Группа 19137, семинар 21.04.2020.

Функции от матриц.

Пусть A – матрица размера $n \times n$ над полем P, и пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$ – многочлен от одной переменной над полем P. Тогда можно посчитать значение многочлена $f(x)$ от матрицы A

$$f(A) = a_0E + a_1A + \dots + a_mA^m.$$

Пример 1. Пусть матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

и пусть $f(x) = 1 + 3x - x^2$. Тогда

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 16 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислять значение многочлена от матрицы, используя определение прямую подстановку, достаточно сложно, т. к. нужно возводить матрицу в степень (возможно, большую степень). Оказывается, что можно находить значение многочлена от матрицы, используя Жорданову форму. Для того, чтобы сказать, как это делать, введем обозначение.

Обозначение 1. Пусть A – матрица размера $n \times n$ над полем P, B – матрица размера $m \times m$ над полем P. Символом $A \oplus B$ обозначается матрица следующего вида

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right).$$

Следующая теорема говорит о том, как вычислять значение многочлена от матрицы, используя Жорданову форму.

Теорема 1. Пусть A – матрица над полем P, и пусть $A = TJT^{-1}$, где J – Жорданова форма матрицы A, причем

$$J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_k,$$

где J_i – Жорданова клетка для $i = 1, 2, \dots, k$. Пусть $f(x)$ – многочлен от одной переменной x над полем P. Тогда

1. $f(A) = Tf(J)T^{-1}$;
2. $f(J) = f(J_1) \oplus f(J_2) \oplus \dots \oplus f(J_k)$;
3. Если J_i – Жорданова клетка степени r, т. е.

$$J_i = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

то

$$f(J_i) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \frac{f''(\alpha)}{2!} & \dots & \frac{f^{(r-1)}(\alpha)}{(r-1)!} \\ 0 & f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \dots & \frac{f^{(m-2)}(\alpha)}{(m-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & f(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Используя теорему 1, можно вычислять значение многочлена $f(x)$ от матрицы A следующим образом.

1. Найти Жорданову форму матрицы A и матрицу T, такую что $A = TJT^{-1}$, где J – Жорданова форма. Тогда
$$J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_k,$$
где J_i – Жорданова клетка для $i = 1, 2, \dots, k$.

2. Используя третий пункт теоремы 1, найти $f(J_i)$ для $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда исз второго пунка теоремы 1 справедливо равенство
$$f(J) = f(J_1) \oplus f(J_2) \oplus \dots \oplus f(J_k).$$

3. Используя первый пункт теоремы 1, найти $f(A) = Tf(J)T^{-1}$.

Пример 2. Используя Жорданову форму, найдем значение многочлена $f(x)$ из примера 1 от матрицы A из примера 1, т. е.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$
и $f(x) = 1 + 3x - x^2$.

Найдем Жорданову форму матрицы A (вы это уже умеете делать, поэтому я запишу лишь ответ)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$
т. е. Жорданова форма J матрицы A имеет вид $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, а матрица T имеет вид $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Используя третий пункт теоремы 1, найдем $f(J)$
$$f(J) = \begin{pmatrix} f(2) & \frac{f'(2)}{1!} \\ 0 & f(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Используя первый пункт теоремы 1, найдем $f(A)$
$$\begin{aligned} f(A) &= Tf(J)T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Замечание 1. Обратите внимание на то, что ответ совпал с ответом из примера 1.

Аналогично значению многочлена от матрицы можно определить значение (практически любой) функции от матрицы над полем комплексных чисед.
Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – некоторая функция, где $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел. Пусть A – матрица размера $n \times n$ над полем комплексных чисел, причем характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ матрицы A имеет вид
$$\chi(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{n_1} (\lambda - \alpha_2)^{n_2} \dots (\lambda - \alpha_s)^{n_s}$$

для комплексных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$. Допустим, что существуют все производные $f^{(i)}(\alpha_j)$ для $j = 1, 2, \dots, s$, $i = 1, 2, \dots, n_j - 1$. Тогда можно определить значение $f(A)$ функции $f(x)$ от матрицы A. Это делается следующим образом.

Определение 2. Пусть $A = TJT^{-1}$, где J – Жорданова форма матрицы A, причем
$$J = J_1 \oplus J_2 \oplus \dots \oplus J_k,$$
где J_i – Жорданова клетка для $i = 1, 2, \dots, k$. Определим $f(A)$ следующими правилами

1. $f(A) = Tf(J)T^{-1}$;
2. $f(J) = f(J_1) \oplus f(J_2) \oplus \dots \oplus f(J_k)$;
3. Если J_i – Жорданова клетка степени r, т. е.
$$J_i = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$
то
$$f(J_i) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \frac{f''(\alpha)}{2!} & \dots & \frac{f^{(r-1)}(\alpha)}{(r-1)!} \\ 0 & f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} & \dots & \frac{f^{(m-2)}(\alpha)}{(m-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & f(\alpha) & \frac{f'(\alpha)}{1!} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & f(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Замечание 2. В определении функции от матрицы участвуют производные функции. Производная произвольной функции определена лишь в полях $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ (определение производной через предел). Поэтому в качестве основного поля можно использовать только одно из этих полей. Мы используем поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, т. к. не всякая матрица с коэффициентами из поля $\mathbb{R}$ приводима к Жордановой форме (т. к. матрицы с коэффициентами из $\mathbb{R}$ могут иметь комплексные характеристические корни).

В случае многочленов от матрицы можно использовать любое поле.

Пример 3. Найдем значение функции $f(x) = 2^x$ от матрицы A из примера 1, т. е.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Характеристический многочлен матрицы A имеет вид $\chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2$, следовательно матрица A имеет одно собственное значение $\lambda = 2$ кратности 2. Функция $f(x) = 2^x$ дифференцируема бесконечное число раз в точке $x = 2$, следовательно можно говорить о $f(A)$.

Как мы уже поняли из примера 2,
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$$
т. е. Жорданова форма J матрицы A имеет вид $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, а матрица T имеет вид $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Используя третий пункт определения 2, найдем $f(J)$
$$f(J) = \begin{pmatrix} f(2) & \frac{f'(2)}{1!} \\ 0 & f(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \cdot \ln(2) \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Используя первый пункт определения 2, найдем $f(A)$

$$\begin{aligned} f(A) &= Tf(J)T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4\cdot\ln(2) \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4\cdot\ln(2) \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 8 & 8\cdot\ln(2)+4 \\ 4 & 4\cdot\ln(2)+4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-8\cdot\ln(2) & 16\cdot\ln(2) \\ -4\cdot\ln(2) & 4+8\cdot\ln(2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Замечение 3. Функции от матриц сохраняют многие свойства этих же функций от комплексного аргумента. Например, если A – матрица, и $f(x)=\sqrt{x}$, то матрица $f(A)=\sqrt{A}$ удовлетворяет условию $(\sqrt{A})^2=A$.

Значение функции $f(x)$ от матрицы A можно находить, используя многочлены.

Теорема 2. Пусть $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ – некоторая функция, где $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел. Пусть A – матрица размера $n\times n$ над полем комплексных чисел, причем характеристический многочлен $\chi(\lambda)$ матрицы A имеет вид

$$\chi(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)^{n_1}(\lambda-\alpha_2)^{n_2}\dots(\lambda-\alpha_s)^{n_s}$$

для комплексных чисел α_1, α_2, …, α_s. Допустим, что существуют все производные $f^{(i)}(\alpha_j)$ для $j=1,2,\dots,s$, $i=1,2,\dots,n_j-1$. Тогда

1. существует многочлен $p(x)$, такой что $p^{(i)}(\alpha_j)=f^{(i)}(\alpha_j)$ для $j=1,2,\dots,s$, $i=1,2,\dots,n_j-1$.
2. $f(A)=p(A)$.

Определение 3. Многочлен $p(x)$ из теоремы 2 называется многочленом Лагранжа-Сильвестра.

Как искать многочлен Лагранжа-Сильвестра $p(x)$ для функции $f(x)$ и матрицы A.
1. Записать многочлен $p(x)$ в виде

$$\begin{aligned} p(x)=\sum_{j=1}^{s}[&(\beta_{j,0}+\beta_{j,1}(x-\alpha_j)+\beta_{j,2}(x-\alpha_j)^2+\dots+\beta_{j,n_j-1}(x-\alpha_j)^{n_j-1}) \\ &(x-\alpha_1)^{n_1}\dots(x-\alpha_{j-1})^{n_{j-1}}(x-\alpha_{j+1})^{n_{j+1}}(x-\alpha_s)^{n_s}], \end{aligned} \tag{1}$$

где $\beta_{a,b}$ для $a=1,2,\dots,s$, $b=0,1,\dots,n_{j-1}$ – неопределенные коэффициенты.
2. Из системы линейных уравнений $p^{(i)}(\alpha_j)=f^{(i)}(\alpha_j)$ для $j=1,2,\dots,s$, $i=1,2,\dots,n_j-1$ найти коэффициенты $\beta_{a,b}$.

Пример 4. Найдем значение функции $f(x)=2^x$ от матрицы A из примера 3, т. е.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

используя многочлен Лагранжа-Сильвестра. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид $\chi(\lambda)=(\lambda-2)^2$, следовательно матрица A имеет одно собственное значение $\lambda=2$ кратности 2 (т. е. в алгоритме выше $s=1$, $n_1=2$, $\alpha_1=2$).

Запишем многочлен Лагранжа-Сильвестра $p(x)$ с неопределенными коэффициентами как в формуле (1)

$$p(x)=\beta_{1,0}+\beta_{1,1}(x-2).$$

Решим систему

$$\begin{cases} p(2) = f(2), \\ p'(2) = f'(2). \end{cases}$$

Эту систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} \beta_{1,0} = 4, \\ \beta_{1,1} = 4 \cdot \ln(2), \end{cases}$$

следовательно

$$p(x) = 4 + (4 \cdot \ln(2))(x - 2).$$

Используя равенство $f(A) = p(A)$ из второго пункта теоремы 2, найдем значение $f(A)$

$$\begin{aligned} f(A) &= p(A) = 4E + (4 \cdot \ln(2))(A - 2E) \\ &= 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (4 \cdot \ln(2))\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 8 \cdot \ln(2) & 16 \cdot \ln(2) \\ -4 \cdot \ln(2) & 4 + 8 \cdot \ln(2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Замечание 4. Обратите внимание на то, что ответ совпал с ответом из примера 3.

Больше подробностей по теории: В. Г. Бардаков, Лекции по алгебре Ю. И. Мерзлякова, стр. 245-250.

Задание: И. В. Проскуряков, Сборник задач по линейной алгебре
1162
1167
1169