**1. Математическая модель решения прямой задачи движения снаряда в воздушном пространстве**

Рассмотрим движение артиллерийского неуправляемого снаряда в воздушном пространстве по баллистической траектории. Будем считать, что снаряд идеально стабилизирован, т.е. направление оси снаряда совпадает с направлением вектора скорости центра масс. Тогда уравнения пространственного движения снаряда можно заменить на уравнения движения центра масс снаряда.

В качестве базового варианта метеоусловий рассматривается нормальная артиллерийская атмосфера, ветер и осадки отсутствуют. Дополнительно в модели можно учесть реальные параметры атмосферы, полученные в результате метеоизмерений.

В базовой модели поверхность Земли считается плоскостью, рельеф отсутствует. Дополнительно можно учесть кривизну поверхности Земли, считая ее шаром, а также суточное вращение Земли. Способ учета рельефа местности представлен в Приложении 1.

1.1. Основная система дифференциальных уравнений и начальных условий

Траектория движения снаряда строится в стартовой системе координат , связанной с точкой расположения орудия и ориентированной по направлению стрельбы (рисунок 1.1).

, (1.1)

, (1.2)

, (1.3)

где  – дальность в плоскости стрельбы;  – высота полета снаряда;  – боковое отклонение;  – угол наклона траектории;  – угол пути;  – скорость центра масс снаряда;  – путевая скорость снаряда, приведенная к поверхности Земли;  – коэффициент учета формы поверхности Земли (в случае плоской поверхности ).



**Рис. 1.1.** Ориентации стартовой  и траекторной    
систем координат

Параметры движения снаряда определяются в траекторной системе координат , связанной с центром масс снаряда и ориентированной по вектору скорости (см. рисунок 1.1). Уравнение скорости снаряда имеет вид

, (1.4)

угла наклона траектории:

, (1.5)

угла пути:

. (1.6)

Здесь  – коэффициенты проекций аэродинамической силы на оси траекторной системы координат ; *q* – скоростной напор воздуха;  – площадь миделева сечения снаряда; *d* – калибр снаряда; *m* – масса снаряда;  – коэффициент деривации; ,  – производные дополнительных углов наклона траектории и пути, связанные с кривизной поверхности и вращением Земли (см. пункт 1.3).

По способу стабилизации снаряда в полете различают снаряды нарезных орудий с гироскопической стабилизацией за счет быстрого вращения и снаряды гладкоствольных орудий с аэродинамической стабилизацией за счет оперения.

Для учета эффекта деривации быстро вращающихся снарядов необходимо определять изменение скорости вращения при движении снаряда по траектории. Уравнение аксиальной угловой скорости снаряда имеет вид

, (1.7)

где  – коэффициент аксиального аэродинамического момента; – длина снаряда;  – аксиальный момент инерции снаряда.

Для снаряда с аэродинамической стабилизацией вследствие относительно малой скорости вращения эффектом деривации можно пренебречь, поэтому уравнение (1.7) можно не рассматривать, либо задать нулевое начальное значение угловой скорости.

Коэффициенты проекций силы аэродинамического сопротивления в уравнениях (1.4)–(1.6) определяются следующим образом:

,

, (1.8)

,

где  – аппроксимация зависимости коэффициента лобового сопротивления снаряда от числа Маха, задается на основе эталонных эмпирических зависимостей или индивидуальных аэродинамических характеристик снаряда (см. пункт 1.1); , ,  – отклонения коэффициентов составляющих аэродинамической силы, вызываемые ветром (см. пункт 1.2).

Соотношение для вычисления коэффициента деривации, используемого в уравнении (1.6), имеет вид:

, (1.9)

где  – коэффициент согласования бокового отклонения снаряда;  – деривационная функция.

Деривационная функция задается соотношением

, (1.10)

где *h* – размер плеча момента аэродинамической силы;  – эмпирическая функция сопротивления.

Размер плеча момента аэродинамической силы для снарядов классической формы приближенно определяется по формуле Гобара [7]

, (1.11)

где  – расстояние от основания головной части до центра масс;  – длина головной части (рисунок 1.2).

*ЦМ*

**

**

**

Рисунок 1.2 – Геометрические характеристики снаряда

Значения функции  представляются в виде аппроксимации

, (1.12)

где  – коэффициенты аппроксимации, представленные в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Коэффициенты аппроксимации функции 

| Диапазон чисел Маха |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *M* < 0,6 | 0,206 | 0 | 0 |
| 0,6 ≤ *M* < 0,8 | 0,173903 | 0,106376 | -0,086023 |
| 0,8 ≤ *M* < 1,1 | 0,371089 | -0,307251 | 0,126190 |
| 1,1 ≤ *M* < 1,5 | 0,085860 | 0,084315 | 0,000399 |
| 1,5 ≤ *M* < 2,9 | 0,033077 | 0,139076 | -0,013524 |
| 2,9 ≤ *M* < 4,9 | 0,139043 | 0,084848 | -0,007699 |
| *M* ≥ 4,9 | 0,370 | 0 | 0 |

Таким образом, система уравнений движения снаряда включает уравнения (1.1)–(1.7). Фазовыми переменными являются функции: , , , , , , , зависящие от времени .

Начальные условия в момент вылета снаряда из канала ствола орудия :

,

, (1.13)

где  – начальные координаты центра масс снаряда;  – начальная скорость снаряда при вылете из канала ствола орудия;  – угол стрельбы, равен углу возвышения орудия;  – начальное значение угловой скорости снаряда. Значение  для снаряда нарезных орудий определяется по формуле , где *n* – длина шага нарезов ствола, выраженная в калибрах.

1.2. Дополнительные соотношения, влияющие на точность решения задачи

Рассмотрим основные факторы, влияющие на точность расчета траектории движения снаряда.

1.2.1. Способ задания аэродинамических коэффициентов снаряда

1.2.1.1. На основе эталонных эмпирических зависимостей (законы сопротивления воздуха 1943 г. и 1958 г.)

В данном случае зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа Маха в уравнениях (1.8) задается следующим образом:

, (1.14)

где  – коэффициент аэродинамической формы снаряда;  – эталонный коэффициент сопротивления (выбирается в соответствии с аппроксимацией закона 1943 г.; закона 1958 г.).

Аппроксимационные зависимости для эталонных коэффициентов лобового сопротивления по законам 1943 г. и 1958 г. имеют следующий вид [16]:

, (1.15)

где  – коэффициенты аппроксимации, представленные в таблицах 1.2, 1.3.

Таблица 1.2 – Коэффициенты аппроксимации закона сопротивления 1943 г.

| Диапазон чисел Маха |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *M* < 0,73357 | 0,157 | 0 | 0 | 0 |
| 0,73357 ≤ *M* < 0,90962 | -3,871879 | 15,734575 | -20,511918 | 8,928144 |
| 0,90962 ≤ *M* < 0,997650 | 122,720358 | -390,742644 | 413,613130 | -145,266282 |
| 0,997650 ≤ *M* < 1,173710 | -19,848947 | 52,409513 | -45,299813 | 13,064840 |
| 1,173710 ≤ *M* < 1,584510 | -0,639686 | 2,250136 | -1,600055 | 0,363206 |
| 1,584510 ≤ *M* < 2,640840 | 0,643812 | -0,278701 | 0,069619 | -0,006031 |
| 2,640840 ≤ *M* < 3,726652 | 0,621061 | -0,242875 | 0,053243 | -0,003765 |
| *M* ≥ 3,726652 | 0,260 | 0 | 0 | 0 |

Таблица 1.3 – Коэффициенты аппроксимации закона сопротивления 1958 г.

| Диапазон чисел Маха |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *M* < 0,38146 | 0,305 | 0 | 0 | 0 |
| 0,38146 ≤ *M* < 0,8509462 | 0,241773 | 0,404793 | -0,871035 | 0,636232 |
| 0,85094 ≤ *M* < 0,93897 | -44,281130 | 155,020221 | -179,930308 | 69,792027 |
| 0,93897 ≤ *M* < 1,02699 | 87,736894 | -269,666388 | 275,553932 | -93,079491 |
| 1,02699 ≤ *M* < 1,17371 | -11,668569 | 31,980377 | -27,773459 | 8,048464 |
| 1,17371 ≤ *M* < 1,34976 | -2,075770 | 5,498989 | -3,518908 | 0,673445 |
| 1,34976 ≤ *M* < 2,17136 | 1,408618 | -1,106667 | 0,477013 | -0,078219 |
| 2,17136 ≤ *M* < 3,52112 | 0,862325 | -0,254494 | 0,032883 | -0,000970 |
| 3,52112 ≤ *M* < 5,22300 | 0,613043 | -0,079364 | -0,004962 | 0,001346 |
| *M* ≥ 5,22300 | 0,256 | 0 | 0 | 0 |

1.2.1.2. Индивидуальные параметрические зависимости

В силу того, что форма снаряда может отличаться от снарядов классической формы, зависимости коэффициента лобового сопротивления снаряда могут существенно отличаться по виду от зависимостей для законов сопротивления 1943 г. и 1958 г. Поэтому в некоторых случаях имеет смысл использовать индивидуальные зависимости для коэффициента лобового сопротивления.

Аппроксимационные зависимости для коэффициента лобового сопротивления имеют вид (1.15). Коэффициенты аппроксимации  определяются на основе натурного или численного эксперимента по решению задачи аэродинамики обтекания снаряда заданной формы [83].

1.2.2 Учет метеорологических условий атмосферы

В математической модели существует возможность учесть распределение параметров воздуха (давления и температуры, скорости и направления ветра) по высоте в виде стандартных зависимостей [6] или реальных метеоданных.

1.2.2.1. Распределение параметров атмосферы по высоте (нормальная артиллерийская атмосфера)

В качестве стандартный параметров атмосферы, когда нет реальных данных метеоизмерений, используются зависимости для нормальной артиллерийской атмосферы (НАА).

В основу нормальной артиллерийской атмосферы Д.А. Вентцелем положен характер изменения виртуальной температуры в зависимости от высоты. Изменение виртуальной температуры воздуха в НАА описывается следующими зависимостями:

 (1.16)

Зависимость виртуальной температуры воздуха от высоты определяется выражением

, (1.17)

где  – отклонение виртуальной температуры воздуха от нормальной наземной виртуальной температуры воздуха;  – нормальная наземная виртуальная температура воздуха.

Для расчета безразмерной функции давления воздуха  решается дифференциальное уравнение

, (1.18)

где  – удельная газовая постоянная воздуха.

Начальное значение функции давления воздуха

, (1.19)

где  – атмосферное давление на поверхности Земли;  – нормальное наземное давление воздуха.

Выражение для скоростного напора воздуха в уравнениях (1.4)–(1.7) имеет вид:

, (1.20)

где  – нормальная наземная плотность воздуха;  – нормальная наземная скорость звука в воздухе.

Число Маха определяется по формуле:

, (1.21)

где *a* – скорость звука.

Скорость звука в воздухе равна

, (1.22)

где  – нормальная наземная скорость звука в воздухе.

1.2.2.2. Распределение параметров атмосферы по высоте (реальные метеоданные)

По данным метеоизмерений задаются функция зависимости виртуальной температуры воздуха от высоты  и функция давления воздуха , где  – атмосферное давление на поверхности Земли;  – зависимость давления воздуха от высоты.

Реальные данные метеоизмерений задаются с помощью кусочно-линейной интерполяции

,

, 

где ,  – значения температуры и давления на высотах измерений .

Выражение для скоростного напора воздуха в уравнениях (1.4)–(1.7) имеет вид (1.20). Число Маха определяется по формуле (1.21), скорость звука в воздухе – по формуле (1.22).

1.2.2.3. Учет влияния ветра

В случае учета влияния ветра на полет снаряда число Маха определяется по формуле:

, (1.23)

где  – отклонение модуля скорости снаряда ветром.

Составляющие скорости ветра по осям траекторной системы координат определяются формулами:

,

, (1.24)

,

где  – распределение скорости ветра по высоте;  – распределение дирекционных углов ветра по высоте;  – вертикальные потоки воздуха.

Отклонения коэффициентов составляющих аэродинамической силы, вызываемых ветром, в формулах (1.8) вычисляются следующим образом:

,

, (1.25)

,

где ,  – составляющие угла сноса ветром.

Синусы данных углов определяются выражениями:

, , (1.26)

где  – воздушная скорость снаряда.

Воздушная скорость снаряда равна

. (1.27)

Соотношение для отклонения модуля скорости снаряда ветром в формуле (1.23) имеет вид:

.

В качестве распределения параметров ветра по высоте ,  могут приниматься реальные данные метеоизмерений, либо стандартные зависимости, описывающие характерные особенности распределения параметров воздушных потоков в атмосфере.

В модели предусмотрены следующие варианты задания скорости и направления ветра:

- средние значения вблизи поверхности Земли:

, ,

где ,  – средние значения скорости и направления ветра на стандартной высоте измерений м.

- распределение скорости ветра по степенному закону:

, ,

где *n* – параметр закона распределения , зависящий от типа местности [264].

- реальные данные метеоизмерений, интерполированные с помощью кусочно-линейной интерполяции

,

, 

где ,  – значения скорости и направления ветра на высотах измерений .

1.2.3. Учет геофизических условий

При учете геофизических условий в математической модели рассматриваются следующие варианты:

- поверхность Земли считается плоскостью, кривизна и вращение не учитывается;

- поверхность Земли, считается шаром, вращение не учитывается;

- поверхность Земли, считается шаром, учитывается суточное вращение Земли.

1.2.3.1. Плоская форма поверхности Земли

Считаем, что Земля плоская, суточное вращение не учитывается. Тогда коэффициент учета формы поверхности Земли в выражении для путевой скорости, используемой в уравнениях (1.1), (1.3), , поправки в уравнениях (1.4)–(1.6) равны нулю:

, .

Ускорение силы тяжести определяется выражением:

, (1.28)

где  – нормальное ускорение силы тяжести на среднем уровне моря;  – градиент изменения силы тяжести с высотой.

1.2.3.2 Шаровидная форма поверхности Земли

В данном случае форма Земли шаровидная, суточное вращение Земли не учитывается.

Ускорение силы тяжести определяется выражением:

, (1.29)

где  – дополнительное ускорение силы тяжести.

Дополнительное ускорение силы тяжести вычисляется по формуле:

, (1.30)

где  – географическая широта точки, принимаемой за точку орудия; в северном полушарии положительна, в южном – отрицательна;  – условная редукция силы тяжести для приведения к реальному значению.

Коэффициент учета формы поверхности Земли в выражении для путевой скорости, используемой в уравнениях (1.1), (1.3), вычисляется по формуле:

, (1.31)

где  – радиус Земли при аппроксимации ее шаром.

Поправки, учитывающие геофизические параметры, определяются следующим образом [7]. Производная дополнительного угла наклона траектории и угла пути в уравнениях (1.5)–(1.6) определяется выражениями:

, .

1.2.3.3 Шаровидная форма поверхности Земли, учет суточного вращения

В данном случае форма Земли шаровидная, учитывается суточное вращение Земли.

Ускорение силы тяжести определяется выражением (1.29). Коэффициент учета формы поверхности Земли  определяется по формуле (1.31).

Поправки, учитывающие геофизические параметры, в уравнениях (1.5)–(1.6) определяются следующим образом [7]:

, (1.32)

, (1.33)

где  – угловая скорость суточного вращения Земли;  – дирекционный угол (азимут) цели.