Семинар: Асимптотика, разложение функции в ряд Тейлора

Абдуллин Рустам Фаритович

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ

30 ноября 2020 г.

1. Асимптотика

2. Формула Тейлора

Асимптотическое равенство

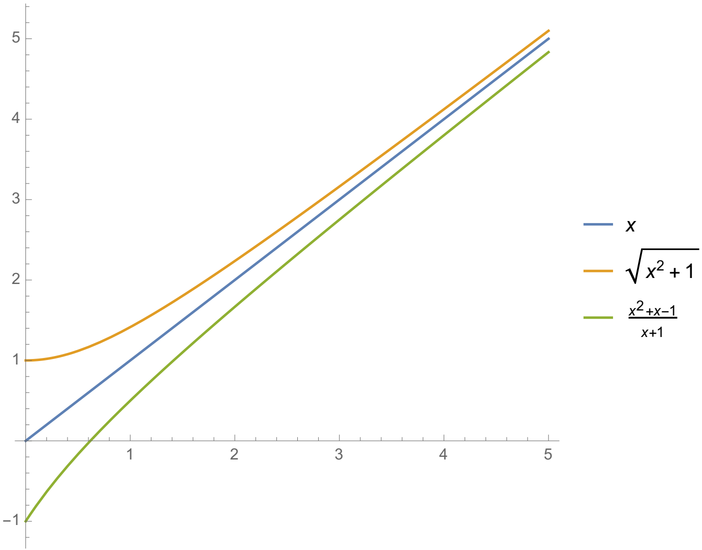
Определение 1

Функции f и g называются асимптотически равными $f \sim g$ на бесконечности, если выполнено условие $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Определение 2

Функции f и g называются асимптотически равными в точке x_0, если выполнено условие $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Out[33]=



Асимптотическое равенство

Определение 3

Функция f есть $O(g)$ ("O"-большое) в точке x_0 (на бесконечности), если выполнено условие $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C = const$.

Определение 4

Функция f есть $o(g)$ ("o"-малое) в точке x_0 (на бесконечности), если выполнено условие $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Примеры

Вычислительная сложность – зависимость объёма работы, которая выполняется некоторым алгоритмом, от размера входных данных. Например, сортировка числового массива. Наивный алгоритм имеет сложность $O(n^2)$, быстрые алгоритмы, такие как *MergeSort*, *QuickSort*, $O(n \log n)$.

- Степенная сложность $T = O(n^m)$ m-го порядка
- Экспоненциальная сложность $T = O(a^n)$ $(a > 1)$
- Полный перебор $T = O(n!) \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Расчет вариантов в шахматных движках имеет экспоненциальную сложность.

Примеры

$sin(x) = O(x)$ при $x \to 0$
$x = o(1)$ при $x \to 0$
$x = o(x^2)$ при $x \to +\infty$
$\lg x = o(x)$ при $x \to +\infty$
$x^n = o(e^x)$ при $x \to +\infty$

Многочленом Тейлора функции $f(x)$, дифференцируемой k раз в точке x_0, называют

$$T(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \\ + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Легко проверить, что $T^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$. Можно доказать, что функция $r(x) = |f(x) - T(x)| = o((x - x_0)^k)$. Кратко, это записывается как

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^k)$$

формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Аппроксимация функций с помощью многочленов

Посчитать следующие значения:

$$\sqrt{3} = ?$$

$$\sin(1) = ?$$

$$e^{\sqrt{2}} = ?$$

Аппроксимация функций с помощью многочленов

Посчитать следующие значения:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3} &= 2 + \frac{x-4}{4} - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{5(x-4)^4}{16384} \\
\sin(1) &= x - \frac{x^3}{6} \\
e^{\sqrt{2}} &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}
\end{aligned}
$$

Аппроксимация функций с помощью многочленов

Посчитать следующие значения:

$$\begin{array}{lclcl} \sqrt{3} & = & 1.732050808 & \approx & 1.73212 \\ \sin(1) & = & 0.8414709848 & \approx & 0.833333 \\ e^{\sqrt{2}} & = & 4.113250379 & \approx & 4.11054 \end{array}$$