Понятие множества. Понятие функции. Последовательности.

Абдуллин Рустам Фаритович

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, НГУ

30 ноября 2020 г.

Предпосылки

- Наивная теория множеств – Георг Кантор
    1. парадокс Кантора
    2. парадокс Рассела
- Аксиоматические теории множеств (Цермело, Френкель, Борель, Лебег)

Основные понятия

- Множество – набор (совокупность) каких-либо объектов, которые называются элементами данного множества. Принадлежность объекта к множеству обозначается $x \in A$ (x – элемент множества A).
- Множество, которое не имеет элементов, называется пустым $\varnothing$.
- Множество A – подмножество множества B ($A \subseteq B$), если для любого элемента $x \in A$ верно $x \in B$.
- A – строгое подмножество B ($A \subset B$), если $A \subseteq B$ и существует $y \in B$, такой что $y \notin A$.

Основные операции над множествами

- **объединение**, обозначается как $A \cup B$, содержит все элементы из A и B
- **пересечение**, обозначается как $A \cap B$, содержит элементы, содержащиеся и в A, и в B
- **разность**, обозначается как $A \setminus B$, содержит все элементы из A, которые не входят в B

Теорема 1

Если верно $A \subseteq M$ и $B \subseteq M$, то $(M \setminus A) \cup (M \setminus B) = M \setminus (A \cap B)$ и $(M \setminus A) \cap (M \setminus B) = M \setminus (A \cup B)$

Основные определения

см. *Лекции + рукопись*

- Понятие функции
- Область определения (область существования) функции
- Область значений функции
- Образ функции (*в чем разница с областью значений*)

Последовательность

- *Последовательность* – пронумерованный набор объектов (допускаются повторения)
- **Последовательность** – всякое отображение $f : \mathbb{N} \to X$
- **Числовая последовательность** – последовательность, где $X = \mathbb{R}$ $(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})$

Предел последовательности

Определение 1

Число a – является пределом числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n > N$ верно $|x_n - a| < \varepsilon$.

Определение 2

Если для элементов последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ верно $a_n \leq x_n \leq b_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, то $\lim_{n\to\infty} x_n = c$

Примеры

- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^m+1}{x^n+1} = 0$, если $m < n$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Определения

Предел функции в точке

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, такое что для всех x из области определения функции и удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Предел слева

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A'$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, такое что для всех x из области определения функции и удовлетворяющих условию $0 < a - x < \delta$ (или тоже самое $(a - \delta < x < a)$) выполняется $|f(x) - A'| < \varepsilon$.

Предел справа

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A''$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)$, такое что для всех x из области определения функции и удовлетворяющих условию $0 < x - a < \delta$ (или тоже самое $(a < x < a + \delta)$) выполняется $|f(x) - A''| < \varepsilon$.

Непрерывность

Предел функции существует, тогда и только тогда, когда $A' = A''$
Виды разрыва в точке

- **Устранимый**, если $A' = A''$
- **Разрыв первого рода**, если $A' \neq A''$ и $A' - A'' < \infty$
- **Разрыв второго рода**, если $A' \neq A''$ и хотя бы один из пределов равен ∞

Примеры

- Если функция непрерывна в точке, то предел функции к этой точке равен значению функции в этой точке
- $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ в точке $x = 1$
- $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$
- замечательные пределы:
  1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
  2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

Homework

- *Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* № 1, 2, 3, 4, 6, 7, 151, 152, 160, 166, 168, 175
- Доказать теорему 1