

Outline

Повторение

Кривые
второго
порядка на
плоскости

Общий вид
уравнения

Классификация
кривых второго
порядка

Приведение к
каноническому
виду

Параметрическое
задание кривых
второго порядка

Homework

Семинар: кривые второго порядка

Абдуллин Рустам Фаритович

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ, НГУ

3 ноября 2020 г.

Outline

Повторение

Кривые второго порядка на плоскости

Общий вид
уравнения

Классификация
кривых второго
порядка

Приведение к
каноническому
виду

Параметрическое
задание кривых
второго порядка

Homework

1 Повторение

2 Кривые второго порядка на плоскости

Общий вид уравнения

Классификация кривых второго порядка

Приведение к каноническому виду

Параметрическое задание кривых второго порядка

3 Homework

Тригонометрическая запись комплексного числа

Outline

Повторение

Кривые
второго
порядка на
плоскости

Общий вид
уравнения

Классификация
кривых второго
порядка

Приведение к
каноническому
виду

Параметрическое
задание кривых
второго порядка

Homework

$$z = a + bi$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \arg(z)$$

Уравнения для нахождения аргумента:

$$\begin{cases} \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\sin \varphi = \sin(\pi - \varphi),$$

$$\cos \varphi = \cos(-\varphi),$$

$$\tan \varphi = \tan(\pi + \varphi).$$

Тангенс угла

Outline

Повторение

Кривые
второго
порядка на
плоскости

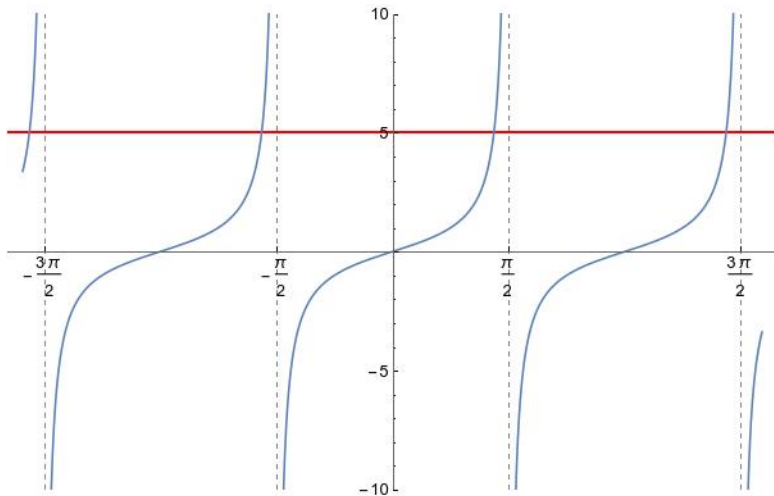
Общий вид
уравнения

Классификация
кривых второго
порядка

Приведение к
каноническому
виду

Параметрическое
задание кривых
второго порядка

Homework



Общий вид уравнения

Outline

Повторение

Кривые
второго
порядка на
плоскости

Общий вид
уравнения

Классификация
кривых второго
порядка

Приведение к
каноническому
виду

Параметрическое
задание кривых
второго порядка

Homework

Кривая второго порядка – это фигура, точки которой удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$

где по крайней мере один из коэффициентов a_{11} , a_{12} , a_{22} не равен нулю.

Характеристическая квадратичная форма кривой второго порядка

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \quad (2)$$

Outline

Повторение

Кривые второго порядка на плоскости

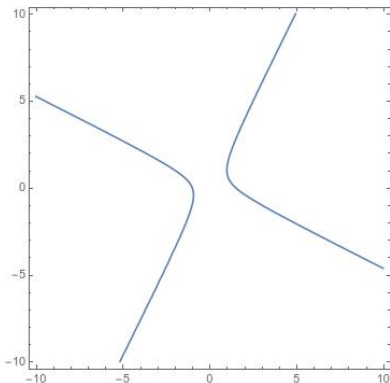
Общий вид уравнения

Классификация кривых второго порядка

Приведение к каноническому виду

Параметрическое задание кривых второго порядка

Homework



$$2x^2 + 3xy - x - 2y^2 + y - 3 = 0$$

WolframAlpha

1

```
ContourPlot[2x^2+3x y-2y^2-x+y-3==0,{x,-10,10},{y,-10,10}]
```

Классификация кривых второго порядка

Outline

Повторение

Кривые
второго
порядка на
плоскости

Общий вид
уравнения

**Классификация
кривых второго
порядка**

Приведение к
каноническому
виду

Параметрическое
задание кривых
второго порядка

Homework

Эллипс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Гипербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Парабола	$y^2 = 2px$
Мнимый эллипс (нет решения)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
Пара пересекающихся прямых	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
Пара параллельных прямых	$x^2 - d^2 = 0$

Outline

Повторение

Кривые
второго
порядка на
плоскости

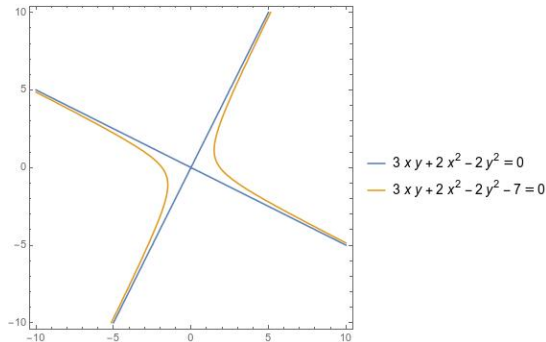
Общий вид
уравнения

Классификация
кривых второго
порядка

Приведение к
каноническому
виду

Параметрическое
задание кривых
второго порядка

Homework



1

```
ContourPlot[{2x^2+3x y-2y^2==0,2x^2+3x y-2y^2-7==0},{x  
, -10,10},{y, -10,10},PlotLegends->"Expressions"]
```


Определение типа кривой

Outline

Повторение

Кривые второго порядка на плоскости

Общий вид
уравнения

Классификация
кривых второго
порядка

Приведение к
каноническому
виду

Параметрическое
задание кривых
второго порядка

Homework

Пусть $a_{11} \neq 0$, тогда получим:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = \\ &= a_{11} \left(x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y \right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \right) y^2, \end{aligned} \quad (3)$$

далее делаем замену координат

$$\begin{cases} x' = x + \frac{a_{12}}{a_{11}}y \\ y' = y \end{cases} \quad F(x', y') = a_{11}x'^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \right) y'^2 \quad (4)$$

Определение типа кривой

Outline

Повторение

Кривые второго порядка на плоскости

Общий вид
уравнения

Классификация
кривых второго
порядка

Приведение к
каноническому
виду

Параметрическое
задание кривых
второго порядка

Homework

Обозначим

$$a = a_{11}, \quad b = a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}} \quad (5)$$

тогда возможны следующие варианты:

- 1 a и b имеют **одинаковый** знак ($\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b)$), тогда кривая имеет эллиптический тип (*эллипс, мнимый эллипс*)
- 2 один из коэффициентов равен нулю, тогда кривая имеет параболический тип
- 3 a и b имеют **разный** знак ($\operatorname{sgn}(a) = -\operatorname{sgn}(b)$), тогда кривая имеет гиперболический тип

Примеры

Outline

Повторение

Кривые второго порядка на плоскости

Общий вид
уравнения

Классификация
кривых второго
порядка

Приведение к
каноническому
виду

Параметрическое
задание кривых
второго порядка

Homework

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - x + y - 3 = 0 \quad (6)$$

$$F(x, y) = 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 2 \left(x + \frac{3}{4}y \right)^2 - \left(2 + \frac{9}{8} \right) y^2 \quad (7)$$

$$= 2x'^2 - \frac{25}{8}y'^2,$$

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{3}{4}y & x &= x' - \frac{3}{4}y' \\ y' &= y & y &= y' \end{aligned} \quad (8)$$

Примеры

Outline

Повторение

Кривые второго порядка на плоскости

Общий вид уравнения

Классификация кривых второго порядка

Приведение к каноническому виду

Параметрическое задание кривых второго порядка

Homework

$$\begin{aligned} 2x'^2 - \frac{25}{8}y'^2 - \left(x' - \frac{3}{4}y'\right) + y' - 3 &= \\ &= 2\left(x' - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}\left(y' - \frac{7}{25}\right)^2 - \frac{576}{200} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

отсюда видно, что заданная кривая, это гипербола. В случае, если $a_{11} = a_{22} = 0$, то сначала можно сделать замену $y = x + y'$

$$xy = 1 \quad \begin{matrix} x = x' \\ y = x' + y' \end{matrix} \implies x'(x' + y') = x'^2 + x'y' = 1$$

$$xy = 1 \quad \begin{matrix} x = x' - y' \\ y = x' + y' \end{matrix} \implies (x' - y')(x' + y') = x'^2 - y'^2 = 1$$

Параметрическое задание кривых второго порядка

Outline

Повторение

Кривые
второго
порядка на
плоскости

Общий вид
уравнения

Классификация
кривых второго
порядка

Приведение к
каноническому
виду

Параметрическое
задание кривых
второго порядка

Homework

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$$
$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \implies \begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t & = \pm a \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ y = b \operatorname{sh} t & = b \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$
$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$$

$$y^2 = 2px \implies \begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$$

Homework

Outline

Повторение

Кривые второго порядка на плоскости

Общий вид
уравнения

Классификация
кривых второго
порядка

Приведение к
каноническому
виду

Параметрическое
задание кривых
второго порядка

Homework

- Гюнтер, Кузьмин. Задачник по ВМ. № 254, 255, 256, 257
- Определите тип кривой на комплексной плоскости, которая задается уравнением:
 - ① $|z - i| = 1$
 - ② $|z - 1| + |z + 1| = 3$
 - ③ $|z - i| - |z + i| = 1$