int_{\pi/4-a/2}^{\pi/4-b/2} \sqrt{1-2\sin^2 \varphi} d\varphi, \quad \varphi = \frac{\pi-2z}{4} \quad (2.5)$$

Интеграл в правой части этого уравнения выражается через эллиптический интеграл второго рода $E(\varphi, \sqrt{2})$ [4], который для удобства вычислений стандартным образом выражается через табличные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем $1/\sqrt{2}$.

Значения параметров r_1 и μ определяются численно из заданных условиями задачи значений удлинения и объема носовой части. Зафиксировав некоторое значение множителя μ , подбираем радиус переднего торца r_1 так, чтобы образующая вышла на требуемый радиус основания. После этого вычисляем объем построенной носовой части и сопоставляем с заданным значением. По результатам сопоставления корректируем величину множителя Лагранжа. Процесс повторяется до достижения определенной точности.

При значениях V , больших некоторого значения, проявляются ограничения по поперечным габаритам носовой части. В этом случае замыкающий участок носовой части является участком краевого экстремума и представляется цилиндром радиуса R . В уравнении (2.5) радиусу $r = R$ соответствует продольная координата $x < 1$. Дальнейшее увеличение объема сопровождается увеличением длины цилиндрического участка и уменьшением длины образующей, определяемой уравнением (2.5).

3. Анализ результатов. На заключительном этапе исследования построены оптимальные при разных значениях определяющих параметров носовые части. Для определения волнового сопротивления использованы методы вычислительной аэродинамики.

Течение около носовой части моделировалось в рамках уравнений Эйлера. Волновое сопротивление вычислялось непосредственным интегрированием сил избыточного давления по поверхности тела. Головной скачок уплотнения выделялся и определял границу расчетной области около тела. Расчет проводился в два этапа с разделением на две расчетные зоны, общая граница которых лежала в поперечном сечении, удаленном от вершины на расстояние, равное диаметру переднего торца. В окрестности торца, в зоне с дозвуковым течением, решение получалось установлением по времени в сферической системе координат [5]. На поверхности тела размещалось 207 узлов, которые распределялись со сгущением к излому контура. Во второй расчетной зоне применялась маршевая процедура в цилиндрической системе координат [6]. В направлении от поверхности тела к скачку уплотнения число узлов сетки равнялось 84.

Рассмотрим пример построения носовой части на основе полученного аналитического решения. Для конуса, имеющего удлинение $\lambda = 4$ и обтекаемого при числе Маха набегающего потока $M_\infty = 2$, газодинамические параметры на поверхности принимают следующие значения: $p_c / p_\infty = 1.17$ и $M_c = 1.9$. Осредненное давление на поверхности торца составляет $p_1 / p_\infty = 5.21$.

При данных условиях тело, построенное в рамках безусловной оптимизации [3], имеет объем, который на 35% больше объема конуса. Угол наклона образующей к оси симметрии равен 31.7° в плоскости стыковки с передним торцом. При $\tilde{V} = 1.8$ условия ограничения по габариту автоматически выполняются в решении (2.5) и носовая часть не имеет цилиндрического элемента. Оптимальный диаметр переднего торца составляет 5.4% от диаметра основания. Сопротивление носовой части на 8.8% превышает сопротивление конуса. Увеличение объема до $\tilde{V} = 2.4$ сопровождается увеличением диаметра торца ($r_1/R = 0.184$) и формированием горизонтального участка образующей при $x > 0.536$. При этом волновое сопротивление почти в три раза больше сопротивления конуса.

Для практической реализации полученного аналитического решения и распространения его на более широкий диапазон изменения определяющих параметров целесообразно оставить один геометрический параметр свободным и определять его значение по результатам численной оптимизации. В качестве такого параметра выбрана производная радиуса по продольной координате в месте стыковки образующей с передним торцом r'_1 . Изменяя r'_1 , можно решить задачу на экстремум функции одного переменного и найти носовую часть с минимальным волновым сопротивлением. Для рассмотренных выше примеров дополнительное варьирование производной r'_1 позволило уменьшить волновое сопротивление примерно на 0.3% относительно решения с производной, вычисленной в соответствии с выражением (2.1).

Результаты оптимизационных исследований сопоставлены с данными, полученными прямой численной оптимизацией при большом числе варьируемых параметров [1]. Рассмотрены следующие пары определяющих параметров:

$$M_\infty = 2, \lambda = 2; M_\infty = 2, \lambda = 4; M_\infty = 4, \lambda = 2; M_\infty = 4, \lambda = 4$$

Максимальное рассмотренное значение объема достигало $\tilde{V} = 2.85$, что составляет 95% от объема носовой части в виде цилиндра.

Следует заметить, что при отсутствии ограничения по объему в оптимизационных исследованиях, выполненных численно [1] и в рамках локальной линеаризации, получены носовые части разного объема. При $M_\infty = 4$ меньшие значения объема соответствуют те-

лам, построенным численно, и сравнение проведено с аналитическим решением, полученным при незначительно большем объеме. Например, при $\lambda = 4$ в численном и аналитическом исследованиях построены тела с объемами $\tilde{V} = 1.28$ и 1.31 соответственно.

Сопоставление образующих носовых частей представлено в верхней части фигуры при $M_\infty = 2, \lambda = 2$ и в нижней части при $M_\infty = 4, \lambda = 4$ для разных значений \tilde{V} . Носовые части, построенные аналитически, показаны сплошными, а результаты численной оптимизации [1] — штриховыми линиями. Увеличение объема сопровождается увеличением диаметра переднего торца. Замыкающий цилиндрический участок появляется при $\tilde{V} \sim 1.8$. Предельное решение — цилиндр. Наилучшее согласование аналитических и численных результатов отмечено при $M_\infty = 2$. При $M_\infty = 4$ основное различие проявляется в определении продольной координаты сечения, в котором образующая выходит на габаритный радиус. Радиус переднего торца вычисляется аналитически с достаточно высокой точностью во всем рассмотренном диапазоне изменения определяющих условий.

Построенные на основе аналитического решения носовые части незначительно уступают оптимальным телам по значениям волнового сопротивления. При $M_\infty = 2$ максимальное отличие достигает 3.3%, а при $M_\infty = 4$ не превышает 2%. На основе проведенного анализа результатов исследования можно заключить, что найденное аналитическое решение позволяет строить близкие к оптимальным носовые части с заданными габаритами и объемом.

Автор благодарит А.Н. Крайко и К.С. Пьянкова, предоставивших вычислительную программу для расчета обтекания переднего торца тела вращения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-01-00703).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефремов Н.Л., Крайко А.Н., Пьянков К.С., Таковицкий С.А. Построение в рамках уравнений Эйлера головной части минимального сопротивления при заданных габаритах и объеме // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 1017–1030.
2. Аэромеханика сверхзвукового обтекания тел вращения степенной формы / Под ред. Г.Л. Гродзовского. М.: Машиностр. 1975. 183 с.
3. Таковицкий С.А. Аналитическое решение в задаче построения осесимметричных носовых частей минимального волнового сопротивления // Изв. РАН. МЖТ. 2006. № 2. С. 157–162.
4. Журавский А.М. Справочник по эллиптическим функциям. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1941. 235 с.
5. Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Пьянков К.С., Тилляева Н.И. Осесимметричные головные части заданного удлинения, оптимальные или близкие к оптимальным по волновому сопротивлению // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 795–828.
6. Таковицкий С.А. Метод расчета сверхзвукового обтекания летательных аппаратов с использованием многозонных расчетных сеток // Тр. ЦАГИ. 1997. Вып. 2590. С. 24–32.

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, Жуковский

Поступила в редакцию
25.1.2018 г.

e-mail: c.a.t@tsagi.ru